А. И. Черноуцан

ФИЗИКА

задачи с ответами и решениями

механика
термодинамика
электричество
оптика

1000 задач абитуриенту

УДК 53(075)
ББК 22.3
Ч-49

Черноуцан А. И.

Ч-49 ФИЗИКА. Задачи с ответами и решениями : учебное пособие / А. И. Черноуцан. — 8-е изд. — М. : КДУ, 2011. — 352 с., ил.

ISBN 978-5-98227-769-5

Пособие содержит более полутора тысяч задач по элементарной физике, из них почти 400 задач с решениями, остальные — с указаниями и ответами. Задачи охватывают все темы программы вступительных экзаменов в вузы. Особенностью данного пособия является весьма широкий спектр трудности задач, как решенных, так и предлагаемых для самостоятельного решения: от самых простых, обучающих писать элементарные уравнения и иллюстрирующих основные законы физики, до весьма нетривиальных, соответствующих по уровню предлагаемым на приемных экзаменах в самые сильные вузы физического профиля. Пособие содержит справочное приложение «Основные формулы и законы физики».

Пособие предназначено как для самостоятельной работы школьников и абитуриентов, так и для использования преподавателями на уроках в школах и техникумах и на подготовительных отделениях и курсах.

УДК 53(075)
ББК 22.3

Учебное издание

Алексей Игоревич Черноуцан

ФИЗИКА. Задачи с ответами и решениями

Учебное пособие

Научное редактирование *Леонович А. А.*
Компьютерная верстка, иллюстрации *Билак О. М.*
Художественное оформление обложки *Макух Т. А.*

Подп. в печать 25.10.10. Формат 60x84/16. Бумага газетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,46. Тираж 3000 экз. Заказ № 6456.

ООО «Издательство «КДУ», 119234, г. Москва, а/я 587.
Тел./факс: (495) 939-57-32, 939-44-91. E-mail: kdu@kdu.ru Http://www.kdu.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ОАО «Дом печати — ВЯТКА». 610033, г. Киров, ул. Московская, 122
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36; http://www.gipp.kirov.ru e-mail: pto@gipp.kirov.ru

ISBN 978-5-98227-769-5

Предисловие

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие создавалось автором в течение многих лет работы в предметной комиссии и подготовки абитуриентов. В основу положены задачи вступительных экзаменов в различные вузы, существенно переработанные и систематизированные автором, в том числе и на основе его многолетнего опыта работы в журнале «Квант». Различные части данного пособия неоднократно издавались небольшими тиражами и в течение ряда лет использовались для подготовки абитуриентов. Подбор задач заметно расширен для данного издания, как для того, чтобы включить существенные типы задач и сюжеты, фигурировавшие на приемных экзаменах в последние годы, так и с целью создать цельный детально стуктурированный банк упражнений и задач для изучения курса элементарной физики. Следует отметить, что особенностью данного пособия является весьма широкий спектр трудности задач, как решенных, так и предлагаемых для самостоятельного решения: от самых простых, обучающих писать элементарные уравнения и иллюстрирующих основные законы физики, до весьма нетривиальных, соответствующих по уровню предлагаемым на приемных экзаменах в самые сильные вузы физического профиля.

Структура пособия. Пособие разбито на 13 глав, соответствующих делению курса физики на основные разделы. Каждая глава начинается с разбора нескольких десятков задач по данной теме. Эти задачи подобраны так, чтобы на их примере можно было продемонстрировать как основные методы и подходы к решению задач, так и обсудить различные тонкости, ловушки и типичные ошибки, допускаемые абитуриентами. Далее располагается подборка примерно из ста задач для самостоятельного решения, снабженных указаниями и ответами. Краткие указания даются не ко всем задачам, а только к тем, где многие абитуриенты сталкиваются с трудностями, для преодоления которых иногда достаточно короткой подсказки. Часто в указаниях дается ссылка на какую-нибудь из задач с решением, в которой встречаются аналогичные трудности. Указания и ответы располагаются в конце книги.

Как можно увидеть из оглавления, задачи для самостоятельного решения разбиты на небольшие группы по типам и сюжетам. Внутри каждой группы задачи располагаются в основном по возрастанию трудности. Возле заголовка каждой группы указаны номера решенных задач такого же типа.

Пособие завершается справочным приложением «Основные формулы и законы физики».

Нумерация и ссылки. Решенные задачи и задачи для самостоятельного решения нумеруются отдельно внутри каждой главы. Для последних используется двойная нумерация, первая цифра обозначает номер главы. При ссылке на какую-нибудь решенную задачу ее номер указывается после сокращения «реш.». Например, слова «см. реш. 32» отсылают к решенной задаче с таким номером из текущей главы. Ссылка на формулу с номером (например, «см. формулу (27)») предлагает вам обратиться к приложению «Основные формулы и законы физики».

Некоторые особенности и условности. В формулировках всех задач, в том числе и новых, добавленных автором в этом пособии, сохранены «правила игры», соблюдаемые на вступительных экзаменах в РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. Они заключаются в следующем. Все задачи решаются численно и должны быть доведены до числового ответа. Необходимые для решения постоянные приведены в условии (кроме плотности воды и скорости света). Ответ надо перевести в те единицы, которые указаны в условии задачи; если такое указание отсутствует, то ответ надо перевести в единицы СИ. В таком виде ответ становится однозначным, и в списке ответов в конце книги приведены только численные значения, без указания размерности. Более того, числа в условиях задач подобраны таким образом, что все ответы (правильные!) выражаются целыми числами. На первый взгляд, это может показаться «нефизичным», но многолетний опыт работы с такими задачами (в том числе и при подготовке к экзаменам в другие вузы) показывает, что, не препятствуя изучению физики, такие правила вносят определенные элементы игрового азарта в их решение (а также для авторов — в их составление). Кроме того, использование таких задач в контрольных работах, самостоятельных и домашних заданиях позволяет преподавателю быстро произвести предварительную проверку их выполнения.

Впрочем, мир школьных задач и так полон условностей — идеальных нитей и блоков, идеально упругих шариков и т. д. Чтобы избежать утяжеления условий задач бесконечным и занудливым повторением одних и тех же оговорок, самые естественные из них предполагаются «по умолчанию».

Например, все нити — невесомые и нерастяжимые, блоки — невесомые и вращающиеся без трения, пружины — невесомые. Если нет специальных указаний, то сопротивление воздуха учитывать не надо.

Методические указания. Каждый преподаватель, как правило, вырабатывает свои методические подходы и приемы. Тем же абитуриентам, кто будет использовать пособие для самостоятельной подготовки, можно порекомендовать следующие подходы. Работу над темой следует начать с изучения или повторения теории, например, по школьному учебнику или какому-либо из пособий для абитуриентов. Для быстрого повторения теории удобен написанный автором справочник для школьников и абитуриентов (Эксмо-Пресс, 2000). Вспомнить основные формулы и определения поможет также приложение «Основные формулы и законы физики». Параллельно с повторением теории следует изучить задачи данной темы, приведенные с решениями. Желательно каждую задачу попытаться решить самостоятельно. Затем можно приступить к работе с задачами, предложенными для самостоятельного решения. Если задача не поддается или не получается ответ, посмотрите, нет ли к задаче указания.

Следует отметить, что хотя данное пособие призвано помочь вам научиться решать задачи различного уровня, оно не претендует на то, чтобы полностью заменить все остальные пособия. После освоения основного содержания данной книги вам будет несложно освоить задачи и варианты, ориентированные непосредственно на выбранный вами институт. (Варианты многих вузов, а также методические статьи и подборки для абитуриентов регулярно публикуются в журнале «Квант».) Кроме того, существуют классические задачники, построенные на вступительных задачах в определенные вузы.

Автор выражает благодарность В. И. Антипову, Л. К. Белопухову, Л. А. Володиной, В. Б. Нагаеву, В. П. Соколову, Д. Д. Ходкевичу и другим преподавателям кафедры физики РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, принимавшим участие в формировании банка вступительных задач. Кроме того, автор выражает глубокую благодарность редактору книги, своему соратнику по журналу «Квант», Соросовскому учителю А. А. Леоновичу, преподавательский опыт которого и внимание к проблемам абитуриентов позволили избежать многих погрешностей и существенно улучшили содержание книги.

С вопросами и пожеланиями можно обращаться на адрес издательства, а также непосредственно к автору на E-mail: alexei_chernoutsan@mtu-net.ru.

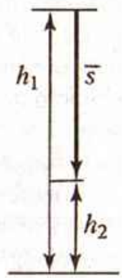
Глава 1

Кинематика

Примеры решения задач

Задача 1. *Мяч упал с высоты 3 м, отскочил от пола и был пойман после отскока на высоте 1 м. Во сколько раз путь, пройденный мячом, больше модуля перемещения мяча?*

Модуль перемещения и путь могут быть найдены непосредственно из рисунка



$$|\vec{s}| = h_1 - h_2 = 2\text{ м},\quad l = h_1 + h_2 = 4\text{ м},$$

откуда $l/|\vec{s}| = (h_1 - h_2)/(h_1 + h_2) = 2$. Такой подход не предполагает введения какой-либо системы координат. Однако можно использовать и координатный метод. Если направить ось y от поверхности земли вертикально вверх, то координаты начальной и конечной точек $y_0 = h_1$, $y = h_2$, и для модуля перемещения получаем $|\vec{s}\,| = |s_y| = |y - y_0| = |h_2 - h_1|$. Проекция перемещения при этом выборе оси получается отрицательной, но модуль перемещения от направления оси не зависит.

Задача 2. *Со станции вышел товарный поезд, идущий со скоростью 20 м/с. Через 10 минут по тому же направлению вышел экспресс, скорость которого 30 м/с. На каком расстоянии (в км) от станции экспресс нагонит товарный поезд?*

Будем отсчитывать время от момента старта товарного поезда, а координаты поездов — от станции. Для товарного поезда $x_1 = v_1 t$, а для экспресса в тот же момент времени $x_2 = v_2(t - \Delta t)$, где Δt — запаздывание по времени начала движения. В момент встречи поезда находятся в одной точке пространства, т. е. их координаты равны

$$x_1 = x_2 \text{ (условие встречи)}, \quad \text{т. е.}\quad v_1 t = v_2(t - \Delta t),$$

откуда выражаем время t и находим координату встречи

$$x = \frac{v_1 v_2 \Delta t}{v_2 - v_1} = 36\text{ км}.$$

Задача 3. *С подводной лодки, погружающейся равномерно, испускаются звуковые импульсы длительностью 30,1 с. Длительность импульса, принятого на лодке после его отражения от дна, равна 29,9 с. Определите скорость погружения лодки. Скорость звука в воде 1500 м/с.*

За время t_1 испускания импульса лодка переместилась на расстояние vt_1, поэтому расстояние в воде между началом импульса и его концом равно $l = v_{зв}t_1 - vt_1$. Такая длина сигнала сохраняется и после отражения от дна. Прием импульса закончится в тот момент, когда лодка встретится с задним концом импульса. Поскольку скорость их сближения равна $v_{зв} + v$, то продолжительность приема равна

$$t_2 = \frac{l}{v_{зв} + v} = \frac{(v_{зв} - v)t_1}{v_{зв} + v}, \qquad \text{откуда} \qquad v = v_{зв}\frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2} = 5 \text{ м/с}.$$

Задача 4. *Сколько секунд пассажир, стоящий у окна поезда, идущего со скоростью 54 км/ч, будет видеть проходящий мимо него встречный поезд, скорость которого 36 км/ч, а длина 150 м?*

Перейдем в систему отсчета первого поезда. В этой системе отсчета наблюдатель (пассажир) неподвижен, а скорость встречного поезда найдем из закона сложения скоростей $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ в проекции на ось x, направление которой выберем, например, параллельно скорости второго поезда: $(v_{21})_x = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1 = 25$ м/с (от направления оси зависит только знак проекции, но не модуль). Искомое время равно $t = l/v_{21} = 6$ с.

Задача 5. *Эскалатор метрополитена, двигаясь равномерно, поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение одной минуты. По неподвижному эскалатору пассажир, двигаясь равномерно, поднимается за 3 минуты. Сколько секунд будет подниматься пассажир по движущемуся вверх эскалатору?*

Запишем закон сложения скоростей для пассажира, идущего вверх по эскалатору

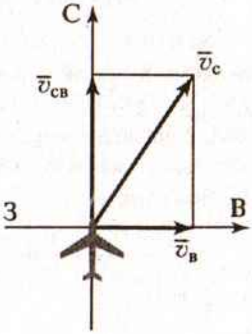
$$v_{п} = v_{пэ} + v_{э}.$$

Выразим каждую скорость через соответствующее время движения вдоль эскалатора

$$\frac{s}{t_3} = \frac{s}{t_2} + \frac{s}{t_1},$$

где s — длина эскалатора, t_1 — время, за которое эскалатор поднимает человека, t_2 — время, за которое пассажир поднимается по неподвижному эскалатору, t_3 — искомое время. Сокращая s и подставляя t_1 и t_2, получаем $t_3 = 45$ с.

Задача 6. *Самолет летел на север со скоростью 48 м/с относительно земли. С какой скоростью относительно земли будет лететь самолет, если подует западный ветер со скоростью 14 м/с?*



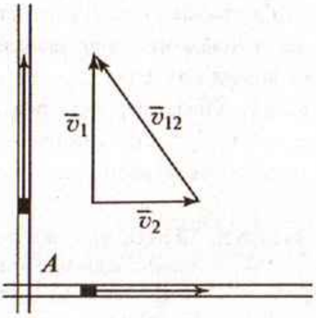
Изобразим на рисунке векторное равенство, соответствующее закону сложения скоростей

$$\vec{v}_с = \vec{v}_{св} + \vec{v}_в,$$

где $\vec{v}_в$ — скорость ветра. Скорость самолета относительно воздуха $\vec{v}_{св}$ направлена, как и раньше, на север и равна 48 м/с. По теореме Пифагора находим

$$v_с = \sqrt{v_{св}^2 + v_в^2} = 50 \text{ м/с}.$$

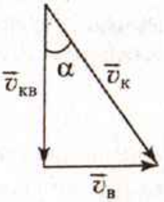
Задача 7. *Из пункта А по взаимно перпендикулярным дорогам выехали два автомобиля: один со скоростью 80 км/ч, другой — со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью (в км/ч) они удаляются друг от друга?*



Скорость, с которой изменяется расстояние между движущимися телами, проще всего вычислить в системе отсчета, связанной с одним из тел. Видно, что «скорость удаления двух тел друг от друга» есть не что иное, как модуль их относительной скорости:

$$|\vec{v}_{12}| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 100 \text{ км/ч}.$$

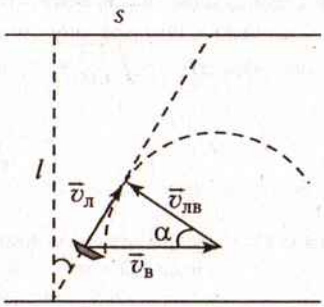
Задача 8. *При скорости ветра, равной 10 м/с, капли дождя падают под углом 30° к вертикали. При какой скорости ветра капли будут падать под углом 60° к вертикали?*



Скорость $\vec{v}_{кв}$ капель в системе отсчета, связанной с движущимся воздухом, есть скорость падения капель дождя в отсутствие ветра. Эта скорость направлена вертикально вниз и определяется только типом дождя (размером капель), т. е. не меняется при изменении скорости ветра. Записав для капель закон сложения скоростей: $\vec{v}_к = \vec{v}_{кв} + \vec{v}_в$ и изобразив это векторное равенство в виде треугольника (скорость ветра направлена горизонтально), получим связь угла падения капель со скоростью ветра: $\operatorname{tg}\alpha = v_в/v_{кв}$. Записав это соотношение для двух углов, исключим из этих уравнений $v_{кв}$ (например, поделив эти уравнения друг на друга). Получим

$$v_{в2} = v_{в1}\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = 30 \text{ м/с}.$$

Задача 9. *Скорость течения реки 5 м/с, ее ширина 32 м. Переправляясь через реку на лодке, скорость которой относительно воды 4 м/с, рулевой обеспечил наименьший возможный снос лодки течением. Чему равен этот снос?*



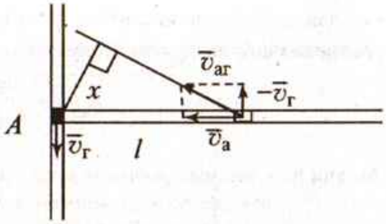
Рулевой должен направлять лодку так, чтобы ее скорость относительно берега $\vec{v}_л$ составляла наименьший возможный угол с перпендикуляром к линии берега. Запишем закон сложения скоростей $\vec{v}_л = \vec{v}_{лв} + \vec{v}_в$, где $\vec{v}_{лв}$ обозначает скорость лодки относительно воды (направленную вдоль линии корпуса лодки), а $\vec{v}_в$ — скорость течения (направленную вдоль берега). При изменении направления вектора $\vec{v}_{лв}$ его конец описывает окружность с центром в конце вектора $\vec{v}_в$. Видно, что наилучший результат достигается в случае, когда вектор $\vec{v}_л$ направлен по касательной к этой окружности (именно этот случай изображен на рисунке). Видно, что угол между направлением движения лодки (относительно берега) и перпендикуляром к линии берега равен в этом случае углу α в треугольнике скоростей. Для минимального сноса лодки получаем

$$s = l\operatorname{tg}\alpha = l\frac{\sqrt{v_в^2 - v_{лв}^2}}{v_{лв}} = l\sqrt{\frac{v_в^2}{v_{лв}^2} - 1} = 24 \text{ м}.$$

Задача 10. *Автомобиль приближается к пункту А со скоростью 80 км/ч. В тот момент, когда ему оставалось проехать 10 км, из пункта А в перпендикулярном направлении выезжает грузовик со скоростью 60 км/ч. Чему равно наименьшее расстояние (в км) между автомобилем и грузовиком?*

Конечно, можно решать эту задачу «в лоб»: записать расстояние между машинами как функцию времени и стандартными методами найти минимум этой функции. Попробуйте сделать это сами и сравните с решением, основанным на выборе удобной системы отсчета.

Перейдем в систему отсчета, связанную с одним из движущихся тел (например, с грузовиком). В этой системе отсчета сам грузовик покоится, а автомобиль движется мимо него по прямой линии в направлении, определяемой относительной скоростью $\vec{v}_{\text{аг}} = \vec{v}_{\text{а}} - \vec{v}_{\text{г}}$. Кратчайшее расстояние x между ними достигается в тот момент, когда автомобиль находится в основании перпендикуляра, опущенного на эту прямую. Из подобия треугольников находим: $x/l = v_{\text{г}} \Big/ \sqrt{v_{\text{г}}^2 + v_{\text{а}}^2}$, откуда



$$x = \frac{v_{\text{г}} l}{\sqrt{v_{\text{г}}^2 + v_{\text{а}}^2}} = 6 \text{ км}.$$

Задача 11. *Первую четверть пути автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, остальной путь — со скоростью 20 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) автомобиля.*

По определению средней скорости

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}.$$

Полное время движения t равно сумме времен движения на отдельных участках

$$t = \frac{s/4}{v_1} + \frac{3s/4}{v_2}.$$

Подставив $t = s/v_{\text{ср}}$ и сократив s, получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{4v_1 v_2}{3v_1 + v_2} = 24 \text{ км/ч}.$$

Задача 12. *Торможение автомобиля до полной остановки заняло время 4 с и происходило с постоянным ускорением 4 м/с^2. Найдите тормозной путь.*

Обычно задачи на один этап равноускоренного движения удается решить с помощью одной из формул (5)–(8). Однако в данной задаче одной формулы недостаточно, необходимо использовать какие-нибудь две. Например, из уравнения $0 = v_0 - at$ (мы учли, что $a_x = -a$ и что конечная скорость равна нулю) находим v_0, а затем с помощью любой из оставшихся формул найдем $s = at^2/2 = 32$ м.

Замечание. Может показаться удивительным, что ответ выглядит так же, как если бы была равна нулю не конечная скорость, а начальная. Чтобы это не выглядело как простое совпадение, можно использовать метод «обращения кинопленки». Если записать движение на пленку, а потом прокрутить ее «наоборот» с той же скоростью, то торможение до остановки превратится в разгон из состояния покоя с тем же по величине ускорением.

Задача 13. *Автомобиль, двигаясь равноускоренно, через 5 с после начала движения достиг скорости 36 км/ч. Какой путь прошел автомобиль за третью секунду движения?*

Так как $v_0 = 0$, то зависимость скорости от времени принимает вид

$$v = at.$$

Подставляя сюда $t_5 = 5$ с и $v_5 = 36$ км/ч $= 10$ м/с, находим $a = 2$ м/с^2. Путь за третью секунду равен разности путей, пройденных за три секунды и за две секунды

$$s_{2-3} = s_3 - s_2 = \frac{at_3^2}{2} - \frac{at_2^2}{2},$$

где $t_2 = 2$ с, $t_3 = 3$ с. Получаем $s_{2-3} = 5$ м.

Задача 14. *За пятую секунду прямолинейного движения с постоянным ускорением тело проходит путь 5 м и останавливается. Какой путь пройдет тело за вторую секунду этого движения?*

Если задачу решать «в лоб», используя метод предыдущей задачи, то вычисления окажутся громоздкими (ведь $v_0 \neq 0$). Сделаем иначе. Запишем выражение для s_{4-5} через среднюю скорость

$$s_{4-5} = \frac{v_4 + 0}{2} \Delta t$$

(мы обозначили $\Delta t = 1$ с и учли, что $v_5 = 0$) и найдем отсюда скорость в конце 4-ой секунды $v_4 = 10$ м/с. Так как при равноускоренном движении скорость за одинаковые интервалы времени изменяется на одинаковую величину, то получаем $v_3 = 20$ м/с, $v_2 = 30$ м/с и $v_1 = 40$ м/с. Отсюда находим

$$s_{1-2} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Delta t = 35 \text{ м}.$$

Замечание. Задача значительно упрощается, если применить прием «обращения кинопленки» (см. замечание к реш. 12). Наша задача превратится в следующую: «Двигаясь без начальной скорости, тело за первую секунду прошло путь 5 м. Какой путь оно пройдет за 4-ю секунду?» Убедитесь, что ответ будет такой же.

Задача 15. *Шарик, брошенный вертикально вверх, возвратился в точку бросания через 2,4 с. На какую высоту (в см) поднялся шарик?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Можно воспользоваться формулой (11) для полного времени движения: $t = 2v_0/g$, выразить начальную скорость и подставить в формулу (10) для максимальной высоты

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{gt^2}{8} = 7{,}2 \text{ м} = 720 \text{ см}.$$

Однако удобно подойти к этой задаче по-другому, использовать симметрию между движением вверх и движением вниз. Обратное падение происходит без начальной скорости за время $t/2$. Получаем

$$h_{\max} = g\frac{(t/2)^2}{2}.$$

Задача 16. *Камень брошен вертикально вверх со скоростью 50 м/с. Через сколько секунд его скорость будет равна 30 м/с и направлена вертикально вниз?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Некоторые абитуриенты уверены, что необходимо разбивать движение на две части: сначала торможение до верхней точки, затем падение вниз. Однако это совершенно необязательно. Формулы равноускоренного движения (5)—(8) действуют все время равноускоренного движения. Направим ось y вертикально вверх и воспользуемся формулой (5): $v_y = v_{0y} + a_y t$. В данном случае $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, $v_y = -v$, где $v = 30$ м/с — величина конечной скорости. Получаем:

$$-v = v_0 - gt,$$

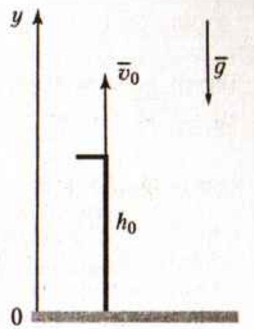
откуда $t = (v + v_0)/g = 8$ с. Вот теперь для проверки можно посмотреть на этот ответ с точки зрения разбиения на два движения. За время $t_1 = v_0/g = 5$ с камень поднимается вверх, а затем за время $t_2 = t - t_1 = 3$ с тело набирает скорость $v = gt_2 = 30$ м/с.

Задача 17. *С башни высотой 15 м вертикально вверх брошено тело со скоростью 10 м/с. Через сколько секунд оно упадет на землю?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

В этой задаче удобней использовать формулу не для перемещения, а для координаты. Запишем зависимость координаты y тела от времени

$$y = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где $h_0 = 15$ м — начальная высота. Условие падения в этом случае выглядит очень просто: $y = 0$. Решая получившееся квадратное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, получаем $t = 3$ с. Попробуйте сами решить эту задачу разбиением движения на две части и посмотрите, какое решение проще.



Замечание. Если решать эту задачу не координатным способом, а через перемещение, то надо быть внимательным при записи условия падения. Модуль перемещения равен h_0, но вектор перемещения направлен вниз. Если, как и раньше, положительное направление выбрано вверх, то условие падения принимает вид: $s_y = -h_0$.

Задача 18. *С какой высоты падало тело, если в последнюю секунду падения оно прошло путь 45 м? $g = 10$ м/с^2.*

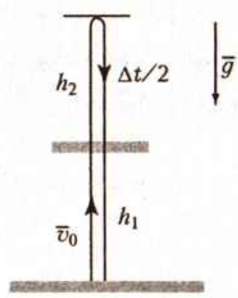
Можно составить уравнение для полного времени падения t, рассматривая путь за последнюю секунду как разность расстояний, пройденных при свободном падении с $v_0 = 0$ за время t и за время $t - \Delta t$ ($\Delta t = 1$ с)

$$s = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\Delta t)^2}{2}.$$

Из этого уравнения находим t и подставляем его в формулу $h = gt^2/2$. Получаем $h = 125$ м.

Замечание. Можно поступить иначе. Напишем для последнего участка уравнение (6): $s = v_1\Delta t + g(\Delta t)^2/2$ и найдем из него скорость v_1 в конце первого участка движения. Далее найдем расстояние, пройденное на первом этапе (до последней секунды): $s_1 = v_1^2/2g$ и полное расстояние: $h = s_1 + s$. Убедитесь, что получается такой же ответ.

Задача 19. *Тело бросают вертикально вверх. Наблюдатель заметил, что на высоте 75 м тело побывало дважды, с интервалом времени 2 с. Найдите начальную скорость тела. $g = 10$ м/с^2.*



Движение выше отметки $h_1 = 75$ м занимает время $\Delta t = 2$ с. Расстояние h_2 от этой отметки до верхней точки проще всего найти, рассматривая падение от верхней точки до высоты h_1

$$h_2 = \frac{g(\Delta t/2)^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

Теперь найдем полную высоту $h = h_1 + h_2 = 80$ м и начальную скорость $v_0 = \sqrt{2gh} = 40$ м/с.

Задача 20. *Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 15 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением 0,5 м/с². Пассажир побежал со скоростью 4 м/с. Через сколько времени он достигнет двери вагона?*

При решении задач о встрече двух тел удобно использовать координаты этих тел, а не их перемещения, так как в этом случае наиболее простой вид принимает условие встречи: в момент встречи координаты тел равны. Запишем координаты пассажира $x_1(t)$ и двери вагона $x_2(t)$ в зависимости от времени, считая начальную координату человека равной нулю

$$x_1 = vt, \qquad x_2 = s + \frac{at^2}{2}.$$

Условие встречи $x_1 = x_2$ приводит к квадратному уравнению, которое имеет два корня: $t_1 = 6$ с и $t_2 = 10$ с. Ответом задачи является меньший корень, так как человек не будет пробегать мимо двери и ждать, когда она его догонит.

Задача 21. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 4 м/с. Когда оно достигло высшей точки траектории, из той же точки, из которой оно было брошено, с той же начальной скоростью вертикально вверх брошено второе тело. На каком расстоянии (в см) от начальной точки тела встретятся? $g = 10$ м/с².*

Запишем зависимость координаты y каждого тела от времени, отсчитывая время от момента броска второго тела

$$y_1 = h_0 - \frac{gt^2}{2}, \quad y_2 = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где $h_0 = v_0^2/2g$ — высота первого тела в момент броска второго. Условие встречи тел имеет вид

$$y_1 = y_2.$$

Подставляя выражения для y_1 и y_2, находим время встречи

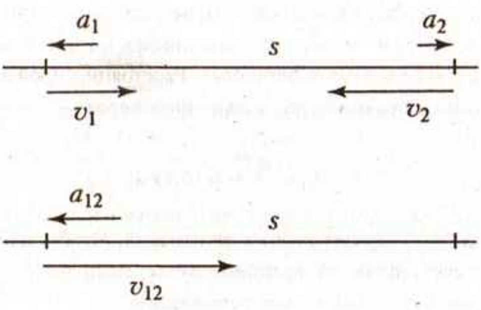
$$t = \frac{h_0}{v_0} = \frac{v_0}{2g}$$

Чтобы определить высоту h, на которой происходит встреча тел, надо подставить это время в формулу для y_1 (или для y_2). Получаем

$$h = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{2g} = 0{,}6 \text{ м} = 60 \text{ см}.$$

Замечание. Выражение для времени встречи $t = h_0/v_0$ имеет такой вид, как если бы сближение тел происходило равномерно со скоростью v_0. Это не случайно — относительное движение двух тел, ускорения которых одинаковы, действительно является равномерным. Например, если оба тела (как в нашем случае) совершают свободное движение в поле тяжести, то ускорение одного тела относительно другого равно $\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{g} - \vec{g} = 0$. Этот подход (переход в систему отсчета свободно летящего тела) иногда в шутку называют методом барона Мюнхгаузена.

Задача 22. *Два тела начинают одновременно двигаться по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями 10 м/с и 20 м/с и с постоянными ускорениями 2 м/с² и 1 м/с², направленными противоположно соответствующим начальным скоростям. Определите, при каком максимальном начальном расстоянии между телами они встретятся в процессе движения.*



Типичная ошибка, которую делают при решении этой задачи, — вычисляют расстояние, которое пройдет каждое тело до разворота, и считают, что начальное расстояние между телами должно быть равно сумме этих расстояний. Однако, так как тела разворачиваются не одновременно, расстояние между телами остается в этом случае все время конечным. Решим задачу сначала формально, «в лоб». Запишем зависимость координат тел от времени (ось направлена от первого тела ко второму)

$$x_1 = v_1 t - \frac{a_1 t^2}{2}, \quad x_2 = s - v_2 t + \frac{a_2 t^2}{2},$$

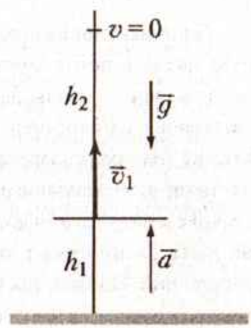
где s — начальное расстояние между телами. Условие встречи $x_1 = x_2$ приводит к квадратному уравнению, которое позволяет вычислить моменты встречи тел.

Если расстояние s меньше искомого, то тела встретятся дважды (квадратное уравнение имеет два решения), если больше — то не встретятся вообще (отсутствие решений). Значит, условием встречи является условие неотрицательности дискриминанта. Проверьте, что это условие приводит к неравенству

$$s \le \frac{(v_1+v_2)^2}{2(a_1+a_2)} = 150 \text{ м}.$$

Этот ответ можно получить сразу, если перейти в систему отсчета, связанную с одним из тел (см. нижний рисунок). Тогда начальная скорость другого тела равна $v_{12} = v_1 + v_2$, а ускорение этого тела равно $a_{12} = a_1 + a_2$ и направлено против скорости. Ясно, что условие встречи в этом случае заключается в том, что расстояние между телами должно быть меньше или равно расстоянию, которое пройдет движущееся тело до разворота.

Задача 23. *Двигатели ракеты, запущенной вертикально вверх с поверхности земли, работали в течение 10 с и сообщали ракете постоянное ускорение 30 м/с². Какой максимальной высоты (в км) над поверхностью земли достигнет ракета после выключения двигателей? g = 10 м/с².*



Движение ракеты до верхней точки складывается из двух последовательных этапов — разгона от нулевой скорости с ускорением a и торможения с ускорением g до остановки. Расстояние, пройденное на первом этапе, можно найти сразу

$$h_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 1500 \text{ м},$$

где t_1 — время работы двигателей. Чтобы найти высоту подъема на втором этапе, надо знать скорость ракеты в начале торможения

$$h_2 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Эта скорость равна скорости ракеты в конце разгона

$$v_1 = a_1 t_1 = 300 \text{ м/с}.$$

Окончательно находим

$$h = h_1 + h_2 = 6000 \text{ м} = 6 \text{ км}.$$

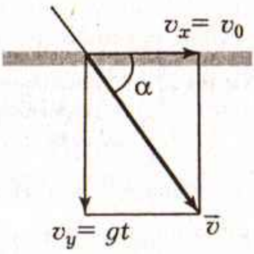
Задача 24. *В течение 20 с ракета поднимается с постоянным ускорением 0,8g, после чего двигатели ракеты выключаются. Через какое время после этого ракета упадет на землю?*

В конце подъема скорость и высота ракеты равны, соответственно, $v_1 = a_1 t_1$, $h_1 = a_1 t_1^2/2$, где $a_1 = 0{,}8g$. Координата ракеты после этого меняется по закону

$$h = h_1 + v_1 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{0{,}8gt_1^2}{2} + 0{,}8gt_1 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Условие падения $h = 0$ приводит к уравнению $t^2 - 1{,}6t_1 t - 0{,}8\, t_1^2 = 0$, положительный корень которого $t = 2t_1 = 40$ с.

Задача 25. *Дальность полета тела, брошенного в горизонтальном направлении, равна половине высоты, с которой оно брошено. Чему равен тангенс угла, который образует с горизонтом скорость тела при его падении на землю?*



В проекции на горизонтальную ось x движение тела представляет собой равномерное движение со скоростью v_0, а в проекции на вертикальную ось y — свободное падение без начальной скорости

$$s = v_0 t, \qquad h = \frac{gt^2}{2},$$

где t — время полета тела. Из условия $s = h/2$ выражаем время полета

$$t = \frac{4v_0}{g}.$$

Тангенс угла, под которым тело падает на землю, выражается через проекции скорости в момент падения

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}.$$

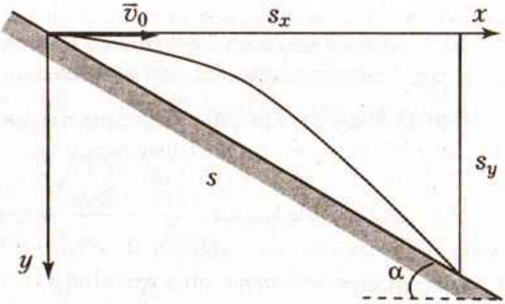
Подставляя t, получаем $\mathrm{tg}\,\alpha = 4$.

Задача 26. *На горе с углом наклона к горизонту 30° горизонтально бросают мяч с начальной скоростью 15 м/с. На каком расстоянии от точки бросания вдоль наклонной плоскости упадет мяч? $g = 10$ м/с².*

Зависимость проекций перемещения s на оси x и y от времени имеет вид

$$s_x = v_0 t\,, \quad s_y = \frac{gt^2}{2}.$$

Условие приземления мяча представляет собой условие попадания на наклонную плоскость



$$\frac{s_y}{s_x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда находим время полета мяча

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}$$

и выражаем перемещение мяча за время полета

$$s = \frac{s_x}{\cos\alpha} = \frac{v_0 t}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = 30 \text{ м}.$$

Задача 27. *Из одной точки одновременно бросают два тела: одно горизонтально со скоростью 6 м/с, другое — вертикально со скоростью 8 м/с. На каком расстоянии друг от друга будут находиться тела через 2 с?*

Можно решать задачу «в лоб»: записать зависимость координат от времени и вычислить расстояние между телами по формуле $r(t) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Проделайте это сами и проверьте, что получается ответ $r = t\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2} = 20$ м. Видно, что расстояние меняется так, как если бы тела двигались равномерно, а ускорение g в ответ вообще не входит. Это становится понятным при переходе в систему отсчета, связанную с одним из тел (см. замечание к реш. 21). В этой СО второе тело движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\bar{v}_{21} = \bar{v}_{02} - \bar{v}_{01}$, а расстояние между телами зависит от времени по закону $r = |\bar{v}_{21}|t$, где $|\bar{v}_{21}|$ в случае прямого угла между скоростями равна $\sqrt{v_{01}^2 + v_{02}^2}$. Интересно отметить, что величина относительной скорости зависит не от направления скоростей, а от угла между ними. Если, например, бросить тела с теми же скоростями, но под углами 30° и 120° к горизонту (в одной вертикальной плоскости), то ответ будет тот же.

Задача 28. *Камень, брошенный под углом 45° к горизонту, через 0,8 с после начала движения продолжал подниматься и имел вертикальную составляющую скорости 12 м/с. Чему равно расстояние между местом бросания и местом падения камня? $g = 10$ м/с^2.*

Запишем выражение для вертикальной составляющей скорости через время t

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt,$$

выразим из него начальную скорость v_0

$$v_0 = \frac{v_y + gt}{\sin\alpha}$$

и подставим в выражение для дальности полета s

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{2(v_y + gt)^2 \operatorname{ctg}\alpha}{g} = 80 \text{ м}.$$

Задача 29. *Камень брошен под таким углом к горизонту, что синус этого угла равен 0,8. Найдите отношение дальности полета к максимальной высоте подъема.*

Исходя из формул для дальности полета и максимальной высоты подъема

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, \quad h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g},$$

найдем отношение $s/h_{\max} = 4\operatorname{ctg}\alpha$. В данном случае $\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$, т. е. $s/h_{\max} = 3$.

Задача 30. *Тело брошено под углом к горизонту. Какую часть всего времени движения (в процентах) тело находится на высоте, большей 3/4 максимальной высоты подъема?*

Все величины, присутствующие в условии этой задачи, имеют отношение только к вертикальной оси y и никак не связаны с движением по горизонтали, поэтому слова «под углом к горизонту» можно было бы смело заменить на «вертикально вверх». Рассмотрим вторую половину движения — от верхней точки до падения на землю — и выясним, какую часть времени падения t займет движение от верхней точки (высота h) до точки, лежащей на высоте $(3/4)h$. Направив ось y вертикально вниз, имеем

$$h = \frac{gt^2}{2}, \quad \frac{h}{4} = \frac{gt_x^2}{2},$$

т. е. $\frac{t_x}{t}100\% = 50\%$. Такое же соотношение (из симметрии) верно для первой половины движения, а значит, и для всего движения.

Задача 31. *Из шланга бьет струя воды со скоростью 10 м/с под углом 30° к горизонту. Определите массу воды, находящейся в воздухе, если площадь отверстия 2 см^2. g = 10 м/с^2.*

Новым элементом в этой задаче является формула для массы воды, вылетающей из шланга за время t (уравнение расхода)

$$m = \rho s v_0 t,$$

что есть не что иное, как масса воды в цилиндре основанием s и длиной $v_0 t$. В качестве t надо взять время движения любого элемента струи до падения на землю

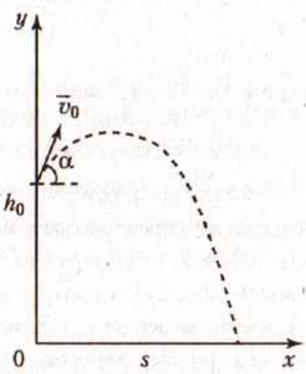
$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Окончательно получаем

$$m = \frac{2\rho s v_0^2 \sin\alpha}{g} = 2 \text{ кг}.$$

Задача 32. *Из окна, находящегося на высоте 7,5 м, бросают камень под углом 45° к горизонту. Камень упал на расстоянии 15 м от стены дома. С какой скоростью был брошен камень? g = 10 м/с^2.*

Запишем зависимость координат камня от времени



$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = h_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

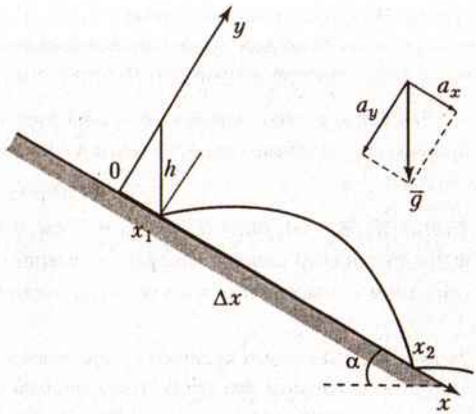
и учтем, что в момент падения $x = s$, $y = 0$. Выразив t из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение, из которого найдем v_0

$$v_0 = \left(\frac{gs^2}{2\cos^2\alpha(h_0 + s\,\mathrm{tg}\,\alpha)}\right)^{1/2} = 10 \text{ м/с}.$$

Задача 33. *С высоты 1,5 м на наклонную плоскость вертикально падает шарик и абсолютно упруго отражается. На каком расстоянии от места падения он снова ударится о ту же плоскость? Угол наклона плоскости к горизонту 30°.*

Для решения этой задачи важное значение имеет правильный выбор осей. Описание движения выглядит существенно проще, если одну из осей (ось x)

направить вдоль наклонной плоскости, а ось y — перпендикулярно к ней. При этом оба движения — по x и по y — оказываются равноускоренными (с ускорениями $a_x = g\sin\alpha$ и $a_y = -g\cos\alpha$), но зато удар о плоскость учитывается весьма просто. При упругом ударе проекция скорости v_x не меняется, а v_y меняет свой знак. Значит, по x происходит непрерывное равноускоренное движение с нулевой начальной скоростью, а по y — чередование падений на плоскость и отскоков до одной и той же «высоты» $y_{\max} = h\cos\alpha$. Ясно, что время от начала движения до второго удара о плоскость t_2 (падение–подъем–падение) в три раза больше, чем время до первого удара t_1



$$t_2 = 3t_1.$$

Отсюда легко получить соотношение между координатами x_1 и x_2. Так как

$$x_1 = \frac{a_x t_1^2}{2}, \quad x_2 = \frac{a_x t_2^2}{2},$$

то

$$x_2 = 9x_1 = 9h\sin\alpha.$$

Осталось вычислить расстояние между точками первого и второго ударов

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 6 \text{ м}.$$

Задача 34. *Линейная скорость точек обода вращающегося колеса равна 50 см/с, а линейная скорость его точек, находящихся на 3 см ближе к оси вращения, равна 40 см/с. Определите радиус (в см) колеса.*

Выразим скорость каждой точки через расстояние до оси вращения и угловую скорость колеса

$$v_1 = \omega R$$
$$v_2 = \omega(R - l),$$

где $l = 3$ см. Решая систему уравнений, находим $R = 15$ см.

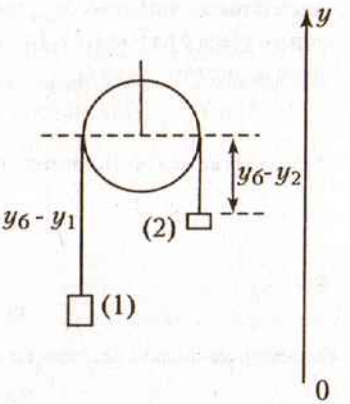
Задача 35. *Два шкива соединены ременной передачей. Ведущий шкив делает 600 об/мин. Ведомый шкив должен делать 3000 об/мин. Каким нужно сделать диаметр (в см) ведущего шкива, если диаметр ведомого 10 см?*

Так как все точки ремня имеют одинаковую линейную скорость, то можно приравнять линейные скорости точек на ободах двух шкивов

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 .$$

Значит, $d_1/d_2 = \omega_2/\omega_1 = 5$, т. е. $d_1 = 50$ см. В данном случае связь между угловыми скоростями шкивов следует из неявного предположения о нерастяжимости ремня — именно при этом условии скорости всех его точек одинаковы.

Задача 36. *Через блок перекинули нерастяжимую нить, к концам которой прикрепили два груза. В некоторый момент ось блока поднимается вертикально вверх со скоростью 2 м/с, а один из грузов опускается со скоростью 3 м/с. С какой скоростью движется в этот момент другой груз?*



Из условия нерастяжимости нити вытекает следующая связь между скоростями (и ускорениями) грузов и блока в проекции на вертикальную ось y

$$2v_{бy} = v_{1y} + v_{2y}, \quad 2a_{бy} = a_{1y} + a_{2y},$$

(второе соотношение используется в динамике). Если блок неподвижен, то получаем известное условие равенства скоростей и ускорений грузов по величине.

Дадим сначала прямой вывод этого соотношения, основанный на вычислении длины нити l. Нить состоит из трех участков: слева от блока, соприкасающегося с блоком и справа от блока

$$l = (y_б - y_1) + \pi R + (y_б - y_2)$$

(ось y направлена вверх). Поскольку длина нити не меняется, то перемещения грузов и блока и их скорости связаны соотношениями

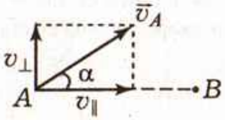
$$2\Delta y_б - \Delta y_1 - \Delta y_2 = 0, \quad 2v_{бy} - v_{1y} - v_{2y} = 0.$$

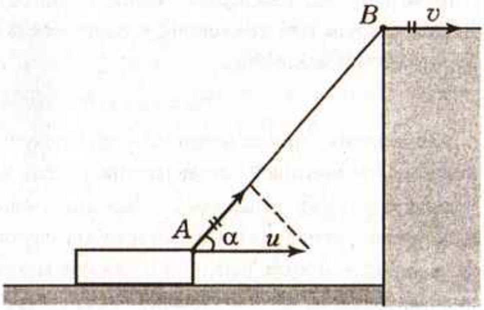
В данном случае $v_{бy} = 2$ м/с, $v_{1y} = -3$ м/с, откуда получаем $v_{2y} = 7$ м/с.

Замечание. Полученное соотношение можно быстро получить, если перейти в систему отсчета блока и записать условие, что относительные скорости должны быть равны друг другу по величине и противоположны по направлению

$$(v_{1y} - v_{бy}) = -(v_{2y} - v_{бy}).$$

Задача 37. *Плот подтягивают к высокому берегу с помощью веревки. С какой скоростью (в см/с) надо выбирать веревку в тот момент, когда она образует с горизонтом угол 60°, чтобы плот двигался со скоростью 1,2 м/с?*

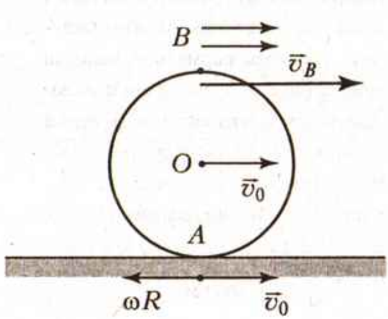




В этой и в некоторых других задачах будет использоваться следующее достаточно понятное кинематическое утверждение. Чтобы узнать, с какой скоростью движущаяся точка A приближается к неподвижной точке B (с какой скоростью уменьшается расстояние до этой точки), надо найти проекцию $v_\parallel$ скорости $\vec{v}_A$ на вектор $\vec{AB}$: $v_\parallel = v_A\cos\alpha$. (Понятно, что перпендикулярная составляющая $v_\perp$ не изменяет расстояние между точками).

В данной задаче скорость, с которой точка плота A, к которой привязана веревка, приближается к точке B, в которой веревку вытягивают, равна скорости уменьшения длины веревки AB, т. е. скорости вытягивания веревки v. Получаем соотношение $v = u\cos\alpha = 0{,}6$ м/с $= 60$ см/с.

Задача 38. *Колесо катится без проскальзывания по горизонтальной дороге со скоростью 1 м/с. Определите скорость точки колеса, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра.*



Относительно поступательно движущейся системы отсчета, связанной с осью колеса, оно совершает чисто вращательное движение с угловой скоростью ω. Скорость любой точки колеса относительно земли равна векторной сумме скорости поступательного движения, равной скорости колеса v_0, и скорости вращательного движения. Так как колесо катится без проскальзывания, скорость нижней точки A колеса равна нулю, т. е. скорости поступательного и вращательного движений в этой точке компенсируются

$$v_A = v_0 - \omega R = 0 .$$

В точке B, лежащей на верхнем конце диаметра, скорость вращательного движения направлена в ту же сторону, что и скорость колеса, т. е. скорость этой точки относительно земли равна

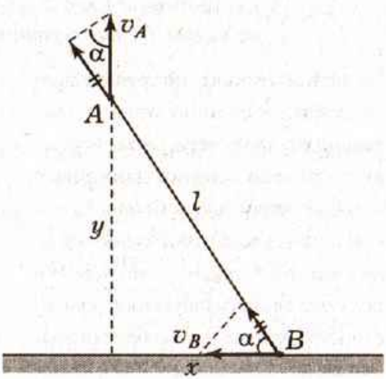
$$v_B = v_0 + \omega R = 2v_0 = 2 \text{ м/с}.$$

Замечание. Этот же результат можно получить, воспользовавшись представлением о «мгновенной оси вращения», очень удобным для решения кинематических задач. Мгновенная ось — это линия точек твердого тела, которые в данный момент неподвижны. (В некоторых случаях эта ось может лежать и вне тела — например, см. реш. 40.) В каждый момент времени твердое тело как бы поворачивается вокруг мгновенной оси, и скорости остальных точек могут быть найдены по формуле $v = \omega r$. В данном примере мгновенная ось, очевидно, проходит через точку A касания колеса с землей. Для центра колеса $v_0 = \omega R$, для верхней точки $v_B = \omega\,(2R) = 2v_0$. Рассмотрение с помощью мгновенной оси обладает многими преимуществами. Например, сразу очевидно, что одинаковые скорости имеют точки колеса, равноудаленные от точки A.

Задача 39. *Палка длиной 1 м лежит на земле. Один конец палки начинают поднимать с постоянной скоростью 1,2 м/с вертикально вверх. С какой скоростью (в см/с) будет скользить по земле нижний конец палки в тот момент, когда верхний окажется на высоте 80 см?*

Связь между скоростями точек A и B возникает вследствие того, что эти точки находятся на одном твердом теле, а значит расстояние между ними не должно меняться в процессе движения. Можно получить эту связь формально, записав тождество $l^2 = x^2 + y^2$ и воспользовавшись тем, что малые изменения левой и правой части равны нулю: $0 = 2x\Delta x + 2y\Delta y$. Так как $\Delta y/\Delta t = v_A$, а $\Delta x/\Delta t = -v_B$, то получим

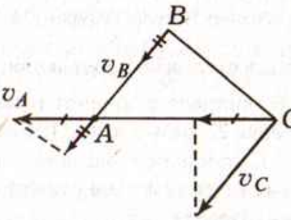
$$v_B = (y/x)v_A = (0{,}8/0{,}6)1{,}2 \text{ м/с} = 160 \text{ см/с}.$$



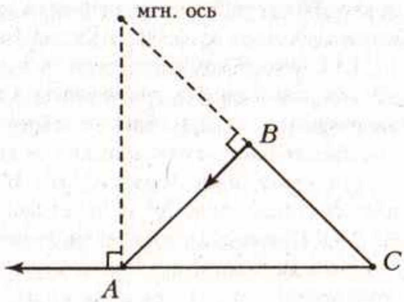
Однако удобнее получать такого рода соотношения следующим образом. Скорость, с которой точка A в данный момент удаляется от точки B, равна $v_A \sin\alpha$ (см. реш. 37), а скорость, с которой точка B приближается к точке A, равна $v_B \cos\alpha$. Поскольку расстояние между точками не меняется, получаем $v_A \sin\alpha = v_B \cos\alpha$, или $v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha$.

Интересно отметить, что эту задачу можно решить и с помощью мгновенной оси вращения, описанной в предыдущей задаче. Попробуйте сами найти эту ось и с ее помощью связать скорости v_A и v_B. (Подсказка: скорость любой точки перпендикулярна к отрезку, соединяющему ее с мгновенной осью.)

Задача 40. ***Пластинка в виде равнобедренного прямоугольного треугольника ABC движется по плоскости. В некоторый момент времени скорость вершины прямого угла B равна 10 см/с и направлена в сторону вершины A, а скорость вершины A направлена параллельно AC. Чему равна в этот момент скорость (в см/с) вершины C?***



Сначала найдем скорость точки A. Она должна удаляться от точки B с такой же скоростью, с какой точка B приближается к точке A (см. реш. 37, реш. 39), поэтому $v_A \cos 45° = v_B$. Получаем $v_A = v_B\sqrt{2}$. Скорость точки C должна быть, как и скорость точки B, перпендикулярна отрезку BC. Проекция этой скорости на отрезок AC должна быть равна скорости точки A: $v_C \cos 45° = v_A$. Получаем $v_C = \sqrt{2}\, v_A = 2v_B = 20$ см/с.



Очень удобно решать такие задачи с помощью мгновенной оси вращения. Так как скорость любой точки должна быть перпендикулярна отрезку, соединяющему ее с осью, то мгновенная ось находится на пересечении перпендикуляров, проведенных к векторам $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$. Видно, что точка C лежит вдвое дальше от мгновенной оси, чем точка B, следовательно $v_C = 2v_B$.

Задачи для самостоятельного решения

Перемещение. Путь. Равномерное движение (1–3)*

1.1. Тело переместилось из точки с координатами (0,3) в точку с координатами (3,–1). Найдите модуль перемещения тела.

1.2. Самолет пролетел по прямой 600 км, затем повернул под прямым углом и пролетел еще 800 км. Чему равен модуль вектора перемещения (в км) самолета?

1.3. Человек прошел по проспекту 240 м, затем повернул на перекрестке и прошел в перпендикулярном направлении еще 70 м. На сколько процентов путь, пройденный человеком, больше модуля его перемещения?

1.4. Тело начало двигаться вдоль оси x с постоянной скоростью 6 м/с из точки, имеющей координату $x_0 = -7$ м. Через сколько секунд координата тела окажется равной 5 м?

1.5. Пешеход переходил дорогу со скоростью 4,2 км/ч по прямой, составляющей угол 30° с направлением дороги, в течение одной минуты. Определите ширину дороги.

1.6. Спортсмены бегут колонной длиной 20 м с одинаковой скоростью 3 м/с. Навстречу бежит тренер со скоростью 1 м/с. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, бежит назад с прежней скоростью. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

Относительность движения. Сложение скоростей (4–10)

1.7. Определите скорость течения (в км/ч), если скорость теплохода вниз по реке равна 22 км/ч, а вверх 18 км/ч.

1.8. Скорость мотоциклиста 54 км/ч, а скорость встречного ветра 3 м/с. Какова скорость ветра в системе отсчета, связанной с мотоциклистом? В ответе дайте модуль скорости.

1.9. Пассажир поезда, движущегося равномерно со скоростью 54 км/ч, видит в течение 60 с другой поезд длиной 300 м, который движется по соседнему пути в том же направлении с большей скоростью. Найдите скорость (в км/ч) второго поезда.

1.10. Автомобиль, двигаясь со скоростью 45 км/ч, в течение 10 с прошел такой же путь, какой автобус, двигающийся в том же направлении с постоянной скоростью, прошел за 15 с. Найдите величину их относительной скорости (в км/ч).

1.11. По шоссе в одном направлении движутся два мотоциклиста. Скорость первого равна 10 м/с, второго 20 м/с. В начальный момент второй мотоциклист отстает от первого на 200 м. Через сколько секунд он его догонит?

1.12. Скорость лодки относительно воды в два раза больше скорости течения реки. Во сколько раз больше времени занимает поездка между двумя пунктами против течения, чем по течению?

---

* В скобках после названия раздела указаны номера тех задач с решениями (из начала главы), которые соответствуют данному разделу.

1.13. Скорость лодки относительно воды равна 4 м/с и направлена перпендикулярно берегу, а скорость течения реки – 3 м/с. Найдите скорость лодки относительно берега.

1.14. Катер, переправляясь через реку шириной 800 м, двигался со скоростью 4 м/с перпендикулярно течению реки в системе отсчета, связанной с водой. На сколько будет снесен катер течением, если скорость течения реки 1,5 м/с?

1.15. Два велосипедиста едут со скоростями 10,8 км/ч и 14,4 км/ч по взаимно перпендикулярным дорогам. Чему равна их относительная скорость (в км/ч)?

1.16. Когда автобус стоит на остановке, капли дождя оставляют на боковом стекле вертикальные следы, а когда он едет со скоростью 72 км/ч, следы капель наклонены к вертикали под углом 30°. С какой скоростью падают капли дождя? $\sqrt{3} = 1{,}7$.

1.17. При скорости ветра 20 м/с скорость капель дождя 40 м/с. Какой будет скорость капель при скорости ветра 5 м/с?

1.18. В безветренную погоду самолет затрачивает на перелет между городами 6 часов. На сколько минут увеличится время полета, если будет дуть боковой ветер со скоростью 20 м/с перпендикулярно линии полета? Скорость самолета относительно воздуха равна 328 км/ч.

1.19. При переправе через реку шириной 60 м надо попасть в точку, лежащую на 80 м ниже по течению, чем точка старта. Лодочник управляет моторной лодкой так, что она движется точно к цели со скоростью 8 м/с относительно берега. Какова при этом скорость лодки относительно воды, если скорость течения реки 2,8 м/с?

Средняя скорость (11)

1.20. В течение первых 5 часов поезд двигался со средней скоростью 60 км/ч, а затем в течение 4 часов — со средней скоростью 15 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) поезда за все время движения.

1.21. Велосипедист, проехав 4 км со скоростью 12 км/ч, остановился и отдыхал в течение 40 мин. Оставшиеся 8 км пути он проехал со скоростью 8 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) велосипедиста на всем пути.

1.22. Велосипедист за первые 5 с проехал 35 м, за последующие 10 с — 100 м и за последние 5 с — 25 м. Найдите среднюю скорость движения на всем пути.

1.23. Первые 3/4 времени своего движения поезд шел со скоростью 80 км/ч, остальное время — со скоростью 40 км/ч. Какова средняя скорость (в км/ч) движения поезда на всем пути?

1.24. Первую половину пути автомобиль прошел со скоростью 40 км/ч, вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) автомобиля на всем пути.

1.25. Катер прошел первую половину пути со средней скоростью в три раза большей, чем вторую. Средняя скорость на всем пути составляет 6 км/ч. Какова средняя скорость (в км/ч) катера на первой половине пути?

1.26. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью 60 км/ч. Оставшуюся часть пути он половину времени ехал со скоростью 35 км/ч, а последний участок — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость (в км/ч) автомобиля на всем пути.

1.27. Велосипедист проехал 3 км со скоростью 12 км/ч, затем повернул и проехал некоторое расстояние в перпендикулярном направлении со скоростью 16 км/ч. Чему равен модуль перемещения (в км) тела, если средняя скорость пути за все время движения равна 14 км/ч?

1.28. Первую половину времени тело движется со скоростью 30 м/с под углом 30° к заданному направлению, а вторую половину времени — под углом 120° к этому же направлению со скоростью 41 м/с. Найдите среднюю скорость (в см/с) перемещения тела вдоль заданного направления. $\sqrt{3} = 1{,}7$.

Равноускоренное движение (12–14)

1.29. Автомобиль, двигаясь равноускоренно, через 10 с после начала движения достиг скорости 36 км/ч. Найдите ускорение автомобиля.

1.30. Длина дорожки для взлета самолета 675 м. Какова скорость самолета при взлете, если он движется равноускоренно и взлетает через 15 с после старта?

1.31. Какую скорость приобретает ракета, движущаяся из состояния покоя с ускорением 6 м/с^2, на пути разгона 75 м?

1.32. Шар, двигаясь из состояния покоя равноускоренно, за первую секунду прошел путь 10 см. Какой путь (в см) он пройдет за 3 секунды от начала движения?

1.33. Во сколько раз скорость пули, прошедшей 1/4 часть ствола винтовки, меньше, чем при вылете из ствола? Ускорение пули считайте постоянным.

1.34. С какой скоростью двигался поезд до начала торможения, если тормозной путь он прошел за 30 с с ускорением 0,5 м/с^2?

1.35. Какое расстояние пройдет автомобиль до полной остановки, если шофер резко тормозит при скорости 20 м/с, а от момента торможения до остановки проходит 6 с?

1.36. При аварийном торможении автомобиль, двигавшийся со скоростью 30 м/с, проходит тормозной путь с ускорением 5 м/с^2. Найдите тормозной путь.

1.37. При скорости 15 км/ч тормозной путь автомобиля равен 1,5 м. Каким будет тормозной путь при скорости 90 км/ч, если торможение в обоих случаях происходит с одинаковым ускорением?

1.38. С какой скоростью надо бросить камень вдоль горизонтальной поверхности катка, чтобы он, скользя с ускорением 0,5 м/с^2, остановился на расстоянии 100 м от начального положения?

1.39. От движущегося поезда отцеплен последний вагон. Поезд продолжает движение с той же скоростью. Считая, что вагон движется с постоянным ускорением, найдите, во сколько раз путь, пройденный вагоном до его остановки, меньше пути, пройденного поездом к этому моменту.

1.40. Пуля пробивает доску толщиной 20 см. Скорость пули до попадания в доску 200 м/с, после вылета из нее 100 м/с. Чему равна величина ускорения (в км/с^2) пули при движении ее внутри доски?

1.41. За одну секунду движения тело прошло путь 10 м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 4 раза по сравнению с первоначальной. Каково было ускорение тела?

1.42. Двигаясь с ускорением 0,5 м/с^2, тело на пути 60 м увеличило свою скорость в 4 раза. Найдите начальную скорость тела.

1.43. Лыжник спускается с горы длиной 180 м. Сколько времени займет спуск, если ускорение лыжника равно 0,5 м/с^2, а начальная скорость 4 м/с?

1.44. Тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и в течение пятой секунды от начала движения прошло путь 27 м. С каким ускорением оно двигалось?

1.45. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Во сколько раз путь, пройденный им за вторую секунду, больше пути, пройденного за первую секунду?

1.46. Двигаясь с постоянным ускорением в одном направлении, тело за два последовательных промежутка времени величиной по 2 с каждый проходит отрезки пути 16 м и 8 м. Найдите скорость тела в начале первого этапа.

1.47. Тело, которому была сообщена начальная скорость 10 м/с, движется после этого с постоянным ускорением, равным 2 м/с^2 и направленным противоположно начальной скорости. Определите путь, пройденный телом за 8 с от начала движения.

Движение в поле тяжести (по вертикали) (15–19)

1.48. С высоты 12 м над землей без начальной скорости падает тело. На какой высоте окажется тело через 1 с после начала падения? g = 10 м/с^2.

1.49. Определите, на сколько метров путь, пройденный свободно падающим телом в десятую секунду, больше пути, пройденного телом в предыдущую секунду. Начальная скорость тела равна нулю. g = 10 м/с^2.

1.50. С какой скоростью надо бросить тело вертикально вверх с поверхности земли, чтобы время от момента броска до момента падения тела на землю равнялось 3 с? g = 10 м/с^2.

1.51. Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли со скоростью 20 м/с. На какую максимальную высоту оно поднимется? g = 10 м/с^2.

1.52. Два тела брошены с земли вертикально вверх. Начальная скорость первого тела в 4 раза больше начальной скорости второго. Во сколько раз выше поднимется первое тело, чем второе?

1.53. В некоторый момент времени скорость свободно падающего тела равна 6 м/с. Какой будет скорость тела через 2 с? g = 10 м/с^2.

1.54. Мяч брошен с некоторой высоты вертикально вниз со скоростью 4 м/с. Найдите среднюю скорость движения мяча за первые две секунды движения. g = 10 м/с^2.

1.55. Вертикально вниз брошен камень со скоростью 2 м/с. Во сколько раз увеличится скорость камня через 1 с после броска? g = 10 м/с^2.

1.56. Скорость тела, брошенного вертикально вниз, увеличилась через одну секунду в 6 раз. Во сколько раз увеличится его скорость по сравнению с начальной через две секунды после броска?

1.57. С какой скоростью тело было брошено вертикально вверх, если через время 0,8 с после броска его скорость при подъеме уменьшилась вдвое? $g = 10$ м/с^2.

1.58. Металлический шарик, упавший с высоты 20 м на доску, отскакивает от нее с потерей 25% скорости. Через сколько секунд после удара шарик второй раз упадет на доску? $g = 10$ м/с^2.

1.59. Тело брошено вертикально вверх с высоты 40 м с начальной скоростью 5 м/с. На какой высоте окажется тело через 2 с? $g = 10$ м/с^2.

1.60. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 20 м/с. Найдите путь, пройденный телом за 3 с от начала движения. $g = 10$ м/с^2.

1.61. Тело, брошенное вертикально вверх из точки, находящейся над землей на высоте 8 м, падает на землю через 2 с после броска. С какой скоростью брошено тело? $g = 10$ м/с^2.

1.62. С высоты 2,4 м вертикально вниз брошен мяч со скоростью 1 м/с. Чему будет равна его скорость в момент падения? $g = 10$ м/с^2.

1.63. С высоты 2,4 м вертикально вниз брошен мяч со скоростью 1 м/с. Через какое время (в мс) мяч достигнет поверхности земли? $g = 10$ м/с^2.

1.64. Тело свободно падает с высоты 80 м. Какой путь оно пройдет в последнюю секунду падения? $g = 10$ м/с^2.

1.65. Тело брошено вертикально вверх с поверхности земли. Во сколько раз скорость тела меньше первоначальной скорости на высоте, составляющей 8/9 максимальной высоты подъема?

1.66. Камень, брошенный вертикально вверх, дважды был на одной и той же высоте — спустя 0,8 с и 1,5 с после начала движения. Чему равна эта высота? $g = 10$ м/с^2.

1.67. С какой высоты падает тело без начальной скорости, если путь, пройденный им за последнюю секунду движения, в пять раз больше пути, пройденного за первую секунду? $g = 10$ м/с^2.

1.68. Свободно падающее тело в последние 10 с своего движения проходит 3/4 всего пути. Определите высоту, с которой падало тело без начальной скорости. $g = 10$ м/с^2.

1.69. Из вертикальной трубки высыпается песок, причем диаметр его струи остается равным диаметру трубки. Скорость песчинок у конца трубки 1 м/с. Во сколько раз средняя плотность песка в струе на расстоянии 2,4 м от конца трубки будет меньше, чем внутри трубки у ее конца? Считать, что каждая песчинка падает свободно с ускорением $g = 10$ м/с^2.

Движение двух тел (20–22)

1.70. По одному направлению из одной точки одновременно начали двигаться два тела: одно равномерно со скоростью 5 м/с, а другое равноускоренно без начальной скорости с ускорением 2 м/с^2. Через сколько секунд второе тело догонит первое?

1.71. С аэростата, опускающегося со скоростью 5 м/с, бросают вертикально вверх тело со скоростью 10 м/с относительно земли. Через какое время тело поравняется с аэростатом? $g = 10$ м/с^2.

1.72. Два камня находятся на одной вертикали на расстоянии 20 м друг от друга. В некоторый момент времени верхний камень бросают вертикально вниз со скоростью 2 м/с, а нижний камень отпускают без начальной скорости. Через сколько секунд камни столкнутся?

1.73. С неподвижно зависшего над поверхностью земли вертолета сбросили без начальной скорости два груза, причем второй на 1 с позже первого. Определите расстояние между грузами через 4 с после начала движения первого груза. $g = 10$ м/с^2.

1.74. С высоты 3,2 м начинает падать без начальной скорости маленький шарик. Одновременно другой шарик брошен вверх с поверхности земли с начальной скоростью в 1,5 раза меньшей, чем имел бы первый шар при падении на землю. На какой высоте (в см) шары столкнутся?

1.75. Скоростной лифт опускается с ускорением 5 м/с^2 относительно земли. В некоторый момент времени с потолка лифта начинает падать болт. Высота лифта 2,5 м. Определите время падения болта. $g = 10$ м/с^2.

1.76. Когда пассажиру осталось дойти до двери вагона 25 м, поезд тронулся с места и стал разгоняться с ускорением 0,5 м/с^2. Пассажир побежал с постоянной скоростью. При какой минимальной скорости он догонит свой вагон?

Несколько последовательных этапов движения (23–24)

1.77. Какой путь пройдет тело по прямой линии, если в течение первых 5 с оно движется с постоянной скоростью 2 м/с, а затем в течение 5 с разгоняется с постоянным ускорением 2 м/с^2?

1.78. Бегун за 4 с разгоняется до скорости 10 м/с, после чего бежит с постоянной скоростью. Какой результат он показал на дистанции 100 м?

1.79. Двигаясь от стоянки равноускоренно, автомобиль за 10 с достигает скорости 20 м/с. Следующие 5 с он движется равномерно, а затем останавливается в течение 5 с, двигаясь с постоянным ускорением. Найдите путь автомобиля за все время движения.

1.80. Расстояние между двумя светофорами автомашина прошла на первом участке, равном 0,1 всей его длины, равноускоренно и набрала скорость 20 м/с. Затем она шла равномерно с этой скоростью и на последнем участке, равном по длине первому, тормозила с постоянным ускорением. Какова средняя скорость (в км/ч) автомашины?

1.81. Мальчик, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, съехал на санках с горы длиной 50 м за 10 с, а затем проехал по горизонтальному участку еще 25 м до остановки. Найдите величину ускорения мальчика на втором участке движения.

1.82. Двигатель ракеты, взлетевшей вертикально вверх, работал в течение 20 с. Ракета, продолжая двигаться еще некоторое время, достигла максимальной высоты полета 1,5 км. Найдите ускорение ракеты во время работы двигателей. $g = 10$ м/с^2.

1.83. Тело начинает двигаться вдоль прямой без начальной скорости с постоянным ускорением. Через 28 с ускорение тела меняется по направлению на противоположное и уменьшается по величине на 4%. Через какое время после этого тело вернется в исходную точку?

1.84. Конькобежец проходит 450 м с постоянной скоростью v, а затем тормозит до остановки с ускорением 0,5 м/с^2. При некотором значении скорости v общее время движения конькобежца будет минимально. Чему равно это время?

Горизонтальный бросок (25–27)

1.85. Самолет летит горизонтально со скоростью 900 км/ч на высоте 8 км. За сколько километров до цели летчик должен сбросить бомбу? g = 10 м/с^2.

1.86. Во сколько раз увеличится дальность полета тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты, если начальную скорость тела увеличить в 2 раза?

1.87. На сколько процентов увеличится дальность полета тела, брошенного горизонтально, если начальную высоту в 4 раза уменьшить, а начальную скорость в 3 раза увеличить?

1.88. С башни высотой 45 м горизонтально брошен камень с некоторой скоростью. Через сколько секунд он упадет на землю? g = 10 м/с^2.

1.89. Дальность полета тела, брошенного горизонтально со скоростью 4,9 м/с, равна высоте, с которой его бросили. Чему равна эта высота (в см)? g = 9,8 м/с^2.

1.90. Камень, брошенный горизонтально со скоростью 15 м/с, упал на землю со скоростью 25 м/с. Сколько времени длился полет камня? g = 10 м/с^2.

1.91. Тело бросили горизонтально со скоростью 40 м/с с некоторой высоты. Определите его скорость через три секунды. g = 10 м/с^2.

1.92. Из окна, расположенного на высоте 5 м от земли, горизонтально брошен камень, упавший на расстоянии 8 м от дома. С какой скоростью был брошен камень? g = 10 м/с^2.

1.93. Камень брошен горизонтально. Через 2 с после броска вектор его скорости составил угол 45° с горизонтом. Найдите начальную скорость камня. g = 10 м/с^2.

1.94. Тело брошено горизонтально. Через 2 с после броска угол между направлением полной скорости и полного ускорения стал равным 60°. Определите величину полной скорости тела в этот момент времени. g = 10 м/с^2.

1.95. Камень на высоте 5,5 м бросают горизонтально так, что он подлетает к поверхности земли под углом 45°. Сколько метров пролетел камень по горизонтали?

1.96. С самолета, летящего на высоте 500 м со скоростью 180 км/ч, выпал груз. На какой высоте скорость груза будет направлена под углом 60° к горизонту? g = 10 м/с^2.

1.97. Мяч брошен горизонтально со скоростью 2 м/с. Расстояние между двумя последовательными ударами мяча о горизонтальную поверхность равно 4 м. С какой высоты был брошен мяч? g = 10 м/с^2. (Удары о пол абсолютно упругие.)

1.98. Железный шарик подкатился к краю верхней ступеньки лестницы со скоростью 1,5 м/с. Высота и ширина каждой ступени 20 см. О какую по счету ступеньку шарик ударится впервые? Первой считать ступеньку сразу после той, на которой находился шар. g = 10 м/с^2.

1.99. В вертикальную мишень с расстояния 120 м из неподвижной винтовки сделано два выстрела в горизонтальном направлении. Скорость первой пули 300 м/с, второй 400 м/с. Определите расстояние (в см) между пробоинами в мишени. $g = 10$ м/с^2.

1.100. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии 30 м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью 9 м/с, а второй одновременно бросают горизонтально по направлению к первому камню со скоростью 12 м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?

Бросок под углом (28–33)

1.101. Мяч брошен с поверхности земли под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с. Сколько секунд длился полет мяча до его удара о землю? $g = 10$ м/с^2.

1.102. Найдите высоту подъема сигнальной ракеты, выпущенной со скоростью 40 м/с под углом 60° к горизонту. $g = 10$ м/с^2.

1.103. Снаряд, вылетевший из орудия под углом к горизонту, находился в полете 20 с. Какой наибольшей высоты достиг снаряд? $g = 10$ м/с^2.

1.104. Камень, брошенный под углом к горизонту, достиг наибольшей высоты 20 м. Найдите время полета камня. $g = 10$ м/с^2.

1.105. Найдите дальность полета сигнальной ракеты, выпущенной со скоростью 40 м/с под углом 15° к горизонту. $g = 10$ м/с^2.

1.106. Тело брошено с поверхности земли под углом 30° к горизонту. Полное время полета оказалось равным 2 с. Найдите начальную скорость тела. $g = 10$ м/с^2.

1.107. Под каким углом (в градусах) к горизонту нужно бросить тело, чтобы скорость его в наивысшей точке подъема была вдвое меньше первоначальной?

1.108. Камень, брошенный под углом к горизонту, упал на землю со скоростью 15 м/с. Чему равна максимальная высота подъема камня, если известно, что во время движения его наибольшая скорость была втрое больше, чем наименьшая? $g = 10$ м/с^2.

1.109. Из зенитного орудия производят выстрел в тот момент, когда самолет, летящий со скоростью 540 км/ч на высоте 2 км, находится точно над орудием. При какой наименьшей скорости вылета снаряда можно поразить цель? $g = 10$ м/с^2.

1.110. Тело брошено со скоростью 30 м/с под углом 45° к горизонту. На какой высоте будет тело в тот момент, когда его скорость будет направлена под углом 30° к горизонту? $g = 10$ м/с^2.

1.111. Диск, брошенный под углом 45° к горизонту, достиг наибольшей высоты 15 м. Какова дальность полета диска?

1.112. Из одной и той же точки с поверхности земли брошены два камня. Первый упал на землю на расстоянии L, второй — на расстоянии $3L$. Под каким углом (в градусах) к горизонту был брошен первый камень, если второй брошен под углом 30°, а высоты подъема у них одинаковы?

1.113. С какой скоростью должна вылететь мина из миномета в момент старта ракеты, взлетающей вертикально вверх с ускорением $3g$ без начальной скорости, чтобы поразить эту ракету? Расстояние от миномета до места старта ракеты 250 м, мина вылетает под углом 45° к горизонту. $g = 10$ м/с^2.

1.114. Футбольный мяч посылается с начальной скоростью 10 м/с под углом 15° к горизонту. На расстоянии 3 м от точки удара находится вертикальная стена, о которую мяч упруго ударяется. Найдите расстояние от точки удара по мячу до места его приземления. $g = 10$ м/с^2.

1.115. Из шланга бьет струя воды под углом 15° к горизонту. Струя падает на расстоянии 20 м от шланга. Площадь отверстия 1 см^2. Какая масса воды выбрасывается из шланга за 1 минуту? $g = 10$ м/с^2.

1.116. Из точки, расположенной на высоте 15 м, бросают камень со скоростью 20 м/с под углом 30° к горизонту. Через какое время камень упадет на землю? $g = 10$ м/с^2.

1.117. Из точки, расположенной на высоте 30 м над землей, бросают камень со скоростью 20 м/с под углом 45° к горизонту. На каком расстоянии (по горизонтали) от точки броска упадет камень? $g = 10$ м/с^2.

1.118. Из некоторой точки на склоне горы бросают вверх по склону тело с начальной скоростью 21 м/с под углом 60° к горизонту. На каком расстоянии от точки броска упадет тело, если угол наклона горы 30°? $g = 9{,}8$ м/с^2.

1.119. На горе с углом наклона к горизонту 30° бросают мяч с начальной скоростью 6 м/с перпендикулярно склону горы. На каком расстоянии (в см) от точки бросания вдоль наклонной плоскости упадет мяч? $g = 10$ м/с^2.

1.120. Из некоторой точки одновременно бросают два камня: один в северном направлении под углом 30° к горизонту со скоростью 24 м/с, другой в южном направлении под углом 60° к горизонту со скоростью 32 м/с. Найдите расстояние между камнями через 1,5 с.

1.121. Два камня расположены на одной горизонтали на расстоянии 42 м друг от друга. Один камень бросают вертикально вверх со скоростью 5 м/с, а второй одновременно бросают под углом 30° к горизонту по направлению к первому камню со скоростью 8 м/с. Чему равно наименьшее расстояние между камнями в процессе движения?

Вращательное движение (34–35)

1.122. Одно колесо равномерно вращается, совершая 50 оборотов в секунду. Второе колесо, равномерно вращаясь, делает 500 оборотов за 30 секунд. Во сколько раз угловая скорость первого колеса больше, чем второго?

1.123. За сколько секунд колесо, вращаясь равномерно с угловой скоростью 4π рад/с, сделает 100 оборотов?

1.124. Угловая скорость лопастей вентилятора 20π рад/с. Найдите число оборотов за 10 минут.

1.125. На плоскости диска проведена прямая от его центра к краю по радиусу. Диск начал равномерно вращаться, при этом прямая повернулась на угол $(2/3)\pi$ радиан за 7 с. Найдите период обращения диска.

1.126. С какой угловой скоростью вращается колесо, если линейная скорость точек его обода равна 0,5 м/с, а линейная скорость точек, находящихся на 4 см ближе к оси вращения, равна 0,3 м/с?

1.127. Минутная стрелка часов на 20% длиннее секундной. Во сколько раз линейная скорость конца секундной стрелки больше, чем конца минутной стрелки?

1.128. При равномерном подъеме груза с помощью лебедки, диаметр барабана которой 18 см, скорость подъема груза равна 0,9 м/с. Найдите угловую скорость вращения барабана лебедки.

1.129. Через блок радиусом 0,2 м переброшена нерастяжимая нить с одинаковыми грузиками на концах. Ось блока поднимается со скоростью 1 м/с, а один из грузиков опускается со скоростью 2 м/с (относительно земли). Чему равна угловая скорость вращения блока?

1.130. Пуля, выпущенная из винтовки, попадает во вращающийся с частотой 50 об/с тонкостенный цилиндр диаметром 20 см. Найдите скорость пули, если выстрел произведен в направлении диаметра цилиндра, а к моменту вылета пули из цилиндра входное отверстие сместилось на 1 см. $\pi = 3,14$.

1.131. Во сколько раз линейная скорость точки поверхности Земли, лежащей на широте 60°, меньше линейной скорости точки, лежащей на экваторе?

1.132. Определите величину центростремительного ускорения точки, движущейся по окружности с угловой скоростью 16 рад/с и линейной скоростью 2 м/с.

1.133. Во сколько раз увеличится центростремительное ускорение точек обода колеса, если период обращения колеса уменьшится в 5 раз?

Кинематические связи (36–40)

1.134. Через блок перекинули нерастяжимую нить, к концам которой прикрепили два шарика. Ось блока поднимают вертикально вверх со скоростью 4 м/с, удерживая при этом на месте один из шариков. С какой скоростью движется другой шарик?

1.135. Длинную нить с двумя одинаковыми грузами на концах перекинули через два гвоздя, прибитых на одной высоте на расстоянии 1,2 м друг от друга. Точку нити, расположенную посередине между гвоздями, начинают перемещать вниз с постоянной скоростью 1 м/с. Чему будет равна скорость (в см/с) грузов в тот момент, когда они поднимутся на 40 см?

1.136. С какой скоростью движется без проскальзывания автомобиль, если диаметр колеса равен 60 см, а угловая скорость его вращения 60 рад/с?

1.137. Палочку длиной 60 см прислонили к стене, и она начала соскальзывать. В тот момент, когда расстояние между нижним концом палочки и стеной было равно 48 см, его скорость была равна 18 см/с. Чему была равна в этот момент скорость (в см/с) верхнего конца?

1.138. Палочка движется по плоскости. В некоторый момент скорость одного конца палочки направлена вдоль палочки и равна 25 см/с, а скорость второго конца направлена под углом 60° к линии палочки. Чему равна в этот момент скорость (в см/с) второго конца?

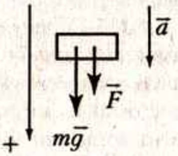
1.139. Пластинка в виде равностороннего треугольника ABC движется по плоскости. В некоторый момент скорость точки A направлена параллельно AC, а скорость точки B направлена параллельно BC и равна 15 см/с. Чему равна в этот момент скорость (в см/с) точки C?

Глава 2
Динамика

Примеры решения задач

Решение задач динамики надо начинать с изготовления рисунка, на котором изображено тело (или несколько тел) и действующие на него силы. Каждая сила должна указывать на взаимодействие тела с каким-либо другим конкретным телом и иметь вполне определенную физическую природу (сила тяжести, сила упругости, сила трения, и т. д.). В некоторых случаях как природа силы, так и ее источник не конкретизируются, просто говорится, что действует внешняя сила, приводящая тело в движение (такую силу часто называют силой тяги). На рисунке следует также изобразить направление ускорения (если оно известно) и положительные направления осей координат. Только после этого можно записывать уравнение движения — второй закон Ньютона (обычно в проекции на одну или несколько осей).

Задача 1. *С какой силой нужно действовать на тело массой 10 кг, чтобы оно двигалось вертикально вниз с ускорением 5 м/с^2? g = 10 м/с^2.*



На тело действуют сила тяжести и сила тяги. Поскольку направление силы тяги заранее не известно, ее можно условно изобразить действующей в произвольном направлении (если получится отрицательный ответ, то сила направлена в противоположную сторону). Положительное направление выбирают обычно по ускорению (чтобы не забыть поставить минус перед ma). 2-ой закон Ньютона в проекции на положительное направление принимает вид

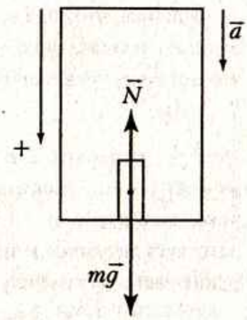
$$F + mg = ma,$$

откуда получаем $F = m(a - g) = -50$ Н. Значит, величина силы равна 50 Н и она направлена не вниз, а вверх.

Замечание. Силу неизвестного направления удобно изображать действующей в положительном направлении оси. Тогда мы найдем проекцию силы на ось, и знак ответа укажет направление силы по отношению к оси.

Задача 2. *Чему равен вес стоящего в лифте человека массой 70 кг, если лифт опускается с ускорением, направленным вниз и равным 3 м/с^2? g = 10 м/с^2.*

Вес тела приложен не к человеку, а к опоре (к полу), поэтому вместо веса будем искать силу реакции пола, которая действует на человека и по 3-му закону Ньютона равна весу по модулю ($P = N$). Кроме реакции пола, на человека действует сила тяжести. Выбирая положительное направление оси вниз (по ускорению), получим

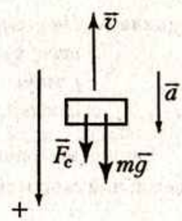


$$mg - N = ma,$$

откуда $P = N = m(g - a) = 490$ Н.

Задача 3 . *Тело массой 1 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 40 м/с, достигло высшей точки подъема через 2,5 с. Найдите значение силы сопротивления воздуха, считая ее постоянной. $g = 10$ м/с^2.*

Изобразим на рисунке силы, действующие на тело, и его ускорение и запишем 2-ой закон Ньютона в векторном виде (этот этап решения не является обязательным)



$$m\vec{g} + \vec{F}_c = m\vec{a}\,.$$

Выберем положительное направление для вертикальной оси, на которую спроектируем обе части уравнения движения

$$mg + F_c = ma.$$

Величину ускорения найдем из кинематики, записав условие обращения скорости в ноль в верхней точке

$$0 = v_0 - at.$$

Заметим, что при записи кинематических уравнений мы не обязаны использовать те же оси, что для 2-го закона Ньютона, так как в обоих уравнениях a обозначает *величину* ускорения. Получаем

$$F_c = m(a - g) = m\left(\frac{v_0}{t} - g\right) = 6 \text{ Н}.$$

Задача 4. *Автомобиль начал двигаться с ускорением 3 м/с^2. При скорости 60 км/ч его ускорение стало равным 1 м/с^2. Определите, с какой установившейся скоростью (в км/ч) будет двигаться автомобиль, если сила тяги мотора остается постоянной, а сила сопротивления пропорциональна скорости.*

Условие, что сила сопротивления пропорциональна скорости, удобнее всего записать в явном виде, введя коэффициент пропорциональности k (и исключив его потом из уравнений). Тогда уравнение движения можно записать в виде

$$F_т - kv = ma.$$

где $F_т$ — сила тяги. Это уравнение надо записать для трех случаев. В начальный момент $v = 0$ и ускорение максимально: $a_0 = 3$ м/с^2. При скорости $v_1 = 60$ км/ч ускорение равно $a_1 = 1$ м/с^2. Установившаяся скорость (обозначим ее v_2) соответствует ситуации, когда сила сопротивления компенсирует силу тяги, т. е. ускорение равно нулю. Получаем систему трех уравнений

$$F_т = ma_0, \qquad F_т - kv_1 = ma_1, \qquad F_т - kv_2 = 0.$$

Исключая $F_т$ и k (m сокращается), получаем

$$v_2 = \frac{a_0}{a_0 - a_1} v_1 = 90 \text{ км/ч}.$$

Задача 5. *Начальная скорость тела равна 10 м/с. Считая, что на тело действует только сила сопротивления среды, пропорциональная его скорости, с коэффициентом пропорциональности 2 кг/с, найдите расстояние, пройденное телом до остановки. Масса тела 4 кг.*

Запишем второй закон Ньютона (в проекции на направление, совпадающее с начальной скоростью)

$$ma_x = -kv_x,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Умножим обе части уравнения на малый интервал времени Δt и учтем, что $a_x \Delta t = \Delta v_x$ и $v_x \Delta t = \Delta x$

$$m\Delta v_x = -k\Delta x.$$

Разобьем конечный интервал движения на много малых интервалов и просуммируем обе части уравнения по всем интервалам. Получим

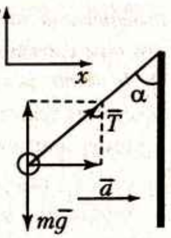
$$m(v_x - v_0) = -ks_x.$$

В данной задаче $v_x = 0$, т. е. $s = s_x = mv_0/k = 20$ м.

Задача 6. *Какой угол (в градусах) с вертикалью составляет нить с грузом, подвешенным на тележке, которая движется в горизонтальном направлении с ускорением 10 м/с^2? $g = 10$ м/с^2.*

На груз действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити, направленная вдоль нити. Выбрав одну из осей горизонтально (вдоль ускорения), а вторую — вертикально вверх, запишем уравнение движения в проекции на эти оси

$$T\sin\alpha = ma,$$
$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

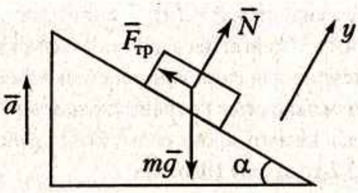


Исключив из этих уравнений силу T, получим

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{g} = 1,$$

т. е. $\alpha = 45^\circ$.

Задача 7. *На наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту лежит брусок массой 5 кг. Наклонная плоскость стоит в лифте, движущемся с ускорением 2 м/с², направленным вверх. Определите силу нормального давления кубика на плоскость.* $g = 10$ *м/с²*. $\sqrt{3} = 1{,}7$.



На тело действуют сила тяжести, сила нормальной реакции и сила трения покоя. Можно записать проекции уравнения движения на горизонтальную и вертикальную оси и из полученной системы уравнений, исключив $F_{тр}$, найти N. Попробуйте сделать это сами, а мы покажем другой подход. Выберем ось не вдоль ускорения, а вдоль силы реакции (перпендикулярно силе трения) и спроектируем на эту ось уравнение движения

$$\vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Получим

$$N - mg\cos\alpha = ma\cos\alpha,$$

откуда $N = m(g + a)\cos\alpha = 51$ Н. Такой подход требует аккуратности, и его следует применять тогда, когда он заметно упрощает расчеты. Например, в предыдущей задаче можно обойтись одним уравнением, направив ось перпендикулярно нити, но решение от этого не становится проще.

Замечание. Ответ для силы реакции очень похож на выражение, которое получается в случае неподвижной наклонной плоскости. Отличие только в том, что на месте g стоит теперь $(g + a)$, — как будто все свелось к изменению силы тяжести! (См. также реш. 2.) Это не случайное совпадение, а проявление общего правила, которое формулируется следующим образом: *находясь в неинерциальной системе отсчета, которая движется поступательно с ускорением* $\vec{a}_{со}$, *можно, как обычно, записывать 2-ой закон Ньютона, но к реальным силам надо добавить* ***силу инерции*** $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_{со}$, *или, что то же самое, силу тяжести* $m\vec{g}$

заменить на $m(\vec{g}-\vec{a}_{со})$. Это правило легко обосновать, если воспользоваться законом сложения ускорений. Запишем закон Ньютона в инерциальной СО: $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$ и представим ускорение тела в виде $\vec{a} = \vec{a}_{со} + \vec{a}_{отн}$, где $\vec{a}_{отн}$ — ускорение тела в движущейся СО. Перенеся $m\vec{a}_{со}$ в левую часть равенства, получим уравнение движения тела в ускоренно движущейся СО

$$\sum \vec{F}_i + (-m\vec{a}_{со}) = m\vec{a}_{отн}.$$

Задача 8. *Тело массой 1 кг находится на горизонтальной плоскости. На тело действует горизонтальная сила 2 Н. Определите силу трения, если коэффициент трения 0,3.*

Стандартная ошибка состоит в том, что для силы трения не задумываясь применяют формулу $F_{тр} = \mu N = \mu mg$ и получают значение $F_{тр} = 3$ Н ($N - mg = 0$ — проекция уравнения движения на вертикальную ось). Но это значение больше, чем сила тяги $F = 2$ Н — получается, что потянув тело в одну сторону, мы заставим его двигаться в другую! Ошибка состоит в том, что формула $F_{тр} = \mu N$ применима для *силы трения скольжения*, т. е. когда тело скользит по поверхности (или находится на грани скольжения), а в данном случае это не так. Тело покоится, и на него, кроме силы тяги F, действует *сила трения покоя*, которую находим из 2-го закона Ньютона

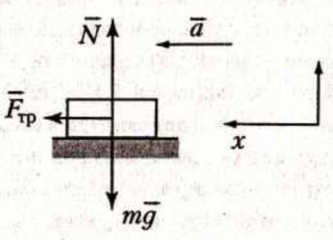
$$F - F_{тр} = 0.$$

т. е. $F_{тр} = F = 2$ Н. Проверка предположения об отсутствии скольжения как раз и состоит в том, что это значение должно быть меньше или равно, чем максимальное значение силы трения покоя $F_{тр} \le \mu N$.

Задача 9. *С каким максимальным ускорением должен разгоняться грузовик, чтобы незакрепленный груз в его кузове не начал смещаться к заднему борту? Коэффициент трения груза о дно кузова 0,2. $g = 10$ м/с^2.*

Предположим, что ускорение грузовика достигло «критического» значения: груз еще не скользит, но находится на грани скольжения. Это значит, что сила трения покоя достигла максимального значения

$$F_{тр} = \mu N,$$



где N находим из проекции уравнения движения на ось y

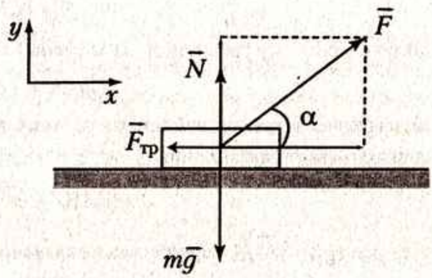
$$N - mg = 0.$$

Сила трения покоя направлена вперед — именно она сообщает грузу ускорение, равное ускорению грузовика

$$F_{тр} = ma.$$

Из этих уравнений находим ускорение: $a = \mu g = 2$ м/с^2.

Задача 10. *Человек везет двое связанных саней, прикладывая силу под углом 30° к горизонту. Найдите эту силу, если известно, что сани движутся равномерно. Массы саней по 40 кг. Коэффициент трения 0,3. $\sqrt{3} = 1,7$. $g = 10$ м/с^2.*



Так как двое саней движутся как одно целое, можно записать 2-ой закон Ньютона для системы двух саней, учитывая только внешние для этой системы силы

$$\bar{F} + m\bar{g} + \bar{F}_{тр} + \bar{N} = 0,$$

где F — сила тяги, $m = 80$ кг — суммарная масса саней, $F_{тр}$ — суммарная сила трения и N — суммарная нормальная реакция горизонтальной опоры. Так как коэффициент трения у саней одинаковый, $F_{тр}$ и N связаны соотношением

$$F_{тр} = \mu N.$$

Записывая проекции уравнения движения на оси, получим

$$F\cos\alpha - F_{тр} = 0$$

$$F\sin\alpha + N - mg = 0$$

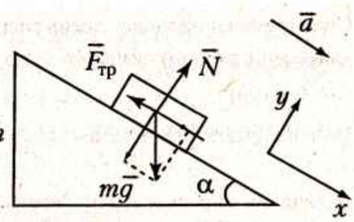
(Обратите внимание: хотя движение происходит по горизонтальной поверхности, реакция опоры N не равна mg.) Из этих трех уравнений выражаем силу тяги

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 240 \text{ Н}.$$

Задача 11. *За сколько секунд маленькая шайба соскользнет с наклонной плоскости высотой 2,5 м и углом наклона к горизонту 60°, если по наклонной плоскости из такого же материала с углом наклона 30° она движется вниз равномерно? $g = 10$ м/с^2.*

Запишем 2-ой закон Ньютона для тела, соскальзывающего с наклонной плоскости

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}$$



Направим ось x параллельно наклонной плоскости (по ускорению), а ось y — перпендикулярно ей, и спроектируем уравнение движения на эти оси

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$$

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Дополнив эти уравнения формулой для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

получим систему уравнений, из которой найдем ускорение

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Коэффициент трения найдем из условия, что при угле наклона $\beta = 30°$ шайба соскальзывает равномерно

$$g(\sin\beta - \mu\cos\beta) = 0,$$

т. е. $\mu = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}/3$. Время соскальзывания найдем из уравнения кинематики

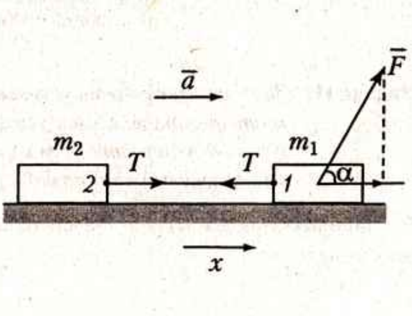
$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{at^2}{2},$$

откуда получаем

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)\sin\alpha}} = 1 \text{ с}.$$

Задача 12. *По гладкой горизонтальной поверхности движутся два тела, связанные легкой нитью, под действием силы 10 Н, приложенной к первому телу и направленной под углом 60° к горизонту. Чему равна сила натяжения нити, если масса первого тела в 1,5 раза больше массы второго?*

В данной задаче силы трения отсутствуют, силы нормальной реакции определять не нужно, поэтому на рисунке изображены только те силы, которые имеют проекцию на горизонтальную ось. Запишем в проекции на эту ось 2-ой закон Ньютона для всей системы и для второго тела



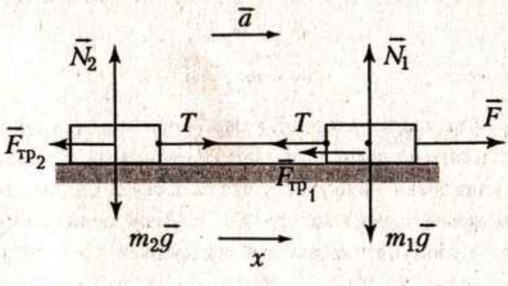
$$F\cos\alpha = (m_1 + m_2)\, a, \quad T = m_2 a$$

(ускорения тел одинаковы вследствие нерастяжимости нити). Исключив ускорение, получим

$$T = F\cos\alpha \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{F\cos\alpha}{1 + m_1/m_2} = 2\ \text{Н}.$$

Замечание. Постоянство силы натяжения нити вдоль ее длины является следствием ее невесомости. Записав 2-ой закон Ньютона для участка нити между точками 1 и 2: $T_1 - T_2 = m_{н}a$ и учтя, что масса нити равна нулю, получим $T_1 = T_2$.

Задача 13. *Два тела, лежащие на столе, соединены нитью. К более легкому телу приложена горизонтальная сила, в результате чего тела движутся по столу с ускорением. При этом сила натяжения нити составляет 4/5 величины приложенной силы. Во сколько раз масса легкого тела меньше массы тяжелого тела? Коэффициенты трения тел о стол одинаковы.*



Запишем 2-ой закон Ньютона для первого и второго тела в проекции на горизонтальную ось

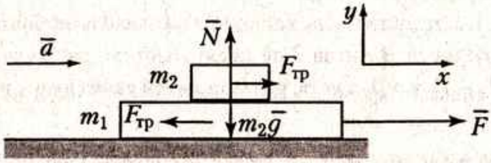
$$F - \mu m_1 g - T = m_1 a, \quad T - \mu m_2 g = m_2 a$$

(мы учли, что $F_{тр1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$, то же для m_2). Чтобы исключить ускорение, поделим первое уравнение на m_1, а второе — на m_2, и приравняем левые части. Видно, что одновременно из уравнения уходит и коэффициент трения

$$\frac{F - T}{m_1} = \frac{T}{m_2}.$$

Подставляя сюда $T = 0{,}8F$, получаем $m_2/m_1 = 4$.

Задача 14. *Доска массой 12 кг находится на гладкой горизонтальной плоскости. На доске лежит брусок массой 3 кг. Коэффициент трения между доской и бруском 0,2. Какую минимальную горизонтальную силу надо приложить к доске, чтобы брусок начал с нее соскальзывать? $g = 10$ м/с^2.*



Рассмотрим ситуацию «на грани проскальзывания»: доска и брусок еще движутся как одно целое, но сила трения покоя между ними уже достигла своего максимального значения $F_{тр} = \mu N$. Удобно начать рассмотрение с бруска, поскольку он движется только под действием силы трения

$$F_{тр} = m_2 a,$$

$$N - m_2 g = 0.$$

Получаем $F_{тр} = \mu m_2 g$, откуда $a = \mu g$. Именно при этом ускорении системы брусок начнет скользить по доске. Для определения силы F можно записать 2-ой закон Ньютона для доски (надо учесть, что на доску со стороны бруска действует сила трения, направленная назад и равная, по 3-му закону Ньютона, $\mu m_2 g$). Но проще записать закон Ньютона для всей системы

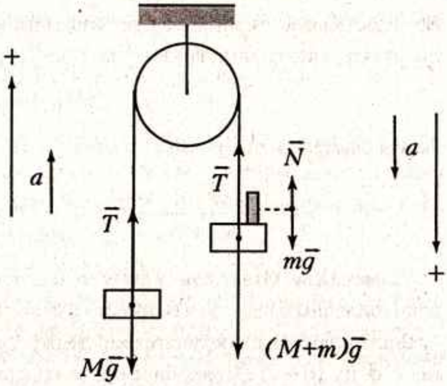
$$F = (m_1 + m_2)a = = \mu\,(m_1 + m_2)g = 30 \text{ Н}.$$

Задача 15. *Через блок с неподвижной осью перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы по 400 г каждый. На один из грузов положили перегрузок массой 200 г. Найдите силу давления (в мН) перегрузка на груз в процессе движения. $g = 10$ м/с^2.*

Запишем уравнение движения для груза массой M, ускорение которого направлено вверх, и для груза с перегрузком общей массой $M+m$, ускорение которых направлено вниз, в проекции на вертикальную ось

$$T - Mg = Ma$$
$$(M + m)g - T = (M + m)a$$

(положительное направление для каждого тела мы направили вдоль его ускорения). Равенство по величине ускорений правого и левого тела является следствием нерастяжимости нити, а равенство сил натяжения на разных концах нити — следствием невесомости нити (см. реш. 12) и идеальности блока (для раскручивания невесомого блока без трения не нужен вращательный момент). Складывая уравнения, находим ускорение грузов



$$a = \frac{m}{2M + m} g.$$

Чтобы найти силу давления перегрузка на груз, запишем уравнение движения перегрузка (сила реакции со стороны груза равна силе давления по 3-му закону Ньютона)

$$mg - N = ma.$$

Получаем

$$N = m(g - a) = \frac{2Mm}{2M + m} g = 1{,}6 \text{ Н} = 1600 \text{ мН}.$$

Задача 16. *К потолку кабины лифта, поднимающегося с ускорением 2 м/с², прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами 1 кг и 3 кг. Определите показания динамометра. $g = 10$ м/с².*

Из невесомости блока следует, во-первых, что силы натяжения нити T справа и слева от блока равны друг другу (для раскручивания невесомого блока без трения не нужен вращательный момент) и, во-вторых, что сила F, действующая на ось блока со стороны динамометра, равна $2T$. Действительно, 2-ой закон Ньютона для блока имеет вид: $F - 2T = 0$ (члены mg и ma равны нулю вследствие невесомости блока).

Найдем силу натяжения нити из уравнений движения для грузов. Выберем на этот раз общую ось y для обоих грузов (вертикально вверх). Получим

$$T - m_1 g = m_1 a_{1y},$$
$$T - m_2 g = m_2 a_{2y}.$$

Из нерастяжимости нити следует кинематическая связь между ускорением блока (лифта) и ускорениями грузов (см. Глава 1, реш. 36)

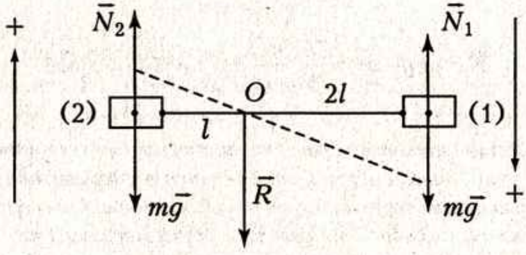
$$2a = a_{1y} + a_{2y}.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$T = \frac{2m_1m_2(g+a)}{m_1+m_2}, \qquad F = 2T = \frac{4m_1m_2(g+a)}{m_1+m_2} = 36 \text{ Н}.$$

Замечание. Ответ для силы натяжения нити выглядит так же, как и в случае неподвижного блока, только вместо g стоит $(g + a)$. Это есть проявление общего правила: переход в поступательно движущуюся систему отсчета приводит к замене $\vec{g}$ на $(\vec{g} - \vec{a})$. Подробнее см. замечание к реш. 7.

Задача 17. *Невесомый стержень может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку, которая делит стержень в отношении 1:2. На концах стержня закреплены одинаковые грузы массой 0,5 кг каждый. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой действует он на ось сразу после этого? $g = 10$ м/с^2.*



Первый груз начнет опускаться вниз с ускорением a_1, второй груз — подниматься вверх с ускорением a_2. Запишем для них 2-ой закон Ньютона в проекции на оси, совпадающие с ускорениями

$$mg - N_1 = ma_1, \quad N_2 - mg = ma_2,$$

где N_1, N_2 — силы, с которыми стержень действует на грузы.

Из невесомости стержня следует связь между силами: $N_2 = 2N_1$. Действительно, на стержень со стороны грузов действуют такие же силы, но направленные в другую сторону, а из невесомости стержня следует, что сумма вращательных моментов относительно оси O равна нулю: $N_1(2l) = N_2 l$. Из того же, что стержень жесткий, следует связь между ускорениями грузов: $a_1 = 2a_2$. Действительно, малое смещение груза 1 в два раза больше, чем смещение груза 2. Подставим эти связи в уравнения

$$mg - N_1 = m\,(2a_2), \quad 2N_1 - mg = ma_2.$$

Исключая ускорение, находим $N_1 = (3/5)mg$, $N_2 = (6/5)mg$. Из второго закона Ньютона для стержня следует, что сила, действующая на стержень со стороны оси, направлена вверх и равна $N_1 + N_2 = (9/5)mg = 9$ Н. Этому же равна сила R, действующая на ось (но она направлена вниз).

Задача 18. *Какое расстояние пройдет тело, свободно падая без начальной скорости в течение 3 с у поверхности планеты, радиус которой на одну треть меньше радиуса Земли, а средняя плотность вещества на 40% меньше, чем средняя плотность Земли? $g = 10$ м/с^2.*

За время t тело пройдет путь

$$s = \frac{g_п t^2}{2},$$

где $g_п$ — ускорение свободного падения на поверхности планеты. Выразим ускорение свободного падения через среднюю плотность вещества планеты $\rho_п$

$$g_п = G\frac{M_п}{R_п^2} = G\frac{\rho_п\left(\frac{4}{3}\pi R_п^3\right)}{R_п^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho_п R_п.$$

Записав в таком же виде ускорение свободного падения на Земле, найдем отношение $g_п$ к g

$$\frac{g_п}{g} = \frac{\rho_п R_п}{\rho R} = \frac{0{,}6\rho\left(\frac{2}{3}R\right)}{\rho R} = 0{,}4.$$

Подставляя $g_п = 4$ м/с^2 в формулу для s, получаем $s = 18$ м.

Задача 19. *Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы обращаться по круговой орбите на высоте 3600 км над поверхностью Земли? Радиус Земли 6400 км. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли 10 м/с^2.*

Из уравнения движения для спутника на высоте h

$$G\frac{mM}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{(R+h)}$$

находим $v^2 = GM/(R+h)$. Из формулы для ускорения свободного падения на поверхности Земли выражаем $GM = gR^2$. Окончательно получаем

$$v = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 6400 \text{ м/с}.$$

Задача 20. *Во сколько раз период обращения спутника, движущегося на расстоянии 21600 км от поверхности Земли, больше периода обращения спутника, движущегося на расстоянии 600 км от ее поверхности? Радиус Земли 6400 км.*

Запишем уравнение движения для двух спутников, движущихся по круговым орбитам разных радиусов

$$G\frac{mM}{r_1^2} = m\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 r_1, \qquad G\frac{mM}{r_2^2} = m\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 r_2$$

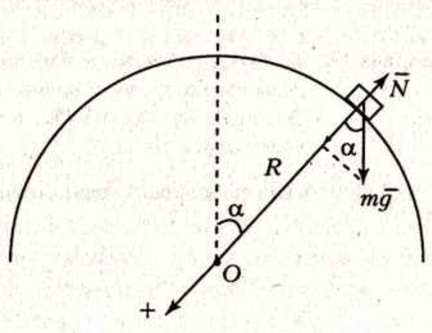
где $r_1 = R + h_1 = 28000$ км и $r_2 = R + h_2 = 7000$ км — радиусы орбит, по которым движутся спутники, $\omega_1 = 2\pi/T_1$ и $\omega_2 = 2\pi/T_2$ — угловые скорости их вращения. Поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

(3-й закон Кеплера для круговых орбит). Подставив $r_1/r_2 = 4$, получим $T_1/T_2 = 8$.

Задача 21. *Автомобиль массой 1000 кг едет по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 250 м, со скоростью 72 км/ч. С какой силой (в кН) давит автомобиль на мост в точке, направление на которую из центра кривизны моста составляет 30° с вертикалью? $g = 10$ м/с². $\sqrt{3} = 1,72$.*

Из кинематики известно, что если направить ось координат по радиусу (от тела к центру окружности), то проекция ускорения на эту ось будет равна v^2/R (или $\omega^2 R$). Проекция уравнения движения на эту ось имеет вид

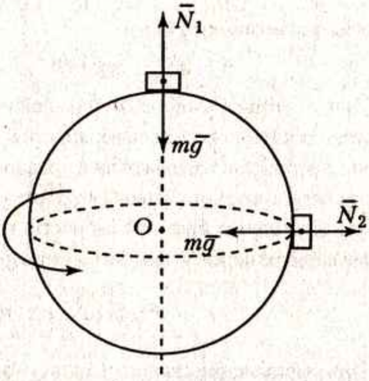


$$mg\cos\alpha - N = m\frac{v^2}{R}.$$

Отсюда находим силу нормальной реакции N (которая по 3-му закону Ньютона равна силе давления на мост)

$$N = mg\cos\alpha - m\frac{v^2}{R} = 7 \text{ кН}.$$

Задача 22. *Вес некоторого тела на полюсе Земли на 313,6 мН больше, чем его вес на экваторе. Чему равна масса этого тела? Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси $7\cdot10^{-5}$ рад/с, радиус Земли 6400 км. Землю считать идеальным шаром.*



По 3-му закону Ньютона вес равен силе реакции опоры. На полюсе тело покоится, а на экваторе — движется по окружности вследствие вращения Земли. Из уравнений движения тела в этих двух положениях

$$N_1 - mg = 0, \quad mg - N_2 = m\omega^2 R$$

получаем $N_1 - N_2 = m\,\omega^2 R$, откуда

$$m = \frac{\Delta N}{\omega^2 R} = 10 \text{ кг}.$$

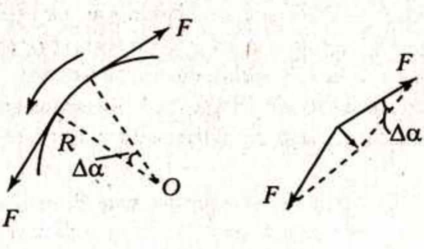
Задача 23. *Тонкую цепочку длиной 1 м и массой 200 г замкнули в круглое кольцо, положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили вокруг вертикальной оси так, что скорость каждого элемента цепочки равна 5 м/с. Найдите натяжение цепочки.*

Рассмотрим маленький участок цепочки, который виден из центра под углом $\Delta\alpha$ и масса которого равна $\Delta m = m\,(R\Delta\alpha)/l$, где l — длина цепочки. На его концы действуют две силы натяжения F, угол между которыми равен $(180° - \alpha)$. Равнодействующая этих сил равна $F\Delta\alpha$ и направлена к центру окружности. Уравнение движения этого участка имеет вид

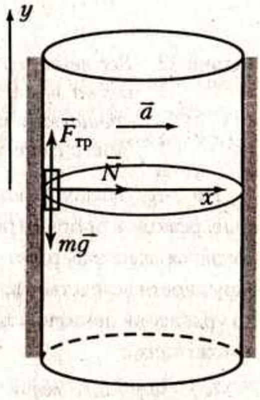
$$F\Delta\alpha = \Delta m\frac{v^2}{R},$$

откуда после подстановки Δm получаем

$$F = \frac{mv^2}{l} = 5 \text{ Н}.$$



Задача 24. *С какой минимальной скоростью должен ехать мотоциклист по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом 10 м, чтобы все время оставаться в одной горизонтальной плоскости? Коэффициент трения между шинами мотоцикла и поверхностью цилиндра 0,25. $g = 10$ м/с^2.*



Запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на две оси: на горизонтальную ось x, направленную от тела к центру окружности,

$$N = m\frac{v^2}{R}$$

и на вертикальную ось y

$$F_{тр} - mg = 0.$$

При «благополучной» езде сила трения покоя, приложенная к катящимся по поверхности колесам (в точке касания скорость равна нулю), уравновешивает силу тяжести. Такое устойчивое движение возможно лишь при достаточно большой скорости, когда сила нормальной реакции N удовлетворяет неравенству

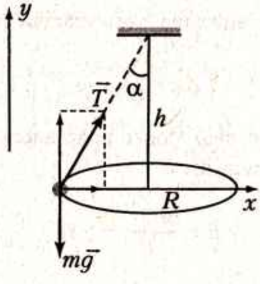
$$F_{тр} \le \mu N, \text{ т. е. при } v \ge \sqrt{\frac{gR}{\mu}} = 20 \text{ м/с}.$$

При уменьшении скорости до этого значения начнется соскальзывание мотоциклиста вниз.

Задача 25. *Шарик, подвешенный на легкой нити к потолку, вращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости. Расстояние между точкой подвеса и центром окружности 2,5 м. Найдите угловую скорость вращения шарика. $g = 10$ м/с^2.*

Уравнение движения в проекциях на горизонтальную (направленную к центру окружности) и вертикальную оси имеет вид

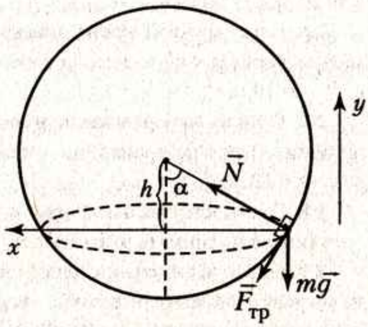
$$T\sin\alpha = m\omega^2 R$$
$$T\cos\alpha - mg = 0,$$



где α — угол, который образует нить с вертикалью при вращении шарика, R — радиус окружности. Исключая из этих уравнений силу натяжения нити T и учитывая, что $R = h\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где h — расстояние от центра окружности до точки подвеса, получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} = 2 \text{ рад/с}.$$

Задача 26. *На внутренней поверхности сферы радиусом 2,75 м находится маленькая шайба. До какой максимальной угловой скорости можно раскрутить сферу вокруг вертикальной оси, чтобы шайба не проскальзывала, находясь на 165 см ниже ее центра? Коэффициент трения 0,5. g = 10 м/с².*



В задачах такого типа необходимо определить направление проскальзывания (и, тем самым, направление силы трения в момент начала проскальзывания). В данном случае сила трения покоя может быть направлена как вверх вдоль поверхности (при малых ω), так и вниз (при больших ω). Поскольку в условии просят определить *максимальную* угловую скорость, то силу трения надо направить вниз (шайба начнет проскальзывать вверх). Второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеет вид

$$N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha,$$
$$N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha - mg = 0,$$

где $\cos\alpha = h/R = 0{,}6$, $\sin\alpha = 0{,}8$. Момент начала проскальзывания определяется условием $F_{тр} = \mu N$. Подставив μN в оба уравнения и исключив N, получим

$$\omega = \sqrt{\frac{g(\operatorname{tg}\alpha + \mu)}{R\sin\alpha(1 - \mu\operatorname{tg}\alpha)}} = 5 \text{ рад/с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Второй закон Ньютона

а) параллельные силы (1–5)

2.1. Тело массой 6 кг, начавшее двигаться под действием постоянной силы, прошло за первую секунду путь 15 м. Определите величину силы.

2.2. Сила 60 Н сообщает телу ускорение 0,8 м/с². Какая сила сообщит этому телу ускорение 2 м/с²?

2.3. Автомобиль массой 2 т, двигавшийся со скоростью 36 км/ч, остановился, пройдя после начала торможения путь 25 м. Определите величину тормозящей силы (в кН).

2.4. Порожний грузовой автомобиль массой 4 т начинает движение с ускорением 0,3 м/с². После загрузки при той же силе тяги он трогается с места с ускорением 0,2 м/с^2. Сколько тонн груза принял автомобиль? Сопротивлением движению пренебречь.

2.5. Под действием некоторой силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз массой 2 кг, то под действием той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 20 см. Какова масса тележки?

2.6. С какой силой нужно действовать на тело массой 2 кг, чтобы оно поднималось вертикально вверх с ускорением, вдвое большим ускорения силы тяжести? $g = 10$ м/с^2.

2.7. С каким ускорением поднимают груз на веревке, если ее натяжение увеличилось втрое по сравнению с натяжением, создаваемым неподвижным грузом? $g = 10$ м/с^2.

2.8. Прочность троса на разрыв составляет 1600 Н. Какой максимальной массы груз можно поднимать этим тросом с ускорением 15 м/с^2? $g = 10$ м/с^2.

2.9. На нити, выдерживающей натяжение 10 Н, поднимают груз массой 0,5 кг из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным, найдите предельную высоту (в см), на которую можно поднять груз за время 0,1 с так, чтобы нить не оборвалась. $g = 10$ м/с^2.

2.10. К одному концу нерастяжимой веревки, перекинутой через блок, подвешен груз массой 10 кг. С какой силой надо тянуть вниз за другой конец веревки, чтобы груз поднимался с ускорением 1 м/с^2? Массой блока и веревки пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

2.11. Космонавт массой 60 кг при вертикальном взлете ракеты давит на опору с силой 5400 Н. Найдите ускорение ракеты. $g = 10$ м/с^2.

2.12. Лифт в начале движения и при остановке имеет одинаковые по абсолютной величине ускорения. Чему равна величина этого ускорения, если вес человека, находящегося в лифте, в первом и во втором случае отличается в три раза? $g = 10$ м/с^2.

2.13. Определите массу груза, который нужно сбросить с аэростата общей массой 1100 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы аэростат стал подниматься с такой же по величине скоростью. Выталкивающая сила равна 10 кН. Сила сопротивления воздуха движению аэростата пропорциональна скорости. $g = 10$ м/с^2.

2.14. Тело массой 0,5 кг, падая без начальной скорости с высоты 9 м, приобрело вблизи поверхности земли скорость 12 м/с. Найдите среднюю силу сопротивления воздуха. $g = 10$ м/с^2.

2.15. Шар массой 0,5 кг, падая с высоты 10 м, попадает в снег и пробивает в нем яму глубиной 0,8 м. Считая движение в воздухе и в снегу равноускоренным и силу сопротивления воздуха равной 0,6 Н, найдите силу сопротивления при движении в снегу. $g = 10$ м/с^2.

2.16. В лифте, опускающемся с ускорением 1,3 м/с^2, на пружине жесткостью 595 Н/м висит груз. Найдите массу (в г) груза, если удлинение пружины равно 1 см. $g = 9,8$ м/с^2.

2.17. Два шарика из одного материала падают в воздухе. Отношение радиусов шариков равно 4. Во сколько раз больше скорость установившегося падения крупного шарика? Сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения шарика и квадрату его скорости.

2.18. Для шарика массой 1 г установившаяся скорость равномерного движения в воздухе (при падении с большой высоты) равна 100 м/с. Чему равна масса (в г) шарика из такого же материала, установившаяся скорость падения которого 200 м/с? Сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения шарика и квадрату его скорости.

2.19. Свободно летящее тело попадает в среду, где на него действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. К моменту, когда его скорость уменьшилась вдвое, тело прошло путь 60 м. Какое расстояние пройдет оно с этого момента до остановки? Силу тяжести не учитывать.

б) непараллельные силы (6–7)

2.20. На тело массой 2 кг, находящееся на гладком горизонтальном столе, действует сила 30 Н, направленная вверх под углом 30° к горизонту. С какой силой тело давит на стол? $g = 10$ м/с^2.

2.21. Тело массой 10 кг передвигают вдоль гладкой горизонтальной поверхности, действуя на него силой 40 Н под углом 60° к горизонту. Найдите ускорение тела.

2.22. Брусок перемещают вверх вдоль вертикальной стены, прикладывая к нему силу, направленную под некоторым углом к вертикали. Найдите этот угол (в градусах), если известно, что сила нормального давления бруска на стену вдвое меньше приложенной силы.

2.23. Нить с грузом подвешена на тележке, которая движется с ускорением 2,25 м/с^2. Найдите силу натяжения нити после того как она займет устойчивое наклонное положение. Масса груза 4 кг. $g = 10$ м/с^2.

2.24. Груз массой 0,5 кг подвешен к потолку лифта с помощью двух нитей, каждая из которых образует с вертикалью угол 60°. Какой будет сила натяжения каждой нити, если лифт будет подниматься с ускорением 2 м/с^2? $g = 10$ м/с^2.

2.25. Небольшой груз массой 5 кг подвешен к потолку лифта с помощью двух нитей, одна длиной 30 см, другая длиной 40 см. Расстояние между точками крепления нитей к потолку равно 50 см. Лифт поднимается с ускорением 2 м/с^2. Найдите силу натяжения короткой нити. $g = 10$ м/с^2.

2.26. Тело соскальзывает с наклонной плоскости в отсутствие трения с ускорением 2 м/с^2. Высота наклонной плоскости 18 м. Найдите длину ее ската. $g = 10$ м/с^2.

2.27. Ледяная гора длиной 18 м составляет с горизонтом угол 30°. По горе скатывается мальчик на санках. Чему равна сила трения при скатывании санок, если спуск с горы продолжается 3 с? Масса мальчика вместе с санками 60 кг. $g = 10$ м/с^2.

2.28. Тело массой 1 кг, имеющее у основания наклонной плоскости скорость 6 м/с, поднимается вдоль плоскости до остановки в течение 1 с. Найдите силу трения, действующую на тело, если угол наклона плоскости к горизонту 30°. $g = 10$ м/с^2.

Коэффициент трения (8–10)

2.29. Автоинспектор установил, что след торможения автомобиля на асфальтовой дороге равен 40 м. С какой скоростью (в км/ч) ехал автомобиль, если коэффициент трения колес об асфальт 0,5? $g = 10$ м/с^2.

2.30. Тело массой 10 кг находится на горизонтальной плоскости. На тело действует сила 50 Н, направленная под углом 30° к горизонту. Определите силу трения, если коэффициент трения 0,2. $g = 10$ м/с^2.

2.31. Тело массой 10 кг находится на горизонтальной плоскости. На тело один раз подействовали горизонтальной силой 5 Н, а другой раз — силой 50 Н, направленной вверх под углом 30° к горизонту. Во сколько раз сила трения во втором случае больше, чем в первом, если коэффициент трения 0,2? $g = 10$ м/с^2.

2.32. Какая горизонтальная сила приложена к телу массой 8 кг, если под действием этой силы оно равномерно движется по столу при коэффициенте трения 0,3? $g = 10$ м/с^2.

2.33. Брусок массой 3 кг с помощью горизонтальной пружины тянут равномерно по доске, расположенной горизонтально. Какова жесткость пружины, если она удлинилась при этом на 5 см? Коэффициент трения между бруском и доской 0,25. $g = 10$ м/с^2.

2.34. Тело массой 2 кг движется по горизонтальной поверхности с ускорением 2 м/с^2 под действием горизонтально направленной силы. Найдите величину этой силы, если коэффициент трения между телом и поверхностью 0,2. $g = 10$ м/с^2.

2.35. Какой наибольшей массы сани с грузом может равномерно перемещать по горизонтальной дороге упряжка собак, развивающая максимальную силу тяги 500 Н? Коэффициент трения 0,1. $g = 10$ м/с^2.

2.36. Лежащее на горизонтальной поверхности тело приходит в движение под действием горизонтальной силы, составляющей половину действующей на него силы тяжести. Сила действует некоторое время t, потом прекращает действовать. Найдите это время, если известно, что полный путь, пройденный телом до остановки, составляет 15 м, а коэффициент трения 0,2. $g = 10$ м/с^2.

2.37. За какое минимальное время спортсмен может пробежать 100 м, начиная движение с нулевой скоростью и ускоряясь только на первом участке пути длиной 20 м, если коэффициент трения между обувью и беговой дорожкой 0,25? $g = 10$ м/с^2.

2.38. Человек тянет за собой с постоянной скоростью санки массой 6 кг с помощью веревки, составляющей с горизонтом угол, тангенс которого равен 0,75. Коэффициент трения между санками и горизонтальной поверхностью 0,3. Определите силу натяжения веревки. $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.39. Какое ускорение приобретут санки массой 6 кг, если потянуть за веревку с силой 20 Н, направленной под углом 30° к горизонту? Коэффициент трения 0,1. $\sqrt{3} = 1{,}7$. $g = 10$ м/с^2.

2.40. Брусок массой 2,8 кг перемещают вверх вдоль вертикальной стены с помощью силы, равной 70 Н и направленной под углом α к вертикали. Найдите ускорение бруска, если известно, что $\sin\alpha = 0{,}6$, а коэффициент трения между стеной и бруском 0,4. $g = 10$ м/с^2.

Наклонная плоскость с трением (11)

2.41. Тело равномерно скользит по наклонной плоскости. Чему равен котангенс угла наклона плоскости к горизонту, если коэффициент трения тела о плоскость 0,2?

2.42. Тело помещают один раз на наклонную плоскость с углом наклона 30°, а второй раз — на наклонную плоскость с углом наклона 60°. На сколько процентов сила трения в первом случае больше, чем во втором, если коэффициент трения в обоих случаях 0,8?

2.43. Тело соскальзывает с наклонной плоскости высотой 3 м и длиной 5 м. Чему равно его ускорение, если коэффициент трения 0,5? $g = 10$ м/с^2.

2.44. С вершины наклонной плоскости высотой 5 м и углом наклона к горизонту 45° начинает соскальзывать тело. Определите скорость тела в конце спуска, если коэффициент трения тела о плоскость 0,19. $g = 10$ м/с^2.

2.45. Тело соскальзывает с наклонной плоскости высотой 5 м и длиной 13 м. Коэффициент трения 0,4. Найдите время движения тела вдоль наклонной плоскости. $g = 10$ м/с^2.

2.46. Тяжелое тело находится на вершине наклонной плоскости, длина основания и высота которой равны 6 м. За сколько секунд тело соскользнет к основанию плоскости, если предельный наклон, при котором тело находится на этой плоскости в покое, имеет место при высоте плоскости 2,4 м и прежней длине основания 6 м? $g = 10$ м/с^2.

2.47. Телу толчком сообщили скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Найдите величину ускорения тела, если высота наклонной плоскости 4 м, ее длина 5 м, а коэффициент трения 0,5. $g = 10$ м/с^2.

2.48. Телу толчком сообщили скорость, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Высота наклонной плоскости 3 м, ее длина 5 м, коэффициент трения 0,6. Во сколько раз величина ускорения при движении тела вверх больше, чем при движении вниз?

2.49. Телу толчком сообщили скорость 3 м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Найдите время (в мс) движения тела вверх до остановки, если синус угла наклона плоскости к горизонту 0,6, а коэффициент трения 0,25. $g = 10$ м/с^2.

2.50. Какую начальную скорость надо сообщить телу вверх вдоль наклонной плоскости, чтобы оно достигло ее вершины? Высота наклонной плоскости 6 м, ее длина 10 м, а коэффициент трения 0,5. $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.51. Маленький брусок находится на вершине наклонной плоскости длиной 26 м и высотой 10 м. Коэффициент трения между бруском и плоскостью 0,45. Какую минимальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он достиг основания плоскости? $g = 10$ м/с^2.

2.52. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 45° пущена шайба. Через некоторое время она останавливается и соскальзывает вниз. Коэффициент трения шайбы о плоскость 0,8. Во сколько раз время спуска шайбы больше времени подъема?

2.53. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 45° пущена шайба со скоростью 12 м/с. Через некоторое время она останавливается и соскальзывает вниз. С какой скоростью она вернется в исходную точку? Коэффициент трения шайбы о плоскость 0,8.

2.54. Груз массой 9 кг поднимают равномерно по наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту, прикладывая силу, направленную параллельно наклонной плоскости. Найдите величину этой силы, если коэффициент трения равен $\sqrt{3}/9$. $g = 10$ м/с^2.

2.55. На наклонной плоскости длиной 5 м и высотой 3 м находится груз массой 50 кг. Какую силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к грузу, чтобы втаскивать его с ускорением 1 м/с^2? Коэффициент трения 0,2. $g = 10$ м/с^2.

2.56. Тело поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к нему горизонтальную силу, величина которой вдвое больше действующей на тело силы тяжести. Высота наклонной плоскости равна 3 м, ее длина равна 5 м. Найдите ускорение тела, если коэффициент трения 0,2. $g = 10$ м/с^2.

2.57. С каким ускорением начнет спускаться тело с наклонной плоскости, если за привязанную к телу нить потянуть в горизонтальном направлении с силой, вдвое меньшей действующей на тело силы тяжести? Высота наклонной плоскости равна 3 м, ее длина 5 м. Коэффициент трения 0,8, $g = 10$ м/с^2.

Система из двух тел. Блоки (12–17)

2.58. Два груза массами 4 кг и 5 кг, связанные нитью, движутся по гладкому столу под действием горизонтальной силы 27 Н, приложенной к одному из тел. Найдите ускорение грузов.

2.59. Два бруска массами 0,4 кг и 0,6 кг, связанные нитью, движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы 5 Н, приложенной ко второму бруску. Найдите силу натяжения нити.

2.60. Два тела, массы которых 0,3 кг и 0,2 кг, связаны нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. С какой максимальной силой, направленной горизонтально, нужно тянуть первое тело, чтобы нить, способная выдержать нагрузку 6 Н, не оборвалась?

2.61. Два груза, соединенные нитью, движутся по гладкой горизонтальной плоскости. Когда сила 100 Н была приложена к одному из грузов, сила натяжения нити была равна 30 Н. Какой будет сила натяжения, если силу 100 Н приложить к другому грузу? Сила направлена горизонтально.

2.62. Два бруска, связанные нитью, поднимают вверх вдоль наклонной плоскости, прикладывая к верхнему бруску массой 2 кг силу 30 Н, параллельную плоскости. Коэффициенты трения между брусками и плоскостью одинаковы. Найдите силу натяжения нити, если масса нижнего бруска 4 кг.

2.63. Два тела массами 6 кг и 4 кг, соединенные нитью, лежат на горизонтальной поверхности. К первому телу прикладывают силу 50 Н, образующую с горизонтом угол, тангенс которого равен 0,75. Найдите силу натяжения нити, если коэффициент трения 0,5.

2.64. Два бруска массами 4 кг и 6 кг, связанные нитью, соскальзывают с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 60°. Коэффициент трения между нижним бруском и плоскостью 0,15, а между верхним бруском и плоскостью 0,4. Найдите силу натяжения нити. $g = 10$ м/с^2.

2.65. Из алюминия (плотность 2700 кг/м^3) и железа (плотность 7900 кг/м^3) сделали два шарика одинакового объема 1 дм^3, связали их длинной легкой нитью и бросили в море. Чему будет равна сила натяжения нити после того, как погружение шаров станет установившимся (т. е. будет происходить с постоянной скоростью)? $g = 10$ м/с^2.

2.66. Две лодки по очереди приводят в движение горизонтальной силой F. Установившаяся скорость одной лодки оказывается равной 1,2 м/с, другой 0,4 м/с. Чему будет равна установившаяся скорость (в см/с), если лодки связать длинной веревкой и приложить к одной из них силу F? Сила сопротивления воды пропорциональна скорости.

2.67. На доске массой 4 кг, лежащей на горизонтальном полу, находится брусок массой 1 кг. Коэффициент трения между бруском и доской 0,2, а между доской и полом 0,4. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к доске, чтобы брусок с нее соскользнул? $g = 10$ м/с^2.

2.68. На доске массой 2 кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности, находится брусок массой 1 кг. Коэффициент трения между бруском и доской 0,4. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к бруску, чтобы стащить его с доски? $g = 10$ м/с^2.

2.69. Доска массой 8 кг может двигаться без трения по наклонной плоскости с углом наклона 30° к горизонту. С каким по величине ускорением (в см/с^2) должен бежать по доске человек массой 80 кг, чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? $g = 10$ м/с^2.

2.70. На концах нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, прикреплены грузы массами 300 г и 200 г. С каким ускорением движутся грузы? $g = 10$ м/с^2.

2.71. Через блок с неподвижной осью перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами 2 кг и 8 кг. Найдите силу натяжения нити. $g = 10$ м/с^2.

2.72. На концах нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, подвешены тела массами по 0,49 кг каждое. Какова масса (в г) дополнительного груза, который надо положить на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за 4 с путь 1,6 м? $g = 10$ м/с^2.

2.73. Две гири массами 7 кг и 11 кг висят на концах нити, перекинутой через блок с неподвижной осью. Гири вначале находятся на одной высоте. Через сколько миллисекунд после начала движения легкая гиря окажется на 20 см выше тяжелой? $g = 10$ м/с^2.

2.74. На длинной нити, перекинутой через блок, подвешены на одном уровне одинаковые грузы. От одного из грузов отделяется часть, масса которой равна 1/5 массы груза, и через 1 с падает на землю. Через какое время после этого достигнет земли другой груз?

2.75. Блок подвешен к потолку с помощью троса. На концах нити, перекинутой через блок, подвесили грузы массами 2 кг и 3 кг. Найдите натяжение троса. $g = 10$ м/с^2.

2.76. Блок подвешен к потолку с помощью троса. Через блок перекинута нить с двумя грузами. Чему равно отношение масс грузов, если во время их движения натяжение троса равно силе тяжести более тяжелого груза?

2.77. Нить, перекинутая через блок с неподвижной осью, пропущена через щель (с одной стороны от блока). При движении нити с постоянным ускорением на нее со стороны щели действует сила трения 3 Н. На концах нити подвешены грузы массами 200 г и 800 г. Найдите ускорение грузов. $g = 10$ м/с^2.

2.78. К концам нити, перекинутой через легкий блок, прикрепили грузы массами 3 кг и 5 кг. К оси блока приложили силу, направленную вертикально вверх и равную 120 Н. С каким ускорением будет подниматься блок? $g = 10$ м/с^2.

2.79. К одному концу нити, перекинутой через легкий блок, подвесили тело массой 2 кг, а другой конец нити закрепили неподвижно. Какую силу надо приложить к оси блока, чтобы он поднимался с ускорением 3 м/с^2? $g = 10$ м/с^2.

2.80. На концах легкого стержня, который может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину, закреплены грузы 1 кг и 3 кг. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой действует он на ось сразу после этого? $g = 10$ м/с^2.

Закон всемирного тяготения (18)

2.81. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между однородным шаром и материальной точкой, соприкасающейся с шаром, если материальную точку удалить от поверхности шара на расстояние, равное двум диаметрам шара?

2.82. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное диаметру шаров?

2.83. Два шара радиусами 20 см и 30 см соприкасаются друг с другом. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между шарами, если один из шаров отодвинуть на расстояние 100 см?

2.84. Расстояние между планетой Нептун и Солнцем в 30 раз больше, чем расстояние между Землей и Солнцем, а масса Нептуна в 15 раз больше массы Земли. Во сколько раз сила притяжения Солнца к Земле больше, чем Солнца к Нептуну?

2.85. На какой высоте (в км) над поверхностью Земли ускорение свободного падения в 16 раз меньше, чем на земной поверхности? Радиус Земли 6400 км.

2.86. Сколько процентов составляет ускорение свободного падения на поверхности Марса от ускорения свободного падения на Земле, если радиус Марса составляет 0,5 радиуса Земли, а масса Марса — 0,1 массы Земли?

2.87. Радиус некоторой планеты в $\sqrt{2}$ раз меньше радиуса Земли, а ускорение силы тяжести на поверхности планеты в 3 раза меньше, чем на поверхности Земли. Во сколько раз масса планеты меньше массы Земли?

2.88. Радиус некоторой планеты в 10 раз больше, чем радиус Земли, а средняя плотность вещества планеты в 2 раза меньше средней плотности Земли. Во сколько раз ускорение свободного падения на поверхности планеты больше, чем на поверхности Земли?

2.89. Масса некоторой планеты в 16 раз больше, чем масса Земли, а средняя плотность вещества планеты в 2 раза больше средней плотности Земли. Во сколько раз ускорение свободного падения на поверхности планеты больше, чем на поверхности Земли?

2.90. Имеется шар массой M и радиусом R и материальная точка массой m. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между ними, если в шаре сделать сферическую полость радиусом $5R/6$? Материальная точка лежит на прямой, проведенной через центры шара и полости, на расстоянии R от центра шара и на расстоянии $5R/6$ от центра полости.

Спутники (19–20)

2.91. Масса некоторой планеты в 4,5 раза больше массы Земли, а ее радиус — в 2 раза больше, чем радиус Земли. На сколько процентов первая космическая скорость для этой планеты больше, чем для Земли?

2.92. Спутник движется по круговой орбите в плоскости экватора на высоте от поверхности планеты, равной ее радиусу. Найдите линейную скорость (в км/с) спутника. Радиус планеты 7200 км. Ускорение свободного падения на поверхности планеты 10 м/с^2.

2.93. Космический корабль движется по круговой орбите радиусом 13000 км около некоторой планеты со скоростью 10 км/с. Каково ускорение силы тяжести на поверхности этой планеты, если ее радиус 10000 км?

2.94. Период обращения некоторой планеты по круговой орбите вокруг Солнца равен 27 годам. Во сколько раз расстояние от этой планеты до Солнца больше, чем от Земли до Солнца?

2.95. Во сколько раз увеличится радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли, если период его обращения увеличить в 27 раз?

2.96. На некоторой планете запущен спутник связи, т. е. спутник, все время находящийся над одной точкой планеты. Во сколько раз высота этого спутника над поверхностью планеты больше ее радиуса, если известно, что другой спутник, вращающийся вокруг планеты на малой высоте, делает за время планетарных суток 8 полных оборотов?

Динамика движения по окружности

а) одна проекция (21–23)

2.97. К одному концу резинового шнура прикрепили шарик массой 50 г, другой его конец закрепили на горизонтальной гладкой поверхности и привели шарик во вращение по поверхности с угловой скоростью 20 рад/с. Найдите удлинение шнура (в см), если его жесткость 100 Н/м, а первоначальная длина 40 см.

2.98. Небольшой груз массой 0,5 кг может перемещаться без трения по горизонтальному стержню, прикрепленному к вертикальной оси. Груз связан с осью пружиной. Какова жесткость пружины, если при вращении стержня вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 3 рад/с пружина растягивается в 2 раза?

2.99. Невесомый стержень вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью 30 рад/с. На расстояниях 0,4 м и 0,3 м от оси вращения закреплены грузы, имеющие массы 0,2 кг и 0,1 кг соответственно. Какая горизонтальная сила действует на ось вращения, если ось находится между грузами?

2.100. В кабине, укрепленной на конце штанги, находится человек. Штанга с кабиной вращается в вертикальной плоскости с угловой скоростью 0,7 рад/с. Какова должна быть длина штанги, чтобы человек в верхней точке траектории испытывал состояние невесомости? $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.101. Какую минимальную скорость должен развить автомобиль массой 2000 кг, чтобы благополучно проехать по выпуклому мосту с радиусом кривизны 100 м, выдерживающему нагрузку не более 18000 Н? $g = 10$ м/с^2.

2.102. Машина массой 2 т движется со скоростью 72 км/ч по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 100 м. С какой силой (в кН) давит машина на мост, проезжая через его середину? $g = 10$ м/с^2.

2.103. Лыжник массой 65 кг движется по вогнутому участку дороги с радиусом кривизны 20 м. Определите силу давления лыж на дорогу в низшей точке этого участка, если скорость движения лыжника 2 м/с. $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.104. Определите радиус горбатого моста, имеющего вид дуги окружности, если известно, что давление автомобиля, движущегося со скоростью 90 км/ч, в верхней точке моста уменьшилось вдвое (по сравнению с давлением на горизонтальном участке дороги). $g = 10$ м/с^2.

2.105. С какой скоростью едет автомобиль по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 63 м, если давление автомобиля на мост в верхней точке моста в два раза больше, чем в точке, направление на которую из центра кривизны моста составляет 30° с вертикалью? $g = 10$ м/с^2. $\sqrt{3} = 1{,}7$.

2.106. К невесомому стержню длиной 50 см прикреплен шарик массой 400 г, который равномерно вращается в вертикальной плоскости. При какой минимальной угловой скорости вращения произойдет разрыв стержня, если он выдерживает максимальную нагрузку 24 Н? $g = 10$ м/с^2.

2.107. Небольшой шарик массой 250 г, прикрепленный к концу нити, равномерно вращают в вертикальной плоскости. На сколько сила натяжения нити в нижней точке траектории больше, чем в верхней? $g = 10$ м/с^2.

2.108. Тело массой 0,1 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 1 м. Ось вращения расположена над полом на высоте 2 м. При прохождении нижнего положения нить обрывается, и тело падает на пол на расстоянии 4 м (по горизонтали) от точки обрыва нити. Определите силу натяжения нити в момент ее обрыва. $g = 10$ м/с^2.

2.109. Математический маятник имеет массу 1 кг и длину 20 см. В момент, когда нить маятника образует угол 60° с вертикалью, скорость груза маятника равна 1 м/с. Какова в этот момент сила натяжения нити? $g = 10$ м/с^2.

2.110. Тело массой 2 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 1 м. Когда тело проходит точку, расположенную на 0,5 м ниже точки подвеса нити, она обрывается. После этого тело поднимается на 4 м выше точки подвеса. Чему было равно натяжение нити перед обрывом? $g = 10$ м/с^2.

2.111. Самолет делает «мертвую петлю». Определите силу давления летчика на сиденье в нижней точке траектории, если масса летчика 70 кг, скорость самолета 100 м/с, а радиус окружности («петли») 200 м. $g = 10$ м/с^2.

2.112. Самолет делает «мертвую петлю». В нижней точке траектории сила, прижимающая летчика к сиденью, в 5 раз больше силы тяжести. В верхней точке летчик испытывает состояние невесомости. Во сколько раз скорость самолета в нижней точке больше, чем в верхней?

2.113. При переносе тела с полюса некоторой планеты на экватор его вес уменьшается на 20%. Угловая скорость вращения планеты 0,001 рад/с, ее радиус 3000 км. Чему равно ускорение свободного падения на этой планете? Планету считать идеальным шаром.

2.114. Гоночный автомобиль массой 2500 кг едет по шоссе со скоростью 360 км/ч вдоль экватора. На сколько отличаются силы давления автомобиля на полотно дороги при его движении с запада на восток и с востока на запад? Угловая скорость вращения Земли $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ рад/с.

2.115. Резиновый шнур длиной 0,8 м и массой 300 г имеет форму круглого кольца. Его положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили вокруг вертикальной оси так, что скорость каждого элемента кольца равна 3 м/с. Найдите удлинение (в см) шнура, если его жесткость 30 Н/м.

б) две проекции (24–26)

2.116. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии 10 см от оси вращения лежит груз. Коэффициент трения между грузом и платформой 0,01. При какой угловой скорости вращения платформы груз начнет скользить? $g = 10$ м/с^2.

2.117. С какой максимальной скоростью может проходить автомобиль поворот дороги радиусом закругления 400 м, если коэффициент трения между шинами автомобиля и дорогой 0,1? $g = 10$ м/с^2.

2.118. Самолет, летящий со скоростью 540 км/ч, наклоняется при повороте на угол, тангенс которого 0,3. Чему равен радиус поворота? $g = 10$ м/с^2.

2.119. Поворот дороги радиусом 100 м профилирован так, что полотно дороги наклонено в сторону поворота под углом, тангенс которого 0,4. Какова оптимальная скорость (в км/ч) прохождения такого поворота? $g = 10$ м/с^2.

2.120. Какова максимально допустимая скорость движения мотоциклиста на повороте наклонного трека с углом наклона к горизонту 45°, если радиус закругления 30 м, а коэффициент трения 0,5? $g = 10$ м/с^2.

2.121. Мотоциклист производит поворот на наклонном треке. Во сколько раз максимально допустимая скорость движения больше минимальной, если коэффициент трения 0,75, а угол наклона трека к горизонту 45°? Поворот надо пройти без проскальзывания колес по треку.

2.122. С какой максимальной скоростью можно кататься на велосипеде по поверхности холма, имеющего форму полусферы радиусом 48 м, оставаясь все время на высоте 38,4 м (отсчитанной от центра кривизны). Коэффициент трения колес о землю 0,8. $g = 10$ м/с^2.

2.123. В цирковом аттракционе мотоциклист движется по внутренней поверхности сферы радиусом 8,5 м, оставаясь все время на 5,1 м выше центра сферы. При какой минимальной скорости это возможно? Коэффициент трения между колесами и поверхностью сферы 0,92. $g = 10$ м/с^2.

2.124. На внутренней поверхности сферы радиусом 12,5 см находится маленькая шайба. До какой минимальной угловой скорости нужно раскрутить сферу вокруг вертикальной оси, чтобы шайба не проскальзывала, находясь на 7,5 см ниже ее центра? Коэффициент трения 0,5, $g = 9{,}8$ м/с^2.

2.125. С какой скоростью должен вращаться шарик внутри гладкой сферы радиусом 28 см, чтобы все время оставаться в горизонтальной плоскости на высоте 20 см от нижней точки сферы? $g = 10$ м/с^2.

2.126. Гирька массой 100 г, привязанная к резиновому шнуру, вращается с угловой скоростью 10 рад/с по окружности в горизонтальной плоскости так, что шнур составляет угол 60° с вертикалью. Найдите длину (в см) нерастянутого шнура, если его жесткость 40 Н/м. $g = 10$ м/с^2.

2.127. Цепочку длиной 1 м и массой 157 г замкнули в кольцо и надели сверху на гладкий круговой конус с вертикальной осью и углом полураствора 45°. Каким будет натяжение (в мН) цепочки, если конус привести во вращение так, чтобы каждый элемент цепочки имел скорость 2 м/с? Принять $\pi = 3{,}14$, $g = 10$ м/с^2.

2.128. Замкнутая цепочка массой 157 г надета «с натягом» на жесткий вертикальный цилиндр радиусом 5 см. Натяжение цепочки равно 3 Н. До какой угловой скорости надо раскрутить цилиндр, чтобы цепочка соскользнула с него вниз? Коэффициент трения цепочки о цилиндр 0,1, $g = 10$ м/с^2. Принять $\pi = 3{,}14$.

Глава 3

Закон сохранения импульса

Примеры решения задач

Задача 1. *Тело массой 2 кг свободно падает без начальной скорости с высоты 5 м на горизонтальную поверхность и отскакивает от нее со скоростью 5 м/с. Найдите абсолютную величину изменения импульса тела при ударе. $g = 10$ м/с^2.*

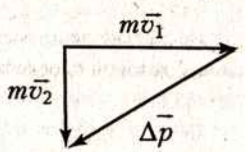
В проекции на ось, направленную вертикально вверх, получаем

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \left|\Delta p_y\right| = \left|p_{2y} - p_{1y}\right| = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1) = 30 \text{ кг}\cdot\text{м/с},$$

где $v_2 = 5$ м/с — скорость отскока, а $v_1 = \sqrt{2gh} = 10$ м/с — скорость падения.

Задача 2. *Мячик массой 200 г летел со скоростью 20 м/с. После удара о стенку он отскочил под прямым углом к прежнему направлению со скоростью 15 м/с. Найдите модуль изменения импульса мячика при ударе.*

Изобразив на рисунке начальный и конечный импульсы и вектор их разности, получаем



$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = 5 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

Задача 3. *Стальной шарик массой 0,1 кг падает на горизонтальную плоскость с высоты 0,2 м и отскакивает после удара снова до высоты 0,2 м. Найдите среднюю силу давления шарика на плоскость при ударе, если его длительность 0,04 с. $g = 10$ м/с^2.*

Среднюю силу, действующую на шарик, можно выразить через изменение импульса

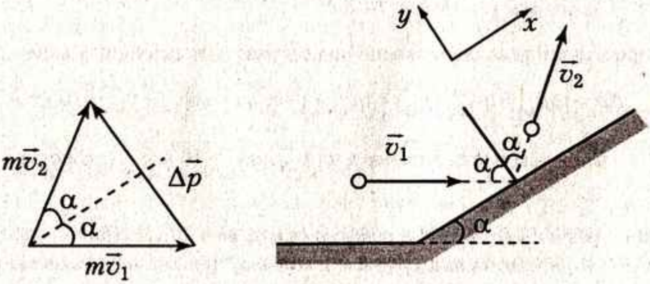
$$\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

В проекции на ось, направленную вертикально вверх,

$$\left(F_{\text{ср}}\right)_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = \frac{mv - (-mv)}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{\Delta t} = 10 \text{ Н}.$$

Мы нашли среднее значение *равнодействующей* силы, которая складывается из реакции плоскости и силы тяжести: $F_{ср} = N_{ср} - mg$, откуда $N_{ср} = F_{ср} + mg = 11$ Н. Из 3-го закона Ньютона следует, что сила давления шарика на плоскость равна силе реакции плоскости.

Задача 4. *Стальной шарик массой 40 г, летящий горизонтально со скоростью 20 м/с, ударяется о наклонную плоскость, составляющую угол 30° с горизонтом. Считая удар абсолютно упругим, найдите среднюю силу взаимодействия шарика с наклонной плоскостью. Продолжительность удара 0,01 с. Действием силы тяжести за время удара пренебречь.*



Поскольку действием силы тяжести за время удара пренебрегаем, средняя сила, с которой плоскость при ударе действует на шарик, равна

$$\vec{F}_{ср} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}.$$

Изменение импульса $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ можно найти графически. Поскольку отражение происходит с той же скоростью под тем же углом к наклонной плоскости, вектор $\Delta\vec{p}$ (а значит, и $\vec{F}_{ср}$) перпендикулярен к наклонной плоскости. Из рисунка получаем $|\Delta\vec{p}| = 2mv\sin\alpha$, откуда $F_{ср} = (2mv\sin\alpha)/\Delta t = 80$ Н.

Замечание. Можно решать задачу не графически, а в проекциях. Видно, что в проекции на ось x импульс не меняется (что понятно и при анализе сил: в пренебрежении силой тяжести на шарик действует только сила нормальной реакции). Значит, $|\Delta\vec{p}| = |\Delta p_y| = mv\sin\alpha - (-mv\sin\alpha) = 2mv\sin\alpha$.

Задача 5. *Какова средняя сила давления на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули 10 г, а скорость пули при вылете 300 м/с? Автомат делает 300 выстрелов в минуту.*

Рассмотрим систему, состоящую из автомата и пуль. Изменение импульса этой системы за произвольный интервал времени Δt равно импульсу внешней силы F, с которой плечо стрелка действует на автомат (равной силе давления автомата на плечо)

$$F\Delta t = \Delta N(mv - 0),$$

где ΔN — число пуль, вылетевших за это время. Произвольно выбранный интервал Δt сокращается, поскольку $\Delta N = n\Delta t$, где n — «скорострельность», т. е. число пуль, вылетающих за секунду (по условию $n = 300$ мин$^{-1}$ = 5 с$^{-1}$). Получаем

$$F = nmv = 15 \text{ Н}.$$

Задача 6. *Ракета массой 2 т неподвижно висит над землей, выбрасывая вниз реактивную струю со скоростью 1250 м/с. Какая масса газов выбрасывается в струе за 1 с? g = 10 м/с^2.*

На выбрасываемые газы действует со стороны ракеты сила, равная скорости изменения их импульса. Такая же сила действует на ракету со стороны газов (ее называют *реактивной силой*). Запишем закон изменения импульса газов за малый промежуток времени Δt

$$F_p \Delta t = \Delta m \cdot u,$$

где Δm — масса газов, выброшенных за время Δt, u — скорость выброса газов. Поскольку $\Delta m = \mu\Delta t$, где μ — масса газов, выбрасываемых за 1 с (расход топлива), получим

$$F_p = \mu u,$$

откуда найдем расход топлива: $\mu = F_p/u = mg/u = 16$ кг. Мы учли, что в данном примере ракета покоится, и 2-ой закон Ньютона для нее имеет вид: $F_p - mg = 0$.

Замечание. Если ракета движется с ускорением, формула для реактивной силы имеет такой же вид. Проще всего убедиться в этом, перейдя в систему отсчета, в которой ракета в данный момент покоится.

Задача 7. *Тонкую мягкую цепочку массой 200 г удерживают за один конец так, что другой ее конец касается стола. Цепочку отпускают, и она падает на стол. Считая, что все элементы цепочки, находящиеся в воздухе, падают свободно, найдите силу давления на стол в тот момент, когда в воздухе находится половина цепочки. g = 10 м/с^2.*

Рассмотрим момент времени, когда верхний конец цепочки опустился на h. Силу реакции стола N можно разбить на две части. Одна часть N_1 уравновешивает силу тяжести лежащей на столе части цепочки длиной h: $N_1 = (m/l)hg$, где m — масса цепочки, l — ее длина. Другая часть N_2 возникает при ударе падающих элементов цепочки на стол, она равна скорости изменения их импульса.

Чтобы вычислить N_2, рассмотрим малый интервал времени Δt. За это время в соприкосновение с плоскостью придет элемент цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\Delta m = (m/l)v\Delta t$. Изменение его импульса в проекции на ось y, направленную вертикально вверх, равно

$$\Delta p_y = 0 - (-\Delta m \cdot v) = \Delta m \cdot v,$$

откуда $N_{2y} = \Delta p_y / \Delta t = mv^2/l$. Поскольку при свободном падении цепочки $v^2 = 2gh$, то

$$N = N_1 + N_2 = 3mg\frac{h}{l},$$

что при $h = l/2$ дает $N = 1{,}5mg = 3$ Н.

Задача 8. *Конькобежец катил груженные сани по льду со скоростью 5 м/с, а затем толкнул их вперед и отпустил. С какой скоростью (в см/с) покатится конькобежец непосредственно после толчка, если скорость саней возросла до 8 м/с? Масса саней 90 кг, масса человека 60 кг. В ответе укажите модуль скорости.*

В пренебрежении силой трения система (человек + сани) замкнутая. Направим ось x вдоль начальной скорости $\vec{v}$, тогда и проекция конечной скорости саней будет положительной: $u_{1x} = u_1$. Направление скорости человека заранее не известно, но и не надо пытаться его угадать: найдя u_{2x}, мы определим и величину, и направление скорости. Закон сохранения импульса в проекции на ось x имеет вид

$$(m_1 + m_2)v = m_1 u_1 + m_2 u_{2x},$$

откуда

$$u_{2x} = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1 u_1}{m_2} = 0{,}5 \text{ м/с} = 50 \text{ см/с}.$$

Поскольку ответ положительный, то человек движется в прежнем направлении.

Задача 9. *Три лодки массами 100 кг каждая идут одна за другой с одинаковыми скоростями. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю бросают горизонтально со скоростью 2,2 м/с относительно лодки грузы массой 10 кг каждый. Найдите величину относительной скорости (в см/с) передней и задней лодок после попадания в них грузов.*

Решение задачи выглядит проще всего в системе отсчета, в которой все три лодки вначале покоятся. После переброски грузов средняя лодка останется на месте, а крайние лодки приобретут одинаковые скорости u, направленные в противоположные стороны. Величину этой скорости найдем из закона сохранения импульса для системы (груз + лодка)

$$mv_{\text{гр}} = (m+M)u\,.$$

Разность скоростей крайних лодок в этой системе отсчета равна

$$u-(-u) = 2u = \frac{2mv_{\text{гр}}}{m+M} = 40 \text{ см/с}.$$

Это и есть ответ к задаче, так как относительная скорость двух тел не зависит от выбора поступательно движущейся системы отсчета.

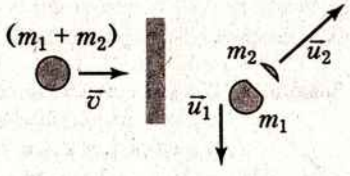
Задача 10. *От поезда, идущего с постоянной скоростью 64 км/ч, отделяется пятая часть состава. Через некоторое время скорость отделившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве не изменилась, найдите скорость (км/ч) головной части поезда в этот момент. Сила трения пропорциональна весу.*

Так как по условию полная сила, действующая на обе части состава, не меняется (остается равной нулю), то импульс системы сохраняется

$$mv = \frac{m}{5}\frac{v}{2} + \frac{4m}{5}u,$$

где u — скорость головной части поезда. Получаем $u = (9/8)v = 72$ км/ч.

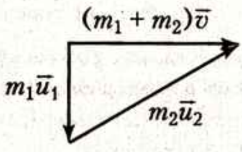
Задача 11. *Снаряд, летящий с некоторой скоростью, распадается на два осколка. Скорость большего осколка по величине равна начальной скорости снаряда и направлена перпендикулярно к ней. Скорость другого осколка по величине в 5 раз больше первоначальной. Найдите отношение масс осколков.*



Запишем закон сохранения импульса в векторной форме

$$(m_1+m_2)\bar{v} = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2\,,$$

где $\bar{v}$ — начальная скорость снаряда, $\bar{u}_1$ — скорость большего осколка, $\bar{u}_2$ — меньшего. Изобразив это векторное равенство на рисунке, получим прямоугольный треугольник ($\bar{u}_1 \perp \bar{v}$), стороны которого связаны теоремой Пифагора



$$(m_1+m_2)^2 v^2 + m_1^2 u_1^2 = m_2^2 u_2^2\,.$$

Подставив сюда $u_1 = v$ и $u_2 = 5v$, получим уравнение, связывающее между собой массы осколков

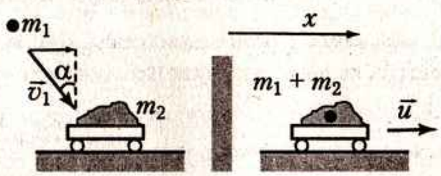
$$m_1^2 + m_1 m_2 - 12m_2^2 = 0\ .$$

Разделив это уравнение на m_2^2, получим квадратное уравнение для искомой величины $x = m_1/m_2$

$$x^2 + x - 12 = 0\ .$$

Сохраняя только положительный корень, получаем $x = 3$.

Задача 12. *Снаряд массой 50 кг, летящий под углом 30° к вертикали со скоростью 600 м/с, попадает в платформу с песком и застревает в ней. Найдите скорость платформы после попадания снаряда. Масса платформы 950 кг. Трением между платформой и рельсами пренебречь.*



Система (снаряд + платформа) не является замкнутой — на нее действует как сила тяжести, так и сила реакции со стороны рельсов. В результате импульс системы при ударе меняется, но это изменение касается только вертикальной проекции импульса (она обращается в ноль). В горизонтальном направлении система является замкнутой (проекция внешних сил на это направление равна нулю — по условию трение о рельсы отсутствует), и мы можем записать закон сохранения проекции полного импульса на ось x

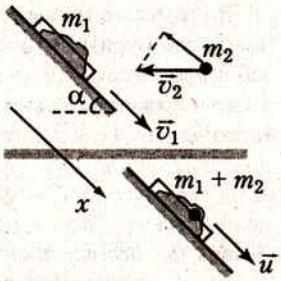
$$m_1 v_1 \sin\alpha = (m_1 + m_2)u\ ,$$

откуда находим искомую конечную скорость

$$u = \frac{m_1 v_1 \sin\alpha}{(m_1 + m_2)} = 15 \text{ м/с}.$$

Задача 13. *В ящик с песком массой 9 кг, соскальзывающий с гладкой наклонной плоскости, попадает горизонтально летящее ядро массой 3 кг и застревает в нем. Найдите скорость ящика сразу же после попадания ядра, если непосредственно перед попаданием скорость ящика равнялась 6 м/с, а скорость ядра 12 м/с. Угол наклона плоскости к горизонту 60°.*

Полный импульс системы (ящик + ядро) не сохраняется. Важно правильно определить направление, в проекции на которое можно записать закон сохранения импульса. Ответ можно дать только в предположении, что время соударения очень мало (стремится к нулю). Тогда можно пренебречь изменением импульса за счет силы тяжести: $m\vec{g}\Delta t \to 0$. Единственной внешней силой, действием которой пренебречь нельзя, остается сила нормальной реакции со стороны наклонной плоскости. Если направить ось x вдоль плоскости, то проекция силы реакции на эту ось обратится в ноль, т. е. проекция импульса системы на это направление сохраняется

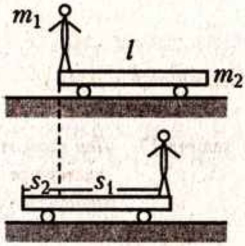


$$m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos\alpha = (m_1 + m_2)u.$$

Отсюда находим конечную скорость: $u = 3$ м/с.

Задача 14. *Тележка стоит на гладких рельсах. Человек переходит с одного ее конца на другой параллельно рельсам. На какое расстояние относительно земли переместится при этом тележка? Масса человека 60 кг, масса тележки 120 кг, ее длина 6 м.*

Закон сохранения импульса связывает скорости человека и тележки в каждый момент времени



$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

Умножая это равенство на время движения, найдем связь между величинами перемещений

$$m_1(l - s_2) - m_2 s_2 = 0,$$

где l — длина тележки, s_2 — ее перемещение, $(l - s_2)$ — перемещение человека. Решая уравнение, находим

$$s_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = 2 \text{ м}.$$

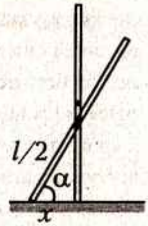
Замечание. Можно решить эту задачу, опираясь на свойства центра масс системы. Поскольку система замкнутая, то скорость ее центра масс не меняется, т. е. в данном случае остается равным нулю. Приравняем к нулю перемещение центра масс (см. формулу (23))

$$s_{цx} = \frac{m_1 s_{1x} + m_2 s_{2x}}{m_1 + m_2}.$$

Учитывая, что $s_{1x} = s_1 = (l - s_2)$, $s_{2x} = -s_2$, получим $m_1(l - s_2) - m_2 s_2 = 0$. При этом подходе видно, что результат не зависит от того, как человек движется.

Задача 15. *На стол поставили в вертикальном положении тонкую палочку длиной 80 см и отпустили. На сколько сантиметров сместится нижний конец палочки к тому моменту, когда она будет составлять с поверхностью стола угол 60°? Трением пренебречь.*

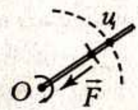
В отсутствие трения палочка представляет собой систему, замкнутую в горизонтальном направлении. Значит, горизонтальная проекция скорости центра масс остается равной нулю, т. е. центр палочки перемещается только по вертикали. Из рисунка находим



$$x = \frac{l}{2}\cos\alpha = 20 \text{ см}.$$

Задача 16. *Веревку длиной 80 см и массой 200 г положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили вокруг одного из концов с угловой скоростью 10 рад/с. Чему равна сила натяжения веревки в середине ее длины?*

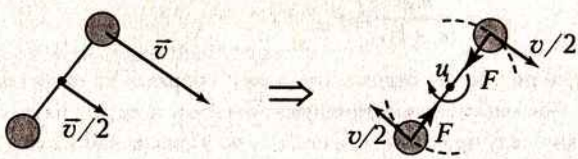
Рассмотрим движение внешней половины веревки. На нее действует только одна горизонтальная внешняя сила — сила натяжения в середине веревки. Центр масс этого участка веревки движется по окружности радиусом $(3/4)l$ (l — длина веревки), его масса равна половине массы веревки. Из уравнения движения центра масс (см. формулу (25))



$$F = \frac{m}{2}\omega^2 \frac{3}{4} l$$

находим $F = 6$ Н.

Задача 17. *Два шарика массой 250 г каждый, соединенные нитью длиной 1 м, движутся по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент один из шариков неподвижен, а скорость другого равна 4 м/с и направлена перпендикулярно нити. Чему равна сила натяжения нити?*



Поскольку система замкнута, центр масс системы (находящийся в середине нити) движется равномерно и прямолинейно. Его скорость можно найти из движения шариков в данный момент времени: она параллельна скорости движущегося шарика и равна половине его скорости (см. формулу (24)). Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно со скоростью центра масс. В этой СО центр масс неподвижен, а шарики движутся по окружностям радиусом $l/2$ со скоростью $v/2$. Получаем

$$F = m\frac{(v/2)^2}{l/2} = \frac{mv^2}{2l} = 2 \text{ Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Определение импульса (1–2)

3.1. Шарики массами 1 кг и 2 кг движутся параллельно друг другу в одном направлении со скоростями 4 м/с и 6 м/с соответственно. Чему равен суммарный импульс этих двух шариков?

3.2. Два одинаковых шарика массами 2 кг движутся навстречу друг другу. Скорость одного шарика 3 м/с, другого 7 м/с. Найдите величину суммарного импульса двух шариков.

3.3. Два одинаковых шарика массами 3 кг движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями 3 м/с и 4 м/с. Чему равна величина полного импульса этой системы?

3.4. Шарик массой 0,1 кг упал на горизонтальную площадку, имея в момент падения скорость 10 м/с. Найдите изменение импульса шарика при абсолютно неупругом ударе. В ответе укажите модуль полученной величины.

3.5. Пуля массой 10 г пробила стенку, при этом скорость ее уменьшилась от 800 м/с до 400 м/с. Найдите изменение импульса пули. В ответе укажите модуль полученной величины.

3.6. Шарик массой 0,2 кг свободно упал на горизонтальную площадку, имея в момент падения скорость 15 м/с. Найдите изменение импульса шарика при абсолютно упругом ударе. В ответе укажите модуль полученной величины.

3.7. Тело массой 1 кг равномерно вращается по окружности радиусом 1 м с угловой скоростью 2 рад/с. Найдите модуль изменения импульса тела при повороте радиус-вектора, проведенного из центра окружности к телу, на 180°.

3.8. Тело массой 2 кг двигалось по окружности, причем в некоторой точке оно имело скорость 4 м/с. Пройдя четверть окружности, тело приобрело скорость 3 м/с. Определите модуль изменения импульса тела.

3.9. Мячик массой 200 г летел со скоростью 25 м/с. После удара о стенку он отскочил под углом 120° к прежнему направлению со скоростью 15 м/с. Найдите модуль изменения импульса мячика при ударе.

Изменение импульса и средняя сила (3–7)

3.10. Из орудия вылетает снаряд со скоростью 600 м/с. Определите массу снаряда, если средняя сила давления пороховых газов равна 2700 кН и снаряд движется внутри ствола 0,002 с.

3.11. Мяч массой 100 г, летящий со скоростью 2 м/с, пойман на лету. Какова средняя сила удара мяча о руку, если он остановился за 0,02 с?

3.12. Молот массой 1000 кг падает с высоты 1,8 м на наковальню. Длительность удара 0,1 с. Удар неупругий. Определите среднее значение силы взаимодействия (в кН) молота и наковальни. $g = 10$ м/с^2.

3.13. Металлический шарик массой 20 г, падающий со скоростью 5 м/с, ударяется упруго о стальную плиту и отскакивает от нее в противоположном направлении с такой же по модулю скоростью. Найдите среднюю силу взаимодействия шарика с плитой за время соударения, если оно длилось 0,01 с. Действием силы тяжести за время удара пренебречь.

3.14. Стальной шарик падает на горизонтальную поверхность стола с высоты 45 см и, отскочив, поднимается на высоту 20 см. Масса шарика 20 г. Какова средняя сила, с которой шарик действовал на стол при ударе, если соприкосновение шарика со столом длилось 10^{-4} с? Действием силы тяжести за время удара пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

3.15. Мячик массой 300 г летел со скоростью 20 м/с. После удара о стенку он отскочил под прямым углом к прежнему направлению движения со скоростью 15 м/с. Какова средняя сила взаимодействия мячика и стенки во время удара, если продолжительность удара 0,05 с?

3.16. Мячик массой 0,5 кг отскакивает от пола, имея перед ударом скорость 10 м/с, направленную под углом 60° к вертикали. Найдите среднюю силу взаимодействия мяча с полом, если длительность удара 0,1 с. Удар считать абсолютно упругим. $g = 10$ м/с^2.

3.17. С каким ускорением будет подниматься с поверхности земли ракета массой 1 т, если она выбрасывает вертикально вниз 10 кг раскаленных газов в секунду со скоростью 1500 м/с? $g = 10$ м/с^2.

3.18. Ракета массой 3 т поднимается вертикально вверх с ускорением 5,6 м/с^2, находясь на высоте 1600 км над Землей. Какая масса газов выбрасывается из сопла ракеты за 1 с? Скорость выброса газов 1800 м/с. Радиус Земли 6400 км, $g = 10$ м/с^2.

3.19. На ракете массой 5 т, летящей в глубоком космосе со скоростью 6 км/с, для совершения поворота включают боковой реактивный двигатель. Скорость газов в реактивной струе 2 км/с, расход топлива 10 кг/с. По окружности какого радиуса (в км) происходит поворот?

3.20. Ракета массой 4 т выведена на круговую орбиту, радиус которой вдвое больше радиуса Земли. При совершении маневра она некоторое время двигалась по той же орбите, но с удвоенной скоростью. Какую массу газов в секунду должен выбрасывать реактивный двигатель для поддержания такого движения, если скорость газов в струе 1500 м/с? $g = 10$ м/с^2.

3.21. При посадке на планету, лишенную атмосферы, космический корабль сначала облетает ее на малой высоте с выключенными двигателями. Затем он уменьшает скорость на 20%, и при новом режиме облета расход реактивного топлива составляет 3 кг/с. Каким будет расход топлива при уменьшении скорости облета еще вдвое? Скорость выброса газов постоянна.

3.22. Струя воды ударяется о вертикальную стену, расположенную перпендикулярно к струе. После удара вода стекает вниз по стене. Найдите силу, с которой струя действует на стену, если площадь сечения струи 5 см^2, а ее скорость 8 м/с.

3.23. Готовясь к прыжку, змея поднимает голову со скоростью 10 см/с. Считая массу змеи 2 кг равномерно распределенной по ее длине, равной 80 см, найдите, на сколько миллиньютонов возрастает при этом сила давления змеи на землю.

Закон сохранения импульса (8–11)

3.24. Электровоз массой $1,8 \cdot 10^5$ кг, движущийся со скоростью 0,5 м/с, сталкивается с неподвижным вагоном массой $4,5 \cdot 10^4$ кг, после чего они движутся вместе. Найдите скорость (в см/с) их совместного движения.

3.25. Шар массой 200 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 300 г, двигавшемся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в см/с.

3.26. Два тела, двигаясь навстречу друг другу со скоростью 3 м/с каждое, после соударения стали двигаться вместе со скоростью 1,5 м/с. Найдите отношение их масс.

3.27. Из орудия массой 3 т вылетает в горизонтальном направлении снаряд массой 15 кг со скоростью 650 м/с. Какую скорость (по абсолютной величине) получит орудие при отдаче? Ответ дайте в см/с.

3.28. С кормы лодки массой 200 кг, движущейся со скоростью 1 м/с, прыгает мальчик в горизонтальном направлении в сторону, противоположную движению лодки. С какой скоростью (относительно земли) прыгает мальчик, если скорость лодки после его прыжка возросла до 3 м/с, а масса мальчика 50 кг?

3.29. Летящий со скоростью 56 м/с снаряд разорвался на два осколка. Осколок массой $m_1 = m/3$, где m — масса снаряда, продолжает полет в том же направлении со скоростью 112 м/с. Чему равна величина скорости второго осколка?

3.30. Из винтовки массой 5 кг производится выстрел. Во сколько раз скорость отдачи винтовки, не прижатой к плечу стрелка, превышает скорость отдачи в случае, когда стрелок крепко прижимает винтовку к плечу? Масса стрелка 75 кг.

3.31. Тележка массой 120 кг вместе с человеком массой 80 кг движется со скоростью 0,3 м/с. Человек начинает идти по тележке с постоянной скоростью в направлении движения тележки. При какой скорости (в см/с) человека относительно тележки она остановится?

3.32. Человек бежит навстречу тележке. Скорость человека 2 м/с, скорость тележки 1 м/с. Человек вскакивает на тележку и остается на ней. Какой будет скорость тележки после этого, если масса человека в 2 раза больше массы тележки?

3.33. Тележка двигается с постоянной скоростью. Человек, скорость которого в 2 раза больше, догоняет тележку, вскакивает на нее и остается на ней, в результате чего скорость тележки увеличивается на 20%. Во сколько раз масса тележки больше массы человека?

3.34. Стальная пуля массой 4 г, летящая горизонтально со скоростью 500 м/с, попадает в центр боковой грани неподвижного стального бруска, масса которого 1 кг. После столкновения пуля отскакивает в противоположную сторону со скоростью 400 м/с. Чему равна скорость (в см/с) бруска после столкновения?

3.35. Два мальчика стоят на коньках лицом друг к другу и держат за концы веревку. Масса одного мальчика 30 кг, масса другого 40 кг. Один из мальчиков начинает сматывать веревку таким образом, что ее длина уменьшается на 35 см за секунду. С какой скоростью (в см/с) станет двигаться более легкий мальчик? Массой веревки и силой трения пренебречь.

3.36. На противоположных концах неподвижной тележки массой 80 кг стоят два человека, один — массой 50 кг, другой — массой 60 кг. Они одновременно спрыгивают с тележки, со скоростями относительно земли 2 м/с и 1 м/с соответственно. Найдите, с какой скоростью (в см/с) будет после этого двигаться тележка. Считать, что скорости людей в момент отрыва от тележки направлены горизонтально.

3.37. Граната, летевшая горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвалась на две части. Скорость большего осколка равна 30 м/с и направлена под углом 60° к горизонту. Скорость меньшего осколка 60 м/с. Найдите отношение масс осколков.

Сохранение проекции импульса (12–13)

3.38. По абсолютно гладкой горизонтальной поверхности движется со скоростью 6 м/с ящик с песком массой 5 кг. В песок попадает гиря массой 1 кг, отпущенная с некоторой высоты без начальной скорости. Определите скорость ящика после попадания в него гири.

3.39. На вагонетку массой 800 кг, катящуюся по горизонтальному пути со скоростью 0,2 м/с, насыпали сверху 200 кг щебня. На сколько при этом уменьшилась скорость (в см/с) вагонетки?

3.40. Спортсмен, стоя на роликовых коньках, бросает ядро массой 4 кг со скоростью 8 м/с под углом 60° к горизонту. Какова начальная скорость (в см/с) спортсмена после броска, если его масса 80 кг?

3.41. Груз массой 2 кг соскальзывает без трения с наклонной доски на неподвижную платформу массой 18 кг. С какой скоростью (в см/с) начнет двигаться платформа, когда груз упадет на нее? Угол наклона доски к горизонту 60°, высота начального положения груза над уровнем платформы 1,8 м. $g = 10$ м/с^2.

3.42. В ящик с песком массой 12 кг, соскальзывающий с гладкой наклонной плоскости, с высоты 3,2 м падает груз массой 4 кг и застревает в нем. Найдите скорость ящика сразу же после попадания груза, если непосредственно перед попаданием скорость ящика равнялась 8 м/с. Угол наклона плоскости к горизонту 30°. $g = 10$ м/с^2.

3.43. Лягушка массой 100 г сидит на конце доски массой 900 г и длиной 50 см, которая лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Лягушка прыгает под углом 15° вдоль доски. Какова должна быть начальная скорость лягушки, чтобы она приземлилась на другом конце доски? $g = 10$ м/с^2.

Комплексные задачи. Центр масс (14–17)

3.44. Человек массой 60 кг, стоя на коньках, горизонтально бросает перед собой груз массой 2 кг со скоростью 3 м/с, а сам откатывается назад. Через сколько секунд после броска человек остановится, если коэффициент трения коньков о лед 0,01? $g = 10$ м/с^2.

3.45. На тонкой пластинке лежит шар массой 200 г. Снизу вертикально вверх в шар стреляют пулей массой 10 г со скоростью 450 м/с. Пуля пробивает пластину и шар, в результате чего шар поднимается на высоту 20 м. На какую высоту поднимется пуля? $g = 10$ м/с^2.

3.46. Из орудия выстрелили вертикально вверх. Снаряд вылетел из ствола со скоростью 40 м/с и в верхней точке разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал со скоростью 50 м/с рядом с местом выстрела. Найдите время, в течение которого второй осколок находился в воздухе после разрыва. $g = 10$ м/с^2.

3.47. Тележка длиной 5 м стоит на гладких рельсах. На противоположных концах тележки стоят два мальчика. Масса тележки 75 кг, массы мальчиков 45 кг и 30 кг. Мальчики меняются местами. На сколько сантиметров переместится при этом тележка?

3.48. Человек захотел спуститься по веревочной лестнице из свободно висящего аэростата массой 400 кг. Какой минимальной длины веревочную лестницу он должен привязать к гондоле аэростата, чтобы, ступая на последнюю ступеньку, он коснулся земли? Масса человека 80 кг. Расстояние от земли до аэростата в начальный момент времени 10 м.

3.49. На гладкой поверхности удерживают в состоянии неустойчивого равновесия куб, стоящий на ребре. Куб отпускают, и он падает плашмя на одну из граней. На сколько сантиметров сместится к этому моменту ребро, на котором он стоял, если сторона куба 32 см?

3.50. Тонкую цепочку положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили вокруг одного из концов. С какой силой действует цепочка на ось вращения, если сила натяжения в ее середине равна 12 Н?

3.51. Тонкий однородный стержень массой 0,5 кг и длиной 1 м вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В нижнем положении скорость другого конца стержня равна 4 м/с. С какой силой действует стержень в этот момент на ось вращения? $g = 10$ м/с^2.

3.52. Тонкую пластинку массой 500 г, имеющую форму квадрата со стороной 75 см, раскрутили с угловой скоростью 8 рад/с вокруг вертикальной оси, совпадающей с одной из сторон квадрата. С какой силой действует пластинка на ось вращения? $g = 10$ м/с^2.

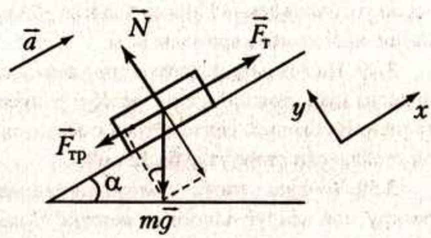
3.53. Два шарика массами 1 кг и 4 кг, соединенные нитью длиной 1 м, движутся по гладкой горизонтальной поверхности так, что угловая скорость вращения нити равна 5 рад/с. Найдите силу натяжения нити.

Глава 4

Работа и энергия

Примеры решения задач

Задача 1. *Вагонетку массой 200 кг поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту составляет 30°. Какую работу (в кДж) совершила сила тяги на пути 50 м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением 0,2 м/с²? Коэффициент трения 0,2, $g = 10$ м/с². $\sqrt{3} = 1,7$.*



Так как сила тяги направлена вдоль наклонной плоскости, ее работа на пути s равна

$$A = F_т s.$$

Чтобы найти силу тяги, запишем уравнение движения в проекциях на оси x и y

$$F_т - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0$$

и формулу для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N.$$

Решив полученную систему, получим

$$F_т = ma + mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = 1380\ \text{Н},$$

откуда находим работу силы тяги: $A = 69$ кДж.

Задача 2. *Санки массой 18 кг равномерно передвигают по горизонтальному участку дороги с помощью веревки, наклоненной под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения 0,08. Найдите работу силы натяжения на пути 100 м. $g = 10$ м/с². $\sqrt{3} = 1,72$.*

Из второго закона Ньютона в проекциях на оси x и y

$$F_н\cos\alpha - F_{тр} = 0,$$

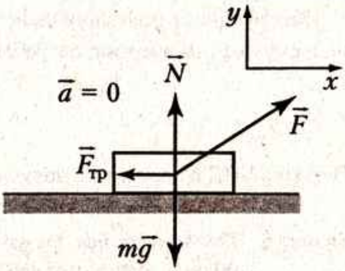
$$N - mg + F_н\sin\alpha = 0$$

и формулы для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N$$

выразим силу натяжения и подставим в формулу для работы

$$A = F_н s \cos\alpha.$$

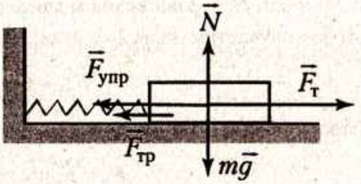


Получим

$$A = \frac{\mu mgs\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 1376 \text{ Н}.$$

Задача 3. *Ящик массой 10 кг лежит на горизонтальной поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стены, с которой он соединен пружиной жесткостью 200 Н/м. Коэффициент трения между ящиком и поверхностью 0,2. Ящик медленно отодвигают от стены на 20 см, прикладывая к нему горизонтальную силу. Какую работу при этом совершают? В начальном положении пружина не деформирована. $g = 10$ м/с^2.*

Чтобы найти силу тяги, запишем 2-ой закон Ньютона в проекциях на оси x и y



$$F_т - F_{тр} - F_{упр} = 0,$$
$$N - mg = 0$$

(ускорение равно нулю) и формулы для сил трения и упругости

$$F_{тр} = \mu N, \quad F_{упр} = kx.$$

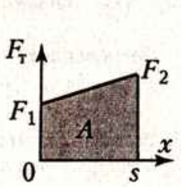
Получим, что сила тяги

$$F_т = \mu mg + kx$$

линейно зависит от перемещения x. В этом случае работа может быть найдена как работа средней силы

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2}s = \mu mgs + \frac{ks^2}{2} = 8 \text{ Дж}.$$

где F_1, F_2 — начальное и конечное значения силы тяги. Отметим, что работа равна сумме двух членов: работе против силы трения (выделившееся тепло) и энергии упругой деформации пружины.



Задача 4. *Нефть откачивают из скважины глубиной 500 м с помощью насоса, потребляющего мощность 10 кВт. Каков КПД (в процентах) насоса, если за одну минуту его работы на поверхность земли подается 96 кг нефти? $g = 10$ м/с^2.*

Коэффициент полезного действия равен отношению полезной работы по подъему нефти к энергии, потребленной насосом из сети за это время

$$\eta = \frac{mgh}{Pt} = 0{,}8.$$

Выразив КПД в процентах, получим $\eta = 80\%$.

Задача 5. *Грузовой состав движется по ровному участку дороги со скоростью 60 км/ч, электровоз при этом развивает полезную мощность 100 кВт. С какой скоростью (в км/ч) надо подниматься по участку с уклоном 1 м на 200 м пути, чтобы развиваемая мощность равнялась 120 кВт? Сила сопротивления равна 0,01 от силы тяжести состава.*

В первом случае полезная мощность равна

$$P_1 = F_{\text{т}1}v_1 = \mu mgv_1,$$

где $\mu = 0{,}01$ (при равномерном движении сила тяги равна силе сопротивления). Во втором случае проекция 2-го закона Ньютона на направление движения имеет вид

$$F_{\text{т}2} - \mu mg - mg\sin\alpha = 0,$$

($\sin\alpha = 1/200$), и для мощности получаем

$$P_2 = F_{\text{т}2}v_2 = (\mu mg + mg\sin\alpha)v_2.$$

Разделив P_2 на P_1, выразим v_2

$$v_2 = \frac{P_2}{P_1}\frac{\mu}{\mu + \sin\alpha}v_1 = 48 \text{ км/ч}.$$

Задача 6. *Автомобиль массой 1 т трогается с места и, двигаясь равноускоренно, проходит путь 50 м за 5 с. Какую мощность (в кВт) развивает автомобиль в конце пятой секунды своего движения? Сопротивлением движению автомобиля пренебречь.*

Мгновенное значение мощности, развиваемой силой тяги, равно

$$P = F_{\text{т}}v.$$

Силу тяги найдем из уравнения движения автомобиля

$$F_{\text{т}} = ma.$$

Ускорение определим из уравнения кинематики

$$s = \frac{at^2}{2},$$

а скорость в момент времени $t = 5$ с — из уравнения

$$s = \frac{0+v}{2}t .$$

Получаем

$$P = \left(m\frac{2s}{t^2}\right)\frac{2s}{t} = \frac{4ms^2}{t^3} = 80 \text{ кВт}.$$

Задача 7. *Какую среднюю полезную мощность (в кВт) развивает при разбеге самолет массой 1 т, если длина разбега 300 м, взлетная скорость 30 м/с, а сила сопротивления движению 300 Н?*

Средняя мощность силы тяги равна

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t} = \frac{F_{\text{т}}s}{t} = F_{\text{т}}v_{\text{ср}} = F_{\text{т}}\frac{v}{2},$$

где $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость. Чтобы найти силу тяги, запишем 2-ой закон Ньютона

$$F_{\text{т}} - F_{\text{ср}} = ma,$$

а ускорение найдем из уравнения

$$v^2 = 2as.$$

Получаем

$$P_{\text{ср}} = \left(m\frac{v^2}{2s} + F_{\text{с}}\right)\frac{v}{2} = 27 \text{ кВт}.$$

Задача 8. *Тело брошено с некоторой высоты горизонтально со скоростью 10 м/с. Через сколько секунд кинетическая энергия тела возрастет вдвое? $g = 10$ м/с^2.*

По условию

$$\frac{mv^2}{2} = 2\frac{mv_0^2}{2}.$$

Квадрат скорости выражается через горизонтальную и вертикальную проекции

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + (gt)^2$$

(см. формулу (12)). Получаем $v_0^2 + (gt)^2 = 2v_0^2$, откуда $t = v_0/g = 1$ с.

Задача 9. *Чему равна полезная мощность брандспойта, если площадь его отверстия 10 см², а скорость водяной струи 10 м/с?*

. Полезная работа брандспойта за время t равна кинетической энергии воды, выброшенной за это время

$$A_{\text{пол}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Массу воды, выброшенной за время t, найдём из уравнения расхода

$$m = \rho svt,$$

где ρ — плотность воды. Для полезной мощности получаем

$$P_{\text{пол}} = \frac{A_{\text{пол}}}{t} = \frac{1}{2}\rho sv^3 = 500\ \text{Вт}.$$

Задача 10. *Однородный стержень длиной 8 см скользит по гладкой горизонтальной поверхности параллельно своей длине и наезжает на границу, отделяющую гладкую поверхность от шероховатой, коэффициент трения о которую 0,2. Линия границы расположена перпендикулярно скорости стержня. Найдите начальную скорость (в см/с) стержня, если он остановился в тот момент, когда наполовину пересек границу. $g = 10$ м/с².*

В тот момент, когда на шероховатую поверхность заехал отрезок стержня длиной x, сила трения равна $F_{\text{тр}}(x) = \mu mg(x/l)$. Значит, сила трения линейно зависит от перемещения, и работу можно вычислять по формуле

$$A_{\text{тр}} = -\frac{F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}}{2}s = -\frac{0 + \mu mg/2}{2}\frac{l}{2} = -\frac{\mu mgl}{8}.$$

Применяя теорему о кинетической энергии

$$A_{\text{тр}} = 0 - \frac{mv_0^2}{2},$$

находим начальную скорость $v_0 = \sqrt{\mu gl}/2 = 20$ см/с.

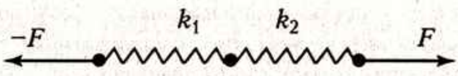
Задача 11. *На сколько изменится потенциальная энергия бруска массой 200 кг, если его перевести из горизонтального положения в вертикальное? Брусок имеет квадратное сечение со стороной 20 см и длину 1 м. $g = 10$ м/с².*

Формулу $E_{\text{п}} = mgh$ можно применять для расчета потенциальной энергии протяженного тела, но под h надо понимать высоту, на которой расположен центр тяжести этого тела. Для изменения потенциальной энергии бруска получаем

$$\Delta E = mg\frac{l}{2} - mg\frac{a}{2} = 800 \text{ Дж},$$

где l — длина бруска, a — сторона квадрата в сечении бруска.

Задача 12. *Две пружины, жесткости которых 3 кН/м и 2 кН/м, соединили последовательно и растянули за концы на 10 см. Какую при этом совершили работу?*



Работа равна изменению потенциальной энергии пружин. В случае последовательного соединения деформация составной пружины равна сумме деформаций: $x = x_1 + x_2$, а сила упругости для двух пружин одинакова: $k_1x_1 = k_2x_2$. Из этих уравнений находим деформацию каждой пружины

$$x_1 = \frac{k_2 x}{k_1 + k_2}, \quad x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2}$$

и вычисляем потенциальную энергию

$$E_п = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\frac{x^2}{2} = 6 \text{ Дж}.$$

Задача 13. *Тонкая пластинка массой 10 кг лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружинка жесткостью 100 Н/м. Какую работу надо совершить, чтобы на пружине поднять пластинку на высоту 1 м от поверхности стола? $g = 10$ м/с^2.*

В данном случае работу удобно рассчитывать исходя не из ее определения, а из связи между работой и изменением энергии

$$A = E_2 - E_1 = \left(mgh + \frac{kx^2}{2}\right) - 0$$

(кинетическая энергия остается равной нулю). Деформацию пружинки найдем из условия равновесия пластинки

$$mg - kx = 0.$$

Получаем

$$A = mgh + \frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 150 \text{ Дж}.$$

Задача 14. *Груз висит на пружине жесткостью 60 Н/м. Какую надо совершить работу (в мДж), чтобы растянуть пружину еще на 2 см?*

Работа по растяжению пружины равна изменению потенциальной энергии, которая содержит два слагаемых: потенциальную энергию силы тяжести и потенциальную энергию упругой деформации:

$$A = \left[\frac{k(x + x_0)^2}{2} - \left(mgx + \frac{kx_0^2}{2}\right)\right]$$

где x_0 — начальная деформация, x — дополнительное растяжение, а потенциальная энергия силы тяжести отсчитывается от конечного положения. После упрощения (с учетом соотношения $mg - kx_0 = 0$) получим

$$A = \frac{kx^2}{2} = 12 \text{ мДж}.$$

Замечание. Бросается в глаза, что конечное выражение для потенциальной энергии содержит только один член: энергию упругой деформации, но отсчитанную от положения равновесия (где пружина уже растянута на x_0). Дело в том, что в этом состоянии равнодействующая сил тяжести и упругости равна нулю, а при отклонении на x становится равной $F_р = -kx$ (сила тяжести не меняется, а сила упругости изменяется на $-kx$). Следовательно, обе силы вместе эквивалентны одной силе упругости, в которой деформация x отсчитывается от положения равновесия. Это наблюдение оказывается очень удобным при решении задач.

Задача 15. *Тело брошено под углом к горизонту с высоты 10 м над поверхностью земли со скоростью 20 м/с. Чему будет равна его скорость на высоте 25 м? $g = 10$ м/с^2.*

Искомую скорость можно найти из закона сохранения энергии

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2}.$$

Получаем

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g(h_1 - h_0)} = 10 \text{ м/с}.$$

Так как кинетическая энергия зависит только от величины скорости, то угол, под которым бросили тело, в ответ не вошел.

Задача 16. *Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на жестком невесомом стержне длиной 0,4 м? $g = 10$ м/с^2.*

Для груза на жестком стержне минимальная энергия груза соответствует случаю, когда верхняя точка проходится им с почти нулевой скоростью ($v_2 = 0$). Принимая потенциальную энергию равной нулю в нижней точке окружности, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = mg(2l),$$

откуда находим скорость в нижней точке: $v_1 = \sqrt{4gl} = 4$ м/с.

Задача 17. *К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью 400 Н/м прикрепили груз массой 250 г и без толчка отпустили. Определите максимальную скорость (в см/с) груза. $g = 10$ м/с^2.*

Скорость груза будет максимальной в тот момент, когда равно нулю его ускорение, т. е. выполняется уравнение

$$mg - kx = 0.$$

Принимая потенциальную энергию силы тяжести равной нулю в этой точке, запишем закон сохранения энергии

$$mgx = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$v = g\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} = 25 \text{ см/с}.$$

Задача 18. *Груз массой 1,6 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 250 Н/м. Грузу резким толчком сообщают начальную скорость 1 м/с, направленную вертикально вверх. На какое максимальное расстояние (в мм) поднимется груз? $g = 10$ м/с^2.*

Рассмотрим сначала более простой случай: будем считать, что груз висит не на шнуре, а на пружине. В этом случае проще всего записать закон сохранения энергии, объединяя вместе силы тяжести и упругости (см. реш. 14):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}, \qquad \text{т.е.} \qquad x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 80 \text{ мм},$$

где x — максимальное отклонение от положения равновесия. Отличие шнура от пружины состоит в том, что сила упругости возникает в нем только при растяжении. Поэтому, если груз поднимется на $x_0 = mg/k$ (где деформация шнура обратится в ноль) и будет двигаться дальше, то на него будет действовать только сила тяжести. Выясним, при какой начальной скорости v_1 груз достигнет этой «критической точки» и остановится. Для этого подставим в написанное выше уравнение $x = x_0$ и получим

$$v_1 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = g\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

В нашем случае $v_0 > v_1$, решение, записанное для пружины, оказывается неверным, и задачу надо решать заново. В этой ситуации удобно не объединять силы тяжести и упругости, а рассматривать их по отдельности. Отсчитывая потенциальную энергию силы тяжести от начального положения, запишем

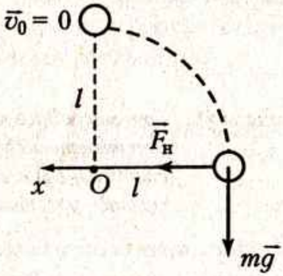
$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2} = mgx,$$

откуда, с учетом $x_0 = mg / k$, находим

$$x = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{mg}{2k} = 82 \text{ мм}.$$

Задача 19. *Легкий стержень с грузом массой 0,2 кг на одном конце может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой конец. Сначала груз удерживают в верхнем положении (стержень вертикален), а затем отпускают. Чему равно натяжение стержня в тот момент, когда он проходит горизонтальное положение?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Чтобы найти натяжение стержня, запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на ось x, направленную от груза к центру окружности



$$F_н = \frac{mv^2}{l}.$$

Квадрат скорости найдем из закона сохранения энергии

$$mgl = \frac{mv^2}{2}$$

(высота отсчитывается от точки подвеса стержня). Получаем $F_н = 2mg = 4$ Н.

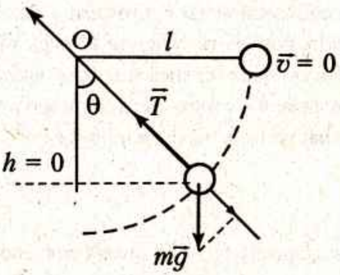
Задача 20. *Маленький шарик массой 0,2 кг находится на конце нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости. Чему равна сила натяжения нити в тот момент, когда она составляет угол 60° с вертикалью?* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на ось, проведенную от тела к центру окружности, по которой движется тело

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{l},$$

где l — длина нити. Вторым уравнением, которое позволяет учесть, что начальная скорость равна нулю, является закон сохранения энергии

$$mgh + 0 = 0 + \frac{mv^2}{2}$$

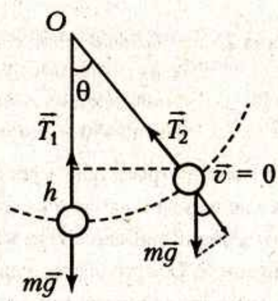


(высота отсчитывается от нижнего из двух положений шарика). Высота в верхнем положении равна $h = l\cos\theta$. Выразив v^2 из второго уравнения и подставив в первое, получим

$$T = 3mg\cos\theta = 3 \text{ Н}.$$

Задача 21. *На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол (в градусах) надо отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была бы в 4 раза больше минимальной?*

Силы натяжения нити в нижней и крайней точках выразим из 2-го закона Ньютона, записанного в каждой точке в проекции на ось, проведенную к центру



$$T_1 - mg = \frac{mv^2}{l}, \quad T_2 - mg\cos\theta = 0$$

(при приближении к крайней точке центростремительное ускорение стремится к нулю). Квадрат скорости в нижней точке найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos\theta)$$

(высота отсчитывается от нижнего положения шарика). Получаем

$$T_1 = mg(3 - 2\cos\theta), \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{3 - 2\cos\theta}{\cos\theta},$$

откуда

$$\cos\theta = \frac{3}{T_1/T_2 + 2} = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60°.$$

Задача 22. *Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости, если он висит на легкой нерастяжимой нити длиной 2 м? $g = 10$ м/с^2.*

В отличие от разобранной выше задачи (см. реш. 16), здесь шарик подвешен не на стержне, а на нити. Это изменяет условие для минимальной энергии, необходимой для прохождения полного оборота. Энергию можно уменьшать до тех пор, пока нить натянута во всех точках окружности. Поскольку самое маленькое натяжение в верхней точке окружности (докажите это), то при минимальной энергии натяжение в верхней точке равно нулю. Скорость v_2 в верхней точке найдем из 2-го закона Ньютона (в проекции на ось, направленную вниз, к центру окружности)

$$mg = \frac{mv_2^2}{l},$$

а скорость v_1 — из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg(2l)$$

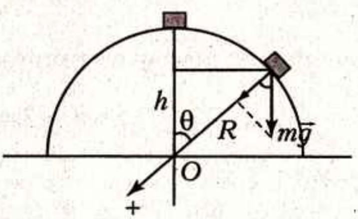
(высота отсчитывается от нижней точки окружности). Получаем $v_1 = \sqrt{5gl} = 10$ м/с.

Задача 23. *Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины неподвижной полусферы радиусом 0,75 м. На какой высоте (в см) тело оторвется от поверхности полусферы? Высота отсчитывается от основания полусферы.*

В момент отрыва тело перестает давить на поверхность полусферы — обращается в ноль сила реакции и на тело действует только сила тяжести. В то же время, в этот момент движение тела можно еще считать происходящим по окружности радиусом R. Оба эти обстоятельства учитывает проекция уравнения движения на ось, проведенную вдоль радиуса от тела к центру полусферы

$$mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R},$$

где θ — угол между этим радиусом и вертикалью. Второе уравнение получим, приравняв энергию в момент отрыва к энергии в начальный момент

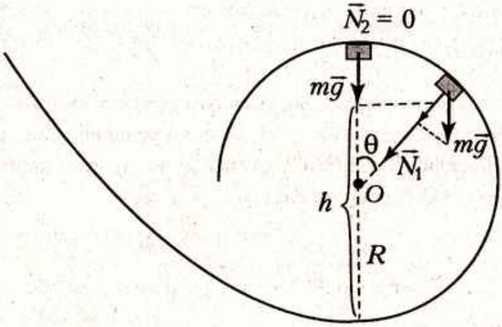


$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

(высота отсчитывается от поверхности, на которой лежит полусфера). Выражая v^2 из первого уравнения и учитывая, что $\cos\theta = h/R$, получим

$$h = \frac{2}{3}R = 50 \text{ см}.$$

Задача 24. *Небольшая тележка описывает в вертикальной плоскости «мертвую петлю» радиусом 2 м, скатываясь с минимальной высоты, обеспечивающей прохождение всей петли. На какой высоте от нижней точки петли сила давления тележки на рельсы равна 3/2 силы тяжести тележки? Трением пренебречь.*



При минимальной энергии, обеспечивающей прохождение всей петли, сила нормальной реакции в верхней точке обращается в ноль (см. реш. 22). Запишем 2-ой закон Ньютона в проекции на радиус в верхней точке и в точке, где $N_1 = (3/2)mg$

$$mg = m\frac{v_2^2}{R}, \quad mg\cos\theta + N_1 = m\frac{v_1^2}{R}.$$

Приравняем механическую энергию в указанных точках — на высоте $2R$ и на искомой высоте $h = R(1+\cos\theta)$

$$mg(2R) + \frac{mv_2^2}{2} = mg(R + R\cos\theta) + \frac{mv_1^2}{2}.$$

Подставив сюда квадраты скоростей, получим $\cos\theta = 1/2$, откуда $h = (3/2)R = 3$ м.

Задача 25. *Шар массой 2 кг, имеющий скорость 6 м/с, абсолютно упруго сталкивается с неподвижным шаром массой 1 кг. Найдите скорость второго шара после удара, считая его центральным.*

В случае упругого удара кроме импульса системы сохраняется также ее механическая энергия. Запишем оба закона сохранения

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$
$$m_1v_1 = m_1u_{1x} + m_2u_2$$

и сгруппируем члены так, чтобы все, что относится к первому телу, было слева от знака равенства

$$m_1\left(v_1^2 - u_{1x}^2\right) = m_2 u_2^2,$$

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2 u_2.$$

Если мы поделим уравнения друг на друга, то получим простое уравнение

$$v_1 + u_{1x} = u_2,$$

которое вместе с законом сохранения импульса образует систему двух *линейных* уравнений с двумя неизвестными. (При делении уравнений мы, с точки зрения математики, отбросили неинтересное для нас решение начальной системы уравнений: $u_{1x} = v_1$, $u_2 = 0$.) Решив эту систему, получим

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Отметим, что

а) ответ зависит только от *отношения* масс шаров;

б) если налетающий шар массивнее ($m_1/m_2 > 1$), он после удара продолжает движение вперед, если легче — откатывается назад, если той же массы — останавливается.

Подставляя численные данные, находим $u_2 = 8$ м/с.

Задача 26. *Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар большей массы покоится. В результате прямого удара меньший шар потерял 3/4 своей кинетической энергии. Во сколько раз масса одного шара больше, чем другого?*

Запишем законы сохранения энергии и импульса (с учетом знаков)

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Лучше всегда начинать с упрощения этой системы способом, описанным в предыдущей задаче (иногда можно обойтись без этого — попробуйте сами решить эту задачу по-другому). В результате приходим к системе линейных уравнений

$$v_1 - u_1 = u_2,$$

$$m_1(v_1 + u_1) = m_2 u_2.$$

Если первый шар потерял 3/4 своей энергии, то у него осталась 1/4

$$\frac{m_1u_1^2}{2} = \frac{1}{4}\frac{m_1v_1^2}{2},$$

откуда получаем соотношение между скоростями

$$u_1 = \frac{v_1}{2}$$

(важно, что знак уже учтен и $u_1 > 0$!). Подставив это выражение в систему и приведя подобные члены, получим

$$\tfrac{1}{2}v_1 = u_2,$$

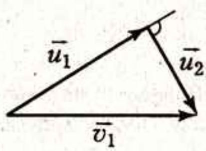
$$m_1\left(\tfrac{3}{2}v_1\right) = m_2u_2.$$

Поделив второе уравнение на первое, получим

$$3m_1 = m_2,$$

т. е. отношение масс равно 3.

Задача 27. *Альфа-частица после абсолютно упругого столкновения с неподвижным ядром гелия движется в направлении, образующем некоторый угол с первоначальным направлением. Определите угол (в градусах) под которым разлетаются частицы после столкновения.*



Так как альфа-частица — такое же ядро атома гелия (полученное при альфа-распаде), то надо рассмотреть упругий нецентральный удар двух одинаковых частиц. Законы сохранения для такого удара имеют вид

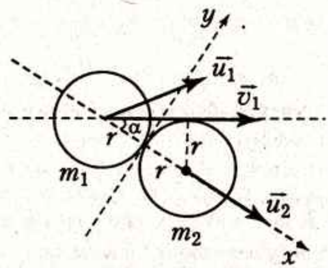
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}, \qquad m\vec{v}_1 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2.$$

Изобразим закон сохранения импульса (после сокращения m) на рисунке. Из закона сохранения энергии следует, что стороны треугольника скоростей подчиняются теореме Пифагора. Значит, угол между скоростями $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равен 90°.

Задача 28. *Шар массой 70 г покоится, а другой шар такого же размера, но массой 150 г налетает на него со скоростью 44 см/с так, что скорость его центра лежит на касательной к поверхности неподвижного шара. Найдите скорость (в см/с) налетавшего шара после абсолютно упругого удара. Поверхности шаров гладкие.*

В данном случае удобнее решать задачу не в векторном виде, а проектировать закон сохранения импульса на определенным образом выбранные оси. Ось

x направим вдоль линии центров шаров в момент удара, а ось y — перпендикулярно ей, по касательной к поверхностям шаров в точке касания. Из рисунка видно, что ось x направлена под углом $\alpha = 30°$ к начальной скорости $\vec{v}_1$ налетающего шара. Поскольку поверхности шаров гладкие, между шарами во время удара действуют только силы нормальной реакции, направленные вдоль линии центров шаров.



Это значит, что, во-первых, скорость $\vec{u}_2$ покоившегося шара направлена вдоль оси x и, во-вторых, что проекция скорости налетающего шара на ось y сохраняется: $u_{1y} = v_{1y}$.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось x

$$m_1 v_{1x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_2$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2)}{2} = \frac{m_1(u_{1x}^2 + u_{1y}^2)}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Поскольку $v_{1y} = u_{1y}$, это уравнение принимает вид

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Видно, что это уравнение вместе с законом сохранения импульса точно такие же, как в случае центрального удара, если налетающий шар имел бы скорость v_{1x}. Такую задачу мы решили чуть выше (см. реш. 25) и получили ответы

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}.$$

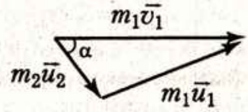
Скорость налетающего шара после удара равна

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = v_1 \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 26 \text{ см/с}$$

(мы учли, что $v_{1x} = v_1 \cos\alpha$, $u_{1y} = v_{1y} = v_1 \sin\alpha$).

Замечание. Задачу можно решать и векторным способом. На рисунке изображен треугольник, соответствующий закону сохранения импульса. Запишем для него теорему косинусов

$$m_1^2u_1^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2u_2^2 - 2(m_1v_1)(m_2u_2)\cos\alpha,$$



где a = 60° — угол между $\bar{v}_1$ и $\bar{u}_2$. Решая это уравнение совместно с законом сохранения энергии, найдем сначала u_2 (исключив u_1^2), а затем и u_1. Проделайте вычисления сами и убедитесь, что получается такой же ответ.

Задача 29. *Легкий шарик начинает свободно падать и, пролетев расстояние 1,25 м, сталкивается абсолютно упруго с тяжелой плитой, движущейся вверх со скоростью 2,5 м/с. На какую высоту подпрыгнет шарик после удара? g = 10 м/с².*

Направим ось координат вертикально вверх. Скорость шарика перед ударом равна $v_{1y} = -\sqrt{2gh_1} = -5$ м/с, скорость плиты $v_{2y} = 2{,}5$ м/с. Упругий удар о тяжелую плиту удобно рассмотреть в системе отсчета, в которой плита не движется — при ударе о неподвижную плиту шарик отскочит с той же скоростью. Скорость шарика в этой системе отсчета равна

$$(v_{12})_y = v_{1y} - v_{2y} = -\sqrt{2gh_1} - v_2 = -7{,}5 \text{ м/с.}$$

В результате удара скорость шарика относительно плиты изменит знак

$$(u_{12})_y = -(v_{12})_y = \sqrt{2gh_1} + v_2 = 7{,}5 \text{ м/с.}$$

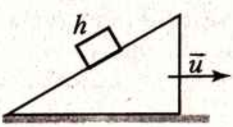
Теперь вернемся в неподвижную систему отсчета

$$u_{1y} = (u_{12})_y + v_{2y} = \sqrt{2gh_1} + 2v_2 = 10 \text{ м/с}$$

и вычислим высоту, на которую подпрыгнет шарик

$$h_2 = \frac{u_{1y}^2}{2g} = 5 \text{ м.}$$

Задача 30. *Гладкий клин стоит на гладком столе. На какую высоту (в см) от поверхности стола поднимется маленький брусок, наезжающий на клин со скоростью 2 м/с? Масса клина 8 кг, масса бруска 2 кг. g = 10 м/с². Считать, что брусок заезжает на клин плавно, без удара.*



В тот момент, когда брусок достигнет максимальной высоты, его скорость относительно клина обратится в ноль, т. е. в этот момент брусок и клин будут двигаться как одно целое с некоторой скоростью u.

Так как система брусок-клин замкнута в проекции на горизонтальное направление, то горизонтальная проекция импульса системы сохраняется

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u.$$

Выразив отсюда скорость u, подставим ее в закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2} + m_1 g h$$

и найдем искомую высоту

$$h = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_1^2}{2g} = 16 \text{ см}.$$

Задача 31. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 100 г и 400 г, соединенные недеформированной пружиной. Первому бруску сообщают скорость 10 м/с в направлении второго бруска. Найдите максимальную скорость второго бруска в процессе дальнейшего движения.*

Перед тем, как записать законы сохранения энергии и импульса, выясним, в какой момент скорость второго бруска будет максимальной. Когда первому бруску сообщают скорость v_1 в направлении второго бруска, расстояние между ними начинает уменьшаться, и пружина приходит в сжатое состояние. Возникшая сила упругости приводит в движение второй брусок, и его скорость увеличивается до тех пор, пока сила упругости действует в том же направлении, т. е. пока пружина остается в сжатом состоянии. Когда пружина перейдет в растянутое состояние, то сила упругости изменит направление, и скорость второго бруска начнет уменьшаться. Следовательно, скорость второго бруска будет максимальной в тот момент, когда пружина окажется в недеформированном состоянии ($x_2 = 0$). Поскольку в начальный момент она также была не деформирована ($x_1 = 0$), то энергия упругой деформации не входит в уравнения:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

$$m_1 v_1 = m_1 u_{1x} + m_2 u_2$$

Эти уравнения имеют точно такой же вид, как и для случая упругого удара шаров (см. реш. 25). Решая систему описанным там способом, находим максимальную скорость второго бруска:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 4 \text{ м/с}.$$

Замечание 1. Приведенная система уравнений имеет два решения, одно из которых ($u_{1x} = v_1$, $u_2 = 0$) в случае упругого удара (реш. 25) отбрасывается, так как соответствует сохранению начальных значений, т.е. отсутствию удара. Однако в данной задаче это решение представляет интерес, так как оно реализуется в тот момент, когда пружина в следующий раз станет недеформированной (после того, как она была в растянутом состоянии). При дальнейшем движении скорость второго бруска будет через раз возрастать до 4 м/с и уменьшаться до нуля.

Замечание 2. Приведенная система уравнений позволяет также найти минимальную скорость первого бруска, однако только в том случае, когда его скорость не меняется по направлению, т.е. когда $m_1 > m_2$ (в этом случае $u_{1x} > 0$, см. реш. 25).

Задача 32. *Шарик массой 100 г свободно падает с высоты 2 м на стальную плиту и подпрыгивает до высоты 1 м. Определите энергию, потерянную в виде тепла при ударе. Сопротивлением воздуха пренебречь. $g = 10$ м/с^2.*

Запишем закон сохранения энергии (с учетом перехода механической энергии во внутреннюю, т. е. в теплоту)

$$E_1 = E_2 + Q,$$

где $E_1 = mgh_1$ — начальная, а $E_2 = mgh_2$ — конечная механическая энергия, Q — приращение внутренней энергии (количество теплоты). Получаем $Q = 1$ Дж.

Задача 33. *С высоты 15 м над поверхностью земли вертикально вниз брошен мяч массой 500 г со скоростью 10 м/с. Мяч упал на поверхность земли со скоростью 16 м/с. Определите абсолютную величину работы, совершаемой силой сопротивления воздуха при движении мяча. $g = 10$ м/с^2.*

Работа силы сопротивления равна изменению механической энергии

$$A_c = \frac{mv_2^2}{2} - \left(\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1\right) = -36 \text{ Дж}.$$

Абсолютное значение работы силы сопротивления равно 36 Дж.

Замечание. Эту величину часто называют работой *по преодолению* силы сопротивления (или работой *против* силы сопротивления). Кроме того, она равна количеству теплоты, выделившейся в системе (приращению внутренней энергии).

Задача 34. *По наклонной доске, образующей угол 30° с горизонтом, начинает скользить тело массой 2 кг. Сколько теплоты выделилось за счет трения на отрезке пути 1,8 м, если в конце этого отрезка скорость тела равна 3 м/с? $g = 10$ м/с^2.*

В этой задаче количество теплоты проще найти из баланса энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + Q,$$

где $h = s \cdot \sin\alpha$. Получаем $Q = 9$ Дж.

Задача 35. *Брусок массой 5 кг втягивают за привязанную к нему веревку на высоту 1 м по доске, угол наклона которой к горизонту составляет 45°. Веревка расположена параллельно доске. Коэффициент трения бруска о доску 0,3. Найдите энергию, которая идет на нагревание доски и бруска. $g = 10$ м/с^2.*

В данной задаче самый простой путь для расчета выделившейся в системе теплоты — найти величину работы силы трения

$$Q = F_{тр} s = F_{тр} \frac{h}{\sin\alpha}.$$

Силу трения скольжения найдем по формулы для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N,$$

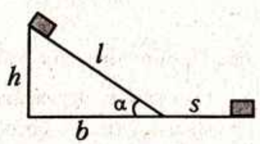
а силу нормальной реакции — из проекции 2-го закона Ньютона на ось, перпендикулярную к плоскости

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Окончательно получаем

$$Q = \mu mgh\,\text{ctg}\,\alpha = 15 \text{ Дж}.$$

Задача 36. *С горки высотой 2 м и длиной основания 5 м съезжают санки, которые останавливаются, пройдя горизонтально некоторый путь от основания горы. Чему равен этот путь, если коэффициент трения на всем пути 0,05?*



За время движения начальная механическая энергия целиком превращается в теплоту (конечная энергия равна нулю). Так как количество выделившейся в системе теплоты равно абсолютной величине работы силы трения, получаем

$$mgh = F_{тр1} \cdot l + F_{тр2} \cdot s,$$

где $F_{тр1} = \mu N_1$ — сила трения на наклонной плоскости и $F_{тр2} = \mu N_2$ — сила трения на горизонтальном участке. Из 2-го закона Ньютона находим $N_1 = mg\cos\alpha$ и $N_2 = mg$. Получаем

$$mgh = \mu mgl\cos\alpha + \mu mgs.$$

Сокращая на mg и учитывая, что $l\cos\alpha = b$ (основание наклонной плоскости), приходим к уравнению

$$h = \mu(b + s),$$

из которого находим s

$$s = \frac{h}{\mu} - b = 35 \text{ м}.$$

Задача 37. *Тело массой 3 кг, лежащее на горизонтальной плоскости, соединено с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 54 Н/м, коэффициент трения между телом и плоскостью 0,3. Какую минимальную скорость надо сообщить телу вдоль оси пружины, чтобы оно вернулось в начальную точку? $g = 10$ м/с^2.*

Запишем закон сохранения энергии $E_{нач} = E_{кон} + Q$ для двух этапов: движение тела вперед и назад

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \mu mgx, \quad \frac{kx^2}{2} = \mu mgx,$$

где x — расстояние, пройденное телом в каждом направлении. Мы учли, что конечная скорость на каждом этапе равна нулю, а количество выделившейся теплоты равно модулю работы силы трения. Выражая x из второго уравнения и подставляя в первое, находим $v_0 = \mu g\sqrt{8m/k} = 2$ м/с.

Задача 38. *Два одинаковых тела массами по 5 кг соединены недеформированной пружиной жесткостью 15 Н/м и лежат на горизонтальном полу. Какую минимальную скорость, направленную вдоль оси пружины, надо сообщить одному из тел, чтобы оно сдвинуло другое тело? Коэффициент трения для каждого тела 0,1. $g = 10$ м/с^2.*

Минимальная начальная скорость первого тела, при которой второе тело сдвинется с места, соответствует случаю, когда это произойдет перед самой остановкой. Значит, в момент остановки первого тела должна достигнуть максимального значения сила трения покоя, действующая на второе тело

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg.$$

Такой же величины будет действующая на него в этот момент сила упругости (второе тело покоится!)

$$kx = \mu mg,$$

откуда можно выразить удлинение пружины

$$x = \frac{\mu m g}{k}.$$

Чтобы понять, при какой начальной скорости первое тело остановится, пройдя расстояние x, запишем закон сохранения энергии

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{k x^2}{2} + (\mu m g)x,$$

где последний член — количество выделившейся теплоты, равное модулю работы силы трения. Подставляя сюда x и решив уравнение, получим

$$v_0 = \mu g \sqrt{\frac{3m}{k}} = 1 \text{ м/с}.$$

Задача 39. *На гладком полу лежит брусок массой 100 г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 250 Н/м. На брусок начинает действовать постоянная сила 4 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную скорость (в см/с) бруска.*

Изменение механической энергии равно работе внешней силы:

$$\left(\frac{m v^2}{2} + \frac{k x^2}{2}\right) - 0 = Fx$$

Далее можно поступить двояко. Можно выразить кинетическую энергию как функцию перемещения x и найти максимум этого выражения (для этого даже не обязательно знать производную, достаточно уметь находить вершину параболы). Пройдите этот путь самостоятельно, а мы поступим иначе (см. также реш. 17). В точке, где скорость бруска максимальна, его ускорение равно нулю. Записав в этой точке 2-й закон Ньютона

$$F - kx = 0,$$

выразим x и подставим в предыдущее уравнение. Получим $v = F/\sqrt{mk} = 80$ см/с.

Задача 40. *На полу лежит брусок массой 250 г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 100 Н/м, коэффициент трения 0,4. На брусок начинает действовать постоянная сила 3 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины. $g = 10$ м/с².*

Силу трения удобно рассматривать как вторую внешнюю силу. Тогда формула для изменения механической энергии приобретает вид

$$Fx - F_{тр}x = \frac{kx^2}{2} - 0$$

(конечная скорость равна нулю). Подставляя сюда $F_{тр} = \mu mg$, получим

$$x = \frac{2(F - \mu mg)}{k} = 4 \text{ см}.$$

Замечание. Можно не причислять силу трения к внешним силам, а учесть, что ее работа равна (по модулю) приращению внутренней тепловой энергии: $\Delta E_{внутр} = Q = F_{тр}x$. Тогда формула для изменения энергии примет вид:

$$Fx = \left(\frac{kx^2}{2} + Q\right) - 0.$$

Задача 41. *На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 1 кг и 4 кг, соединенные недеформированной пружиной. Какую наименьшую постоянную силу, направленную вдоль оси пружины, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициент трения брусков о плоскость 0,2. g = 10 м/с^2.*

Условие, что приложенная внешняя сила — минимальная, состоит в одновременном выполнении двух условий. Первое — растяжение пружины достигает значения, необходимого для смещения бруска m_2,

$$kx = \mu m_2 g$$

(сила трения покоя, равная силе упругости, достигает максимального значения). В тот же момент первое тело должно остановиться (второе условие), что можно учесть с помощью формулы для изменения механической энергии $A_{вн} + A_{тр} = \Delta E$

$$Fx - (\mu m_1 g)x = \frac{kx^2}{2} - 0 .$$

Выражая x из первого уравнения и подставляя во второе, находим

$$F = \mu(m_1 + \frac{m_2}{2})g = 6 \text{ Н}.$$

Замечание. Когда система не замкнута и надо учитывать работу внешних сил, то работу силы трения тоже удобно учитывать в явном виде, а не в виде количества теплоты в обобщенном законе сохранения энергии (как в реш. 32–38).

Задача 42. *На пружине жесткостью 100 Н/м к потолку подвешен груз. На груз начинает действовать постоянная сила 6 Н, направленная вертикально вниз. Найдите максимальное перемещение (в см) груза.*

Примем за уровень отсчета потенциальной энергии силы тяжести конечную точку (где скорость обращается в ноль). Тогда формула для изменения механической энергии приобретает вид

$$Fx = \frac{k(x+x_0)^2}{2} - \left(\frac{kx_0^2}{2} + mgx\right)$$

где $x_0 = mg/k$ — начальная деформация, x — максимальное перемещение груза. После упрощения получим

$$Fx = \frac{kx^2}{2},$$

откуда $x = 2F/k$ = 12 см. Последнее уравнение можно было написать сразу, если учесть, что для равнодействующей сил тяжести и упругости потенциальная энергия имеет вид $E_п = kx^2/2$, где x отсчитывается от положения равновесия (см. реш. 14).

Задача 43. *Шары массами 1 кг и 2 кг движутся навстречу друг другу со скоростями 1 м/с и 2 м/с соответственно. Найдите, сколько теплоты выделится при неупругом ударе этих шаров.*

Запишем закон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + Q.$$

Конечную скорость u найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u.$$

Подставив u и произведя упрощения, получим

$$Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(v_1 + v_2)^2}{2} = 3 \text{ Дж}.$$

Задача 44. *Пуля массой 20 г, летящая со скоростью 100 м/с, застревает в деревянном шаре, летящем ей навстречу со скоростью 10 м/с. Считая, что масса шара гораздо больше массы пули, найдите количество теплоты, выделившееся при ударе.*

Ошибка, которую часто делают при решении этой задачи — считают, что изменением скорости очень тяжелого шара можно пренебречь, а вычислить только уменьшение энергии пули, оно-то, дескать, и будет равно количеству выделившейся теплоты. Однако такое рассуждение, очевидно, неправильно — ведь скорость тяжелого шара может быть и больше скорости пули, в этом случае скорость пули возрастет, а теплота все равно выделяется. В то же время ясен источник заблуждения — мы привыкли пренебрегать изменением энергии очень тяжелого тела — например, Земли — при рассмотрении движущихся по ней предметов. В чем же дело?

Оказывается, изменением энергии очень тяжелого тела можно пренебрегать только в том случае, если его начальная скорость равна нулю. Действительно, пусть очень тяжелое тело массой M взаимодействует с телом массой m, и в результате взаимодействия скорость легкого тела изменилась на $\Delta\vec{v}$. Изменение скорости тяжелого тела находим из закона сохранения импульса

$$m\Delta\vec{v}+M\Delta\vec{V}=0\,.$$

При $M\to\infty$ величина ΔV стремится к нулю, но изменение энергии тяжелого тела может оставаться конечным

$$\frac{M\left(\vec{V}+\Delta\vec{V}\right)^2}{2}-\frac{M\vec{V}^2}{2}=M\vec{V}\Delta\vec{V}+\frac{M\Delta\vec{V}^2}{2}=-m\Delta\vec{v}\vec{V}+\frac{m}{M}\frac{m\Delta\vec{v}^2}{2}\,.$$

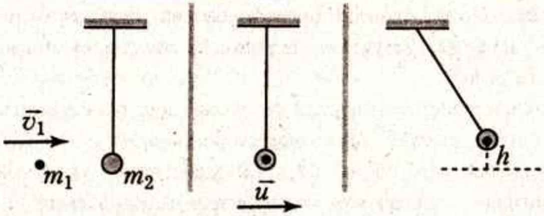
Второй член этого выражения действительно стремится к нулю в пределе бесконечно тяжелого тела. Но первый член остается конечным, и его необходимо учитывать! Однако этот член исчезает, если $\vec{V}=0$. Значит, если начальная скорость очень тяжелого тела равна нулю, то изменением его энергии можно пренебречь. Например, при упругом ударе о движущуюся плиту шарик отскакивает с другой скоростью (см. реш. 29), т. е. энергия плиты при ударе изменяется, но в СО, связанной с плитой, шарик отскакивает с той же скоростью. Приведем общий *рецепт*: чтобы вычислить какую-нибудь величину, значение которой не должно зависеть от выбора системы отсчета (количество теплоты, выделившуюся энергию), проще всего перейти в систему отсчета, где очень тяжелое тело покоится.

В данной задаче надо перейти в систему отсчета, связанную с шаром. В этой СО начальная скорость пули равна $(v + V) = 110$ м/с, а конечная скорость пули равна нулю. Количество теплоты равно уменьшению механической энергии

$$Q=\frac{m(v+V)^2}{2}=121 \text{ Дж}.$$

Задача 45. *В шар массой 700 г, висящий на легком стержне, попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально. Пуля застревает в шаре, после чего он поднимается на высоту 20 см от своего начального положения. Найдите скорость пули.* $g = 10$ *м/с*^{2}.

Часто пытаются решить эту задачу с помощью одного закона сохранения энергии, приравнивая кинетическую энергию пули к потенциальной энергии шара с пулей в крайнем положении. Однако при неупругом ударе в системе выделяется



теплота, т. е. часть механической энергии теряется. Чтобы решить задачу, надо рассмотреть шар с пулей сразу после удара. Это промежуточное состояние связано с начальным состоянием законом сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u,$$

а с конечным — законом сохранения энергии

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh$$

(m_1 — масса пули, m_2 — масса шара). Решая эту систему уравнений, получаем

$$v_1 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{2gh} = 142 \text{ м/с}.$$

Задача 46. *Диск массой 3 кг висит на упругом шнуре жесткостью 200 Н/м, прикрепленном к центру диска. Вдоль шнура с высоты 80 см на диск плашмя падает шайба (с отверстием в центре) массой 1 кг. На какое расстояние (в см) опустится диск после падения шайбы? Удар шайбы о диск абсолютно неупругий. g = 10 м/с^2.*

Скорость шайбы перед ударом о диск равна $v_1 = \sqrt{2gh}$. Скорость шайбы с диском после неупругого удара найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Для дальнейшего движения диска с шайбой запишем закон сохранения энергии

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + (m_1 + m_2)gx + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{k(x_0 + x)^2}{2},$$

где $x_0 = m_2 g/k$ — начальная деформация пружины под действием диска, x — перемещение диска с шайбой до остановки. Потенциальная энергия диска с шайбой отсчитывается от конечного положения. Упрощая и решая полученное квадратное уравнение, получаем

$$x = \frac{m_1 g}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{(m_1 + m_2)g}}\right) = 20\ \text{см}.$$

Замечание. Если применить прием объединения сил тяжести и упругости (см. реш. 14), то решение немного упрощается. Однако надо учесть, что уровень отсчета потенциальной энергии определяется положением равновесия не диска, а диска с шайбой. Поэтому в начале движения имеется деформация

$$y_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_1 g}{k}.$$

Закон сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + \frac{ky_0^2}{2} = \frac{ky^2}{2},$$

где y — конечное расстояние до нового положения равновесия. Вычислив y, найдем затем искомое перемещение: $x = y + y_0$.

Задача 47. *В брусок массой 10 г, лежащий на гладком столе, попадает пуля массой 2 г, летящая со скоростью 60 м/с. На сколько миллиметров углубится пуля в брусок, если сила сопротивления движению пули в бруске равна 250 Н?*

Запишем закон сохранения энергии с учетом выделившейся теплоты

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + F_c s$$

(мы учли, что количество теплоты равно абсолютному значению работы силы сопротивления). Конечную скорость бруска с пулей найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u.$$

Решив систему уравнений, найдем, на сколько углубилась пуля в брусок

$$s = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{v_1^2}{2F_c} = 12\ \text{мм}.$$

Замечание. Может показаться, что мы неверно вычислили работу силы сопротивления. Действительно, за s мы обозначили углубление пули, т. е. перемещение пули относительно бруска. Но поскольку за время взаимодействия сам брусок переместился на какое-то расстояние s_2, то пройденный пулей путь будет равен $s_1 = s + s_2$. Однако ошибки никакой нет. Для вычисления выделившейся теплоты надо вычислить модуль работы силы трения не только над пулей, но полной работы силы трения в системе, т. е. над пулей и над бруском. Она равна

$$A = -F_c s_1 + F_c s_2 = -F_c s.$$

Общее *правило*: в формулу для теплоты при трении двух тел должно входить относительное перемещение одного тела по другому.

Задача 48. *На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска длиной 1 м, на одном конце которой закреплен вертикальный упор. Какую минимальную скорость надо сообщить маленькому бруску, лежащему на другом конце доски, чтобы после абсолютно упругого удара об упор брусок вернулся назад и упал с доски? Масса доски в 8 раз больше, чем масса бруска, коэффициент трения между ними 0,2. $g = 10$ м/с^2.*

В этой задаче преимущества энергетического подхода очень наглядны. Ведь если решать эту задачу в лоб, надо разобрать два этапа одновременного равноускоренного движения двух тел и еще упругий удар в придачу! Мы же найдем конечную скорость доски с бруском u из закона сохранения импульса

$$mv_0 = (m + M)u,$$

(мы считаем, что в последний момент движение бруска относительно доски почти прекратилось), и запишем закон сохранения энергии с учетом выделения теплоты при трении (при упругом ударе энергия сохраняется)

$$\frac{mv_0^2}{2} = (\mu mg)2l + \frac{(M + m)u^2}{2}.$$

Получаем (с учетом $M = 8m$)

$$v_0 = \sqrt{4\mu gl\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = 3 \text{ м/с}.$$

Задача 49. *Из орудия массой 990 кг вылетает горизонтально снаряд массой 10 кг. Какая часть (в процентах) энергии, выделяющейся при взрыве пороховых газов, расходуется на откат орудия?*

В задаче предполагается, что вся выделившаяся при взрыве энергия превратится в механическую энергию снаряда и орудия

$$E_{\text{выд}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где индекс 1 обозначает снаряд, 2 — орудие. Закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

позволяет выразить скорость снаряда через скорость орудия. Нам надо определить, какую часть от $E_{\text{выд}}$ составляет кинетическая энергия орудия

$$\frac{E_{\text{оруд}}}{E_{\text{выд}}} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 0{,}01,$$

т. е. 1%. (Скорость сократилась после подстановки $v_1 = v_2 m_2 / m_1$.)

Задача 50. *Человек массой 60 кг стоит на льду рядом с санями массой 40 кг. Человек толкает сани, сообщая им скорость 3 м/с, а сам откатывается в противоположную сторону. Какую работу совершает при этом человек?*

Совершенная человеком работа равна приращению кинетической энергии системы (человек + сани)

$$A = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Скорость человека после толчка найдем из закона сохранения импульса

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0.$$

Получим

$$A = \frac{m_2 v_2^2}{2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = 300 \text{ Дж}.$$

Задача 51. *Движущийся снаряд разорвался на два осколка, угол между скоростями которых составил 60°. Один осколок имеет массу 20 кг и скорость 100 м/с, другой — массу 80 кг и скорость 25 м/с. Чему равна энергия (в кДж), выделенная при разрыве снаряда?*

Выделившаяся энергия равна разности между конечной и начальной энергиями

$$E_{\text{выд}} = \left(\frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}.$$

Нам не хватает величины начальной скорости снаряда. Изобразим на рисунке векторный треугольник, соответствующий закону сохранения импульса

$$(m_1 + m_2)\bar{v} = m_1 \bar{u}_1 + m_2 \bar{u}_2,$$

и запишем для него теорему косинусов

$$(m_1 + m_2)^2 v^2 = m_1^2 u_1^2 + m_2^2 u_2^2 - 2(m_1 u_1)(m_2 u_2)\cos(\pi - \alpha),$$

где α — угол между скоростями разлета осколков. Выражая отсюда v^2 и подставляя в формулу для выделившейся энергии, получаем

$$E_{\text{выд}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2u_1 u_2 \cos\alpha}{2} = 65 \text{ кДж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Работа (1–3)

4.1. Башенный кран равномерно поднимает в горизонтальном положении стальную балку длиной 5 м и сечением 0,01 м^2 на высоту 15 м. Найдите работу, совершаемую краном. Плотность материала балки 7800 кг/м^3. g = 10 м/с^2.

4.2. Какую работу совершает человек при подъеме тела массой 2 кг на высоту 1 м с ускорением 3 м/с^2? g = 10 м/с^2.

4.3. Груз начинают поднимать вертикально вверх с постоянным ускорением. Во сколько раз работа, совершенная за первую секунду движения, меньше работы, совершаемой за следующую, вторую секунду?

4.4. Груз массой 1 кг начинают поднимать за веревку вертикально вверх с постоянным ускорением. За 2 с силой натяжения веревки была совершена работа 48 Дж. Найдите ускорение груза. g = 10 м/с^2.

4.5. Какую работу совершит сила 20 Н, подняв по наклонной плоскости груз массой 2 кг на высоту 2,5 м с ускорением 5 м/с^2? Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением пренебречь. g = 10 м/с^2.

4.6. Тело массой 20 кг поднимают по наклонной плоскости на высоту 6 м, причем вдоль плоскости оно прошло 10 м. Найдите работу силы трения, если сила тяги параллельна плоскости, а коэффициент трения 0,2. g = 10 м/с^2. В ответе укажите модуль полученной величины.

4.7. Тело массой 0,5 кг соскальзывает с вершины наклонной плоскости высотой 7 м до ее основания. Угол наклона плоскости к горизонту 45°, коэффициент трения 0,2. Найдите работу силы трения. g = 10 м/с^2. В ответе укажите абсолютное значение работы.

4.8. Плот передвигают багром, прилагая к нему силу 200 Н. Совершенная при этом работа равна 1000 Дж. На какое расстояние переместился плот, если угол между направлением силы и направлением перемещения составляет 60°?

4.9. Тело массой 10 кг съезжает по наклонной плоскости с высоты 6 м. Найдите работу силы тяжести. g = 9,8 м/с^2.

4.10. Тело массой 2 кг равномерно движется по горизонтальной плоскости под действием веревки, направленной под углом 45° к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,2. Какую работу совершит сила натяжения веревки на пути 2,4 м? g = 10 м/с^2.

4.11. Квадратная пластина скользит по гладкой горизонтальной поверхности параллельно одной из своих сторон и наезжает на границу, отделяющую гладкую поверхность от шероховатой, имеющей коэффициент трения о пластину 0,2. Линия границы расположена перпендикулярно скорости пластины. Найдите работу силы трения к тому моменту, как пластина полностью пересечет границу. Сторона пластины 1 м, ее масса 10 кг. g = 10 м/с^2. В ответе укажите абсолютное значение работы.

Постоянная мощность. КПД (4–6)

4.12. Самолет Ил-62 имеет четыре двигателя, сила тяги каждого 100 кН. Какова общая полезная мощность (в кВт) двигателей при скорости самолета 240 м/с?

4.13. Автомобиль массой 2000 кг движется по горизонтальной дороге со скоростью 72 км/ч. Сила сопротивления движению составляет 1/20 от веса автомобиля. Определите полезную мощность (в кВт) автомобиля. $g = 10$ м/с^2.

4.14. Какую полезную мощность (в кВт) развивает гусеничный трактор, поднимаясь со скоростью 9 км/ч по дороге, уклон которой составляет 1 м на каждые 10 м пути? Масса трактора 6 т. $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением движению пренебречь.

4.15. При движении со скоростью 36 км/ч электровоз потребляет мощность 60 кВт. Определите силу тяги электровоза, если его КПД равен 80%.

4.16. Водяной насос равномерно подает 300 кг воды в минуту на высоту 80 м. Определите мощность (в кВт) мотора, которым приводится в действие насос, если его КПД равен 80%. $g = 10$ м/с^2. Кинетическую энергию воды не учитывать.

4.17. Подъемный кран приводится в действие двигателем мощностью 10 кВт. Сколько секунд потребуется для равномерного подъема груза массой 2 т на высоту 50 м, если КПД двигателя 80%? $g = 10$ м/с^2.

4.18. Уклон участка шоссе равен 1 м на каждые 20 м пути. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью 60 км/ч. Какую полезную мощность (в кВт) должен развивать двигатель этого автомобиля, чтобы он поднимался по тому же уклону с той же скоростью? Масса автомобиля 1500 кг. $g = 10$ м/с^2.

4.19. Буксир тянет баржу со скоростью 9 км/ч, при этом натяжение буксирного каната составляет 120 кН, а мощность двигателя 400 кВт. Какой будет скорость (в км/ч) буксира, если он будет плыть без баржи при той же мощности двигателя? Сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости движения.

Переменная мощность. Средняя мощность (7)

4.20. Определите мощность (в кВт) трамвая к концу 5-ой секунды после начала движения, если он развил к этому моменту скорость 18 км/ч. Масса трамвая 10 т. Сопротивлением движению пренебречь.

4.21. Найдите среднюю мощность, которую развивает сила тяжести за первую секунду свободного падения тела массой 6 кг без начальной скорости. $g = 10$ м/с^2.

4.22. Подъемный кран поднимает груз массой 1 т с ускорением 1 м/с^2 за время 10 с на некоторую высоту. Найдите среднюю мощность (в кВт), развиваемую силой натяжения канатов. $g = 10$ м/с^2.

4.23. Два автомобиля одинаковой массы одновременно трогаются с места и движутся равноускоренно. Во сколько раз средняя мощность одного автомобиля больше, чем другого, если за одно и то же время первый автомобиль достигает вдвое большей скорости, чем другой? Силой сопротивления движению автомобилей пренебречь.

Кинетическая энергия.

Работа и изменение кинетической энергии (8–10)

4.24. С некоторой высоты со скоростью 20 м/с горизонтально брошен камень. Через 4 с после броска кинетическая энергия камня стала равной 3000 Дж. Какова масса камня? $g = 10$ м/с^2.

4.25. Тело массой 3 кг брошено с поверхности земли со скоростью 8 м/с под углом 60° к горизонту. Найдите кинетическую энергию тела в наивысшей точке подъема.

4.26. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы его кинетическая энергия в точке максимального подъема составляла 25% от его кинетической энергии в точке бросания? Ответ дайте в градусах.

4.27. Автомобиль едет от стоянки равноускоренно. Во сколько раз изменение кинетической энергии автомобиля за первые 10 с движения меньше, чем за последующие 10 с?

4.28. Баскетбольный мяч массой 0,8 кг летит со скоростью 10 м/с. Игрок ловит мяч и за время 0,1 с останавливает его. Какую среднюю мощность развивает игрок? (Укажите абсолютное значение мощности.)

4.29. Скорость свободно падающего тела массой 4 кг на некотором пути увеличилась с 2 м/с до 8 м/с. Найдите работу силы тяжести на этом пути.

4.30. Камень массой 200 г брошен с горизонтальной поверхности под углом к горизонту и упал на нее на расстоянии 40 м через 4 с. Чему равна работа, затраченная на этот бросок? $g = 10$ м/с^2.

4.31. Пуля массой 5 г, летевшая горизонтально со скоростью 800 м/с, пробивает доску и вылетает из нее со скоростью 400 м/с. Найдите абсолютную величину работы, совершенной над пулей силой сопротивления доски.

4.32. Летящая с некоторой скоростью пуля попадает в мешок с песком и углубляется в него на 15 см. На какую глубину (в см) войдет в песок пуля той же массы, если скорость ее движения будет вдвое больше? Считать, что сила сопротивления движению пули в песке не зависит от ее скорости.

4.33. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. В какой по счету доске застрянет пуля, если ее скорость после прохождения первой доски равна $v_1 = 0{,}9v_0$? Считать, что сила сопротивления дерева движению пули не зависит от ее скорости. Силой тяжести пренебречь.

4.34. Во сколько раз увеличится полезная мощность вентилятора при увеличении скорости его вращения в два раза?

4.35. Под каким углом (в градусах) к горизонту надо направить воду из брандспойта, чтобы она падала на расстоянии 5 м от него? Площадь отверстия 10 см^2, мощность мотора 1 кВт, его КПД 50%. Высоту отверстия над землей считать равной нулю. $g = 10$ м/с^2.

4.36. Над поверхностью земли неподвижно висит ракета массой 1 т, выбрасывая вниз реактивную струю. Какую мощность (в кВт) развивает при этом двигатель ракеты, если расход топлива 20 кг/с? $g = 10$ м/с^2.

4.37. Какую мощность (в кВт) развивают двигатели ракеты массой 2 т, если она поднимается с поверхности земли с ускорением 4 м/с^2? Скорость выброса газов в реактивной струе 1200 м/с. g = 10 м/с^2.

4.38. Во сколько раз работа по выводу спутника на круговую орбиту у поверхности Луны меньше, чем работа по выводу такого же спутника на круговую орбиту у поверхности Земли? Считать массу Луны в 80 раз меньше массы Земли, а радиус Луны в 4 раза меньше радиуса Земли.

4.39. Двигаясь по гладкой горизонтальной поверхности, маленькая шайба попадает на участок шероховатой поверхности длиной 75 см. Коэффициент трения шайбы о поверхность на этом участке линейно возрастает от 0,4 на ближней границе до 0,8 на дальней. При какой минимальной скорости шайбы она преодолеет этот участок? g = 10 м/с^2.

4.40. Однородный стержень длиной 2 м, двигаясь вдоль своей длины по шероховатой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится гладкой. Скорость стержня в этот момент равна 1,6 м/с. Какое расстояние (в см) проедет стержень с этого момента до остановки? Коэффициент трения между стержнем и шероховатой поверхностью 0,2. g = 10 м/с^2.

4.41. Однородный стержень длиной 2 м, двигаясь вдоль своей длины по гладкой горизонтальной поверхности, начинает пересекать границу, за которой поверхность становится шероховатой с коэффициентом трения 0,2. Какое расстояние (в см) проедет стержень с этого момента до остановки, если его начальная скорость была 3 м/с? g = 10 м/с^2.

Потенциальная энергия. Работа и изменение потенциальной энергии (11–14)

4.42. С башни высотой 30 м горизонтально брошен камень. Найдите потенциальную энергию камня через 2 с после начала движения. Масса камня 0,2 кг. На поверхности земли потенциальная энергия равна нулю. g = 10 м/с^2.

4.43. Тело массой 2 кг брошено с поверхности земли со скоростью 6 м/с под углом 30° к горизонту. На сколько увеличится потенциальная энергия тела при достижении им наивысшей точки подъема?

4.44. Три однородные прямоугольные плиты массой 80 кг и толщиной 0,2 м каждая лежат горизонтально на поверхности земли одна возле другой. Какую минимальную работу надо выполнить, чтобы сложить плиты одна на другую в виде стопы? g = 10 м/с^2.

4.45. Тонкий лом длиной 1,5 м и массой 10 кг лежит на горизонтальной поверхности. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поставить его на землю в вертикальное положение? g = 10 м/с^2.

4.46. На горизонтальной плоскости лежит тонкая цепь длиной 2 м и массой 5 кг. Чему равна минимальная работа по подъему цепи, взятой за один конец, на высоту, при которой нижний ее конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи? g = 10 м/с^2.

4.47. Какую минимальную работу (в кДж) надо совершить, чтобы выкачать на поверхность земли воду, наполовину заполняющую бассейн площадью 10 м^2 и глубиной 2 м? $g = 10$ м/с^2.

4.48. Глубокий бассейн площадью 15 м^2 заполнен водой до глубины 1 м и перегорожен пополам вертикальной перегородкой. Какую работу (в кДж) совершают, медленно переместив перегородку так, чтобы она делила бассейн в отношении 1:3? Вода через перегородку не проникает. $g = 10$ м/с^2.

4.49. Сжатая пружина с жесткостью 10 кН/м обладает запасом потенциальной энергии 50 Дж. На сколько сантиметров сжата пружина?

4.50. Найдите работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на 20 см, если под действием силы 30 Н пружина сжимается на 1 см.

4.51. Пружину растянули на 1 см, приложив к ней силу 200 Н. Какую надо совершить работу, чтобы растянуть ее еще на 2 см?

4.52. Пружину сжали на 2 см, совершив при этом работу 12 Дж. Какую надо совершить работу, чтобы сжать ее еще на 3 см?

4.53. К пружине подвешен груз массой 100 г. Груз какой массы (в г) надо дополнительно прикрепить к первому грузу, чтобы потенциальная энергия пружины увеличилась в 9 раз?

4.54. Две пружины, жесткости которых 1 кН/м и 2 кН/м, соединили параллельно и растянули за концы силой 300 Н. Какую при этом совершили работу?

4.55. Тело массой 100 г висит на пружине, растягивая ее на 2 см. Какую надо совершить работу (в мДж), чтобы растянуть пружину еще на 4 см? g = 10 м/с^2.

Закон сохранения механической энергии (15–18)

4.56. Камень брошен с поверхности земли вертикально вверх со скоростью 10 м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня уменьшится в 5 раз? $g = 10$ м/с^2.

4.57. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью 20 м/с. На какой высоте кинетическая энергия этого тела будет равна потенциальной? Потенциальную энергию на поверхности земли принять равной нулю. $g = 10$ м/с^2.

4.58. Тело массой 0,5 кг брошено с высоты 10 м над поверхностью земли со скоростью 10 м/с. Какой будет кинетическая энергия тела в момент приземления? $g = 10$ м/с^2.

4.59. Тело брошено вертикально вниз со скоростью 10 м/с с высоты 30 м. На какой высоте от поверхности земли кинетическая энергия тела увеличится вдвое? $g = 10$ м/с^2.

4.60. Под каким углом (в градусах) к горизонту брошено тело с поверхности земли, если в наивысшей точке траектории его кинетическая энергия равна потенциальной? Потенциальную энергию на поверхности земли принять равной нулю.

4.61. Маленькое тело скользит по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью 4 м/с и въезжает на подъем. На какую высоту (в см) над уровнем плоскости поднимется тело? $g = 10$ м/с^2.

4.62. На нити длиной 5 м подвешен шар. Какую горизонтальную скорость нужно сообщить шару, чтобы он отклонился до высоты, на которой расположена точка подвеса? $g = 10$ м/с^2.

4.63. Легкий стержень длиной 80 см с закрепленными на его концах грузами 1 кг и 3 кг может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. Найдите скорость грузов в тот момент, когда стержень проходит вертикальное положение. $g = 10$ м/с^2.

4.64. Легкий стержень длиной 150 см с закрепленными на его концах одинаковыми грузами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Ось проходит через точку стержня, которая делит его в отношении 1:2. Какую минимальную угловую скорость надо сообщить стержню в положении равновесия, чтобы он сделал полный оборот? $g = 10$ м/с^2.

4.65. Небольшой груз массой 100 г прикреплен к веревке длиной 72 см и массой 300 г, лежащей на гладком горизонтальном столе. Под тяжестью груза веревка начинает соскальзывать без начальной скорости в небольшое отверстие с гладкими краями, которое проделано в столе. Какова будет скорость веревки в тот момент, когда ее свободный конец соскользнет со стола? $g = 10$ м/с^2.

4.66. Вагон массой 2 т, двигаясь со скоростью 2 м/с, наезжает на вертикальную стенку, в результате чего сжимаются две буферные пружины жесткостью 100 кН/м каждая. Найдите максимальную деформацию (в см) пружин.

4.67. Для изготовления рогатки использовали резиновый шнур жесткостью 400 Н/м. Из рогатки выстрелили камнем массой 10 г, поместив его в середину шнура и потянув силой 40 Н. С какой скоростью вылетит камень?

4.68. К нижнему концу недеформированной пружины жесткостью 200 Н/м прикрепили груз массой 1 кг и без толчка отпустили. Определите максимальную деформацию (в см) пружины. $g = 10$ м/с^2.

4.69. С какой высоты (в см) падает груз массой 10 кг на невесомую вертикальную пружину жесткостью 1000 Н/м, если максимальная сила давления пружины на пол равна 400 Н? Длина пружины в ненагруженном состоянии 1 м. $g = 10$ м/с^2. Высота отсчитывается от поверхности пола.

4.70. Груз массой 1,6 кг подвешен к потолку на пружине жесткостью 250 Н/м. Грузу резким толчком сообщают начальную скорость 1 м/с, направленную вертикально вниз. На какое максимальное расстояние (в см) опустится груз?

4.71. Груз массой 5 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 500 Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость равна 0,5 м/с, во втором — 2 м/с. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) во втором случае больше, чем в первом? $g = 10$ м/с^2.

4.72. Груз массой 5 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 500 Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость 2 м/с, один раз направленную вертикально вверх, второй раз — вертикально вниз. На сколько процентов расстояние, пройденное грузом до первой остановки, в первом случае больше, чем во втором? g = 10 м/с^2.

Закон сохранения энергии + динамика движения по окружности (19–24)

4.73. Легкий стержень прикреплен одним концом к потолку и может совершать колебания в вертикальной плоскости. На другом конце стержня укреплен небольшой груз массой 0,1 кг. Стержень отклонили в горизонтальное положение и отпустили. С какой силой будет действовать груз на стержень в низшей точке траектории? g = 10 м/с^2.

4.74. Легкий стержень с грузом массой 0,3 кг на одном конце может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через другой конец. Сначала груз удерживают в верхнем положении (стержень вертикален), а затем отпускают. Чему равно натяжение стержня в тот момент, когда груз проходит нижнее положение? g = 10 м/с^2.

4.75. Маятник, состоящий из небольшого тяжелого шарика, подвешенного на нерастяжимой нити длиной 2 м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Когда шарик проходит нижнее положение, нить испытывает натяжение, равное удвоенной силе тяжести шарика. На сколько сантиметров крайнее положение шарика выше нижнего?

4.76. Тяжелый шарик массой 5 кг подвешен на нити. Нить может выдержать максимальное натяжение 100 Н. На какой минимальный угол (в градусах) от положения равновесия нужно отклонить нить с шариком, чтобы он оборвал нить, проходя через положение равновесия? g = 10 м/с^2.

4.77. На тонкой нити подвешен шарик массой $2\sqrt{3}$ кг. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. Чему равна сила натяжения нити в тот момент, когда вектор ускорения шарика направлен горизонтально? g = 10 м/с^2.

4.78. Тяжелый шарик, подвешенный на нити длиной 50 см, совершает колебания в вертикальной плоскости. Крайнее положение шарика на 20 см выше нижнего. Во сколько раз максимальная сила натяжения нити в процессе движения больше, чем минимальная?

4.79. Груз массой 1,3 кг, привязанный к нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен, свободно вращается в вертикальной плоскости. Найдите, на сколько максимальная сила натяжения нити больше минимальной. g = 10 м/с^2.

4.80. На конце легкой нити длиной 1 м укреплен шарик. Шарик свободно вращается в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через другой конец нити. В верхней точке траектории шарик имеет скорость 5 м/с. Во сколько раз сила натяжения нити в нижней точке больше, чем в верхней? g = 10 м/с^2.

4.81. Камень массой 0,5 кг, привязанный к веревке длиной 0,5 м, свободно вращается в вертикальной плоскости. Сила натяжения веревки в нижней точке окружности 45 Н. На какую высоту, отсчитываемую от нижней точки окружности, поднимется камень, если веревка оборвется в тот момент, когда скорость камня направлена вертикально вверх? g = 10 м/с^2.

4.82. Легкий стержень, на концах которого закреплены два груза массой 0,5 кг каждый, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Ось делит стержень в отношении 1:3. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он действует на ось в вертикальном положении? $g = 10$ м/с^2.

4.83. Невесомый стержень, на конце которого закреплен груз массой 3 кг, а в середине — груз массой 4 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его свободный конец. Стержень приводят в верхнее положение и отпускают. С какой силой будет он действовать на ось в момент прохождения нижнего положения? $g = 10$ м/с^2.

4.84. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю», с высоты 6 м. Радиус петли 3 м. На какой высоте тело оторвется от поверхности петли? Высота отсчитывается от нижней точки петли. Трением пренебречь.

4.85. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю» радиусом 2 м. С какой минимальной высоты должно соскальзывать тело для благополучного прохождения всей петли? Высота отсчитывается от нижней точки петли. Трением пренебречь.

4.86. Нить длиной 0,63 м с привязанным к ней шариком отклонили на 90° от вертикали и отпустили. На каком наименьшем расстоянии (в см) под точкой подвеса по вертикали нужно установить гвоздь, чтобы нить, налетев на него, порвалась? В состоянии покоя нить выдерживает восьмикратный вес шарика.

Сохранение энергии и импульса. Упругий удар (25–31)

4.87. Один шар налетает на другой, большей массы, первоначально покоившийся. После центрального упругого удара шары разлетаются так, что величина скорости меньшего шара в 2,5 раза больше величины скорости большего шара. Найдите отношение масс шаров.

4.88. Два одинаковых по размеру шара висят на тонких нитях, касаясь друг друга. Первый шар отводят в сторону и отпускают. После упругого удара шары поднимаются на одинаковую высоту. Найдите массу (в г) первого шара, если масса второго 0,6 кг.

4.89. Два шара одного размера висят на одинаковых нитях длиной 0,5 м, касаясь друг друга. Массы шаров относятся как 2:3. Более легкий шар отклонили от положения равновесия на 90° и отпустили. На сколько сантиметров поднимется второй шар после абсолютно упругого удара?

4.90. На гладком горизонтальном столе лежат один за другим три шара одинакового радиуса, не касаясь друг друга: первый массой $2m$, второй массой m и третий массой $m/2$. Первому шару сообщают скорость 9 м/с, направленную по прямой, проходящей через центры всех трех шаров. Первый шар налетает на второй, а второй налетает на третий. Найдите скорость третьего шара после удара со вторым шаром. Все удары — абсолютно упругие.

4.91. Альфа-частица после абсолютно упругого столкновения с неподвижным ядром гелия движется в направлении, образующем 30° с первоначальным направлением. Определите отношение кинетических энергий частиц после столкновения.

4.92. Шар массой 3 кг, движущийся со скоростью v, налетает на покоящийся шар и после абсолютно упругого столкновения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению своего движения со скоростью $v/2$. Определите массу второго шара. Поверхности шаров гладкие.

4.93. Шар массой 100 г налетает со скоростью 120 см/с на покоящийся шар массой 300 г. Найдите скорость (в см/с) первоначально покоившегося шара после абсолютно упругого нецентрального удара, если направление скорости налетающего шара составляет угол 60° с линией центров шаров в момент удара. Поверхности шаров гладкие.

4.94. Шар массой 300 г налетает со скоростью 11 м/с на покоящийся шар массой 800 г. Найдите скорость налетающего шара после абсолютно упругого удара, если направление начальной скорости составляет угол 30° с линией центров шаров в момент удара. Поверхности шаров гладкие.

4.95. Два шара массой 2 кг каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, проходящей через точку касания неподвижных шаров и перпендикулярно линии, соединяющей их центры. Чему равна масса третьего шара, если после абсолютно упругого удара с неподвижными шарами он остановился? Все шары гладкие и имеют одинаковые радиусы.

4.96. Пластмассовый шарик для игры в настольный теннис роняют с высоты 80 см. В нижней точке его траектории по нему ударяют ракеткой снизу вверх, после чего шарик подпрыгивает на высоту, в 4 раза большую первоначальной. Определите скорость ракетки в момент удара. Удар считать абсолютно упругим, сопротивлением воздуха пренебречь. Масса ракетки много больше массы шарика. $g = 10$ м/с^2.

4.97. Летящий горизонтально шарик упруго ударяется о поверхность гладкого клина и отскакивает вертикально вверх. На какую высоту от точки удара поднимется шарик, если скорость клина после удара 2 м/с, а масса клина в 10 раз больше массы шарика? $g = 10$ м/с^2.

4.98. В зажатой между двумя телами невесомой пружине запасена энергия 100 Дж. Масса одного тела 0,9 кг, другого 0,1 кг. Определите кинетическую энергию тела с большей массой после освобождения пружины.

4.99. На гладкий клин массой 2 кг, стоящий на гладком горизонтальном столе, ставят тело массой 1 кг и отпускают. Чему будет равна скорость клина после того, как тело съедет с него на плоскость, если начальная высота тела равнялась 120 см? $g = 10$ м/с^2. Считать, что нижняя часть клина имеет плавное соединение с горизонталью.

4.100. На сколько миллиметров сожмется каждая буферная пружина при столкновении двух вагонов массами 20 т и 60 т, движущихся навстречу друг другу со скоростями 0,3 м/с и 0,2 м/с соответственно? При столкновении в каждом вагоне работают по две пружины жесткостью 60 кН/м. Тепловыми потерями пренебречь.

4.101. Два бруска массами 0,9 кг и 1,6 кг, лежащие на гладком полу, соединены невесомой пружиной. Бруски удерживают так, что пружина сжата на 10 см. Сначала отпускают первый брусок, а в тот момент, когда пружина не деформирована, отпускают и второй. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины в процессе дальнейшего движения.

4.102. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 300 г и 600 г, соединенные недеформированной пружиной жесткостью 500 Н/м. В первый брусок попадает шарик массой 100 г, летевший горизонтально вдоль оси пружины со скоростью 12 м/с. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины в процессе дальнейшего движения. Удар шарика о брусок абсолютно упругий.

4.103. Два бруска массами 0,5 кг и 1 кг, лежащие на гладком полу, соединены пружиной жесткостью 900 Н/м. Вначале первый брусок упирается в стену, пружина не деформирована и направлена перпендикулярно стене. Второй брусок перемещают на 10 см в сторону первого и отпускают. Найдите максимальную скорость первого бруска в процессе дальнейшего движения.

4.104. На гладкой горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 300 г и 60 г, соединенные недеформированной пружиной. В первый брусок попадает шарик массой 100 г, летевший горизонтально вдоль оси пружины со скоростью 9 м/с. Найдите минимальную скорость первого бруска при дальнейшем движении. Удар шарика о брусок абсолютно упругий.

Переход механической энергии во внутреннюю. Работа сил трения (32–38)

4.105. С какой высоты (в см) падал без начальной скорости мяч массой 500 г, если после отскока от пола он поднялся на высоту 50 см, а при ударе выделилось 2 Дж энергии? Сопротивлением воздуха пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

4.106. Мяч массой 0,1 кг отпустили без начальной скорости с высоты 2 м над полом. Чему равно количество теплоты (в мДж), выделившееся при первом ударе мяча о пол, если время между первым и вторым ударами мяча о пол 1,2 с? $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4.107. Мяч массой 400 г, брошенный вертикально вверх со скоростью 20 м/с, упал на землю со скоростью 15 м/с. Определите работу по преодолению силы сопротивления воздуха.

4.108. С какой высоты падает без начальной скорости камень, если его скорость при падении на землю 18 м/с, а работа по преодолению силы сопротивления воздуха равна 38 Дж? Масса камня 1 кг. $g = 10$ м/с^2.

4.109. С высоты 1,8 м вертикально вниз с начальной скоростью 8 м/с бросают мяч. После двух ударов о землю мяч поднялся до первоначальной высоты. Сколько процентов энергии теряется при каждом ударе? Сопротивлением воздуха пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

4.110. Автомобиль двигался с постоянной скоростью 72 км/ч. У подножия горы мотор был выключен, и автомобиль поднялся по горе на высоту 5 м и остановился. Какая часть первоначальной кинетической энергии автомобиля была расходована на работу против сил трения? Ответ дайте в процентах. $g = 10$ м/с^2.

4.111. Тело массой 4,2 кг скользит по горизонтальной плоскости под действием горизонтально направленной силы. Коэффициент трения тела о плоскость 0,1. Определите энергию, выделяемую в виде тепла на пути 25 м. g = 10 м/с^2.

4.112. Тело массой 4,2 кг под действием горизонтальной силы начинает скользить по горизонтальной поверхности с постоянным ускорением 2 м/с^2. Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,1. Определите среднюю мощность выделения тепла за время 5 с. g = 10 м/с^2.

4.113. Спустившись с горы, санки проходят по горизонтальной поверхности путь 1 м и останавливаются. Определите скорость санок у основания горы, если коэффициент трения между санками и дорогой 0,2. g = 10 м/с^2.

4.114. Какой кинетической энергией обладает тело массой 0,5 кг у основания наклонной плоскости, если оно поднимается вверх по плоскости за счет этой энергии на высоту 1 м? Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,2. Угол наклона плоскости к горизонту 45°. g = 10 м/с^2.

4.115. С наклонной плоскости, образующей угол 45° с горизонтом, с высоты 1 м соскальзывает небольшая шайба. В конце спуска у основания наклонной плоскости шайба абсолютно упруго ударяется о стенку и поднимается вверх по наклонной плоскости. На какую высоту (в см) поднимется шайба после удара, если коэффициент трения шайбы о плоскость 0,25?

4.116. На наклонной плоскости, синус угла наклона которой к горизонту равен 0,28, на высоте 2,1 м лежит небольшая шайба. Коэффициент трения шайбы о плоскость 0,5. Какую скорость надо сообщить шайбе вниз вдоль наклонной плоскости, чтобы после абсолютно упругого удара об упор, находящийся у основания плоскости, шайба вернулась в исходную точку? g = 10 м/с^2.

4.117. Санки соскальзывают с высоты 15 м по горе с углом наклона 45° к горизонту. Пройдя расстояние 24 м по горизонтали, санки поднимаются на другую гору с таким же углом наклона. Определите, на какую высоту поднимутся санки по второй горе, если коэффициент трения на всем пути 0,2.

4.118. Тело массой 5 кг, лежащее на горизонтальной плоскости, соединено с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 100 Н/м, коэффициент трения между телом и плоскостью 0,4. Телу сообщают скорость 1 м/с, направленную вдоль оси пружины. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины. g = 10 м/с^2.

4.119. Брусок массой 0,5 кг лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол ($\sin\alpha = 0{,}6$). Брусок соединен с вершиной наклонной плоскости недеформированной пружиной жесткостью 64 Н/м. Какую скорость (в см/с) надо сообщить бруску вверх вдоль плоскости, чтобы он вернулся и остановился в начальной точке? Коэффициент трения бруска о плоскость 0,8. g = 10 м/с^2.

4.120. Два бруска массами 3 кг и 2 кг, лежащие на полу, соединены пружиной жесткостью 200 Н/м. Бруски удерживают так, что пружина находится в сжатом состоянии. Сначала отпускают первый брусок, а в тот момент, когда пружина не деформирована, отпускают и второй. При какой минимальной начальной деформации (в см) второй брусок сдвинется с места? Коэффициент трения первого бруска о пол 0,2, а второго — 0,3.

Изменение механической энергии внешними силами (39–42)

4.121. На гладком полу лежит брусок, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 50 Н/м. На брусок начинает действовать постоянная сила 4 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную деформацию (в см) пружины.

4.122. На полу лежит брусок массой 250 г, соединенный с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, ее жесткость 100 Н/м, коэффициент трения 0,4. На брусок начинает действовать постоянная сила 3 Н, направленная вдоль оси пружины. Найдите максимальную скорость (в см/с) бруска. $g = 10$ м/с^2.

4.123. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 3 кг и 8 кг, соединенные недеформированной пружиной. Какую наименьшую постоянную силу, направленную вдоль оси пружины, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициенты трения брусков о плоскость 0,2 и 0,15 соответственно. $g = 10$ м/с^2.

4.124. На пружине жесткостью 50 Н/м к потолку подвешен груз массой 0,5 кг. На груз начинает действовать постоянная сила 10 Н, направленная вертикально вниз. Найдите максимальную скорость груза.

4.125. На гладкой наклонной плоскости лежит брусок, соединенный с вершиной плоскости пружиной жесткостью 100 Н/м. На брусок начинает действовать постоянная сила 12 Н, направленная вниз вдоль плоскости. Найдите максимальное смещение (в см) бруска.

4.126. Брусок массой 1 кг лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол ($\sin\alpha = 0,6$).Брусок соединен с вершиной наклонной плоскости недеформированной пружиной жесткостью 64 Н/м. Коэффициент трения бруска о плоскость 0,8. На брусок начинает действовать постоянная сила 14 Н, направленная вверх вдоль плоскости. Какое расстояние (в см) пройдет брусок до остановки? $g = 10$ м/с^2.

4.127. Брусок массой 1 кг лежит на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол ($\sin\alpha = 0,6$). Брусок соединен с вершиной наклонной плоскости недеформированной пружиной жесткостью 16 Н/м. Коэффициент трения бруска о плоскость 0,8. На брусок начинает действовать постоянная сила 2 Н, направленная вниз вдоль плоскости. Найдите максимальную скорость (в см/с) бруска. $g = 10$ м/с^2.

4.128. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью 250 Н/м. На груз начинает действовать постоянная сила 5 Н, направленная вертикально вверх. На какую максимальную высоту (в см, отсчитывая от начальной точки) поднимется груз?

4.129. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой, направленной вертикально вверх и равной в первом случае 15 Н, а во втором случае — 5 Н. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) в первом случае больше, чем во втором? $g = 10$ м/с^2.

4.130. Груз массой 2 кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре. На груз дважды подействовали постоянной силой 15 Н, направленной в первом случае вертикально вверх, а во втором случае — вертикально вниз. На сколько процентов расстояние, пройденное грузом до остановки, во втором случае меньше, чем в первом? $g = 10$ м/с^2.

4.131. Ящик массой 50 кг за веревку, направленную вдоль наклонного помоста, медленно втащили вверх. На это была затрачена работа 10,5 кДж. В верхней точке помоста веревка обрывается и ящик скользит вниз. В нижней точке помоста его скорость составляет 10 м/с. Найдите высоту помоста. $g = 10$ м/с^2.

4.132. Цилиндрический колодец площадью сечения 0,4 м^2 и глубиной 3 м заполнен водой на две трети. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность земли через трубу площадью поперечного сечения 0,8 см^2. Какую работу (в кДж) совершит насос, если выкачает всю воду из колодца за 1000 с? Потери энергии на трение не учитывать. $g = 10$ м/с^2.

Изменение механической энергии и закон сохранения импульса (43–51)

4.133. Шар массой 4 кг, имевший скорость 5 м/с, сталкивается с покоящимся шаром такой же массы. После абсолютно неупругого столкновения шары двигаются с одинаковыми скоростями. Сколько теплоты выделилось при столкновении?

4.134. Движущееся тело сталкивается с неподвижным телом, после чего они движутся вместе со скоростью, которая в 4 раза меньше скорости первоначально движущегося тела. Какая часть (в процентах) кинетической энергии движущегося тела перешла в тепло?

4.135. Горизонтально летящая пуля попадает в неподвижный шар из пенопласта с массой в 5 раз большей, чем у пули, и пробивает его по диаметру. После вылета из шара скорость пули стала в 2 раза меньше первоначальной. Сколько процентов первоначальной энергии пули перешло при этом в тепло?

4.136. Тележка массой 50 кг движется со скоростью 2 м/с по гладкой горизонтальной поверхности. На тележку с высоты 20 см падает груз массой 50 кг и остается на ней. Найдите количество выделившейся теплоты. $g = 10$ м/с^2.

4.137. Высунувшись из окна поезда, идущего со скоростью 72 км/ч, человек бросает вперед по ходу поезда камень массой 100 г. Какую работу совершил над камнем человек, если начальная скорость камня направлена горизонтально и равна 30 м/с относительно земли?

4.138. Брусок массой 90 г лежит на гладком полу и соединен с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, жесткость пружины 4 кН/м. В бруске застревает пуля массой 10 г, скорость которой равна 100 м/с и параллельна оси пружины. Чему равна максимальная деформация (в см) пружины?

4.139. Брусок массой 490 г лежит на горизонтальном плоскости и соединен с вертикальной стеной недеформированной пружиной. Ось пружины горизонтальна, жесткость пружины 180 Н/м. В бруске застревает пуля массой 10 г, скорость которой параллельна оси пружины, в результате чего пружина сжимается на 10 см. Чему равна начальная скорость пули? Коэффициент трения между бруском и полом 0,2. $g = 10$ м/с^2.

4.140. В шар массой 440 г, висящий на легком стержне длиной 40 см, попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой 10 г. При какой минимальной скорости пули шар после этого совершит полный оборот в вертикальной плоскости? $g = 10$ м/с^2.

4.141. В шар массой 250 г, висящий на нити длиной 50 см, попадает и застревает в нем горизонтально летящая пуля массой 10 г. При какой минимальной скорости пули шар после этого совершит полный оборот в вертикальной плоскости? $g = 10$ м/с^2.

4.142. Небольшое тело массой 0,99 кг лежит на вершине гладкой полусферы радиусом 1 м. В тело попадает пуля массой 0,01 кг, летящая горизонтально со скоростью 200 м/с, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела за время удара, определите высоту (в см), на которой оно оторвется от поверхности полусферы. $g = 10$ м/с^2.

4.143. Два шара подвешены на длинных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Шар меньшей массы отводят в сторону на высоту 50 см и отпускают. На сколько сантиметров поднимутся шары после абсолютно неупругого удара? Отношение масс шаров 1,5.

4.144. Диск массой 3 кг висит на упругом шнуре жесткостью 200 Н/м, прикрепленном к центру диска. Вдоль шнура с высоты 35 см на диск плашмя падает шайба (с отверстием в центре) массой 1 кг. Удар шайбы о диск абсолютно неупругий. Найдите максимальную скорость (в см/с) диска с шайбой после удара. $g = 10$ м/с^2.

4.145. Доска массой 1 кг движется равномерно по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью 3 м/с. Сверху на доску осторожно кладут кирпич массой 0,5 кг. Какое расстояние пройдет кирпич относительно доски за время проскальзывания? Коэффициент трения между доской и кирпичом 0,1. $g = 10$ м/с^2.

4.146. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной 2,5 м, на одном конце которой находится маленький брусок. Какую минимальную скорость надо сообщить бруску, чтобы он достиг другого конца доски? Масса доски в 4 раза больше, чем масса бруска, коэффициент трения между ними 0,4. $g = 10$ м/с^2.

4.147. Снаряд массой 8 кг, летевший со скоростью 200 м/с, разорвался на два осколка. Осколок массой 6 кг приобрел скорость 400 м/с в направлении полета снаряда. Определите энергию (в кДж), выделившуюся при взрыве.

4.148. Спортсмен катится на роликовых коньках с ядром в руках, на ходу толкает его и сразу останавливается. Какую работу совершил спортсмен, если его масса 70 кг, масса ядра 10 кг, а скорость ядра равна 8 м/с и направлена под углом 30° к горизонту?

4.149. Граната массой 1,2 кг, летевшая горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвалась на две части. Скорость одного осколка массой 800 г равна 30 м/с и направлена под углом 60° к горизонту. Какая энергия выделилась при разрыве снаряда?

Глава 5
Статика

Примеры решения задач

Задача 1. *Две пружины, жесткости которых 5 Н/м и 20 Н/м, соединяют последовательно. Чему равна жесткость получившейся системы из двух пружин?*

При растяжении этой системы пружин силой F ее деформация будет равна сумме деформаций составляющих ее пружин

$$x = x_1 + x_2.$$

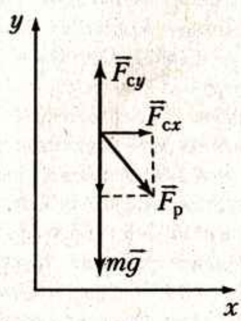
Так как каждую отдельную пружину мы при этом растягиваем с той же силой F, то приходим к уравнению

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2},$$

откуда

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 4 \text{ Н/м}.$$

Задача 2. *На парашютиста массой 80 кг в начале прыжка действует сила сопротивления воздуха, вертикальная составляющая которой 400 Н, а горизонтальная 300 Н. Найдите равнодействующую всех сил. $g = 10$ м/с^2.*

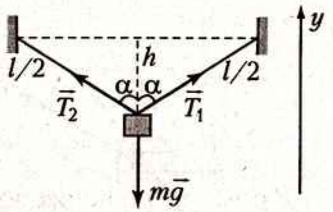


Вертикальная составляющая равнодействующей силы равна $F_{py} = F_{cy} - mg$, а горизонтальная $F_{px} = F_{cx}$. Зная две составляющие силы, находим ее модуль

$$F_{р} = \sqrt{\left(F_{cy} - mg\right)^2 + F_{cx}^2} = 500 \text{ Н}.$$

Задача 3. *Между зданиями натянута проволока длиной 20 м, к середине которой прикреплен осветитель массой 20 кг. Каково натяжение проволоки, если она провисает на 50 см от того горизонтального уровня, на котором закреплены концы проволоки? $g = 10$ м/с^2. Массу проволоки не учитывать.*

Из соображений симметрии ясно, что натяжения проволоки справа и слева от груза одинаковы: $T_1 = T_2 = T$ (впрочем, в этом можно убедиться, записав 2-ой закон Ньютона в проекции на горизонтальное направление). В проекции на ось y 2-ой закон Ньютона имеет вид



$$2T\cos\alpha - mg = 0.$$

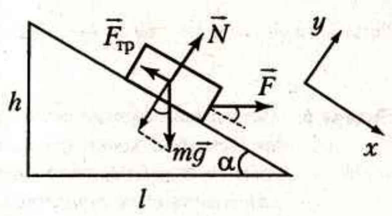
Из рисунка находим $\cos\alpha = \dfrac{h}{l/2} = 0{,}05$, откуда

$$T = \frac{mg}{2\cos\alpha} = 2000 \text{ Н}.$$

Задача 4. *Тело массой 6 кг лежит на наклонной плоскости высотой 40 см и длиной основания 100 см. Какую минимальную горизонтальную силу надо приложить к телу, чтобы стащить его с наклонной плоскости, если коэффициент трения равен 0,5? $g = 10$ м/с^2.*

Рассмотрим момент, когда тело еще покоится, но сила трения покоя достигла максимального значения

$$F_{тр} = \mu N.$$



Запишем 2-ой закон Ньютона в проекциях на оси x и y

$$F\cos\alpha + mg\sin\alpha - F_{тр} = 0,$$
$$N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0.$$

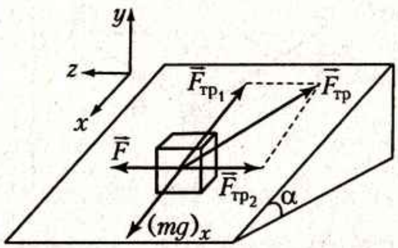
Решив полученную систему уравнений, получим

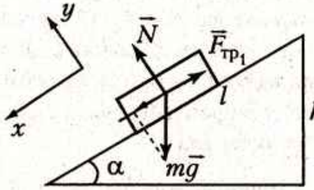
$$F = mg\frac{\mu - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mu\mathrm{tg}\alpha} = 5 \text{ Н}$$

(из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\alpha = h/l$).

Задача 5. *На наклонной плоскости высотой 3 м и длиной 9 м лежит тело массой 6 кг. Какую минимальную горизонтальную силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к телу, чтобы сдвинуть его с места? Коэффициент трения 0,5. $g = 10$ м/с^2.*

В этой задаче нам придется рассмотреть проекции не на две, как обычно, а на три оси. Сила трения имеет проекции $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ на две взаимно перпендикулярные оси x и z, параллельные наклонной поверхности





$$mg\sin\alpha - F_{тр1} = 0 \qquad (\text{ось } x),$$
$$F - F_{тр2} = 0 \qquad (\text{ось } z),$$

где $\sin\alpha = h/l = 1/3$. Условие начала проскальзывания имеет вид

$$F_{тр} = \mu N,$$

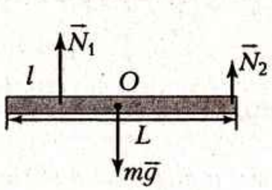
где $F_{тр} = \sqrt{F_{тр1}^2 + F_{тр2}^2}$, а силу нормальной реакции находим из проекции на ось y

$$N - mg\cos\alpha = 0.$$

Решая уравнения, получаем $F = mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 20$ Н.

Задача 6. *Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии 1 м от ее конца, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка, приходящаяся на первого человека, больше, чем на второго, если длина трубы 2,5 м?*

Уравнение моментов не содержит силы, проходящие через ось вращения, поэтому при удачном выборе оси можно исключить ненужные силы и упростить уравнения. В данном примере нам надо установить соотношение между N_1 и N_2, поэтому удобно исключить силу тяжести трубы, выбирая ось, проходящую через ее центр тяжести. Уравнение моментов относительно этой оси имеет вид



$$N_1\left(\frac{L}{2} - l\right) - N_2\frac{L}{2} = 0.$$

Получаем

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{L}{L-2l}=5.$$

Задача 7. *При взвешивании на неравноплечных рычажных весах вес тела на одной чашке получился 36 Н, на другой — 49 Н. Определите истинный вес тела.*

Запишем уравнение моментов относительно точки опоры (правило рычага) для первого взвешивания

$$P_1 l_1 = P l_2$$

и для второго взвешивания

$$P l_1 = P_2 l_2$$

(P — истинный вес груза, P_1, P_2 — вес разновесков при первом и втором взвешиваниях). Поделив уравнения друг на друга, получим

$$\frac{P_1}{P}=\frac{P}{P_2},$$

откуда

$$P=\sqrt{P_1P_2} = 42\ \text{Н}.$$

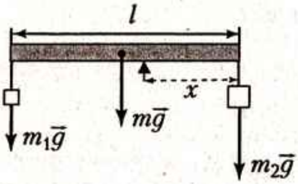
Задача 8. *К концам горизонтального стержня длиной 0,9 м и массой 2 кг подвешены два груза: слева — массой 1 кг, справа — массой 3 кг. На каком расстоянии (в см) от большей массы следует подпереть стержень, чтобы он оставался в равновесии?*

В этом примере в уравнение моментов (относительно точки опоры) войдут не две силы, а три

$$m_2g\cdot x - m_1g\cdot(l-x) - mg(l/2-x) = 0.$$

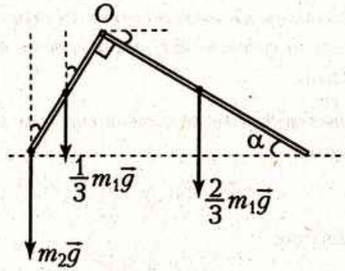
Из этого уравнения находим x

$$x=\frac{m_1 l + m(l/2)}{m_1+m_2+m} = 30\ \text{см}.$$



Замечание. Решенная задача эквивалентна задаче об определении положения центра тяжести системы.

Задача 9. *Стержень массой 300 г согнули под прямым углом в точке, которая делит его в отношении 1:2, и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы (в г) надо прикрепить к концу короткой стороны угла, чтобы концы стержня находились на одном уровне?*



Запишем уравнение моментов относительно точки подвеса

$$\frac{2}{3}m_1g\left(\frac{l}{3}\cos\alpha\right)-\frac{1}{3}m_1g\left(\frac{l}{6}\sin\alpha\right)-m_2g\left(\frac{l}{3}\sin\alpha\right)=0,$$

где l — длина стержня, m_1 — его масса. Получаем $m_2=m_1\left(\frac{2}{3}\mathrm{ctg}\alpha-\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{6}m_1=$ $=350$ г (из рисунка видно, что $\mathrm{ctg}\alpha=2$).

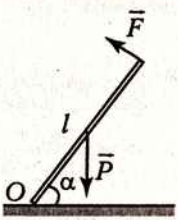
Задача 10. *Рабочий удерживает за один конец доску массой 16 кг так, что она опирается другим концом на землю и образует угол 60° с горизонтом. С какой силой удерживает рабочий доску, если эта сила перпендикулярна доске? $g = 10$ м/с^2.*

Запишем уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку опоры доски. Плечо искомой силы равно длине доски l, а плечо силы тяжести $(l/2)\cos\alpha$. Получаем

$$mg\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha-F\cdot l=0,$$

т. е.

$$F=\frac{mg}{2}\cos\alpha=40\ \text{Н}.$$



Задача 11. *Лестница длиной 4 м приставлена к гладкой стене под углом 60° к горизонту. Коэффициент трения между лестницей и полом 0,25. На какое расстояние (в см) вдоль лестницы может подняться человек, прежде чем лестница начнет скользить? Массой лестницы пренебречь. $\sqrt{3}=1,7$.*

Условие начала проскальзывания нижнего конца лестницы имеет вид

$$F_{тр} = \mu N.$$

Искомое расстояние может войти только в уравнение моментов. Так как это уравнение является самым сложным в задаче, выберем ось так, чтобы сил было поменьше и геометрия попроще — в точке O

$$N_1(l\sin\alpha) - mg(x\cos\alpha) = 0.$$

Чтобы исключить все силы, придется записать еще два уравнения — проекции 2-го закона Ньютона на горизонтальную и вертикальную оси координат

$$N_1 - F_{тр} = 0, \qquad N - mg = 0.$$

Исключая силы из этих уравнений, получаем

$$x = \mu l \operatorname{tg}\alpha = 170 \text{ см}.$$

Замечание. Отметим, что при специальном выборе оси вместо последних трех уравнений можно было бы обойтись одним уравнением моментов. Если записать его относительно оси O_1, то силы N_1 и mg будут исключены

$$F_{тр}(l\sin\alpha) - N(x\cos\alpha) = 0.$$

Подставляя сюда $F_{тр} = \mu N$, приходим к тому же ответу для x.

Задача 12. *Колесо радиусом 0,5 м и массой 10 кг стоит перед ступенькой высотой 0,1 м. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к оси колеса, чтобы поднять его на ступеньку? $g = 10$ м/с^2.*

Если записать правило моментов относительно угла ступеньки, то сила, действующая на колесо со стороны ступеньки, в уравнение не войдет. Так как нас интересует момент отрыва колеса от пола, то сила реакции пола равна нулю, и в уравнение моментов войдут только две силы

$$Fd_1 - mgd_2 = 0.$$

Плечо силы F находим сразу

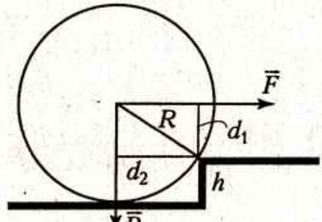
$$d_1 = R - h,$$

а плечо силы тяжести — из теоремы Пифагора

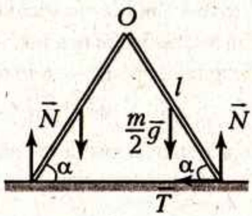
$$d_2^2 = R^2 - d_1^2.$$

Окончательно получаем

$$F = mg\frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h} = 75 \text{ Н}.$$



Задача 13. *Нижние концы лестницы-стремянки массой 10 кг соединены веревкой. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол 45°. Считая пол абсолютно гладким, найдите натяжение веревки. $g = 10$ м/с^2.*



Особенность данной задачи состоит в том, что сила натяжения не может быть определена из условия равновесия лестницы как целого, так как является внутренней силой и не входит в уравнения равновесия. Чтобы найти эту силу, надо записать уравнение моментов для одной из половинок лестницы относительно оси соединения двух сторон (верхняя точка О на рисунке). При этом мы предполагаем, что две части стремянки соединены шарнирно и могут свободно поворачиваться относительно места соединения. Получаем

$$\frac{mg}{2}\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha + T\cdot l\sin\alpha - N\cdot l\cos\alpha = 0\,.$$

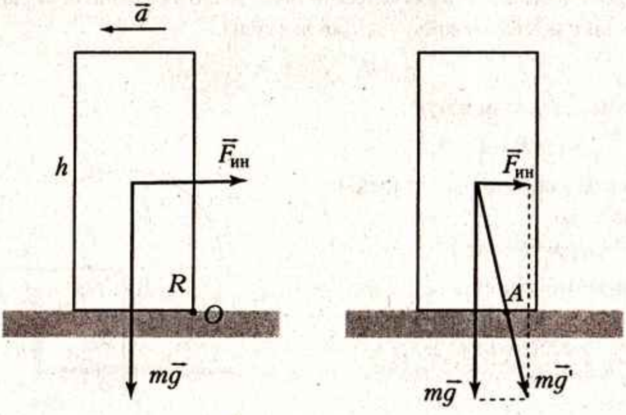
Силу N находим из проекции 2-го закона Ньютона на вертикальную ось

$$2N - mg = 0,$$

и выражаем силу натяжения веревки

$$T = \frac{mg}{4}\operatorname{ctg}\alpha = 25\ \text{Н}.$$

Задача 14. *В кузове грузовика стоит цилиндр, радиус основания которого 10 см, а высота 50 см. С каким максимальным ускорением может тормозить грузовик, чтобы цилиндр не опрокинулся? $g = 10$ м/с^2.*



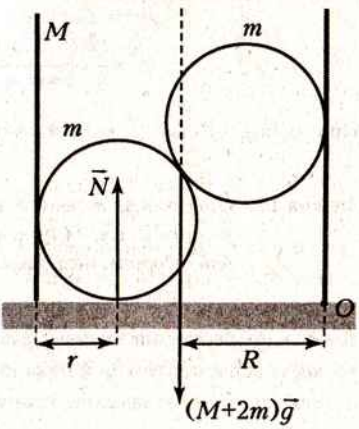
В системе отсчета, связанной с грузовиком, цилиндр покоится, и поставленная задача становится задачей статики. Однако, переходя в систему отсчета, которая движется поступательно с ускорением $\vec{a}$, мы должны к силе тяжести $\Delta m\vec{g}$, действующей на каждый элемент массы, добавить силу инерции $-\Delta m\vec{a}$ (см. Глава 2 реш. 7). Равнодействующая сил инерции, как и сил тяжести, приложена к центру тяжести. В тот момент, когда цилиндр находится на грани опрокидывания, он взаимодействует с опорой в одной точке O. Запишем относительно этой точки уравнение моментов

$$F_{ин} \cdot \frac{h}{2} - mg \cdot R = 0 .$$

(момент силы реакции равен нулю). Подставляя $F_{ин} = ma$, получаем $a = 2gR/h = 4$ м/с^2.

Замечание. Вместо того, чтобы в явном виде вводить силу инерции, можно считать, что вместо силы тяжести $m\vec{g}$ действует сила тяжести $m\vec{g}'$, где $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$. Тогда мы можем применить общее условие того, что поставленное на опору тело не опрокидывается. Для этого линия действия силы тяжести $m\vec{g}'$ не должна выходить за пределы опоры. Действительно, нетрудно установить, что равнодействующая сил нормальной реакции должна быть приложена в точке A пересечения силы тяжести с опорой. (Относительно этой точки равны нулю моменты силы трения и силы тяжести $m\vec{g}'$. Значит, должен быть равен нулю и момент силы нормальной реакции.) Когда точка A окажется на краю опоры, сила реакции будет действовать только в этой точке.

Задача 15. *Два одинаковых шара радиусом 10 см и массой 600 г каждый положили в вертикальный открытый с обеих сторон тонкостенный цилиндр радиусом 15 см, стоящий на горизонтальной плоскости. Пренебрегая трением, найдите, при какой минимальной массе (в г) цилиндра шары его не опрокидывают.*



Если цилиндр находится на грани опрокидывания, то он взаимодействует с плоскостью только в точке O. Если начать с уравнения моментов для цилиндра, то придется вычислять силы давления шаров на его стенки, а для этого нужно будет записать еще и уравнение моментов для верхнего шара. Попробуйте проделать такие расчеты самостоятельно, а мы покажем, как удачный выбор объекта для записи условий равновесия может заметно упростить задачу. Исследуем равновесие системы (цилиндр + шары) и запишем уравнение моментов для точки O. Силы взаимодействия шаров с цилиндром и между собой являются теперь внутренними, и их учитывать не надо. Получаем уравнение

$$N \cdot (2R - r) - (M + 2m)g \cdot R = 0.$$

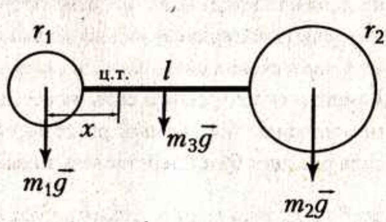
Силу реакции плоскости находим из 2-го закона Ньютона для системы двух шаров (в проекции на вертикальную ось)

$$N - 2mg = 0.$$

Получаем $M = 2m(R - r)/R = 400$ г.

Задача 16. *Два шара радиусами 1 см и 6 см соединены однородным стержнем длиной 10 см. Масса первого шара 60 г, масса второго — 72 г, масса стержня 12 г. Найдите расстояние (в см) от центра тяжести системы до центра меньшего шара.*

Суммарный момент сил тяжести, приложенных к частям системы, относительно центра тяжести должен быть равен нулю. Обозначив искомое расстояние через x, запишем это уравнение моментов



$$-m_1 g \cdot x + m_2 g \cdot (r_1 + r_2 + l - x) + m_3 g(r_1 + \frac{l}{2} - x) = 0.$$

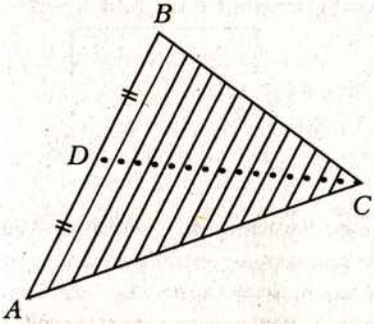
Выразив отсюда x, получим

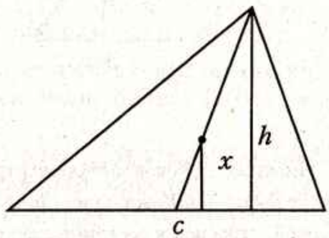
$$x = \frac{m_2(r_1 + r_2 + l) + m_3(r_1 + \frac{l}{2})}{m_1 + m_2 + m_3} = 9 \text{ см}.$$

Получилось, что центр тяжести лежит не слева, а справа от середины стержня.

Задача 17. *Однородная тонкая пластина имеет форму треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. На каком расстоянии (в см) от второй стороны находится центр тяжести пластины?*

Докажем, что центр тяжести однородной пластины в форме треугольника лежит на пересечении медиан. Для этого разобьем треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон. Положение центра тяжести системы не изменится, если мы заменим каждую полоску точечной массой, лежащей в ее

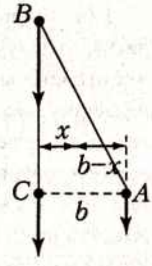




центре. Все эти массы лежат на медиане CD, значит, центр тяжести лежит на медиане. Поскольку это рассуждение годится для любой медианы, то центр тяжести лежит на их пересечении.

Известно, что точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 1:2. Значит, центр тяжести находится от каждой стороны на расстоянии, равном трети опущенной на нее высоты. Чтобы найти высоту, вычислим сначала площадь треугольника по формуле Герона. Проверьте, что она равна $S = 84$ см^2. Используя равенство $S = 0{,}5ch$, находим $h = 12$ см. Значит, искомое расстояние равно $x = h/3 = 4$ см.

Задача 18. *В вершинах треугольника ABC находятся, соответственно, массы 4, 6 и 10 г. Стороны треугольника равны: AB = 50 см, BC = = 40 см и CA = 30 см. На каком расстоянии (в см) от стороны BC находится центр тяжести системы?*

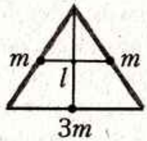


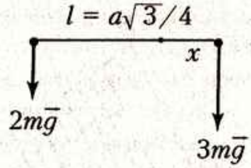
Стороны треугольника удовлетворяют равенству $a^2 + b^2 = c^2$, значит, угол C — прямой. Расположим треугольник так, чтобы сторона BC была вертикальна. Тогда в уравнение моментов относительно центра тяжести войдет искомое расстояние x

$$m_A g\cdot(b - x) - (m_B + m_C)g\cdot x = 0.$$

Получаем $x = bm_A/(m_A+m_B+m_C) = 6$ см.

Задача 19. *Две стороны проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 1 м, сделаны из алюминиевой проволоки, а третья — из медной такого же диаметра. На каком расстоянии (в см) от середины медной проволоки находится центр тяжести системы? Плотность меди в 3 раза больше плотности алюминия.* $\sqrt{3} = 1{,}7$.





Если массу боковой стороны треугольника обозначить m, то масса основания будет равна $3m$. Каждую из сторон можно заменить соответствующей точечной массой, лежащей в середине стороны. Так как эти массы не лежат на одной прямой, задачу удобно решать в два этапа. Сначала заменим две массы m массой $2m$, лежащей на середине высоты треугольника. Теперь мы имеем две точечных массы $2m$ и $3m$, расстояние между которыми равно $l = a\sqrt{3}/4$. Расположив эти массы на горизонтальной прямой и записав правило моментов

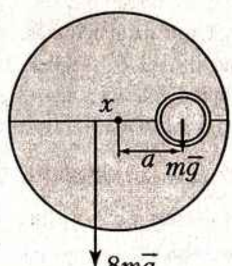
$$3mg \cdot x - 2mg \cdot (l - x) = 0,$$

найдем искомое расстояние

$$x = \frac{2a\sqrt{3}}{20} = 17 \text{ см.}$$

Задача 20. *В однородном диске радиусом R вырезано круглое отверстие радиусом R/3. Центр выреза находится на расстоянии 24 см от центра диска. На каком расстоянии (в см) от центра диска находится центр масс этого тела?*

Если возвратить на место вырезанную часть диска, то получим полный диск. Значит, центр тяжести системы, состоящей из двух тел — рассматриваемого диска с вырезом и вырезанного куска — лежит в центре диска. Обозначим массу вырезанного куска m, тогда масса полного диска равна $9m$ (его площадь в 9 раз больше), т. е. масса диска с вырезом равна $8m$. Записав правило моментов относительно центра диска



$$(mg)a - (8mg)x = 0,$$

выразим расстояние от центра тяжести диска с вырезом до центра диска

$$x = \frac{a}{8} = 3 \text{ см.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Равнодействующая сил. Второй закон Ньютона для неподвижного тела (1–5)

5.1. Требуется заменить силу в 5 Н двумя силами, действующими по той же прямой, но в противоположные стороны. Меньшая из этих сил 11 Н. Как велика должна быть вторая сила?

5.2. К двум сцепленным динамометрам подвешен груз весом 8 Н. Вес каждого динамометра 2 Н. Сколько покажет верхний динамометр?

5.3. На полу лежит груз весом 1000 Н, человек старается поднять его с силой 200 Н, направленной вертикально вверх. С какой силой груз давит на пол?

5.4. Человек весом 700 Н поднимает равномерно груз весом 400 Н. С какой силой человек давит на пол?

5.5. Две пружины, жесткости которых 2 Н/м и 3 Н/м, соединяют параллельно. Чему равна жесткость получившейся системы из двух пружин?

5.6. На тело действуют две силы, равные 3 Н и 4 Н и направленные под прямым углом друг к другу. Чему должна равняться величина третьей силы, действующей на тело, чтобы сумма всех трех сил была равна нулю?

5.7. На самолет действуют: в вертикальном направлении сила тяжести 550 кН и подъемная сила 555 кН, а в горизонтальном направлении сила тяги 162 кН и сила сопротивления воздуха 150 кН. Найдите величину равнодействующей всех сил (в кН).

5.8. Найдите равнодействующую трех сил по 200 Н каждая, если углы между первой и второй силой и второй и третьей силой равны по 60°.

5.9. Найдите равнодействующую двух сил, равных 3 Н и 5 Н и направленных под углом 60° друг к другу.

5.10. Найдите равнодействующую двух сил, равных 3 Н и 8 Н и направленных под углом 120° друг к другу.

5.11. Самолет тянет на буксирах два планера с постоянной скоростью. Полет самолета и планеров происходит в одной горизонтальной плоскости, причем углы между линией полета и буксирными тросами одинаковы и равны 60°. Сила натяжения каждого буксирного троса 500 Н, сила сопротивления воздуха движению самолета 400 Н. Найдите силу тяги двигателя.

5.12. Фонарь массой 20 кг подвешен над улицей на двух одинаковых тросах, угол между которыми 120°. Найдите силу натяжения каждого троса. $g = 10$ м/с^2.

5.13. Однородный стержень массой 6 кг и длиной 80 см подвешен на двух нитях длиной 50 см каждая. Нити привязаны к концам стержня и закреплены в одной точке на потолке. Какова при этом сила натяжения каждой нити? $g = 10$ м/с^2.

5.14. Какую силу, направленную вдоль поверхности, нужно приложить к телу массой 10 кг, чтобы оно находилось в равновесии на наклонной плоскости с углом наклона 30°? Трением пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

5.15. Какую горизонтальную силу нужно приложить к телу массой 10 кг, чтобы оно находилось в равновесии на наклонной плоскости с углом наклона 45°? Трением пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

5.16. На наклонной плоскости с высотой 0,7 м и длиной ската 2,5 м лежит тело массой 5 кг. Какова сила нормального давления тела на плоскость? $g = 10$ м/с^2.

5.17. Груз массой 30 кг подвешен с помощью двух нитей так, что одна нить образует с вертикалью угол 45°, а другая проходит горизонтально. Найдите силу натяжения горизонтальной нити. $g = 10$ м/с^2.

5.18. Груз массой 24 кг, подвешенный на проволоке, отклоняется на угол 60° от вертикали силой, действующей в горизонтальном направлении и приложенной к телу. Найдите силу натяжения проволоки, если груз неподвижен. $g = 10$ м/с^2.

5.19. На доску массой 500 г, лежащую на столе, действует горизонтально направленная сила 5 Н. Груз какой наименьшей массы надо положить на доску, чтобы она оставалась в покое, если коэффициент трения между доской и столом 0,2? $g = 10$ м/с^2.

5.20. Чтобы удержать брусок в равновесии, прижимая его к вертикальной стене, требуется минимальная горизонтально направленная сила 500 Н. Чему равна масса бруска, если коэффициент трения между бруском и стенкой 0,1? $g = 10$ м/с^2.

5.21. На наклонной плоскости длиной 13 м и высотой 5 м лежит груз массой 26 кг. Коэффициент трения 0,5. Какую минимальную силу надо приложить к грузу вниз вдоль плоскости, чтобы сдвинуть груз вниз? $g = 10$ м/с^2.

5.22. На наклонной плоскости длиной 1 м и высотой 0,8 м лежит груз массой 2 кг. Коэффициент трения 0,5. Какую минимальную силу, направленную перпендикулярно к плоскости, надо приложить к грузу, чтобы он не соскальзывал вниз? $g = 10$ м/с^2.

5.23. Какую минимальную горизонтальную силу надо приложить к бруску массой 2,6 кг, находящемуся на наклонной плоскости, чтобы удержать его от соскальзывания вниз? Длина наклонной плоскости 50 см, высота 30 см, коэффициент трения 0,4. $g = 10$ м/с^2.

5.24. На горизонтальной поверхности лежит груз массой 10 кг. К нему приложена горизонтальная сила 12 Н. Какую минимальную горизонтальную силу надо дополнительно приложить в перпендикулярном к этой силе направлении, чтобы сдвинуть груз с места? Коэффициент трения 0,2. $g = 10$ м/с^2.

5.25. Шар массой 5 кг опирается на две гладкие наклонные плоскости, пересекающиеся по горизонтальной прямой. Левая плоскость образует с горизонтом угол 60°, а правая — угол 30°. Определите силу, с которой шар давит на левую плоскость. $g = 10$ м/с^2.

5.26. К гладкой вертикальной стене на нити подвешен шар массой 0,4 кг. Определите силу натяжения нити, если она составляет угол 60° с вертикалью. $g = 10$ м/с^2.

Правило моментов

а) параллельные силы (6–9)

5.27. На поверхность вала станка по касательной действует сила, момент которой равен 6,25 Н·м. Чему равна эта сила, если диаметр вала 25 см?

5.28. Гаечным ключом с рукояткой длиной 40 см завинчивают гайку. Сила 80 Н приложена к концу рукоятки ключа и направлена перпендикулярно к рукоятке. Каков будет момент этой силы, если приложить ее не к концу, а к середине рукоятки?

5.29. Человек тянет за веревку, привязанную к валу колодца, с силой 100 Н, направленной перпендикулярно оси вала и под углом 30° к линии продолжения радиуса. Какой величины момент силы относительно оси вала создает человек, если диаметр вала 28 см?

5.30. Труба весом 12 Н лежит на земле. Какую силу надо приложить, чтобы приподнять трубу за один конец?

5.31. Прямая неоднородная балка длиной 1 м и массой 200 кг подвешена за концы на вертикально натянутых тросах. Балка занимает горизонтальное положение. Найдите натяжение правого троса, если центр тяжести балки находится на расстоянии 0,3 м от левого конца балки. $g = 10$ м/с^2.

5.32. Два человека несут груз на доске, положив ее себе на плечи. На долю одного из них приходится нагрузка, равная 2/5 от веса груза. Какова длина (в см) доски, если груз находится на расстоянии 10 см от ее середины? Массу доски не учитывать.

5.33. Рельс длиной 10 м и весом 9000 Н поднимают равномерно в горизонтальном положении на двух вертикальных тросах, первый из которых укреплен на конце рельса, а второй — на расстоянии 1 м от другого конца. Определите натяжение второго троса.

5.34. Однородный стержень длиной 1 м и массой 12 кг подвешен на расстоянии 20 см от одного из его концов. С какой силой будет давить стержень на руку, если, взявшись за короткий конец, удерживать его в горизонтальном положении? $g = 10$ м/с^2.

5.35. Однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом массой 1,2 кг находится в равновесии, если точка опоры находится на расстоянии 1/5 длины стержня от груза. Чему равна масса (в г) стержня?

5.36. На столе перпендикулярно его краю лежит однородная линейка длиной 75 см. Часть линейки свешивается со стола. К свешивающемуся концу линейки подвешен груз, масса которого в 2 раза больше массы линейки. На каком расстоянии (в см) от края стола находится середина линейки, если она опирается только на край стола и вся система находится в равновесии?

5.37. На прямоугольной горизонтальной платформе лежит однородная балка массой 200 кг, расположенная перпендикулярно краю платформы. Четвертая часть балки выступает за край платформы. К выступающему концу прилагают силу, направленную вертикально вниз. При какой наименьшей величине этой силы противоположный конец балки начнет приподниматься? $g = 10$ м/с^2.

5.38. Два груза уравновешены на концах рычага, плечи которого 50 и 70 см. Найдите вес большего груза, если сила давления рычага на опору 72 Н. Весом рычага пренебречь.

5.39. При взвешивании на неравноплечных рычажных весах вес тела на одной чашке получился 16 Н, на другой 25 Н. Определите массу тела. $g = 10$ м/с^2.

5.40. На одной чашке рычажных весов находится груз весом 1,2 Н, на другой — весом 1,1 Н. На каком расстоянии (в мм) от центра коромысла весов надо подвесить гирьку весом 0,4 Н, чтобы весы были в равновесии? Длина коромысла 0,2 м.

5.41. На однородной доске длиной 4 м и массой 30 кг качаются два мальчика массами 30 и 40 кг. На каком расстоянии (в см) от середины должна находиться точка опоры доски, если мальчики сидят на ее концах?

5.42. Стержень массой 200 г согнули посередине под прямым углом и подвесили на нити, привязанной к одному из концов. Какой массы (в г) грузик надо закрепить на другом конце, чтобы середина нижней половины стержня находилась точно под точкой подвеса?

5.43. Стержень массой 100 г согнули посередине под углом 120° и подвесили на нити, привязанной к точке сгиба. Грузик какой массы (в г) надо прикрепить к концу одной из сторон угла, чтобы другая сторона заняла горизонтальное положение?

5.44. Три человека несут однородную пластину массой 70 кг, имеющую форму равностороннего треугольника со стороной $2\sqrt{3}$ м. Один держит середину основания пластины, а двое других — противоположную вершину. На каком расстоянии (в см) от этой вершины надо положить на пластину груз массой 100 кг, чтобы при горизонтальном положении пластины нагрузка была распределена поровну между всеми несущими?

б) непараллельные силы (10–15)

5.45. К гладкой вертикальной стене на нити длиной 8 см подвешен шар радиусом 5 см и массой 6 кг. Определите силу давления шара на стену. $g = 10$ м/с^2.

5.46. Однородную палку длиной 1,5 м и массой 2 кг прислонили к краю стола так, что расстояние от верхнего конца палки до точки касания равняется 50 см. Высота стола 0,8 м. Пренебрегая трением между палкой и столом, найдите силу их взаимодействия. $g = 10$ м/с^2.

5.47. Лестница массой 30 кг приставлена к гладкой вертикальной стене под углом 45°. Найдите силу давления лестницы на стену. Центр тяжести лестницы находится в ее середине. $g = 10$ м/с^2.

5.48. К стене прислонена лестница массой 1,5 кг. Центр тяжести лестницы находится на расстоянии 1/3 длины от ее верхнего конца. Какую силу, направленную горизонтально, надо приложить к середине лестницы, чтобы верхний конец ее не оказывал давления на стену? Угол между лестницей и стеной 45°. $g = 10$ м/с^2.

5.49. Внутрь гладкого высокого цилиндрического стакана с внутренним радиусом 6 см помещают палочку длиной 13 см и массой 250 г. С какой силой действует на стенку стакана верхний конец палочки? $g = 10$ м/с^2.

5.50. Шар массой 3 кг находится на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 60°. Равновесие шара достигается за счет трения о плоскость и натяжения нити, прикрепленной одним концом к верхней части шара, а другим — к вершине наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити, если она располагается горизонтально. $g = 10$ м/с^2. $\sqrt{3} = 1{,}7$.

5.51. Под каким наибольшим углом (в градусах) к вертикали может стоять лестница, прислоненная к гладкой вертикальной стене, если коэффициент трения лестницы о пол 0,5? Центр тяжести лестницы находится в ее середине.

5.52. Однородная доска приставлена к стене. При каком наименьшем угле (в градусах) между доской и горизонтальным полом доска сохранит равновесие, если коэффициент трения между доской и полом 0,4, а между доской и стеной 0,5?

5.53. Нижние концы лестницы-стремянки соединены веревкой. Найдите ее натяжение в тот момент, когда человек массой 80 кг поднялся по стремянке до половины ее высоты. Массой лестницы и трением о пол пренебречь. Каждая сторона лестницы составляет с полом угол 45°. g = 10 м/с^2.

5.54. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к верхнему ребру куба массой 50 кг, находящегося на горизонтальной плоскости, чтобы перекинуть его через нижнее ребро? g = 10 м/с^2.

5.55. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол, тангенс которого равен 0,6. На ней стоит цилиндр радиусом 1,5 см. При какой максимальной высоте (в см) цилиндра он не опрокидывается? Цилиндр сделан из однородного материала.

Центр тяжести (16–20)

5.56. Два шара радиусом 30 см каждый касаются друг друга. На каком расстоянии (в см) от точки касания находится центр тяжести системы, если масса одного шара вдвое больше массы другого?

5.57. Стержень длиной 0,8 м и шар радиусом 0,2 м соединены вместе, причем ось стержня и центр шара лежат на одной прямой. На каком расстоянии (в см) от середины стержня находится центр тяжести системы, если массы стержня и шара одинаковы?

5.58. Два однородных цилиндра соединены между собой так, что их оси лежат на одной линии. Масса одного цилиндра 3 кг, его длина 1 м. Масса второго 1 кг, а его длина 0,6 м. На каком расстоянии (в см) от центра большого цилиндра находится центр тяжести системы?

5.59. Четыре однородных шара массами m_1 = 1 кг, m_2 = 5 кг, m_3 = 7 кг и m_4 = 3 кг укреплены последовательно (в порядке номеров) на невесомом стержне так, что их центры находятся на оси стержня на равных расстояниях 0,2 м друг от друга. На каком расстоянии (в см) от центра третьего шара находится центр тяжести системы?

5.60. Однородная тонкая пластина имеет форму равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см. На каком расстоянии (в см) от основания находится центр тяжести пластины?

5.61. Однородная тонкая пластина имеет форму треугольника со сторонами 15, 20 и 25 см. На каком расстоянии (в см) от большей стороны находится центр тяжести пластины?

5.62. В вершинах треугольника ABC находятся соответственно массы 4, 6 и 10 г. Стороны треугольника равны: AB = 50 см, BC = 40 см и CA = 30 см. На каком расстоянии (в см) от стороны AB находится центр тяжести системы?

5.63. В вершинах прямоугольного треугольника ABC размещены соответственно массы 9 г, 2 г и 4 г. Катеты треугольника равны AC = 4 см и BC = 9 см, На каком расстоянии (в см) от вершины A находится центр тяжести системы?

5.64. В однородном шаре радиусом 28 см имеется шарообразная полость вдвое меньшего радиуса, касающаяся поверхности шара. На каком расстоянии (в см) от центра большого шара находится центр тяжести системы?

Глава 6

Гидростатика

Примеры решения задач

Задача 1. *Отверстие в дне нефтяного бака заделано цилиндрической пробкой. Чтобы выдавить пробку наружу, надо приложить к ней силу 16 Н. До какой предельной высоты можно наливать в этот бак нефть, если площадь пробки 10 см^2? Плотность нефти 800 кг/м^3, g = 10 м/с^2.*

Атмосферное давление в данном случае учитывать не надо, поскольку оно действует на пробку со всех сторон и не участвует в ее выдавливании (тем не менее в условиях многих задач, где атмосферное давление не надо учитывать по сути, далее на всякий случай дается указание его не учитывать). Предельную высоту найдем из условия, что сила давления, создаваемая столбом нефти, будет достаточной для выдавливания пробки

$$F = pS = \rho ghS,$$

откуда $h = F/\rho gS = 2$ м.

Задача 2. *В полый куб налита доверху жидкость. Во сколько раз сила давления воды на дно больше силы давления на боковую стенку? Атмосферное давление не учитывать.*

Сила давления на дно равна

$$F_1 = pS,$$

где p — давление столба воды у дна сосуда, S — площадь грани куба. Давление на боковую стенку линейно возрастает с глубиной от 0 у верхнего края до p — у нижнего, поэтому сила давления равна

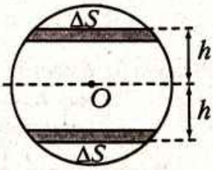
$$F_2 = \frac{0+p}{2}S.$$

Отношение сил давления равно 2.

Отметим, что и в этом случае атмосферное давление действует на стенки со всех сторон и никак не проявляется.

Задача 3. *Цистерна имеет форму лежащего на боку цилиндра диаметром 1 м. Через отверстие в верхней части цистерну доверху заполнили водой. С какой силой действует вода на вертикальную стенку цистерны? $\pi = 3{,}14$. $g = 10$ м/с^2.*

Данная задача призвана продемонстрировать, что среднее давление легко найти не только для поверхности в форме прямоугольника (с двумя горизонтальными сторонами), но и в некоторых других случаях. В случае круга легко убедиться, что среднее давление — это давление $p_ц$ на уровне его центра. Достаточно рассмотреть две симметричные относительно центра горизонтальные полоски площадью ΔS и вычислить действующую на них силу



$$\Delta F = (p_ц + \rho g h)\Delta S + (p_ц - \rho g h)\Delta S = p_ц(2\Delta S).$$

где h — расстояние от этих полосок до центра (по вертикали). Суммируя по всем парам полосок, получим

$$F = p_ц S = \rho g R \cdot \pi R^2 = \pi \rho g R^3 = 3925 \text{ Н}.$$

Атмосферное давление учитывать не надо, так как оно действует на стенку со всех сторон.

Отметим очевидное обобщение этих рассуждений. Если поверхность симметрична относительно некоторой горизонтальной прямой, то давление на уровне этой прямой является средним для данной поверхности.

Задача 4. *Вертикальная труба с поршнем, плотно прилегающим к ее внутренним стенкам, опущена нижним концом в воду. Вначале поршень находился в самом нижнем положении, на уровне воды, а затем его медленно поднимают на высоту 20 м. Пренебрегая трением, найдите совершенную при этом работу (в кДж). Площадь поршня 100 см^2. Атмосферное давление 100 кПа. g = 10 м/с^2.*

Процесс подъема поршня до конечной высоты h_1 происходит в два этапа. На первом этапе давление воды под поршнем, равное $p_0 - \rho g h$ (p_0 — атмосферное давление), остается положительным, вода продолжает давить на поршень, т. е. заполняет весь объем трубы. Приложенная к поршню сила компенсирует разность сил давления на поршень сверху и снизу (она также равна весу столба воды)

$$F(h) = \rho g h S$$

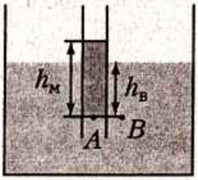
и линейно возрастает с высотой. Когда высота достигнет значения

$$h_0 = \frac{p_0}{\rho g} = 10 \text{ м},$$

давление под поршнем обращается в ноль. После этого вода перестает подниматься, между поршнем и поверхностью воды возникает пустой промежуток, и сила, приложенная к поршню, остается равной $F_1 = \rho g h_0 S = p_0 S$. Полная работа по подъему поршня равна

$$A=\frac{0+F_1}{2}h_0+F_1(h_1-h_0)=p_0Sh_1-\frac{p_0^2S}{2\rho g}=\text{ 15 кДж.}$$

Задача 5. *В сосуд с водой вставлена трубка сечением 2 см². В трубку налили масло массой 72 г. Плотность масла 900 кг/м³. Найдите разность (в см) между верхними уровнями масла и воды.*



Вода является общей жидкостью для двух сообщающихся сосудов. Приравняем давления внутри и вне трубки на уровне границы между водой и маслом (в точках A и B)

$$p_0+\rho_м g h_м=p_0+\rho_в g h_в$$

или, после сокращения,

$$\rho_м h_м=\rho_в h_в.$$

Высоту столба масла выразим через известную массу масла

$$h_м=\frac{m}{\rho_м s}.$$

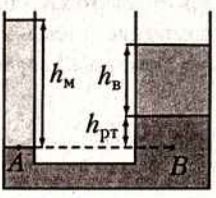
Для разности между уровнями воды получаем

$$h_в=\frac{m}{\rho_в s},$$

откуда находим разность между верхним уровнем масла и уровнем воды в сосуде

$$\Delta h=h_м-h_в=\frac{m}{\rho_м s}-\frac{m}{\rho_в s}=\text{ 4 см.}$$

Задача 6. *В сообщающиеся сосуды с ртутью долили: в один сосуд столб масла высотой 30 см, в другой сосуд столб воды высотой 20,2 см. Определите разность уровней (в мм) ртути в сосудах. Плотность ртути 13600 кг/м³, масла 900 кг/м³.*



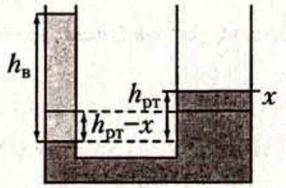
Так как ртуть является общей для сосудов жидкостью, то можно приравнять давления ртути в точках, расположенных на одном уровне. Предполагая, что граница с маслом находится ниже, чем граница с водой (если это не так, то ответ будет правильный по величине, но отрицательный), приравняем давления на уровне границы ртути с маслом (в точках A и B)

$$\rho_м g h_м=\rho_в g h_в+\rho_{рт} g h_{рт}.$$

Отсюда находим разность уровней ртути в сосудах

$$h_{рт}=\frac{\rho_м h_м-\rho_в h_в}{\rho_{рт}}=\text{5 мм.}$$

Задача 7. *В сообщающихся сосудах находится ртуть. Площадь сечения одного сосуда в 2 раза больше, чем другого. В узкий сосуд наливают столб воды высотой 1,02 м. На сколько миллиметров поднимется ртуть в широком сосуде? Плотность ртути 13600 кг/м^3.*



Приравнивая давления в сосудах на уровне границы ртути с водой, придем к уравнению

$$\rho_{рт}h_{рт} = \rho_в h_в.$$

Обозначив за x изменение уровня ртути в широком сосуде, запишем условие неизменности объема ртути

$$2Sx = S(h_{рт} - x)$$

(увеличение объема ртути в широком сосуде равно уменьшению в узком сосуде). Получаем

$$x = \frac{\rho_в h_в}{3\rho_{рт}} = 25 \text{ мм}.$$

Задача 8. *Вес тела в воде в 2 раза меньше, чем в воздухе. Какова плотность вещества тела? Ответ дайте в г/см^3.*

Весом тела в жидкости называют силу, с которой это тело действует на опору или подвес, оставаясь неподвижным относительно жидкости. Из условия равновесия получаем

$$P_ж = mg - F_{арх}.$$

По условию задачи

$$mg - F_{арх} = 0{,}5mg.$$

В этом уравнении выразим массу тела через его плотность и объем

$$m = \rho V$$

и подставим выражение для силы Архимеда

$$F_{арх} = \rho_в g V,$$

после чего найдем плотность вещества тела

$$\rho = 2\rho_в = 2 \text{ г/см}^3.$$

Задача 9. *Решите задачу Архимеда — найдите массу золота (в г) в короне, изготовленной из сплава золота с серебром. Вес короны в воздухе 25,4 Н, в воде — 23,4 Н. Плотность золота 19,3 г/см^3, серебра — 10,5 г/см^3. g = 10 м/с^2.*

Из данных задачи найдем величину выталкивающей силы

$$F_{\text{арх}} = P - P_{\text{в}}.$$

По закону Архимеда эта сила равна весу воды в вытесненном объеме

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}} g V_{\text{выт}},$$

а вытесненный объем равен сумме объемов серебра и золота

$$V_{\text{выт}} = \frac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}} + \frac{m_{\text{з}}}{\rho_{\text{з}}}.$$

Масса серебра и золота вместе равна массе короны

$$m_{\text{с}} + m_{\text{з}} = \frac{P}{g}.$$

Решая эти уравнения, находим $m_{\text{з}} = 965$ г.

Задача 10. *Стеклянный шарик объемом 1 см^3 равномерно падает в воде. При перемещении шарика на 10 м выделяется 0,17 Дж тепла. Найдите плотность стекла. $g = 10$ м/с^2.*

Уравнение движения шарика имеет вид

$$mg - F_{\text{с}} - F_{\text{арх}} = 0,$$

где сила Архимеда равна весу вытесненной воды

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{в}} g V,$$

а масса шарика выражается через его объем и плотность стекла

$$m = \rho V.$$

Количество выделившейся теплоты равно модулю работы силы сопротивления

$$Q = F_{\text{с}} s.$$

Подставляя все силы в уравнение движения, находим плотность стекла

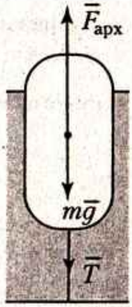
$$\rho = \rho_{\text{в}} + \frac{Q}{gVs} = 2700 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 11. *Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом 75% всего объема поплавка погружено в воду. Определите силу натяжения нити, если масса поплавка равна 2 кг. Плотность пробки 300 кг/м^3, $g = 10$ м/с^2.*

Условие равновесия поплавка имеет вид

$$F_{\text{арх}} - T - mg = 0.$$

Подставляя сюда выражение для выталкивающей силы



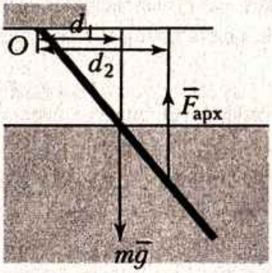
$$F_{арх} = \rho_в g V_{выт} = \rho_в g \frac{3V}{4} = \rho_в g \frac{3m}{4\rho},$$

находим силу натяжения нити

$$T = F_{арх} - mg = mg\left(\frac{3}{4}\frac{\rho_в}{\rho} - 1\right) = 30 \text{ Н}.$$

Задача 12. *Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, причем равновесие наступает тогда, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала, из которого сделана палочка?*

Запишем уравнение моментов относительно верхнего конца палочки



$$mgd_1 - F_{арх}d_2 = 0,$$

где d_1 — плечо силы тяжести, а d_2 — плечо силы Архимеда. Последняя направлена вертикально вверх и приложена к середине погруженной части палочки, а сила тяжести — к центру палочки, поэтому

$$d_2 = \frac{3}{2}d_1.$$

Масса палочки выражается через ее плотность и объем, а выталкивающая сила — через объем погруженной части палочки и плотность воды

$$m = \rho V, \quad F_{арх} = \rho_в g V_{выт} = \rho_в g \frac{V}{2}.$$

Решая уравнения, получаем

$$\rho = \frac{3}{4}\rho_в = 750 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 13. *Льдина площадью 1 м^2 и толщиной 0,4 м плавает в воде. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность льда 900 кг/м^3. g = 10 м/с^2.*

Условие плавания

$$F_{\text{арх}} = mg$$

в случае однородного тела принимает вид

$$\rho_{\text{в}} g V_{\text{погр}} = \rho g V,$$

или

$$V_{\text{погр}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} V.$$

Значит, высота выступающей над водой части льдины равна

$$\Delta h = h\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}}\right),$$

где h — толщина льдины. Для погружения льдины на дополнительную глубину x надо приложить силу

$$F(x) = \rho_{\text{в}} g(Sx),$$

которая скомпенсирует увеличение выталкивающей силы. Видно, что приложенная сила линейно возрастает от нуля до максимального значения, равного

$$F_{\max} = \rho_{\text{в}} g\,(S\Delta h) = (\rho_{\text{в}} - \rho) gSh.$$

Работа этой силы на перемещении Δh равна

$$A = \frac{0 + F_{\max}}{2}\Delta h = \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho)^2 gSh^2}{2\rho_{\text{в}}} = 8 \text{ Дж}.$$

Задача 14. *В цилиндрический сосуд с площадью дна 100 см^2 налита вода. На какую величину изменится давление на дно сосуда, если на поверхности воды будет плавать кусок льда массой 300 г? $g = 10$ м/с^2.*

С одной стороны, объем «ниже поверхности воды» увеличился на объем подводной части льдины, который можно найти из условия плавания

$$V_{\text{погр}} = \frac{F_{\text{арх}}}{\rho_{\text{в}} g} = \frac{mg}{\rho_{\text{в}} g} = \frac{m}{\rho_{\text{в}}},$$

а с другой — на величину ΔhS, где Δh — изменение уровня воды. Приравнивая, находим на сколько поднялся уровень воды

$$\Delta h = \frac{m}{\rho_{\text{в}} S},$$

откуда находим увеличение давления на дно

$$\Delta p = \rho_{\text{в}} g \Delta h = \frac{mg}{S} = 300 \text{ Па}.$$

Замечание. Проще найти прирост давления из условия равновесия содержимого сосуда. Сила тяжести увеличилась на mg, значит на столько же должна возрасти сила давления со стороны дна

$$\Delta F_{д} = \Delta p\, S = mg.$$

Получаем для Δp такой же ответ.

Задача 15. *Полый шар плавает в жидкости, наполовину погрузившись в нее. Какую долю объема шара (в процентах) составляет его внутренняя полость? Плотность жидкости в 2 раза меньше плотности вещества шара.*

Условие плавания шара имеет вид

$$mg = F_{арх}.$$

Сила Архимеда выражается через объем погруженной части шара

$$F_{арх} = \rho_{ж} g V_{погр} = \rho_{ж} g \frac{V}{2},$$

а масса шара — через объем, заполненный материалом шара

$$m = \rho(V - V_{пол}),$$

где $V_{пол}$ — объем внутренней полости. Приходим к уравнению

$$\rho_{ж}\frac{V}{2} = \rho\left(V - V_{пол}\right),$$

из которого находим

$$\frac{V_{пол}}{V} = \left(1 - \frac{\rho_{ж}}{2\rho}\right) = 0{,}75,$$

т. е. 75% (мы учли, что по условию $\rho_{ж} = \rho/2$).

Задача 16. *Тело плавает на границе двух жидкостей. Плотность тяжелой жидкости в 2,5 раза больше плотности тела, а плотность легкой — в 2 раза меньше плотности тела. Какая часть объема тела (в процентах) погружена в тяжелую жидкость?*

Условие плавания тела имеет обычный вид

$$mg = F_{арх},$$

где масса тела выражается через его плотность и объем

$$m = \rho V.$$

В выражении для выталкивающей силы надо учесть, что, плавая на границе двух жидкостей, тело вытесняет объем V_1 из тяжелой жидкости и объем $(V - V_1)$ — из легкой. Получаем уравнение

$$\rho V = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1).$$

Учитывая, что $\rho_1 = 2{,}5\rho$ и $\rho_2 = 0{,}5\rho$, находим

$$\frac{V_1}{V}100\% = 25\%.$$

Задача 17. *Открытый сосуд с жидкостью находится в лифте, который опускается с ускорением 2 м/с². На сколько процентов давление в некоторой точке жидкости меньше, чем давление в этой же точке в покоящемся сосуде? Атмосферное давление не учитывать. $g = 10$ м/с².*

Вычислим давление столба жидкости на глубине h. Для этого выделим в жидкости вертикальный цилиндр высотой h, одно основание которого лежит на поверхности, и запишем для него 2-ой закон Ньютона (в проекции на ось, направленную вертикально вверх)

$$pS - mg = ma_y,$$

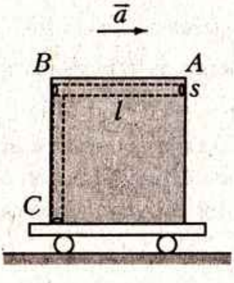
где m — масса цилиндра, S — площадь его основания. Подставляя $m = \rho Sh$, получаем

$$p = \rho(g + a_y)h = \rho(g - a)h.$$

Отношение этого давления к давлению ρgh, которое было на этой глубине в покоящемся сосуде, равно $(g - a)/g = 0{,}8$, т. е. давление уменьшилось на 20%.

Замечание. Как и следовало ожидать (см. замечание к реш. 7 из Главы 2), формула для давления получилась такой же, как в неподвижном сосуде, но g заменилось на $g - a$. Это — проявление общего принципа, согласно которому переход в систему отсчета, движущуюся с ускорением $\vec{a}$, приводит к единственному изменению: ускорение свободного падения заменяется на $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$.

Задача 18. *Цистерну в форме куба со стороной 2 м, стоящую на платформе, заполнили водой почти доверху и закрыли. Платформа стала разгоняться с горизонтальным ускорением 2 м/с². Найдите силу давления (в кН) воды на заднюю стенку цистерны. Атмосферное давление не учитывать. $g = 10$ м/с².*



Давление в переднем верхнем углу A цистерны будет равно нулю (там образуется небольшое пространство, свободное от воды). Из 2-го закона Ньютона для воображаемого тонкого цилиндра AB, соединяющего передний и задний верхние углы цистерны,

$$p_B s = (\rho s l)a,$$

где s — площадь цилиндра, l — сторона куба.

Для воображаемого вертикального цилиндра BC получаем

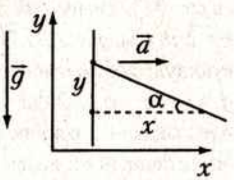
$$p_C = p_B + \rho g l = \rho a l + \rho g l.$$

Давление на задней стенке линейно возрастает от $p_B = \rho a l$ в верхней точке до $p_C = \rho\,(a + g)l$ в нижней. Сила давления равна

$$F = \frac{p_B + p_C}{2} S = \rho\left(a + \frac{g}{2}\right)l^3 = 56 \text{ кН}.$$

Замечание. Если учитывать влияние атмосферного воздуха, то ответ будет таким же. В переднем верхнем углу A будет небольшое пространство, заполненное воздухом при атмосферном давлении (объем воды в закрытой цистерне не меняется, значит, не меняется и объем воздуха). Легко убедиться, что к давлению в каждой точке надо добавить $p_{\text{атм}}$, и такое же давление действует снаружи.

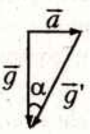
Задача 19. *Открытую цистерну в форме куба со стороной 2 м, стоящую на платформе, заполнили жидкостью наполовину. Платформа стала разгоняться с ускорением 2 м/с^2. Насколько поднялся уровень (в см) жидкости у задней стенки платформы к тому моменту, когда жидкость и платформа стали двигаться как единое целое? $g = 10$ м/с^2.*



Выясним сначала, какую форму имеет свободная поверхность жидкости. Рассмотрим точку A, расположенную у задней стенки на y ниже верхней кромки жидкости, и определим, на каком расстоянии x по горизонтали находится от этой точки свободная поверхность. Из 2-го закона Ньютона для вертикального столба жидкости в проекции на ось y следует, что давление в точке A равно $p_0 + \rho g y$, а из 2-го закона Ньютона для горизонтального столба жидкости в проекции на ось x — что это же давление равно $p_0 + \rho a x$ (подробнее см. реш. 18). Приравнивая эти выражения, получаем $y/x = a/g$. Это значит, что свободная поверхность представляет собой плоскость, наклоненную в сторону разгона под углом α таким, что

$$\operatorname{tg}\alpha = a/g.$$

Поскольку общее количество жидкости осталось прежним, то в середине цистерны уровень не изменился, у задней стенки он поднялся на $(l/2)\operatorname{tg}\alpha = 20$ см (l — длина платформы), а у передней стенки на столько же опустился.



Замечание. Если перейти в систему отсчета, связанную с платформой, то жидкость будет покоиться в поле тяжести $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ (см. Глава 2 реш. 7). Свободная поверхность будет «горизонтальна», т. е. перпендикулярна вектору $\vec{g}'$. Поскольку этот вектор образует с вертикалью угол $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$, то свободная поверхность наклонена под таким же углом к горизонту.

Задача 20. *Тело плотностью 500 кг/м^3 плавает на поверхности воды в сосуде, который поднимается вертикально вверх с ускорением $g/2$. Какая часть объема тела (в процентах) погружена в воду?*

Из уравнения движения для плавающего тела

$$F_{\text{арх}} - mg = ma_y$$

(ось y направлена вверх) следует, что сила Архимеда в том случае, когда сосуд поднимается с ускорением, больше, чем в случае неподвижного сосуда. Многие абитуриенты делают из этого ошибочный вывод, что должен увеличиться вытесненный телом объем жидкости. Однако это не так — изменится не вытесненный объем, а выражение для силы Архимеда. В сосуде, который поднимается с ускорением a_y, сила Архимеда равна

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}}(g + a_y)V_{\text{выт}}.$$

Видно, что вытесненный объем вычисляется по такой же формуле, как и в отсутствие ускорения: $V_{\text{выт}} = m/\rho_{\text{ж}} = (\rho/\rho_{\text{ж}})V$, т. е. $V_{\text{выт}}/V = \rho/\rho_{\text{ж}} = 0{,}5$. (Ответ: погружено 50%).

Как же объяснить, что сила Архимеда меняется указанным образом? Этот результат будет выглядеть естественно, если вспомнить, что в ускоренно движущемся сосуде зависимость давления от глубины дается формулой $p = \rho(g + a_y)h$, а не $p = \rho gh$ (см. реш. 17). Поскольку сила Архимеда представляет собой равнодействующую сил давления, действующих на тело, то она также должна зависеть не от g, а от $(g + a_y)$. Однако самый надежный путь проследить за изменением силы Архимеда — это воспользоваться «методом подмены». Мысленно уберем тело, а вытесненный им объем заменим жидкостью. На этот объем жидкости действует со стороны остальной жидкости такая же сила Архимеда, как на тело. 2-ой закон Ньютона для этого объема имеет вид

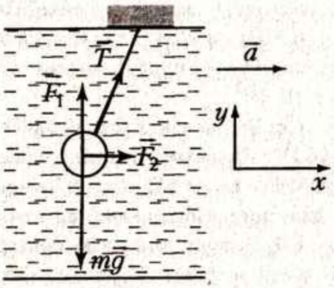
$$\vec{F}_{\text{арх}} + m_{\text{ж}}\vec{g} = m_{\text{ж}}\vec{a},$$

где $\vec{a}$ — ускорение, с которым движется сосуд (и жидкость). Получаем, что силу Архимеда надо вычислять по формуле

$$\vec{F}_{\text{арх}} = -\rho V_{\text{выт}}(\vec{g} - \vec{a}).$$

Замечание. Выражение для силы Архимеда соответствует представлению, что при переходе в систему отсчета, движущуюся с ускорением $\vec{a}$, надо заменить $\vec{g}$ на $\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}$ (см. Глава 2 реш. 7). Так как в этой СО жидкость покоится, то должны действовать обычные законы гидростатики, но с другим ускорением свободного падения. Поскольку условие плавания тела $V_{\text{выт}} = m/\rho_{\text{ж}}$ не содержит ускорения свободного падения, то при его изменении глубина погружения не должна измениться.

Задача 21. *К потолку цистерны, целиком заполненной водой, которая движется с горизонтальным ускорением 2,25 м/с², подвешен на нити шар массой 5 кг. Найдите натяжение нити после того как она займет устойчивое наклонное положение. Плотность материала шара 5000 кг/м³, g = 10 м/с².*



На шар действуют сила натяжения нити, сила тяжести и сила Архимеда. Сила Архимеда в этом случае направлена не вертикально, а наклонно (см. реш. 20), у нее есть не только вертикальная составляющая $\vec{F}_1$, но и горизонтальная $\vec{F}_2$. Чтобы найти силу Архимеда, опять воспользуемся «методом подмены» (см. реш. 20). Заменим шар на такой же объем воды (сила Архимеда не изменится) и запишем для него 2-ой закон Ньютона

$$F_1 - (\rho_в V)g = 0, \quad F_2 = (\rho_в V)\, a.$$

Теперь запишем 2-ой закон Ньютона для шара в проекциях на оси x и y

$$T_x + F_2 = ma, \quad T_y + F_1 - mg = 0,$$

откуда получаем (подставляя $V = m/\rho$)

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = m\left(1 - \frac{\rho_в}{\rho}\right)\sqrt{a^2 + g^2} = 41 \text{ Н}.$$

Отметим, что угол наклона нити не зависит от того, погружен шар в жидкость или нет. В любом случае нить направлена вдоль $\vec{g}\,' = \vec{g} - \vec{a}$ (см. Глава 2 реш. 7).

Задачи для самостоятельного решения

Закон Паскаля. Давление столба жидкости * (1–4)

6.1. Цилиндрический сосуд с жидкостью площадью 200 см² плотно прикрыт поршнем массой 1 кг. Определите дополнительное давление, которое оказывает поршень на жидкость. g = 10 м/с².

---

* Во избежание недоразумений отметим, что слова «давление жидкости», как и просто «давление», обозначают полное давление, включая внешнее. Для обозначения давления, которое было бы в данной точке жидкости в отсутствие внешнего давления, используются слова «давление столба жидкости».

6.2. Цилиндрический сосуд с жидкостью плотно прикрыт поршнем массой 1 кг. Площадь поршня 200 см^2. На поршень действует сила 200 Н, направленная под углом 30° к плоскости поршня. Какое давление действует на поршень со стороны жидкости? g = 10 м/с^2. Атмосферное давление не учитывать.

6.3. Давление столба воды 10^5 Па. Определите высоту столба воды. g = 10 м/с^2.

6.4. Высота столба ртути в ртутном барометре 75 см. Какой высоты (в см) столб воды создает такое же давление? Плотность ртути 13600 кг/м^3.

6.5. На сколько килопаскалей отличается давление на дно сосуда с жидкостью от атмосферного, если высота столба жидкости 2 м, а ее плотность 800 кг/м^3? g = 10 м/с^2.

6.6. У основания башни давление столба воды в водонапорной трубе равно 490 кПа. Под каким давлением (в кПа) вытекает вода из крана на четвертом этаже здания на высоте 15 м от его основания? (Речь идет о давлении столба воды, т. е. о давлении, избыточном над атмосферным). g = 9,8 м/с^2.

6.7. Уровень воды в резервуаре водонапорной башни находится на высоте 30 м от поверхности водоема. Определите избыточное (над атмосферным) давление (в кПа) воды в водонапорной трубе, расположенной на высоте 20 м. g = 10 м/с^2.

6.8. На какой глубине давление воды в 3 раза больше атмосферного, равного 100 кПа? g = 10 м/с^2.

6.9. Во сколько раз давление воды на глубине 70 м больше, чем давление на глубине 10 м? Атмосферное давление равно 100 кПа, g = 10 м/с^2.

6.10. В цилиндрический сосуд с площадью дна, равной 0,01 м^2, налита жидкость. На сколько изменится давление жидкости на дно сосуда, если на поверхности будет плавать тело массой 300 г? g = 10 м/с^2.

6.11. Сосуд кубической формы с ребром 10 см до краев заполнен водой. Определите силу давления воды на боковую грань сосуда. Атмосферное давление не учитывать. g = 10 м/с^2.

6.12. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, доверху заполнен водой. С какой силой действует вода на стенку аквариума, если ее длина 0,8 м, а высота 0,5 м? Атмосферное давление не учитывать. g = 10 м/с^2.

6.13. В цилиндрический сосуд налиты равные по массе количества воды и ртути. Общая высота столба жидкостей 146 см. Определите давление этого столба на дно сосуда. Плотность ртути 13600 кг/м^3, g = 10 м/с^2.

Гидравлический пресс. Сообщающиеся сосуды (5–7)

6.14. К малому поршню гидравлического пресса приложена сила 10 Н, под действием которой за один ход он опускается на 25 см, вследствие чего большой поршень поднимается на 5 мм. Какая сила давления передается при этом на большой поршень?

6.15. При подъеме груза массой 2000 кг с помощью гидравлического пресса была совершена работа 40 Дж. При этом малый поршень сделал 10 ходов, перемещаясь за один ход на 10 см. Во сколько раз площадь большого поршня больше площади малого? Ускорение силы тяжести $g = 10$ м/с^2.

6.16. В сообщающиеся сосуды налита ртуть. В один из сосудов добавили керосин, высота столба которого 27,2 см. На сколько миллиметров уровень ртути в этом сосуде будет ниже, чем в другом? Плотность ртути 13600 кг/м^3, плотность керосина 800 кг/м^3.

6.17. В сообщающиеся сосуды налита ртуть. В один сосуд добавили воду, высота столба которой 4 см. Какой высоты (в см) должен быть столб некоторой жидкости в другом сосуде, чтобы уровень ртути в обоих сосудах был одинаков, если плотность жидкости в 1,25 раза меньше плотности воды?

6.18. В сообщающиеся сосуды одинакового сечения налита вода. В один из сосудов поверх воды долили столб масла высотой 40 см. На сколько сантиметров изменится уровень воды в другом сосуде? Плотность масла 800 кг/м^3.

6.19. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Площадь сечения одного сосуда в два раза больше площади другого. Широкий сосуд доливают водой до края. На сколько сантиметров поднимется уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был расположен на 39,8 см ниже верхнего края сосуда. Плотность ртути в 13,6 раз больше плотности воды.

6.20. В сообщающихся сосудах одинакового сечения 20 см^2 находится вода, закрытая легкими поршнями. На один из поршней помещают груз массой 160 г. На сколько сантиметров поднимется уровень воды в другом сосуде?

6.21. В сообщающихся сосудах площадью сечения 100 см^2 находится ртуть. В один из сосудов наливают воду массой 2 кг и опускают в нее деревянный брусок массой 0,72 кг. На сколько миллиметров поднимется ртуть в другом сосуде? Плотность ртути 13600 кг/м^3.

Закон Архимеда

а) полное погружение. Вес тела в жидкости (8–10)

6.22. Определите выталкивающую силу (в кН), действующую на погруженный в воду камень объемом 0,5 м^3. $g = 10$ м/с^2.

6.23. Чему равна архимедова сила (в мН), действующая в воздухе на тело объемом 50 дм^3? Плотность воздуха 1,29 кг/м^3. $g = 10$ м/с^2.

6.24. Какую силу надо приложить, чтобы удержать в воде камень, вес которого в воздухе 350 Н? Плотность вещества камня 2500 кг/м^3.

6.25. Тело, имеющее массу 2 кг и объем 0,001 м^3, находится в озере на глубине 5 м. Какую работу надо совершить, чтобы медленно поднять его на высоту 5 м над поверхностью воды? $g = 10$ м/с^2.

6.26. Кусок алюминия в воздухе весит 270 Н, а в глицерине 144 Н. Определите плотность глицерина, если плотность алюминия равна 2700 кг/м^3.

6.27. На какую величину плотность некоторого тела больше, чем у жидкости с плотностью 800 кг/м^3, если вес тела в этой жидкости в 3 раза меньше, чем в воздухе?

6.28. Плотность некоторого тела в 1,25 раза больше, чем плотность воды. Во сколько раз вес этого тела в воде будет меньше, чем в воздухе?

6.29. Кусок металла весит в воде 6800 Н, а в бензине 7100 Н. Определите плотность бензина. Плотность металла 7800 кг/м^3.

6.30. Тело весит в воздухе 3 Н, в воде 1,8 Н и в жидкости неизвестной плотности 2,04 Н. Какова плотность этой неизвестной жидкости?

6.31. Кусок пробки имеет в воздухе вес 1 Н, кусок некоторого металла 10 Н. Если эти куски связать ниткой и погрузить полностью в керосин, то их общий вес будет 5 Н. Найдите плотность пробки. Плотность керосина 800 кг/м^3, металла — 4000 кг/м^3.

6.32. Самородок золота вместе с кварцем, в который он заключен, растягивает пружину динамометра с силой 2,26 Н. При погружении самородка в воду на него действует выталкивающая сила 0,2 Н. Найдите массу (в г) самородка золота. Плотность золота 19,3 г/см^3, кварца — 3,3 г/см^3. $g = 10$ м/с^2.

6.33. Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала шарика. Во сколько раз сила сопротивления жидкости движению шарика больше силы тяжести, действующей на шарик?

6.34. Шарик массой 0,18 кг падает с установившейся скоростью v в жидкости с плотностью 800 кг/м^3. Объем шарика 100 см^3. С какой силой надо действовать на шарик, чтобы он поднимался со скоростью $2v$? Сила сопротивления пропорциональна скорости. $g = 10$ м/с^2.

б) неполное погружение (11–12)

6.35. Дубовый шар лежит в сосуде с водой так, что половина его находится в воде и он касается дна. С какой силой шар давит на дно сосуда, если его вес в воздухе 8 Н? Плотность дуба 800 кг/м^3.

6.36. Однородный шарик массой 60 г лежит на дне пустого стакана. В стакан наливают жидкость так, что объем погруженной части шарика оказывается в 6 раз меньше его общего объема. Плотность жидкости в 3 раза больше плотности материала шарика. Найдите силу давления (в мН) шарика на дно стакана. $g = 10$ м/с^2.

6.37. Из водоема медленно с постоянной скоростью вытаскивают алюминиевый цилиндр длиной 2 м и площадью поперечного сечения 100 см^2. Когда над поверхностью показалась часть цилиндра, равная 0,25 всей его длины, веревка оборвалась. Определите предельное натяжение, которое выдерживает веревка. Плотность алюминия 2700 кг/м^3, $g = 10$ м/с^2.

6.38. На дне цилиндрического сосуда с водой площадью 400 см^2 стоит цилиндр высотой 40 см и площадью основания 100 см^2, сделанный из материала плотностью 2500 кг/м^3. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить цилиндр из воды, если начальная толщина слоя воды 60 см? $g = 10$ м/с^2. Цилиндр поднимают в вертикальном положении.

6.39. В цилиндрическом сосуде с водой плавает льдинка, притянутая нитью ко дну. Когда льдинка растаяла, уровень воды понизился на 1 см. Какова была сила натяжения нити? Площадь дна сосуда 100 см^2. $g = 10$ м/с^2.

6.40. В гладкий стакан высотой 8 см и радиусом 3 см поставили однородную палочку длиной 12 см и массой 100 г. Стакан доверху наполнили жидкостью, плотность которой в два раза меньше плотности материала палочки. С какой силой (в мН) давит палочка на край стакана? $g = 10$ м/с^2.

6.41. В гладкий высокий стакан радиусом 4 см поставили палочку длиной 10 см и массой 60 г, после чего в стакан налили до высоты 3 см жидкость, плотность которой в полтора раза больше плотности материала палочки. Найдите силу (в мН), с которой верхний конец палочки давит на стенку стакана. $g = 10$ м/с^2.

Плавание тел (13–16)

6.42. Сплошное тело плавает в воде, причем под водой находится 3/4 его объема. Объем тела 0,1 м^3. Определите силу тяжести, действующую на тело. $g = 10$ м/с^2.

6.43. Кусок дерева плавает в воде, погружаясь на 3/4 своего объема. Какова плотность дерева?

6.44. Однородное тело объемом 0,0002 м^3 плавает в жидкости, плотность которой в 4 раза больше плотности материала тела. Какой объем (в см^3) тела будет выступать над поверхностью жидкости?

6.45. Тело плотностью $0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 плавает в жидкости плотностью 10^3 кг/м^3. На какую часть своего объема погружено тело? Ответ дайте в процентах.

6.46. Определите массу (в т) льдины, плавающей в воде, если объем выступающей части льдины 2 м^3. Плотность льда 900 кг/м^3.

6.47. Какая часть (в процентах) айсберга находится под водой? Плотность льда 900 кг/м^3.

6.48. Льдина равномерной толщины плавает в воде, выступая на 4 см над ее поверхностью. Какова масса льдины, если площадь ее основания 45 м^2? Плотность льда 900 кг/м^3.

6.49. Пловец неподвижно лежит на воде лицом вверх, причем в воду погружено все тело, за исключением небольшой части лица. Масса пловца равна 75 кг. Найдите объем (в дм^3) тела пловца.

6.50. Сила тяжести, действующая на судно, равна 10^3 кН. Какой объем воды вытесняет это судно? $g = 10$ м/с^2.

6.51. Прямоугольная коробочка из жести с площадью дна 38 см^2 и высотой 6 см плавает в воде так, что высота надводной ее части равна 4 см. Определите массу (в г) коробочки.

6.52. Определите наименьшую площадь плоской однородной льдины толщиной 25 см, способной удержать на воде человека массой 75 кг. Плотность льда 900 кг/м^3.

6.53. Определите минимальную массу груза, который следует положить на плоскую однородную льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду. Площадь льдины 1 м^2, ее толщина 20 см, плотность льда 900 кг/м^3.

6.54. Бревно длиной 3,5 м и поперечным сечением 0,04 м^2 плавает в воде. Какую наибольшую массу может иметь человек, чтобы бревно не затонуло, когда человек встанет на него? Плотность дерева 500 кг/м^3.

6.55. В цилиндрический сосуд площадью сечения 0,01 $м^2$ налита вода. На сколько сантиметров повысится уровень воды, если в сосуд поместить деревянный брусок массой 0,1 кг?

6.56. В цилиндрический сосуд с площадью дна 200 $см^2$ опустили плавающее тело. Уровень воды поднялся на 15 см. Какова масса тела?

6.57. В цилиндрический сосуд на поверхность воды пустили плавать коробочку из цинка, в результате чего уровень воды поднялся на 14 мм. На сколько миллиметров опустится уровень, если коробочка зачерпнет воды и утонет? Плотность цинка 7000 кг/$м^3$.

6.58. В цилиндрическом сосуде с водой площадью 150 $см^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой 30 см и площадью основания 50 $см^2$. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы полностью погрузить цилиндр в воду, если он сделан из материала плотностью 400 кг/$м^3$? $g = 10$ м/$с^2$. Вода через край не переливается.

6.59. В высоком цилиндрическом сосуде с водой площадью 300 $см^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой 20 см и площадью основания 100 $см^2$, сделанный из материала плотностью 400 кг/$м^3$. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы прижать цилиндр к дну сосуда, если начальная толщина слоя воды 20 см? $g = 10$ м/$с^2$.

6.60. В глубоком цилиндрическом сосуде с водой площадью 200 $см^2$ плавает в вертикальном положении цилиндр высотой 20 см и площадью основания 100 $см^2$, сделанный из материала плотностью 500 кг/$м^3$. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы полностью погрузить цилиндр в воду, если вначале поверхность воды была на 2 см ниже верхнего края сосуда? $g = 10$ м/$с^2$.

6.61. В цилиндрическом сосуде площадью сечения 100 $см^2$ плавает в воде кусок льда, в который вморожен грузик из цинка массой 35 г. На сколько миллиметров понизится уровень воды, когда лед растает? Плотность цинка 7000 кг/$м^3$.

6.62. Конус плавает в жидкости так, что его ось вертикальна и вершина обращена вверх. Плотность материала конуса составляет 7/8 плотности жидкости. Во сколько раз высота подводной части конуса меньше всей его высоты?

6.63. Пароход, войдя в гавань, выгрузил часть груза. При этом его осадка уменьшилась на 0,6 м. Сколько груза (в т) оставил пароход в гавани, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии 5400 $м^2$?

6.64. Полый цилиндр плавает в керосине. Чтобы цилиндр плавал с той же осадкой (глубиной погружения) в воде, в него требуется поместить груз массой 100 кг. Определите массу цилиндра. Плотность керосина 800 кг/$м^3$.

6.65. Полый шар плавает в воде, погрузившись на 1/5 своего объема. Найдите объем (в $см^3$) полости, если объем шара 1 $дм^3$, а плотность материала шара 2500 кг/$м^3$.

6.66. Плавая в первой жидкости, куб погружается на 40 мм, а плавая во второй жидкости — на 60 мм. На сколько миллиметров он погрузится в третьей жидкости, плотность которой равна среднему арифметическому плотностей двух первых жидкостей?

6.67. Металлический брусок плавает в сосуде, в котором налита ртуть и поверх нее — вода. При этом в ртуть брусок погружен на 1/4 своей высоты, а в воду — на 1/2 высоты. Определите плотность металла. Плотность ртути 13600 кг/м^3.

6.68. Сплошной цилиндр плавает в вертикальном положении в сосуде с водой. В сосуд подливают более легкую жидкость слоем толщины 20 см так, что она не доходит до верха цилиндра. При этом высота части цилиндра, находящейся в воде, уменьшается на 15 см. Чему равна плотность легкой жидкости?

6.69. Однородное тело массой 1 кг, утонувшее в жидкости плотностью 810 кг/м^3, давит на дно с силой 1 Н. Какая часть (в процентах) этого тела будет погружена в воду, если тело будет плавать на ее поверхности? g = 10 м/с^2.

6.70. Два шара одинакового объема 100 см^3 связаны нитью и погружены в жидкость. Верхний шарик плавает, наполовину погружаясь в жидкость. Найдите ее плотность, если известно, что сила натяжения нити составляет 0,1 Н, а нижний шар в 3 раза массивнее верхнего. g = 10 м/с^2.

Жидкость в ускоренно движущемся сосуде (17–21)

6.71. В дне сосуда имеется отверстие, закрытое легкой пробкой. Пробка выпадает, если в сосуд налить слой ртути высотой 12 см. С каким максимальным ускорением можно поднимать сосуд, в который налито 7,5 см ртути, чтобы пробка не выпала? g = 10 м/с^2.

6.72. Цилиндрическую цистерну, стоящую на платформе, заполнили жидкостью почти доверху и закрыли. Платформа стала разгоняться с ускорением 2 м/с^2. Во сколько раз сила давления на заднюю стенку цистерны больше, чем на переднюю? Диаметр цистерны 2 м, ее длина 10 м. Атмосферное давление не учитывать. g = 10 м/с^2.

6.73. Открытую цистерну в форме куба, стоящую на платформе, заполнили жидкостью на одну четверть. Платформа стала разгоняться с ускорением 3 м/с^2. Во сколько раз сила давления на заднюю стенку платформы будет больше, чем на переднюю к тому моменту, когда жидкость и платформа стали двигаться как единое целое? g = 10 м/с^2.

6.74. Однородный шар массой 2 кг лежит на дне сосуда с водой, который поднимается вертикально вверх с ускорением 2 м/с^2. С какой силой давит он на дно сосуда? Плотность материала шарика 4000 кг/м^3. g = 10 м/с^2.

6.75. Цистерна с водой движется с горизонтальным ускорением 2 м/с^2. На дне цистерны у задней вертикальной стенки лежит шар массой 4,5 кг. С какой силой давит он на стенку, если его плотность 3000 кг/м^3?

6.76. Цистерна с водой движется с горизонтальным ускорением 2,25 м/с^2. К полу цистерны прикреплен конец нити, на другом конце которой находится маленький шар массой 1 кг, полностью погруженный в воду. Плотность материала шара 200 кг/м^3. Найдите силу натяжения нити после того как она займет устойчивое наклонное положение. g = 10 м/с^2.

Глава 7
Молекулярная физика. Газовые законы

Примеры решения задач

Задача 1. *После того, как в комнате включили электрокамин, температура воздуха повысилась от 18°С до 27°С при неизменном давлении. На сколько процентов уменьшилось число молекул воздуха в комнате?*

Из уравнения состояния идеального газа, записанного в форме

$$p = \frac{N}{V} kT,$$

(k — постоянная Больцмана) выразим число молекул в объеме комнаты до и после нагревания

$$N_1 = \frac{pV}{kT_1}, \qquad N_2 = \frac{pV}{kT_2}$$

и сосчитаем, на сколько процентов N_2 меньше, чем N_1

$$\frac{N_1 - N_2}{N_1} = \frac{1/T_1 - 1/T_2}{1/T_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 0{,}03,$$

т. е. на 3%.

Задача 2. *Какова полная кинетическая энергия (в кДж) поступательного движения молекул газа, находящихся в баллоне емкостью 5 л при давлении 800 кПа?*

Средняя энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Для энергии всего газа получаем

$$E = N\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}\frac{N}{V} kT \cdot V = \frac{3}{2} pV = 6 \text{ кДж},$$

где мы использовали уравнение состояния идеального газа в форме $p = nkT$.

Задача 3. *Средняя квадратичная скорость молекул газа равна 1000 м/с. Чему будет равна средняя квадратичная скорость после увеличения давления и объема газа в 1,2 раза?*

Чтобы вспомнить выражение для средней квадратичной скорости, проще всего исходить из формулы для средней энергии поступательного движения молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{m_0 v_{\text{кв}}^2}{2} = \frac{3}{2} kT ,$$

где m_0 — масса одной молекулы. Получаем

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} .$$

Для отношения конечной и начальной скоростей получаем

$$\frac{v_{\text{кв}2}}{v_{\text{кв}1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}} = 1{,}2 ,$$

т. е. конечная средняя квадратичная скорость равна 1200 м/с.

Задача 4. *Какова была начальная температура (в кельвинах) воздуха, если при нагревании его на 3 К объем увеличился на 1% от первоначального? Процесс изобарный.*

Из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT$$

получаем, что если давления в двух состояниях газа одинаковы, то объем и температура этих состояний связаны соотношением

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

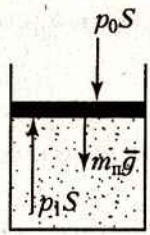
(уравнение изобарного процесса). Из условия задачи $T_2 = T_1 + \Delta T$ и $V_2 = 1{,}01 V_1$. Получаем

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1{,}01}{T_1 + \Delta T} ,$$

откуда $T_1 = 100\Delta T = 300$ К.

Задача 5. *Газ находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой 5 кг. Какой массы груз надо положить на поршень, чтобы он остался в прежнем положении, когда абсолютная температура газа будет увеличена вдвое? Атмосферное давление 100 кПа, площадь поршня 0,001 м^2. g = 10 м/с^2.*

Из уравнения состояния идеального газа



$$pV = \frac{m}{M}RT$$

следует, что если объемы в двух состояниях газа одинаковы, то давления и температуры этих состояний связаны соотношением

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

(уравнение изохорного процесса). Так как в данном случае $T_2 = 2T_1$, то получаем

$$p_2 = 2p_1.$$

Запишем теперь условия равновесия поршня в начальном состоянии

$$p_1S = p_0S + m_п g,$$

где p_0 — атмосферное давление, и поршня с грузом в конечном состоянии

$$p_2S = p_0S + (m_п + m)g.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, приходим к простому соотношению

$$(p_2 - p_1)S = mg,$$

смысл которого состоит в том, что дополнительная внешняя сила (вес груза) компенсируется соответствующим увеличением силы давления со стороны газа. Подставив сюда $p_2 = 2p_1$, выразим массу груза

$$m = \frac{p_1S}{g} = \frac{p_0S + m_п g}{g} = m_п + \frac{p_0S}{g} = 15 \text{ кг}.$$

Задача 6. *Под каким давлением (в кПа) надо наполнить воздухом баллон емкостью 10 л, чтобы при соединении его с баллоном емкостью 30 л, содержащим воздух при давлении 100 кПа, установилось общее давление 200 кПа? Температура постоянна.*

Воспользуемся законом Дальтона: давление смеси идеальных газов равно сумме давлений, которое производил бы каждый отдельный газ в отсутствие остальных компонент смеси (сумме парциальных давлений). После соединения баллонов каждый газ займет объем V_1+V_2, и их парциальные давления можно найти из уравнений изотермического процесса

$$p_1V_1 = \tilde{p}_1(V_1 + V_2), \qquad p_2V_2 = \tilde{p}_2(V_1 + V_2).$$

Складывая эти уравнения и учитывая, что полное конечное давление равно сумме парциальных давлений

$$p = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2,$$

получаем уравнение

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2,$$

из которого находим давление p_1

$$p_1 = \frac{p(V_1 + V_2) - p_2 V_2}{V_1} = 500\,\text{Па}.$$

Замечание. Такое же уравнение можно получить и непосредственно из уравнений состояния

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\text{M}} RT\,, \quad p_2 V_2 = \frac{m_2}{\text{M}} RT\,, \quad p(V_1 + V_2) = \frac{m}{\text{M}} RT\,,$$

выразив из них массы газов и подставив их в условие сохранения полной массы

$$m_1 + m_2 = m.$$

Задача 7. *До какого давления (в кПа) накачан футбольный мяч емкостью 3 л, если при этом было сделано 40 качаний поршневого насоса? За каждое качание насос захватывает из атмосферы 150 см^3 воздуха. Атмосферное давление 100 кПа. Содержанием воздуха в мяче до накачки пренебречь. Температура постоянна.*

Воздух, попавший в мяч в результате накачки, перед этим занимал объем $NV_п$ ($V_п$ — объем поршня, N — число качаний) при атмосферном давлении p_0. Из уравнения состояния следует, что если температуры начального и конечного состояний одинаковы, то давления и объемы связаны соотношением

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

(уравнение изотермического процесса). Для данного случая получаем

$$p_0(NV_п) = pV_м,$$

откуда находим давление воздуха в мяче

$$p = \frac{p_0(NV_п)}{V_м} = 200\text{ кПа}.$$

Задача 8. *Давление воздуха в сосуде было равно 10^5 Па. После трех ходов поршня откачивающего насоса давление воздуха упало до 800 Па. Определите, во сколько раз объем цилиндра насоса больше объема сосуда. Температура постоянна.*

Откачивающий насос работает следующим образом. Цилиндр насоса соединяется с сосудом, и воздух расширяется от объема V до объема $V + V_ц$. При этом его давление уменьшается от начального p_0 до значения p_1, которое можно найти из уравнения изотермического процесса

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V + V_ц}.$$

Затем клапан отсоединяет цилиндр насоса от сосуда, воздух из цилиндра выбрасывается в атмосферу, и начинается следующий цикл откачки. Давление после второго хода поршня равно

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_ц} = p_0 \left(\frac{V}{V + V_ц} \right)^2,$$

после третьего — равно

$$p_3 = p_2 \frac{V}{V + V_ц} = p_0 \left(\frac{V}{V + V_ц} \right)^3$$

(и т. д.). Решая уравнение, получаем

$$\frac{V_ц}{V} = \left(\frac{p_0}{p_3} \right)^{1/3} - 1 = 4.$$

Задача 9. *Воздух находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой 20,2 кг и сечением 20 см^2. После того, как цилиндр стали перемещать вертикально вверх с ускорением 5 м/с^2, высота столба воздуха в цилиндре уменьшилась на 20%. Считая температуру постоянной, найдите атмосферное давление (в кПа). g = 10 м/с^2.*

Конечное давление связано с начальным уравнением изотермического процесса

$$p_2 V_2 = p_1 V_1,$$

в котором по условию $V_2 = 0{,}8 V_1$. Запишем 2-ой закон Ньютона для поршня в начальном и конечном состоянии

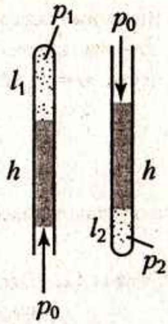
$$p_1 S - p_0 S - mg = 0, \qquad p_2 S - p_0 S - mg = ma,$$

выразим p_1 и p_2 и подставим их в уравнение изотермического процесса. Решая полученное уравнение, находим атмосферное давление

$$p_0 = \frac{m(4a - g)}{S} = 101 \text{ кПа}.$$

Задача 10. *В трубке, закрытой с одного конца, столбик воздуха заперт столбиком ртути длиной 19 см. Если трубку повернуть открытым концом вниз, длина столбика воздуха будет 10 см, а если открытым концом вверх, то 6 см. Найдите атмосферное давление (в мм рт. ст.).*

Так как температуры в двух состояниях газа одинаковы, то давления и объемы связаны уравнением изотермического процесса



$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Запишем условие равновесия столбика ртути для первого и второго положения трубки

$$p_0S - p_1S - mg = 0, \qquad p_2S - p_0S - mg = 0.$$

Выражая массу ртути через длину столбика h

$$m = \rho_{\text{рт}}hS,$$

получаем для давлений выражения, совпадающие с известными формулами гидростатики

$$p_1 = p_0 - \rho_{\text{рт}}gh, \qquad p_2 = p_0 + \rho_{\text{рт}}gh.$$

Уравнение изотермического процесса приобретает вид

$$(p_0 - \rho_{\text{рт}}gh)l_1S = (p_0 + \rho_{\text{рт}}gh)l_2S.$$

Так как нам надо найти давление p_0 в единицах высоты ртутного столба, представим его в виде

$$p_0 = \rho_{\text{рт}}gx,$$

что приводит к заметному упрощению уравнения

$$(x - h)l_1 = (x + h)l_2.$$

Выражая x, получаем

$$x = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}h = 76 \text{ см},$$

т. е. давление равно 760 мм рт.ст.

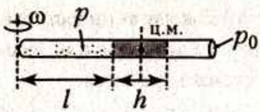
Задача 11. *В длинной горизонтальной трубке, открытой с одного конца, столбик воздуха длиной 16 см заперт столбиком ртути длиной 20 см. Трубку приводят во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через ее закрытый конец. При какой угловой скорости столбик ртути сместится на 4 см? Атмосферное давление 750 мм рт.ст., $g = 10$ м/с^2.*

На ртуть действует разность сил давления воздуха снаружи и внутри. Эта сила равна массе ртути, умноженной на ускорение ее центра масс (формула (25))

$$p_0S - pS = m\omega^2\left(l + \frac{h}{2}\right),$$

где $l = l_0 + \Delta l = 20$ см — конечная длина столбика воздуха. Конечное давление выразим из уравнения изотермического процесса:

$$p_0(Sl_0) = p(Sl).$$



Выразим также атмосферное давление через высоту ртутного столба: $p_0 = \rho_{рт} g H$, а также массу ртути: $m = \rho_{рт} S h$. В итоге приходим к уравнению

$$gH\left(1-\frac{l_0}{l}\right)=h\omega^2\left(l+\frac{h}{2}\right),$$

откуда находим ω = 5 рад/с.

Задача 12. *Газ, занимающий при температуре 127°C и давлении 200 кПа объем 3 л, изотермически сжимают, затем изобарно охлаждают до температуры −73°C, после чего изотермически изменяют объем до 1 л. Найдите конечное давление (в кПа) газа.*

Для того, чтобы узнать конечное давление газа, не нужно знать, с помощью каких процессов мы перешли из начального состояния в конечное. Мы знаем все параметры начального состояния, конечный объем и конечную температуру (поскольку в последнем процессе температура не менялась, $T_2 = 200$ К). Записав объединенный газовый закон для этих двух состояний

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2},$$

найдем конечное давление

$$p_2=\frac{p_1V_1T_2}{T_1V_2}= 300 \text{ кПа}.$$

Задача 13. *Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре 7°C. Длина каждой части 30 см. Когда одну часть сосуда нагрели, поршень сместился на 2 см. На сколько градусов нагрели газ? Температура газа в другой части сосуда не изменилась.*

В случае горизонтального сосуда равновесие поршня означает равенство давлений справа и слева от него. Запишем для каждого газа объединенный газовый закон (для газа во второй части сосуда получим уравнение изотермического процесса)

$$\frac{p\cdot lS}{T}=\frac{p'\cdot(l+\Delta l)S}{T+\Delta T}$$
$$\frac{p\cdot lS}{T}=\frac{p'\cdot(l-\Delta l)S}{T}.$$

Разделив уравнения почленно, получим

$$\frac{l+\Delta l}{l-\Delta l}=\frac{T+\Delta T}{T},$$

откуда найдем приращение температуры

$$\Delta T=\frac{2T\Delta l}{l-\Delta l}= 40 \text{ К}.$$

Задача 14. *Баллон емкостью 40 л содержит сжатый воздух под давлением 18 МПа при 27°С. Какой объем (в л) воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если лодка находится на глубине 20 м, где температура 7°С? Атмосферное давление 0,1 МПа, $g = 10$ м/с^2.*

Из уравнения состояния идеального газа

$$pV=\frac{m}{\mathrm{M}}RT$$

следует, что любые два состояния одного и того же газа связаны соотношением

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$$

(объединенный газовый закон). В данном случае мы знаем все параметры начального состояния и конечную температуру, а конечное давление воздуха равно давлению воды на глубине, на которой находится подводная лодка (воздух выходит из баллона и вытесняет воду из подводной лодки до тех пор, пока его давление не сравняется с давлением воды)

$$p_2= p_0+\rho gh,$$

где p_0 — атмосферное давление. Для объема воздуха в конечном состоянии получаем

$$V_2=\frac{p_1T_2}{(p_0+\rho gh)T_1}V_1= 2240 \text{ л}.$$

Объем вытесненной из подводной лодки воды — это объем воздуха вне баллона. Чтобы найти его, из полного объема воздуха надо вычесть объем баллона

$$V=V_2-V_1=2200 \text{ л}.$$

Задача 15. *Какую массу (в г) водорода содержал баллон, если он взорвался при температуре 1172 К и был рассчитан на хранение азота массой 7 кг при температуре 293 К при десятикратном запасе прочности? Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, азота — 28 кг/кмоль.*

Обозначив p давление, при котором разрывается баллон, запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для водорода и азота

$$pV = \frac{m_{\text{в}}}{\text{M}_{\text{в}}} RT_{\text{в}}, \quad \frac{p}{10} V = \frac{m_{\text{а}}}{\text{M}_{\text{а}}} RT_{\text{а}}.$$

Поделив уравнения почленно, найдем массу водорода

$$m_{\text{в}} = 10 m_{\text{а}} \frac{\text{M}_{\text{в}}}{\text{M}_{\text{а}}} \frac{T_{\text{а}}}{T_{\text{в}}} = 1250 \text{ г}.$$

Задача 16. *По газопроводу течет углекислый газ при давлении 0,83 МПа и температуре 27°С. Какова скорость течения газа в трубе, если за 2,5 мин через поперечное сечение трубы площадью 5 см^2 протекает 2,2 кг газа? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

Объем газа, который за время t проходит через поперечное сечение трубы, зависит от скорости течения

$$V = Svt.$$

Подставим это выражение в уравнение Менделеева–Клапейрона

$$p(vSt) = \frac{m}{\text{M}} RT$$

и выразим скорость течения

$$v = \frac{mRT}{\text{M}pSt} = 2 \text{ м/с}.$$

Задача 17. *Баллон содержит газ при 27°С и давлении 200 кПа. Каково будет давление (в кПа), если из баллона выпустить 80% газа и охладить его до 12°С?*

Так как масса газа в баллоне меняется, то начальное и конечное состояния газа в баллоне нельзя связывать объединенным газовым законом (или уравнением изохорного процесса). Нужно для каждого состояния записать уравнение Клапейрона-Менделеева

$$p_1 V = \frac{m}{\text{M}} RT_1, \quad p_2 V = \frac{0{,}2m}{\text{M}} RT_2$$

и, поделив эти уравнения друг на друга, найти конечное давление

$$p_2 = 0{,}2 p_1 \frac{T_2}{T_1} = 38 \text{ кПа}.$$

Задача 18. *Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом и находится при температуре 300 К. Когда один из сосудов был нагрет, а другой оставлен при прежней температуре, давление в системе увеличилось в 1,5 раза. На сколько градусов был нагрет один из сосудов?*

При нагревании газа в одном из сосудов часть газа перейдет в другой сосуд, причем ровно столько, чтобы давления в сосудах были одинаковыми. Однако общая масса газа в двух сосудах будет такой же, как до нагревания

$$m_1 + m_2 = 2m,$$

где m — начальная масса в каждом из сосудов, m_1, m_2 — масса газа в первом (нагретом) и во втором сосудах. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для начального состояния газа и для конечного состояния в каждом сосуде

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT, \quad p'V = \frac{m_1}{\mathrm{M}} RT_1, \quad p'V = \frac{m_2}{\mathrm{M}} RT,$$

где $p' = 1{,}5p$ — конечное давление газа. Выразив массы газов и подставив их в уравнение сохранения массы, получим после сокращения

$$\frac{2}{T} = \frac{1{,}5}{T_1} + \frac{1{,}5}{T},$$

откуда находим $T_1 = 3T = 900$ К, т. е. первый сосуд нагрели на 600 К.

Задача 19. *При повышении температуры азота, заключенного в закрытый сосуд, от 7°С до 1407°С третья часть молекул азота распалась на атомы. Во сколько раз при этом возросло давление газа?*

Начальное давление выразим с помощью уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT.$$

Давление в конечном состоянии найдем исходя из закона Дальтона для парциальных давлений

$$p'V = (p_1' + p_2')V = \frac{2m/3}{\mathrm{M}} RT' + \frac{m/3}{\mathrm{M}/2} RT' = \frac{4}{3} \frac{m}{\mathrm{M}} RT'$$

(мы учли, что молярная масса одноатомного газа в два раза меньше, чем двухатомного). Получаем

$$\frac{p'}{p} = \frac{4}{3} \frac{T'}{T} = 8.$$

Задачи для самостоятельного решения

Молекулярная физика (1–3)

7.1. Какое количество вещества содержится в теле, состоящем из $1{,}204 \cdot 10^{24}$ молекул? Число Авогадро $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

7.2. Какую массу (в г) имеют $3 \cdot 10^{23}$ молекул азота? Молярная масса азота 28 кг/кмоль. Число Авогадро $6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

7.3. Какова масса (в г) 50 молей кислорода? Молярная масса кислорода 32 кг/кмоль.

7.4. Во сколько раз в 3 г водорода больше молекул, чем в 9 г воды? Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, воды 18 кг/кмоль.

7.5. Считая, что атмосферный воздух состоит только из кислорода и азота и что молярная масса воздуха 29,12 кг/кмоль, определите процентное содержание молекул кислорода в смеси. Молярная масса кислорода 32 кг/кмоль, азота — 28 кг/кмоль.

7.6. Какое давление (в мкПа) производят пары ртути в баллоне ртутной лампы объемом $3 \cdot 10^{-5}$ м^3 при 300 К, если в ней содержится 10^{12} молекул? Постоянная Больцмана $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

7.7. Какой объем занимает газ при температуре 300 К и давлении 414 Па, если число молекул газа составляет $5 \cdot 10^{24}$? Постоянная Больцмана $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

7.8. Сколько тысяч молекул воздуха находится в 1 мм^3 сосуда при 27°С, если воздух в сосуде откачан до давления 0,83 мкПа? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К), число Авогадро $6 \cdot 10^{26}$ 1/кмоль.

7.9. В баллоне объемом 0,01 м^3 находится газ при температуре 27°С. Вследствие утечки газа давление в баллоне снизилось на 4140 Па. Какое количество молекул вышло из баллона, если температура не изменилась? Постоянная Больцмана $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. В ответе дайте результат вычислений, умноженный на 10^{-20}.

7.10. Какова полная кинетическая энергия поступательного движения 2 моль идеального газа при температуре 27°С? Универсальная газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К).

7.11. При какой температуре (в °С) находился газ, если при его охлаждении до –73°С средняя квадратичная скорость его молекул уменьшилась в 2 раза?

7.12. Давление газа 30 кПа, его плотность 1 кг/м^3. Чему равна средняя квадратичная скорость молекул газа?

7.13. Плотность одного газа при давлении 400 кПа равна 1,6 кг/м^3. Второй газ массой 2 кг занимает объем 10 м^3 при давлении 200 кПа. Во сколько раз средняя квадратичная скорость молекул второго газа больше, чем первого?

7.14. При повышении температуры газа на 300 К средняя квадратичная скорость его молекул возросла от 500 до 700 м/с. На сколько еще градусов надо поднять температуру, чтобы средняя квадратичная скорость возросла до 900 м/с?

Изменение состояния идеального газа

а) изобарный процесс (4)

7.15. Газ находится в цилиндре с подвижным поршнем и при температуре 300 К занимает объем 250 см^3. Какой объем (в см^3) займет газ, если температура понизится до 270 К? Давление постоянно.

7.16. На сколько градусов необходимо нагреть газ при постоянном давлении, чтобы его объем увеличился вдвое по сравнению с объемом при 0°C?

7.17. Газ нагрели от 27°C до 39°C. На сколько процентов увеличился при этом объем газа, если давление газа оставалось постоянным?

7.18. В объеме 0,004 $м^3$ находится газ, масса которого 0,012 кг и температура 177°C. При какой температуре (в кельвинах) плотность этого газа будет 6 $кг/м^3$, если давление останется неизменным?

7.19. Газ охладили при постоянном объеме от 127°C до 27°C. На сколько процентов надо после этого уменьшить объем газа в изотермическом процессе, чтобы давление стало равно первоначальному?

б) изохорный процесс (5)

7.20. При изменении температуры газа от 286 К до 326 К давление повысилось на 20 кПа. Найдите первоначальное давление (в кПа) газа. Процесс изохорный.

7.21. Резиновую лодку надули утром, когда температура воздуха была 7°C. На сколько процентов увеличилось давление воздуха в лодке, если днем он прогрелся под лучами солнца до 21°C? Объем лодки не изменился.

7.22. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 К давление увеличилось на 0,2%. При какой начальной температуре (в °C) находился газ?

7.23. Воздух в открытом сосуде медленно нагрели до 400 К, затем сосуд герметично закрыли и охладили до 280 К. На сколько процентов при этом изменилось давление в сосуде?

7.24. В цилиндре под поршнем находится газ. Чтобы поршень оставался в неизменном положении при увеличении абсолютной температуры газа в 2 раза, на него следует положить груз массой 10 кг. Площадь поршня 10 $см^2$. Найдите первоначальное давление (в кПа) газа. $g = 10$ $м/с^2$.

7.25. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре 7°C равно 150 кПа. До какой температуры (по шкале Цельсия) надо нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что для вытаскивания пробки до нагревания бутылки требовалась минимальная сила 45 Н? Площадь поперечного сечения пробки 4 $см^2$.

7.26. Сначала газ нагревают изохорно от 400 К до 600 К, а затем нагревают изобарно до температуры T. После этого газ приводят в исходное состояние в процессе, при котором давление уменьшается прямо пропорционально объему газа. Найдите температуру T (в кельвинах).

в) изотермический процесс (6–11)

7.27. При давлении $5\cdot10^6$ Па газ занимает объем $2\cdot10^{-2}$ $м^3$. Под каким давлением будет находиться газ при той же температуре, но в объеме 1 $м^3$? Ответ выразить в атмосферах (1 атм = 10^5 Па).

7.28. Два сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В первом сосуде объемом 15 $дм^3$ находится газ под давлением 2 атм, во втором — такой же газ под давлением 10 атм. Если открыть кран, то в обоих сосудах устанавливается давление 4 атм. Найдите объем (в дм^3) второго сосуда. Температура постоянна.

7.29. Объем цилиндра поршневого насоса равен объему откачиваемого сосуда. Чему будет равно давление в сосуде после 5 ходов поршня насоса? Начальное давление в сосуде равнялось 10^5 Па. Температура постоянна.

7.30. Газ находится в цилиндре под поршнем и занимает объем 240 см^3 при давлении 10^5 Па. Какую силу надо приложить перпендикулярно к плоскости поршня, чтобы сдвинуть его на 2 см, уменьшив объем газа? Площадь поршня 24 см^2.

7.31. Газ находится в высоком цилиндре под тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. Площадь поршня 30 см^2. Когда цилиндр перевернули открытым концом вниз, объем газа увеличился в 3 раза. Чему равна масса поршня? Атмосферное давление 100 кПа, g = 10 м/с^2.

7.32. В сосуде, закрытом пробкой, находится воздух под давлением $0{,}5 \cdot 10^5$ Па. Какой объем воды (в л) войдет в сосуд, если его опустить в воду на глубину 10 м открытым концом вниз и открыть пробку? Объем сосуда 4 л, атмосферное давление 10^5 Па, g = 10 м/с^2. Температура в толще воды и у ее поверхности одинакова.

7.33. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема, в 2 раза меньше, чем на поверхности? Атмосферное давление 100 кПа, g = 10 м/с^2. Температура в толще воды и у ее поверхности одинакова.

7.34. В горизонтальной пробирке находится 240 см^3 воздуха, отделенных от атмосферы столбиком ртути длиной 150 мм. Если пробирку повернуть открытым концом вверх, то объем воздуха станет 200 см^3. Найдите атмосферное давление (в кПа). Плотность ртути 13600 кг/м^3, g = 10 м/с^2.

7.35. Открытая с обеих сторон цилиндрическая трубка длиной 1 м наполовину погружена в ртуть. Затем верхнее отверстие трубки плотно закрывают и вынимают трубку из ртути. В трубке остается столбик ртути длиной 25 см. Определите по этим данным атмосферное давление (в кПа). Плотность ртути 13600 кг/м^3, g = 10 м/с^2.

7.36. Трубку длиной 42 см, запаянную с одного конца, погружают открытым концом в ртуть. Какой будет длина (в см) столбика воздуха в трубке в тот момент, когда верхний конец трубки сравняется с уровнем ртути? Атмосферное давление 750 мм рт.ст.

7.37. Тонкостенный стакан массой 50 г ставят вверх дном на поверхность воды и медленно погружают так, что он все время остается в вертикальном положении. Высота стакана 10 см, площадь дна 20 см^2. На какую минимальную глубину надо опустить стакан, чтобы он утонул? Атмосферное давление 100 кПа, g = 10 м/с^2. Глубина отсчитывается от поверхности воды до уровня воды в стакане на искомой глубине. Температура у поверхности и на глубине одинакова.

г) объединенный газовый закон (12–14)

7.38. При уменьшении объема газа в 2 раза давление изменилось на 120 кПа, а абсолютная температура возросла на 10%. Каково было первоначальное давление (в кПа) газа?

7.39. На сколько процентов надо уменьшить абсолютную температуру газа при увеличении его объема в 7 раз, чтобы давление упало в 10 раз?

7.40. Два сосуда соединены тонкой трубкой с краном. Один из сосудов объемом 3 л заполнен газом при давлении 10 кПа, в другом сосуде объемом 6 л давление пренебрежимо мало. Температура газа в первом сосуде 27°C. Какое давление (в кПа) установится в сосудах, если открыть кран, а температуру газа повысить до 177°C?

7.41. При каждом ходе поршневой насос захватывает 10 дм^3 воздуха из атмосферы при нормальных условиях (T_0 = 273 К) и нагнетает его в резервуар объемом 10 м^3. Температура в резервуаре постоянна и равна 364 К. Сколько ходов должен сделать поршень насоса, чтобы повысить давление в резервуаре от нормального (p_0 = 1 атм) до 10 атм?

7.42. Воздух в цилиндре под поршнем сначала изотермически сжали, увеличив давление в 2 раза, а затем нагрели при постоянном давлении. В результате объем воздуха увеличился в 3 раза по сравнению с начальным. До какой температуры (в кельвинах) нагрели воздух, если его начальная температура была 300 К?

7.43. Газ, находящийся в цилиндре под поршнем, нагрели при постоянном давлении так, что его объем увеличился в 1,5 раза. Затем поршень закрепили и нагрели газ так, что его давление возросло в 2 раза. Чему равно отношение конечной абсолютной температуры газа к его начальной абсолютной температуре?

7.44. Два одинаковых сосуда, содержащие кислород при 300 К, соединены тонкой горизонтальной трубкой, посередине которой находится столбик ртути. Объемы сосудов $4 \cdot 10^{-5}$ м^3. Когда один сосуд нагрели, а другой охладили на 3 К, столбик ртути сместился на 1 см. Какова площадь сечения трубки (в мм^2)?

7.45. Теплоизолирующий поршень делит горизонтальный сосуд на две равные части, содержащие газ при температуре 5°C. Длина каждой части 144 мм. Одну часть сосуда нагрели на 18°C, а другую — на 2°C. На какое расстояние (в мм) сместится поршень?

7.46. Во сколько раз уменьшится радиус тонкого резинового шара, заполненного воздухом, если его опустить в воду на глубину 65,2 м? Давление у поверхности воды 100 кПа. Температура воды у поверхности 27°C, а на глубине 9°C. g = 10 м/с^2.

7.47. В сообщающихся сосудах одинакового сечения находится ртуть. Один из сосудов закрывают и увеличивают температуру воздуха в нем от 300 К до 400 К. Найдите образовавшуюся разность уровней (в см) ртути, если начальная высота столба воздуха в запертом сосуде была 10 см. Атмосферное давление 750 мм рт.ст.

Уравнение Менделеева–Клапейрона (15–16)

7.48. Определите массу (в г) водорода, находящегося в баллоне емкостью 0,06 м^3 под давлением $8{,}3 \cdot 10^5$ Па при температуре 27°C. Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

7.49. Баллон емкостью 83 л содержит 2,2 кг углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $4 \cdot 10^6$ Па. При какой температуре (в кельвинах) баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

7.50. Газ в количестве 0,02 кг при давлении 10^6 Па и температуре 47°С занимает объем 1660 см^3. Определите по этим данным молярную массу (в кг/кмоль) газа. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

7.51. Газ массой 0,007 кг, находящийся в баллоне при 27°С, создает давление 50 кПа. Найдите молярную массу (в кг/кмоль) газа, если известно, что водород (молярная масса 2 кг/кмоль) массой 4 г создает в таком же баллоне при 60°С давление 444 кПа.

7.52. В одинаковых баллонах при одинаковой температуре находятся равные массы водорода и кислорода. Во сколько раз давление, производимое водородом на стенки баллона, будет больше, чем давление кислорода, если молярная масса кислорода 32 кг/кмоль, а водорода 2 кг/кмоль?

7.53. Горизонтальный сосуд длиной 85 см разделен на две части тонкой перегородкой, которая может двигаться без трения. В левой части сосуда находится водород, в правой — такая же масса кислорода. Найдите длину (в см) левой части сосуда. Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, кислорода — 32 кг/кмоль. Температуры газов одинаковы.

7.54. Два баллона соединены между собой тонкой трубкой с краном. В одном баллоне находится газ массой 2 г под давлением 400 кПа, в другом — такой же газ массой 4 г под давлением 200 кПа. Какое давление (в кПа) установится в баллонах, если открыть кран? Температура газа в баллонах одинакова.

7.55. В цилиндре под невесомым поршнем находится 50 моль газа, объем которого 1 м^3, а температура 500 К. С какой силой надо действовать на поршень перпендикулярно к его поверхности, чтобы он оставался неподвижным? Атмосферное давление 100 кПа, площадь поршня 0,002 м^2, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

7.56. Сферическая оболочка аэростата сделана из материала, квадратный метр которого имеет массу 900 г. Шар наполнен водородом при температуре 27°С и давлении 100 кПа, равными температуре и давлению окружающего воздуха. При каком минимальном радиусе (в см) шар поднимет сам себя? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К). Молярная масса воздуха 29 кг/кмоль, водорода 2 кг/кмоль.

7.57. Резиновый шар массой 198 г наполнен азотом и находится неподвижно в воде на глубине 73 м, где температура воды 7°С. Найдите массу (в г) азота в шаре. Атмосферное давление равно 100 кПа. Молярная масса азота 28 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К), $g = 10$ м/с^2.

7.58. Вертикальный цилиндр делится на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. Под поршнем находится в три раза больше газа, чем над поршнем. При температуре 300 К поршень делит сосуд пополам. Во сколько раз объем газа под поршнем будет больше, чем над поршнем, при температуре 800 К?

7.59. Чему равна плотность смеси 1,5 моль водорода и 2,5 моль кислорода при температуре 27°С и давлении 240 кПа? Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, кислорода 32 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

Изменение количества вещества (17–19)

7.60. На сколько грамм уменьшится масса воздуха в открытом сосуде, если его нагреть от 0°С до 100°С? Начальная масса воздуха 373 г.

7.61. Какова разница в массе воздуха, заполняющего зал объемом в 249 $м^3$ зимой и летом, если летом температура в зале достигает 27°С, а зимой падает до 17°С? Давление зимой и летом 10^5 Па. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К), молярная масса воздуха 29 кг/кмоль.

7.62. В сосуде находится газ под давлением 60 атм. Какое установится давление (в атм), если из сосуда выпустить 7/12 массы содержащегося там газа? Температуру считать постоянной.

7.63. В баллоне находился некоторый газ. Когда часть газа выпустили, температура газа в баллоне уменьшилась в 3 раза, а давление уменьшилось в 4 раза. Какую часть (в процентах) газа выпустили?

7.64. В баллоне находится газ массой 2 кг при температуре 27°С и давлении $2 \cdot 10^5$ Па. Когда часть газа была выпущена, а оставшаяся часть нагрета до 627°С, то давление возросло до $3 \cdot 10^5$ Па. Какова будет плотность оставшейся части газа, если объем баллона 1 $м^3$?

7.65. Два одинаковых сосуда соединены тонкой трубкой. Система наполнена газом и находится при температуре 24°С. Температуру одного из сосудов увеличили на 33°С. На сколько градусов надо уменьшить температуру другого сосуда, чтобы давление в системе не изменилось?

7.66. Три одинаковых сосуда, соединенные тонкими трубками, заполнены газообразным гелием при температуре 40 К. Затем один из сосудов нагрели до 100 К, другой до 400 К, а температура третьего сосуда осталась неизменной. Во сколько раз увеличилось давление в системе?

7.67. В сосуде находится озон O_3 при температуре 727°С. Через некоторое время температура газа понизилась до 127°С, а весь озон превратился в кислород O_2. На сколько процентов понизилось давление в сосуде?

7.68. При увеличении температуры водорода от 300 К до 1350 К все молекулы распались на атомы. Во сколько раз возросла при этом средняя квадратичная скорость частиц газа?

Глава 8

Термодинамика

Примеры решения задач

Задача 1. *При работе электромотора мощностью 400 Вт он нагревается на 10 К за 50 с непрерывной работы. Чему равен КПД (в процентах) мотора? Теплоемкость мотора 500 Дж/К.*

За указанное время τ мотор потребил от сети энергию

$$E = P\tau.$$

Предполагается, что при работе мотора теряется только энергия, которая идет на его нагревание

$$\Delta U = C\Delta T,$$

где C — теплоемкость мотора. Получаем для КПД

$$\eta = \frac{E - \Delta U}{E} = \frac{P\tau - C\,\Delta T}{P\tau} = 0{,}75,$$

т. е. 75%.

Задача 2. *Генератор излучает импульсы сверхвысокой частоты с энергией в каждом импульсе 6 Дж. Частота повторения импульсов 700 Гц. КПД генератора 60%. Сколько литров воды в час надо пропускать через охлаждающую систему генератора, чтобы вода нагрелась не выше, чем на 10 К? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К).*

Полезной энергией в данном случае является суммарная энергия всех импульсов, излученных за время $\tau = 3600$ с

$$E_{\text{пол}} = \varepsilon \cdot \nu\tau,$$

где ε — энергия одного импульса, $\nu\tau$ — число излученных импульсов. Потерянная энергия — энергия, унесенная водой охлаждающей системы

$$E_{\text{пот}} = c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}V\Delta T.$$

Затраченную (полную) энергию найдем, сложив полезную и потерянную, после чего выразим КПД генератора

$$\eta = \frac{E_{\text{пол}}}{E_{\text{пол}} + E_{\text{пот}}} = \frac{\varepsilon \cdot \nu\tau}{\varepsilon \cdot \nu\tau + c_{\text{в}}\,\rho_{\text{в}} V\,\Delta T}.$$

Из полученного уравнения найдем искомый объем воды

$$V = \frac{\varepsilon v \tau (1-\eta)}{\eta c_в \rho_в \Delta T} = 0{,}24 \text{ м}^3 = 240 \text{ л}.$$

Задача 3. *Для нагревания некоторой массы воды от 0°C до 100°C требуется 8400 Дж теплоты. Сколько еще потребуется теплоты (в кДж), чтобы полностью испарить эту воду? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2300 кДж/кг.*

Запишем формулы для теплот, затраченных на нагревание воды и на ее испарение

$$Q_1 = cm\Delta T, \quad Q_2 = rm,$$

где $\Delta T = 100$ К — изменение температуры воды. Выразив массу воды из первого уравнения и подставив во второе, получим

$$Q_2 = Q_1 \frac{r}{c\Delta T} = 46 \text{ кДж}.$$

Задача 4. *Чтобы охладить воду в холодильнике от 33°C до 0°C, потребовалась 21 минута. Сколько времени потребуется, чтобы превратить затем эту воду в лед? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда 3,3·10⁵ Дж/кг. Ответ дать в минутах.*

Для решения задачи надо предположить, что полезная мощность холодильника не меняется, т. е. что от воды отбирается в единицу времени одно и то же количество теплоты — как при ее охлаждении, так и в процессе ее замораживания. Получаем уравнение

$$\frac{cm\Delta T}{\tau_1} = \frac{\lambda m}{\tau_2},$$

где $\Delta T = 33$ К — изменение температуры воды (по модулю). Отсюда находим время, необходимое для замораживания воды

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{\lambda}{c\Delta T} = 50 \text{ мин}.$$

Задача 5. *Вычислите КПД (в процентах) газовой горелки, если в ней используется газ с теплотой сгорания 36 МДж/м³, а на нагревание чайника с 3 л воды от 10°C до кипения было израсходовано 60 л газа. Теплоемкость чайника 600 Дж/К. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К).*

КПД равен отношению полезной теплоты (пошедшей на нагревание чайника и воды) к затраченной энергии (выделенной при сгорании газа)

$$\eta = \frac{c_в m \Delta T + C \Delta T}{q V_г} = 0{,}55,$$

где $m = \rho V_в = 3$ кг — масса воды, q — удельная теплота сгорания газа, $V_г$ — его объем, C — теплоемкость чайника, $\Delta T = 90$ К — разность между температурой кипения воды и начальной температурой. Ответ для КПД в процентах: 55%.

Задача 6. *Чему равна высота водопада, если температура воды у его основания на 0,05°С больше, чем у вершины? Считать, что вся механическая энергия идет на нагревание воды. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), $g = 10$ м/с^2.*

В результате падения механическая энергия воды превращается в ее внутреннюю энергию, в результате чего вода нагревается. Запишем закон сохранения энергии для произвольно взятой массы воды

$$mgh = cm\Delta T.$$

Сократив массу воды, найдем высоту водопада

$$h = \frac{c\Delta T}{g} = 21 \text{ м}.$$

Задача 7. *На какую высоту можно было бы поднять груз массой 100 кг, если бы удалось полностью превратить в работу энергию, выделяющуюся при охлаждении стакана воды от 100°С до 20°С? Масса воды в стакане 250 г, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), теплоемкость стакана не учитывать. $g = 10$ м/с^2.*

Приравняем энергию, выделяющуюся при остывании воды, к изменению потенциальной энергии груза

$$cm\Delta T = Mgh,$$

где $\Delta T = 80$ К — изменение температуры воды. Получаем

$$h = \frac{cm\Delta T}{Mg} = 84 \text{ м}.$$

Этот удивительный результат наглядно демонстрирует соотношение между тепловой (внутренней) и механической энергией. К сожалению, законы природы (второй закон термодинамики) позволяют превращать в механическую лишь небольшую часть тепловой энергии.

Задача 8. *Тело соскальзывает с наклонной плоскости длиной 260 м и углом наклона 60°. Коэффициент трения о плоскость 0,2. Определите, на сколько градусов повысится температура тела, если на его нагревание идет 50% выделившегося тепла. Удельная теплоемкость материала, из которого сделано тело, равна 130 Дж/(кг·К). $g = 10$ м/с^2.*

Полное приращение внутренней энергии равно величине работы силы трения

$$\Delta U = F_{тр}s = (\mu mg\cos\alpha)s.$$

Половина этой энергии идет на нагревание тела

$$\frac{1}{2}(\mu mg\cos\alpha)s = cm\Delta T.$$

Получаем

$$\Delta T = \frac{\mu gs\cos\alpha}{2c} = 1\ \text{К}.$$

Задача 9. *Два одинаковых шарика, сделанных из вещества с удельной теплоемкостью 450 Дж/(кг·К), движутся навстречу друг другу со скоростями 40 м/с и 20 м/с. Определите, на сколько градусов они нагреются в результате неупругого столкновения.*

Запишем закон сохранения энергии с учетом приращения внутренней (тепловой) энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{(2m)u^2}{2} + \Delta U\ ,$$

где u — конечная скорость шариков после неупругого удара. Эту скорость найдем из закона сохранения импульса

$$mv_1 - mv_2 = (2m)u.$$

Для приращения внутренней энергии получаем

$$\Delta U = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4}\ .$$

Эта энергия идет на нагревание составного тела массой $2m$

$$\frac{m(v_1 + v_2)^2}{4} = c(2m)\Delta T\ .$$

Получаем

$$\Delta T = \frac{(v_1 + v_2)^2}{8c} = 1\ \text{К}.$$

Задача 10. *С какой высоты (в км) должен падать оловянный шарик, чтобы при ударе о поверхность он полностью расплавился? Считать, что 50% энергии шарика идет на его нагревание и плавление. Начальная температура шарика 32°С. Температура плавления олова 232°С, его удельная теплоемкость 200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления 58 кДж/кг. g = 9,8 м/с².*

Уменьшение механической энергии при падении и неупругом ударе шарика равно его начальной потенциальной энергии. В соответствии с законом сохранения энергии именно на столько возросла внутренняя энергия системы воздух-шарик-Земля:

$$\Delta U = mgh.$$

Половина этой энергии идет на приращение внутренней энергии шарика, в результате чего происходит его нагревание и плавление

$$\frac{1}{2}mgh = cm\Delta T + \lambda m,$$

где ΔT = 200 К — разница между температурой плавления и начальной температурой шарика. Получаем

$$h = \frac{2(c\Delta T + \lambda)}{g} = 20 \text{ км}.$$

Задача 11. *Для приготовления ванны емкостью 200 л смешали холодную воду при 10°С с горячей при 60°С. Сколько литров холодной воды нужно взять, чтобы в ванне установилась температура 40°С?*

Закон сохранения энергии при теплообмене между телами теплоизолированной системы имеет вид

$$Q_1 + Q_2 + ... = 0 \quad \text{(уравнение теплового баланса)}.$$

При этом положительной считаются теплота, полученная телом, отрицательной — отданная. В отсутствие фазовых превращений уравнение теплового баланса записывается автоматически для любого числа тел

$$c_1 m_1 (t^* - t_1) + c_2 m_2 (t^* - t_2) + \ldots = 0,$$

где t^* — температура теплового равновесия. В данной задаче, учитывая, что $m_1 = \rho V_1$ и $m_2 = \rho V_2$, получим

$$V_1 (t^* - t_1) + V_2 (t^* - t_2) = 0.$$

Учитывая, что

$$V_1 + V_2 = V,$$

где V — объем ванны, находим

$$V_1 = V\frac{t_2 - t^*}{t_2 - t_1} = 80 \text{ л}.$$

Задача 12. *Термометр, показывающий температуру 22°С, опускают в воду, после чего он показывает температуру 70°С. Чему была равна температура (в °С) воды до погружения термометра? Масса воды 40 г, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), теплоемкость термометра 7 Дж/К.*

Уравнение теплового баланса (см. реш. 11) имеет для данной задачи вид

$$c_в m_в (t^* - t_в) + C_т (t^* - t_т) = 0,$$

где t^* — температура теплового равновесия (показание термометра после опускания в воду), $t_в$ — начальная температура воды, $t_т$ — начальная температура термометра (его показание до опускания). Получаем

$$t_в = t^* + \frac{C_т (t^* - t_т)}{c_в m_в} = 72°\text{C}.$$

Замечание. Первый член в уравнении теплового баланса — отрицательный (вода отдает тепло). Можно записывать это уравнение в виде «сумма полученных теплот равна сумме отданных»

$$C_т (t^* - t_т) = c_в m_в (t_в - t^*),$$

тогда справа и слева от знака равенства будут стоять положительные числа. Однако первый подход удобен (в отсутствие фазовых превращений) своим автоматизмом: не надо думать о том, какое тело нагревается, какое охлаждается (смотри, например, следующую задачу).

Задача 13. *В калориметре смешиваются три химически не взаимодействующие незамерзающие жидкости массами 1 кг, 10 кг и 5 кг с удельными теплоемкостями 2, 4 и 2 кДж/(кг·К) соответственно. Температуры первой и второй жидкостей до смешивания были 6°С и –40°С. Температура смеси стала равной –19°С. Найдите температуру (в °С) третьей жидкости до смешивания.*

Уравнение теплового баланса (см. реш. 11) имеет вид

$$c_1 m_1 (t^* - t_1) + c_2 m_2 (t^* - t_2) + c_3 m_3 (t^* - t_3) = 0.$$

Решая уравнение, находим t_3

$$t_3 = \frac{c_1 m_1(t^* - t_1) + c_2 m_2(t^* - t_2)}{c_3 m_3} + t^* = 60°\text{C}.$$

Задача 14. *В сосуд, содержащий 9 кг воды при 20°С, вводится 1 кг пара при 100°С, который превращается в воду. Определите конечную температуру (в °С) воды. Теплоемкость сосуда и потери теплоты не учитывать. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2{,}1 \cdot 10^6$ Дж/кг.*

Составляя уравнение теплового баланса, надо учитывать, что при конденсации пара происходит выделение тепла, т.е. соответствующий член надо писать со знаком «минус»

$$c_в m_в(t^* - t_в) - r m_п + c_в m_п(t^* - t_п) = 0\,,$$

где $t_п$ = 100°С — температура пара. Для температуры теплового равновесия получаем

$$t^* = \frac{c_в(m_в t_в + m_п t_п) + r m_п}{c_в(m_в + m_п)} = 78°\text{C}.$$

Такое же уравнение получим, приравняв теплоту, полученную водой при нагревании, к теплоте, отданной паром при конденсации и последующем охлаждении (уже в виде воды)

$$c_в m_в(t^* - t_в) = r m_п + c_в m_п(t_п - t^*)\,.$$

Задача 15. *Ванну емкостью 85 л необходимо заполнить водой, имеющей температуру 30°С, используя воду при 80°С и лед при температуре –20°С. Определите массу льда, который следует положить в ванну. Удельная теплота плавления льда 336 кДж/кг, удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К).*

Лед сначала нагревается до температуры плавления t_0 = 0°С, затем плавится при постоянной температуре, после чего нагревается (в виде воды) до температуры теплового равновесия. Полученную в этих процессах теплоту надо приравнять к теплоте, которую отдает вода при охлаждении

$$c_л m_л(t_0 - t_л) + \lambda m_л + c_в m_л(t^* - t_0) = c_в m_в(t_в - t^*)\,.$$

Полная ванна воды получится при условии

$$m_л + m_в = \rho_в V,$$

где V — объем ванны. Решая полученную систему, получаем

$$m_л = \frac{c_в(t_в - t^*)}{c_л(t_0 - t_л) + \lambda + c_в(t_в - t_0)} \rho_в V = 25 \text{ кг}.$$

Задача 16. *В сосуде имеется некоторое количество воды и такое же количество льда в состоянии теплового равновесия. Через сосуд пропускают водяной пар при температуре 100°С. Найдите установившуюся температуру воды в сосуде, если масса пропущенного пара равна первоначальной массе воды. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.*

Когда начальное состояние системы содержит несколько фаз, фазовый состав конечного состояния, в которое перейдет система в результате теплообмена, зависит от начальных условий. Если, например, начальное состояние содержит, как в данной задаче, лед с водой и пар, конечное состояние может содержать: а) лед и воду при $t^* = 0°\text{C}$, б) воду при $0°\text{C} \le t^* \le 100°\text{C}$, в) воду и пар при $t^* = 100°\text{C}$. Исходя из условия задачи, предположим, что реализуется промежуточный случай б). Тогда уравнение теплового баланса имеет вид

$$\lambda m_л + c_в(m_л + m_в)(t^* - t_0) - rm_п + c_в m_п(t^* - t_к) = 0,$$

где $t_0 = 0°\text{C}$ — температура плавления льда, $t_к = 100°\text{C}$ — температура конденсации пара. Получаем

$$t^* = \frac{(m_л + m_в)t_0 + m_п t_к}{m_л + m_в + m_п} + \frac{rm_п - \lambda m_л}{c_в(m_л + m_в + m_п)} = \frac{2t_0 + t_к}{3} + \frac{r - \lambda}{3c_в} = 189{,}7°\text{C}$$

(мы учли, что массы пара, воды и льда равны друг другу). Что означает полученный бессмысленный результат? Он сигнализирует, что неправильным было изначальное предположение о конечном состоянии, и написанное нами уравнение, верное только в случае б), привело к бессмысленному ответу. Однако то, что температура получилась больше 100°С, позволяет сделать вывод, что в конечном состоянии имеется пар в тепловом равновесии с водой при 100°С (случай в)). Это и есть ответ задачи ($t^* = 100°\text{C}$).

Задача 17. *В цилиндре с площадью основания 100 см^2 находится газ при температуре 300 К. На высоте 30 см от основания цилиндра расположен поршень массой 60 кг. Какую работу совершит газ при расширении, если его температуру медленно повысить на 50°С? Атмосферное давление 100 кПа, g = 10 м/с^2.*

Давление газа остается при расширении постоянным — оно определяется величиной атмосферного давления и массой поршня (см. Глава 7 реш. 5)

$$p = p_{атм} + \frac{m_п g}{S}.$$

Работа газа при изобарном процессе равна

$$A = p(V_2 - V_1),$$

где начальный объем равен $V_1 = Sh_1$, а конечный объем найдем из уравнения изобарного процесса

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

($T_2 = T_1 + \Delta T$). Получаем

$$A = \left(p_{атм} + \frac{m_п g}{S}\right) Sh_1 \frac{\Delta T}{T_1} = 80 \text{ Дж}.$$

Задача 18. *Один моль газа изохорно охладили так, что его давление уменьшилось в 5 раз, а затем изобарно нагрели до начальной температуры 400 К. Какую работу совершил газ? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

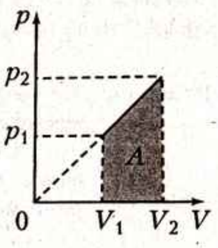
Газ совершает работу только при изобарном нагревании, так как в изохорном процессе работа газа равна нулю. Для вычисления работы при постоянном давлении в этой задаче удобнее использовать выражение

$$A = \nu R\Delta T = \nu R(T - T/5) = 2656 \text{ Дж},$$

где для определения промежуточной температуры мы воспользовались уравнением изохорного процесса ($p/T = \text{const}$).

Задача 19. *Идеальный газ в количестве 4 моль расширяют так, что его давление изменяется прямо пропорционально объему. Чему равна работа газа при увеличении его температуры на 10 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

Работа газа в процессе с переменным давлением равна площади под графиком процесса в координатах p–V. В случае линейной зависимости давления от объема площадь полученной трапеции равна



$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2} + \frac{p_1V_2 - p_2V_1}{2}.$$

Так как давление изменяется пропорционально объему, то $p_2/p_1 = V_2/V_1$, и второй член обращается в ноль. С учетом уравнения Менделеева—Клапейрона получаем

$$A = 0{,}5(\nu RT_2 - \nu RT_1) = 0{,}5\nu R\Delta T = 166 \text{ Дж}.$$

Задача 20. *В изотермическом процессе газ совершил работу 1000 Дж. На сколько увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты, вдвое большее, чем в первом процессе, а процесс проводить изохорно?*

Запишем первый закон термодинамики для первого и второго процессов

$$Q_1 = A_1, \quad Q_2 = \Delta U_2,$$

где учтено, что в изотермическом процессе не меняется внутренняя энергия идеального газа, а в изохорном — равна нулю совершенная газом работа. Учитывая, что $Q_2 = 2Q_1$, получаем

$$\Delta U_2 = 2A_1 = 2000 \text{ Дж}.$$

Задача 21. *Для нагревания некоторого количества идеального газа с молярной массой 28 кг/кмоль на 14 К при постоянном давлении потребовалось 29 Дж теплоты. Чтобы затем охладить этот же газ до исходной температуры при постоянном объеме, у него надо отнять 20,7 Дж теплоты. Найдите массу (в г) газа. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

Запишем первый закон термодинамики сразу для двух последовательных процессов — изобарного и изохорного. Так как конечная температура по условию равна начальной, то изменение внутренней энергии равно нулю (внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры)

$$Q_1 - Q_2 = A.$$

Газ совершает работу только в изобарном процессе, т. е.

$$A = \nu R\Delta T.$$

Получаем

$$Q_1 - Q_2 = \frac{m}{\mathrm{M}} R\Delta T,$$

откуда находим массу газа

$$m = \frac{\mathrm{M}(Q_1 - Q_2)}{R\Delta T} = 2 \text{ г}.$$

Задача 22. *Некоторое количество идеального одноатомного газа при изобарном нагревании получает 10 Дж теплоты. Какую работу совершит этот газ при адиабатическом охлаждении до первоначальной температуры?*

Запишем первый закон термодинамики для первого (изобарного) процесса

$$Q_1 = \Delta U_1 + A_1 = \frac{3}{2}\nu R\Delta T + \nu R\Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T.$$

Мы учли, что внутренняя энергия идеального одноатомного газа равна

$$U = \frac{3}{2}\nu RT.$$

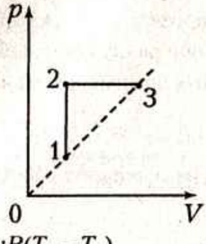
При адиабатическом процессе теплообмен отсутствует, и первый закон термодинамики приобретает вид

$$0 = \Delta U_2 + A_2.$$

Поскольку в результате двух процессов газ вернулся к первоначальной температуре, то полное изменение внутренней энергии равно нулю. Получаем

$$A_2 = -\Delta U_2 = \Delta U_1 = \frac{3}{5}Q_1 = 6\ \text{Дж}.$$

Задача 23. *Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль нагрели сначала изохорно, а затем изобарно. В результате как давление, так и объем газа увеличились в два раза. Какое количество теплоты получил газ в этих двух процессах, если его начальная температура была 100 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*



После изохорного процесса температура газа $T_2 = \alpha T_1$ ($\alpha = 2$), а после изобарного — $T_3 = \alpha T_2 = \alpha^2 T_1$. В изохорном процессе работа газа равна нулю, поэтому

$$Q_1 = \Delta U_1 = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1),$$

а в изобарном процессе

$$Q_2 = \Delta U_2 + A = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2) + \nu R(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

Подставляя T_2 и T_3, получаем

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0{,}5(\alpha - 1)(5\alpha + 3)\nu RT_1 = 5395\ \text{Дж}.$$

Замечание. Из написанных формул видно, что теплоемкость одного моля в изохорном процессе $C_{\mu V} = 1{,}5R$, а в изобарном — $C_{\mu p} = 2{,}5R$.

Задача 24. *Два теплоизолированных сосуда одинакового объема соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде находится гелий при температуре 200 К, а в другом — гелий при температуре 400 К и при давлении в 3 раза большем, чем в первом сосуде. Какой станет температура газа после открывания крана и установления теплового равновесия?*

Обозначим p_1 и T_1 давление и температуру в первом сосуде, p_2 и T_2 — во втором. Конечное давление узнаем, записав закон сохранения энергии: $U_1 + U_2 = U'$, т. е.

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{3}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}\nu' RT'$$

(штрихами обозначены параметры конечного состояния), или

$$p_1V_1 + p_2V_2 = p'(V_1 + V_2).$$

С учетом того, что $V_1 = V_2$ и $p_2 = 3p_1$, получаем $p' = 2p_1$. Чтобы найти конечную температуру, запишем условие сохранения количества вещества: $\nu_1 + \nu_2 = \nu'$, т. е.

$$\frac{p_1V_1}{RT_1} + \frac{p_2V_2}{RT_2} = \frac{p'(V_1 + V_2)}{RT'},$$

откуда после подстановки давлений и объемов получим

$$T' = \frac{4T_1T_2}{T_2 + 3T_1} = 320\text{ К}.$$

Замечание. Заметим, что конечное давление газа в данном примере не зависит от начальных температур, а определяется только начальными давлениями. Это — проявление того факта, что внутренняя энергия единицы объема идеального одноатомного газа зависит только от давления: $U/V = (3/2)p$.

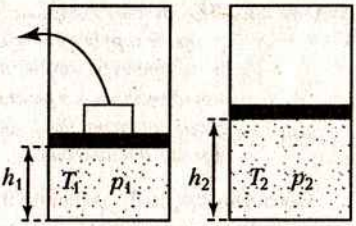
Задача 25. *В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 240 К. На поршне лежит груз массой, равной половине массы поршня. Груз мгновенно убирают и дожидаются прихода системы к равновесию. Чему станет равна температура (в кельвинах) газа? Над поршнем газа нет.*

Запишем условие механического равновесия поршня в начальном и конечном состояниях

$$p_1S = m_1g, \quad p_2S = m_2g,$$

(m_2 — масса поршня, $m_1 = (3/2)m_2$ — масса поршня с грузом) и уравнение состояния газа в этих состояниях

$$p_1(Sh_1) = \nu RT_1, \quad p_2(Sh_2) = \nu RT_2.$$



Из этих уравнений выразим начальную и конечную высоту поршня

$$h_1 = \frac{\nu RT_1}{m_1 g}, \quad h_2 = \frac{\nu RT_2}{m_2 g}$$

и подставим в закон сохранения энергии для системы (газ + поршень)

$$\frac{3}{2}\nu RT_1 + m_2 gh_1 = \frac{3}{2}\nu RT_2 + m_2 gh_2.$$

Получим

$$T_2 = \frac{(3/2) + (m_2/m_1)}{(5/2)} T_1 = \frac{26}{30} T_1 = 208 \text{ К}.$$

Задача 26. *Рабочее тело идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, получает от нагревателя с температурой 273°С количество теплоты 80 кДж. Роль холодильника играет окружающий воздух, температура которого 0°С. На какую максимальную высоту эта машина может поднять груз массой 400 кг? $g = 10$ м/с^2.*

КПД идеальной тепловой машины равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0{,}5.$$

Работа, произведенная этой машиной, равна $A = \eta Q_1 = 40$ кДж. Если вся эта работа пойдет на увеличение потенциальной энергии груза, т. е.

$$A = mgh,$$

то для высоты получим

$$h = \frac{A}{mg} = 10 \text{ м}.$$

Задача 27. *Два моля газа изобарно нагревают от 400 К до 800 К, затем изохорно охлаждают до 500 К. Далее газ охлаждают изобарно так, что его объем уменьшается до первоначального. Наконец, газ изохорно нагревают до 400 К. Найдите работу, совершенную газом в этом цикле. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

Газ совершает работу только в изобарных процессах 1–2 и 3–4. В процессе 1–2 газ совершает положительную работу

$$A_{1-2} = \nu R(T_2 - T_1).$$

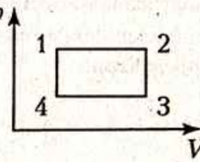
В процессе 3–4 работа газа отрицательна

$$A_{3-4} = \nu R(T_4 - T_3).$$

Чтобы найти недостающую температуру T_4, запишем уравнения двух изобарных процессов

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \text{и} \quad \frac{V_3}{T_3} = \frac{V_4}{T_4}.$$

Учитывая, что $V_3 = V_2$ и $V_4 = V_1$, получим



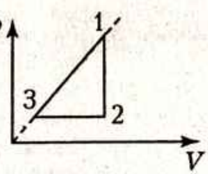
$$\frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Окончательно, работа газа за цикл равна

$$A = A_{1-2} + A_{3-4} = \nu R(T_2 - T_1 + T_3\frac{T_1}{T_2} - T_3) = \nu R\frac{(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} = 2490 \text{ Дж}.$$

Задача 28. *Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из изохорного охлаждения, при котором давление газа уменьшается в четыре раза, затем изобарного сжатия и, наконец, возвращения в исходное состояние в процессе, в котором давление изменяется прямо пропорционально объему. Найдите КПД (в процентах) цикла.*

Обозначим минимальную температуру газа в цикле $T_3 = T$, тогда температура перед изобарным сжатием равна $T_2 = \alpha T$ ($\alpha = 4$), а перед изохорным охлаждением $T_1 = \alpha^2 T$. Газ получает теплоту на участке 3–1, где давление изменяется пропорционально объему. Работа в таком процессе вычислялась в реш. 19: $A_{3-1} = 0{,}5\nu R(T_1 - T_3)$, изменение внутренней энергии равно $\Delta U_{3-1} = 1{,}5\nu R(T_1 - T_3)$. Получаем



$$Q_{3-1} = \Delta U_{3-1} + A_{3-1} = 2\nu R(T_1 - T_3) = 2\nu RT(\alpha^2 - 1).$$

Работа за цикл равна

$$A = A_{3-1} + A_{2-3} = 0{,}5\nu R(T_1 - T_3) + \nu R(T_3 - T_2) = 0{,}5\nu RT(\alpha - 1)^2.$$

КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{3-1}} = \frac{\alpha - 1}{4(\alpha + 1)} = 0{,}15,$$

т. е. 15%.

Задача 29. *Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, использует в качестве холодильника тающий лед при температуре 0°C, а в качестве нагревателя — кипящую воду при 100°C. Какая масса (в г) льда образуется при получении от сети энергии 25 кДж? Удельная теплота плавления льда $3{,}25 \cdot 10^5$ Дж/кг.*

При работе идеальной тепловой машины в обратном направлении все происходит в обратном порядке: машина забирает теплоту Q_2 у холодильника и отдает теплоту Q_1 нагревателю, потребляя при этом работу A (в виде энергии, полученной от сети). Соотношение между работой A, потребленной холодильной машиной, и теплотой Q_1, отданной ей нагревателю, такое же, как в прямом цикле Карно

$$\frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 и T_2 — абсолютные температуры нагревателя и холодильника. Учитывая, что $Q_1 = Q_2 + A$, получим соотношения

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{и} \quad \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

Для получения массы льда m надо забрать $Q_2 = \lambda m$ теплоты (λ — удельная теплота плавления). Выражая из этих соотношений массу льда, получаем

$$m = \frac{A}{\lambda} \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 210 \text{ г.}$$

Задача 30. *Какую массу (в г) воды надо дополнительно испарить в комнате объемом 49,8 м^3, чтобы при температуре 27°C повысить относительную влажность от 25% до 50%? Давление насыщенных паров воды при температуре 27°C равно 3,6 кПа, молярная масса воды 18 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона выразим массу насыщенного пара в комнате

$$m_н = \frac{p_н V \text{M}}{RT},$$

откуда найдем разницу между конечной и начальной массой пара

$$\Delta m = (\varphi_2 - \varphi_1) m_н = 324 \text{ г}$$

($\varphi_1 = 0{,}25$ и $\varphi_2 = 0{,}5$ — начальная и конечная относительные влажности).

Задача 31. *В закрытой теплице объемом 33,2 м^3 относительная влажность в дневное время при температуре 27°C была равна 75%. Какая масса (в г) росы выпадет в теплице ночью, когда температура понизится до 15°C? Давление насыщенных паров воды при температуре 27°C равно 3,6 кПа, при температуре 15°C — 1,7 кПа. Молярная масса воды 18 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).*

С помощью уравнения Менделеева—Клапейрона выразим массу насыщенного пара в объеме теплицы в начальном и конечном состояниях

$$m_{н1} = \frac{p_{н1}VM}{RT_1}, \quad m_{н2} = \frac{p_{н2}VM}{RT_2}$$

и найдем, насколько масса пара в начальном состоянии больше, чем масса насыщенного пара — в конечном

$$\Delta m = \varphi_1 m_{н1} - m_{н2} = 223 \text{ г}$$

($\varphi_1 = 0{,}75$ — относительная влажность в начальном состоянии).

Задача 32. *В сосуде при температуре 100°C находится влажный воздух с относительной влажностью 40% под давлением 1 атм. Объем сосуда изотермически уменьшили в 5 раз. Чему будет равно конечное давление (в атм)? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.*

Поскольку давление насыщенного пара при 100°C равно 1 атм, то при относительной влажности 40% давление пара 0,4 атм. Из закона Дальтона (формула (39)) следует, что давление воздуха 0,6 атм. При изотермическом уменьшении объема в 5 раз давление воздуха станет 3 атм, а пар станет насыщенным (это произойдет уже при сжатии в 2,5 раза) и его давление будет 1 атм. Полное давление станет 4 атм.

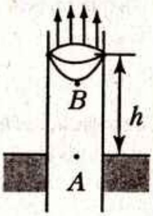
Задача 33. *В сосуде объемом 10 л находится влажный воздух с относительной влажностью 40% под давлением 1 атм. На сколько процентов возрастет давление, если в сосуд дополнительно ввести 4 г воды? Температура в сосуде поддерживается равной 100°C. Универсальная газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К).*

В начальном состоянии давление складывается из давления пара 0,4 атм (см. предыдущую задачу) и давления воздуха 0,6 атм. Чтобы узнать, будет ли пар насыщенным после добавления воды, вычислим, сколько надо добавить воды для получения насыщенного пара

$$\Delta m = (1 - \varphi)\frac{p_0 VM}{RT} = 3{,}48 \text{ г.}$$

Здесь $p_0 = 10^5$ Па — атмосферное давление, $\varphi = 0{,}4$ — относительная влажность. После добавления 4 г воды пар будет насыщенным, полное давление станет 1,6 атм, т. е. возрастет на 60%.

Задача 34. *Определите внутренний радиус (в мм) капиллярной трубки, если вода в ней поднялась на высоту 14,4 мм. Вода полностью смачивает стекло капиллярной трубки. Коэффициент поверхностного натяжения воды 72 мН/м. $g = 10$ м/с^2.*



При полном смачивании сила поверхностного натяжения, приложенная к границе мениска (мениском называют искривленную поверхность жидкости в капилляре), направлена вертикально вверх и равна $F = \sigma\cdot(2\pi r)$. Эта сила уравновешивает силу тяжести, действующую на столб воды,

$$\sigma\cdot(2\pi r) = \rho g(\pi r^2 h).$$

Отсюда получается формула для высоты поднятия жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

Отсюда выражаем радиус капилляра

$$r = \frac{2\sigma}{\rho g h} = 2 \text{ мм}.$$

Замечание 1. Если поверхность смачивается не полностью, то поверхность жидкости подходит к поверхности капилляра под углом θ (краевой угол), и выражения для поверхностной силы и для высоты подъема следует умножить на $\cos\theta$. При полном несмачивании $\cos\theta = -1$, и уровень жидкости в капилляре ниже уровня в сосуде.

Замечание 2. Отметим, что давление жидкости под вогнутой сферической поверхностью меньше внешнего давления на величину

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$$

(формула Лапласа). Поскольку на уровне жидкости в сосуде давление равно внешнему, то разность между давлением в точке A и давлением под мениском в точке B равна давлению столба жидкости: $\Delta p = \rho g h$. Наоборот, давление под выпуклой поверхностью (несмачивание) больше внешнего на Δp.

Задача 35. *В одинаковых капиллярных трубках вода поднялась на 144 мм, а спирт на 55 мм. Считая смачивание полным, найдите по этим* *данным плотность спирта. Коэффициент поверхностного натяжения воды 72 мН/м, спирта 22 мН/м.*

Записав для этих двух жидкостей формулу для высоты поднятия в капилляре

$$h_в = \frac{2\sigma_в}{\rho_в g r}, \quad h_{сп} = \frac{2\sigma_{сп}}{\rho_{сп} g r}$$

и исключив радиус капилляра, получим

$$\rho_{сп} = \rho_в \frac{\sigma_{сп}}{\sigma_в} \frac{h_в}{h_{сп}} = 800 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 36. *На некоторой планете вода поднялась по капиллярной трубке на 8 мм, а на Земле по той же трубке на 12 мм. Чему равно ускорение свободного падения на этой планете? $g = 10$ м/с^2.*

Записав для этих двух случаев формулу для высоты поднятия в капилляре

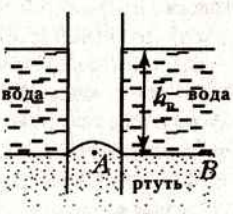
$$h_п = \frac{2\sigma}{\rho g_п r}, \quad h_з = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

и поделив эти уравнения друг на друга, выразим ускорение свободного падения на планете

$$g_п = g \frac{h_з}{h_п} = 15 \text{ м/с}^2.$$

Задача 37. *В капиллярной трубке, опущенной в сосуд с ртутью, уровень на 15 мм ниже, чем в сосуде. В сосуд поверх ртути наливают воду, в результате чего уровни ртути сравниваются. Найдите высоту (в мм) слоя воды. Плотность ртути в 13,6 раз больше плотности воды.*

Давления в точках ртути A и B должны быть равны. Давление под выпуклым мениском в точке A больше атмосферного на



$$\Delta p = \frac{2\sigma_{рт}}{r} = \rho_{рт} g h_{рт}$$

(см. замечание 2 к реш. 34), а в точке B — на давление столба воды $\rho_в g h_в$. Получаем

$$h_в = \frac{\rho_{рт}}{\rho_в} h_{рт} = 204 \text{ мм}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычисление количества теплоты. КПД нагревателя

а) нагревание и охлаждение (1–2)

8.1. Какая масса ртути имеет такую же теплоемкость, как 13 кг спирта? Удельная теплоемкость спирта 2440 Дж/(кг·К), удельная теплоемкость ртути 130 Дж/(кг·К).

8.2. При трении друг о друга двух одинаковых тел их температура через одну минуту повысилась на 30°С. Какова средняя мощность, развиваемая в обоих телах при трении? Теплоемкость каждого тела 800 Дж/К.

8.3. На электроплитке мощностью 600 Вт 3 л воды нагреваются до кипения за 40 минут. Начальная температура воды 20°С. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К). Определите КПД (в процентах) установки.

8.4. При сверлении металла ручной дрелью сверло массой 0,05 кг нагрелось на 20°С за 200 с непрерывной работы. Средняя мощность, потребляемая дрелью от сети при сверлении, равна 10 Вт. Сколько процентов затраченной энергии пошло на нагревание сверла, если удельная теплоемкость материала сверла 460 Дж/(кг·К)?

8.5. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков его КПД (в процентах), если при полной мощности 60 кВт масло массой 60 кг нагревается на 30°С за 4 минуты работы трансформатора? Удельная теплоемкость масла 2000 Дж/(кг·К).

б) фазовые превращения (3–5)

8.6. Сколько льда, взятого при температуре 0°С, можно расплавить, сообщив ему энергию 0,66 МДж? Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

8.7. При отвердевании 100 кг стали при температуре плавления выделилось 21 МДж теплоты. Какова удельная теплота плавления (в кДж/кг) стали?

8.8. Какое количество теплоты (в кДж) надо сообщить 2 кг льда, взятого при температуре −10°С, чтобы полностью его растопить? Удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

8.9. Для того чтобы превратить некоторое количество льда, взятого при температуре −50°С, в воду с температурой 50°С, требуется 645 кДж энергии. Чему равна масса льда? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

8.10. Какое количество теплоты (в кДж) необходимо для превращения в пар 0,1 кг кипящей воды? Удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг.

8.11. Сколько теплоты (в кДж) выделится при конденсации 0,2 кг водяного пара при температуре 100°С? Удельная теплота парообразования воды $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

8.12. Какое количество теплоты (в кДж) нужно сообщить 1 кг воды, взятой при 0°С, чтобы нагреть ее до 100°С и полностью испарить? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

8.13. Для нагревания воды, взятой при температуре 20°С, и обращения ее в пар израсходовано 2596 кДж энергии. Определите массу воды. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,26 МДж/кг.

8.14. Для расплавления одной тонны стали используется электропечь мощностью 100 кВт. Сколько минут продолжается плавка, если слиток до начала плавления надо нагреть на 1500 К? Удельная теплоемкость стали 460 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления стали 210 кДж/кг.

8.15. Сосуд с водой нагревают на электроплитке от 20°С до кипения за 20 минут. Сколько еще нужно времени (в минутах), чтобы 42% воды обратить в пар? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2{,}2\cdot10^6$ Дж/кг.

8.16. Для работы паровой машины расходуется 210 кг угля за 1 час. Охлаждение машины осуществляется водой, которая на входе имеет температуру 17°С, а на выходе 27°С. Определите расход воды (в кг) за 1 с, если на ее нагревание идет 24% общего количества теплоты. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота сгорания угля 30 МДж/кг.

8.17. На сколько километров пути хватит 10 кг бензина для двигателя автомобиля, развивающего при скорости 54 км/час мощность 69 кВт и имеющего КПД 40%? Удельная теплота сгорания бензина $4{,}6\cdot10^7$ Дж/кг.

Взаимные превращения механической и внутренней энергии (6–10)

8.18. При неупругом ударе о стенку пуля, имевшая скорость 50 м/с, нагрелась на 10°С. Считая, что пуля получила всю выделившуюся при ударе энергию, найдите удельную теплоемкость материала пули.

8.19. Две одинаковые пули ударяются о стенку. Первая пуля нагревается на 0,5 К, вторая — на 8 К. Во сколько раз скорость второй пули больше, чем первой, если вся энергия пуль расходуется на их нагревание?

8.20. Пуля, обладающая кинетической энергией 100 Дж, ударилась о стенку и нагрелась на 0,5 К. Какая часть (в процентах) энергии пули пошла на ее нагревание, если теплоемкость пули равна 20 Дж/К?

8.21. Молот массой 2000 кг падает с высоты 1 м на металлическую болванку массой 2 кг. В результате удара температура болванки возрастает на 25°С. Считая, что на нагревание болванки идет 50% всей выделившейся энергии, найдите удельную теплоемкость материала болванки. $g = 10$ м/с^2.

8.22. Пластилиновый шар бросают со скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту по направлению к вертикальной стене, находящейся на расстоянии 8 м от точки бросания (по горизонтали). На сколько градусов (в мК) нагреется шар, если он прилипнет к стене? Считать, что вся кинетическая энергия шара пошла на его нагревание. Удельная теплоемкость пластилина 250 Дж/(кг·К). $g = 10$ м/с^2.

8.23. Свинцовая пуля, летевшая со скоростью 500 м/с, пробивает стенку. Определите, на сколько градусов нагрелась пуля, если ее скорость уменьшилась до 300 м/с. Считать, что на нагревание пули пошло 50% выделившейся теплоты. Удельная теплоемкость свинца 160 Дж/(кг·К).

8.24. Пуля, летевшая горизонтально со скоростью 500 м/с, пробивает насквозь доску на высоте 20 см от земли. При этом температура пули увеличилась на 200°С.

Считая, что на нагревание пули пошла вся выделившаяся при ударе теплота, найдите, на каком расстоянии (по горизонтали) от места удара пуля упала на землю. Удельная теплоемкость материала пули 400 Дж/(кг·К). $g = 10$ м/с^2.

8.25. Пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, попадает в деревянный брусок массой 990 г, подвешенный на нити, и застревает в нем. На сколько градусов нагреется пуля, если на ее нагревание пошло 50% выделившегося тепла? Удельная теплоемкость материала пули 200 Дж/(кг·К).

8.26. С какой скоростью должна лететь пуля, чтобы при ударе о стенку она расплавилась? Удельная теплоемкость материала пули 130 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления 22,25 кДж/кг, температура плавления 327°С. Температура пули до удара 152°С. Считать, что на нагревание пули пошла вся выделившаяся при ударе теплота.

8.27. С какой скоростью должна вылететь из ружья свинцовая дробинка при выстреле вертикально вниз с высоты 300 м, чтобы при ударе о неупругое тело дробинка расплавилась? Считать, что теплота, выделившаяся при ударе, поровну распределяется между дробинкой и телом. Начальная температура дробинки 177°С. Температура плавления свинца 327°С, его удельная теплоемкость 130 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления 22 кДж/кг. $g = 10$ м/с^2.

8.28. При выстреле из ружья дробь массой 45 г вылетает со скоростью 600 м/с. Сколько процентов от энергии, освободившейся при сгорании порохового заряда массой 9 г, составляет кинетическая энергия дроби? Удельная теплота сгорания пороха 3 МДж/кг.

8.29. Двигатель реактивного самолета с КПД 20% при полете со скоростью 1800 км/ч развивает силу тяги 86 кН. Определите расход (в т) керосина за 1 час полета. Теплота сгорания керосина $4{,}3 \cdot 10^7$ Дж/кг.

8.30. Заряд дальнобойной пушки содержит 150 кг пороха. Масса снаряда 420 кг. Какова максимально возможная дальность полета (в км) снаряда, если КПД орудия 25%? Удельная теплота сгорания пороха 4,2 МДж/кг. $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать.

Уравнение теплового баланса

а) нагревание и охлаждение (11–13)

8.31. В калориметре смешали 2 кг воды при температуре 50°С и 3 кг воды при температуре 30°С. Найдите температуру (в °С) смеси. Теплоемкость калориметра не учитывать.

8.32. В ванну налили 210 кг воды при 10°С. Сколько воды при 100°С нужно добавить в ванну, чтобы тепловое равновесие установилось при 37°С?

8.33. Нужно смешать воду при температуре 50°С и воду при температуре 10°С так, чтобы температура смеси оказалась равной 20°С. Во сколько раз больше надо взять холодной воды, чем горячей?

8.34. Горячее тело при 50°С приведено в соприкосновение с холодным телом при 10°С. При достижении теплового равновесия установилась температура 20°С. Во сколько раз теплоемкость холодного тела больше теплоемкости горячего?

8.35. Медное тело, нагретое до 100°С, опущено в воду, масса которой равна массе медного тела. Тепловое равновесие наступило при температуре 30°С. Определите начальную температуру (в °С) воды. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), меди 360 Дж/(кг·К).

8.36. Определите начальную температуру (в кельвинах) олова массой 0,6 кг, если при погружении его в воду массой 3 кг при температуре 300 К вода нагрелась на 2 К. Удельная теплоемкость олова 250 Дж/(кг·К), воды 4200 Дж/(кг·К).

8.37. В сосуд налили 0,1 кг воды при температуре 60°С, после чего температура воды понизилась до 55°С. Считая, что теплоемкость сосуда 70 Дж/К, а удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), найдите начальную температуру (в °С) сосуда.

8.38. Для измерения температуры воды массой 20 г в нее погрузили термометр, который показал 32,4°С. Какова действительная температура (в °С) воды, если теплоемкость термометра 2,1 Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру помещения 8,4°С? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К).

8.39. После опускания в воду, имеющую температуру 10°С, тела, нагретого до 100°С, установилась температура 40°С. Какой станет температура (в °С) воды, если, не вынимая первого тела, опустить в нее еще одно такое же тело, нагретое также до 100°С?

8.40. Нагретое до 110°С тело опустили в сосуд с водой, в результате чего температура воды повысилась от 20°С до 30°С. Какой стала бы температура (в °С) воды, если бы в нее одновременно с первым опустили еще одно такое же тело, но нагретое до 120°С?

б) фазовые превращения (14–16)

8.41. В литр воды при температуре 20°С брошен ком снега массой 250 г, частично уже растаявший, т. е. содержащий некоторое количество воды при 0°С. Температура воды в сосуде при достижении теплового равновесия оказалась равна 5°С. Определите количество воды (в г) в коме снега. Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К).

8.42. В сосуд, содержащий 4,6 кг воды при 20°С, бросают кусок стали массой 10 кг, нагретый до 500°С. Вода нагревается до 100°С, и часть ее обращается в пар. Найдите массу (в г) образовавшегося пара. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость стали 460 Дж/(кг·К).

8.43. В двух сосудах имеется по 4,18 кг воды при одинаковых температурах. В первый сосуд вливают 0,42 кг воды при температуре 100°С, во второй вводят столько же водяного пара при температуре 100°С. На сколько градусов температура в одном сосуде будет больше, чем в другом, после установления в каждом из них теплового равновесия? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

8.44. Некоторую массу воды с начальной температурой 50°С нагревают до температуры кипения, пропуская через нее пар при температуре 100°С. На сколько процентов увеличится при этом масса воды? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $2,1 \cdot 10^6$ Дж/кг.

8.45. Количество теплоты, выделяемое при конденсации 1 кг пара при температуре 100°С и охлаждения получившейся воды до 0°С, затрачивается на таяние некоторого количества льда, температура которого 0°С. Определите массу растаявшего льда. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,22 МДж/кг, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

8.46. Смесь, состоящую из 2,51 кг льда и 7,53 кг воды при общей температуре 0°С, нужно нагреть до температуры 50°С, пропуская пар при температуре 100°С. Определите необходимое для этого количество (в г) пара. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг, удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг.

8.47. Из сосуда с небольшим количеством воды при 0°С откачивают воздух. При этом испаряется 6,6 г воды, а оставшаяся часть замерзает. Найдите массу (в г) образовавшегося льда. Удельная теплота парообразования воды при 0°С равна $2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Работа идеального газа (17–19)

8.48. При постоянном давлении 3 кПа объем газа увеличился от 7 л до 12 л. Какую работу совершил газ?

8.49. Расширяясь в цилиндре с подвижным поршнем при постоянном давлении 100 кПа, газ совершил работу 100 кДж. На какую величину при этом изменился объем газа?

8.50. В изобарном процессе при давлении 300 кПа температура идеального газа увеличилась в 3 раза. Определите начальный объем (в л) газа, если при расширении он совершает работу 18 кДж.

8.51. Какую работу совершают два моля некоторого газа при изобарном повышении температуры на 10 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.52. При изобарном нагревании 2 кг воздуха им была совершена работа 166 кДж. На сколько градусов был нагрет воздух? Молярная масса воздуха 29 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.53. Одинаковые массы водорода и кислорода изобарно нагревают на одинаковое число градусов. Молярная масса водорода 2 кг/кмоль, кислорода 32 кг/кмоль. Во сколько раз работа, совершенная водородом, больше, чем кислородом?

8.54. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса газа при температуре 300 К, занимающая при давлении 0,1 МПа объем 6 л. На сколько градусов надо охладить газ при неизменном давлении, чтобы при этом была совершена работа 50 Дж по его сжатию?

8.55. В цилиндре под поршнем находится газ, удерживаемый в объеме 0,5 м^3 силой тяжести поршня и силой атмосферного давления. Какую работу (в кДж) совершит газ при нагревании, если его объем при этом возрастет в 2 раза? Атмосферное давление 100 кПа, масса поршня 10 кг, площадь поршня 10^{-3} м^2. $g = 10$ м/с^2.

8.56. Пять молей газа сначала нагревают при постоянном объеме так, что его давление возрастает в 3 раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доведя температуру до прежнего значения 100 К. Какая работа была совершена над газом при его сжатии? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.57. Один моль идеального газа охладили изохорно так, что его давление уменьшилось в 1,5 раза, а затем изобарно нагрели до прежней температуры. При этом газ совершил работу 8300 Дж. Найдите начальную температуру (в кельвинах) газа. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.58. Температура идеального газа массой 10 кг меняется по закону $T = aV^2$ ($a = 2$ К/м^6). Определите работу (в мДж), совершенную газом при увеличении объема от 2 л до 4 л. Молярная масса газа 12 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.59. Идеальный газ в количестве 2 моль находится при температуре 400 К. Объем газа увеличивают в два раза так, что давление линейно зависит от объема. Найдите работу газа в этом процессе, если конечная температура газа равна начальной. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

Первый закон термодинамики.
Внутренняя энергия идеального газа (20–21)

8.60. При нагревании газа его внутренняя энергия увеличилась от 300 до 700 Дж. Какая работа была совершена газом, если на его нагревание было затрачено 1000 Дж теплоты?

8.61. При изохорном нагревании газа его внутренняя энергия увеличилась от 200 до 300 Дж. Какое количество теплоты было затрачено на нагревание газа?

8.62. При изобарном расширении газ совершил работу 100 Дж, а его внутренняя энергия увеличилась при этом на 150 Дж. Затем газу в изохорном процессе сообщили такое же количество теплоты, как и в первом процессе. На сколько увеличилась внутренняя энергия газа в результате этих двух процессов?

8.63. В изотермическом процессе газ получил 200 Дж теплоты. После этого в адиабатическом процессе газ совершил работу в два раза большую, чем в первом процессе. На сколько уменьшилась внутренняя энергия газа в результате этих двух процессов?

8.64. При изобарном нагревании газу было сообщено 16 Дж теплоты, в результате чего внутренняя энергия газа увеличилась на 8 Дж, а его объем возрос на 0,002 м^3. Найдите давление (в кПа) газа.

8.65. На нагревание идеального газа при постоянном давлении 0,1 МПа израсходовано 700 Дж теплоты. При этом объем газа возрос от 0,001 до 0,002 м^3, а внутренняя энергия газа оказалась равной 800 Дж. Чему была равна внутренняя энергия газа до нагревания?

8.66. Определите изменение внутренней энергии 0,5 моль газа при изобарном нагревании от температуры 27°С до 47°С, если газу было сообщено количество теплоты 290 Дж. Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.67. На сколько градусов увеличилась температура одного моля идеального газа, если при постоянном давлении его внутренняя энергия увеличилась на 747 Дж, а теплоемкость одного моля при постоянном давлении больше, чем универсальная газовая постоянная, на 20,75 Дж/(моль·К)?

8.68. Моль идеального газа нагревается при постоянном давлении, а затем при постоянном объеме переводится в состояние с температурой, равной первоначальной температуре 300 К. Оказалось, что в итоге газу передано количество теплоты 12,45 кДж. Во сколько раз изменился объем, занимаемый газом? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.69. Некоторая масса идеального газа нагревается при постоянном давлении от 15°C до 65°C, поглощая при этом 5 кДж теплоты. Нагревание этого газа при постоянном объеме при тех же начальной и конечной температурах требует затраты 3,5 кДж теплоты. Найдите объем (в л) этой массы газа при температуре 15°C и давлении 20 кПа.

Идеальный одноатомный газ (22–25)

8.70. Какое количество теплоты надо сообщить при постоянном объеме 2 моль идеального одноатомного газа, чтобы увеличить его температуру на 10 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.71. При адиабатическом расширении 2 кг гелия газ совершил работу 49,8 кДж. На сколько градусов уменьшилась при этом его температура? Молярная масса гелия 4 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.72. Какое количество теплоты надо сообщить при постоянном давлении 4 моль идеального одноатомного газа, чтобы увеличить его температуру на 6 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.73. При изобарном расширении гелия газ получил 300 Дж теплоты. Найдите изменение объема (в л) газа, если его давление 20 кПа.

8.74. Найдите изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа при изохорном нагревании, если давление газа увеличилось на 30 кПа, а его объем равен 5 л.

8.75. При изобарном расширении идеальный одноатомный газ получил 100 Дж теплоты. Какую он при этом совершил работу?

8.76. При изобарном сжатии идеального одноатомного газа над ним совершили работу 80 Дж. На сколько при этом уменьшилась его внутренняя энергия?

8.77. Какая часть (в процентах) теплоты, полученной идеальным одноатомным газом при изобарном нагревании, расходуется на увеличение его внутренней энергии?

8.78. Некоторое количество идеального одноатомного газа изохорно нагрели, сообщив ему 150 Дж теплоты. Затем газ изобарно охладили до первоначальной температуры. Сколько теплоты было отобрано у газа при изобарном охлаждении?

8.79. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль нагрели сначала изобарно, а затем изохорно. В результате как давление, так и объем газа увеличились в два раза. Какое количество теплоты получил газ в этих двух процессах, если его начальная температура была 100 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.80. Давление одного моля идеального одноатомного газа увеличивается прямо пропорционально объему. Какое количество теплоты подвели к газу при увеличении его температуры на 20 К? Универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.81. В двух теплоизолированных сосудах, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий в количествах 2 моль и 3 моль и при температурах 300 К и 400 К соответственно. Какой станет температура (в кельвинах) после открывания крана и установления теплового равновесия?

8.82. В двух теплоизолированных сосудах с объемами 2 л и 5 л, соединенных тонкой трубкой с краном, находится гелий под давлениями 30 и 16 кПа соответственно, но при разных температурах. Каким будет давление (в кПа) после открывания крана и установления теплового равновесия?

8.83. Горизонтальный теплоизолированный цилиндр объемом 4 л делится на две части теплонепроницаемым поршнем, по разные стороны от которого находится идеальный одноатомный газ под давлением 50 кПа. Одной из этих порций газа сообщают 30 Дж теплоты. Каким станет давление (в кПа) в сосуде?

8.84. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 200 К. Над поршнем сначала удерживают груз так, что он едва касается поверхности поршня, а затем отпускают. Какой станет температура (в кельвинах) газа после установления равновесия? Масса груза равна половине массы поршня, над поршнем газа нет.

8.85. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия. На поршне лежит груз с массой, равной массе поршня. Груз мгновенно убирают и дожидаются прихода системы к равновесию. На сколько процентов увеличится высота, на которой находится поршень? Над поршнем газа нет.

Циклы. Тепловые машины (26–29)

8.86. Совершая замкнутый цикл, газ получил от нагревателя 420 Дж теплоты. Какую работу совершил газ, если КПД цикла 10% ?

8.87. Тепловая машина совершает работу 200 Дж, при этом холодильнику передается 300 Дж энергии. Определите КПД (в процентах) тепловой машины.

8.88. КПД тепловой машины 50%. Какую работу совершает машина за один цикл, если холодильнику при этом передается 700 Дж теплоты?

8.89. КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен 25%. Какова температура (в °C) нагревателя, если температура холодильника 27°C?

8.90. Идеальная тепловая машина передает холодильнику 80% теплоты, полученной от нагревателя. Найдите температуру (в кельвинах) нагревателя, если температура холодильника 248 К.

8.91. КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен 80%. Во сколько раз абсолютная температура нагревателя больше абсолютной температуры холодильника?

8.92. Идеальный газ работает по циклу Карно. Абсолютная температура нагревателя 400 К, холодильника 300 К. Во сколько раз увеличится КПД цикла, если абсолютную температуру нагревателя повысить на 200 К?

8.93. Идеальный газ совершает цикл Карно. Абсолютная температура нагревателя в 4 раза больше абсолютной температуры холодильника. Определите долю (в процентах) теплоты, отдаваемой холодильнику.

8.94. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу 100 Дж. Температура нагревателя 100°С, температура холодильника 0°С. Найдите количество тепла, отдаваемое за один цикл холодильнику.

8.95. На подъем груза весом 1000 кН на высоту 6 м пошло 80% всей механической работы, полученной в результате работы идеальной тепловой машины, у которой разность температур нагревателя и холодильника равна 125 К, а отношение количества теплоты, полученной от нагревателя, к его абсолютной температуре равно 300 Дж/К. Сколько циклов было совершено за время подъема груза?

8.96. Идеальный одноатомный газ совершает замкнутый цикл, состоящий из двух изохорных и двух изобарных процессов. При изохорном нагревании давление увеличивается в 2 раза, а при изобарном нагревании объем увеличивается на 70%. Найдите КПД (в процентах) цикла.

8.97. Идеальный одноатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из изохорного нагревания, при котором давление газа возрастает на 40%, затем изобарного расширения и, наконец, возвращения в исходное состояние в процессе, в котором давление изменяется прямо пропорционально объему. Найдите КПД (в процентах) цикла.

8.98. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, используется для замораживания воды при 0°С. Теплота отдается окружающему воздуху, температура которого 27°С. Сколько минут потребуется для превращения в лед 420 г воды, если холодильная машина потребляет от сети мощность 25 Вт? Удельная теплота плавления льда $3{,}25 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Свойства паров. Влажность (30–33)

8.99. В одном сосуде объемом 10 л находится воздух с относительной влажностью 40%, а в другом сосуде объемом 30 л — воздух при той же температуре, но при относительной влажности 60%. Сосуды соединены тонкой трубкой с краном. Какая относительная влажность (в процентах) установится после открывания крана?

8.100. Для повышения относительной влажности на 20% ($\Delta\varphi = 20\%$) при температуре 20°С в комнате объемом 50 м^3 понадобилось испарить 180 г воды. Найдите плотность (в г/м^3) насыщенных паров воды при температуре 20°С.

8.101. В закрытой теплице объемом 33,2 м^3 относительная влажность в ночное время при температуре 15°С была равна 92%. Какую массу (в г) воды надо дополнительно испарить в теплице днем, когда температура повысится до 27°С, чтобы относительная влажность не упала ниже 75%? Давление насыщенных паров воды при температуре 15°С равно 1,7 кПа, при температуре 27°С — 3,6 кПа. Молярная масса воды 18 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

8.102. В сосуде при температуре 100°С находится влажный воздух под давлением 1 атм. После изотермического уменьшения объема в 4 раза давление увеличилось в 3,8 раз. Чему была равна относительная влажность (в процентах) в начальном состоянии? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

8.103. В сосуде при температуре 100°С находится влажный воздух с относительной влажностью 90% под давлением 1 атм. Объем сосуда изотермически уменьшили в 2 раза. На сколько процентов надо вместо этого увеличить абсолютную температуру, чтобы получить такое же конечное давление? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

8.104. В сосуде объемом 10 л находится влажный воздух с относительной влажностью 60% под давлением 1 атм. На сколько процентов возрастет давление, если в сосуд дополнительно ввести 10 г воды и увеличить его объем в два раза? Температура в сосуде поддерживается равной 100°С. Универсальная газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К).

8.105. На электрической плитке стоит чайник с кипящей водой. Из носика чайника с отверстием площадью 3,73 см^2 выходит пар со скоростью 0,83 м/с. Удельная теплота парообразования воды при 100°С равна 2,2 МДж/кг. Найдите полезную мощность плитки, считая, что весь образующийся пар выходит через носик чайника. Атмосферное давление 100 кПа, молярная масса воды 18 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль·К).

Поверхностное натяжение (34–37)

8.106. На границу поверхностного слоя глицерина длиной 5 мм действует сила поверхностного натяжения 0,1 мН. Определите коэффициент поверхностного натяжения (в мН/м) глицерина.

8.107. Какую надо совершить работу (в мкДж), чтобы увеличить свободную поверхность ртути на 5 см^2? Коэффициент поверхностного натяжения ртути 0,56 Н/м.

8.108. Определите внутренний диаметр (в мкм) капиллярной трубки, если спирт поднялся в ней на высоту 4,6 см. Спирт полностью смачивает стенки трубки. Коэффициент поверхностного натяжения спирта 23 мН/м, плотность спирта 800 кг/м^3. g = 10 м/с^2.

8.109. Вода в капиллярной трубке поднялась на 27,2 мм. На сколько миллиметров опустится ртуть в той же трубке? Коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м, ртути 0,56 Н/м. Плотность ртути 13600 кг/м^3. Вода полностью смачивает трубку, а ртуть — полностью не смачивает.

8.110. В капиллярной трубке на Земле вода поднялась на 12 мм. На какую высоту (в мм) поднимется вода в такой же капиллярной трубке на Луне, где ускорение свободного падения в 6 раз меньше?

8.111. Вода в капиллярной трубке поднялась на 18 мм. Чему будет равна высота (в мм) капиллярного столба воды в этой трубке, если сосуд будет подниматься с ускорением 2 м/с^2? g = 10 м/с^2.

8.112. Сообщающиеся сосуды представляют собой капиллярные трубки диаметрами 0,6 мм и 0,1 мм. Найдите разность уровней (в см) воды в этих трубках. Коэффициент поверхностного натяжения воды 72 мН/м. g = 10 м/с^2.

Глава 9

Электростатика

Примеры решения задач

Задача 1. *Два одинаковых по размеру металлических шарика несут заряды 7 мкКл и –3 мкКл. Шарики привели в соприкосновение и развели на некоторое расстояние, после чего сила их взаимодействия оказалась равна 40 Н. Определите это расстояние (в см). Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

При соприкосновении одинаковых проводящих шариков заряды перераспределятся так, что шарики окажутся заряжены одинаково. Однако полный заряд системы из двух шариков при этом не изменится (закон сохранения заряда). Значит, заряд каждого шарика будет

$$q' = \frac{q_1 + q_2}{2} = 2\ \text{мкКл}.$$

Записав закон Кулона для шариков в конечном положении

$$F = k\frac{(q')^2}{r^2},$$

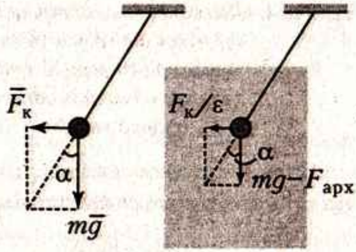
найдем расстояние между ними

$$r = \left|\frac{q_1 + q_2}{2}\right|\sqrt{\frac{k}{F}} = 3\ \text{см}.$$

Замечание. Если исходить из закона Кулона, то коэффициент k имеет размерность Н·м^2/Кл^2. Однако, учитывая связь между k и электрической постоянной ε_0 ($k = 1/4\pi\varepsilon_0$), размерность k в СИ обычно записывают короче: м/Ф.

Задача 2. *Два одинаковых шарика висят на непроводящих нитях равной длины, закрепленных в одной точке. Шарики заряжены одноименными зарядами и, отталкиваясь, расходятся на некоторый угол. Найдите плотность материала шариков, если угол расхождения нитей не меняется после погружения шариков в жидкость с плотностью 800 кг/м^3 и диэлектрической проницаемостью 9.*

На рисунке изображен один из шариков до и после погружения в жидкость. До погружения на шарик действуют сила кулоновского отталкивания и сила тяжести, сумма которых должна быть направлена по нити (она уравновешивает силу натяжения нити, которая на рисунке не показана). После погружения в диэлектрическую жидкость кулоновская сила уменьшится в ε раз (расстояние между зарядами не изменилось). Одновременно уменьшится и общая вертикальная сила, так как на шарик начнет действовать выталкивающая сила. Равнодействующая горизонтальной и вертикальной сил должна быть опять направлена по нити, т. е. под тем же углом к вертикали. Из подобия треугольников сил получаем уравнение



$$\frac{F_к}{mg} = \frac{F_к/\varepsilon}{mg - F_{арх}}$$

(каждое из этих отношений равно $\mathrm{tg}\alpha$). Учитывая, что

$$m = \rho_ш V, \quad F_{арх} = \rho_ж g V,$$

приходим к уравнению

$$\varepsilon\,(\rho_ш - \rho_ж) = \rho_ш,$$

откуда находим плотность материала шариков

$$\rho_ш = \frac{\varepsilon \rho_ж}{\varepsilon - 1} = 900 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 3. *Два одинаковых положительных заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз увеличивается сила, действующая на один из зарядов, если на середине прямой, соединяющей заряды, поместить третий, такой же по знаку, но вдвое больший по величине заряд?*

Из закона Кулона следует, что сила взаимодействия любого из зарядов q с новым зарядом $2q$ в восемь раз больше, чем сила взаимодействия зарядов q между собой:

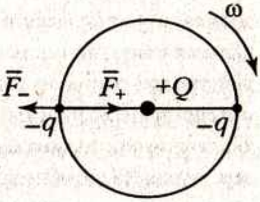
$$F_2 = k\frac{q \cdot 2q}{(r/2)^2} = 8 \cdot k\frac{q^2}{r^2} = 8F_1 .$$

Иногда именно этот результат считают ответом к задаче, забывая, что при добавлении третьего заряда оба начальных заряда остаются на месте. Любой из зарядов q взаимодействует не только с зарядом $2q$, но продолжает также взаимодействовать с другим зарядом q. Сила F_2 добавляется к силе F_1, действуя в том же направлении, и вычисленная по принципу суперпозиции результирующая сила

$$F_р = F_1 + F_2 = 9F_1$$

оказывается в 9 раз больше первоначальной.

Задача 4. *Два одинаковых отрицательных точечных заряда по 100 нКл массой 0,3 г каждый движутся по окружности радиусом 10 см вокруг положительного заряда 100 нКл. При этом отрицательные заряды находятся на концах одного диаметра. Найдите угловую скорость вращения зарядов.* $k = 9 \cdot 10^9$ *м/Ф.*



На любой из движущихся зарядов действует как сила притяжения к положительному заряду

$$F_+ = k\frac{qQ}{R^2},$$

где q — модуль заряда шарика, так и сила отталкивания от другого отрицательного заряда

$$F_- = k\frac{q^2}{(2R)^2}.$$

Второй закон Ньютона для движущегося по окружности шарика имеет вид

$$F_+ - F_- = m\omega^2 R,$$

или, учитывая что $Q = q$,

$$\frac{3}{4}k\frac{q^2}{R^2} = m\omega^2 R.$$

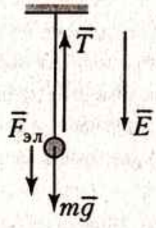
Получаем

$$\omega = \frac{q}{2R}\sqrt{\frac{3k}{mR}} = 15 \text{ рад/с}.$$

Задача 5. *В однородном электрическом поле напряженностью 20 кВ/м, вектор которой направлен вертикально вниз, на шелковой нити висит шарик массой 0,1 кг с зарядом 0,2 мКл. Найдите силу натяжения нити.* $g = 10$ *м/с*^{2}.

На неподвижный шарик действуют три силы: сила тяжести, сила натяжения нити и сила со стороны электрического поля

$$\vec{F}_{эл} = q\vec{E},$$



направленная вертикально вниз. Из условия равновесия шарика

$$T - mg - qE = 0$$

находим силу натяжения нити

$$T = mg + qE = 5 \text{ Н}.$$

Задача 6. *Электрон влетел в однородное электрическое поле напряженностью 60 кВ/м со скоростью 8 Мм/с перпендикулярно линиям напряженности. Вычислите величину его скорости (в Мм/с) в момент времени 5/9 нс. Удельный заряд электрона $1{,}8\cdot 10^{11}$ Кл/кг.*

На электрон в электрическом поле действует сила $\vec{F} = -e\vec{E}$, и его ускорение направлено против вектора $\vec{E}$ и равно $a = eE/m$. Направим ось x вдоль начальной скорости электрона, а ось y вдоль его ускорения. Проекция ускорения на ось x равна нулю, т. е. проекция скорости на эту ось не меняется: $v_x = v_0$. В проекции на ось y происходит равноускоренное движение без начальной скорости: $v_y = at = (eE/m)t$. Модуль скорости найдем по теореме Пифагора

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (e/m)^2 E^2 t^2} = 10 \text{ Мм/с}.$$

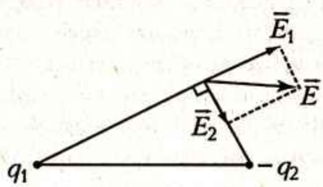
Задача 7. *Имеются два разноименных точечных заряда, причем величина положительного в 2,25 раза больше величины отрицательного. Во сколько раз расстояние между зарядами меньше, чем расстояние от отрицательного заряда до той точки, где напряженность поля равна нулю?*

В рассматриваемой точке напряженность поля положительного заряда должна быть равна по величине и противоположна по направлению напряженности поля отрицательного заряда. Эта точка лежит: а) на прямой, проходящей через заряды, б) вне отрезка, соединяющего заряды, в) ближе к отрицательному заряду, так как он меньше положительного. Если обозначить за x расстояние от этой точки до отрицательного заряда, то расстояние до положительного будет $x + a$, где a — расстояние между зарядами. Приравняв напряженности, получим уравнение

$$k\frac{q}{x^2} = k\frac{2{,}25q}{(x+a)^2}.$$

Извлекая корень, приходим к уравнению $x + a = 1{,}5x$, т. е. $x/a = 2$.

Задача 8. *Расстояние между двумя точечными зарядами 64 нКл и –48 нКл равно 10 см. Определите напряженность поля (в кВ/м) в точке, удаленной на 8 см от первого и на 6 см от второго зарядов. $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф.*



Первый заряд создает в данной точке напряженность $E_1 = kq_1/r_1^2 = 90$ кВ/м, а второй заряд — напряженность $E_2 = kq_2/r_2^2 =$ $= 120$ кВ/м. Результирующая напряженность равна векторной сумме этих напряженностей:

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Так как стороны треугольника подчиняются теореме Пифагора, то напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены под прямым углом друг к другу, и результирующая напряженность равна $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 150$ кВ/м.

Задача 9. *Между пластинами плоского конденсатора, расположенного горизонтально, на расстоянии 10 см от нижней пластины «висит» заряженный шарик. Разность потенциалов между пластинами 400 В. Через какое время (в мс) шарик упадет на нижнюю пластину, если разность потенциалов мгновенно уменьшить до 200 В? $g = 10$ м/с^2.*

В начальный момент шарик находился в равновесии под действием двух сил — силы тяжести и электрической силы

$$mg - qE_1 = 0,$$

где $E_1 = U_1/d$ — напряженность поля в конденсаторе. После уменьшения напряжения на конденсаторе до U_2 напряженность в нем уменьшится до

$$E_2 = \frac{U_2}{d} = E_1\frac{U_2}{U_1},$$

и шарик начнет двигаться вниз с ускорением a, которое можно найти из второго закона Ньютона

$$mg - qE_2 = ma.$$

Подставляя $qE_2 = qE_1(U_2/U_1) = mg(U_2/U_1)$, получаем $a = g(1 - U_2/U_1) = 5$ м/с^2. Из уравнения кинематики $s = at^2/2$ находим время

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 0{,}2 \text{ с} = 200 \text{ мс}.$$

Задача 10. *Электроны, получившие свою скорость в результате прохождения разности потенциалов 5 кВ, влетают в середину между пластинами плоского конденсатора (параллельно пластинам). Какое наименьшее напряжение должно быть приложено к конденсатору, чтобы электроны не вылетали из него? Длина конденсатора 5 см, расстояние между пластинами 1 см.*

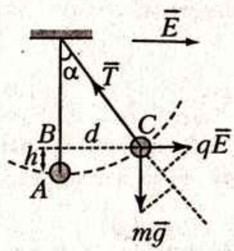
Под действием электрического поля электроны отклоняются к положительно заряженной пластине. Ускорение электронов равно $a = eE/m = eU/md$ и направлено перпендикулярно пластинам (d — расстояние между пластинами, U — напряжение на конденсаторе). Направим ось x вдоль начальной скорости, параллельно пластинам, а ось y — вдоль ускорения, в сторону положительной пластины. Вдоль оси x электроны движутся равномерно, и время пролета электронов через конденсатор равно $t = l/v_0$, где l — длина пластин, а v_0 — начальная скорость. Если отклонение электронов $s_y = at^2/2$ к моменту вылета достигнет величины $d/2$, то они попадут на пластину конденсатора и не вылетят из него. Подставляя a и t в уравнение $d/2 = at^2/2$, найдем, что электроны попадут на самый край пластины при напряжении

$$U = \frac{d^2 v_0^2}{l^2 (e/m)}.$$

Осталось выразить начальную скорость через ускоряющую разность потенциалов: $eU_0 = mv_0^2/2$. Окончательно получаем

$$U = 2U_0\left(\frac{d}{l}\right)^2 = 400 \text{ В}.$$

Задача 11. *Шарик массой 5 г с зарядом 2 мКл подвешен на нити длиной 1 м в горизонтальном электрическом поле с напряженностью 20 В/м. Шарик сначала удерживают в нижнем положении, а затем отпускают. Найдите силу натяжения нити (в мН) в тот момент, когда шарик поднимется на 20 см выше начального положения. $g = 10$ м/с^2.*



Запишем в рассматриваемый момент 2-ой закон Ньютона в проекции на ось, направленную к центру окружности

$$T - mg\cos\alpha - qE\sin\alpha = \frac{mv^2}{l}.$$

Скорость шарика найдем из закона сохранения энергии. В данном случае удобно записать его в форме теоремы об изменении кинетической энергии, рассматривая обе силы — электрическую и тяжести — как внешние

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{\text{эл}} + A_{\text{т}}.$$

Поскольку работа каждой из этих сил не зависит от траектории, можно вместо криволинейной траектории рассмотреть перемещение вдоль траектории ABC. Получаем

$$A_{\text{эл}} = (qE)d, \quad A_{\text{т}} = -(mg)h.$$

После подстановки приходим к ответу

$$T = mg\frac{l-3h}{l} + qE\frac{3d}{l} = 92 \text{ мН}$$

(мы учли, что $d = \sqrt{l^2 - (l-h)^2}$, $\sin\alpha = d/l$, $\cos\alpha = 1 - h/l$).

Замечание. Работу электрической силы можно вычислить через разность потенциалов между точками A и C, равную Ed, где d — расстояние между эквипотенциальными поверхностями, на которых лежат эти точки. Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии, взятому с обратным знаком.

Задача 12. *В двух противоположных вершинах квадрата со стороной 30 см находятся заряды 200 нКл каждый. Найдите потенциал (в кВ) в двух других вершинах квадрата. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

Потенциал, создаваемый каждым из зарядов в свободной вершине квадрата, равен $\varphi_1 = \varphi_2 = kq/a$, где a — сторона квадрата. Потенциал поля двух зарядов в этой точке находим по принципу суперпозиции для потенциала: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2kq/a = 12$ кВ.

Задача 13. *По поверхности сферы радиусом 30 см распределен заряд 4 нКл. Чему равен потенциал в центре сферы? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

Для применения метода суперпозиции надо мысленно разбить ее поверхность на множество маленьких участков, размеры которых малы по сравнению с радиусом. Тогда находящиеся на этих участках заряды Δq_i можно считать точечными. Получаем

$$\varphi = \sum_i k \frac{\Delta q_i}{R} = k \frac{\sum_i \Delta q_i}{R} = k \frac{q}{R} = 120 \text{ В}.$$

Видно, что потенциал в центре сферы зависит только от полного заряда сферы, но не зависит от его распределения по поверхности.

Задача 14. *Работа по переносу заряда 130 нКл из бесконечности в некоторую точку электрического поля равна 65 мкДж. Найдите потенциал этой точки. Потенциал в бесконечности принять равным нулю.*

Работа электрического поля по переносу заряда равна

$$A_{эл} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(0 - \varphi_2).$$

Работа внешних сил (при медленном переносе заряда) равна работе электрических сил, взятой с обратным знаком:

$$A_{внешн} = -A_{эл} = q\varphi_2.$$

Получаем

$$\varphi_2 = A_{внешн}/q = 500 \text{ В}.$$

Задача 15. *Частица массой 10 мг, несущая заряд 2 нКл, движется издалека в сторону тяжелого однородно заряженного шара радиусом 10 см. Какую минимальную скорость должна иметь частица на большом расстоянии от шара, чтобы долететь до его поверхности, если заряд шара равен 1 мкКл? $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф.*

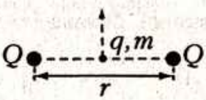
Если частица остановится у самой поверхности шара, то изменение ее кинетической энергии будет равно $\Delta W = 0 - mv_0^2/2$. Работа электрического поля над частицей с зарядом q при перемещении ее из бесконечности к поверхности шара равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\left(0 - \frac{kQ}{R}\right).$$

По теореме о кинетической энергии эта работа равна изменению кинетической энергии, откуда получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kqQ}{mR}} = 6 \text{ м/с}.$$

Задача 16. *Два точечных заряда по 10 нКл каждый закреплены на расстоянии 4 см друг от друга. Посередине между зарядами помещают заряженную частицу массой 2 мг с зарядом 36 нКл и отпускают. Какую скорость приобретет частица на большом расстоянии от зарядов? $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф.*



Изменение кинетической энергии частицы равно работе над ней электрического поля

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Конечный потенциал равен нулю ($\varphi_2 = 0$), а начальный потенциал найдем методом суперпозиции

$$\varphi_1 = 2k\frac{Q}{r/2} = 4k\frac{Q}{r}.$$

Подставляя, определяем скорость частицы

$$v = \sqrt{\frac{8kqQ}{mr}} = 18 \text{ м/с}.$$

Задача 17. *По тонкому закрепленному кольцу радиусом 6 см распределен заряд 40 нКл. В центр кольца помещают частицу с зарядом 12 нКл и массой 9 мг и отпускают. Чему будет равна скорость частицы на большом расстоянии от кольца? $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф.*

Хотя вначале сила, действующая на заряд, равна нулю, но это равновесие неустойчивое (убедитесь в этом сами), и частица придет в движение. Кинетическая энергия частицы равна работе сил поля

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Конечный потенциал равен нулю ($\varphi_2 = 0$), а начальный потенциал найдем методом суперпозиции

$$\varphi_1 = \sum k\frac{\Delta Q_i}{R} = k\frac{\Sigma\Delta Q_i}{R} = k\frac{Q}{R}$$

(все заряды кольца находятся на одинаковом расстоянии R от его центра). Получаем

$$v = \sqrt{\frac{2kqQ}{mR}} = 4 \text{ м/с}.$$

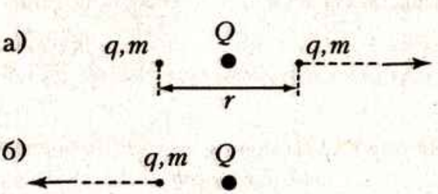
Задача 18. *Чему равна энергия (в мДж) взаимодействия системы четырех зарядов 2 мкКл каждый, расположенных вдоль прямой линии так, что расстояние между соседними зарядами равно 30 см. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна сумме энергий взаимодействия между всеми парами зарядов:

$$W = 3k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{q^2}{2a} + k\frac{q^2}{3a} = \frac{13}{3}k\frac{q^2}{a} = 520 \text{ мДж}.$$

Задача 19. *Две частицы массой 2 мг с зарядом 10 нКл каждая находятся на расстоянии 5 см друг от друга, а посередине между ними закреплен точечный заряд 60 нКл. Частицы одновременно отпускают. Чему будет равна скорость частиц после их разлета на большое расстояние? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

Изменение полной кинетической энергии двух частиц равно работе поля при их перемещении из начального положения в конечное



$$2\frac{mv^2}{2} = A_{эл}.$$

Для вычисления этой работы воспользуемся тем, что работа поля не зависит от того, каким образом перемещать частицы. Заменим одновременное перемещение частиц на бесконечность последовательным: сначала удалим одну частицу, а другую будем удерживать на месте (рис. а), а затем удалим вторую частицу (рис. б). Работа поля равна

$$A_{\text{эл}} = A_1 + A_2 = q\left(k\frac{Q}{r/2} + k\frac{q}{r}\right) + q\left(k\frac{Q}{r/2}\right) = k\frac{q(q+4Q)}{r}.$$

Для скорости частиц получаем

$$v = \sqrt{\frac{kq(q+4Q)}{mr}} = 15 \text{ м/с}.$$

Замечание. Можно решить эту задачу иначе, вычислив потенциальную энергию взаимодействия частиц и записав закон сохранения энергии. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов равна

$$W_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

а потенциальная энергия взаимодействия нескольких зарядов равна сумме парных взаимодействий. Например, в случае трех зарядов $W_{\text{п}} = W_{12} + W_{13} + W_{23}$. (Заметим, что для вывода этой формулы как раз следует удалять заряды на бесконечность по очереди.) В нашем примере начальная потенциальная энергия равна

$$W_{\text{п}} = k\frac{qQ}{r/2}\cdot 2 + k\frac{q^2}{r},$$

а конечная равна нулю.

Задача 20. *Два одинаковых шарика, имеющих заряды по 400 нКл, соединены пружиной и находятся на гладком горизонтальном столе. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от L до 4L. Найдите жесткость пружины, если известно, что ее длина в свободном состоянии равна 2L, где L = 2 см. k = $9\cdot 10^9$ м/Ф.*

В крайних положениях кинетическая энергия шариков равна нулю, а потенциальная энергия складывается из энергии упругой деформации пружины и энергии кулоновского взаимодействия между зарядами шариков

$$\frac{KL^2}{2} + k\frac{q^2}{L} = \frac{K(2L)^2}{2} + k\frac{q^2}{4L},$$

где K — жесткость пружины. Выражая K, получаем $K = kq^2/2L^3 = 90$ Н/м.

Задача 21. *Два небольших тела массой 50 г каждое, заряженные одинаковым зарядом 10 мкКл, находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии 2 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость 0,1. Тела одновременно освобождают. На каком расстоянии друг от друга тела остановятся? $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с².*

Запишем закон сохранения энергии (с учетом перехода части энергии во внутреннюю)

$$k\frac{q^2}{r_1} = k\frac{q^2}{r_2} + Q.$$

Увеличение внутренней энергии («выделившееся тепло») равно модулю работы силы трения

$$Q = F_{\text{тр}}(r_2 - r_1) = \mu m g (r_2 - r_1).$$

После упрощения получаем

$$k\frac{q^2}{r_1 r_2} = \mu m g, \qquad r_2 = k\frac{q^2}{\mu m g r_1} = 9 \text{ м}.$$

Задача 22. *Два маленьких шарика соединены недеформированной пружиной длиной 20 см и жесткостью 200 Н/м. После сообщения шарикам зарядов одного знака длина пружины стала вдвое больше. Какую работу надо совершить для возвращения пружины в прежнее состояние?*

После сообщения шарикам зарядов они расходятся на такое расстояние, на котором сила упругости равна кулоновской силе:

$$K(2l_0 - l_0) = k\frac{q_1 q_2}{(2l_0)^2},$$

где K — жесткость пружины. Работа внешних сил по возвращению пружины в прежнее состояние равна изменению потенциальной энергии:

$$A = k\frac{q_1 q_2}{l_0} - \left(K\frac{l_0^2}{2} + k\frac{q_1 q_2}{2l_0}\right).$$

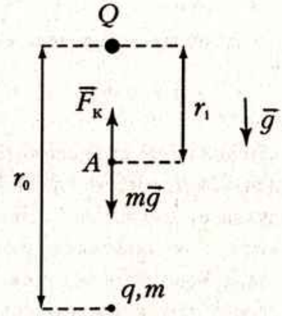
Выразив kq_1q_2 из первого уравнения и подставив во второе, получим

$$A = \frac{3}{2}Kl_0^2 = 12 \text{ Дж}.$$

Задача 23. *В поле тяжести закреплен точечный заряд –10 мкКл, а под ним на расстоянии 5 м находится частица массой 9 г и зарядом 4 мкКл. Какую минимальную вертикальную скорость надо сообщить частице, чтобы она долетела до закрепленного заряда? $k = 9\cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с².*

В начальной точке сила кулоновского притяжения меньше, чем сила тяжести. Чтобы частица долетела до закрепленного заряда, достаточно добиться того, чтобы она пролетела мимо точки A, в которой кулоновская сила сравнивается с силой тяжести (после этого равнодействующая сила будет направлена в сторону закрепленного заряда). Найдем, на каком расстоянии r_1 от заряда находится точка A:

$$k\frac{|Q|q}{r_1^2} = mg, \qquad r_1 = \sqrt{\frac{k|Q|q}{mg}} = 2\text{ м.}$$



Чтобы найти минимальную начальную скорость v_0, при которой частица долетит до точки A, запишем закон сохранения энергии

$$k\frac{|Q|q}{r_0} + \frac{mv_0^2}{2} = mg(r_0 - r_1) + k\frac{|Q|q}{r_1}.$$

Выражая v_0 и подставляя численные данные, получаем $v_0 = 6$ м/с.

Задача 24. *Две частицы, имеющие массы 2 и 3 г и одинаковые заряды 6 мкКл, приближаются друг к другу. В некоторый момент они находятся на расстоянии 30 м и имеют одинаковые скорости 3 м/с. Найдите наименьшее расстояние между частицами в процессе движения. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

В тот момент, когда расстояние между частицами достигает минимального значения, их скорости имеют одинаковую величину и одинаковое направление (относительная скорость равна нулю). Это состояние системы связано с начальным законами сохранения энергии и импульса:

$$m_1 v - m_2 v = (m_1 + m_2)u_x,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2} + k\frac{q^2}{r_0} = \frac{(m_1 + m_2)u_x^2}{2} + k\frac{q^2}{r}.$$

Исключая u_x, получаем

$$r = \left(\frac{1}{r_0} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{2v^2}{kq^2}\right)^{-1} = 10\text{ м.}$$

Задача 25. *Два диэлектрических шара радиусом 1 см и массой 12 г каждый равномерно заряжены одинаковым зарядом 0,4 мкКл. В начальный момент один из шаров покоится, а второй издалека приближается к нему со скоростью 5 м/с. Найдите скорость первоначально покоившегося шара непосредственно перед их соударением. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*

Запишем законы сохранения импульса и энергии, связывающие начальное состояние системы с состоянием в момент соприкосновения шаров:

$$mv_1 = mu_1 + mu_2,$$
$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + k\frac{q^2}{2R}.$$

Исключая u_1, приходим к квадратному уравнению для u_2

$$u_2^2 - v_1 u_2 + \frac{kq^2}{2mR} = 0,$$

которое имеет два положительных корня. Возникает вопрос: какой из этих корней является ответом данной задачи? Выбрать правильный корень помогает следующее рассуждение. Записанная выше система уравнений относится сразу к двум состояниям: как непосредственно *перед* ударом шаров, так и сразу *после* их удара. Ясно, что в результате удара скорость второго шара должна увеличиться. Значит, меньший корень соответствует состоянию до удара, а больший — состоянию после удара. Следовательно, ответом данной задачи является

$$u_2 = \frac{v_1}{2} - \sqrt{\frac{v_1^2}{4} - \frac{kq^2}{2mR}} = 2 \text{ м/с}.$$

Задача 26. *Найдите потенциал проводящего шара радиусом 0,1 м, если на расстоянии 10 м от его поверхности потенциал равен 20 В.*

Потенциал проводящего шара равен $\varphi_{ш} = kq/R$, а потенциал, создаваемый этим шаром на расстоянии $r = R + b$ от его центра, равен $\varphi = kq/r$ (b — расстояние до поверхности шара). Выражая q из второго уравнения и подставляя в первое, получим

$$\varphi_{ш} = \varphi\frac{R+b}{R} = 2020 \text{ В}.$$

Задача 27. *Два проводящих шара радиусами 8 см и 20 см находятся на большом расстоянии друг от друга и имеют заряды 14 нКл и –7 нКл. Каким станет заряд (в нКл) второго шара, если шары соединить проводником? Емкостью соединительного проводника пренебречь.*

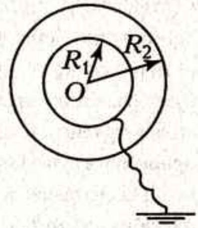
При соединении шаров проводящей проволокой заряд будет перераспределяться до тех пор, пока потенциалы шаров не станут равны друг другу

$$k\frac{q_1'}{R_1} = k\frac{q_2'}{R_2},$$

где q_1' и q_2' — конечные заряды шаров. В соответствии с законом сохранения заряда полный заряд двух шаров не изменится: $q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = 7$ нКл. Решив получившуюся систему уравнений, найдем

$$q_2' = \frac{(q_1 + q_2)R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ нКл.}$$

Задача 28. *Две концентрические проводящие сферы имеют радиусы 8 и 10 см. Внешняя сфера заряжена, а внутренняя — электронейтральна. Внутреннюю сферу заземляют с помощью тонкой проволоки, проходящей через маленькое отверстие во внешней сфере. Во сколько раз уменьшится при этом потенциал внешней сферы?*



Вспомним сначала, какое электрическое поле создает одна равномерно заряженная сфера радиусом R, если ее заряд равен q. Во внешнем пространстве, при $r > R$ (r — расстояние до центра сферы), как напряженность, так и потенциал поля ничем не отличаются от напряженности и потенциала точечного заряда q, помещенного в центр сферы: $E = kq/r^2$, $\varphi = kq/r$. Внутри сферы напряженность равна нулю, а потенциал всех внутренних точек один и тот же, он равен потенциалу самой сферы: $\varphi = kq/R$.

Теперь с помощью метода суперпозиции определим потенциал каждой из двух концентрических сфер радиусов R_1 и R_2, если на них нанесены заряды q_1 и q_2. Всюду во внешнем пространстве потенциал равен $k(q_1 + q_2)/r$, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_2 = k\frac{q_1 + q_2}{R_2}.$$

Вклад в потенциал внутренней сферы от зарядов внешней сферы такой же, как для всех точек внутри внешней сферы. Получаем

$$\varphi_1 = k\frac{q_1}{R_1} + k\frac{q_2}{R_2}.$$

В начальном состоянии $q_1 = 0$, поэтому $\varphi_2 = kq_2/R_2$. После заземления внутренней сферы на ней появится заряд q_1', который найдем из условия равенства нулю ее потенциала

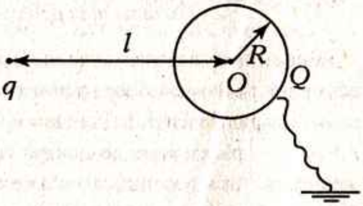
$$\varphi_1' = 0 = k\frac{q_1'}{R_1} + k\frac{q_2}{R_2}.$$

Получаем $q_1' = -q_2(R_1/R_2)$. Теперь вычислим новый потенциал внешней сферы

$$\varphi_2' = k\frac{q_1' + q_2}{R_2} = k\frac{q_2}{R_2}\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right).$$

Получаем $\varphi_2' = (1 - R_1/R_2)\varphi_2 = 0{,}2\varphi_2$, т. е. потенциал уменьшился в 5 раз.

Задача 29. *Какой заряд (в мкКл) появится на заземленной проводящей сфере радиусом 3 см, если на расстоянии 10 см от ее центра поместить точечный заряд –20 мкКл?*



На сфере появится заряд Q, который должен распределиться по сфере таким образом, чтобы потенциал всех точек внутри сферы и на ее поверхности стал равен нулю. Ясно, что в этом случае, в отличие от предыдущей задачи, заряд будет распределен неравномерно. Однако эту трудность удается обойти, если приравнять нулю потенциал центра сферы. Для его вычисления используем метод суперпозиции. Вклад точечного заряда q равен $\varphi_1 = kq/l$, а вклад зарядов, распределенных по сфере, равен (см. реш. 13)

$$\varphi_2 = \sum k\frac{\Delta Q_i}{R} = k\frac{\Sigma\Delta Q_i}{R} = k\frac{Q}{R}.$$

Оказалось, что ответ зависит только от полного заряда сферы. Причина, как легко видеть, в том, что все заряды на сфере находятся на расстоянии R от ее центра. Приравняв нулю полный потенциал

$$0 = k\frac{q}{l} + k\frac{Q}{R},$$

найдем заряд на сфере: $Q = -q(R/l) = 6$ мкКл.

Замечание. Чтобы понять, почему внутри проводящей сферы (где нет вещества проводника) напряженность во всех случаях равна нулю (а потенциал постоянен), можно заменить сферу сплошным проводящим шаром. Ясно, что если затем удалить электронейтральную внутренность шара, то распределение зарядов не изменится.

Задача 30. *С какой силой (в мН) притягиваются друг к другу обкладки плоского воздушного конденсатора? Заряд конденсатора 6 мкКл, напряженность поля в конденсаторе 3 кВ/м.*

Сила, действующая на каждую обкладку, определяется не полным полем конденсатора, а полем, созданным противоположной обкладкой (сама на себя обкладка не действует). Напряженность этого поля равна половине напряженности полного поля: $E_1 = E/2$, и сила взаимодействия пластин

$$F = qE_1 = q\frac{E}{2} = 9 \text{ мН}.$$

Замечание. Отметим, что напряженность поля в воздушном конденсаторе с изолированными обкладками не зависит от расстояния между ними, а выражается через поверхностную плотность заряда на пластинах:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{q/C}{d} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля одной пластины, равная напряженности поля бесконечной равномерно заряженной плоскости, имеет вид

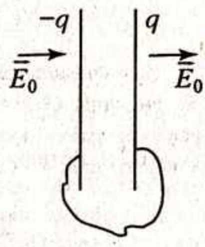
$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Сила взаимодействия между обкладками

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

также не зависит от расстояния между ними (при неизменных зарядах).

Задача 31. *Две круглые металлические пластины радиусом 6 см каждая расположены на малом расстоянии друг от друга и соединены тонким проводящим проводом. Какая сила (в мкН) будет действовать на каждую из пластин, если их поместить в однородное поле, напряженность которого равна 10 кВ/м и направлена перпендикулярно пластинам? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.*



При помещении пластин во внешнее однородное поле $\vec{E}_0$ произойдет перераспределение зарядов: на пластинах появятся такие заряды q и $-q$, что их собственное поле $\vec{E}$ в пространстве между пластинами компенсирует внешнее поле: $\vec{E} = -\vec{E}_0$. Поле двух пластин выражается через их заряды (см. предыдущую задачу)

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S},$$

поэтому на пластинах появятся заряды $q = \varepsilon_0 E_0 S$. На заряд каждой пластины действует как внешнее поле E_0 (наружу), так и поле другой пластины (внутрь). Результирующая сила равна

$$F = qE_0 - q\frac{E}{2} = q\frac{E_0}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S.$$

Учитывая, что $\varepsilon_0 = 1/(4\pi k)$ и $S = \pi R^2$, получим $F = E_0^2 R^2 / 8k = 5$ мкН.

Замечание. Силу, действующую на заряженную пластину, легко вычислить опираясь на закон сохранения энергии. Удерживая пластину в равновесии внешней силой F, равной искомой силе (действующей со стороны поля), сблизим пластины на малое расстояние Δx и приравняем работу внешней силы к изменению энергии, равному произведению объемной плотности энергии на дополнительный объем, занимаемый полем (между пластинами поля нет)

$$F\Delta x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}(S\Delta x).$$

Внешняя сила направлена внутрь (сила со стороны поля — наружу) и равна $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 S$. Попробуйте сами решить таким методом предыдущую задачу.

Задача 32. *Обкладки плоского конденсатора имеют вид круглых пластин радиусом 5 см, расположенных на расстоянии 0,5 мм друг от друга. Вначале конденсатор не заряжен, а затем его обкладки с помощью тонких проволок соединяют с удаленными проводящими шарами: первую — с шаром радиусом 50 см, заряженным до потенциала 150 В, вторую — с шаром радиусом 125 см, заряженным до потенциала 60 В. Какое напряжение установится на конденсаторе?*

Обозначим q заряд, появившийся на первой обкладке, тогда на второй обкладке будет заряд $-q$. Потенциалы обкладок будут после этого равны новым потенциалам шаров

$$\varphi_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 - q}{R_1}, \quad \varphi_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 + q}{R_2},$$

где Q_1, Q_2 — начальные заряды шаров, которые выражаются через их начальные потенциалы: $Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \varphi_1$, $Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 \varphi_2$. Разность потенциалов обкладок равна напряжению на конденсаторе U, через которое также выражается заряд конденсатора: $q = CU$. Приходим к уравнению

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 - CU}{R_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2 + CU}{R_2} = U.$$

Подставляя выражения для зарядов шаров и для емкости конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d = \varepsilon_0 \pi r^2/d$, где r — радиус обкладок, d — расстояние между ними, находим напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{1 + \frac{r^2}{4d}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = 20 \text{ В}.$$

Задача 33. *Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение 300 В каждый, но имеющие различные емкости 500 и 300 пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?*

Заряды на последовательно соединенных конденсаторах равны: $C_1U_1 = C_2U_2$. Значит, первым пробьется конденсатор меньшей емкости C_2, и на нем в момент пробоя будет напряжение $U_2 = U_{\text{пр}} = 300$ В. Напряжение на другом конденсаторе будет в этот момент

$$U_1 = U_2 \frac{C_2}{C_1} = U_{\text{пр}} \frac{C_2}{C_1},$$

а напряжение на составном конденсаторе

$$U = U_1 + U_2 = U_{\text{пр}} \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 480 \text{ В}.$$

Задача 34. *Три конденсатора с емкостями 1, 2 и 3 мкФ соединены последовательно и присоединены к источнику напряжения с ЭДС 220 В. Определите заряд каждого конденсатора (в мкКл).*

Заряды на каждом из последовательно соединенных конденсаторов равны между собой и равны заряду на составном конденсаторе: $q = CU$, где C определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Получаем $C = (6/11)$ мкФ, $q = 120$ мкКл.

Задача 35. *Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику напряжения. Когда один из конденсаторов погрузили в жидкий диэлектрик, заряды на пластинах конденсаторов увеличились в 1,5 раза. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.*

Заряд на каждом из последовательно соединенных конденсаторов равен заряду на составном конденсаторе. Напряжение на составном конденсаторе не изменилось (он подключен к источнику), а заряд увеличился в 1,5 раза. Значит, емкость составного конденсатора увеличилась в 1,5 раза

$$\frac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = 1{,}5\frac{C}{2}.$$

Решая уравнение, находим $\varepsilon = 3$.

Задача 36. *Два одинаковых воздушных конденсатора соединены параллельно, заряжены и отсоединены от источника. У одного из них в 3 раза увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?*

Поскольку составной конденсатор отключен от источника, заряд на нем сохраняется. При увеличении расстояния между пластинами одного из конденсаторов в 3 раза его емкость уменьшается в 3 раза. Получаем уравнение

$$(C + C)U = \left(\frac{C}{3} + C\right)U', \qquad U' = 1{,}5U,$$

где U' — конечное напряжение. Найдем теперь отношение напряженностей:

$$\frac{E_1}{E_1'} = \frac{U/d}{1{,}5U/3d} = 2.$$

Задача 37. *К воздушному конденсатору, заряженному до напряжения 240 В, присоединили параллельно такой же незаряженный конденсатор, но заполненный диэлектриком из стекла. Чему равна диэлектрическая проницаемость стекла, если напряжение на зажимах системы оказалось равным 30 В?*

При соединении конденсаторов заряд перераспределяется между ними до тех пор, пока на них не установится одинаковое напряжение U'. Чтобы найти U', надо воспользоваться законом сохранения заряда

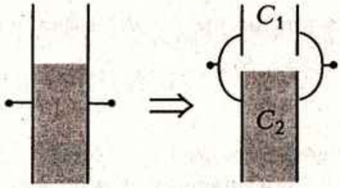
$$CU = CU' + (\varepsilon C)U'.$$

Получаем

$$\varepsilon = \frac{U}{U'} - 1 = 7.$$

Задача 38. *Плоский конденсатор емкостью 1 пФ с зарядом 1 нКл на обкладках погрузили на 2/3 его объема в жидкий диэлектрик с $\varepsilon = 2$ так, что его пластины перпендикулярны поверхности жидкости. Какова разность потенциалов между пластинами погруженного конденсатора?*

Конденсатор, частично заполненный диэлектриком, можно заменить на эквивалентную схему из двух простых конденсаторов, соединенных параллельно: пустого, емкостью



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0(S/3)}{d},$$

и заполненного диэлектриком, емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon(2S/3)}{d}.$$

Так как конденсатор отключен от источника, то заряд на нем не меняется:

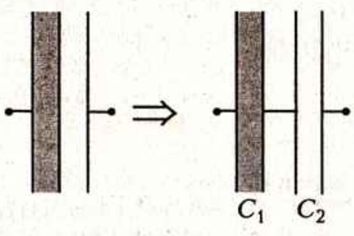
$$CU = (C_1 + C_2)U',$$

где $C = \varepsilon_0 S/d$ — емкость полностью пустого конденсатора, $U = q/C$ — начальное напряжение, а U' — конечное напряжение. Получаем

$$U' = \frac{3}{2\varepsilon+1}U = \frac{3}{2\varepsilon+1}\frac{q}{C} = 600 \text{ В}.$$

Задача 39. *Внутрь плоского конденсатора параллельно его обкладкам помещают диэлектрическую пластину, площадь которой равна площади обкладок, а толщина вдвое меньше расстояния между ними. На сколько процентов возрастет емкость конденсатора, если диэлектрическая проницаемость пластины равна 4?*

Конденсатор с пластиной внутри можно заменить на эквивалентную схему из двух простых конденсаторов, соединенных последовательно: целиком заполненного диэлектриком, емкостью



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}$$

(d_1 — толщина пластины) и пустого, емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_1}$$

(d — расстояние между обкладками). Полную емкость вычисляем по формуле для последовательного соединения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0\varepsilon S} + \frac{d-d_1}{\varepsilon_0 S}.$$

Учитывая, что $d_1 = d/2$, выразим емкость C через емкость пустого конденсатора $C_0 = \varepsilon_0 S/d$

$$C = C_0 \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} = 1{,}6C_0$$

(емкость возрастает на 60%).

Замечание. Емкость не зависит от положения пластины внутри конденсатора. Если пластина не примыкает к обкладкам, а находится между ними, то возникает схема их трех конденсаторов: пустой + с диэлектриком + пустой. Так как емкость не зависит от порядка соединения конденсаторов, то можно поменять местами первый и второй, что эквивалентно перемещению диэлектрической пластины к обкладке.

Задача 40. *Конденсатор емкостью 10 мкФ, заряженный до напряжения 200 В, соединяют параллельно с незаряженным конденсатором емкостью 15 мкФ. Какое количество теплоты (в мДж) выделится при этом?*

Закон сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$W_1 = W_2 + Q,$$

где $W_1 = \dfrac{C_1 U_1^2}{2}$ — начальная электростатическая энергия, $W_2 = \dfrac{(C_1 + C_2)U'^2}{2}$ — конечная электростатическая энергия, Q — количество выделившейся теплоты. Конечное напряжение U' найдем из закона сохранения заряда

$$C_1 U_1 = (C_1 + C_2)U'.$$

Получаем

$$Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{U_1^2}{2} = 120 \text{ мДж}.$$

Задача 41. *Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластины 2 мкФ. Конденсатор зарядили от источника напряжения с ЭДС 1000 В, после чего отключили от источника. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость 2.*

Работа внешних сил равна изменению энергии системы, в данном случае — изменению электростатической энергии конденсатора

$$A = W_2 - W_1,$$

где $W_1 = \frac{(\varepsilon C)U^2}{2}$ — начальная энергия, $W_2 = \frac{CU'^2}{2}$ — конечная энергия. Конечное напряжение найдем из закона сохранения заряда: $(\varepsilon C)U = CU'$. Получаем

$$A = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = 2 \text{ Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Закон Кулона. Принцип суперпозиции (1–4)

9.1. Два точечных заряда взаимодействуют с силой 8 мН. Какова будет сила взаимодействия (в мН) между зарядами, если, не меняя расстояния между ними, величину каждого из зарядов увеличить в 2 раза?

9.2. Во сколько раз надо увеличить расстояние между двумя точечными зарядами, чтобы сила взаимодействия осталась прежней при увеличении одного из зарядов в 4 раза?

9.3. Два точечных заряда находятся в вакууме на расстоянии 0,03 м друг от друга. Если их поместить в жидкий диэлектрик и увеличить расстояние между ними на 3 см, то сила взаимодействия зарядов уменьшится в 8 раз. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

9.4. Точечный заряд 1 мкКл в керосине ($\varepsilon = 2$) взаимодействует со вторым зарядом, находящимся на расстоянии 10 см, с силой 1,8 Н. Какова величина второго заряда (в мкКл)? Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.5. Два точечных заряда взаимодействуют в вакууме на расстоянии 10 см с такой же силой, как в диэлектрике на расстоянии 5 см. Определите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

9.6. Два точечных заряда взаимодействуют в вакууме на расстоянии 5 см с силой 120 мкН, а в жидком диэлектрике на расстоянии 10 см — с силой 15 мкН. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

9.7. Два одинаковых маленьких металлических шарика находятся на расстоянии 1 м друг от друга. Заряд одного шарика в 4 раза больше заряда другого. Шарики привели в соприкосновение и развели на некоторое расстояние. Найдите это расстояние (в см), если сила взаимодействия шариков осталась прежней.

9.8. Два одинаковых проводящих шарика, обладающих зарядами 50 нКл и 10 нКл, находятся на некотором расстоянии друг от друга. Их приводят в соприкосновение и разводят на прежнее расстояние. На сколько процентов увеличится в результате сила взаимодействия?

9.9. Шарик массой 90 мг подвешен на непроводящей нити и имеет заряд 10 нКл. После того, как под шариком на расстоянии 10 см от него поместили точечный заряд другого знака, натяжение нити увеличилось вдвое. Найдите величину этого заряда (в нКл). $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с^2.

9.10. Несколько одинаково заряженных шариков одного размера и массы подвешены на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке. Опуская шарики в жидкий диэлектрик, заметили, что угол отклонения нитей от вертикали в воздухе и в диэлектрике остается одним и тем же. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если его плотность в 1,25 раза меньше плотности материала шариков.

9.11. Два одинаковых маленьких шарика массой 80 г каждый подвешены к одной точке на нитях длиной 30 см. Какой заряд (в мкКл) надо сообщить каждому шарику, чтобы нити разошлись под прямым углом друг к другу? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с^2.

9.12. Два маленьких шарика массой 6 г каждый подвешены к одной точке на нитях длиной 13 см. Какой заряд (в нКл) надо сообщить каждому шарику, чтобы они разошлись на расстояние 24 см? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с^2.

9.13. Вокруг точечного заряда 5 нКл по окружности радиусом 3 см вращается с угловой скоростью 5 рад/с маленький отрицательно заряженный шарик. Найдите отношение заряда шарика к его массе (в мкКл/кг). $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф. Силу тяжести не учитывать.

9.14. Небольшой заряженный шарик, подвешенный на непроводящей нити, вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью 3 рад/с, причем в центре описываемой им окружности расположен точно такой же заряд, что имеет шарик. Если вращающийся шарик зарядить зарядом противоположного знака (но такой же абсолютной величины), то при том же радиусе вращения угловая скорость станет 4 рад/с. Найдите расстояние (в см) от точки подвеса шарика до плоскости его вращения. $g = 10$ м/с^2.

9.15. Два одинаковых положительных заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз возрастет величина силы, действующей на один из зарядов, если на середине прямой, соединяющей заряды, поместить третий, такой же по величине, но противоположный по знаку точечный заряд?

9.16. Точечные заряды q, q и $2q$ расположены на одной прямой один за другим на одинаковом расстоянии. На средний заряд действует сила 8 Н. Какая сила действует на заряд $2q$?

9.17. Когда посередине между двумя одинаковыми зарядами поместили третий заряд, система зарядов оказалась в равновесии. Во сколько раз величина этого заряда меньше величины каждого из двух крайних зарядов?

9.18. Два точечных заряда по 8 нКл каждый находятся на расстоянии 3 см. С какой силой (в мкН) они действуют на точечный заряд 1 нКл, находящийся на расстоянии 3 см от каждого из них? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф. $\sqrt{3} = 1{,}7$.

9.19. Четыре одинаковых точечных заряда по 10 нКл каждый расположены в вершинах квадрата со стороной 3 мм. Найдите силу (в мН), действующую со стороны трех зарядов на четвертый. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф. $\sqrt{2} = 1{,}4$.

9.20. В двух противоположных вершинах квадрата находятся одинаковые заряды 1 мкКл. Во сколько раз увеличится сила, действующая на один из этих зарядов, если в две другие вершины квадрата поместить заряды 1 мкКл и –1 мкКл?

Напряженность поля

а) связь между силой и напряженностью (5–6)

9.21. Заряженная частица создает в некоторой точке в вакууме напряженность 60 В/м. Какая сила (в нН) будет действовать на заряд 5 нКл, помещенный в эту точку, если всю систему поместить в керосин, диэлектрическая проницаемость которого 2?

9.22. В однородном электрическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вверх, находится в равновесии пылинка массой 0,03 мкг с зарядом 3 пКл. Определите напряженность поля. $g = 10$ м/с^2.

9.23. Во сколько раз увеличится сила натяжения нити, на которой висит шарик массой 0,1 кг с зарядом 10 мкКл, если систему поместить в однородное электрическое поле с напряженностью 200 кВ/м, вектор которой направлен вертикально вниз? $g = 10$ м/с^2.

9.24. Шарик массой 4,5 г с зарядом 0,1 мкКл помещен в масло плотностью 800 кг/м^3. Плотность материала шарика 1500 кг/м^3. Определите напряженность электрического поля (в кВ/м), в которое следует поместить шарик, чтобы он находился в равновесии. $g = 10$ м/с^2.

9.25. Маленький шарик, подвешенный на шелковой нити, имеет заряд 49 нКл. В горизонтальном электрическом поле с напряженностью 100 кВ/м нить отклонилась от вертикали на угол, тангенс которого 0,125. Найдите массу (в г) шарика. $g = 9{,}8$ м/с^2.

9.26. Найдите величину ускорения, которое приобретает частица массой 0,1 г с зарядом 4 мкКл под действием однородного электрического поля с напряженностью 1000 В/м. Силу тяжести не учитывать.

9.27. Найдите ускорение, с которым падает шарик массой 0,01 кг с зарядом 1 мкКл в однородном электрическом поле с напряженностью 20 кВ/м. Вектор напряженности направлен вертикально вверх. $g = 10$ м/с^2. Трение не учитывать.

9.28. Когда телу сообщили заряд $7 \cdot 10^{-8}$ Кл, оно за 10 с падения у земной поверхности прошло путь на 5 см больший, чем в отсутствие заряда. Чему равна масса (в г) тела, если напряженность электрического поля 100 В/м?

9.29. Пылинка массой 10^{-3} г падает в воздухе с постоянной скоростью 0,2 м/с. С какой установившейся скоростью (в см/с) будет подниматься пылинка, если ее поместить в электрическое поле с напряженностью 10 кВ/м и сообщить ей заряд 1,2 нКл? Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости. $g = 10$ м/с^2.

9.30. Незаряженная пылинка массой 5 мг падает в воздухе с постоянной скоростью 15 см/с. С какой установившейся скоростью (в см/с) будет двигаться пылинка, если ее поместить в горизонтальное электрическое поле с напряженностью 3 кВ/м и сообщить ей заряд 40 нКл? Сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости. $g = 10$ м/с^2.

9.31. Протон, движущийся со скоростью 100 км/с, влетает в электрическое поле с напряженностью 50 В/м в направлении, противоположном направлению силовых линий поля. Через сколько микросекунд скорость протона станет равной нулю? Отношение заряда протона к его массе 10^8 Кл/кг.

9.32. Вдоль линий напряженности однородного электрического поля движется, замедляясь, электрон. В некоторый момент скорость электрона 1,8 Мм/с. Какова напряженность поля, если скорость электрона уменьшилась вдвое через 0,1 мкс? Удельный заряд электрона принять равным $1{,}8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

9.33. Маленький шарик массой 0,01 мг, несущий заряд 10 нКл, помещен в однородное электрическое поле, направленное горизонтально. Шарик начинает двигаться и через 4 с приобретает скорость 50 м/с. Найдите напряженность электрического поля (в мВ/м). $g = 10$ м/с^2.

9.34. Заряженная частица массой 1 г с зарядом 1 нКл влетает в однородное электрическое поле с напряженностью 20 В/м перпендикулярно линиям напряженности поля. Найдите отклонение (в мкм) частицы от первоначального направления через 2 с после попадания в поле. Силу тяжести не учитывать.

9.35. Протон и альфа-частица, двигаясь с одинаковыми скоростями, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона при вылете из конденсатора будет больше отклонения альфа-частицы?

9.36. Электрон, пролетая между обкладками конденсатора, длина которых 30 см, отклоняется на 1,8 мм от первоначального направления, параллельного обкладкам конденсатора. Определите начальную скорость (в Мм/с) электрона, если напряженность электрического поля между обкладками конденсатора 200 В/м. Отношение заряда электрона к его массе $1{,}8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

9.37. На какое расстояние (в см) был перемещен заряд 70 мкКл вдоль линии напряженности однородного электрического поля, если при этом полем была совершена работа 1,4 мДж? Напряженность электрического поля 200 В/м.

9.38. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы переместить заряд 70 мкКл в однородном поле с напряженностью 10 кВ/м на расстояние 0,5 м, если перемещение происходит под углом 60° к силовым линиям поля? В ответе указать модуль работы.

б) вычисление напряженности. Принцип суперпозиции (7–8)

9.39. Точечный заряд создает в некоторой точке в вакууме поле напряженностью 600 В/м. Какова будет напряженность поля в этой точке, если заряд увеличится в 5 раз, а пространство вокруг него будет заполнено керосином с диэлектрической проницаемостью 2?

9.40. Напряженность поля, создаваемого небольшим зарядом на расстоянии 10 см от него, равна 800 В/м. Найдите напряженность поля в точке на расстоянии 20 см от заряда.

9.41. Два разноименных точечных заряда одинаковой величины 4 нКл находятся на расстоянии 60 см друг от друга. Найдите напряженность поля в точке, которая находится на середине отрезка, соединяющего заряды. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.42. Расстояние между двумя положительными точечными зарядами 8 см. На расстоянии 6 см от первого заряда на прямой, соединяющей заряды, напряженность поля равна нулю. Найдите отношение величины первого заряда к величине второго.

9.43. Найдите величину напряженности поля, создаваемого двумя точечными зарядами 2 нКл и –4 нКл, в точке, лежащей на середине отрезка, соединяющего заряды, если напряженность поля, создаваемого в этой точке только первым зарядом, равна 2 В/м.

9.44. В вершинах острых углов ромба со стороной 1 м помещены положительные заряды по 1 нКл, а в вершине одного из тупых углов — положительный заряд 5 нКл. Определите напряженность электрического поля в четвертой вершине ромба, если меньшая диагональ ромба равна его стороне. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.45. В вершинах квадрата со стороной 10 см расположены три положительных заряда по 10^{-11} Кл каждый и один отрицательный $2 \cdot 10^{-11}$ Кл. Определите напряженность поля в центре квадрата. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.46. Разноименные точечные заряды одинаковой величины 36 нКл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной 2 м. Определите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.47. Разноименные точечные заряды одинаковой величины 5 нКл расположены на расстоянии 2,4 м друг от друга. Определите напряженность электрического поля в точке, удаленной на 3 м от каждого из зарядов. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.48. Точечные заряды 50 нКл и –32 нКл находятся на расстоянии 9 см друг от друга. Найдите напряженность поля (в кВ/м) в точке, отстоящей на 5 см от первого заряда и на 6 см от второго заряда. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.49. Точечные заряды 24 пКл и 135 пКл находятся на расстоянии 11 см друг от друга. Найдите напряженность поля в точке, отстоящей на 4 см от первого заряда и на 9 см от второго заряда. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.50. В двух вершинах правильного треугольника со стороной 20 см находятся точечные заряды по 14 пКл каждый, а в третьей вершине — точечный заряд –2 пКл. Найдите напряженность поля в середине стороны, соединяющей разноименные заряды. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.51. В двух вершинах правильного треугольника со стороной 30 см находятся разноименные заряды одинаковой величины 25 пКл, а в третьей вершине — заряд 55 пКл. Найдите напряженность поля в центре треугольника. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.52. В вершинах правильного шестиугольника со стороной 10 см поочередно расположены заряды +5 нКл и –5 нКл. Определите напряженность поля, создаваемого всеми зарядами в центре фигуры.

9.53. В трех смежных вершинах правильного шестиугольника со стороной 10 см расположены заряды по +5 нКл, а в трех других — заряды по –5 нКл. Определите напряженность поля (в кВ/м), создаваемого всеми зарядами в центре фигуры. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Разность потенциалов

а) разность потенциалов для однородного поля (9–11)

9.54. Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на расстоянии 0,03 м друг от друга и лежащими на одной силовой линии однородного электрического поля, равна 12 В. Найдите разность потенциалов между точками, лежащими на той же силовой линии на расстоянии 15 см друг от друга.

9.55. Напряженность электрического поля в плоском конденсаторе 30 кВ/м. Разность потенциалов между обкладками 300 В. Каково расстояние (в мм) между обкладками конденсатора?

9.56. Две параллельные металлические пластины, находящиеся на расстоянии 0,1 м друг от друга в вакууме, заряжены до разности потенциалов 1 кВ. Какая сила будет действовать на заряд 10^{-4} Кл, помещенный между пластинами? Поле между пластинами считать однородным.

9.57. Между горизонтальными пластинами плоского конденсатора находится в равновесии пылинка массой $4{,}8\cdot10^{-12}$ кг. Во сколько раз заряд пылинки больше заряда электрона, если напряжение на конденсаторе 3000 В, а расстояние между пластинами 2 см? Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $g = 10$ м/с^2.

9.58. Между горизонтальными пластинами плоского конденсатора на пластмассовой пружине подвешен заряженный шарик. Когда конденсатор присоединяют к источнику напряжения с ЭДС 500 В, пружина растягивается на 1 см. Найдите заряд (в мкКл) шарика, если жесткость пружины 10 Н/м, а расстояние между пластинами конденсатора 20 см.

9.59. Отрицательно заряженная пылинка массой 10^{-9} г находится в равновесии внутри плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. К конденсатору приложена разность потенциалов 500 В. На сколько вольт надо изменить разность потенциалов между пластинами, чтобы пылинка осталась в равновесии после того, как с нее стекло 500 электронов? Расстояние между пластинами 5 мм. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $g = 10$ м/с^2.

9.60. Электрон через отверстие в обкладке влетает в поле плоского конденсатора в направлении линий напряженности и полностью теряет свою скорость, пройдя путь 0,003 м. На каком расстоянии (в мм) электрон потеряет скорость, если его начальную скорость и разность потенциалов конденсатора уменьшить в 3 раза?

9.61. Заряженная частица движется против линий напряженности однородного электрического поля. Начальная скорость частицы 1 Мм/с, ее удельный заряд 10^{11} Кл/кг. Какое расстояние (в см) пройдет частица до остановки, если напряженность поля равна 100 В/м?

9.62. В плоский конденсатор длиной 10 см и с расстоянием между обкладками 1 см влетает электрон с энергией $8\cdot10^{-15}$ Дж под углом 15° к пластинам. Чему равно напряжение между пластинами, при котором электрон на выходе из конденсатора будет двигаться параллельно им? Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

9.63. Шарик массой 10 г, имеющий заряд 100 мкКл, подвешен на нити длиной 50 см. Он находится в однородном электрическом поле с напряженностью 100 В/м, силовые линии которого горизонтальны и направлены слева направо. Шарик отвели влево так, что он оказался на 30 см ниже точки подвеса нити, и отпустили. Найдите силу натяжения (в мН) нити в тот момент, когда она проходит вертикальное положение. $g = 10$ м/с^2.

б) вычисление потенциала. Работа и разность потенциалов (12–17)

9.64. В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной 30 см находятся заряды 50 нКл каждый. Найдите потенциал* (в кВ) в третьей вершине. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.65. В вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника находятся точечные заряды 1, 2 и 3 нКл. Чему равен потенциал в середине гипотенузы, если ее длина 20 см? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.66. В трех вершинах правильного тетраэдра с ребром 30 см находятся точечные заряды 3, 5 и –2 нКл. Найдите потенциал в четвертой вершине. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.67. В трех вершинах правильного шестиугольника со стороной 27 см находятся заряды 1 нКл, а в трех других — заряды 2 нКл. Найдите потенциал в центре шестиугольника. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.68. По тонкому кольцу радиусом 6 см распределен заряд 4 нКл. Найдите потенциал поля кольца в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии 8 см от его центра. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.69. В центре сферы, несущей равномерно распределенный положительный заряд 10 нКл, находится маленький шарик с отрицательным зарядом –5 нКл. Найдите потенциал электрического поля в точке, находящейся вне сферы на расстоянии 9 м от ее центра. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.70. Какую работу (в мкДж) совершает электростатическое поле при перемещении заряда 2 нКл из одной точки поля в другую, если разность потенциалов между ними равна 500 В?

9.71. Какая работа совершается при переносе заряда 8 мкКл из точки поля с потенциалом 20 В в другую точку с потенциалом 12 В? В ответе укажите абсолютную величину работы в мкДж.

9.72. При переносе точечного заряда 10 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 20 см от поверхности равномерно заряженного шара, необходимо совершить работу 0,5 мкДж. Радиус шара 4 см. Найдите потенциал на поверхности шара.

9.73. Работа электрического поля при перемещении отрицательно заряженной частицы по направлению к закрепленной частице, заряженной положительно, равна 9 Дж. При этом частица переместилась на половину первоначального расстояния до закрепленной частицы. Какая работа совершена электрическим полем на первой половине этого пути?

9.74. Скорость заряженной частицы массой 2 г в начальной точке движения равна 0,02 м/с, а в конечной 0,1 м/с. Найдите разность потенциалов между этими точками, если заряд частицы равен 30 нКл.

9.75. Возле поверхности шара радиусом 6 см, равномерно заряженного зарядом 4 нКл, находится частица массой 3 мг с зарядом 2 нКл. Частицу освобождают. Найдите скорость (в см/с) частицы в тот момент, когда она удалится от поверхности шара на расстояние, равное его радиусу. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

---

* Потенциал на бесконечности во всех задачах этого раздела принять равным нулю.

9.76. В трех вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника закреплены одинаковые точечные заряды по 20 нКл каждый. Посередине гипотенузы помещают заряженную частицу массой 3 мг и зарядом 40 нКл и отпускают. Какую скорость приобретет частица на большом расстоянии от зарядов? Гипотенуза треугольника 5 см. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.77. В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной 12 см закреплены точечные заряды по 6 нКл каждый, а в третьей вершине находится частица массой 6 мг, несущая заряд –30 нКл. Частицу отпускают, и она приходит в движение. Чему равна скорость частицы в тот момент, когда она находится точно между зарядами? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.78. По тонкому кольцу радиусом 4 см равномерно распределен заряд 50 нКл. На оси кольца на расстоянии 3 см от его центра помещают частицу с зарядом –18 нКл и массой 1 мг и отпускают. Найдите скорость частицы в тот момент, когда она будет пролетать через центр кольца. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Энергия взаимодействия системы зарядов (18–25)

9.79. Чему равна энергия (в мДж) взаимодействия точечных зарядов 2 мкКл и 4 мкКл, находящихся на расстоянии 30 см друг от друга? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.80. Чему равна энергия (в мДж) взаимодействия системы трех зарядов 2, 1 и 3 мкКл, расположенных в указанном порядке вдоль прямой линии, если расстояние между соседними зарядами равно 30 см? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.81. Чему равна энергия (в мДж) взаимодействия системы трех зарядов 2, –1 и 3 мкКл, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.82. Найдите энергию (в мДж) взаимодействия системы четырех зарядов 1, 2, 3 и 4 мкКл, расположенных в вершинах правильного тетраэдра с ребром 50 см. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.83. Четыре одинаковых заряда 2 мкКл расположены на прямой линии. Расстояние между соседними зарядами равно 60 см. Какую надо совершить работу (в мДж), чтобы разместить эти заряды в вершинах правильного тетраэдра с ребром 60 см? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.84. В вершинах острых углов ромба закреплены заряды 7 нКл, а в вершинах тупых углов находятся две частицы массой 2 мг и зарядом 2 нКл каждая. Частицы одновременно отпускают, и они приходят в движение. Чему будет равна скорость частиц после их разлета на большое расстояние? Сторона ромба 3 см, а его острый угол 60°. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.85. В одной вершине равностороннего треугольника со стороной 2 см закреплен точечный заряд 40 нКл, а в двух других находятся частицы массой 5 мг и зарядом 10 нКл каждая. Частицы отпускают, и они приходят в движение. Чему будет равна их скорость на большом расстоянии от заряда? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.86. Три одинаковых шарика, несущие одинаковый заряд 2 мкКл, соединены попарно тремя одинаковыми пружинами и удерживаются на расстоянии 5 см друг от друга. Шарики отпускают, и они приходят в движение. Найдите жесткость каждой пружины, если в начальном положении они не деформированы, а максимальное расстояние между шариками в процессе движения в три раза больше начального. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.87. Два небольших тела массой 5 г каждое, заряженные одинаковым зарядом 10 мкКл, находятся на горизонтальной плоскости на расстоянии 10 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость равен 0,5. Какую минимальную начальную скорость надо сообщить одному из тел, чтобы сдвинуть с места второе тело? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с^2.

9.88. Два небольших тела массой 100 г каждое, несущие заряды 10 мкКл, удерживают на горизонтальной плоскости на расстоянии 1 м друг от друга. Коэффициент трения тел о плоскость 0,1. Тела одновременно освобождают. Найдите максимальную скорость тел в процессе движения. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с^2.

9.89. Два маленьких шарика массой 150 г, лежащие на гладкой горизонтальной плоскости, соединены недеформированной пружиной длиной 40 см и жесткостью 10 Н/м. После сообщения шарикам зарядов одного знака длина пружины стала равна 80 см. Какую минимальную одинаковую скорость надо сообщить шарикам навстречу друг другу, чтобы они сблизились до прежнего расстояния?

9.90. На высоте 3 м над землей закреплен заряд –4 мкКл, а под ним на высоте 2,2 м находится частица массой 0,9 г с зарядом 1 мкКл. Какую скорость надо сообщить частице вертикально вниз, чтобы она достигла поверхности земли? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф, $g = 10$ м/с^2.

9.91. На расстоянии 1 м от закрепленного заряда –100 нКл расположена частица массой 0,1 г с зарядом 2 мкКл. Заряды находятся в однородном внешнем поле, напряженность которого равна 100 В/м и направлена от отрицательного заряда к положительному. Какую минимальную скорость надо сообщить частице в направлении силовых линий, чтобы она улетела на бесконечность? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф. Силу тяжести не учитывать.

9.92. Две частицы, имеющие массы 2 и 3 г и заряды 3 и –12 мкКл, удаляются друг от друга. В некоторый момент они находятся на расстоянии 10 м и имеют одинаковые скорости 3 м/с. Найдите наибольшее расстояние между частицами в процессе движения. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.93. Две частицы имеют массу 1 г каждая и заряды 1 и –1 мкКл. В начальный момент расстояние между частицами 3,2 м, одна из частиц покоится, а другая удаляется от нее со скоростью 3 м/с. Найдите максимальное расстояние между частицами в процессе движения. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.94. Две частицы имеют массы 4 и 5 г и заряды 1 и –1 мкКл. В начальный момент расстояние между частицами 10 см, первая частица неподвижна, а вторая удаляется от нее со скоростью v. При каком минимальном значении v эта частица не столкнется с первой частицей? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.95. Два диэлектрических шара равномерно заряжены одинаковым зарядом 3 мкКл. Масса первого шара 6 г, масса второго 12 г, радиус каждого шара 1 см. Вначале шары удерживают так, что они касаются друг друга, а затем отпускают. Найдите конечную скорость первого шара. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.96. Два диэлектрических шара равномерно заряжены по объему, первый — зарядом 1 мкКл, второй — зарядом 0,6 мкКл. Масса первого шара 6 г, второго — 4 г, радиус каждого шара 1 см. Вначале первый шар покоится, а второй издалека приближается к нему со скоростью v. При каком минимальном значении v шары коснутся друг друга? $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.97. Два диэлектрических шара радиусом 1 см каждый равномерно заряжены одинаковым зарядом 0,4 мкКл. В начальный момент один из шаров массой 16 г покоится, а второй массой 8 г издалека приближается к нему со скоростью 6 м/с. Найдите скорость первоначально покоившегося шара сразу после их соударения, считая его абсолютно упругим. $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Проводящий шар (26–29)

9.98. Металлическому шару, находящемуся в воздухе, сообщили заряд 1 нКл. Радиус шара 15 см. Определите потенциал вне шара на расстоянии 10 см от его поверхности. $k = 9 \cdot 109$ м/Ф.

9.99. Металлический шар радиусом 5 см заряжен до потенциала 150 В. Чему равна напряженность поля в точке, находящейся на расстоянии 5 см от поверхности шара?

9.100. Тысяча одинаковых шарообразных капелек ртути заряжена до одинакового потенциала 0,01 В. Определите потенциал большой шарообразной капли, получившейся в результате слияния малых капель.

9.101. Два удаленных друг от друга проводящих шара имеют радиусы 3 и 7 см и потенциалы 20 и 30 В соответственно. Каким станет потенциал шаров после соединения их тонким проводом?

9.102. Металлические шары, заряженные одинаковым зарядом, имеют потенциалы 20 В и 30 В. Каким будет потенциал этих шаров, если соединить их проволокой? Емкостью соединительной проволоки пренебречь. Расстояние между шарами велико по сравнению с их радиусами.

9.103. Две концентрические проводящие сферы имеют радиусы 19 и 20 см. Внутренняя сфера заряжена, заряд внешней равен нулю. Во сколько раз уменьшится потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить?

9.104. Две концентрические проводящие сферы имеют радиусы 2 и 12 см. Внутренняя сфера заряжена, заряд внешней равен нулю. Во сколько раз уменьшится потенциал внутренней сферы, если ее соединить с внешней сферой тонкой проводящей проволокой?

9.105. Уединенная проводящая сфера радиусом 2 см заряжена зарядом 10 нКл. Во сколько раз уменьшится ее потенциал, если на расстоянии 3 см от ее центра поместить точечный заряд –12 нКл?

Плоский конденсатор. Электроемкость (30–32)

9.106. Чему равна емкость (в мкФ) конденсатора, если при увеличении его заряда на 30 мкКл разность потенциалов между пластинами увеличивается на 10 В?

9.107. Во сколько раз увеличится емкость плоского конденсатора, если площадь пластин увеличить в 8 раз, а расстояние между ними уменьшить в 2 раза?

9.108. Конденсатор образован двумя квадратными пластинами, отстоящими друг от друга в вакууме на расстояние 0,88 мм. Чему должна быть равна сторона (в см) квадрата, чтобы емкость конденсатора составляла 1 пФ? $\varepsilon_0 = 8{,}8 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

9.109. Емкость плоского конденсатора равна 6 мкФ. Чему будет равна его емкость (в мкФ), если расстояние между пластинами увеличить в 2 раза, а затем пространство между пластинами заполнить диэлектриком с $\varepsilon = 5$?

9.110. Плоский воздушный конденсатор емкостью 1 мкФ соединили с источником напряжения, в результате чего он приобрел заряд 10 мкКл. Расстояние между пластинами конденсатора 5 мм. Определите напряженность поля (в кВ/м) внутри конденсатора.

9.111. Расстояние между пластинами заряженного плоского конденсатора уменьшили в 2 раза. Во сколько раз увеличится при этом напряженность поля конденсатора, если он все время остается присоединенным к источнику напряжения?

9.112. Плоский воздушный конденсатор присоединен к источнику напряжения с ЭДС 200 В. На сколько уменьшится напряженность (в кВ/м) электрического поля в конденсаторе, если расстояние между пластинами увеличить от 1 см до 2 см?

9.113. Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно 2 см. Пластины заряжены до разности потенциалов 100 В. Чему будет равна разность потенциалов между пластинами, если, не изменяя заряда, расстояние между ними увеличить до 8 см?

9.114. Между обкладками изолированного плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов 400 В, находится пластина с диэлектрической проницаемостью 5, примыкающая вплотную к обкладкам. Какова будет разность потенциалов между обкладками конденсатора после удаления диэлектрика?

9.115. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора емкостью 100 мкФ, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе 20 кВ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение двух минут подзаряжать током 0,1 А?

9.116. С каким ускорением поднимается вертикально вверх пылинка массой 10^{-7} г, несущая заряд 1,77 пКл, в плоском конденсаторе с поверхностной плотностью заряда на обкладках 6 нКл/м^2? $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $g = 10$ м/с^2.

9.117. Внутри конденсатора, расстояние между обкладками которого 1 мм, находится пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью 3 и толщиной также 1 мм. С какой силой (в мН) давят обкладки на пластину, если заряд конденсатора 2 мкКл, а напряжение на конденсаторе 200 В?

9.118. Внутрь плоского конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, вводят пластину из диэлектрика, целиком заполняющую пространство между обкладками. Во сколько раз возрастет при этом сила притяжения между обкладками, если диэлектрическая проницаемость диэлектрика равна 4?

9.119. Круглую равномерно заряженную пластину радиусом 6 см поместили в однородное поле с напряженностью 10^4 В/м, направленной перпендикулярно пластине. Оказалось, что напряженность поля с одной стороны от пластины вблизи ее центра равна нулю. Чему равен заряд (в нКл) пластины? $\varepsilon_0 = 1/4\pi k$, $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

9.120. Одну пластину незаряженного конденсатора, обладающего емкостью 1 нФ, заземляют, а другую присоединяют длинным тонким проводом к удаленному проводящему шару радиусом 20 см, имеющему заряд 92 мкКл. Какой заряд (в мкКл) останется на шаре? $k = 9\cdot10^9$ м/Ф.

Соединение конденсаторов (33–39)

9.121. Какой должна быть емкость (в пФ) конденсатора, который надо соединить последовательно с конденсатором емкостью 800 пФ, чтобы получить батарею конденсаторов емкостью 160 пФ?

9.122. Плоский конденсатор емкостью 20 пФ соединяют последовательно с таким же конденсатором, но заполненным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 3. Найдите емкость (в пФ) такой батареи.

9.123. Воздушный плоский конденсатор емкостью 5 мкФ заполняют жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 6. Конденсатор какой емкости (в мкФ) надо соединить последовательно с данным, чтобы такая батарея вновь имела емкость 5 мкФ?

9.124. Два конденсатора, емкости которых 2 и 4 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения с ЭДС 75 В. Найдите разность потенциалов на конденсаторе большей емкости.

9.125. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику напряжения. Внутрь одного из них вносят диэлектрик ($\varepsilon = 3$), заполняющий все пространство между обкладками. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?

9.126. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряженность поля в этом конденсаторе?

9.127. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое уменьшают расстояние между пластинами, а у другого — втрое увеличивают. Во сколько раз уменьшится напряжение на втором конденсаторе?

9.128. Плоский конденсатор емкостью 5 пФ с расстоянием между пластинами 2 мм подключен к источнику напряжения с ЭДС 2 В. В пространство между обкладками вводят параллельно им плоскую металлическую пластину толщиной 1 мм так, что она полностью перекрывает полость внутри конденсатора. Определите величину заряда (в пКл), который пройдет через источник при введении пластины.

9.129. Во сколько раз увеличится емкость системы, состоящей из двух параллельно соединенных одинаковых воздушных конденсаторов, если один из них заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 5?

9.130. Два конденсатора емкостями 2 и 3 мкФ соединены последовательно, а к внешним их концам параллельно подсоединен третий конденсатор емкостью 0,8 мкФ. Какова емкость (в мкФ) всей системы конденсаторов?

9.131. Конденсаторы емкостями 10 и 1,5 мкФ соединены параллельно. Суммарный заряд конденсаторов 2,3 мкКл. Определите заряд (в мкКл) конденсатора большей емкости.

9.132. Конденсатор емкостью 1 мкФ, заряженный до 500 В, подключили параллельно незаряженному конденсатору емкостью 4 мкФ. Найдите разность потенциалов на конденсаторах.

9.133. Конденсатор, заряженный до разности потенциалов 100 В, подключается параллельно конденсатору вдвое большей емкости, заряженному до разности потенциалов 250 В. Какая разность потенциалов установится между обкладками конденсаторов?

9.134. Конденсатор емкостью 1,2 мкФ заряжен до напряжения 135 В. Его соединяют параллельно с конденсатором емкости 0,8 мкФ, напряжение на котором 110 В. Какой заряд (в мкКл) пройдет по соединительным проводам?

9.135. Два конденсатора, емкость одного из которых в 4 раза больше, чем емкость другого, соединили последовательно и подключили к источнику напряжения с ЭДС 75 В. Затем заряженные конденсаторы отключили от источника и друг от друга и соединили параллельно. Чему будет равно после этого напряжение на конденсаторах?

9.136. Во сколько раз увеличится емкость плоского конденсатора, пластины которого расположены вертикально, если конденсатор погрузить до половины в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью 5?

9.137. Плоский конденсатор, пластины которого расположены вертикально, погружают до половины в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью 5. Во сколько раз нужно после этого увеличить расстояние между пластинами, чтобы емкость конденсатора стала такой же, как до погружения?

9.138. Конденсатор, имеющий заряд 10 нКл, площадь пластин 10 см^2 и расстояние между пластинами 17,7 мм, погружают в керосин при вертикальном положении пластин на 2/3 его объема. Чему равно напряжение (в кВ) на таком конденсаторе? Диэлектрическая проницаемость керосина 2. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

9.139. Внутрь плоского конденсатора параллельно его обкладкам помещают диэлектрическую пластину, площадь которой равна площади обкладок, а толщина втрое меньше расстояния между ними. Чему равна диэлектрическая проницаемость пластины, если емкость конденсатора возросла на 20%?

Энергия поля в конденсаторе (40–41)

9.140. Конденсатору емкостью 2 мкФ сообщен заряд 0,01 Кл. Обкладки конденсатора соединили проводником. Найдите количество теплоты, выделившееся в проводнике при разрядке конденсатора.

9.141. Напряженность электрического поля плоского воздушного конденсатора емкостью 4 мкФ равна 1000 В/м. Расстояние между обкладками конденсатора 1 мм. Определите энергию (в мкДж) электрического поля конденсатора.

9.142. При разрядке батареи, состоящей из 20 параллельно включенных конденсаторов одинаковыми емкостями 4 мкФ, выделилось количество теплоты 10 Дж. До какой разности потенциалов были заряжены конденсаторы?

9.143. Расстояние между обкладками плоского воздушного конденсатора 0,3 см. Во сколько раз увеличится энергия электрического поля конденсатора, если обкладки конденсатора раздвинуть до расстояния 1,2 см? Конденсатор после сообщения ему электрического заряда был отключен от источника напряжения.

9.144. Батарея из трех последовательно соединенных одинаковых конденсаторов подсоединена к источнику напряжения. К одному из конденсаторов батареи подсоединяют параллельно еще один такой же конденсатор. На сколько процентов увеличится при этом электрическая энергия, запасенная в батарее?

9.145. Конденсатор емкостью 14 мкФ, заряженный до напряжения 3 кВ, разрядили через сопротивление, погруженное в сосуд с водой. На сколько увеличится температура (в мК) воды, если ее масса 100 г? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), теплоемкостями сопротивления и сосуда пренебречь.

9.146. Конденсатор емкостью 8 мкФ, заряженный до напряжения 100 В, подключают параллельно конденсатору такой же емкости, но заряженному до напряжения 200 В. Какое количество теплоты (в мДж) выделится при этом?

9.147. Обкладки конденсатора емкостью 30 мкФ, заряженного до напряжения 200 В, соединяют с противоположно заряженными обкладками конденсатора емкостью 10 мкФ, заряженного до напряжения 400 В. Какое количество теплоты (в мДж) выделилось при этом?

9.148. Плоский воздушный конденсатор емкостью 6 мкФ заряжен до напряжения 200 В и отключен от источника. Пластины медленно раздвигают, увеличивая расстояние между ними в 4 раза. Какую работу (в мДж) при этом совершают?

9.149. Внутри плоского конденсатора параллельно его обкладкам находится стеклянная пластина, площадь которой равна площади обкладок, а толщина — вдвое меньше расстояния между ними. Конденсатор заряжают до напряжения 300 В и отключают от источника. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора? Емкость конденсатора без пластины 4 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 2.

9.150. Внутри плоского конденсатора находится стеклянная пластина, толщина которой равна расстоянию между обкладками, а площадь — вдвое меньше их площади. Конденсатор заряжают до напряжения 200 В и отключают от источника напряжения. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора? Емкость конденсатора без пластины 6 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 2.

9.151. Два одинаковых по размерам плоских конденсатора соединены параллельно, заряжены до напряжения 200 В и отключены от источника напряжения. Один из конденсаторов пуст, а другой содержит стеклянную пластину, целиком заполняющую зазор между его обкладками. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора, если емкость пустого конденсатора 6 мкФ? Диэлектрическая проницаемость стекла 1,5.

Глава 10
Постоянный ток

Примеры решения задач

Задача 1. *На конденсатор переменной емкости подано напряжение 100 В. Какова сила тока (в мкА), текущего по проводам, если емкость конденсатора изменяется равномерно со скоростью 10 нФ/с?*

Заряд на конденсаторе равен $q(t) = C(t)U$. За время Δt от пластин конденсатора по подводящим проводам пройдет заряд $\Delta q = \Delta C \cdot U$. Значит, сила тока равна

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = U\frac{\Delta C}{\Delta t} = 1 \text{ мкА}.$$

Задача 2. *За первую секунду сила тока в проводнике равномерно увеличивается от нуля до 7 А, затем 1 с остается постоянной, а затем равномерно уменьшается до нуля за 1 с. Какой заряд прошел через проводник за 3 с?*

При равномерном (линейном) изменении силы тока средний ток, через который выражается прошедший заряд, равен среднему арифметическому начального и конечного значения

$$q = I_{\text{ср}}\Delta t = \frac{I_{\text{н}} + I_{\text{к}}}{2}\Delta t.$$

В данном случае $q = 0{,}5(0+7)\cdot 1 + 7\cdot 1 + 0{,}5(7+0)\cdot 1 = 14$ (Кл).

Задача 3. *В двухэлектродной лампе с плоскими электродами напряжение составляет 22 кВ. Электроны ударяют об анод с общей силой 1 мкН. Какой силы ток (в мА) течет через лампу? Отношение заряда электрона к его массе $1{,}76\cdot 10^{11}$ Кл/кг.*

При неупругом ударе электрона об анод его импульс изменяется от mv до 0, изменение импульса за время Δt равно

$$\Delta p = mvN = mv\frac{q}{e} = mv\frac{I\Delta t}{e},$$

где $q = Ne$ — заряд, прошедший через лампу за время Δt. Сила, действующая на анод, равна

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mvI}{e}.$$

Скорость электронов выразим через ускоряющую разность потенциалов между анодом и катодом: $mv^2/2 = eU$. Выражая из последних двух уравнений силу тока, находим

$$I = \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{F}{\sqrt{2U}} = 2 \text{ мА}.$$

Задача 4. *При пропускании тока через проводник его сопротивление увеличилось на 10 Ом. На сколько при этом возросла температура проводника, если его температурный коэффициент сопротивления равен 0,005 1/К? Сопротивление проводника при 0°С равно 100 Ом.*

Выразим сопротивления проводника до и после его нагревания

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1), \quad R_2 = R_0(1 + \alpha t_2),$$

и вычтем первое уравнение из второго. Получим $\Delta R = R_0 \alpha \Delta t$. Изменение температуры равно

$$\Delta t = \frac{\Delta R}{\alpha R_0} = 20 \text{ К}.$$

Задача 5. *Проволоку длиной 1 м растянули так, что ее длина стала 110 см. На сколько процентов увеличилось при этом ее сопротивление?*

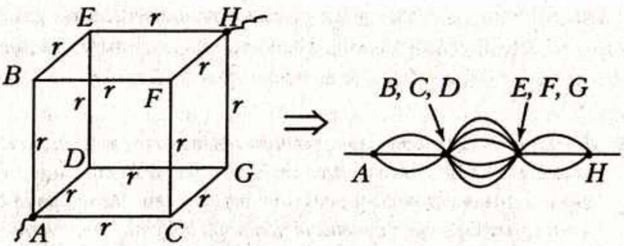
Если пренебречь изменением объема проволоки, то получим, что при увеличении в 1,1 раза длины проволоки во столько же раз уменьшилась площадь ее поперечного сечения. Значит, сопротивление проволоки $R = \rho l/S$ увеличилось при этом в 1,21 раза, т.е. на 21% от первоначального значения.

Задача 6. *Отрезок однородной проволоки разрезали на 8 одинаковых частей и соединили эти части параллельно. Сопротивление такой системы оказалось равным 1 Ом. Каким было сопротивление проволоки до того, как ее разрезали?*

При разрезании проволоки на 8 одинаковых кусочков сопротивление каждого кусочка будет в 8 раз меньше сопротивления проволоки. Если после этого соединить получившиеся 8 сопротивлений параллельно, сопротивление уменьшится еще в 8 раз. В результате сопротивление уменьшится в 64 раза. Значит, сопротивление проволоки было 64 Ом.

Задача 7. *В каждое из ребер куба включено сопротивление 6 Ом. Чему равно сопротивление получившейся системы при подключении ее вершинами, находящимися на концах большой диагонали куба?*

Не следует думать, что вычисление сложного сопротивления можно всегда свести к схеме, содержащей только параллельные и последовательные соединения.



Однако в некоторых случаях, опираясь на симметрию схемы, можно произвести такие ее преобразования, что останутся только такие соединения. Перечислим основные виды преобразований, не изменяющих сопротивление схемы, и проиллюстрируем их в этой и последующих задачах.

а) Метод склейки узлов. Если два или больше узлов имеют одинаковый потенциал, то их можно соединить в один узел.

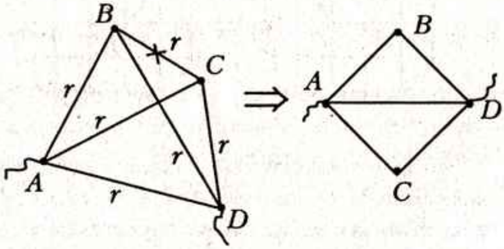
б) Метод удаления сопротивлений. Сопротивление можно удалить, если через него не течет ток (узлы, которые оно соединяет, имеют одинаковый потенциал).

в) Метод разрезания узлов. Действие, противоположное склейке.

Данная задача иллюстрирует метод склейки узлов. Из симметрии схемы следует, что узлы B, C и D имеют одинаковый потенциал, и то же самое относится к узлам E, F, G. После склеивания этих узлов получаем три последовательно соединенные группы, содержащие параллельно соединенные сопротивления. Сопротивление схемы равно $R = r/3 + r/6 + r/3 = 5r/6 = 5$ Ом.

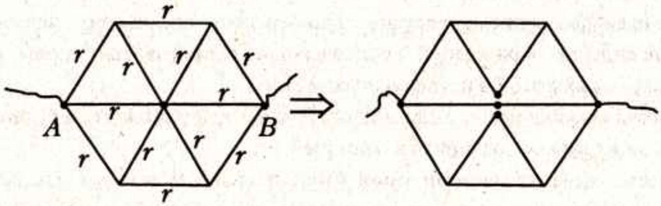
Задача 8. *В каждое из ребер тетраэдра включено сопротивление 20 Ом. Чему равно сопротивление получившейся системы при подключении ее двумя вершинами?*

Данная задача иллюстрирует метод удаления сопротивлений. Из симметрии схемы следует, что узлы B и C имеют одинаковый потенциал, и сопротивление между ними можно удалить. После этого сопротивление легко вычисляется: $R = r/2 = 10$ Ом.



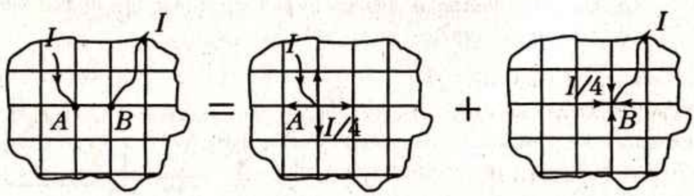
Замечание. Обобщением этого результата является следующее утверждение: если каждая пара из N узлов соединена сопротивлением r, то сопротивление схемы при включении любыми двумя узлами можно вычислить, удалив все сопротивления между другими узлами. Получаем параллельно соединенные сопротивления: одно r (между узлами включения) и $N-2$ по $2r$.

Задача 9. *В каждую из сторон правильного шестиугольника включено сопротивление 5 Ом. Кроме того, каждая из вершин соединена с центром шестиугольника таким же сопротивлением. Чему равно сопротивление получившейся системы при подключении противоположными вершинами?*



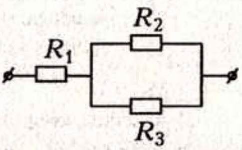
Данная задача иллюстрирует метод разрезания узлов. Разделив центральный узел на три, получим узлы с равными потенциалами (равными среднему арифметическому между потенциалами узлов A и B). После этого сопротивление легко вычисляется. Проверьте, что оно равно $R = 0{,}8r = 4$ Ом.

Задача 10. *В каждое ребро бесконечной сетки с квадратными ячейками включено сопротивление 20 Ом. Чему равно сопротивление сетки при подключении ее соседними узлами?*



Это пример «для гурманов»: здесь используется необычный прием суперпозиции схем. Схему, где в узел A входит ток I, а из узла B этот ток выходит, можно представить как суперпозицию двух схем, в первой из которых ток I входит в узел A и растекается по сетке во все стороны, а во второй — выходит из точки B, стекаясь со всех сторон сетки. Из симметрии ясно, что в каждой из этих схем по четырем ближайшим ребрам течет ток $I/4$. Значит, в первоначальной схеме по ребру AB течет ток $I/2$, разность потенциалов между этими узлами равна $U = (I/2)r$, и сопротивление схемы равно $R = U/I = r/2 = 10$ Ом.

Задача 11. *В сеть с напряжением 100 В включено сопротивлéние 34 Ом и последовательно с ним два параллельно включенных сопротивления: 20 Ом и 80 Ом. Найдите напряжение на сопротивлении 80 Ом.*



Участок цепи, содержащий параллельно соединенные сопротивления $R_2 = 20$ Ом и $R_3 = 80$ Ом, имеет эквивалентное сопротивление

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 16 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление цепи равно $R = R_1 + R_{23} = 50$ Ом, ток в цепи равен $I = U/R = 2$ А. Напряжение на сопротивлении R_3 равно напряжению на эквивалентном сопротивлении R_{23}: $U_3 = U_{23} = IR_{23} = 32$ В.

Задача 12. *Электрическая плитка включена в сеть с напряжением 60 В с помощью проводов, имеющих некоторое сопротивление. При этом напряжение на плитке 40 В. Чему будет равно напряжение на плитке, если к ней подключить параллельно такую же плитку?*

Напряжение на плитке при первом подключении

$$U_1 = \frac{U}{R+r}R = \frac{U}{1+(r/R)}$$

(R — сопротивление плитки, r — сопротивление проводов), а после подключения второй плитки

$$U_2 = \frac{U}{(R/2+r)}\frac{R}{2} = \frac{U}{1+(2r/R)}.$$

Выражая (r/R) из первого уравнения и подставляя во второе, находим $U_2 = 30$ В.

Задача 13. *Имеется миллиамперметр с внутренним сопротивлением 10 Ом, предназначенный для измерения силы тока не более 0,01 А. Какое добавочное сопротивление надо включить последовательно с этим прибором, чтобы им можно было измерять разность потенциалов до 1 В?*

При использовании прибора в качестве вольтметра максимальное показание прибора должно соответствовать напряжению $U_{\max}$ на участке цепи, состоящем из прибора и последовательно соединенного с ним добавочного сопротивления

$$U_{\max} = I_0(r_{\text{пр}} + R_{\text{д}}).$$

При этом через прибор протекает ток, соответствующий максимальному показанию этого прибора, используемого в качестве миллиамперметра: $I_0 = 0{,}01$ А. Получаем

$$R_д = \frac{U_{max}}{I_0} - r_{пр} = 90 \text{ Ом}.$$

Задача 14. *Зашунтированный амперметр измеряет ток силой до 10 А. Какая наибольшая сила тока может быть измерена этим прибором без шунта, если сопротивление шунта 0,05 Ом? Сопротивление амперметра 0,2 Ом.*

При использовании прибора в качестве амперметра максимальное показание прибора должно соответствовать полному току I_{max}, протекающему через участок цепи, состоящий из прибора и параллельно соединенного с ним шунтирующего сопротивления. При этом через прибор протекает ток I_0, соответствующий максимальному показанию этого прибора в отсутствие шунта, а через шунт протекает ток $I_{max} - I_0$. Приравнивая напряжения на параллельно соединенных сопротивлениях

$$I_0 r_а = (I_{max} - I_0) r_ш,$$

выразим максимальный ток в отсутствие шунта

$$I_0 = \frac{I_{max} r_ш}{r_а + r_ш} = 2 \text{ А}.$$

Задача 15. *Амперметр с внутренним сопротивлением 2 Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает силу тока 5 А. Вольтметр с внутренним сопротивлением 150 Ом, подключенный к зажимам такой же батареи, показывает 12 В. Найдите силу тока (в мА) короткого замыкания батареи.*

Амперметр показывает силу тока в цепи

$$I_а = \frac{\mathcal{E}}{R_а + r}.$$

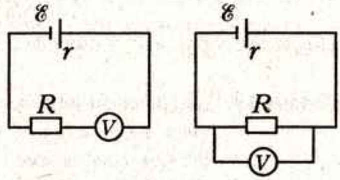
Вольтметр показывает напряжение на самом себе

$$U_в = \frac{\mathcal{E}}{R_в + r} R_в.$$

Из полученной системы уравнений находим $\mathcal{E}$ и r, а затем вычисляем силу тока короткого замыкания

$$I_{к.з.} = \frac{\mathcal{E}}{r} = 29600 \text{ мА}.$$

Задача 16. *В цепь, состоящую из аккумулятора и сопротивления 20 Ом, подключают вольтметр, сначала последовательно, а потом параллельно сопротивлению. Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Каково сопротивление вольтметра, если внутреннее сопротивление аккумулятора 0,1 Ом?*



В первом случае ток через вольтметр равен току в цепи, и напряжение на вольтметре равно

$$U = \frac{\mathcal{E}}{r + R + R_\text{в}} R_\text{в}.$$

Во втором случае напряжение на вольтметре равно напряжению на участке цепи, содержащем параллельно соединенные вольтметр и сопротивление и имеющем эквивалентное сопротивление $RR_\text{в}/(R + R_\text{в})$

$$U = \frac{\mathcal{E}}{r + \dfrac{RR_\text{в}}{R + R_\text{в}}} \frac{RR_\text{в}}{R + R_\text{в}}.$$

Приравняв эти выражения, после преобразований получим уравнение $R^2 = rR_\text{в}$, из которого найдем сопротивление вольтметра: $R_\text{в} = R^2/r = 4000$ Ом.

Задача 17. *Конденсатор подключен к зажимам батареи. Когда параллельно конденсатору подключили сопротивление 15 Ом, заряд на конденсаторе уменьшился в 1,2 раза. Определите внутреннее сопротивление батареи.*

В первом случае напряжение на конденсаторе равно напряжению на зажимах разомкнутой батареи: $U_1 = \mathcal{E}$. После подключения сопротивления цепь оказывается замкнутой (но не разветвленной — через конденсатор ток не течет!), и напряжение на конденсаторе равно напряжению на подключенном сопротивлении

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R} R.$$

Так как напряжение на конденсаторе пропорционально его заряду: $U = q/C$, то начальное и конечное напряжения связаны соотношением $U_2 = U_1/1{,}2$. Подставляя U_1 и U_2, находим $r = 0{,}2R = 3$ Ом.

Задача 18. *Три одинаковые батареи с внутренним сопротивлением 6 Ом каждая замкнули, один раз соединив параллельно, а другой — последовательно, на некоторое сопротивление. При этом сила тока во внешней цепи была в обоих случаях одна и та же. Чему равно внешнее сопротивление?*

Заменив в каждом из случаев сложную батарею простой с эквивалентным ЭДС и внутренним сопротивлением, найдем токи по закону Ома для полной цепи и приравняем получившиеся выражения

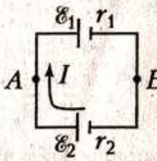
$$\frac{\mathscr{E}}{(r/3)+R}=\frac{3\mathscr{E}}{3r+R}.$$

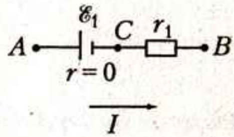
После преобразований получаем $R = r = 6$ Ом.

Задача 19. *Два источника тока, первый с ЭДС 2 В и внутренним сопротивлением 1 Ом, второй — с ЭДС 5 В и внутренним сопротивлением 0,5 Ом, соединяют одноименными полюсами, образуя замкнутую цепь. Чему равна разность потенциалов между положительным и отрицательным полюсами каждого источника?*

Силу тока в цепи найдем из закона Ома для полной цепи

$$I=\frac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}{r_1+r_2}.$$





Обе части схемы, соединяющие точки A и B, содержат источники тока. Поэтому нам надо научиться определять разность потенциалов на участке цепи, содержащем источник тока. Поскольку соответствующий закон Ома не входит в школьную программу, мы покажем удобный прием, позволяющий вычислить разность потенциалов, опираясь только на сведения из школьной программы. Достаточно знать, что разность потенциалов между положительным и отрицательным полюсами *идеального* источника, внутреннее сопротивление которого равно нулю, равна его ЭДС. (Электрическая сила в каждой точке внутри источника должна точно компенсировать стороннюю силу, что означает равенство разности потенциалов и ЭДС.) Если реальный источник заменить на идеальный источник и последовательно соединенное с ним внутреннее сопротивление, то разность потенциалов моментально вычисляется. В данном примере, выбрав участок цепи, содержащий первый источник, получим

$$\varphi_A-\varphi_B=(\varphi_A-\varphi_C)+(\varphi_C-\varphi_B)=\mathscr{E}_1+Ir_1=\frac{\mathscr{E}_1 r_2+\mathscr{E}_2 r_1}{r_1+r_2}=4\text{ В}.$$

Задача 20. *Два сопротивления 5 и 7 Ом соединены последовательно. На обоих сопротивлениях выделилось 960 Дж теплоты. Какое количество теплоты выделилось за это время на первом сопротивлении?*

Через последовательно соединенные сопротивления течет одинаковый ток, поэтому для сравнения выделившихся теплот удобно использовать формулы $Q = I^2(R_1 + R_2)t$ и $Q_1 = I^2R_1t$. Исключая силу тока, получаем

$$Q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2} = 400 \text{ Дж.}$$

Задача 21. *Какая мощность будет выделяться в электропечи, когда она нагреется до 1000°С, если при температуре печи 500°С в ней выделяется мощность 480 Вт? Температурный коэффициент сопротивления проволоки печи 0,005 1/К.*

Так как электропечь включается в одну и ту же сеть, то удобно выражать мощность через напряжение сети. Получаем

$$P_1 = \frac{U^2}{R_0(1+\alpha t_1)}, \qquad P_2 = \frac{U^2}{R_0(1+\alpha t_2)},$$

где R_0 — сопротивление цепи при 0°С. Разделив второе уравнение на первое, выразим мощность P_2

$$P_2 = P_1 \frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t_2} = 280 \text{ Вт.}$$

Задача 22. *Номинальная мощность лампочки 36 Вт, ее номинальное напряжение 120 В. Какая в ней будет выделяться мощность при включении в сеть с напряжением 220 В?*

Выразим сопротивление лампочки при номинальном режиме работы: $R = U_\text{н}^2 / P_\text{н}$. Предполагается, что при включении в сеть с другим напряжением сопротивление лампочки не меняется

$$P = \frac{U^2}{R} = \left(\frac{U}{U_\text{н}}\right)^2 P_\text{н} = 121 \text{ Вт.}$$

Замечание. Обычно предполагается, что сопротивление электрического прибора не зависит от условий работы. Как видно из предыдущей задачи, это приближение довольно грубое.

Задача 23. *Электрическая кастрюля и чайник, потребляющие мощности 600 и 300 Вт, включены в сеть параллельно, и вода в них закипает одновременно через 20 минут. На сколько минут позже закипит вода в кастрюле, чем в чайнике, если их включить последовательно?*

Из выражений для мощностей кастрюли и чайника $P_1 = U^2/R_1$ и $P_2 = U^2/R_2$ находим отношение их сопротивлений: $R_2/R_1 = P_1/P_2 = 2$. При последовательном включении приборов ток в цепи будет равен

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Этот ток в $(R_1 + R_2)/R_1 = 3$ раза меньше тока $I_1 = U/R_1$, который протекал через кастрюлю при параллельном включении. Значит, выделяемая на кастрюле мощность уменьшилась в 9 раз (предполагается, что ее сопротивление не изменилось), и ее нагревание до температуры кипения займет в 9 раз больше времени: $t_1 = 180$ мин. Аналогично, ток через чайник уменьшится в 1,5 раза, а время до начала кипения возрастет в $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ раз: $t_2 = 45$ мин. Получаем, что вода в кастрюле закипит позже на 135 мин.

Задача 24. *Две проволоки из одинакового материала диаметрами 0,2 мм и 0,8 мм служат нагревателями и включаются в сеть параллельно. При длительной работе температуры проволок оказываются одинаковыми. Найдите длину (в см) более толстой проволоки, если длина более тонкой 55 см, а количество теплоты, отдаваемое за 1 с в окружающую среду, пропорционально площади поверхности (при одинаковой температуре).*

В равновесном режиме работы количество теплоты, выделяющейся в проволоке при протекании тока, равно количеству теплоты, отдаваемой окружающей среде. Отношение отдаваемых теплот (за одинаковое время) равно отношению площадей боковых поверхностей

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\pi d_1 l_1}{\pi d_2 l_2}.$$

Так как напряжение на проволоках одинаковое, то из выражения $P = U^2/R$ следует, что отношение выделяемых теплот равно $Q_1/Q_2 = R_2/R_1$. Подставляя сопротивления проволок

$$R_1 = \rho\frac{l_1}{s_1} = \rho\frac{l_1}{\pi d_1^2/4} \quad \text{и} \quad R_2 = \rho\frac{l_2}{s_2} = \rho\frac{l_2}{\pi d_2^2/4}$$

и приравнивая отношения теплот, получаем $l_2/l_1 = \sqrt{d_2/d_1} = 2$. Длина толстой проволоки равна 110 см.

Задача 25. *Конденсатор емкостью 8 мкФ, заряженный до напряжения 100 В, подсоединили для подзарядки к источнику с ЭДС 200 В. Сколько теплоты (в мДж) выделилось при подзарядке?*

Новое напряжение на конденсаторе равно $U_2 = \mathcal{E}$, заряд на конденсаторе изменился на величину $\Delta q = CU_2 - CU_1$, работа сторонних сил источника равна

$$A_{\text{ист}} = \mathcal{E}\Delta q = C\mathcal{E}^2 - C\mathcal{E}U_1.$$

Запишем закон сохранения энергии

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + Q,$$

где $\Delta W = \frac{CU_2^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = \frac{C\mathscr{E}^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2}$ — изменение электрической энергии конденсатора. Получаем

$$Q = \frac{C\mathscr{E}^2}{2} - C\mathscr{E}U_1 + \frac{CU_1^2}{2} = \frac{C(\mathscr{E} - U_1)^2}{2} = 40 \text{ мДж.}$$

Задача 26. *Конденсатор емкостью 3 мкФ присоединен к источнику тока с ЭДС 100 В. Пластины конденсатора медленно раздвигают, втрое увеличивая расстояние между ними. Какую при этом совершают работу (в мДж)?*

Кроме механической работы, произведенной над обкладками при их раздвижке, в законе сохранения энергии необходимо учитывать работу источника тока

$$\Delta W = A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}},$$

где $\Delta W = \frac{C_2\mathscr{E}^2}{2} - \frac{C_1\mathscr{E}^2}{2}$ — изменение электрической энергии конденсатора. При раздвижке пластин емкость конденсатора становится в три раза меньше: $C_2 = C_1/3$, значит, заряд конденсатора также уменьшается втрое: $q_1 = C_1\mathscr{E}$, $q_2 = C_2\mathscr{E} = (C_1/3)\,\mathscr{E}$. Источник при этом совершает отрицательную работу

$$A_{\text{ист}} = \mathscr{E}(q_2 - q_1) = C_2\mathscr{E}^2 - C_1\mathscr{E}^2.$$

Для механической работы получаем ответ

$$A_{\text{мех}} = \frac{C_1\mathscr{E}^2}{2} - \frac{C_2\mathscr{E}^2}{2} = \frac{C_1\mathscr{E}^2}{3} = 10 \text{ мДж.}$$

Замечание. В отличие от предыдущей задачи, где при быстрой самопроизвольной перезарядке уменьшение энергии равно выделившейся теплоте, в этом и аналогичном примерах теплота при медленной раздвижке не выделяется, и изменение энергии равно работе (источника и внешних сил).

Задача 27. *Батарея состоит из 5 одинаковых последовательно соединенных элементов с ЭДС 2 В каждый. Чему равна полная мощность, выделяемая в цепи при силе тока 4 А?*

Полная ЭДС батареи равна $\mathscr{E}_{\text{общ}} = 5\mathscr{E} = 10$ В, полная мощность равна $P_{\text{полн}} = \mathscr{E}_{\text{общ}} I = 40$ Вт.

Задача 28. *Какова полная мощность, развиваемая источником тока с внутренним сопротивлением 2 Ом при подключении к нему сопротивления 3 Ом, если напряжение на этом сопротивлении 6 В?*

Сила тока в цепи $I = U/R = 2$ А, полная мощность равна тепловой мощности, выделяемой на всех сопротивлениях цепи: $P_{\text{полн}} = I^2r + I^2R = 20$ Вт.

Задача 29. *Лампочки, сопротивления которых 3 и 12 Ом, поочередно подключенные к источнику тока, потребляют одинаковую мощность. Во сколько раз КПД источника тока во втором случае больше, чем в первом?*

Мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении R, равна

$$P = I^2R = \left(\frac{\mathcal{E}}{r+R}\right)^2 R.$$

Преобразуя, получаем квадратное уравнение для сопротивления R при заданной мощности P

$$R^2 + \left(2r - \frac{\mathcal{E}^2}{P}\right)R + r^2 = 0.$$

Из теоремы Виета следует, что корни этого уравнения, т. е. сопротивления R_1 и R_2, на которых выделяется одинаковая мощность, удовлетворяют уравнению $R_1R_2 = r^2$. В данной задаче это соотношение позволяет вычислить сопротивление источника тока: $r = \sqrt{R_1R_2} = 6$ Ом. КПД источника тока равен отношению мощности, переданной источником во внешнюю цепь, к полной мощности

$$\eta = \frac{I^2R}{I^2r + I^2R} = \frac{R}{r+R}.$$

При $R_1 = 3$ Ом КПД равен 1/3, а при $R_2 = 12$ Ом КПД равен 2/3. Значит, отношение двух КПД равно 2.

Задача 30. *При замыкании на сопротивление 9 Ом батарея элементов дает ток 1 А. Ток короткого замыкания 10 А. Какую максимальную полезную мощность может дать батарея?*

Запишем закон Ома для полной цепи для случая, когда сопротивление внешней цепи равно известному сопротивлению R

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r+R},$$

и для случая, когда оно равно нулю (короткое замыкание)

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Из этих уравнений находим ЭДС источника и его внутреннее сопротивление

$$r = \frac{I_1 R}{I_2 - I_1} = 1 \text{ Ом}, \quad \mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 R}{I_2 - I_1} = 10 \text{ В}.$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи при токе I, равна $P = \mathcal{E}I - I^2 r$ (полная мощность минус потерянная мощность). Она достигает максимального значения $P_{max} = \mathcal{E}^2/4r$ при токе $I_0 = \mathcal{E}/2r$. Получаем, что в данном случае максимальная мощность $P_{max} = 25$ Вт.

Задача 31. *При замыкании источника тока на внешнее сопротивление 2 Ом на нем выделяется мощность 32 Вт, а при замыкании на внешнее сопротивление 3 Ом — мощность 27 Вт. Какую наибольшую полезную мощность может дать этот источник?*

Мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении, равна

$$P = I^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R.$$

Преобразовав эту формулу и записав ее для двух значений внешнего сопротивления

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{P_1}{R_1}}(R_1 + r), \quad \mathcal{E} = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}}(R_2 + r),$$

получим систему уравнений для $\mathcal{E}$ и r. Решив систему уравнений, найдем $\mathcal{E} = 12$ В, $r = 1$ Ом. Подставив эти значения в формулу для максимальной мощности (см. реш. 29), получим $P_{max} = \mathcal{E}^2/4r = 36$ Вт.

Задача 32. *Электродвигатель трамвайного вагона работает при силе тока 100 А и напряжении 500 В. При силе тяги двигателя 4 кН скорость вагона 18 км/ч. Чему равно сопротивление обмотки двигателя?*

При напряжении U и токе I полная мощность равна $P_{полн} = UI$, а потерянная мощность равна тепловой мощности, выделяющейся на обмотке двигателя: $P_{пот} = I^2 R$. Значит, полезная мощность равна

$$P = UI - I^2 r.$$

Приравнивая эту мощность к механической мощности, развиваемой силой тяги, получаем уравнение: $UI - I^2 R = Fv$, из которого находим сопротивление обмотки

$$R = \frac{UI - Fv}{I^2} = 3 \text{ Ом}.$$

Задача 33. *Через сколько минут медный анод станет толще на 0,03 мм, если плотность тока при электролизе 300 А/м^2? Электрохимический эквивалент меди $3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл, ее плотность 9000 кг/м^3.*

По закону Фарадея, за время t на аноде выделится масса меди, равная

$$m = kIt,$$

где k — электрохимический эквивалент меди. Выразим эту массу через объем образовавшегося слоя меди: $m = \rho hS$, где h — толщина слоя меди, а S — площадь анода. Получаем уравнение $kIt = \rho hS$, из которого выражаем время

$$t = \frac{\rho h}{kj},$$

где $j = I/S$ — плотность тока. Получаем $t = 3000$ с = 50 мин.

Задача 34. *Какое количество электроэнергии (в МДж) расходуется на получение 1 кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении 9 В, а КПД установки 50%? Электрохимический эквивалент алюминия $9 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.*

КПД электролитической установки равен

$$\eta = \frac{m}{kq},$$

т. е. отношению реально полученной массы вещества к той массе, которая должна выделиться при прохождении через электролит заряда q без всяких потерь (т. е. если бы весь прошедший заряд поставлялся к электроду только ионами данного вещества и отсутствовало его отделение или растворение). Затраченная на электролиз энергия равна $W = qU$, где U — напряжение на электролитической установке. Получаем

$$W = \frac{mU}{k\eta} = 200 \text{ МДж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Связь силы тока с зарядом (1–3). Сопротивление проводника (4–10)

10.1. Из вертикально расположенного конденсатора с начальной емкостью 12 мкФ равномерно вытекает заполнявший его керосин ($\varepsilon = 2$). В цепи, соединяющей конденсатор с батареей, ЭДС которой 24 В, протекает при этом ток силой 1 мкА.

За сколько секунд вытечет весь керосин? Внутренним сопротивлением источника тока и сопротивлением проводов пренебречь.

10.2. Какой заряд проходит через поперечное сечение проводника в течение 5 с, если за этот промежуток времени сила тока равномерно возрастает от 0 до 12 А?

10.3. За одну минуту через поперечное сечение проводника прошел заряд 100 Кл. При этом первые 10 с сила тока равномерно возрастала от нуля до некоторой величины I, а последние 10 с равномерно уменьшалась до нуля. Найдите I.

10.4. Температура накала нити электролампы 2000°С. Температурный коэффициент сопротивления лампы 0,0045 1/К. Во сколько раз сопротивление раскаленной нити больше, чем холодной, при 0°С?

10.5. Вольфрамовая нить электрической лампы накаливания имеет сопротивление 220 Ом при 2000°С. Определите сопротивление нити при 0°С. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама 0,005 1/К.

10.6. Медная проволока обладает электрическим сопротивлением 6 Ом. Каким электрическим сопротивлением обладает медная проволока, у которой в два раза больше длина и в три раза больше площадь поперечного сечения?

10.7. Какова длина никелинового провода с площадью сечения 1 мм^2, если его сопротивление 50 Ом? Удельное сопротивление никелина $4\cdot10^{-7}$ Ом·м.

10.8. Определите сопротивление нихромовой проволоки длиной 1 м и массой 0,83 г. Удельное сопротивление нихрома 10^{-6} Ом·м, плотность 8300 кг/м^3.

10.9. Две проволоки — медная и алюминиевая — имеют одинаковые массы. Длина медной проволоки в 10 раз больше длины алюминиевой. Во сколько раз больше сопротивление медной проволоки? Плотность меди в 3,3 раза больше, чем плотность алюминия, а удельное сопротивление в 1,65 раза меньше.

10.10. Сколько витков проволоки следует вплотную намотать на фарфоровую трубку радиусом 10 см, чтобы изготовить реостат сопротивлением 50 Ом? Удельное сопротивление проволоки $5\cdot10^{-6}$ Ом·м, ее диаметр 2 мм.

10.11. Какой длины нужно взять никелиновую ленту, чтобы изготовить реостат сопротивлением 40 Ом? Удельное сопротивление никелина $4\cdot10^{-7}$ Ом·м, толщина ленты 0,5 мм, ширина 10 мм.

10.12. Длину проволоки увеличили растяжением в 2 раза. Во сколько раз увеличилось ее сопротивление?

10.13. На сколько одинаковых частей надо разрезать однородный проводник сопротивлением 36 Ом, чтобы, соединив эти части параллельно, получить сопротивление 1 Ом?

10.14. Из 80 одинаковых сопротивлений сделали составное двумя способами: один раз — соединив последовательно 16 одинаковых групп по 5 параллельно соединенных сопротивлений в каждой группе, второй раз — соединив параллельно 20 одинаковых групп по 4 последовательно соединенных сопротивления в каждой группе. Во сколько раз сопротивление во втором случае меньше, чем в первом?

10.15. В каждое из ребер куба включено сопротивление 12 Ом. Чему равно сопротивление получившейся системы при подключении ее соседними вершинами?

10.16. В каждое из ребер куба включено сопротивление 4 Ом. Чему равно сопротивление получившейся системы при подключении ее вершинами, принадлежащими одной из граней и лежащими на концах ее диагонали?

10.17. В каждую из сторон правильного шестиугольника включено сопротивление 20 Ом. Кроме того, каждая из вершин соединена с центром шестиугольника таким же сопротивлением. Чему равно сопротивление получившейся системы при подключении соседними вершинами?

10.18. В каждое ребро бесконечной сетки с треугольными ячейками включено сопротивление 12 Ом. Чему равно сопротивление сетки при подключении ее соседними узлами?

Закон Ома для однородного участка цепи (11–12)

10.19. Какой заряд пройдет по проводнику сопротивлением 10 Ом за время 20 с, если к его концам приложено напряжение 12 В?

10.20. Найдите напряжение на железной проволоке длиной 100 м при силе тока в ней 2 А. Сечение проволоки имеет форму квадрата со стороной 3 мм. Удельное сопротивление железа $9 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

10.21. Две одинаковые лампы и добавочное сопротивление 3 Ом соединены последовательно и включены в сеть с постоянным напряжением 110 В. Найдите силу тока в цепи, если напряжение на каждой лампе 40 В.

10.22. В электрическую сеть включены последовательно плитка и реостат, сопротивления которых равны 50 и 60 Ом соответственно. Определите напряжение на реостате, если напряжение на плитке 75 В.

10.23. Два проводника одинаковой длины из одного и того же материала соединены последовательно. Диаметр первого проводника 1 мм, второго 2 мм. К системе приложено напряжение 300 В. Определите напряжение на втором проводнике.

10.24. В сеть с постоянным напряжением 120 В включены три одинаковых сопротивления: два параллельно, а одно последовательно с ними. Определите напряжение на параллельно соединенных сопротивлениях.

10.25. Четыре электролампочки, рассчитанные на напряжение 3 В и силу тока 0,3 А каждая, надо включить параллельно и питать от источника постоянного тока с ЭДС 5,4 В. Какое дополнительное сопротивление надо включить последовательно с цепочкой ламп? Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

10.26. Сколько последовательно соединенных электролампочек надо взять для елочной гирлянды, чтобы ее можно было включить в сеть напряжением 220 В, если каждая лампочка имеет сопротивление 20 Ом и горит полным накалом при силе тока 0,5 А?

10.27. Десять ламп, каждая из которых имеет сопротивление 24 Ом и рассчитана на напряжение 12 В, соединены последовательно и подключены к сети постоянного напряжения 220 В последовательно с некоторым сопротивлением. Какова должна быть величина этого сопротивления, чтобы лампы горели полным накалом?

10.28. При последовательном подключении к сети постоянного тока двух проводников сила тока в сети в 6,25 раза меньше, чем при параллельном соединении этих же проводников. Во сколько раз отличаются сопротивления проводников?

10.29. Аккумулятор замкнут на сопротивление 5 Ом. Для измерения силы тока в сеть включили амперметр с внутренним сопротивлением 2,5 Ом, и он показал 2 А. Какова была сила тока в цепи до включения амперметра? Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

10.30. Если вольтметр соединить последовательно с сопротивлением 14 кОм, то при напряжении в сети 120 В он покажет 50 В. Если соединить его последовательно с неизвестным сопротивлением, то при подключении к той же сети он покажет 10 В. Определите величину неизвестного сопротивления (в кОм).

10.31. Электрическая плитка включена в сеть с напряжением 60 В с помощью проводов, имеющих некоторое сопротивление. При этом напряжение на плитке равно 40 В. Чему будет равно напряжение на плитке, если к ней подключить последовательно такую же плитку?

10.32. Два одинаковых сопротивления по 100 Ом соединены параллельно и к ним последовательно подключено сопротивление 200 Ом. Вся система подсоединена к источнику постоянного тока. К концам параллельно соединенных сопротивлений подключен конденсатор емкостью 10 мкФ. Определите ЭДС источника тока, если заряд на конденсаторе 0,22 мКл. Внутреннее сопротивление источника тока не учитывать.

Электроизмерительные приборы (13–14)

10.33. Во сколько раз увеличится верхний предел шкалы вольтметра с сопротивлением 1 кОм, если к нему последовательно присоединить добавочное сопротивление 9 кОм?

10.34. Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до 2 В, необходимо включить в сеть с напряжением 12 В. Какое для этого потребуется дополнительное сопротивление, если сила тока в вольтметре не должна превышать 0,05 А?

10.35. Вольтметр со шкалой 100 В имеет сопротивление 10 кОм. Какую наибольшую разность потенциалов можно измерить этим прибором, если к нему последовательно присоединить добавочное сопротивление 90 кОм?

10.36. Вольтметр с добавочным сопротивлением измеряет напряжение до 100 В. Какое наибольшее напряжение может измерять этот вольтметр без добавочного сопротивления, если сопротивление вольтметра 100 Ом, а добавочное сопротивление 400 Ом?

10.37. При подключении добавочного сопротивления предел измерения напряжения увеличился в 5 раз. Во сколько раз надо увеличить добавочное сопротивление, чтобы увеличить предел измерения еще в 5 раз?

10.38. Амперметр имеет внутреннее сопротивление 0,02 Ом, его шкала рассчитана на силу тока 1,2 А. Определите сопротивление (в мОм) шунта, который надо присоединить к амперметру параллельно, чтобы им можно было измерять силу тока до 6 А.

10.39. Определите силу тока в магистрали, если через амперметр, снабженный шунтом с сопротивлением 0,4 Ом, идет ток силой 5 А. Внутреннее сопротивление амперметра 1,2 Ом.

10.40. После присоединения шунта предел измерения силы тока увеличился в 10 раз. Во сколько раз надо уменьшить сопротивление шунта, чтобы увеличить предел измерения еще в 10 раз?

Закон Ома для замкнутой цепи (15–17)

10.41. Гальванический элемент с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1 Ом замкнут на сопротивление 4 Ом. Найдите силу тока в цепи.

10.42. Батарея с ЭДС 20 В имеет внутреннее сопротивление 1 Ом. При каком внешнем сопротивлении сила тока в цепи будет 2 А?

10.43. Аккумулятор с внутренним сопротивлением 0,2 Ом и ЭДС 2 В замкнут проволокой сечением 1 мм^2 и удельным сопротивлением 10^{-7} Ом·м. Найдите длину проволоки, если сила тока в цепи 4 А.

10.44. Если к батарее с ЭДС 3 В и внутренним сопротивлением 2 Ом накоротко подсоединить амперметр, то он покажет силу тока 1 А. Определите сопротивление амперметра.

10.45. В проводнике сопротивлением 2 Ом, подключенном к элементу с ЭДС 2,2 В, идет ток силой 1 А. Найдите ток короткого замыкания элемента.

10.46. Два сопротивления 30 и 20 Ом, соединенные параллельно, подключены к аккумулятору, ЭДС которого 14 В. Сила тока в общей цепи 1 А. Найдите ток короткого замыкания.

10.47. При подключении источника тока с ЭДС 15 В к некоторому сопротивлению напряжение на полюсах источника оказывается 9 В, а сила тока в цепи 1,5 А. Найдите внутреннее сопротивление источника.

10.48. Внутреннее сопротивление батареи с ЭДС 3,6 В равно 0,1 Ом. К батарее подключены параллельно три лампочки сопротивлением по 1,5 Ом каждая. Найдите разность потенциалов на клеммах батареи.

10.49. Источник постоянного тока с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 1,4 Ом питает внешнюю цепь, состоящую из двух параллельно соединенных сопротивлений 2 и 8 Ом. Найдите разность потенциалов на зажимах источника.

10.50. Батарея подключена к сопротивлению 10 Ом, при этом сила тока в цепи 2 А. Если ту же батарею подключить к сопротивлению 20 Ом, сила тока будет 1,5 А. Найдите внутреннее сопротивление батареи.

10.51. При замыкании элемента на сопротивление 1,8 Ом в цепи идет ток силой 0,7 А, а при замыкании на сопротивление 2,3 Ом сила тока в цепи 0,56 А. Найдите ток короткого замыкания.

10.52. Источник тока с ЭДС 12 В и внутренним сопротивлением 1 Ом питает три параллельно соединенных сопротивления по 6 Ом каждое. Определите напряжение на одном сопротивлении.

10.53. В цепи, состоящей из источника тока с ЭДС 6 В и внутренним сопротивлением 2 Ом и реостата, идет ток силой 1 А. Какова будет сила тока в цепи, если сопротивление реостата уменьшить в 4 раза?

10.54. Цепь состоит из источника тока с ЭДС 7,5 В и внутренним сопротивлением 0,3 Ом и двух параллельно соединенных проводников с сопротивлениями 2 Ом и 3 Ом. Определите силу тока во втором проводнике.

10.55. К источнику тока присоединили последовательно два одинаковых сопротивления. Когда их соединили параллельно, сила тока в цепи увеличилась в 3 раза. Во сколько раз каждое из сопротивлений больше внутреннего сопротивления источника?

10.56. Два последовательно соединенных вольтметра подсоединены к источнику тока с некоторым внутренним сопротивлением. Показания вольтметров равны 12 и 4 В. Если подключить к источнику только первый вольтметр, то он покажет 15 В. Чему равна ЭДС источника?

Несколько ЭДС в цепи (18–19)

10.57. Две одинаковые батареи с ЭДС 20 В и внутренним сопротивлением 2 Ом каждая соединены параллельно и подключены к сопротивлению 9 Ом. Найдите силу тока, протекающего через сопротивление.

10.58. Батарея для карманного фонаря состоит из трех последовательно соединенных элементов с ЭДС 1,5 В и внутренним сопротивлением 0,2 Ом каждый. Найдите силу тока, проходящего через лампу фонаря, если ее сопротивление 0,9 Ом.

10.59. Три источника постоянного тока с ЭДС 1, 2 и 3 В и внутренними сопротивлениями соответственно 1, 2 и 3 Ом соединены последовательно и замкнуты накоротко. Определите силу тока в цепи.

10.60. Какое количество аккумуляторов с ЭДС по 2 В и внутренним сопротивлением по 1 Ом каждый необходимо соединить в батарею последовательно, чтобы в проводнике сопротивлением 6 Ом, подключенном к батарее, получить силу тока 0,5 А?

10.61. Сколько элементов нужно соединить параллельно в батарею, чтобы при подключении к ней сопротивления 49 Ом получить силу тока в цепи 2 А? ЭДС каждого элемента 100 В, внутреннее сопротивление 2 Ом.

10.62. Два одинаковых элемента соединяют параллельно и замыкают на сопротивление 4 Ом. Затем эти же элементы соединяют последовательно и замыкают на такое же сопротивление. Оказалось, что ток через внешнее сопротивление при этом не изменился. Чему равно внутреннее сопротивление каждого элемента?

10.63. Два источника тока, первый с ЭДС 5 В и внутренним сопротивлением 1 Ом, второй — с ЭДС 3 В и внутренним сопротивлением 3 Ом, соединяют последовательно и замыкают на внешнее сопротивление 12 Ом. Во сколько раз разность потенциалов на первом источнике больше, чем на втором?

Закон Джоуля–Ленца (20–24)

10.64. В проводнике с сопротивлением 10 Ом, включенном в сеть постоянного напряжения, за 5 с выделилась энергия 450 Дж. Каково напряжение в сети?

10.65. По проводнику с сопротивлением 6 Ом пропускали постоянный ток в течение 9 с. Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время, если через его сечение прошел заряд 3 Кл?

10.66. Какое количество энергии (в кДж) расходуется на нагревание электроутюга в течение 50 с, если напряжение в сети постоянно и равно 220 В, а сила тока 2 А?

10.67. Электроплитка подключена к сети с напряжением 220 В. За некоторое время в ней выделилась энергия 1100 Дж. Какой заряд прошел за это время через плитку?

10.68. Сколько метров нихромовой проволоки нужно взять для изготовления реостата, если при напряжении на реостате 10 В он потребляет мощность 20 Вт? Площадь поперечного сечения проволоки 1 мм^2, удельное сопротивление нихрома 10^{-6} Ом·м.

10.69. Сколько времени (в минутах) потребуется для испарения 132 г кипящей воды, если вода получает 50% энергии, выделяющейся в электроплитке? Напряжение на плитке 220 В, сила тока 4,6 А. Удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

10.70. Электрический чайник с водой объемом 600 см^3 при температуре 20°С забыли выключить. Через сколько секунд после этого вся вода выкипит? Нагреватель чайника имеет сопротивление 30 Ом и включен в сеть с постоянным напряжением 300 В. КПД чайника 40%. Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды 2,3 МДж/кг.

10.71. На сколько изменится температура воды в калориметре, если через нагреватель пройдет заряд 100 Кл? Напряжение на нагревателе 210 В, масса воды 1 кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К).

10.72. В цепь последовательно включены вольфрамовая и алюминиевая проволоки одинаковой длины и диаметра. Во сколько раз больше теплоты выделится на вольфрамовой проволоке, если удельное сопротивление вольфрама в два раза больше, чем алюминия?

10.73. Два проводника соединены параллельно и подключены к сети постоянного напряжения. Длина первого проводника в 3 раза больше, а площадь его поперечного сечения в 9 раз больше, чем второго. В проводниках выделяется одинаковая мощность. Во сколько раз удельное сопротивление первого проводника больше, чем второго?

10.74. Два проводника с сопротивлениями 7 и 5 Ом соединяют параллельно и подключают к источнику тока. В первом проводнике выделилось 300 Дж теплоты. Какое количество теплоты выделится во втором проводнике за то же время?

10.75. Во сколько раз увеличится количество теплоты выделяемой электроплиткой, если сопротивление ее спирали уменьшить в 2 раза, а напряжение в сети увеличить в 2 раза?

10.76. Две одинаковые спирали электроплитки можно соединить последовательно или параллельно. Во сколько раз большее количество теплоты выделится при параллельном соединении, чем при последовательном, за одно и то же время? Сопротивления спиралей не зависят от условий работы.

10.77. При ремонте электроплитки спираль была укорочена на 0,2 первоначальной длины. На сколько процентов увеличилась мощность плитки? Удельное сопротивление спирали считать постоянным.

10.78. Две одинаковые электролампы включены в сеть постоянного напряжения 20 В: один раз последовательно, второй раз параллельно. Во втором случае потребляемая лампами мощность на 6 Вт больше, чем в первом. Найдите сопротивление каждой лампы, считая его постоянным.

10.79. Номинальные мощности двух лампочек одинаковы, а номинальные напряжения 120 и 240 В. Во сколько раз сопротивление второй лампы больше, чем первой?

10.80. Две электролампы, на которых указаны их мощности 100 и 150 Вт, включены последовательно в сеть с постоянным напряжением, соответствующим номинальному напряжению ламп. Какая суммарная мощность будет выделяться на лампах? Сопротивления ламп не зависят от условий работы.

10.81. Нагреватель в электрическом чайнике состоит из одинаковых секций. При включении одной секции вода в чайнике закипает через 26 минут. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить параллельно? Сопротивления секций не зависят от условий работы.

10.82. Два заполненных водой электрических чайника, имеющие номинальные мощности 800 и 400 Вт, при параллельном включении в сеть закипают за одинаковое время 16 минут. При последовательном включении тех же чайников время их закипания оказывается различным. Найдите большее из этих времен (в минутах). Сопротивления чайников не зависят от условий работы.

10.83. В плоском конденсаторе диэлектрик между пластинами промок и стал пропускать ток. При плотности тока 0,02 А/м^2 в диэлектрике ежесекундно выделялось 10 Дж/м^3 теплоты (в расчете на единицу объема). Чему равна напряженность электрического поля в конденсаторе?

10.84. Тонкая проволока не плавится при пропускании по ней тока силой до 5 А. Каким будет критический ток для проволоки из такого же материала, но в 4 раза большего диаметра? Количество теплоты, отдаваемое за 1 с в окружающую среду, пропорционально площади поверхности (при одинаковой температуре).

Работа источника тока (25–26)

10.85. Незаряженный конденсатор емкостью 4 мкФ присоединили к зажимам источника тока с ЭДС 200 В. Сколько теплоты (в мДж) выделилось в процессе зарядки конденсатора?

10.86. Конденсаторы емкостями 3 и 1 мкФ соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 200 В. Сколько теплоты (в мДж) выделится при пробое конденсатора меньшей емкости?

10.87. Батарея конденсаторов, состоящая из трех последовательно соединенных конденсаторов емкостями $C_1 = 10$ мкФ, $C_2 = 20$ мкФ и $C_3 = 50$ мкФ, подключена к источнику с ЭДС 120 В. Сколько теплоты (в мДж) выделится при пробое конденсатора C_1?

10.88. Батарея конденсаторов, состоящая из двух параллельно соединенных конденсаторов емкостями $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 15$ мкФ и присоединенного к ним последовательно конденсатора емкостью $C_3 = 30$ мкФ, подключена к источнику с ЭДС 100 В. Сколько теплоты (в мДж) выделится при пробое конденсатора C_1?

10.89. Конденсатор емкостью 6 мкФ, заряженный до напряжения 200 В, подсоединяют для перезарядки к источнику с ЭДС 100 В, причем положительно заряженную обкладку соединяют с положительным полюсом источника, а отрицательно заряженную — с отрицательным. Сколько теплоты (в мДж) выделилось при перезарядке?

10.90. Конденсатор емкостью 8 мкФ, заряженный до напряжения 100 В, подсоединили для подзарядки к источнику тока с ЭДС 200 В, но перепутали обкладки: положительную подключили к отрицательному зажиму, а отрицательную — к положительному. Сколько теплоты (в мДж) выделилось при перезарядке?

10.91. Внутри плоского конденсатора находится стеклянная диэлектрическая пластина, полностью заполняющая пространство между обкладками. Емкость конденсатора без пластины 10 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 1,5. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора, если он подключен к источнику тока с ЭДС 200 В?

10.92. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС 100 В, содержит стеклянную пластину, полностью заполняющую все пространство между обкладками. Одну из обкладок медленно отодвигают, втрое увеличивая расстояние между обкладками. Какую при этом совершают работу (в мДж)? Начальная емкость конденсатора 8 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 1,5.

10.93. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС 100 В, содержит стеклянную пластину, полностью заполняющую все пространство между обкладками. Какую работу (в мДж) надо совершить, чтобы наполовину извлечь пластину из конденсатора? Емкость конденсатора без пластины 8 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 1,5.

10.94. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора емкостями 12 мкФ соединены последовательно и присоединены к источнику с ЭДС 200 В. Какую надо совершить работу (в мДж), чтобы у одного из них вдвое увеличить расстояние между обкладками?

10.95. Два последовательно соединенных конденсатора одинакового размера, один из которых пуст, а другой содержит стеклянную пластину, подсоединены к источнику тока с ЭДС 100 В. Емкость пустого конденсатора 6 мкФ, диэлектрическая проницаемость стекла 2, пластина заполняет все пространство между обкладками. Какую надо совершить работу (в мДж), чтобы медленно извлечь пластину из конденсатора?

Энергетический баланс в замкнутой цепи (27–32)

10.96. Элемент с ЭДС 6 В замкнут на внешнее сопротивление 2 Ом. При этом во внешней цепи выделяется мощность 8 Вт. Найдите внутреннее сопротивление элемента.

10.97. Каково внутреннее сопротивление источника тока, если на сопротивлении 10 Ом, подключенном к источнику тока, выделяется мощность 100 Вт, а во всей цепи 110 Вт?

10.98. Элемент замкнут на внешнее сопротивление, величина которого в 2 раза больше величины внутреннего сопротивления элемента. Найдите ЭДС элемента, если на внешнем сопротивлении выделяется мощность 18 Вт при силе тока в цепи 3 А.

10.99. Найдите полезную мощность батареи с ЭДС 24 В, если внешнее сопротивление 23 Ом, а внутреннее сопротивление батареи 1 Ом.

10.100. Батарея состоит из параллельно соединенных между собой элементов с сопротивлением 1,4 Ом и ЭДС 3,5 В каждый. При силе тока во внешней цепи 1 А полезная мощность батареи 3,3 Вт. Сколько в батарее элементов?

10.101. Батарея состоит из последовательно соединенных между собой элементов с сопротивлением 0,2 Ом и ЭДС 0,5 В каждый. При силе тока во внешней цепи 2 А полезная мощность батареи 1 Вт. Сколько в батарее элементов?

10.102. При увеличении внешнего сопротивления с 3 до 10,5 Ом КПД источника тока увеличивается вдвое. Чему равно внутреннее сопротивление источника?

10.103. Источник тока с внутренним сопротивлением 4 Ом замкнут на сопротивление 8 Ом. При каком другом внешнем сопротивлении во внешней цепи будет выделяться такая же мощность, что и при сопротивлении 8 Ом?

10.104. ЭДС источника тока 6 В, внутреннее сопротивление 2 Ом. Два одинаковых сопротивления подключают к источнику один раз последовательно, второй раз — параллельно. В обоих случаях во внешней цепи выделяется одинаковая мощность. Чему равна эта мощность?

10.105. ЭДС источника тока 2 В, внутреннее сопротивление 1 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность 0,75 Вт. Этим условиям удовлетворяют два значения силы тока. Чему равна их разность?

10.106. ЭДС батареи аккумуляторов 12 В, сила тока короткого замыкания 5 А. Какую наибольшую мощность можно получить во внешней цепи?

10.107. При замыкании на сопротивление 5 Ом батарея дает ток силой 1 А. Сила тока короткого замыкания батареи равна 6 А. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

10.108. Элемент замыкают один раз сопротивлением 4 Ом, другой — сопротивлением 9 Ом. В обоих случаях во внешней цепи выделяется одинаковая мощность. При каком внешнем сопротивлении она будет наибольшей?

10.109. Полезная мощность батареи равна 32 Вт при двух различных внешних сопротивлениях: 2 и 8 Ом. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

10.110. Полезная мощность батареи равна 6 Вт при двух значениях силы тока в цепи: 2 и 6 А. Чему равна максимальная полезная мощность этой батареи?

10.111. При силе тока в цепи 2 А полезная мощность батареи 10 Вт, а при силе тока 4 А ее полезная мощность 16 Вт. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

10.112. Электромотор поднимает груз массой 50 кг со скоростью 2 м/с. При каком напряжении работает мотор, если по его обмотке сопротивлением 12 Ом течет ток силой 10 А? $g = 10$ м/с^2.

Электролиз (33–34)

10.113. Сколько минут длилось никелирование током силой 2 А, если масса выделившегося никеля равна 1,8 г? Электрохимический эквивалент никеля 0,3 мг/Кл.

10.114. Сколько миллиграмм меди выделится в течение 200 с на катоде при электролизе сернокислой меди, если в течение первых 100 с сила тока равномерно возрастает от 0 до 6 А, а в течение последующих 100 с она равномерно уменьшается до 2 А? Электрохимический эквивалент меди $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

10.115. Батарея состоит из десяти последовательно включенных элементов с ЭДС 10 В и внутренним сопротивлением 4 Ом каждый. К батарее присоединяют электролитическую ванну сопротивлением 200 Ом. Сколько миллиграмм цинка выделится на электроде за 6 часов работы? Электрохимический эквивалент цинка 0,4 мг/Кл.

10.116. Металлическую поверхность с площадью 200 см^2 надо покрыть слоем серебра толщиной 20 мкм. Сколько минут надо пропускать ток силой 0,5 А через электролит? Плотность серебра 10500 кг/м^3, электрохимический эквивалент серебра 1,12 мг/Кл.

10.117. Для того чтобы наполнить водородом воздушный шар, электролиз подкисленной воды проводился 1000 часов. Сила тока при электролизе была 500 А. Чему равна подъемная сила (выталкивающая сила минус вес газа, заполняющего шар) наполненного воздушного шара? Электрохимический эквивалент водорода 10^{-8} кг/Кл, молярные массы водорода и воздуха — 2 и 29 кг/кмоль. Водород и окружающий шар воздух имеют одинаковые давления и температуры. $g = 10$ м/с^2.

10.118. При электролизе раствора серной кислоты расходуется мощность 37 Вт. Определите сопротивление электролита, если за 500 минут выделяется 0,3 г водорода. Электрохимический эквивалент водорода 10^{-8} кг/Кл.

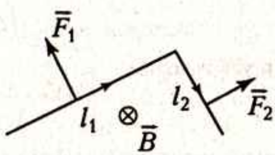
10.119. Чему равен КПД (в процентах) установки для электролиза раствора серебряной соли, если при затрате 80 кДж энергии выделилось 5,6 г серебра при разности потенциалов на электродах 4 В? Электрохимический эквивалент серебра 1,12 мг/Кл.

Глава 11

Магнетизм

Примеры решения задач

Задача 1. *Проводник длиной 140 см согнули под прямым углом так, что одна из сторон угла равна 60 см, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией 2 мТл обеими сторонами перпендикулярно линиям индукции. Какая сила (в мН) будет действовать на этот проводник, если по нему пропустить ток силой 10 А?*



На каждую из сторон угла действует сила Ампера, лежащая в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, и направленная перпендикулярно стороне. Поскольку угол между направлением тока и вектором индукции 90°, то силы Ампера, действующие на стороны l_1 и l_2, равны $F_1 = IBl_1$ и $F_2 = IBl_2$. Результирующая сила находится по теореме Пифагора

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = IB\sqrt{l_1^2 + l_2^2} = 20 \text{ мН}.$$

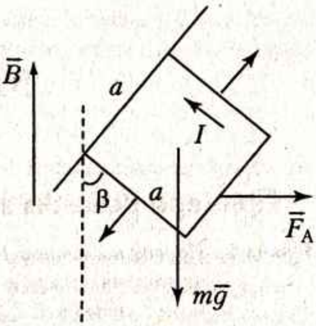
Задача 2. *В однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл находится проводник, расположенный горизонтально. Линии индукции поля также горизонтальны и перпендикулярны к проводнику. Какой ток должен протекать через проводник, чтобы он завис? Масса единицы длины проводника 0,01 кг/м, $g = 10$ м/с^2.*

Ток должен иметь такое направление, чтобы сила Ампера была направлена вертикально вверх, и такую величину, чтобы сила Ампера уравновешивала силу тяжести: $IBl = mg$. Выражая силу тока, получаем

$$I = \frac{(m/l)\,g}{B} = 10 \text{ А}.$$

Задача 3. *Проволочная квадратная рамка массой 10 г со стороной 10 см может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из ее сторон. Рамка находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл. При какой минимальной силе тока в рамке она будет неподвижна и наклонена к горизонту под углом 45°? $g = 10$ м/с^2.*

Силы Ампера, действующие на боковые стороны рамки, точно компенсируют друг друга — они растягивают рамку, но не дают вклада ни в уравнение сил, ни в уравнение моментов. Сила Ампера, действующая на нижнюю сторону, создает относительно оси вращательный момент $IBa(a\cos\beta)$, который в положении равновесия компенсируется моментом силы тяжести. Сила тяжести приложена к центру тяжести рамки, ее момент относительно оси вращения равен $mg(\frac{a}{2}\sin\beta)$. Приходим к уравнению

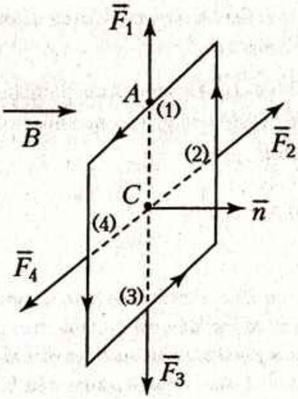


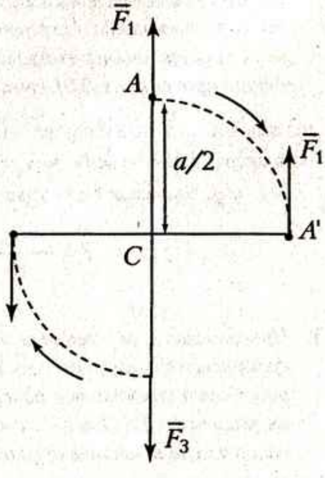
$$IBa(a\cos\beta) = mg(\frac{a}{2}\sin\beta),$$

откуда находим

$$I = \frac{mg}{2Ba}\text{tg}\beta = 5 \text{ А}.$$

Задача 4. *Прямоугольный контур площадью 150 см^2 с током силой 4 А, на который действует только однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, занял положение устойчивого равновесия. Какую после этого надо совершить работу (в мДж), чтобы медленно повернуть его на 90° вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон?*





Устойчивое равновесие соответствует такому положению контура, при котором вектор положительной нормали к контуру направлен вдоль поля. (Направление положительной нормали определяется по движению буравчика, рукоять которого вращается по току). В этом положении на стороны контура действуют растягивающие силы, и при малом повороте контура возникает вращающий момент, препятствующий отклонению. При повороте вокруг оси, проходящей через середины сторон 2 и 4, работу совершают только силы Ампера, действующие на стороны 1 и 3. Работа этих сил при медленном повороте равна по модулю и противоположна по знаку работе внешних сил. Работу каждой из этих сил легко найти, если учесть, что работа любой постоянной силы не зависит от траектории (как силы тяжести). Заменяя перемещение стороны по криволинейной траектории из точки A в точку A' перемещением по двум прямолинейным отрезкам AC и CA', получаем, что работа равна

$$A_1 = -F_1 \frac{a}{2} = -IBb\frac{a}{2},$$

где a — длина сторон 2 и 4, b — длина сторон 1 и 3. Полная работа внешних сил равна

$$A = -2A_1 = IB(ab) = IBS = 6 \text{ мДж}.$$

Задача 5. *Перпендикулярно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью 100 кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется заряженная частица с постоянной скоростью 100 км/с. Чему равна индукция магнитного поля?*

Поскольку частица движется равномерно и прямолинейно, то ее ускорение равно нулю. Значит, магнитная сила должна компенсироваться электрической. Так как сила Лоренца направлена перпендикулярно как скорости частицы, так и вектору магнитной индукции, то, в зависимости от направления скорости, она либо параллельна, либо антипараллельна электрической силе. В данном случае реализуется второй вариант. Приравнивая модули сил, получаем уравнение $qE = qvB$, откуда находим $B = E/v = 1$ Тл.

Задача 6. *Протон влетает со скоростью 60 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, линии которых совпадают по направлению, перпендикулярно к этим линиям. Определите напряженность электрического поля (в кВ/м), если индукция магнитного поля 0,1 Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, равно 10^{12} м/с^2. Отношение заряда протона к его массе 10^8 Кл/кг.*

В данном случае сила Лоренца направлена перпендикулярно электрической силе. Ускорение протона определяется равнодействующей этих сил, которую можно найти по теореме Пифагора:

$$\sqrt{(eE)^2 + (evB)^2} = ma.$$

Выражая из этого уравнения напряженность поля, получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{a}{e/m}\right)^2 - (vB)^2} = 8 \text{ кВ/м}.$$

Задача 7. *Перпендикулярно линиям индукции в однородное магнитное поле влетает протон и однозарядный ион гелия, ускоренные одинаковой разностью потенциалов. Во сколько раз радиус окружности, по которой движется ион, больше, чем радиус окружности протона?*

И протон, и ион гелия движутся по окружности под действием силы Лоренца. Уравнения движения протона и иона имеют вид

$$ev_1B = m_1\frac{v_1^2}{R_1}, \qquad ev_2B = m_2\frac{v_2^2}{R_2}$$

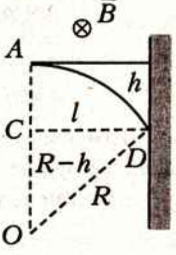
(однозарядный ион гелия имеет такой же заряд, как протон, но другую массу: $m_2 = 4\,m_1$). Разделив уравнения друг на друга, выразим отношение радиусов

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_2v_2}{m_1v_1}.$$

Чтобы найти отношение скоростей, запишем условие, что каждая из частиц приобрела свою скорость под действием одной и той же разности потенциалов: $eU = m_1v_1^2/2$, $eU = m_2v_2^2/2$, откуда получаем $v_2/v_1 = \sqrt{m_1/m_2}$. Окончательно получаем

$$\frac{R_2}{R_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = 2.$$

Задача 8. *Электроннолучевую трубку с отключенной управляющей системой помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное скорости движения электронов. При этом след пучка электронов на экране, удаленном на 14 см от места вылета электронов, смещается на 2 см. Какова скорость (в км/с) электронов, если индукция поля 25 мкТл, а удельный заряд электрона 1,8·10¹¹ Кл/кг?*



Под действием силы Лоренца электроны движутся по дуге окружности, радиус которой найдем из уравнения движения

$$evB = \frac{mv^2}{R}.$$

Чтобы связать отклонение h с радиусом кривизны траектории, сделаем дополнительные построения и запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника OCD (O — центр окружности): $R^2 = (R - h) + l^2$. Получаем

$$R = \frac{h^2 + l^2}{2h} = 0{,}5 \text{ м.}$$

Подставляя в уравнение движения, находим $v = (e/m)BR = 2250$ км/с.

Задача 9. *Пучок протонов влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Протоны движутся в магнитном поле по дуге окружности радиусом 20 см и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени, если сила тока в пучке 0,1 мА. Отношение заряда протона к его массе 10^8 Кл/кг.*

Тепловая мощность, выделяемая в мишени, равна

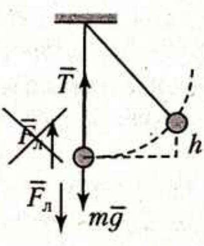
$$P = \frac{mv^2}{2}\frac{\Delta N}{\Delta t},$$

где ΔN — количество протонов, попавших на мишень за время Δt. ΔN выразим через силу тока: $\Delta N = \Delta q/e = I\Delta t/e$ (Δq — заряд, прошедший за время Δt), откуда $\Delta N/\Delta t = I/e$. Скорость протонов найдем из уравнения движения по окружности в магнитном поле: $evB = m(v^2/R)$. Получаем $v = (e/m)BR$. Окончательно получаем

$$P = \frac{e/m}{2}B^2R^2I = 2 \text{ Вт.}$$

Задача 10. *На шарик массой 5 г нанесли заряд 2 мКл, подвесили его на нити длиной 10 м в горизонтальном магнитном поле с индукцией 2 Тл, отклонили на некоторый угол в плоскости, перпендикулярной полю, и отпустили. На сколько сантиметров крайнее положение шарика выше нижнего, если при прохождении им нижней точки сила натяжения нити равна 0,17 Н? $g = 10$ м/с^2.*

Сила Лоренца направлена перпендикулярно скорости, значит ее работа равна нулю. Закон сохранения энергии



$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

связывает искомую высоту со скоростью в нижней точке. При записи 2-го закона Ньютона в нижней точке возникает следующая проблема: так как в условии не сказано, куда направлена магнитная индукция (к нам или от нас), то неясно, куда направить силу Лоренца — вверх или вниз. Направим ее поначалу вверх, и попробуем установить ее знак

$$T - mg + F_{лу} = \frac{mv^2}{l}.$$

Поскольку наибольшая скорость соответствует начальному отклонению до уровня подвеса ($h = l$), при котором впоследствии $mv^2/l = 2mg$, получаем неравенство $F_{лу} < 3mg - T$, в котором правая часть при подстановке чисел оказывается отрицательной. Значит, $F_{лу} < 0$, т. е. сила Лоренца направлена не вверх, а вниз. Получаем квадратное уравнение для скорости

$$v^2 + \left(\frac{qBl}{m}\right)v - (T - mg)\frac{l}{m} = 0,$$

решив которое и подставив скорость в закон сохранения энергии, получим $h =$ $= 720$ см.

Задача 11. *Магнитный поток через каждый виток катушки, помещенной в магнитное поле, равен 0,1 Вб. Магнитное поле равномерно убывает до нуля за 0,1 с, при этом в катушке индуцируется ЭДС 20 В. Сколько витков имеет катушка?*

Полный поток через катушку равен $\Phi = N\Phi_1$, где Φ_1 — поток через каждый виток катушки. При равномерном (линейном) изменении магнитного поля ЭДС постоянна и равна

$$\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}\right| = \frac{N\Phi_1}{\Delta t},$$

откуда $N = \mathcal{E}\Delta t/\Phi_1 = 20$.

Задача 12. *Медное кольцо, площадь которого 0,08 м^2, а сопротивление $4\cdot10^{-3}$ Ом, помещено в однородное магнитное поле так, что плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции поля. Какое количество теплоты (в мкДж) выделяется в кольце за 0,1 с, если индукция магнитного поля убывает со скоростью 0,01 Тл/с?*

При равномерном изменении магнитного поля в кольце возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = S\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|.$$

Силу тока в кольце найдем из закона Ома для полной цепи: $I = \mathcal{E}/r$, а количество теплоты, выделяющееся за время Δt, из закона Джоуля–Ленца: $Q = I^2 r\Delta t = (\mathcal{E}^2/r)\Delta t$. Подставляя $\mathcal{E}$, получаем

$$Q = \left(S\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 \frac{\Delta t}{r} = 16\ \text{мкДж}.$$

Задача 13. *Квадратную рамку со стороной 3 м поместили в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл перпендикулярно линиям индукции, затем, не вынимая проволоку из поля и не изменяя ее ориентации, деформировали ее в прямоугольник с отношением сторон 1:2. Какой заряд прошел при этом по контуру? Сопротивление рамки 1 Ом.*

Заряд, проходящий через контур при изменении пронизывающего этот контур магнитного потока, равен

$$q = \left|I_{\text{ср}}\right|\Delta t = \frac{\left|\mathcal{E}_{\text{ср}}\right|}{r}\Delta t = \frac{|\Delta\Phi/\Delta t|}{r}\Delta t = \frac{|\Delta\Phi|}{r},$$

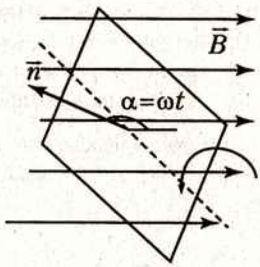
где r — сопротивление контура. В данном случае изменение потока связано с изменением площади контура: $|\Delta\Phi| = B|\Delta S| = B(a^2 - bc)$, где a — сторона квадрата, а b и c — стороны прямоугольника, которые находим из уравнений $b/c = 2$, $2(b + c) = 4a$. Получаем $|\Delta S| = a^2 - \left(\frac{4}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{9}a^2$, а прошедший заряд равен

$$q = \frac{Ba^2}{9r} = 1\ \text{Кл}.$$

Задача 14. *В однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл расположен проволочный виток таким образом, что его плоскость перпендикулярна линиям магнитной индукции. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, прошедший через гальванометр при повороте витка на некоторый угол, равен 0,08 Кл. На какой угол (в градусах) повернули виток, если его площадь 4000 см^2, а сопротивление витка вместе с гальванометром 1,5 Ом?*

Выберем направление нормали к витку таким образом, чтобы в начальном положении она была параллельна вектору $\vec{B}$. Тогда начальный поток будет равен $\Phi_1 = BS$, а после поворота на угол θ поток станет равен $\Phi_2 = BS\cos\theta$. Прошедший через виток заряд выражается через изменение потока: $q = |\Delta\Phi|/r$, где r — сопротивление витка (см. предыдущую задачу). Получаем уравнение $q = BS(1 - \cos\theta)/r$, из которого находим $\cos\theta = -0,5$. Угол поворота равен 120°.

Задача 15. *Рамка площадью 200 см^2 вращается вокруг оси, лежащей в плоскости рамки и соединяющей середины ее сторон, с угловой скоростью 100 рад/с. Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл, причем вектор индукции перпендикулярен оси вращения. Сколько витков проволоки надо намотать на рамку, чтобы максимальная ЭДС индукции в рамке равнялась 1 В?*



При равномерном вращении рамки угол между нормалью к плоскости контура и вектором магнитной индукции меняется по закону $\alpha = \omega t$, где ω — угловая скорость вращения контура. Зависимость магнитного потока от времени имеет вид

$$\Phi = NBS\cos\alpha = NBS\cos\omega t,$$

а ЭДС индукции равняется производной по времени от магнитного потока: $\mathcal{E} = -\Phi'(t) = NBS\omega\sin\omega t$. Максимальное значение $\mathcal{E}$ равняется $\mathcal{E}_{max} = \omega\Phi_{max} = \omega NBS$. Выражая число витков, получаем

$$N = \frac{\mathcal{E}_{max}}{\omega BS} = 50.$$

Задача 16. *Проводник длиной 2 м движется со скоростью 10 м/с в однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл, оставаясь перпендикулярным линиям поля. Вектор скорости перпендикулярен к проводнику и образует с линиями индукции угол 30°. Найдите ЭДС, индуцируемую в проводнике.*

На любой пробный заряд q в движущемся проводнике действует сила Лоренца $F_л = qvB\sin\alpha$, направленная вдоль проводника. Эта сила играет роль сторонней силы в движущемся проводнике, и ЭДС по определению равна

$$\mathcal{E} = \frac{A_q^{ст}}{q} = \frac{F_л l}{q} = \frac{(qvB\sin\alpha)l}{q} = Bvl\sin\alpha = 2\text{ В}.$$

Задача 17. *С какой угловой скоростью надо вращать прямой проводник вокруг оси, проходящей через его конец, в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией 0,2 Тл, чтобы в проводнике возникла ЭДС индукции 0,3 В? Длина проводника 20 см.*

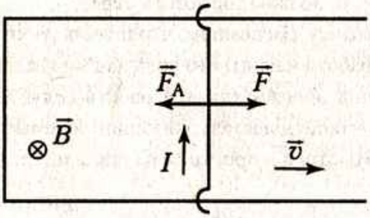
Скорость точки стержня, находящейся на расстоянии x от оси вращения, равна $v = \omega x$, а сила Лоренца, действующая на пробный заряд q в этой точке, равна $F_л(x) = qvB = q\omega Bx$. Работа силы Лоренца при перемещении пробного заряда с одного конца проводника на другой равна произведению средней силы на длину проводника

$$A = \frac{0 + q\omega Bl}{2} l = \frac{1}{2} q\omega Bl^2,$$

а ЭДС равна $\mathscr{E} = A/q = \frac{1}{2}\omega Bl^2$. Выражая угловую скорость, получаем

$$\omega = \frac{2\mathscr{E}}{Bl^2} = 75 \text{ рад/с}.$$

Задача 18. *По П-образной рамке, помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, движется без трения с постоянной скоростью 2 м/с перемычка, сопротивление которой 2 Ом. К перемычке приложена сила 4 Н. Найдите силу тока в перемычке. Сопротивлением рамки пренебречь. Силу тяжести не учитывать.*



Так как ускорение перемычки равно нулю, то приложенная сила должна быть точно скомпенсирована силой Ампера, действующей на перемычку со стороны магнитного поля: $F - IBl = 0$. Возникновение ЭДС и тока объясняется действием силы Лоренца на свободные заряды в движущейся перемычке (см. реш. 16); для ЭДС при этом получается выражение $\mathscr{E} = Bvl$. По закону Ома сила тока равна $I = \mathscr{E}/r = Bvl/r$. Выразив длину перемычки и подставив ее во 2-ой закон Ньютона, придем к уравнению: $Fv = I^2 r$. (Это уравнение имеет ясный физический смысл: поскольку полная работа магнитного поля над движущимися зарядами равна нулю, то из закона сохранения энергии следует, что работа внешней силы должна быть равна теплоте, выделившейся при протекании тока.) Для силы тока получаем

$$I = \sqrt{\frac{Fv}{r}} = 2 \text{ А}.$$

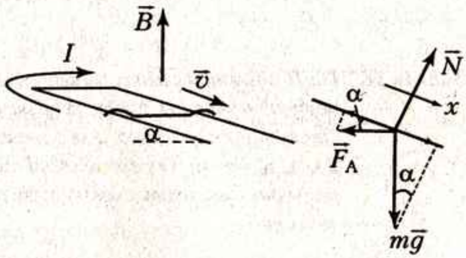
Задача 19. *По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 1 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь. $g = 10$ м/с^2.*

При движении перемычки в ней возникает ЭДС индукции (см. реш. 16)

$$\mathcal{E} = Bvl\sin(90°+\alpha) = Bvl\cos\alpha.$$

Под действием этой ЭДС в перемычке и контуре течет ток силой

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bvl\cos\alpha}{R}.$$



Направление ЭДС и тока в контуре определяется правилом Ленца. Из этого правила следует, что сила Ампера, действующая на возбужденный в контуре ток, должна стараться скомпенсировать причину его возникновения, т. е. должна тормозить перемычку. (Вспомним, что полная работа магнитного поля равна нулю. Поскольку работа магнитного поля над зарядами контура приводит к возбуждению тока, то она положительна, а работа силы Ампера должна быть отрицательной). При установившемся движении перемычки ее ускорение равно нулю, и 2-ой закон Ньютона в проекции на ось x имеет вид

$$mg\sin\alpha - F_A\cos\alpha = 0,$$

где $F_A = IBl$ — сила Ампера. Подставляя значение тока, приходим к уравнению

$$mg\sin\alpha = \frac{B^2l^2v\cos^2\alpha}{R},$$

из которого находим скорость установившегося движения

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{(Bl\cos\alpha)^2} = 2 \text{ м/с}.$$

Задача 20. *При пропускании через катушку тока силой 5 А в ней возникает магнитное поле с индукцией 3 Тл. Определите индуктивность катушки, если площадь ее поперечного сечения 100 см², а число витков 2500.*

Магнитный поток через все витки катушки равен $\Phi = BSN$. С другой стороны, по определению индуктивности этот же поток равен $\Phi = LI$. Получаем

$$L = \frac{BSN}{I} = 15 \text{ Гн}.$$

Задача 21. *Магнитный поток через площадь контура, создаваемый током 10 А, текущим по контуру, равен 0,9 мВб. Определите ЭДС самоиндукции (в мВ), возникающую в контуре при равномерном убывании силы тока до 5 А за 1 мс.*

Из уравнения $\Phi = LI$ находим индуктивность: $L = \Phi/I$, после чего определяем ЭДС самоиндукции, возникающую при изменении тока

$$\mathcal{E} = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = 450 \text{ мВ}.$$

Задача 22. *Замкнутый виток площадью 20 см^2 с индуктивностью 0,1 мГн помещают в однородное магнитное поле с индукцией 2 мТл перпендикулярно линиям индукции, затем охлаждают его до сверхпроводящего состояния и выключают поле. Какой будет после этого сила тока (в мА) в контуре?*

Особенность сверхпроводящего контура состоит в том, что пронизывающий его магнитный поток остается постоянным. Действительно, изменение потока привело бы к возникновению ЭДС индукции, что при нулевом сопротивлении контура должно было бы закончится возникновением бесконечного тока. Значит, при любом изменении внешнего магнитного потока ток в контуре изменяется таким образом, чтобы изменение собственного магнитного потока (т. е. потока магнитной индукции, созданной самим током) скомпенсировало изменение внешнего потока. Получаем, что полный магнитный поток

$$\Phi_{\text{полн}} = \Phi_{\text{внешн}} + \Phi_{\text{соб}}$$

должен оставаться постоянным. В начальный момент тока в контуре нет, и полный поток равен внешнему: $\Phi_{\text{нач}} = BS$. В конечный момент внешнее поле отсутствует, и остается только собственный поток: $\Phi_{\text{кон}} = LI$. Приравнивая потоки, получаем уравнение

$$BS = LI,$$

т. е. $I = BS/L = 40$ мА.

Задача 23. *Найдите энергию магнитного поля соленоида, в котором при силе тока 10 А возникает магнитный поток 0,6 Вб.*

Энергия магнитного поля соленоида равна $W = \frac{1}{2}LI^2$. Индуктивность можно найти, зная величину магнитного потока при данной силе тока: $L = \Phi/I$. Получаем $W = \frac{1}{2}\Phi I = 3$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

Закон Ампера (1–4)

11.1. На проводник длиной 0,5 м с током силой 20 А в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл действует сила 0,5 Н. Какой угол (в градусах) составляет направление тока в проводнике с вектором магнитной индукции?

11.2. Прямой проводник с током помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Во сколько раз уменьшится сила, действующая на проводник со стороны магнитного поля, если его повернуть так, чтобы направление тока в проводнике составляло угол 30° с вектором индукции поля?

11.3. С какой силой взаимодействуют два параллельных провода с токами силой 300 А, если длина проводов 50 м и каждый из них создает в месте расположения другого провода магнитное поле с индукцией 1,2 мТл?

11.4. Проводник длиной 110 см согнули под углом 60° так, что одна из сторон угла равна 30 см, и поместили в однородное магнитное поле с индукцией 2 мТл обеими сторонами перпендикулярно линиям индукции. Какая сила (в мН) будет действовать на этот проводник, если по нему пропустить ток силой 10 А?

11.5. Определите работу (в мДж), совершаемую силой Ампера при перемещении проводника длиной 0,2 м с током силой 5 А в однородном магнитном поле на расстояние 0,5 м. Проводник расположен перпендикулярно линиям поля и движется в направлении силы Ампера. Индукция магнитного поля 0,1 Тл.

11.6. Прямой проводник, расположенный перпендикулярно линиям магнитной индукции, при пропускании по нему тока силой 1 А приобрел ускорение 2 м/с^2. Площадь поперечного сечения проводника 1 мм^2, плотность материала проводника 2500 кг/м^3. Чему равна индукция магнитного поля (в мТл)? Силу тяжести не учитывать.

11.7. По горизонтально расположенному проводнику длиной 20 см и массой 4 кг течет ток силой 10 А. Найдите минимальную величину индукции магнитного поля, в которое нужно поместить проводник, чтобы сила тяжести уравновесилась магнитной силой. $g = 10$ м/с^2.

11.8. Прямой проводник длиной 20 см и массой 50 г подвешен горизонтально на двух легких нитях в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен горизонтально и перпендикулярно к проводнику. Какой ток надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась? Индукция поля 50 мТл. Каждая нить разрывается при нагрузке 0,4 Н. $g = 10$ м/с^2.

11.9. Проводник длиной 10 см располагается горизонтально и перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. При напряжении на проводнике 100 В магнитная сила уравновешивает сулу тяжести. Чему равна плотность (в г/см^3) проводника, если его удельное сопротивление 10^{-5} Ом·м, а индукция магнитного поля 1 мТл? $g = 10$ м/с^2.

11.10. Проводник массой 10 г и длиной 20 см подвешен в горизонтальном положении в вертикальном магнитном поле с индукцией 0,25 Тл. На какой угол (в градусах) от вертикали отклонятся нити, на которых подвешен проводник, если по нему пропустить ток силой 2 А? Массой нитей пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

11.11. Стержень массой 20 г и длиной 5 см положили горизонтально на гладкую наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол, тангенс которого 0,3. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией 150 мТл. При какой силе тока в стержне он будет находиться в равновесии? $g = 10$ м/с^2.

11.12. Три стороны квадрата из проволоки жестко скреплены друг с другом, а четвертая может скользить по ним. Квадрат расположен на горизонтальной поверхности и находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 100 мТл. Какой ток надо пропустить по контуру, чтобы сдвинуть подвижную сторону, если ее масса 20 г, а коэффициент трения в контактах 0,2? $g = 10$ м/с^2. Сторона квадрата 10 см.

11.13. Максимальный момент сил, действующих на прямоугольную рамку с током силой 50 А в однородном магнитном поле, равен 1 Н·м. Какова индукция поля, если ширина рамки 0,1 м, а длина 0,2 м?

11.14. Определите индукцию магнитного поля, если максимальный момент сил, действующих на рамку площадью 1 см^2, равен $5 \cdot 10^{-2}$ Н·м при силе тока 1 А. Рамка состоит из 100 витков провода.

11.15. Прямоугольный контур площадью 150 см^2 с током силой 3 А, на который действует только однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, занял положение устойчивого равновесия. Какую после этого надо совершить работу (в мДж), чтобы медленно повернуть его на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон?

Сила Лоренца (5–10)

11.16. С какой силой (в мН) будет действовать магнитное поле с индукцией 0,006 Тл на заряд 30 мкКл, влетевший в поле со скоростью 100 км/с, направленной под углом 30° к линиям индукции поля?

11.17. Во сколько раз электрическая сила, действующая на электрон, больше магнитной силы, если напряженность электрического поля 1,5 кВ/м, а индукция магнитного поля 0,1 Тл? Скорость электрона равна 200 м/с и направлена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

11.18. В однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции влетают протон и альфа-частица. Во сколько раз скорость альфа-частицы больше скорости протона, если сила, действующая со стороны магнитного поля на альфа-частицу, в 8 раз больше, чем сила, действующая на протон?

11.19. Найдите ускорение (в км/с^2) протона, который движется со скоростью 2 м/с в магнитном поле с индукцией 3 мТл перпендикулярно линиям поля. Отношение заряда протона к его массе 10^8 Кл/кг.

11.20. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл со скоростью $1{,}6 \cdot 10^7$ м/с, направленной перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус (в мм) окружности, по которой движется электрон. Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

11.21. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,02 Тл по окружности, имея импульс $6{,}4\cdot10^{-23}$ кг м/с. Найдите радиус (в см) этой окружности. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

11.22. Какую кинетическую энергию имеет электрон, движущийся по окружности радиусом 1 см в однородном магнитном поле с индукцией 0,03 Тл? Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $9\cdot10^{-31}$ кг. Ответ дать в электронвольтах (1 эВ = $= 1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж).

11.23. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией 8,36 мкТл перпендикулярно линиям поля. С какой угловой скоростью (в рад/с) будет вращаться протон? Заряд протона $1{,}602\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $1{,}672\cdot10^{-27}$ кг.

11.24. Протон и альфа-частица влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям поля. Во сколько раз период обращения альфа-частицы больше периода обращения протона?

11.25. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 500 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией 0,001 Тл. Найдите радиус кривизны (в мм) траектории электрона. Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $9\cdot10^{-31}$ кг.

11.26. Два иона влетели в однородное магнитное поле. Первый начал двигаться по окружности радиусом 5 см, второй — по окружности радиусом 2,5 см. Заряд второго иона в два раза больше, чем заряд первого. Во сколько раз масса первого иона больше, чем второго, если известно, что они прошли одинаковую разность потенциалов?

11.27. Протон в магнитном поле с индукцией 0,01 Тл движется по дуге окружности радиусом 10 см. После вылета из магнитного поля он полностью тормозится электрическим полем. Чему равна тормозящая разность потенциалов, если отношение заряда протона к его массе 10^8 Кл/кг?

11.28. Отрицательно заряженная частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией 0,001 Тл, где движется по дуге окружности радиусом 0,2 м. Затем частица попадает в однородное электрическое поле, где пролетает участок с разностью потенциалов 1000 В, при этом ее скорость уменьшается в 3 раза. Определите конечную скорость (в км/с) частицы.

11.29. Положительно заряженный грузик массой 2 г подвешен на нити длиной 10 см в горизонтальном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл. Нить с грузиком отклоняют в горизонтальное положение в плоскости, перпендикулярной полю, и отпускают. Чему равен заряд (в мКл) грузика, если сила натяжения нити в нижней точке 51,8 мН? $g = 9{,}8$ м/с^2.

11.30. Маленький шарик с зарядом 2 мКл, подвешенный на длинной нити в горизонтальном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл, совершает колебания в плоскости, перпендикулярной вектору индукции. Силы натяжения нити при прохождении шариком нижней точки в разных направлениях отличаются на 0,01 Н. На сколько сантиметров крайнее положение шарика выше нижнего? $g = 10$ м/с^2.

11.31. Грузик массой 2 г с зарядом 4 мКл, подвешенный на невесомой нити, находится в вертикальном магнитном поле с индукцией 3 Тл. Грузик дважды приводят во вращение в горизонтальной плоскости, причем радиусы вращения в обоих случаях одинаковы, а направления вращения противоположны. На сколько отличаются угловые скорости этих вращательных движений?

Магнитный поток. Закон электромагнитной индукции

а) изменение магнитного поля (11–12)

11.32. Квадратная рамка со стороной 10 см расположена в однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл так, что нормаль к ее поверхности образует угол 60° с вектором индукции. Определите магнитный поток (в мВб) через плоскость рамки.

11.33. Плоский виток, площадь которого 0,001 $м^2$, расположен перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Найдите абсолютную величину ЭДС, возникающую в витке, если индукция поля равномерно убывает от 0,5 до 0,1 Тл за $4 \cdot 10^{-4}$ с.

11.34. Какой магнитный поток пронизывает каждый виток катушки, имеющей 10 витков, если при равномерном исчезновении магнитного поля в течение 1 с в катушке индуцируется ЭДС 10 В?

11.35. Неподвижный контур площадью 0,03 $м^2$ находится в однородном равномерно изменяющемся магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. Найдите скорость изменения магнитной индукции (в Тл/с), если при этом возникает ЭДС индукции 0,9 В.

11.36. Катушка, имеющая 100 витков площадью 5 $см^2$, помещена в однородное магнитное поле так, что плоскость витков перпендикулярна вектору индукции. Концы провода катушки подсоединены к обкладкам плоского конденсатора емкостью 4 мкФ. Какой заряд (в мкКл) окажется на обкладках этого конденсатора, если магнитное поле будет убывать со скоростью 20 Тл/с?

11.37. Проволочная рамка сопротивлением 2 кОм помещена в магнитное поле. Магнитный поток через площадь рамки равномерно изменяется на 6 Вб за 0,001 с. Чему равна приэтом сила тока в рамке?

11.38. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью 0,001 $м^2$, расположенный перпендикулярно линиям поля. Чему будет равна сила тока (в мкА) в витке, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью 0,01 Тл/с? Сопротивление витка 1 Ом.

11.39. Квадратная рамка со стороной 6,8 мм, сделанная из медной проволоки с площадью поперечного сечения 1 $мм^2$, помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Индукция магнитного поля равномерно изменяется на 2 Тл за 0,1 с. Чему равна при этом сила тока в рамке? Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

11.40. Замкнутый провод изогнут в виде восьмерки и помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Считая петли восьмерки окружностями радиусами 3 и 7 см, найдите силу тока (в мкА), который будет протекать по проводу при убывании магнитного поля со скоростью 3 мТл/с. Сопротивление единицы длины провода 2 Ом/м.

11.41. В однородном магнитном поле с индукцией $9 \cdot 10^{-2}$ Тл находится виток, расположенный перпендикулярно линиям индукции поля. Какой заряд (в мкКл) протечет по витку при выключении магнитного поля? Площадь витка 0,001 м^2, его сопротивление 1 Ом.

11.42. Замкнутая круглая катушка из 100 витков помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. При изменении магнитной индукции на 0,2 мТл через катушку проходит заряд 40 мкКл. Чему равен радиус катушки (в см), если сопротивление единицы длины провода 0,1 Ом/м?

11.43. Замкнутая катушка из 100 витков площадью 10 см^2 помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. При равномерном изменении магнитного поля на 0,1 Тл за 0,1 с в катушке выделяется 10^{-3} Дж тепла. Чему равно сопротивление катушки?

11.44. В однородном магнитном поле находится обмотка, состоящая из 1000 витков квадратной формы. Направление линий поля перпендикулярно плоскости витков. Индукция поля равномерно изменяется на $2 \cdot 10^{-2}$ Тл за 0,1 с, в результате чего в обмотке выделяется 0,1 Дж тепла. Площадь поперечного сечения проводов обмотки 1 мм^2, их удельное сопротивление 10^{-8} Ом·м. Определите сторону (в см) квадрата.

б) изменение площади контура (13)

11.45. Плоский замкнутый контур площадью 10 см^2 деформируется в однородном магнитном поле с индукцией 10 мТл, оставаясь перпендикулярным линиям индукции. За 2 с площадь контура равномерно уменьшается до 2 см^2. Определите среднюю силу тока (в мкА) в контуре за этот промежуток времени, если сопротивление контура 1 Ом.

11.46. Квадратная рамка со стороной 60 см находится в магнитном поле с индукцией 1 мТл, линии которой перпендикулярны плоскости рамки. Затем рамку вытягивают в одну линию. Определите заряд (в мКл), протекший по рамке при изменении ее формы. Сопротивление единицы длины провода рамки 0,01 Ом/м.

11.47. Квадрат из проволоки сопротивлением 5 Ом поместили в однородное магнитное поле с индукцией 0,2 Тл перпендикулярно линиям индукции, затем, не вынимая проволоку из поля и не меняя ее ориентации, деформировали ее в прямоугольник с отношением сторон 1:3. При этом по контуру прошел заряд 4 мкКл. Какова длина (в см) проволоки?

в) изменение угла между контуром и полем (14–15)

11.48. Катушка, имеющая 100 витков и расположенная перпендикулярно магнитному полю с индукцией 6 Тл, поворачивается за 1 с на угол 90°. За это время в катушке наводится ЭДС со средним значением 0,6 В. Определите площадь (в см^2) поперечного сечения катушки.

11.49. Медное кольцо радиусом 5 см помещают в однородное магнитное поле с индукцией 8 мТл перпендикулярно линиям индукции. Какой заряд (в мКл) пройдет по кольцу, если его повернуть на 180° вокруг оси, совпадающей с его диаметром? Сопротивление единицы длины кольца 2 мОм/м.

11.50. Плоский виток провода расположен перпендикулярно однородному магнитному полю. Когда виток повернули на 180°, по нему прошел заряд 7,2 мкКл. На какой угол (в градусах) надо повернуть виток, чтобы по нему прошел заряд 1,8 мкКл?

11.51. Круглая рамка вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, проходящей через ее диаметр и перпендикулярной вектору индукции. Найдите максимальную величину ЭДС индукции, возникающей в рамке, если ее площадь 0,2 м^2, угловая скорость вращения 50 рад/с, а индукция магнитного поля 0,1 Тл.

11.52. Круглая рамка площадью 300 см^2 имеет 100 витков и вращается в однородном магнитном поле с индукцией 0,2 Тл вокруг оси, проходящей через диаметр рамки и перпендикулярной вектору индукции. Найдите угловую скорость вращения рамки, если максимальная величина ЭДС индукции 15 В.

11.53. Максимальная ЭДС индукции, возникающая в прямоугольной рамке, вращающейся в однородном магнитном поле, равна 3 В. С какой угловой скоростью вращается рамка, если максимальный магнитный поток через рамку 0,05 Вб? Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и перпендикулярна линиям индукции поля.

Движение проводника в магнитном поле (16–19)

11.54. Проводник длиной 1 м движется со скоростью 5 м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля (в мТл), если на концах проводника возникает разность потенциалов 0,02 В.

11.55. Самолет летит горизонтально со скоростью 900 км/ч. Найдите разность потенциалов (в мВ), возникающую между концами его крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли 50 мкТл, а размах крыльев 12 м.

11.56. Чему равна максимальная ЭДС (в мВ), которая может возникнуть при движении самолета со скоростью 900 км/ч, если размах его крыльев 20 м? Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли 0,03 мТл, вертикальная составляющая 0,04 мТл.

11.57. Сторона прямоугольного каркаса, имеющая длину 10 см, скользит со скоростью 1 м/с по двум другим сторонам, оставаясь с ними в электрическом контакте. Плоскость прямоугольника перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля 0,01 Тл. Найдите силу тока (в мкА) в прямоугольнике через 0,9 с после начала движения. Сопротивление единицы длины провода 1 Ом/м. В начальный момент площадь прямоугольника равна нулю.

11.58. По горизонтальной П-образной рамке, помещенной в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией 40 мТл, движется без трения перемычка длиной 50 см, сопротивление которой 0,1 Ом. Какую минимальную силу (в мН) надо приложить к перемычке, чтобы скорость ее движения была 1 м/с? Сопротивлением рамки пренебречь.

11.59. По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 мОм, индукция поля 0,1 Тл. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

11.60. По П-образной рамке, наклоненной к горизонту под углом, синус которого 0,8, и помещенной в однородное вертикальное магнитное поле, соскальзывает перемычка массой 20 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 1,2 мОм, индукция поля 0,1 Тл, коэффициент трения между перемычкой и рамкой 0,5. Найдите установившуюся скорость движения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь. $g = 10$ м/с^2.

Индуктивность. ЭДС самоиндукции. Энергия магнитного поля (20–23)

11.61. По замкнутому проводнику протекает ток силой 1,5 А. Магнитное поле этого тока создает поток через площадь контура, равный 6 мВб. Найдите индуктивность (в мГн) проводника.

11.62. Сила тока, протекающего по обмотке катушки, равномерно изменяется на 5 А за 0,25 с. При этом возбуждается ЭДС самоиндукции 200 В. Определите индуктивность катушки.

11.63. Определите индуктивность катушки, если при равномерном изменении в ней силы тока от 5 до 10 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 60 В.

11.64. При равномерном изменении силы тока в катушке индуктивностью 6 мГн в ней возникает ЭДС самоиндукции 8 мВ. На какую величину изменяется сила тока за 3 с?

11.65. В катушке индуктивностью 0,2 мГн с помощью реостата равномерно увеличивают силу тока со скоростью 100 А/с. Какова абсолютная величина ЭДС самоиндукции (в мВ), возникающей в катушке?

11.66. В катушке с индуктивностью 6 мГн при равномерном увеличении силы тока на 40 А возникла ЭДС самоиндукции 8 В. Сколько миллисекунд длилось увеличение тока?

11.67. Катушку с индуктивностью 2 Гн, содержащей 200 витков площадью 50 см^2, помещают в однородное магнитное поле с индукцией 60 мТл, параллельной оси катушки. Обмотку катушки охлаждают до сверхпроводящего состояния, а затем поворачивают катушку на 60°. Какой силы ток (в мА) возникнет в катушке?

11.68. На катушке с сопротивлением 10 Ом поддерживается напряжение 50 В. Чему равна энергия (в мДж) магнитного поля, запасенная в катушке, если ее индуктивность 20 мГн?

Глава 12
Колебания и волны

Примеры решения задач

Задача 1. *Точка струны совершает колебания с частотой 1 кГц. Какой путь (в см) пройдет эта точка за 1,2 с, если амплитуда колебаний 1 мм?*

За каждый период колеблющаяся точка проходит путь, равный четырем амплитудам. За время t она совершает $N = t/T = t\nu$ полных колебаний (если это целое число). В данном случае $N = 1200$, значит, путь равен $s = 4AN = 480$ см.

Задача 2. *Через сколько секунд от начала движения точка, совершающая колебания по закону $x = A\cos\omega t$, сместится от начального положения на половину амплитуды? Период колебаний 24 с.*

Движение по указанному закону означает, что движение начинается из крайнего положения, поэтому на первой половине амплитуды точка движется медленнее, чем на второй, и затрачивает на ее прохождение больше времени. Чтобы найти искомое время, надо подставить смещение $x = A/2$ в закон движения. Получаем: $A/2 = A\cos\omega t$, откуда находим $\omega t = \pi/3$, т. е. время равно $t = \pi/(3\omega) = T/6 = 4$ с. (На прохождение полной амплитуды точка затрачивает время $T/4$, т. е. на прохождение первой половины она затрачивает 2/3 этого времени.)

Задача 3. *Точка совершает гармонические колебания. При смещении от положения равновесия 4 см ее скорость равна 6 см/с, а при смещении 3 см — 8 см/с. Найдите циклическую частоту.*

Если смещение точки происходит по закону $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, то закон изменения ее скорости имеет вид $v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$. Выразим из первого уравнения $A\cos(\omega t + \varphi_0)$, из второго уравнения $A\sin(\omega t + \varphi_0)$, возведем их в квадрат и сложим. Получим, что смещение и скорость точки в каждый момент времени связаны соотношением

$$x^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 = A^2.$$

Из условия данной задачи получаем два уравнения: $x_1^2 + (v_1/\omega)^2 = A^2$ и $x_2^2 + (v_2/\omega)^2 = A^2$, из которых после исключения амплитуды находим

$$\omega = \sqrt{\frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_2^2}} = 2 \text{ рад/с}.$$

Задача 4. *Горизонтальная подставка, на которой лежит брусок, начинает двигаться в вертикальном направлении так, что ее координата меняется по закону $y = A\sin\omega t$, где $A = 20$ см. При какой максимальной циклической частоте ω брусок не будет отрываться от подставки? $g = 9{,}8$ м/с^2.*

Запишем 2-ой закон Ньютона для бруска в проекции на вертикальную ось

$$N - mg = ma_y,$$

где $a_y = y''(t) = -\omega^2 A\sin\omega t$. Сила реакции $N = m(g - \omega^2 A\sin\omega t)$ остается положительной все время движения только при $\omega^2 A < g$. При максимальной циклической частоте

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{A}} = 7 \text{ рад/с}$$

брусок отрываться еще не будет, так как N обращается в ноль только в отдельные моменты времени (когда $\sin\omega t = 1$). При бо́льших частотах брусок начнет отрываться от подставки.

Задача 5. *Определите первоначальную длину (в см) математического маятника, если известно, что при уменьшении длины маятника на 5 см частота колебаний увеличивается в 1,5 раза.*

Используя формулу для частоты колебаний математического маятника, получаем уравнения

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad 1{,}5\omega = \sqrt{\frac{g}{l - \Delta l}}.$$

Поделив уравнения друг на друга и возведя в квадрат, получим $\dfrac{l}{l - \Delta l} = 2{,}25$, или $l = 1{,}8\Delta l = 9$ см.

Задача 6. *На сколько процентов увеличится период колебаний математического маятника при помещении его в кабину скоростного лифта, опускающегося с ускорением $0{,}36\,g$?*

Силу натяжения нити покоящегося (не совершающего колебаний) маятника в кабине лифта, опускающегося с ускорением a, можно найти из второго закона Ньютона

$$mg - F_н = ma, \quad \text{или} \quad F_н = m(g - a).$$

Движение лифта с ускорением эквивалентно изменению ускорения силы тяжести от g к новому значению $g' = g - a$ (см. Глава 2 реш. 7). Соответственно, период колебаний маятника станет равен

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a}}.$$

Для заданного в условии значения a получаем $T' = 1{,}25\left(2\pi\sqrt{l/g}\right) = 1{,}25T$, т. е. период увеличился на 25%.

Задача 7. *Шарик массой 0,1 кг, подвешенный на нити, совершает гармонические колебания. Во сколько раз изменится частота колебаний, если шарику сообщить заряд 200 мкКл и поместить в однородное электрическое поле с напряженностью 40 кВ/м, направленное вертикально вниз? $g = 10$ м/с^2.*

При включении электрического поля вертикальная сила, под действием которой совершаются колебания, изменится от значения mg до значения $mg + qE$. Это эквивалентно замене ускорения свободного падения g на новое значение $g' = g + qE/m$. Соответственно, частота колебаний станет

$$\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g'}{l}},$$

что больше прежней частоты в $\sqrt{g'/g} = \sqrt{1 + (qE/mg)} = 3$ раза.

Задача 8. *Математический маятник длиной 0,1 м совершает гармонические колебания с амплитудой 0,007 м. Определите наибольшую скорость движения грузика маятника (в см/с). $g = 10$ м/с^2.*

Наибольшая скорость при гармонических колебаниях равна $v_{\max} = \omega A$. В случае математического маятника $\omega = \sqrt{g/l}$. Получаем

$$v_{\max} = A\sqrt{\frac{g}{l}} = 7 \text{ см/с}.$$

Задача 9. *В шарик массой 499 г, висящий на нити длиной 20 м, попадает горизонтально летящая пулька массой 1 г и застревает в нем. Чему была равна скорость пульки, если в результате удара шарик отклонился на 4 см? $g = 9{,}8$ м/с^2.*

На первый взгляд, эта задача не на колебания, а на законы сохранения. Для применения закона сохранения энергии нам пришлось бы вычислить потенциальную энергию для малых отклонений шарика, найти его скорость сразу после удара, а затем уже вычислить начальную скорость пульки. Попробуйте сделать это сами (см. Глава 4 реш. 39), а мы заметим, что малость отклонения позволяет применить формулы гармонических колебаний и найти скорость шарика с пулей сразу после удара (т. е. в нижней точке колебаний)

$$v_{\max} = \omega A = A\sqrt{\frac{g}{l}},$$

где A — максимальное отклонение шарика. Остается из закона сохранения импульса найти скорость пули

$$v = \frac{M+m}{m} v_{\max} = \frac{M+m}{m} A\sqrt{\frac{g}{l}} = 14 \text{ м/с}.$$

Задача 10. *Груз, подвешенный на упругом резиновом шнуре, совершает гармонические колебания. Во сколько раз уменьшится период колебаний, если груз прикрепить к этому же шнуру, но сложенному вдвое?*

Если записать закон Гука в виде

$$F = (kl_0)\frac{\Delta l}{l_0},$$

то становится ясно, что произведение kl_0 не зависит от длины пружины или шнура, т. е. что жесткость шнура обратно пропорциональна его длине. Каждая из половин шнура будет иметь жесткость $2k$, где k — жесткость всего шнура, а сложенные вместе, они будут иметь жесткость $4k$. Значит, период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ уменьшится в 2 раза.

Задача 11. *Небольшой груз подвешен на легкой пружине. На сколько сантиметров укоротится пружина после снятия груза, если собственная циклическая частота груза на этой пружине 5 рад/с? $g = 10$ м/с^2.*

Растяжение пружины под действием груза определяется условием его равновесия

$$kx - mg = 0.$$

Отношение m/k можно выразить через известную циклическую частоту: $\omega = \sqrt{k/m}$, или $m/k = 1/\omega^2$. Окончательно получаем $x = g/\omega^2 = 40$ см.

Задача 12. *Грузик, подвешенный на пружине, вывели из положения равновесия и отпустили. Через сколько миллисекунд кинетическая энергия грузика будет в 3 раза больше потенциальной энергии пружины? Период колебаний 0,9 с.*

Смещение грузика изменяется по закону $x = A\cos \omega t$, а зависимость от времени его потенциальной энергии имеет вид

$$E_{\text{п}} = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2 \omega t.$$

В рассматриваемый момент кинетическая энергия в три раза больше потенциальной, или, иначе говоря, потенциальная энергия равна одной четверти от полной механической энергии: $E_п = 0{,}25E$. Полная механическая энергия в крайнем положении маятника равна максимальной потенциальной энергии: $E = \frac{1}{2}kA^2$. Получаем

$$\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right),$$

или $\cos\omega t = \frac{1}{2}$, откуда $\omega t = \pi/3$, и время равно $t = \pi/3\omega = T/6 = 150$ мс.

Замечание. Может показаться, что при вертикальных колебаниях, кроме потенциальной энергии упругой деформации, надо учитывать потенциальную энергию силы тяжести. Однако это не так. В положении равновесия силы тяжести и упругости уравновешивают друг друга, а при отклонении от этого положения на x возникает возвращающая сила, равная изменению силы упругости: $F_x = -kx$ (сила тяжести не меняется). Потенциальная энергия, соответствующая этой возвращающей силе (равнодействующей сил тяжести и упругости), точно такая же, как для силы упругости в отсутствие силы тяжести: $E_п = kx^2/2$ (но x здесь — не деформация пружины, а отклонение от положения равновесия).

Задача 13. *Шарик, подвешенный на пружине, отвели из положения равновесия вертикально вниз на 3 см и сообщили ему начальную скорость 1 м/с, после чего шарик стал совершать вертикальные гармонические колебания с циклической частотой 25 рад/с. Найдите амплитуду (в см) этих колебаний.*

Запишем для шарика закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Получаем

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k/m}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = 5 \text{ см}.$$

Задача 14. *На поверхности воды плавает в вертикальном положении цилиндр массой 120 г с площадью основания 75 см^2. С какой циклической частотой будут происходить вертикальные гармонические колебания цилиндра, если его слегка сместить из положения равновесия? $g = 10$ м/с^2.*

В положении равновесия сила тяжести уравновешивается силой Архимеда. При вертикальном смещении цилиндра на x возникает возвращающая сила, равная изменению силы Архимеда

$$F = \Delta F_A = \rho\Delta V g = \rho S x g,$$

где ΔV — изменение объема подводной части цилиндра. Видно, что возвращающая сила пропорциональна смещению, и коэффициент пропорциональности (эффективная жесткость колебательной системы) равен $k_{ef} = \rho g S$. Значит, циклическая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ef}}{m}} = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} = 25 \text{ рад/с}.$$

Задача 15. *Железный цилиндр высотой 5 см подвесили в вертикальном положении на пружине и частично погрузили в воду. Чему равна циклическая частота малых вертикальных колебаний такого цилиндра, если до погружения в воду циклическая частота колебаний на пружине была 12 рад/с? Трением пренебречь. Плотность железа 8000 кг/м^3, g = 10 м/с^2.*

При отклонении цилиндра из положения равновесия на x сила упругости пружины изменяется на kx, а сила Архимеда на $(\rho_в S g)x$ (см. предыдущую задачу). Значит, возвращающая сила равна $(k + \rho_в Sg)x$, частота колебаний

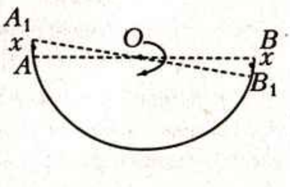
$$\omega = \sqrt{\frac{k + \rho_в S g}{m}}.$$

Подставляя $m = \rho_ж S h$, получим

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\rho_в}{\rho_ж}\frac{g}{h}} = 13 \text{ рад/с},$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — частота колебаний цилиндра в воздухе.

Задача 16. *Стержень длиной 40 см изогнули по дуге окружности в виде полукольца и с помощью невесомых спиц прикрепили к горизонтальной оси, проходящей через центр окружности. Найдите круговую частоту малых колебаний полукольца около положения равновесия, если ось вращения перпендикулярна его плоскости. g = 9,8 м/с^2.*



В этой задаче нам придется воспользоваться энергетическим методом определения частоты малых колебаний. Этот метод заключается в следующем. Вычисляется зависимость потенциальной энергии от смещения x из положения равновесия и кинетической энергии от скорости x'. Если получается выражение для полной энергии

$$E = \frac{k_{ef} x^2}{2} + \frac{m_{ef} x'^2}{2},$$

то циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{k_{ef}/m_{ef}}$. Действительно, поскольку E = const, взяв производную по времени от обеих частей уравнения: $k_{ef} x x' + m_{ef} x' x'' = 0$ и сократив на x', получим уравнение колебаний

$$x'' + \frac{k_{ef}}{m_{ef}} x = 0.$$

Вычислить зависимость потенциальной энергии от смещения x может оказаться непростой задачей, во многих случаях она сводится к определению положения центра тяжести протяженного тела. Однако в данном примере потенциальная энергия легко вычисляется благодаря симметрии системы. Поворот полукольца на небольшой угол, при котором конец B опускается, а конец A — поднимается на x, приводит к такому же изменению энергии, как перенос кусочка BB' в положение AA'. Потенциальная энергия увеличивается на $\Delta m g x$ (центр тяжести кусочка поднимается на x), где $\Delta m = m(x/l)$. Для механической энергии получаем выражение

$$E = \frac{(2mg/l)x^2}{2} + \frac{mx'^2}{2},$$

откуда находим $\omega = \sqrt{2g/l} = 7$ рад/с.

Задача 17. *Тонкое колесо массой 400 г с невесомыми спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. На колесе закрепили маленький груз массой 100 г. Найдите циклическую частоту малых колебаний такой системы около положения равновесия. Радиус колеса 50 см. $g = 10$ м/с^2.*

Если исходить из энергетического подхода (см. предыдущую задачу), можно сразу догадаться, какой будет циклическая частота. Рассмотрим сначала грузик на невесомом колесе. Такая система ничем не отличается от математического маятника на нити длиной R, т. е. $\omega_0 = \sqrt{g/R}$. Переход к массивному колесу не вносит никаких изменений в подсчет потенциальной энергии, а кинетическая вместо массы m будет содержать $M + m$. Значит, квадрат частоты, равный k_{ef}/m_{ef}, уменьшится в $(M + m)/m$ раз. Получаем

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{m}{M+m}} = \sqrt{\frac{m}{M+m} \frac{g}{R}} = 2 \text{ рад/с}.$$

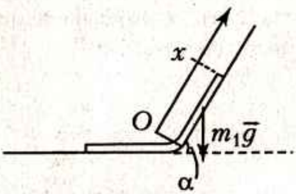
Для дотошных читателей приведем выражения для кинетической и потенциальной энергий

$$E_{п} = mgR(1 - \cos\alpha) = 2mgR\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx mgR\frac{\alpha^2}{2} \approx \frac{mg}{R}\frac{x^2}{2},$$

$$E_{к} = (M + m)\frac{x'^2}{2},$$

где $\alpha = x/R$ — малый угол отклонения.

Задача 18. *Тонкую цепочку длиной 45 см удерживают за верхний конец на гладкой наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Через какое время (в мс) после освобождения цепочки она полностью покинет наклонную плоскость, если вначале ее нижний конец находился у края наклонной плоскости? g = 10 м/с². π = 3,14.*



Хотя в этом случае колебания как таковые не возникают, время движения удается определить благодаря тому, что уравнение движения тела такое же, как для гармонических колебаний. Действительно, проекцию на направление движения дает только сила тяжести, действующая на отрезок цепочки длиной x, находящийся в данный момент на наклонной плоскости. Масса этого отрезка равна $m_1 = m(x/l)$. Получаем

$$-m_1 g\sin\alpha = mx'', \quad \text{или} \quad x'' + \frac{g\sin\alpha}{l}x = 0.$$

Движение верхнего конца цепочки происходит так же, как движение маятника от точки максимального отклонения к положению равновесия, по закону $x = l\cos\omega t$. Движение до точки $x = 0$ займет время

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}} = 471 \text{ мс}.$$

Замечание. Поскольку разные части цепочки движутся по разному, верхняя часть — вдоль плоскости, нижняя — горизонтально, возникает вопрос, как записать уравнение движения сразу для всей цепочки. Для этого надо мысленно разбить цепочку на малые отрезки, для каждого отрезка записать 2-ой закон Ньютона в проекции на его направление движения (ускорения всех кусочков одинаковы), и затем сложить полученные уравнения. Кроме того, можно воспользоваться описанным в предыдущих задачах энергетическим методом (сделайте это сами).

Задача 19. *Радиостанция работает на длине волны 30 м. Сколько колебаний несущей частоты происходит в течение одного периода звуковых колебаний с частотой 5 кГц?*

Период колебаний, соответствующий несущей частоте радиостанции, найдем из соотношения между периодом и длиной волны: $T = \lambda/c$, где c — скорость распространения электромагнитных волн, равная скорости света. Период звуковых колебаний равен $T_{зв} = 1/\nu_{зв}$. Получаем

$$\frac{T_{зв}}{T} = \frac{c}{\lambda\nu_{зв}} = 2000.$$

Задача 20. *Скорость звука в воде 1450 м/с. На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний 725 Гц?*

Разность фаз колебаний точек волны, отстоящих друг от друга на расстоянии x, равна $\Delta\varphi = 2\pi(x/\lambda)$. Ближайшие точки, совершающие колебания в противофазе, находятся на расстоянии $x = \lambda/2$, что соответствует разности фаз $\Delta\varphi = \pi$. Длину звуковой волны найдем из уравнения $\lambda = v/\nu = 2$ м. Значит, искомое расстояние равно $x = 1$ м.

Задача 21. *Два когерентных источника звука колеблются в одинаковых фазах. В точке, отстоящей от первого источника на 2,1 м, а от второго на 2,27 м, звук не слышен. Найдите минимальную частоту колебаний (в кГц), при которой это возможно. Скорость звука 340 м/с.*

Колебания волны, приходящей от первого источника, отстают по фазе от колебаний источника на $\Delta\varphi_1 = 2\pi(x_1/\lambda) = 2\pi\nu(x_1/v)$, а колебания второй волны отстают от колебаний своего источника на $\Delta\varphi_2 = 2\pi(x_2/\lambda) = 2\pi\nu(x_2/v)$. Так как источники совершают колебания в одинаковых фазах, то разность фаз между колебаниями звуковых волн в данной точке равна $\Delta\varphi = \Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1 = 2\pi\nu(x_2 - x_1)/v$. Звуковые колебания будут гасить друг друга, если они происходят в противофазе, т. е. если разность фаз между ними будет $\pi+2\pi m$. Минимальная частота соответствует минимальной разности фаз, т. е. $2\pi\nu(x_2-x_1)/v = \pi$. Получаем

$$\nu = \frac{v}{2(x_2 - x_1)} = 1000 \text{ Гц} = 1 \text{ кГц}.$$

Задача 22. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных параллельно. Период собственных колебаний контура 0,02 с. Чему будет равен период (в мс), если конденсаторы включить последовательно?*

Период собственных колебаний контура равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$. В первом случае емкость составного конденсатора в контуре равна $C_1 = 2C_0$, где C_0 — емкость одного конденсатора, во втором — $C_2 = C_0/2$. При уменьшении емкости в 4 раза период уменьшается в 2 раза: $T_2 = T_1/2 = 10$ мс.

Задача 23. *Колебательный контур содержит конденсатор емкостью 8 пФ и катушку, индуктивность которой 0,2 мГн. Найдите максимальное напряжение на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока 40 мА.*

В процессе колебаний энергия сохраняется, и максимальная энергия электрического поля в конденсаторе равна максимальной энергии магнитного поля в катушке

$$\tfrac{1}{2}CU_{max}^2 = \tfrac{1}{2}LI_{max}^2.$$

Получаем $U_{max} = I_{max}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 200$ В.

Задача 24. *Заряженный конденсатор емкостью 2 мкФ подключен к катушке с индуктивность 80 мГн. Через какое время (в мкс) от момента подключения энергия электрического поля станет равной энергии магнитного поля? $\pi = 3{,}14$.*

Заряд конденсатора изменяется со временем по закону $q = q_{max}\cos\omega t$ (в момент подключения конденсатор был заряжен), зависимость энергии электрического поля от времени имеет вид

$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_{max}^2}{2C}\cos^2\omega t.$$

В тот момент, когда энергия электрического поля равна энергии магнитного поля, каждая из них составляет половину полной энергии колебаний контура

$$W_{эл} = 0{,}5W, \quad \text{или} \quad \frac{q_{max}^2}{2C}\cos^2\omega t = \frac{1}{2}\frac{q_{max}^2}{2C}.$$

Получаем $\cos\omega t = \sqrt{2}/2$, откуда $\omega t = \pi/4$, или $t = \pi/(4\omega) = T/8$. Период колебаний равен $T = 2\pi\sqrt{LC}$, и искомое время равно

$$t = \tfrac{1}{4}\pi\sqrt{LC} = 314 \text{ мс}.$$

Задача 25. *Во сколько раз нужно увеличить емкость контура радиоприемника, настроенного на частоту 6 МГц, чтобы можно было слушать радиостанцию, работающую на длине волны 100 м?*

Настройке на длину волны $\lambda_2 = 100$ м соответствует собственная частота колебаний контура $\nu_2 = c/\lambda_2 = 3$ МГц. Частота собственных колебаний контура равна $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, а отношение частот, соответствующих разным емкостям, равно $\nu_2/\nu_1 = \sqrt{C_1/C_2}$. Получаем

$$\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_1}\right)^2 = \left(\frac{\nu_1\lambda_2}{c}\right)^2 = 4\,.$$

Задача 26. *Неоновая лампа зажигается в тот момент, когда напряжение на ее электродах достигает определенного значения U^*. Определите время (в мс), в течение которого горит лампа в каждый полупериод, если она включена в сеть, действующее значение напряжения в которой U^*. Напряжение в сети меняется с частотой 50 Гц. Считать, что неоновая лампа зажигается и гаснет при одном и том же напряжении.*

Предположим, что напряжение на лампе меняется по закону $U(t) = U_0\sin\omega t$, где U_0 — амплитуда напряжения в сети, и рассмотрим полупериод от $t = 0$ до $t = T/2$. Чтобы узнать, в какие моменты этого полупериода зажигается и гаснет лампа, надо решить уравнение $U(t) = U^*$, где $U^* = U_0/\sqrt{2}$ — действующее значение напряжения. Получаем уравнение $U_0 \sin \omega t = U_0/\sqrt{2}$, которое имеет в рассматриваемом интервале два решения: $t_1 = \pi/(4\omega) = T/8$ и $t_2 = 3\pi/(4\omega) = 3T/8$. Поскольку от $t = 0$ до $t = T/4$ напряжение возрастает, то в момент t_1 лампа зажигается, а в момент t_2 — гаснет. Значит, в течение полупериода лампа горит время

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4\nu} = 5 \text{ мс.}$$

Задача 27. *При включении первичной обмотки трансформатора в сеть переменного тока во вторичной обмотке возникает напряжение 30 В. При включении в эту же сеть вторичной обмотки на клеммах первичной возникает напряжение 120 В. Во сколько раз число витков первичной обмотки трансформатора больше числа витков вторичной обмотки?*

Отношение напряжений на обмотках идеального трансформатора равно отношению числа витков. При первом включении $U_c/U_2 = N_1/N_2$, где U_c — напряжение сети, а $U_2 = 30$ В — напряжение во вторичной обмотке. При втором включении $U_1/U_c = N_1/N_2$. Умножив эти уравнения друг на друга, исключим напряжение сети и придем к уравнению

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{U_1}{U_2} = 4 .$$

Получаем $N_1/N_2 = 2$.

Задача 28. *Электропечь, сопротивление которой 22 Ом, питается от генератора переменного тока. Определите количество теплоты (в кДж), выделяемое печью за одну минуту, если амплитуда силы тока 10 А.*

Количество теплоты вычисляется по формуле

$$Q = I_д^2 Rt = \tfrac{1}{2} I_0^2 Rt = 66 \text{ кДж}.$$

Здесь $I_д = I_0 / \sqrt{2}$ — действующее значение напряжения сети.

Задача 29. *Сопротивление 200 Ом и конденсатор подключены параллельно к источнику переменного тока с циклической частотой 2500 рад/с. Найдите емкость (в мкФ) конденсатора, если амплитудное значение силы тока через сопротивление 1 А, а через конденсатор 2 А.*

При параллельном включении участков цепи амплитудные значения напряжения на них совпадают. Амплитуда напряжения на сопротивлении связана с амплитудой силы тока соотношением $U_0 = RI_{01}$, а амплитуда напряжения на конденсаторе — соотношением $U_0 = (1/\omega C)I_{02}$. Получаем

$$RI_{01} = \frac{1}{\omega C} I_{02}, \quad \text{или} \quad C = \frac{I_{02}}{\omega R I_{01}} = 4 \text{ мкФ}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Кинематика гармонических колебаний (1–4)

12.1. Сколько полных колебаний совершит материальная точка за 5 секунд, если частота колебаний 440 Гц?

12.2. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 2\sin(\pi t/3 + \pi/2)$, в котором все величины заданы в единицах СИ. Определите период колебаний.

12.3. Гармонические колебания происходят по закону: $x = A\sin(\omega t)$. Известно, что при фазе $\pi/6$ рад смещение равно 4 см. Определите амплитуду колебаний (в см).

12.4. Шарик, подвешенный на пружине, совершает колебания по закону: $x = A\sin(\pi t/4)$. За сколько секунд после начала движения шарик пройдет путь, численно равный амплитуде его колебаний?

12.5. Шарик, подвешенный на пружине, совершает колебания по закону: $x = A\cos(\pi t/16)$. За сколько секунд после начала движения шарик пройдет путь, численно равный трем амплитудам его колебаний?

12.6. Маятник отклонили на 2 см и отпустили. Какой путь (в см) пройдет маятник за 10 с, если период его колебаний 8 с?

12.7. Грузик на пружине колеблется вдоль прямой с амплитудой 2 см. Период колебаний 2 с. Определите среднюю скорость (в см/с) движения грузика от положения равновесия до максимального отклонения от положения равновесия.

12.8. Через сколько секунд от начала движения точка, совершающая колебания по закону $x = A\sin(\omega t)$, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний 24 с.

12.9. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины? Колебания происходят по закону $x = A\sin\omega t$.

12.10. Чему равна циклическая частота гармонических колебаний точки, если амплитуда колебаний 6 см, а максимальная скорость точки 1,2 м/с?

12.11. Две материальные точки совершают гармонические колебания. Величина максимальной скорости первой точки 4 м/с. Какова величина максимальной скорости второй точки, если период ее колебаний в 3 раза больше, а амплитуда колебаний в 6 раз больше, чем у первой точки?

12.12. Точка совершает гармонические колебания. При смещении от положения равновесия 4 см ее скорость равна 6 см/с, а при смещении 3 см — 8 см/с. Найдите амплитуду колебаний (в см).

12.13. Две материальные точки совершают гармонические колебания: первая — с циклической частотой 36 рад/с, вторая — с циклической частотой 9 рад/с. Во сколько раз величина максимального ускорения первой точки больше максимального ускорения второй, если амплитуды колебаний точек одинаковы?

12.14. На тележку кладут кирпич и начинают катать ее по полу так, что ее координата изменяется по закону $x = A\cos\omega t$, где $A = 10$ см. При какой максимальной циклической частоте ω кирпич не будет смещаться относительно тележки? Коэффициент трения между кирпичом и тележкой 0,5, $g = 9{,}8$ м/с^2.

12.15. Магнит массой 200 г лежит на горизонтальной металлической плите. Чтобы оторвать магнит от плиты, надо потянуть его вверх с силой 16 Н. Вместо этого плиту заставляют колебаться в вертикальном направлении по закону $y = A\sin\omega t$, где $A = 5$ см. При какой минимальной циклической частоте ω магнит оторвется от плиты?

Математический маятник (5–9)

12.16. Длина первого математического маятника в 4 раза больше длины второго математического маятника. Найдите отношение частоты колебаний второго маятника к частоте колебаний первого.

12.17. Два математических маятника за одно и то же время совершают: один — 40 полных колебаний, второй — 20 полных колебаний. Во сколько раз длина второго маятника больше длины первого?

12.18. Собственная циклическая частота колебаний математического маятника на некоторой планете 5 рад/с. Чему равно ускорение силы тяжести на этой планете, если длина маятника 0,4 м?

12.19. Какова должна быть длина (в см) математического маятника на Луне, чтобы период его колебаний был таким же, как период колебаний математического маятника длиной 54 см на Земле? Ускорение силы тяжести на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

12.20. При перенесении математического маятника с Земли на другую планету период его колебаний увеличился в 3 раза. Во сколько раз масса Земли больше массы планеты, если радиус Земли в 2 раза больше радиуса планеты?

12.21. В маятниковых часах используется математический маятник с периодом колебаний 1 с. Часы помещают в ракету, которая начинает подниматься с постоянным ускорением. Чему равно это ускорение, если за 7 с подъема маятник часов совершает 8 полных колебаний? $g = 9{,}8$ м/с^2.

12.22. На двух параллельных нитях подвешены одинаковые упругие шарики так, что они соприкасаются друг с другом и их центры находятся на одном уровне. Нить первого шарика длиной 40 см отводят на небольшой угол и отпускают. Через какое время (в мс) после этого произойдет второе столкновение шариков, если длина нити второго шарика 10 см? $g = 10$ м/с^2, $\pi = 3{,}14$.

Пружинный маятник. Энергия колебаний (10–18)

12.23. Чему равна циклическая частота гармонических колебаний небольшого шарика массой 250 г, подвешенного на легкой пружине жесткостью 100 Н/м?

12.24. Груз массой 0,1 кг, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания. Во сколько раз увеличится период колебаний, если к нему прикрепить груз массой 300 г?

12.25. Два шарика, подвешенные на пружинах с жесткостями 400 и 100 Н/м, совершают гармонические вертикальные колебания с одинаковыми периодами. Во сколько раз масса одного шарика больше массы другого?

12.26. К динамометру, закрепленному вертикально, подвесили груз. При этом груз стал совершать гармонические колебания с циклической частотой 10 рад/с. Найдите деформацию (в см) пружины динамометра после полного прекращения колебаний груза. $g = 10$ м/с^2.

12.27. Груз массой 0,2 кг совершает гармонические колебания на пружине с жесткостью 125 Н/м. Определите наибольшее ускорение груза, если амплитуда колебаний 0,08 м.

12.28. Шарик массой 50 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой 5 см. Чему равна максимальная величина возвращающей силы (в мН), действующей на шарик, если циклическая частота колебаний 2 рад/с?

12.29. Небольшой шарик, подвешенный на легкой пружине, совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой 2 см. Полная энергия колебаний 0,3 мДж. При каком смещении (в мм) от положения равновесия на шарик действует возвращающая сила 22,5 мН?

12.30. Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое время (в мс) кинетическая энергия колеблющегося тела будет равна потенциальной энергии пружины? Период колебаний 1 с.

12.31. Брусок массой 249 г, лежащий на гладком полу, соединен с вертикальной стеной горизонтальной пружиной. В брусок попадает пуля массой 1 г, летящая со скоростью 50 м/с вдоль оси пружины. Брусок вместе с застрявшей в нем пулей начинает колебаться с амплитудой 4 см. Чему равна циклическая частота этих колебаний?

12.32. Найдите период (в мс) вертикальных гармонических колебаний бутылки, плавающей на поверхности воды в вертикальном положении дном вниз, если ее масса 300 г, а площадь дна 30 см^2. Трением пренебречь. g = 10 м/с^2, π = 3,14.

12.33. Однородный цилиндр подвесили в вертикальном положении на пружине жесткостью 140 Н/м. На сколько процентов увеличится частота малых вертикальных колебаний цилиндра, если его частично погрузить в воду? Трением пренебречь. Площадь сечения цилиндра 30 см^2, g = 9,8 м/с^2.

12.34. В U–образную трубку сечением 10 см^2 налили 400 г воды. Пренебрегая трением, найдите циклическую частоту вертикальных колебаний жидкости в трубке. g = 9,8 м/с^2.

12.35. Стержень длиной 5 см, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности, наезжает на шероховатый участок и останавливается, заехав на него частью своей длины. Какое время (в мс) длилось торможение, если коэффициент трения между стержнем и шероховатой поверхностью 0,5? g = 10 м/с^2, π = 3,14.

Волны (19–21)

12.36. Найдите скорость распространения звука в материале, в котором колебания с периодом 0,01 с вызывают звуковую волну, имеющую длину 10 м.

12.37. Скорость распространения звука в воздухе 340 м/с, а в некоторой жидкости 1360 м/с. Во сколько раз увеличится длина звуковой волны при переходе из воздуха в жидкость?

12.38. Во сколько раз длина звуковой волны частотой 200 Гц больше, чем длина радиоволны УКВ-диапазона частотой 750 МГц? Скорость звука 320 м/с.

12.39. Волна с частотой 10 Гц распространяется в некоторой среде, причем разность фаз в двух точках, находящихся на расстоянии 1 м одна от другой на одной прямой с источником колебаний, равна π радиан. Найдите скорость распространения волны в этой среде.

12.40. Определите длину волны, если две точки среды, расположенные на одном луче на расстоянии 0,5 м, совершают колебания с разностью фаз $\pi/8$.

12.41. Имеются два когерентных источника звука. В точке, отстоящей от первого источника на 2,3 м, а от второго — на 2,48 м, звук не слышен. Минимальная частота, при которой это возможно, равна 1 кГц. Найдите скорость распространения звука.

12.42. Два когерентных источника звука частотой 1 кГц излучают волны, распространяющиеся со скоростью 340 м/с. В некоторой точке, расположенной на расстоянии 2,6 м от одного источника, звук не слышен. Чему равно минимальное расстояние (в см) от этой точки до второго источника, если известно, что оно больше 2,6 м?

Электрический контур (22–25)

12.43. Во сколько раз уменьшится частота собственных колебаний контура, если его индуктивность увеличить в 10 раз, а емкость уменьшить в 2,5 раза?

12.44. Колебательный контур с конденсатором емкостью 1 мкФ настроен на частоту 400 Гц. Если подключить к нему параллельно второй конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной 200 Гц. Определите емкость (в мкФ) второго конденсатора.

12.45. В колебательном контуре к конденсатору параллельно присоединили другой конденсатор, втрое большей емкости, после чего частота колебаний контура уменьшилась на 300 Гц. Найдите первоначальную частоту колебаний контура.

12.46. Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Во сколько раз увеличится частота собственных колебаний в контуре, если в контур последовательно включить второй конденсатор, емкость которого в 3 раза меньше емкости первого?

12.47. Максимальная разность потенциалов на конденсаторе в колебательном контуре 100 В. Какой будет максимальная сила тока, если конденсатор имеет емкость 36 мкФ, а катушка обладает индуктивностью 0,01 Гн?

12.48. К конденсатору, заряд которого 250 пКл, подключили катушку индуктивности. Определите максимальную силу тока (в мА) , протекающего через катушку, если циклическая частота свободных колебаний в контуре $8 \cdot 10^7$ рад/с.

12.49. Заряженный конденсатор емкостью 4 мкФ подключили к катушке с индуктивностью 90 мГн. Через какое минимальное время (в мкс) от момента подключения заряд конденсатора уменьшится в 2 раза? $\pi = 3{,}14$.

12.50. На какую длину волны настроен радиоприемник, если его колебательный контур обладает индуктивностью 3 мГн и емкостью 3 нФ? $\pi = 3{,}14$.

12.51. Колебательный контур настроен на частоту $1{,}5 \cdot 10^7$ Гц. Во сколько раз надо увеличить емкость конденсатора для перестройки контура на длину волны 40 м?

12.52. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны 300 м. При этом расстояние между пластинами конденсатора 6,4 мм. Каким должно быть это расстояние (в мм), чтобы контур был настроен на длину волны 240 м?

Переменный ток. Трансформаторы (26–29)

12.53. Напряжение на концах участка цепи, по которому течет переменный ток, изменяется со временем по закону: $U = U_0\sin(\omega t + 2\pi/3)$. В момент времени $t = T/12$ мгновенное значение напряжения равно 9 В. Определите амплитуду напряжения.

12.54. Напряжение, при котором зажигается или гаснет неоновая лампа, включенная в сеть переменного тока, соответствует действующему значению напряжения этой сети. В течение каждого полупериода лампа горит 2/3 мс. Найдите частоту переменного тока.

12.55. Сила тока в первичной обмотке трансформатора 2 А, напряжение на ее концах 220 В. Напряжение на концах вторичной обмотки 40 В. Определите силу тока во вторичной обмотке. Потерями в трансформаторе пренебречь.

12.56. Под каким напряжением находится первичная обмотка трансформатора, имеющая 1000 витков, если во вторичной обмотке 3500 витков и напряжение на ней 105 В?

12.57. Сила тока в первичной обмотке трансформатора 0,5 А, напряжение на ее концах 220 В. Сила тока во вторичной обмотке 11 А, напряжение на ее концах 9,5 В. Определите КПД (в процентах) трансформатора.

12.58. Первичная обмотка силового трансформатора для накала радиолампы имеет 2200 витков и включена в сеть с напряжением 220 В. Какое количество витков должна иметь вторичная обмотка, если ее активное сопротивление 0,5 Ом, а напряжение накала лампы 3,5 В при силе тока накала 1 А?

12.59. К генератору переменного тока подключена электропечь, сопротивление которой 200 Ом. За 5 минут работы печи в ней выделяется 270 кДж теплоты. Какова при этом амплитуда силы тока, проходящего через печь?

12.60. Во сколько раз уменьшится индуктивное сопротивление катушки, если ее включить в цепь переменного тока с частотой 50 Гц вместо 10 кГц?

12.61. При какой циклической частоте переменного тока наступит резонанс напряжений в замкнутой цепи, состоящей из катушки с индуктивностью 0,5 Гн и конденсатора емкостью 200 мкФ?

Глава 13

Оптика. Атомная физика

Примеры решения задач

Задача 1. *Волна красного света проходит через тонкую прозрачную пленку с показателем преломления 1,8. Толщина пленки $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ м. Определите, сколько раз длина волны света в пленке укладывается на ее толщине, если длина волны в вакууме 720 нм. Волна падает на пленку перпендикулярно ее плоскости.*

Длина волны в веществе равна λ/n, где λ — длина волны в вакууме, а n — показатель преломления вещества. На толщине пленки d укладывается число длин волн

$$N = \frac{d}{\lambda/n} = \frac{nd}{\lambda} = 95.$$

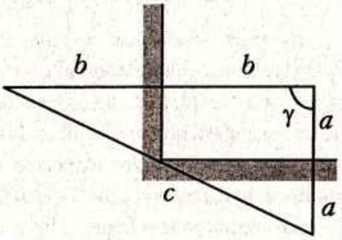
Задача 2. *На дифракционную решетку перпендикулярно ее плоскости падает свет с длиной волны 500 нм. Сколько штрихов на 1 мм должна иметь решетка, чтобы пятый главный максимум в дифракционной картине находился под углом 90° по отношению к падающему свету?*

Направление на k-й главный максимум определяется уравнением: $d\sin\varphi_k = k\lambda$. В данном случае $k = 5$, $\varphi_k = 90°$, откуда получаем, что постоянная решетки $d = 5\lambda = 2500$ нм. На длине $l = 1$ мм укладывается количество штрихов $N = l/d = 400$.

Задача 3. *При повороте плоского зеркала на некоторый угол вокруг оси, проходящей через точку падения луча перпендикулярно плоскости, в которой лежат падающий и отраженный лучи, угол между падающим и отраженным лучами увеличился на 40°. На какой угол (в градусах) было повернуто зеркало?*

Если повернуть зеркало на угол α, то угол между падающим лучом и нормалью к зеркалу (угол падения) изменится на α; угол отражения, равный углу падения, также изменится на α. Угол между падающим и отраженным лучами, равный сумме угла падения и угла отражения, изменится на 2α. Так как падающий луч не меняет направления, то при повороте зеркала на α отраженный луч повернется на 2α. В данном случае отраженный луч повернулся на 40°, значит, зеркало было повернуто на 20°.

Задача 4. *Два плоских зеркала располагаются под углом друг к другу и между ними помещается точечный источник света. Расстояние от этого источника до одного зеркала 3 см, до другого 4 см. Расстояние между первыми изображениями 10 см. Найдите угол (в градусах) между зеркалами.*

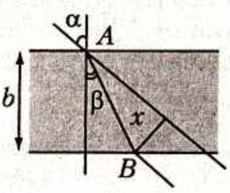


Расстояние от источника до первого изображения $2a$ = 6 см, а расстояние от источника до второго изображения $2b$ = = 8 см. Так как задано расстояние c = 10 см между изображениями, то в треугольнике, вершинами которого являются источник и два изображения, известны все три стороны. Теорема косинусов позволяет найти угол γ; в данном случае он равен 90°. Угол между зеркалами равен $180° - \gamma = 90°$.

Задача 5. *Под каким углом (в градусах) падает луч света на стеклянную пластинку с показателем преломления, равным $\sqrt{3}$, если преломленный луч оказался перпендикулярным к отраженному?*

Если преломленный луч перпендикулярен к отраженному, то угол отражения α и угол преломления β связаны соотношением $\alpha + \beta = 90°$. Так как угол отражения равен углу падения, то закон преломления имеет вид $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. После подстановки $\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ получаем уравнение $\mathrm{tg}\,\alpha = n$; при $n = \sqrt{3}$ получаем $\alpha = 60°$.

Задача 6. *Луч света падает на прозрачную пластинку толщиной 2 см под углом, синус которого 0,8. На сколько миллиметров сместится луч при прохождении пластинки? Показатель преломления вещества пластинки 4/3.*



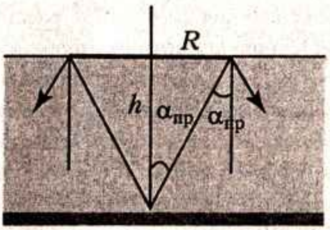
Из закона преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ находим синус угла преломления: $\sin\beta = \sin\alpha/n = 0{,}6$. Смещение луча равно

$$x = |AB|\sin(\alpha-\beta) = \frac{b}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta).$$

Раскрывая $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$, подставляем $\sin\alpha = 0{,}8$, $\cos\alpha = 0{,}6$, $\sin\beta = 0{,}6$, $\cos\beta = 0{,}8$ и находим $x = 7$ мм.

Задача 7. *На дне сосуда с жидкостью с показателем преломления 5/3 помещен точечный источник света. Какого минимального радиуса (в см) должен быть непрозрачный диск, плавающий на поверхности жидкости, чтобы, глядя сверху, нельзя было увидеть этот источник? Высота слоя жидкости 12 см.*

Лучи от источника, попадающие на границу воды с воздухом вне диска, не должны выходить из воды, значит они должны падать под углом, большим предельного угла полного отражения. При минимальном радиусе диска выполняется соотношение $R = h\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{пр}}$. Угол полного отражения определяется соотношением $\sin\alpha_{\text{пр}} = 1/n = 3/5$. Отсюда находим $\cos\alpha_{\text{пр}} = 4/5$, $\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{пр}} = 3/4$, и радиус диска равен $R = 9$ см.

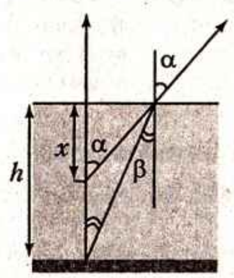


Задача 8. *Глубина водоема 2 м. Определите кажущуюся глубину водоема (в см), если его дно рассматривают, склонившись над водой и глядя вертикально вниз. Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е.* $\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha$.

Рассмотрим лучи, исходящие из произвольной точки на дне водоема и преломленные поверхностью воды. Точка пересечения этих преломленных лучей является изображением точки дна при наблюдении снаружи. Достаточно рассмотреть два луча — исходящий перпендикулярно поверхности, вдоль нормали, и исходящий под малым углом β к нормали. Угол падения β и угол преломления α связаны соотношением

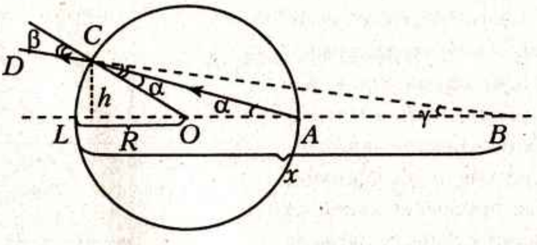
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \text{ (закон преломления).}$$

Расстояние между точками выхода лучей из воды равно, с одной стороны, $h\,\mathrm{tg}\,\beta$, а с другой стороны, $x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где x — глубина точки пересечения преломленных лучей. С учетом малости углов получаем



$$\frac{x}{h} = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} \approx \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n}, \quad \text{или} \quad x = \frac{h}{n} = 150 \text{ см.}$$

Задача 9. *На поверхность стеклянного шара радиусом 5 см нанесли черное пятнышко. Пятнышко разглядывают с диаметрально противоположной стороны шара. На каком расстоянии (в см) от ближайшей поверхности стекла окажется его видимое положение? Показатель преломления стекла 1,5.*



Обозначим точкой A положение источника (черного пятнышка). Для того, чтобы найти изображение (точка B), надо найти пересечение луча CD, вышедшего из системы после преломления на сферической границе, с лучом AO (который не испытывает преломления). Для этого надо проделать следующее.

1) Проведем произвольный луч AC под малым углом α ($\alpha \ll 1$) к прямой AOL. Так как треугольник AOC — равнобедренный, то угол между лучом AC и нормалью OC к поверхности стекла (угол падения) также равен α. Расстояние h от точки C до прямой AOL равно

$$h = 2R\alpha$$

(тангенсы и синусы малых углов заменяются просто углами в радианах).

2) Вычислим угол преломления (угол между преломленным лучом CD и нормалью OC)

$$\beta = n\alpha$$

(n — показатель преломления).

3) Вычислим угол между преломленным лучом CD и прямой AOL. Он равен разности между углом CAL (равным α) и углом ACB (равным $\beta - \alpha$)

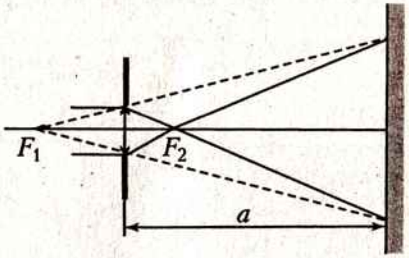
$$\gamma = \alpha - (\beta - \alpha) = \alpha(2 - n)\,.$$

4) Найдем искомое расстояние между точкой L и изображением B

$$x = \frac{h}{\gamma} = \frac{2R}{2-n}$$

(при $n > 2$ точка B будет лежать с другой стороны от шара, т. е. изображение будет не мнимым, а действительным). При $n = 3/2$ получаем $x = 4R = 20$ см.

Задача 10. *В отверстие на экране вставлена рассеивающая линза с фокусным расстоянием 10 см, на которую падает параллельный пучок лучей. На расстоянии 30 см от линзы параллельно ее плоскости расположен экран. При замене рассеивающей линзы собирающей такого же диаметра радиус светлого пятна на экране не изменился. Чему равно фокусное расстояние (в см) собирающей линзы?*



На рисунке изображен ход крайних лучей пучка в случае рассеивающей линзы (пунктирная линия) и в случае собирающей линзы. Рассматривая подобные треугольники, ограниченные пунктирными линиями, находим, что отношение диаметра линзы к диаметру светлого пятна на экране равно $\dfrac{F_1}{F_1+a}$, где a — расстояние между линзой и экраном, а F_1 — фокусное расстояние рассеивающей линзы. Из подобия треугольников, образованных лучами, преломленными в собирающей линзе, получаем, что это же отношение равно $\dfrac{F_2}{a-F_2}$, где F_2 — фокусное расстояние собирающей линзы. Приравнивая эти выражения, находим, что

$$F_2 = \frac{aF_1}{2F_1+a} = 6 \text{ см}.$$

Задача 11. *Предмет находится на расстоянии 20 см от собирающей линзы с оптической силой 4 дптр. Найдите расстояние (в см) от изображения до предмета.*

Из формулы линзы для собирающей линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D,$$

где $D = 1/F$ — оптическая сила линзы, находим, что $f = -1$ м. Изображение мнимое, т.е. находится по ту же сторону линзы, что и предмет. Расстояние между предметом и изображением равно 80 см.

Замечание. Если какой-нибудь из знаков в формуле линзы не известен, то можно записать этот член со знаком «+», а затем ориентироваться по знаку ответа. Например, если не сказано, какое изображение формируется линзой, то можно записать формулу линзы с «$+1/f$», и если после решения уравнения f окажется отрицательным, то изображение мнимое. Обычно можно легко понять, каким должно быть изображение: рассеивающая линза всегда формирует мнимое (уменьшенное) изображение предмета, а собирающая линза формирует мнимое (увеличенное) изображение, если предмет находится между линзой и фокусом ($d < F$).

Задача 12. *Расстояние от изображения до рассеивающей линзы составляет 0,75 фокусного расстояния. Во сколько раз больше фокусного расстояние от предмета до линзы?*

Формула линзы в случае рассеивающей линзы имеет вид

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$$

(рассеивающая линза всегда дает мнимое изображение предмета). Подставляя $f = 0{,}75F$, находим $d = 3F$. Получаем $d/F = 3$.

Задача 13. *Два точечных источника света находятся на расстоянии 24 см друг от друга. Между ними на расстоянии 6 см от одного из них помещена собирающая линза. При этом изображения обоих источников получились в одной и той же точке. Найдите фокусное расстояние (в см) линзы.*

Описанная ситуация возможна в том случае, если изображение одного источника действительное, а другого — мнимое. Получаем уравнения

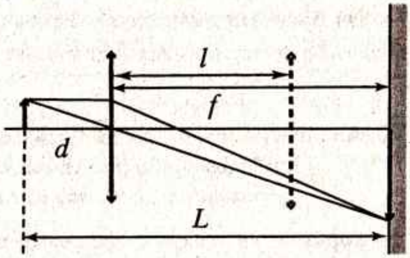
$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \qquad \frac{1}{d_2}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

где $d_1 = 18$ см, $d_2 = 6$ см. Складывая эти уравнения, получаем $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{2}{F}$, откуда выражаем фокусное расстояние

$$F=\frac{2d_1d_2}{d_1+d_2}=9 \text{ см.}$$

Задача 14. *Расстояние между светящейся точкой и экраном 3,75 м. Четкое изображение точки на экране получается при двух положениях собирающей линзы, расстояние между которыми 0,75 м. Найдите фокусное расстояние (в см) линзы.*

Из формулы линзы следует, что если поместить предмет на таком расстоянии $d_1 = f$ от линзы, на котором находилось действительное изображение, то изображение будет сформировано на таком расстоянии $f_1 = d$ от линзы, на котором находился предмет. Это свойство является проявлением обратимости хода лучей: если лучи идут на линзу в обратном направлении, то они собираются в той точке, откуда были испущены. Значит, второе положение линзы, при котором на экране формируется четкое изображение, соответствует расстоянию f от предмета и расстоянии d от экрана. Получаем систему уравнений: $f - d = l$, $d + f = L$. Решая систему, находим $d = \frac{1}{2}(L - l) = 1{,}5$ м, $f = \frac{1}{2}(L + l) = 2{,}25$ м. Подставляя эти значения в формулу линзы, определяем фокусное расстояние



$$F = \frac{df}{d+f} = \frac{L^2 - l^2}{4L} = 90 \text{ см}.$$

Задача 15. *На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке, лежащей на расстоянии 15 см от линзы. Если линзу убрать, то точка пересечения лучей переместится на 5 см ближе к линзе. Определите фокусное расстояние (по абсолютной величине, в см) линзы.*

Рассмотрим ход лучей, обратный описанному в условии. Тогда лучи будут исходить из точки, расположенной на расстоянии $d_1 = 15$ см от линзы, а после прохождения линзы будут расходиться из точки, лежащей за линзой на расстоянии $f_1 = 10$ см от линзы. Из формулы линзы $\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F}$, где F — величина фокусного расстоянии, получаем

$$F = \frac{d_1 f_1}{d_1 - f_1} = 30 \text{ см}.$$

Замечание. Можно сформулировать правило для нахождения изображения, получаемого при падении на линзу сходящегося пучка лучей. Расстояние до изображения f может быть рассчитано по формуле линзы, но записанной для *мнимого источника*, т. е. перед $(1/d)$ надо ставить знак минус. В случае собирающей линзы изображение всегда будет действительным: $-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, а в случае рассеивающей линзы изображение будет действительным при $d < F$. В данной задаче $d = 10$ см, $f = 15$ см, фокусное расстояние находим из формулы

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}.$$

Задача 16. *Точечный источник света находится на расстоянии 9 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 6 см. Позади этой линзы на расстоянии 6 см от нее находится другая точно такая же линза. На каком расстоянии (в см) от второй линзы находится изображение источника, сформированное системой линз?*

Первая линза формирует действительное изображение, положение которого найдем из формулы линзы

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}.$$

Получаем $f_1 = 18$ см. Поскольку $f_1 > l$, где $l = 6$ см — расстояние между линзами, то на вторую линзу падает сходящийся пучок лучей. Это соответствует мнимому источнику (см. предыдущую задачу) с $d_2 = f_1 - l = 12$ см. Положение изображения во второй линзе находим из формулы линзы

$$-\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}.$$

Получаем $f_2 = 4$ см.

Задача 17. *Дерево сфотографировано с расстояния 10 м. Оптическая сила объектива фотоаппарата 12,6 дптр. Ширина изображения ствола дерева на фотопленке 2 мм. Найдите диаметр ствола (в см).*

Из формулы линзы для объектива $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D$ получаем, что поперечное увеличение объектива равно

$$\Gamma=\frac{l'}{l}=\frac{f}{d}=\frac{1}{dD-1},$$

где l — размер предмета, l' — размер изображения. Напомним, что при использовании диоптрий расстояния надо выражать в метрах, так как дптр = 1/м. Для ширины ствола получаем

$$l=\frac{l'}{\Gamma}=l'(dD-1)=25 \text{ см}.$$

Задача 18. *Рассеивающая линза с фокусным расстоянием 4 см дает уменьшенное в 4 раза изображение предмета. Найдите расстояние от предмета до изображения (в см).*

Из формулы линзы $\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}$ и формулы поперечного увеличения $\Gamma=\frac{f}{d}$ определяем d и f

$$d=\frac{F(1-\Gamma)}{\Gamma} \quad \text{и} \quad f=F(1-\Gamma).$$

Предмет и изображение находятся по одну сторону от линзы, поэтому расстояние между ними равно

$$d-f=\frac{F(1-\Gamma)^2}{\Gamma}=9 \text{ см}.$$

Задача 19. *Вдоль оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 см расположен стержень так, что его середина находится на расстоянии 8 см от линзы. Чему равна длина (в см) стержня, если его продольное увеличение равно 5?*

Стержень, лежащий на оптической оси, преобразуется линзой в стержень, также лежащий на оси, причем концы стержня-изображения являются изображениями концов стержня-источника

$$\frac{1}{d-(x/2)}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}, \qquad \frac{1}{d+(x/2)}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F},$$

где x — размер стержня-источника, d — расстояние от линзы до середины этого стержня, f_1, f_2 — расстояния от концов стержня-изображения до линзы. Продольное увеличение равно отношению размеров стержня-изображения и стержня-источника: $\Gamma=(f_1-f_2)/x$. Подставляя в это уравнение f_1 и f_2, выраженные из предыдущих уравнений, получаем

$$\frac{F(d-\frac{x}{2})}{d-(x/2)-F}-\frac{F(d+\frac{x}{2})}{d+(x/2)-F}=\Gamma x,$$

откуда после преобразований находим

$$x=2\sqrt{(d-F)^2-\frac{F^2}{\Gamma}}=4 \text{ см}.$$

Задача 20. *Собирающую линзу с фокусным расстоянием 10 см перемещают со скоростью 3 мм/с в направлении точечного источника света, находящегося на ее главной оптической оси. С какой скоростью (в мм/с) движется изображение в тот момент, когда расстояние между линзой и источником 12 см?*

Сначала перейдем в систему отсчета, связанную с линзой, и найдем скорость изображения. В этой СО источник приближается к линзе со скоростью $v=$ $=3$ мм/с. Из формулы линзы видно, что действительное изображение будет от линзы удаляться. Чтобы найти его скорость u, запишем формулу линзы для положения источника и изображения через малое время Δt

$$\frac{1}{d - v\Delta t} + \frac{1}{f + u\Delta t} = \frac{1}{F}.$$

Умножим числитель и знаменатель первого члена на $d + v\Delta t$, а второго — на $f - u\Delta t$, и отбросим в знаменателях члены, содержащие $(\Delta t)^2$. С учетом того, что для начальных положений d и f также выполняется формула линзы, приходим к уравнению

$$\frac{v\Delta t}{d^2} - \frac{u\Delta t}{f^2} = 0, \qquad \text{т. е.} \qquad \frac{u}{v} = \frac{f^2}{d^2} = \left(\frac{F}{d - F}\right)^2.$$

В данном случае скорость изображения (в СО, связанной с линзой) в 25 раз больше скорости источника: $u = 25v$. Значит, скорость изображения относительно источника равна $24v = 72$ мм/с. Поскольку в первоначальной СО источник неподвижен, это и есть скорость изображения.

Задача 21. *Сколько фотонов попадает за 1 с в глаз человека, если глаз воспринимает свет с длиной волны 0,55 мкм при мощности светового потока $1{,}8 \cdot 10^{-16}$ Вт. Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.*

Число фотонов, попадающее в глаз за время t, равно отношению энергии излучения $E = Pt$, где P — мощность светового потока, к энергии фотона $\varepsilon = hc/\lambda$

$$N = \frac{Pt\lambda}{hc} = 500.$$

Задача 22. *Световая отдача лампочки накаливания, потребляющей мощность 132 Вт, равна 6%, а средняя частота излучения лампы $6 \cdot 10^{14}$ Гц. Сколько миллиардов фотонов от этой лампы попадает за одну секунду в зрачок глаза человека, стоящего в 100 м от лампы? Зрачок считать плоским кругом радиусом 2 мм. Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.*

Энергия фотонов, вылетающих из лампы за время t, равна $E = \eta Pt$, где η — световая отдача, а число вылетающих фотонов $N = E/\varepsilon = \eta Pt/h\nu$. Эти фотоны летят равномерно по всем направлениям, и в зрачок глаза попадает такая часть фотонов, какую долю составляет его площадь $s = \pi r^2$ от площади сферы радиусом $R = 100$ м с центром в источнике фотонов: $N_{гл}/N = \pi r^2/4\pi R^2$. Получаем

$$N_{гл} = \frac{Nr^2}{4R^2} = \frac{\eta Ptr^2}{4h\nu R^2} = 2 \cdot 10^9 = 2 \text{ млрд.}$$

Задача 23. *Излучение лазера мощностью 600 Вт продолжалось 20 мс. Излученный свет попал в кусочек идеально отражающей фольги массой 2 мг, расположенный перпендикулярно направлению его распространения. Какую скорость (в см/с) приобретет кусочек фольги?*

Поскольку для энергии и импульса каждого фотона выполняется соотношение $p_ф = \varepsilon/c$, такое же соотношение верно для энергии и импульса всего излучения: $p = E/c = P\tau/c$, где P — мощность лазера, τ — длительность излучения. Запишем закон сохранения импульса для системы фольга + излучение, считая, что энергия и величина импульса излучения при отражении не меняются (как при отражении от неподвижного зеркала)

$$P\tau/c = -P\tau/c + mv,$$

где m — масса фольги. Получим

$$v = \frac{2P\tau}{mc} = 4 \text{ см/с}.$$

Теперь проверим справедливость предположения, что потерей энергии излучения при его отражении можно пренебречь. Действительно, отношение энергии, отданной фольге, к энергии излучения равно

$$\frac{mv^2/2}{P\tau} = \frac{mv}{2P\tau/c}\frac{v}{c} = \frac{v}{c} \ll 1.$$

Задача 24. *При увеличении частоты падающего на металл света в два раза задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в три раза. Частота первоначально падающего света $1{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц. Определите длину волны (в нм) света, соответствующую «красной границе» для этого металла.*

Запишем формулу Эйнштейна для фотоэффекта в первом и втором случаях

$$h\nu = A_{вых} + eU, \quad h(2\nu) = A_{вых} + e(3U)$$

и выразим из этих уравнений работу выхода: $A_{вых} = 0{,}5h\nu$. Длина волны для красной границы фотоэффекта выражается через работу выхода: $A_{вых} = hc/\lambda_k$, или

$$\lambda_k = \frac{hc}{A_{вых}} = \frac{2c}{\nu} = 500 \text{ нм}.$$

Задача 25. *Во сколько раз увеличивается линейная скорость электрона в атоме водорода, если при переходе из одного состояния в другое радиус орбиты уменьшается в 16 раз?*

Запишем второй закон Ньютона для движения электрона на первой и на второй круговых орбитах

$$k\frac{e^2}{r_1^2} = m\frac{v_1^2}{r_1} \quad \text{и} \quad k\frac{e^2}{r_2^2} = m\frac{v_2^2}{r_2}.$$

Разделив эти уравнения друг на друга, получим

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{r_1}{r_2} = 16.$$

Значит, $v_2/v_1 = 4$.

Задача 26. *При переходе атомов водорода из состояния с номером 6 в состояние с номером 2 излучается видимый свет. Во сколько раз длина волны этого света больше, чем длина волны ультрафиолетового излучения, при поглощении которого атомы водорода переходят из нормального состояния в состояние с номером 3?*

Энергия электрона в n-ом стационарном состоянии выражается через энергию нормального (основного) состояния с номером $n = 1$: $E_n = E_1/n^2$ (напомним, что $E_1 < 0$). Закон сохранения энергии для излучения и поглощения фотонов (формула Бора для излучения) имеет вид $E_6 - E_2 = hc/\lambda_1$ и $E_3 - E_1 = hc/\lambda_2$, или

$$\frac{E_1}{6^2} - \frac{E_1}{2^2} = \frac{hc}{\lambda_1} \quad \text{и} \quad \frac{E_1}{3^2} - \frac{E_1}{1^2} = \frac{hc}{\lambda_2}.$$

Разделив эти уравнения друг на друга, получим $\lambda_1/\lambda_2 = 4$.

Задача 27. *В ядро атома азота $^{14}_{7}\mathrm{N}$ попадает альфа-частица и остается в нем. При этом образуется ядро некоторого элемента и испускается протон. Каков порядковый номер этого элемента в периодической системе элементов Менделеева?*

Запишем уравнение указанной реакции

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\alpha = {}^{1}_{1}p + {}^{A}_{Z}\mathrm{X}.$$

Из закона сохранения заряда для этой реакции получим: $7 + 2 = 1 + Z$, или $Z = 8$.

Задача 28. *При бомбардировке некоторых ядер протонами возникает альфа-частица и испускается позитрон. Определите количество нейтронов в первоначальном ядре.*

Уравнение реакции имеет вид

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + {}^{1}_{1}p = {}^{4}_{2}\alpha + {}^{0}_{1}e \,. $$

Из закона сохранения числа нуклонов $A + 1 = 4 + 0$ находим массовое число: $A = 3$, а из закона сохранения заряда $Z + 1 = 2 + 1$ находим порядковый номер: $Z = 2$ (гелий). Число нейтронов равно $N = A - Z = 1$.

Задача 29. *В цепочке радиоактивных превращений* ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ *в* ${}^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ *содержится несколько альфа- и бета-распадов. Сколько всего распадов в этой цепочке?*

Неизвестными величинами в этой реакции являются число α-распадов N_α и число β-распадов N_β

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U} = N_\alpha \cdot ({}^{4}_{2}\alpha) + N_\beta \cdot ({}^{\;0}_{-1}\beta) + {}^{207}_{82}\mathrm{Pb} \,. $$

Запишем закон сохранения числа нуклонов: $235 = 4N_\alpha + 0N_\beta + 207$ и закон сохранения заряда: $92 = 2N_\alpha - N_\beta + 82$. Из этих уравнений находим $N_\alpha = 7$ и $N_\beta = 4$. Общее число распадов равно 11.

Задача 30. *За время 100 с распалась половина ядер радиоактивного вещества. Через какое время после этого распадется 3/4 оставшихся ядер?*

Число радиоактивных (не распавшихся) ядер уменьшается по закону радиоактивного распада

$$ N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}, $$

где $T_{1/2}$ — период полураспада. N уменьшается в два раза через $t_1 = T_{1/2}$, а в $2^3 = 8$ раз — через время $t_2 = 3T_{1/2}$. Интервал времени между этими моментами равен $\Delta t = t_2 - t_1 = 2t_1 = 200$ с.

Задачи для самостоятельного решения

Электромагнитные волны. Показатель преломления. Дифракция (1–2)

13.1. Длина волны ультрафиолетового излучения в вакууме $1{,}5\cdot10^{-5}$ см. Чему равна длина волны (в нм) этого излучения в веществе, в котором скорость распространения волн $1{,}5\cdot10^{8}$ м/с?

13.2. Монохроматический свет с частотой $1{,}5\cdot10^{15}$ Гц распространяется в пластинке, прозрачной для этого света и имеющей показатель преломления 1,6. Чему равна длина волны (в нм) этого света в пластинке?

13.3. Определите постоянную дифракционной решетки (в нм), если при нормальном падении света на решетку зеленая линия спектра лампы (длина волны 550 нм) наблюдается в пятом порядке под углом 30°.

13.4. Найдите длину волны света (в нм), если при нормальном падении света на дифракционную решетку с постоянной 4,4 мкм максимум четвертого порядка для этой длины волны наблюдается под углом 30°.

Отражение и преломление света.
Полное внутреннее отражение (3–9)

13.5. Параллельный пучок света распространяется горизонтально. Под каким углом (в градусах) к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы отраженный пучок распространялся вертикально?

13.6. Под каким углом (в градусах) к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно вертикального колодца отраженными от зеркала солнечными лучами, падающими под углом 30° к горизонту?

13.7. Человек стоит перед плоским зеркалом, укрепленным на вертикальной стене. Какова должна быть минимальная высота (в см) зеркала, чтобы человек мог видеть себя в полный рост? Рост человека 180 см.

13.8. Во сколько раз увеличится расстояние между предметом и его изображением в плоском зеркале, если зеркало переместить в то место, где было изображение? Предмет остается неподвижным.

13.9. Плоское зеркало движется по направлению к точечному источнику света со скоростью 10 см/с. С какой скоростью (в см/с) движется изображение? Направление скорости перпендикулярно плоскости зеркала.

13.10. Сколько изображений получится от предмета в двух плоских зеркалах, поставленных под углом 60° друг к другу?

13.11. Два плоских зеркала располагаются под углом друг к другу и между ними помещается точечный источник света. Расстояние от этого источника до одного зеркала 3 см, до другого 8 см. Расстояние между первыми изображениями в зеркалах 14 см. Найдите угол (в градусах) между зеркалами.

13.12. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом 60° падают два параллельных луча света, расстояние между которыми 3 см. Найдите расстояние (в см) между точками, в которых эти лучи выходят из пластинки.

13.13. Солнце составляет с горизонтом угол, синус которого 0,6. Шест высотой 170 см вбит в дно водоема глубиной 80 см. Найдите длину (в см) тени от этого шеста на дне водоема, если показатель преломления воды 4/3.

13.14. Луч света падает на плоское зеркало под углом, синус которого 0,75. На сколько миллиметров сместится отраженный луч, если на зеркало положить прозрачную пластину толщиной 2 см с показателем преломления 4/3?

13.15. В некотором прозрачном веществе свет распространяется со скоростью, вдвое меньшей скорости света в вакууме. Чему будет равен предельный угол (в градусах) полного отражения для поверхности раздела этого вещества с вакуумом?

13.16. Широкий непрозрачный сосуд доверху наполнен жидкостью с показателем преломления 1,25. Поверхность жидкости закрыли тонкой непрозрачной пластиной, в которой имеется отверстие радиусом 2 см. Определите диаметр (в см) светлого пятна на дне сосуда, если он освещается рассеянным светом облачного неба, идущим со всех направлений. Толщина слоя жидкости 6 см.

13.17. В стекле с показателем преломления 1,5 имеется сферическая полость радиусом 9 см, заполненная водой с показателем преломления 4/3. На полость падают параллельные лучи света. Определите радиус (в см) светового пучка, который проникает в полость.

13.18. При переходе луча света из первой среды во вторую угол преломления 45°, а при переходе из первой среды в третью угол преломления 30° (при том же угле падения). Найдите предельный угол (в градусах) полного внутреннего отражения для луча, идущего из третьей среды во вторую.

13.19. Угол падения луча света из воздуха на слой воды толщиной 40 см равен углу полного внутреннего отражения для воды. Вычислите смещение (в см) луча в результате прохождения этого слоя воды. Показатель преломления воды 4/3.

13.20. Между точечным источником света и наблюдателем поместили стеклянную пластину толщиной 24 мм. На сколько миллиметров сместится видимое положение источника? Показатель преломления стекла 1,5. Пластина перпендикулярна линии наблюдения, углы считать малыми, т. е. $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha$.

13.21. Пловец, нырнувший с открытыми глазами, рассматривает из под воды светящийся предмет, находящийся над его головой на высоте 75 см над поверхностью воды. Какова будет видимая высота (в см) предмета над поверхностью воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е. $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha$.

13.22. На дне сосуда с водой лежит плоское зеркало. Толщина слоя воды 16 см. На расстоянии 20 см от поверхности воды находится точечный источник света. На каком расстоянии (в см) от зеркала находится его изображение, образуемое лучами, вышедшими обратно из воды? Показатель преломления воды 4/3. Углы считать малыми, т. е. $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha$.

13.23. Аквариум из тонкого стекла имеет форму шара радиусом 3 м. Аквариум заполнили водой и запустили туда маленькую рыбку. В какой-то момент рыбка оказалась между глазами наблюдателя и центром шара, на расстоянии 1 м от центра. На сколько сантиметров кажущееся положение рыбки будет ближе реального? Показатель преломления воды 4/3.

Линзы

а) ход лучей (10)

13.24. На собирающую линзу с фокусным расстоянием 17 см падает пучок света, параллельный ее главной оптической оси. На каком расстоянии (в см) от этой линзы нужно поставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 0,09 м, чтобы пучок, пройдя обе линзы, остался параллельным?

13.25. На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 10 см падает цилиндрический пучок лучей, параллельных главной оптической оси. За линзой на расстоянии 20 см от нее установлен экран, на котором получается круглое светлое пятно диаметром 15 см. Определите диаметр (в см) пучка лучей.

13.26. На собирающую линзу падает цилиндрический пучок лучей диаметром 15 мм, параллельных главной оптической оси. Ось симметрии пучка проходит через оптический центр линзы. Когда за линзой установили экран один раз на расстоянии 8 см, а другой раз на расстоянии 12 см от линзы, диаметр светлого пятна на экране получился одинаковым. Чему равен этот диаметр (в мм)?

13.27. Точечный источник света помещен в фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием 6 см. За линзой на расстоянии 12 см от нее расположен плоский экран, на котором видно круглое светлое пятно. На какое расстояние (в см) от фокуса линзы надо переместить вдоль оптической оси источник света, чтобы радиус светлого пятна на экране увеличился в 2 раза?

б) формула линзы (11–16)

13.28. Предмет находится на расстоянии 20 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 15 см. Найдите расстояние (в см) от изображения до линзы.

13.29. Фокусное расстояние собирающей линзы 20 см. Найдите расстояние (в см) от предмета до переднего фокуса линзы, если экран, на котором получается четкое изображение предмета, расположен на расстоянии 40 см от заднего фокуса линзы.

13.30. Расстояние от предмета до собирающей линзы в 1,5 раза больше фокусного. Во сколько раз больше фокусного расстояние от изображения до линзы?

13.31. Предмет находится на расстоянии 8 см от собирающей линзы с оптической силой 10 дптр. На каком расстоянии (в см) от линзы находится изображение предмета?

13.32. Собирающая линза с фокусным расстоянием 10 см формирует мнимое изображение на расстоянии 15 см от линзы. На каком расстоянии (в см) от этого изображения находится предмет?

13.33. Расстояние от предмета до рассеивающей линзы с фокусным расстоянием 4 см равно 12 см. Найдите расстояние (в см) от изображения до предмета.

13.34. Мнимое изображение предмета в рассеивающей линзе находится от нее на расстоянии в 2 раза меньшем, чем расстояние от линзы до предмета. Найдите расстояние (в см) от линзы до изображения, если фокусное расстояние линзы 50 см.

13.35. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии 8 см. Если собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же по величине фокусным расстоянием, мнимое изображение этого предмета будет отстоять от линзы на 2 см. Найдите абсолютную величину фокусного расстояния (в мм) линз.

13.36. Точечный источник света находится на расстоянии 12 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 10 см. За линзой на расстоянии 10 см установлено плоское зеркало, перпендикулярное главной оптической оси линзы. На каком расстоянии (в см) от линзы находится изображение, образованное лучами, прошедшими через линзу после отражения от зеркала?

13.37. Точечный источник света находится на расстоянии 8 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 6 см. За ней на расстоянии 15 см находится рассеивающая линза с фокусным расстоянием 12 см. На каком расстоянии (в см) от этой линзы находится изображение источника, сформированное системой линз?

13.38. Светящаяся точка находится на расстоянии 6 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 см. На какое расстояние (в см) сместится изображение точки, если между ней и линзой поставить стеклянную плоскопараллельную пластину? Пластина установлена перпендикулярно оптической оси линзы, толщина пластины 4,5 см, показатель преломления стекла 1,5.

в) увеличение линзы (17–20)

13.39. Фокусное расстояние объектива проекционного фонаря 25 см. Какое увеличение диапозитива дает фонарь, если экран удален от объектива на расстояние 200 см?

13.40. Высота изображения человека ростом 160 см на фотопленке 2 см. Найдите оптическую силу (в диоптриях) объектива фотоаппарата, если человек сфотографирован с расстояния 9 м.

13.41. На каком расстоянии (в см) от собирающей линзы с фокусным расстоянием 30 см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в 3 раза?

13.42. Расстояние от предмета до собирающей линзы составляет 1,25 от фокусного расстояния. Найдите увеличение линзы.

13.43. Изображение предмета, помещенного перед собирающей линзой на расстоянии 60 см, получено по другую сторону линзы в натуральную величину. Во сколько раз увеличится размер изображения, если предмет передвинуть в сторону линзы на 20 см?

13.44. Предмет расположен на расстоянии 0,2 м перед собирающей линзой, с помощью которой получено увеличенное в 5 раз мнимое изображение предмета. Определите оптическую силу линзы в диоптриях.

13.45. Мнимое изображение предмета, полученное собирающей линзой, в 4 раза дальше от линзы, чем ее фокус. Найдите увеличение линзы.

13.46. Расстояние между предметом и его увеличенным в 3 раза действительным изображением 80 см. Найдите фокусное расстояние (в см) линзы.

13.47. Расстояние между предметом и его увеличенным в 5 раз мнимым изображением 80 см. Найдите расстояние (в см) от предмета до линзы.

13.48. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием 8 см уменьшает предмет в два раза. Найдите расстояние (в см) от предмета до линзы.

13.49. Линза с фокусным расстоянием 12 см формирует уменьшенное в 3 раза действительное изображение предмета. Другая линза, помещенная на место первой, формирует его увеличенное в 3 раза действительное изображение. Найдите фокусное расстояние (в см) второй линзы.

13.50. Линза с фокусным расстоянием 8 см формирует увеличенное в 5 раз действительное изображение предмета. Каким должно быть фокусное расстояние (в см) другой линзы, чтобы, поместив ее на место первой, мы получили увеличенное в 5 раз мнимое изображение?

13.51. Собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения 9 см. Оставляя неподвижным экран и предмет, линзу передвинули к экрану и получили второе четкое изображение высотой 4 см. Найдите высоту (в см) предмета.

13.52. Тонкий стержень расположен вдоль главной оптической оси собирающей линзы. Каково продольное увеличение стержня, если объект, расположенный у одного конца стержня, изображается с увеличением 4, а у другого конца — с увеличением 2,75? Оба конца стержня располагаются от линзы на расстоянии больше фокусного.

13.53. Точечный источник, находящийся на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии от нее, в полтора раза большем фокусного, начинает смещаться со скоростью 4 мм/с перпендикулярно оси. С какой скоростью (в мм/с) движется изображение источника?

13.54. Точечный источник находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 6 см на расстоянии 8 см от линзы. Линзу начинают смещать со скоростью 3 мм/с в направлении, перпендикулярном оптической оси. С какой скоростью (в мм/с) движется изображение источника?

13.55. Точечный источник движется со скоростью 2 мм/с вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 8 см. С какой скоростью (в мм/с) движется изображение источника в тот момент, когда источник находится от линзы на расстоянии 10 см?

Кванты света (21–23)

13.56. На сколько микрограмм увеличится масса тела, если ему сообщить дополнительную энергию 90 МДж?

13.57. Получив при соударении с электроном энергию $13{,}24\cdot10^{-19}$ Дж, атом излучает квант света. Определите частоту (в петагерцах) излучения. Постоянная Планка $6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с. (1 ПГц = 10^{15} Гц.)

13.58. Определите длину волны (в нм) света с энергией фотона $2{,}2\cdot10^{-19}$ Дж в среде с показателем преломления 1,5. Постоянная Планка $6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

13.59. Во сколько раз энергия фотона, соответствующая гамма-излучению с частотой $3\cdot10^{20}$ Гц, больше энергии фотонов рентгеновского излучения с длиной волны $2\cdot10^{-10}$ м?

13.60. Какова длина волны (в нм) света, если импульс фотона этого света $1{,}1\cdot10^{-27}$ кг·м/с. Постоянная Планка $6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

13.61. Во сколько раз энергия фотона, обладающего импульсом $8\cdot10^{-27}$ кг·м/с, больше кинетической энергии электрона, полученной им при прохождении разности потенциалов 5 В? Заряд электрона $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

13.62. Рентгеновская трубка, работающая при напряжении 66 кВ и силе тока 15 мА, излучает ежесекундно 10^{16} фотонов. Считая длину волны излучения равной 10^{-10} м, определите КПД (в процентах) установки. Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

13.63. Лазер излучает в импульсе $2 \cdot 10^{19}$ световых квантов с длиной волны $6{,}6 \cdot 10^{-5}$ см. Чему равна мощность вспышки лазера, если ее длительность 2 мс? Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

13.64. Пары некоторого металла в разрядной трубке начинают излучать свет при напряжении на электродах 9,9 В. Во сколько раз длина волны возникающего излучения меньше одного микрометра? Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

13.65. Солнечная батарея космической станции площадью 50 $м^2$ ориентирована перпендикулярно направлению на Солнце. Она отражает половину падающего на нее солнечного излучения. Чему равна сила давления (в мкН) излучения на батарею, если мощность излучения, падающего на 1 $м^2$ поверхности, равна 1,4 кВт?

Фотоэффект (24)

13.66. Свет с энергией кванта 3,5 эВ вырывает из металлической пластинки электроны, имеющие максимальную кинетическую энергию 1,5 эВ. Найдите работу выхода (в эВ) электрона из этого металла.

13.67. Какой максимальной кинетической энергией (в эВ) обладают электроны, вырванные из металла при действии на него ультрафиолетового излучения с длиной волны 0,33 мкм, если работа выхода электрона $2{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж? Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. (1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.)

13.68. Чему равно задерживающее напряжение для фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла светом с энергией фотонов $7{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж, если работа выхода из этого металла $3 \cdot 10^{-19}$ Дж? Заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

13.69. Красная граница фотоэффекта для некоторого металла соответствует длине волны $6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м. Чему равно напряжение, полностью задерживающее фотоэлектроны, вырываемые из этого металла излучением с длиной волны $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ см? Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

13.70. Определите длину волны (в нм) света, которым освещается поверхность металла, если фотоэлектроны имеют максимальную кинетическую энергию $6 \cdot 10^{-20}$ Дж, а работа выхода электронов из этого металла $6 \cdot 10^{-19}$ Дж. Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

13.71. Работа выхода электронов из некоторого металла 3,375 эВ. Найдите скорость электронов (в км/с), вылетающих с поверхности металла при освещении его светом с длиной волны $2 \cdot 10^{-7}$ м. Масса электрона $9 \cdot 10^{-31}$ кг. Постоянная Планка $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. (1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

13.72. Работа выхода электронов из некоторого металла $5{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж. На металл падают фотоны с импульсом $2{,}4 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с. Во сколько раз максимальный импульс электронов, вылетающих с поверхности металла при фотоэффекте, больше импульса падающих фотонов? Масса электрона $9 \cdot 10^{-31}$ кг.

Атом водорода (25–26)

13.73. Во сколько раз уменьшается радиус орбиты электрона в атоме водорода, если при переходе атома из одного стационарного состояния в другое кинетическая энергия электрона увеличивается в 16 раз?

13.74. Во сколько раз увеличилась кинетическая энергия электрона в атоме водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое, если угловая скорость вращения по орбите увеличилась в 8 раз?

13.75. Во сколько раз увеличивается угловая скорость вращения электрона в атоме водорода, если при переходе атома из одного стационарного состояния в другое радиус орбиты электрона уменьшается в 4 раза?

13.76. Переход атомов водорода из состояния с номером 2 в нормальное состояние сопровождается ультрафиолетовым излучением с некоторой длиной волны. Каков номер возбужденного состояния, в которое переходят атомы водорода из состояния с номером 2 при поглощении кванта с длиной волны, в 4 раза большей?

13.77. Каков номер возбужденного состояния, в которое переходит атом водорода из нормального состояния при поглощении фотона, энергия которого составляет 8/9 энергии ионизации атома водорода?

Ядерные реакции (27–30)

13.78. Во сколько раз меньше нейтронов содержит ядро атома азота с массовым и зарядовым числами 14 и 7, чем ядро цинка с массовым и зарядовым числами 65 и 30?

13.79. Ядро урана с массовым числом 239 и зарядовым числом 92, являясь радиоактивным, после испускания электрона превращается в ядро некоторого элемента. Каков порядковый номер этого элемента в периодической системе элементов Менделеева?

13.80. В реакции изотопа $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ и углерода $^{12}_{6}\mathrm{C}$ образуется альфа-частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в образующемся ядре.

13.81. При бомбардировке лития $^{6}_{3}\mathrm{Li}$ нейтронами образуется ядро гелия-4 и изотоп некоторого элемента. Определите количество нейтронов в ядре этого изотопа.

13.82. При бомбардировке нейтронами ядра атома алюминия $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ испускается альфа-частица и образуется ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в ядре вновь образовавшегося изотопа.

13.83. Ядро изотопа бериллия $^{9}_{4}\mathrm{Be}$, поглотив дейтон (изотоп водорода с массовым числом 2), превращается в ядро некоторого элемента. При этом испускается один нейтрон. Каков порядковый номер образовавшегося элемента в таблице Менделеева?

13.84. Когда ядро атома алюминия захватывает альфа-частицу, то образуется нейтрон и радиоактивный изотоп некоторого элемента. При его распаде испускается позитрон. Каков порядковый номер элемента, образующегося при этом распаде? Порядковый номер алюминия 13.

13.85. После захвата нейтрона ядро изотопа урана $^{238}_{92}U$ превращается в радиоактивный изотоп урана, который после двух последовательных бета-распадов превращается в плутоний. Сколько нейтронов содержит ядро атома плутония?

13.86. В цепочке радиоактивных превращений после 5 бета-распадов и нескольких альфа-распадов ядро тяжелого элемента превращается в ядро устойчивого атома, порядковый номер которого на 13 меньше первоначального. На сколько меньше первоначального становится массовое число ядра?

13.87. В цепочке радиоактивных превращений после нескольких альфа- и бета-распадов ядро некоторого тяжёлого атома превращается в ядро устойчивого атома, у которого число нейтронов на 27 меньше, чем у первоначального ядра. Известно, что число альфа-распадов равно числу бета-распадов. Чему равно общее число распадов?

13.88. Ядро некоторого элемента X захватывает альфа-частицу. При этом испускается нейтрон и образуется ядро элемента Y. Это ядро в свою очередь распадается с испусканием позитрона, образуя ядро элемента Z. Определите, на сколько больше нейтронов в ядре элемента Z, чем в первоначальном ядре X.

13.89. За время 150 с распалось 7/8 первоначального числа радиоактивных ядер. Чему равен период полураспада этого элемента?

Указания к задачам

Глава 1. Кинематика

1.6. Найдите интервал времени от встречи с первым спортсменом до встречи с последним и определите расстояния, пройденные тренером и первым спортсменом за это время. **1.17.** Скорость капель относительно воздуха направлена вертикально вниз и не зависит от скорости ветра (см. реш. 8). **1.18.** Учтите, что вдоль линии полета в присутствии ветра направлена скорость самолета относительно земли $\vec{v}_{\text{с}}$, скорость ветра $\vec{v}_{\text{в}}$ перпендикулярна этой линии, а $\vec{v}_{\text{св}}$ (равная скорости полета в безветренную погоду) направлена под углом. **1.19.** Вдоль линии движения направлена скорость лодки относительно берега $\vec{v}_{\text{л}}$, а не скорость лодки относительно воды $\vec{v}_{\text{лв}}$. **1.26.** Движение на втором и третьем участках замените равномерным движением со средней скоростью v_{23}, которая равна $(v_2+v_3)/2$ (объясните, почему). **1.28.** Проекция перемещения на заданное направление на i-ом этапе равно $s_{xi} = v_i t_i \cos\alpha_i$. **1.46.** Запишите формулу (6) для перемещения на первом интервале и для перемещения на двух интервалах вместе. В этом случае в уравнения войдут только неизвестные v_0 и a. **1.47.** Поскольку через время $t_1 = v_0/a = 5$ с тело останавливается и начинает двигаться назад, то путь не совпадает с модулем перемещения: путь равен *сумме* отрезков, пройденных до остановки и за время $t-t_1 = 3$ с после остановки. **1.49.** Путь, пройденный за n-ю секунду, равен разности путей, пройденных за n секунд и за $n-1$ секунд (см. реш. 13). **1.60.** См. указание к зад. 1.47. **1.66.** Время движения до верхней точки можно найти из соображений симметрии: $t = (t_1+t_2)/2$. **1.69.** Поскольку расход в каждом сечении струи должен быть одинаковым, то $\rho_1 v_1 s = \rho_2 v_2 s$. **1.74.** См. реш. 21. **1.75.** Перейдите в систему отсчета лифта. В этой СО болт падает без начальной скорости с ускорением $(g-a)$. **1.76.** Запишите условие встречи (см. реш. 20) и исследуйте полученное квадратное уравнение на наличие положительных корней. Другой подход: перейдите в СО пассажира и исследуйте движение двери вагона в этой СО (см. также реш. 22). **1.97.** Траектория мяча после удара симметрична (относительно вертикали в точке удара) траектории до удара. Отсюда найдите горизонтальную дальность полета мяча до удара. **1.98.** Проведите мысленно наклонную плоскость через углы ступенек и найдите точку пересечения траектории мяча с этой плоскостью (см. реш. 26). Посмотрите, сколько раз высота ступеньки укладывается в координату y этой точки. **1.100.** Перейдите в систему отсчета первого камня. В этой СО второй камень движется равномерно по прямой (см. замечание к реш. 21). Найдите направление его движения, и определите построением наименьшее расстояние между первым камнем и этой прямой (см. реш. 10). **1.107.** В верхней точке скорость равна $v_x = v_0\cos\alpha$. **1.108.** Наибольшая скорость соответствует как моменту броска, так и моменту падения, а наименьшая — верхней точке движения. **1.109.** Проекция скорости снаряда на ось x должна быть равна скорости самолета, v_{0y} должна быть достаточной для подъема до высоты полета самолета. **1.110.** Проекция скорости на ось x постоянна, что позволит найти v_y и затем высоту, исходя из формулы $v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gh$. **1.112.** Удобно сначала вывести соотношение $s/h_{\max} = 4\operatorname{ctg}\alpha$ (см. реш. 29). **1.113.** Условие встречи мины и ракеты состоит в равенстве их горизонтальных и вертикальных координат. **1.114.** Траектория движения мяча после удара о стенку симметрична (относительно стенки) той траектории, которая была бы у мяча в отсутствие стенки. **1.115.** Надо воспользоваться уравнением расхода. **1.116.** В проекции на ось y задача полностью эквивалентна задаче о броске вверх (см. реш. 17). **1.117.** Время полета определяется из условия, что координата

y в момент падения равна нулю (см. реш. 32). **1.118.** Условие падения имеет вид $s_y/s_x = \text{tg}\beta$, где β — угол наклона горы, s_x и s_y — перемещения вдоль вертикальной и горизонтальной осей. **1.119.** При выборе стандартных осей (y — вверх) условие падения принимает вид $s_y = -s_x\text{tg}\alpha$. Решение упрощается при выборе наклонных осей (см. реш. 33).**1.120.** См. реш. 27. **1.121.** См. указание к зад. 1.100. **1.126.** См. реш. 34. **1.127.** Напомним, что период вращения секундной стрелки равен 60 с, минутной — 1 ч. **1.129.** В движущейся системе отсчета, связанной с осью блока, скорость движения нити с шариками равна скорости точек на ободе блока. **1.131.** Радиус вращения точки равен расстоянию до оси вращения. **1.134.** См. реш. 36. **1.135.** См. реш. 37. **1.136.** См. реш. 38. **1.137, 1.138.** См. реш. 39. **1.139.** См. реш. 40.

Глава 2. Динамика

2.10. Сила, с которой тянут за веревку, равна силе натяжения по всей ее длине (см. замечание к реш. 12). **2.17.** При установившемся падении сила тяжести равна силе сопротивления. Силу сопротивления запишите в виде $F_c = ksv^2$. **2.18.** Найдите сначала связь между скоростью и радиусом, а затем между скоростью и объемом. **2.19.** См. реш. 5. **2.22.** Запишите 2-ой закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную стене. **2.23.** Из 2-го закона Ньютона найдите проекции силы натяжения на горизонтальную и вертикальную оси. См. также замечание к реш. 7. **2.25.** Обратите внимание на то, что угол между нитями прямой. Стандартный подход: использовать горизонтальную и вертикальную оси. Короче: использовать одну ось, но наклонную (см. реш. 7). См. также замечание к реш. 7. **2.26.** Выразите $\sin\alpha$ из 2-го закона Ньютона. **2.28.** Ускорение направлено против скорости. **2.30.** Определите, движется тело или покоится (см. реш. 8). **2.31.** Определите, какое тело движется, а какое — покоится (см. реш. 8). **2.37.** Максимальная сила тяги при разгоне бегуна равна μN. **2.38, 2.39.** Сила реакции опоры не равна mg (см. реш. 10). **2.42.** Выясните, в каком случае тело движется, а в каком — покоится. **2.51.** Ускорение направлено против скорости. **2.52.** Найдите ускорения тела при движении вверх и движении вниз. Затем используйте равенство перемещений в этих двух движениях. **2.56, 2.57.** Обратите внимание, что проекция силы тяги на ось, перпендикулярную плоскости, не равна нулю. Поэтому сила реакции N не равна $mg\cos\alpha$. **2.61.** Выразите силу натяжения нити T через силу тяги F так, чтобы входило только отношение масс. **2.62–2.64.** Из уравнений движения выразите ускорения и приравняйте друг к другу. См. также реш. 13. **2.66.** Из уравнения движения для каждой лодки выразите коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью. **2.67.** Найдите ускорение, при котором брусок начнет скользить по доске (см. реш. 14). **2.68.** Начните рассмотрение с доски, которая движется только под действием силы трения (см. также реш. 14). **2.69.** Из условия равновесия доски найдите силы трения, которые действуют между доской и человеком. **2.73.** Каждая из гирь пройдет к этому моменту половину указанного расстояния. **2.75, 2.76.** Сила натяжения троса равна двум силам натяжения нити. **2.77.** Сила натяжения нити с одной стороны от щели (нити, действующей на больший груз) на $F = 3$ Н больше, чем сила натяжения с другой стороны. **2.78, 2.79.** Найдите силу натяжения нити, вычислите ускорение груза, затем ускорение блока (см. реш. 16). **2.80.** См. реш. 17. **2.89.** Сначала найдите, во сколько раз отличаются радиусы планет. **2.90.** Сила притяжения к шару с полостью равна разности силы притяжения к шару без полости и силы притяжения к шару, находящемуся на месте полости. **2.92, 2.93.** См. реш. 19. **2.94.** Иногда забывают, что период обращения Земли равен одному году. См. реш. 20. **2.92, 2.96.** См. реш. 20. **2.97.** Радиус вращения равен длине растянутого шнура. **2.99.** Эта сила равна разности сил натяжения стержня с разных сторон от оси вращения. **2.100.** В состоянии невесомости на человека действует только сила тяжести. **2.105.** См.

реш. 21. **2.112.** В состоянии невесомости на летчика действует только сила тяжести. **2.113.** Тело на экваторе движется по окружности, на полюсе — покоится (см. реш. 22). **2.114.** При движении с запада на восток скорость движения по окружности равна $v+\omega R$. **2.115.** См. реш. 23. **2.116.** Сила трения покоя направлена к центру окружности. **2.117.** На колеса при повороте действует сила трения покоя, направленная к центру окружности. **2.118.** Подъемная сила перпендикулярна плоскости крыльев самолета. **2.119.** При оптимальной скорости боковая сила трения равна нулю. **2.120.** При максимальной скорости сила трения покоя направлена внутрь трека и равна μN. **2.121.** При максимальной скорости сила трения направлена вниз вдоль склона, при минимальной — вверх. **2.124.** Сила трения направлена вверх вдоль поверхности. **2.125.** На шарик действуют сила тяжести и сила нормальной реакции, направленная к центру сферы. **2.127, 2.128.** См. реш. 23.

Глава 3. Закон сохранения импульса

3.15. Найдите вектор $\Delta\vec{p}$ графически. **3.16.** Найдите вектор $\Delta\vec{p}$ графически, или вычислите проекцию на вертикальную ось (см. реш. 4). **3.17–3.21.** Реактивная сила равна изменению импульса струи за единицу времени (см. реш. 6). **3.22.** За время Δt приходит в соприкосновение со стенкой и теряет скорость элемент струи длиной $v\Delta t$. Вычислите изменение его импульса. **3.23.** За время Δt в движение приходит элемент туловища змеи длиной $v\Delta t$. Вычислите связанное с этим изменение импульса системы. (См. реш. 7). **3.31.** Скорость человека относительно тележки равна его скорости относительно земли. **3.35.** Скорость уменьшения длины веревки равна скорости сближения мальчиков, т.е. сумме их скоростей. **3.37.** Решите задачу графически (см. реш. 11). Воспользуйтесь теоремой косинусов. **3.38–3.40.** Система замкнута в горизонтальном направлении. **3.41.** При ударе сохраняется горизонтальная проекция импульса системы (см. реш. 12). **3.42.** Систему можно считать замкнутой в направлении вдоль наклонной плоскости (см. реш. 13). **3.43.** При прыжке сохраняется горизонтальная проекция импульса системы. Сумма пройденных расстояний равна длине доски. **3.46.** Скорости осколков равны по величине и направлены вертикально. **3.47.** См. реш. 14. **3.48.** Исходя из закона сохранения импульса, свяжите между собой пройденные расстояния. **3.49.** Центр масс не смещается по горизонтали (см. реш. 15). **3.50–3.51.** Используйте уравнение движения центра масс (формула (25)). См. реш. 16. **3.52.** Найдите горизонтальную и вертикальную проекции силы из 2-го закона Ньютона для центра масс. См. реш.16. **3.53.** Перейдите в систему отсчета центра масс (см. реш. 17).

Глава 4. Работа и энергия

4.4. Как сила натяжения, так и перемещение груза выражаются через a. **4.10.** Найдите силу натяжения веревки из 2-го закона Ньютона. См. реш. 2. **4.11.** Сила трения линейно возрастает от нуля до μmg (см. реш. 10). **4.14.** Найдите силу тяги из 2-го закона Ньютона. $\sin\alpha = 1/10$. **4.18.** Из уравнения движения на спуске найдите силу сопротивления, после чего найдите силу тяги на подъеме. **4.19.** Рассмотрев первый случай, найдите коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью. **4.30.** Работа равна начальной кинетической энергии камня. Найдите горизонтальную и вертикальную компоненты начальной скорости. **4.33.** Найдите изменение кинетической энергии после первой пробитой доски. Оно будет таким же и в остальных досках. **4.34–4.37.** Полезная мощность равна кинетической энергии, произведенной за единицу времени (см. реш. 9). **4.38.** Работа равна кинетической энергии спутника, летящего с первой космической скоростью. **4.39–4.40.** Примените теорему о кинетической энергии. Учтите, что сила трения изменяется. См. реш. 10. **4.41.** Выясните, весь ли стержень пересечет границу. См. реш. 10. **4.45–4.48.** Потенциальная энергия протяженного тела выражается через высоту его центра тяжести. **4.54.** При параллельном соединении деформации пружин равны, а силы упругости складываются: $F=F_1+F_2$. **4.55.** См. реш. 14. **4.65.** Потенциальная энергия веревки в последний момент выражается через высоту ее средней точки. **4.67.** Сила, с которой натягивают рогатку, в два раза больше силы натяжения шнура. **4.68, 4.69.** В момент максимальной деформации пружины скорость груза равна нулю. **4.70–4.72.** См. реш. 18. **4.77.** Запишите закон сохранения энергии и 2-ой закон Ньютона в проекции на радиус (см. реш. 20) и на вертикальную ось ($a_y = 0$). **4.78.** См. реш. 21. **4.79, 4.80.** Скорости в верхней и нижней точках связаны законом сохранения энергии. **4.81.** Приравняйте энергии в нижней точке окружности и в верхней точке подъема. **4.82.** Искомая сила равна разности сил натяжения в двух частях стержня. Угловую скорость найдите из закона сохранения энергии. **4.83.** Запишите 2-ой закон Ньютона для каждого груза и исключите силу натяжения стержня между грузами. Угловую скорость найдите из закона сохранения энергии. **4.84.** В точке отрыва $N = 0$. Запишите в этой точке 2-ой закон Ньютона в проекции на радиус. **4.85.** В верхней точке петли $N = 0$. **4.86.** После встречи с гвоздем радиус окружности, по которой движется шарик, становится равным расстоянию от шарика до гвоздя. **4.87.** См. реш. 26. **4.88.** Из закона сохранения энергии следует, что $u_1 = u_2$. См. реш. 26. **4.89.** При подъеме или спуске энергия шара сохраняется. См. реш. 25. **4.80.** См. реш. 25. **4.91.** Решите задачу графически (см. реш. 27). Один из углов треугольника равен 30°. **4.92.** Закон сохранения импульса изобразите графически. **4.93, 4.94.** См. реш. 28. **4.95.** Учтите, что скорость каждого первоначально покоившегося шара направлена по линии, соединяющей его центр с центром налетающего шара в момент удара (см. реш. 28). **4.96.** Рассмотрите удар в СО, связанной с ракеткой (см. реш. 29). **4.97, 4.99.** Горизонтальная проекция импульса системы сохраняется. **4.100.** В момент наибольшего сближения вагонов (максимальной деформации пружин) скорости вагонов равны. **4.101, 4.102.** Когда деформация максимальна, скорости брусков равны. **4.103, 4.104.** Рассмотрите момент, когда деформация пружины обратится в ноль (см. реш. 31). **4.115–4.117.** Количество выделившейся теплоты за все время движения равно модулю работы силы трения (см. реш. 36). **4.118.** Количество выделившейся теплоты за все время движения равно модулю работы силы трения (см. реш. 37). **4.119.** См. реш. 37. **4.120.** См. реш. 38. **4.121.** См. реш. 39. **4.122.** См. реш 40. **4.123.** Изменение механической энергии равно сумме работы внешней силы и работы силы трения (см. реш. 41). **4.124, 4.125.** См.реш.14 и реш. 39. **4.126, 4.127.** См. реш. 40. **4.128–4.130.** См. реш. 42. **4.131.** Запишите формулу для изменения механической энергии отдельно для движения вверх и движения вниз. Учтите, что работа силы трения одинакова. **4.132.** Работа равна изменению механической энергии. Скорость струи найдите из уравнения расхода. **4.136.** Сохраняется горизонтальная проекция импульса. **4.137.** Вычислите изменение энергии камня в системе отсчета, связанной с вагоном (см. реш. 44). **4.138.** При ударе сохраняется импульс, в процессе сжатия пружины — энергия (см. реш. 45). **4.139.** При ударе сохраняется импульс, затем примените закон сохранения энергии (с учетом выделившейся теплоты, см. реш. 37). См. реш. 45. **4.140.** При ударе сохраняется импульс, при дальнейшем движении — энергия. См. реш. 16 и реш. 45. **4.141.** При ударе сохраняется импульс, при дальнейшем движении — энергия. См. реш. 22 и реш. 45. **4.142.** При ударе сохраняется импульс, при дальнейшем движении — энергия. См. реш. 23 и реш. 45. **4.143.** При ударе сохраняется импульс, при дальнейшем движении — энергия. **4.144.** См. реш. 46. **4.145, 4.146.** Выделившаяся теплота равна работе сил трения. См. реш. 47,48. **4.147.** Выделившаяся энергия равна приращению механической энергии. **4.148.** Работа человека равна приращению механической энергии системы (см. реш. 50). **4.149.** Выделившаяся энергия равна приращению механической энергии (см. реш. 51).

Глава 5. Статика

5.5. Деформация системы равна деформации каждой пружины, сила упругости равна сумме сил, растягивающих пружины. **5.8.** Сложите сначала первую и третью силы. **5.9, 5.10.** Воспользуйтесь теоремой косинусов. **5.23.** См. реш. 4. **5.24.** Полная сила трения должна равняться μN. **5.43.** См. реш. 9. **5.45.** Из уравнения моментов относительно центра шара следует, что продолжение нити проходит через центр. **5.46.** Напишите уравнение моментов относительно нижнего конца палочки. **5.50.** Запишите правило моментов относительно точки контакта шара с плоскостью. **5.51.** См. реш. 11. **5.53.** Сила натяжения войдет в уравнение моментов для одной половины стремянки (см. реш. 13). Силу реакции для этого уравнения найдите из другого уравнения моментов — для всей системы. **5.54.** В момент начала опрокидывания куб опирается о землю одним ребром. **5.55.** В момент начала опрокидывания цилиндр опирается о плоскость в одной точке. Сила тяжести не должна выходить за пределы опоры (см. реш. 14). **5.60, 5.61.** См. реш. 17. **5.62.** Расположите треугольник так, чтобы сторона AB была вертикальна. См. реш. 18. **5.63.** Сначала замените первые две массы одной, лежащей в их центре тяжести. Затем найдите центр тяжести получившейся системы двух масс. См. реш. 19. **5.64.** См. реш. 20.

Глава 6. Гидростатика

6.10. Запишите условие равновесия для системы (жидкость + тело). **6.18–6.20.** Используйте условие сохранения объема жидкости (см. реш. 7). **6.21.** Вычислите силу давления на границе воды и ртути. Используйте также условие сохранения объема ртути (см. реш. 7). **6.31, 6.32.** Объем, вытесненный составным телом, равен сумме объемов тел (см. реш. 9). **6.38.** Когда часть цилиндра выступает из воды, сила становится переменной. Вычислите работу на этом этапе через среднюю силу. Учтите, что уровень воды изменяется. **6.39.** Простой способ: записать 2-ой закон Ньютона для *всего* содержимого сосуда два раза — в начале и в конце. Изменение давления на дно связано с изменением уровня воды. **6.40, 6.41.** Сила Архимеда приложена к центру тяжести погруженной части тела (см. реш. 12). **6.55–6.57.** Изменение уровня в присутствии плавающего тела можно найти или вычислив вытесненный объем или из условия равновесия всего содержимого сосуда (см. реш. 14). **6.58–6.60.** Вычислите работу через среднюю силу (см. реш. 13). Учтите, что уровень воды изменяется. **6.61.** См. реш. 14. **6.62.** Отношение объемов подобных конусов равно кубу отношения высот. **6.65.** См. реш. 15. **6.67, 6.68.** Используйте выражение для силы Архимеда на границе двух жидкостей (см. реш. 16). **6.68.** Из первого условия выразите плотность тела. **6.70.** Запишите 2-ой закон Ньютона для каждого шара и исключите массы шаров. **6.71.** Найдите зависимость давления от глубины для ускоренно движущегося сосуда (см. реш. 17). **6.72.** Найдите распределение давления по объему (см. реш. 18). Среднее давление для круглой стенки равно давлению в центре круга (см. реш. 3). **6.73.** Найдите высоту жидкости у передней и задней стенок (см. реш. 19). **6.74.** Сила Архимеда зависит от ускорения сосуда (см. реш. 20). **6.75.** Учтите, что в уравнение движения по оси x войдет горизонтальная компонента силы Архимеда (направленная по ускорению, см. реш. 21). **6.76.** Сила Архимеда имеет как вертикальную, так и горизонтальную компоненты (см. реш. 21). Нить наклонена вперед, в сторону ускорения.

Глава 7. Молекулярная физика. Газовые законы

7.24. Запишите условие механического равновесия поршня (см. реш. 5). **7.25.** На пробку действует избыточное давление внутри бутылки. **7.28.** Воспользуйтесь законом Дальтона для парциальных давлений (см. реш. 6). **7.29.** О работе откачивающего насоса см. реш. 8.

7.30, 7.31. Запишите условие механического равновесия поршня (см. реш. 5). **7.32, 7.33.** Давление воздуха на глубине равно полному давлению воды. **7.34–7.36.** Разность давлений внутри и снаружи определяется из условия механического равновесия столбика жидкости. См. также реш. 10. **7.37.** Сила Архимеда на искомой глубине равна весу стакана. Сила Архимеда выражается через объем воздуха в стакане. **7.38.** Выясните, увеличилось давление или уменьшилось. **7.41.** Запишите газовый закон сразу для всего закачанного газа (см. реш. 7). Учтите, что резервуар не был пустой. **7.42,7.43.** Напишите газовый закон сразу для начального и конечного состояний (см. реш. 12). **7.44, 7.45.** Давления справа и слева равны. См. реш. 13. **7.46.** Давление воздуха на глубине равно полному давлению воды. **7.55.** Запишите условие механического равновесия поршня (см. реш. 5). **7.56.** Воспользуйтесь формулами для объема шара и площади его поверхности. **7.57.** Давление воздуха на глубине равно полному гидростатическому давлению воды. **7.59.** Воспользуйтесь законом Дальтона для парциальных давлений. **7.65, 7.66.** Давление выравнивается за счет перераспределения газа между сосудами, но общая масса не меняется (см. реш. 18). **7.67,7.68.** Меняется молярная масса газа.

Глава 8. Термодинамика

8.5. Энергия, затраченная на нагревание масла, не полезная, а потерянная. **8.15.** Мощность плитки постоянна. **8.25.** Количество выделившейся при ударе теплоты равно убыли механической энергии (см. реш. 9). **8.38.** См. реш. 12. **8.39.** Учтите, что перед опусканием второго тела первое из воды не вынимали. Составьте уравнение теплового баланса для каждого из двух процессов. **8.40.** Составьте уравнение теплового баланса для каждого из двух процессов. **8.41–8.46.** Составьте уравнение теплового баланса с учетом превращения фаз (см. реш. 14, 15). **8.47.** Теплота, выделившаяся при замерзании, идет на испарение. **8.55.** Давление газа под поршнем найдите из условия механического равновесия поршня. См. реш. 17. **8.56, 8.57.** См. реш. 18. **8.58.** Выясните, как давление зависит от объема. Используйте формулу (42) для среднего давления. См. реш. 19. **8.59.** Используйте формулу (42) для среднего давления. См. реш. 19. **8.68, 8.69.** Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. См. реш. 21. **8.78, 8.79.** См. реш. 23. **8.80.** Работа газа в таком процессе вычислялась в реш. 19. **8.81, 8.82.** Используйте закон сохранения энергии (см. реш. 24). **8.83.** См. замечание к реш. 24. **8.84, 8.85.** См. реш. 25. **8.95.** См. реш. 26. **8.96.** Полученное количество теплоты вычисляется так же, как в реш. 23. Работу газа в цикле можно вычислить как сумму работ в изобарных процессах (см. реш. 27), либо как площадь внутри цикла на графике p–V. **8.97.** Полученное количество теплоты вычисляется так же, как в реш. 23. Работу можно вычислить или по отдельности в двух процессах (см. реш. 19), либо как площадь внутри цикла на графике p–V. См. также реш. 28. **8.98.** О работе холодильной машины см. реш. 29. **8.101.** См. реш. 30, 31. **8.102–8.104.** См. реш. 33. **8.105.** Объем пара, выходящего из чайника за время t, найдите из уравнения расхода (формула (17)), а его массу — из уравнения Менделеева–Клапейрона. **8.108, 8.109.** См. реш. 34. **8.110.** См. реш. 34, 36. **8.111.** В ускоренно движущейся системе отсчета надо заменить g на $g' = g+a$ (см. Глава 2 реш. 7). **8.112.** См. реш. 37.

Глава 9. Электростатика

9.7,9.8. Воспользуйтесь законом сохранения заряда (см. реш. 1). **9.10.** См. реш. 2. **9.15.** Новая сила вычисляется методом суперпозиции (см. реш. 3). **9.20.** Сначала найдите равнодействующую двух сил, действующих со стороны новых зарядов. **9.23.** См. реш. 5. **9.29.** Рассмотрев первый случай, выразите коэффициент пропорциональности между силой и скоростью. **9.30.** Рассмотрев первый случай, выразите коэффициент пропорциональности между силой и скоростью. Во втором случае пылинка будет падать наклонно. **9.33.** Найдите равнодействующую электрической силы и силы тяжести. **9.34–9.36.** Рассмотрите проекции движения на оси (см. реш. 6). **9.44.** Сложите сначала напряженности, создаваемые одинаковыми зарядами. **9.45.** Напряженность, создаваемая двумя одинаковыми зарядами, расположенными в противоположных вершинах, равна нулю. **9.46.** При сложении векторов напряженностей возникает равносторонний треугольник. **9.47.** Воспользуйтесь подобием треугольника, образованного векторами напряженностей, и треугольника, образованного зарядами. **9.48, 9.49.** Воспользуйтесь теоремой косинусов. **9.50.** Сначала сложите напряженности зарядов, между которыми лежит указанная точка. **9.51.** Сначала найдите напряженность, создаваемую двумя разноименными зарядами. **9.62.** Рассмотрите проекции движения на оси, направленные вдоль пластин и перпендикулярно им (см. реш. 10). **9.63.** Кинетическая энергия в нижней точке равна сумме работ силы тяжести и электрической силы (см. реш. 11). **9.68.** См. реш. 13. **9.69.** Потенциал поля, созданного зарядом на сфере, вне сферы совпадает с потенциалом точечного заряда. **9.70–9.72.** См. реш. 14. **9.73.** Работа равна произведению заряда на разность потенциалов в поле неподвижного заряда. **9.74, 9.75.** Работа поля равна изменению кинетической энергии. См. реш. 15. **9.76.** Примените теорему о кинетической энергии. Потенциал начальной точки найдите методом суперпозиции. См. реш. 16. **9.77.** Примените теорему о кинетической энергии. Потенциалы начальной и конечной точек найдите методом суперпозиции. См. реш. 16. **9.78.** Потенциал на оси кольца найдите методом суперпозиции (см. реш. 17). **9.79–9.83.** См. реш. 18. **9.84, 9.85.** Примените закон сохранения энергии (см. реш. 19). **9.86.** Потенциальная энергия взаимодействия зарядов равна сумме парных взаимодействий. См. реш. 19, 20. **9.87.** Запишите закон сохранения энергии (см. реш. 21). Когда первое тело останавливается, второе начинает проскальзывать. **9.88.** Запишите закон сохранения энергии (см. реш. 21). Скорость максимальна в тот момент, когда кулоновская сила равна силе трения. **9.89.** См. реш. 22. **9.90, 9.91.** См. реш. 23. **9.92, 9.93, 9.95, 9.96.** Запишите законы сохранения энергии и импульса. См. реш. 24. **9.94.** Расстояние между частицами бесконечно возрастает, при этом их скорости становятся одинаковыми. Запишите законы сохранения энергии и импульса. См. реш. 24. **9.97.** См. реш. 25. **9.100.** При слиянии капель сохраняются полный заряд и полный объем. **9.101.** При перезарядке потенциалы шаров выравниваются, а полный заряд сохраняется (см. реш. 27). **9.102.** Из равенства начальных зарядов найдите отношение радиусов шаров. См. реш. 27. **9.103, 9.104.** См. реш. 28. **9.105.** Вычислите потенциал центра сферы (см. реш. 29). **9.111, 9.112.** Напряжение на конденсаторе не меняется. **9.114.** Заряд на обкладках не меняется. **9.117.** На каждую обкладку действует электрическое поле, создаваемое другой обкладкой в вакууме. См. реш. 30. **9.118.** Напряжение не меняется, заряды возрастают. См. реш. 30. **9.119.** Собственное поле пластины равно внешнему полю. О напряженности поля заряженной плоскости см. замечание к реш. 30. **9.120.** При перезарядке полный заряд не меняется, а напряжение на конденсаторе сравнивается с потенциалом шара. См. также реш. 32. **9.124.** Заряды конденсаторов равны. **9.125–127.** Заряды конденсаторов равны друг другу. Полное напряжение не меняется. См. также реш. 35. **9.128.** Емкость возрастает в два раза, напряжение не меняется. **9.132–9.134.** При перезарядке полный заряд не меняется, а напряжения выравниваются (см. реш. 37). **9.136–9.138.** Рассмотрите эквивалентную схему (см. реш. 38). **9.139.** Рассмотрите эквивалентную схему (см. реш. 39). **9.146, 9.147.** Выделившаяся теплота равна разности начальной и конечной энергий конденсатора. См. реш. 40. **9.148–9.151.** Работа равна изменению энергии (см. реш. 41).

Глава 10. Постоянный ток

10.1. См. реш. 1. **10.12.** Масса проволоки не меняется (см. реш. 5). **10.13.** Сопротивление уменьшается дважды — при разрезании проводника и при параллельном соединении частей (см. реш. 6). **10.15.** Соедините узлы, имеющие одинаковый потенциал (см. реш. 7). **10.16.** Удалите сопротивления, соединяющие узлы с одинаковым потенциалом (см. реш. 8). **10.17.** Используйте метод разрезания узлов (см. реш. 9). **10.18.** К каждому узлу подходит 6 ребер. См. реш. 10. **10.30.** Из данных по первому подключению найдите сопротивление вольтметра. **10.31.** Из данных по первому подключению найдите отношение сопротивлений проводов и плитки (см. реш. 12). **10.32.** Напряжение на конденсаторе равно напряжению на участке цепи, к которому он подключен. **10.56.** Из уравнений, описывающих результаты первого подключения, найдите отношение сопротивления первого вольтметра к внутреннему сопротивлению источника. **10.63.** О том, как найти разность потенциалов на участке цепи, содержащем источник, см. реш. 19. **10.76,10.77.** Учтите, что напряжение в сети в обоих случаях одинаково. **10.81.** Учтите, что напряжение в сети и количество выделившейся теплоты в обоих случаях одинаковы. **10.82.** Из выражений для номинальных мощностей найдите отношение сопротивлений, затем узнайте, во сколько раз уменьшится мощность каждого чайника при их последовательном включении (см. реш. 23). **10.84.** В равновесном режиме количество теплоты, выделяющейся при прохождении тока, равно количеству теплоты, отдаваемой в окружающую среду (см. реш. 24). **10.85–10.87.** Работа источника равна изменению электрической энергии плюс количество теплоты (см. реш. 25). **10.88.** После пробоя будет заряжен только конденсатор C_3. См. реш. 25. **10.89, 10.90.** См. реш.25. **10.91–10.95.** Изменение электрической энергии равно сумме механической работы и работы источника (см. реш. 26). **10.103, 10.104.** См. реш. 29. **10.106, 10.107.** См. реш. 30. **10.108.** См. реш. 29, 30. **10.109, 10.110.** См. реш. 29–31. **10.111.** См. реш. 30, 31. **10.112.** Механическая мощность равна полезной мощности электромотора (см. реш. 32). **10.114.** Прошедший заряд на каждом интервале равен произведению среднего тока на время (формула (49)). **10.116.** Объем серебра равен произведению площади на толщину (см. реш. 33). **10.117.** Для вычисления объема шара воспользуйтесь уравнением Менделеева–Клапейрона. **10.119.** КПД электролитической установки равен m/kq (см. реш. 34).

Глава 11. Магнетизм

11.4. При сложении сил, действующих на стороны угла, воспользуйтесь теоремой косинусов (см. реш. 1). **11.15.** См. реш. 4. **11.26.** Работа ускоряющего поля, равная произведению заряда иона на разность потенциалов, равна кинетической энергии иона. См. реш. 7. **11.29, 11.30.** Сила Лоренца работу не совершает, но изменяет натяжение нити (см. реш. 10). **11.31.** В одном случае сила Лоренца направлена к центру окружности, в другом — от центра. **11.34.** См. реш. 11. **11.40.** Возникающие в петлях ЭДС индукции действуют навстречу друг другу. **11.41–11.47.** Прошедший заряд равен отношению изменения потока к сопротивлению витка. См. реш. 13. **11.50.** Прошедший заряд равен отношению изменения магнитного потока к сопротивлению витка. См. реш. 14. **11.51–11.53.** Мгновенное значение ЭДС равно производной от магнитного потока по времени (см. реш. 15). **11.54–11.57.** ЭДС индукции в движущемся проводнике равна работе силы Лоренца по перемещению единичного заряда вдоль проводника (см. реш. 16). **11.58.** Запишите 2-ой закон Ньютона и закон Ома для замкнутого контура (см. реш. 18). **11.59, 11.60.** Запишите 2-ой закон Ньютона и закон Ома для замкнутого контура (см. реш. 19). **11.67.** Магнитный поток в сверхпроводящем контуре не меняется (см. реш. 22).

Глава 12. Колебания и волны

12.8,12.9. См реш. 2. **12.12.** См реш. 3. **12.14.** Из 2-го закона Ньютона найдите максимальную силу трения. **12.15.** На тело действуют силы тяжести, реакции опоры и магнитного притяжения. В момент отрыва сила реакции обращается в ноль. **12.21.** Переход в ускоренно движущуюся систему отсчета сводится к изменению g (см. Глава 2 реш. 7). См. реш. 6. **12.30.** См. реш. 12. **12.31.** Скорость бруска после удара найдите из закона сохранения импульса. См. также реш. 9. **12.32.** Возвращающая сила равна изменению силы Архимеда (см. реш. 14). **12.33.** Возвращающая сила равна сумме изменения силы упругости и изменения силы Архимеда (см. реш. 15). **12.34.** Воспользуйтесь энергетическим методом определения частоты (см. реш. 16). **12.35.** Уравнение движения стержня совпадает с уравнением гармонических колебаний (см. реш. 18). **12.41,12.42.** Колебания волн происходят в противофазе (см. реш. 21). **12.54.** См. реш. 26. **12.61.** Амплитуды напряжений на катушке и конденсаторе должны быть равны.

Глава 13. Оптика. Атомная физика

13.11. Воспользуйтесь теоремой косинусов. **13.14.** См. реш. 6. **13.16.** Максимальный угол преломления соответствует падению луча под 90°. **13.19.** См. реш. 6. **13.20.** Смещение изображения по отношению к источнику такое же, как в реш. 8. Можно также исходить из реш. 6 (в пределе малых углов). **13.21, 13.22.** См. реш. 8. **13.23.** См. реш. 9. **13.36.** Находите изображения последовательно, следуя ходу лучей (в линзе, в зеркале, снова в линзе). См. также замечание к реш. 15. **13.37.** См. реш. 16. **13.38.** Пластина смещает источник (см. реш. 8). **13.51.** См. реш. 14. **13.52.** См. реш. 19. **13.55.** См. реш. 20. **13.64.** Энергия фотона равна кинетической энергии электронов. **13.65.** Сила равна изменению импульса излучения за единицу времени. **13.73–13.75.** См. реш. 25. **13.76, 13.77.** См. реш. 26. **13.87.** См. реш. 29.

Ответы

Глава 1. Кинематика

1.1.5; **1.2.**1000; **1.3.**24; **1.4.**2; **1.5.**35; **1.6.**10; **1.7.**2; **1.8.**18; **1.9.**72; **1.10.**15; **1.11.**20; **1.12.**3; **1.13.**5; **1.14.**300; **1.15.**18; **1.16.**34; **1.17.**35; **1.18.**9; **1.19.**6; **1.20.**40; **1.21.**6; **1.22.**8; **1.23.**70; **1.24.**48; **1.25.**12; **1.26.**48; **1.27.**5; **1.28.** 250; **1.29.**1; **1.30.**90; **1.31.**30; **1.32.**90; **1.33.**2; **1.34.**15; **1.35.**60; **1.36.**90; **1.37.**54; **1.38.**10; **1.39.**2; **1.40.**75; **1.41.**12; **1.42.**2; **1.43.**20; **1.44.**6; **1.45.**3; **1.46.**10; **1.47.**34; **1.48.**7; **1.49.**10; **1.50.**15; **1.51.**20; **1.52.**16; **1.53.**26; **1.54.**14; **1.55.**6; **1.56.**11; **1.57.**16; **1.58.**3; **1.59.**30; **1.60.**25; **1.61.** 6; **1.62.**7; **1.63.**600; **1.64.**35; **1.65.**3; **1.66.**6; **1.67.**45; **1.68.**2000; **1.69.**7; **1.70.**5; **1.71.**3; **1.72.**10; **1.73.**35; **1.74.**140; **1.75.**1; **1.76.**5; **1.77.**45; **1.78.**12; **1.79.**250; **1.80.**60; **1.81.**2; **1.82.**5; **1.83.**70; **1.84.**60; **1.85.**10; **1.86.**2; **1.87.**50; **1.88.**3; **1.89.**490; **1.90.**2; **1.91.**50; **1.92.**8; **1.93.**20; **1.94.**40; **1.95.**11; **1.96.**125; **1.97.**5; **1.98.**3; **1.99.**35; **1.100.**18; **1.101.**2; **1.102.**60; **1.103.**500; **1.104.**4; **1.105.**80; **1.106.**20; **1.107.**60; **1.108.**10; **1.109.**250; **1.110.**15; **1.111.**60; **1.112.**60; **1.113.**100; **1.114.**1; **1.115.**120; **1.116.**3; **1.117.**60; **1.118.**30; **1.119.**480; **1.120.**60; **1.121.**6; **1.122.**3; **1.123.**50; **1.124.**6000; **1.125.**21; **1.126.**5; **1.127.**50; **1.128.**10; **1.129.**15; **1.130.**628; **1.131.**2; **1.132.**32; **1.133.**25; **1.134.**8; **1.135.**80; **1.136.**18; **1.137.**24; **1.138.**50; **1.139.**30.

Глава 2. Динамика

2.1.180; **2.2.**150; **2.3.**4; **2.4.**2; **2.5.**2; **2.6.**60; **2.7.**20; **2.8.**64; **2.9.**5; **2.10.**110; **2.11.**80; **2.12.**5; **2.13.**200; **2.14.**1; **2.15.**60; **2.16.**700; **2.17.**2; **2.18.**64; **2.19.**60; **2.20.**5; **2.21.**2; **2.22.**30; **2.23.**41; **2.24.**6; **2.25.**48; **2.26.**90; **2.27.**60; **2.28.**1; **2.29.**72; **2.30.**15; **2.31.**3; **2.32.**24; **2.33.**150; **2.34.**8; **2.35.**500; **2.36.**2; **2.37.**12; **2.38.**18; **2.39.**2; **2.40.**4; **2.41.**5; **2.42.**25; **2.43.**2; **2.44.**9; **2.45.**13; **2.46.**2; **2.47.**11; **2.48.**9; **2.49.**375; **2.50.**14; **2.51.**4; **2.52.**3; **2.53.**4; **2.54.**60; **2.2.55.**430; **2.56.**6; **2.57.**6; **2.58.**3; **2.59.**2; **2.60.**15; **2.61.**70; **2.62.**20; **2.63.**22; **2.64.**3; **2.65.**26; **2.66.**30; **2.67.**30; **2.68.**6; **2.69.**550; **2.70.**2; **2.71.**32; **2.72.**20; **2.73.**300; **2.74.**2; **2.75.**48; **2.76.**3; **2.77.**3; **2.78.**6; **2.79.**64; **2.80.**30; **2.81.**25; **2.82.**4; **2.83.**9; **2.84.**60; **2.85.**19200; **2.86.**40; **2.87.**6; **2.88.**5; **2.89.**4; **2.90.**6; **2.91.**50; **2.92.**6; **2.93.**13; **2.94.**9; **2.95.**9; **2.96.**3; **2.97.**10; **2.98.**9; **2.99.**45; **2.100.**20; **2.101.**10; **2.102.**12; **2.103.**650; **2.104.**125; **2.105.**21; **2.106.**10; **2.107.**5; **2.108.**9; **2.109.**10; **2.110.**250; **2.111.**4200; **2.112.**2; **2.113.**15; **2.114.**73; **2.115.**10; **2.116.**1; **2.117.**20; **2.118.**7500; **2.119.**72; **2.120.**30; **2.121.**7; **2.122.**3; **2.123.**26; **2.124.**7; **2.125.**3; **2.126.**15; **2.127.**878; **2.128.**20.

Глава 3. Закон сохранения импульса

3.1.16; **3.2.**8; **3.3.**15; **3.4.**1; **3.5.**4; **3.6.**6; **3.7.**4; **3.8.**10; **3.9.**7; **3.10.**9; **3.11.**10; **3.12.**70; **3.13.**20; **3.14.**1000; **3.15.**150; **3.16.**55; **3.17.**5; **3.18.**20; **3.19.**9000; **3.20.**20; **3.21.**7; **3.22.**32; **3.23.**25; **3.24.**40; **3.25.**440; **3.26.**3; **3.27.**325; **3.28.**7; **3.29.**28; **3.30.**16; **3.31.**75; **3.32.**1; **3.33.**4; **3.34.**360; **3.35.**20; **3.36.**50; **3.37.**2; **3.38.**5; **3.39.**4; **3.40.**20; **3.41.**30; **3.42.**7; **3.43.**3; **3.44.**1; **3.45.**125; **3.46.**8; **3.47.**50; **3.48.**12; **3.49.**16; **3.50.**16; **3.51.**9; **3.52.**13; **3.53.**20.

Глава 4. Работа и энергия

4.1.58500; **4.2.**26; **4.3.**3; **4.4.**2; **4.5.**100; **4.6.**320; **4.7.**7; **4.8.**10; **4.9.**588; **4.10.**8; **4.11.**10; **4.12.**96000; **4.13.**20; **4.14.**15; **4.15.**4800; **4.16.**5; **4.17.**125; **4.18.**25; **4.19.**18; **4.20.**50; **4.21.**300; **4.22.**55; **4.23.**4; **4.24.**3; **4.25.**24; **4.26.**60; **4.27.**3; **4.28.**400; **4.29.**120; **4.30.**50; **4.31.**1200; **4.32.**60; **4.33.**6; **4.34.**8; **4.35.**15; **4.36.**2500; **4.37.**16800; **4.38.**20; **4.39.**3; **4.40.**80; **4.41.**325; **4.42.**20; **4.43.**9; **4.44.**480; **4.45.**75; **4.46.**150; **4.47.**150; **4.48.**25; **4.49.**10; **4.50.**60; **4.51.**8; **4.52.**63; **4.53.**200; **4.54.**15; **4.55.**40; **4.56.**4; **4.57.**10; **4.58.**75; **4.59.**25; **4.60.**45; **4.61.**80; **4.62.**10; **4.63.**2; **4.64.**4; **4.65.**3; **4.66.**20; **4.67.**10;

4.68.10; **4.69.**140; **4.70.**8; **4.71.**5; **4.72.**25; **4.73.**3; **4.74.**15; **4.75.**100; **4.76.**60; **4.77.**60; **4.78.**3; **4.79.**78; **4.80.**5; **4.81.**2; **4.82.**14; **4.83.**320; **4.84.**5; **4.85.**5; **4.86.**45; **4.87.**6; **4.88.**200; **4.89.**32; **4.90.**16; **4.91.**3; **4.92.**5; **4.93.**30; **4.94.**7; **4.95.**3; **4.96.**2; **4.97.**18; **4.98.**10; **4.99.**2; **4.100.**125; **4.101.**8; **4.102.**12; **4.103.**4; **4.104.**3; **4.105.**90; **4.106.**200; **4.107.**35; **4.108.**20; **4.109.**40; **4.110.**75; **4.111.**105; **4.112.**21; **4.113.**2; **4.114.**6; **4.115.**60; **4.116.**12; **4.117.**6; **4.118.**10; **4.119.**40; **4.120.**9; **4.121.**16; **4.122.**40; **4.123.**12; **4.124.**2; **4.125.**24; **4.126.**5; **4.127.**40; **4.128.**4; **4.129.**4; **4.130.**25; **4.131.**13; **4.132.**56; **4.133.**25; **4.134.**75; **4.135.**70; **4.136.**150; **4.137.**5; **4.138.**5; **4.139.**100; **4.140.**180; **4.141.**130; **4.142.**80; **4.143.**8; **4.144.**75; **4.145.**3; **4.146.**5; **4.147.**480; **4.148.**290; **4.149.**840.

Глава 5. Статика

5.1.16; **5.2.**10; **5.3.**800; **5.4.**1100; **5.5.**5; **5.6.**5; **5.7.**13; **5.8.**400; **5.9.**7; **5.10.**7; **5.11.**900; **5.12.**200; **5.13.**50; **5.14.**50; **5.15.**100; **5.16.**48; **5.17.**300; **5.18.**480; **5.19.**2; **5.20.**5; **5.21.**20; **5.22.**20; **5.23.**7; **5.24.**16; **5.25.**25; **5.26.**8; **5.27.**50; **5.28.**16; **5.29.**7; **5.30.**6; **5.31.**600; **5.32.**100; **5.33.**5000; **5.34.**180; **5.35.**800; **5.36.**25; **5.37.**2000; **5.38.**42; **5.39.**2; **5.40.**25; **5.41.**20; **5.42.**50; **5.43.**25; **5.44.**30; **5.45.**25; **5.46.**9; **5.47.**150; **5.48.**20; **5.49.**3; **5.50.**17; **5.51.**45; **5.52.**45; **5.53.**200; **5.54.**250; **5.55.**5; **5.56.**10; **5.57.**30; **5.58.**20; **5.59.**5; **5.60.**2; **5.61.**4; **5.62.**12; **5.63.**2; **5.64.**2.

Глава 6. Гидростатика

6.1.500; **6.2.**5500; **6.3.**10; **6.4.**1020; **6.5.**16; **6.6.**343; **6.7.**100; **6.8.**20; **6.9.**4; **6.10.**300; **6.11.**5; **6.12.**1000; **6.13.**27200; **6.14.**500; **6.15.**500; **6.16.**16; **6.17.**5; **6.18.**16; **6.19.**2; **6.20.**4; **6.21.**10; **6.22.**5; **6.23.**645; **6.24.**210; **6.25.**150; **6.26.**1260; **6.27.**400; **6.28.**5; **6.29.**700; **6.30.**800; **6.31.**200; **6.32.**193; **6.33.**3; **6.34.**3; **6.35.**3; **6.36.**300; **6.37.**390; **6.38.**36; **6.39.**1; **6.40.**235; **6.41.**250; **6.42.**750; **6.43.**750; **6.44.**150; **6.45.**80; **6.46.**18; **6.47.**90; **6.48.**16200; **6.49.**75; **6.50.**100; **6.51.**76; **6.52.**3; **6.53.**20; **6.54.**70; **6.55.**1; **6.56.**3; **6.57.**12; **6.58.**540; **6.59.**960; **6.60.**460; **6.61.**3; **6.62.**2; **6.63.**3240; **6.64.**400; **6.65.**920; **6.66.**48; **6.67.**3900; **6.68.**750; **6.69.**90; **6.70.**800; **6.71.**6; **6.72.**3; **6.73.**16; **6.74.**18; **6.75.**6; **6.76.**41.

Глава 7. Молекулярная физика. Газовые законы

7.1.2; **7.2.**14; **7.3.**1600; **7.4.**3; **7.5.**28; **7.6.**138; **7.7.**50; **7.8.**200; **7.9.**100; **7.10.**7479; **7.11.**527; **7.12.**300; **7.13.**2; **7.14.**400; **7.15.**225; **7.16.**273; **7.17.**4; **7.18.**225; **7.19.**25; **7.20.**143; **7.21.**5; **7.22.**227; **7.23.**30; **7.24.**100; **7.25.**217; **7.26.**900; **7.27.**1; **7.28.**5; **7.29.**3125; **7.30.**60; **7.31.**15; **7.32.**3; **7.33.**10; **7.34.**102; **7.35.**102; **7.36.**30; **7.37.**30; **7.38.**100; **7.39.**30; **7.40.**5; **7.41.**6750; **7.42.**1800; **7.43.**3; **7.44.**40; **7.45.**4; **7.46.**2; **7.47.**5; **7.48.**40; **7.49.**800; **7.50.**32; **7.51.**28; **7.52.**16; **7.53.**80; **7.54.**240; **7.55.**215; **7.56.**249; **7.57.**2; **7.58.**2; **7.59.**2; **7.60.**100; **7.61.**10; **7.62.**25; **7.63.**25; **7.64.**1; **7.65.**27; **7.66.**2; **7.67.**40; **7.68.**3.

Глава 8. Термодинамика

8.1.244; **8.2.**800; **8.3.**70; **8.4.**23; **8.5.**75; **8.6.**2; **8.7.**210; **8.8.**702; **8.9.**1; **8.10.**226; **8.11.**460; **8.12.**2720; **8.13.**1; **8.14.**150; **8.15.**55; **8.16.**10; **8.17.**40; **8.18.**125; **8.19.**4; **8.20.**10; **8.21.**200; **8.22.**136 ; **8.23.**250; **8.24.**60; **8.25.**198; **8.26.**300; **8.27.**400; **8.28.**30; **8.29.**18; **8.30.**75; **8.31.**38; **8.32.**90; **8.33.**3; **8.34.**3; **8.35.**24; **8.36.**470; **8.37.**25; **8.38.**33; **8.39.**55; **8.40.**39; **8.41.**75; **8.42.**128; **8.43.**50; **8.44.**10; **8.45.**8; **8.46.**1170; **8.47.**50; **8.48.**15; **8.49.**1; **8.50.**30; **8.51.**166; **8.52.**290; **8.53.**16; **8.54.**25 ; **8.55.**100; **8.56.**8300; **8.57.**3000; **8.58.**83; **8.59.**4980; **8.60.**600; **8.61.**100; **8.62.**400; **8.63.**400; **8.64.**4; **8.65.**200; **8.66.**207; **8.67.**36; **8.68.**6; **8.69.**432; **8.70.**249; **8.71.**8; **8.72.**498; **8.73.**6; **8.74.**225; **8.75.**40; **8.76.**120; **8.77.**60; **8.78.**250; **8.79.**4565; **8.80.**332; **8.81.**360; **8.82.**20; **8.83.**55; **8.84.**240; **8.85.**60; **8.86.**42; **8.87.**40; **8.88.**700; **8.89.**127; **8.90.**310; **8.91.**5; **8.92.**2; **8.93.**25; **8.94.**273; **8.95.**200; **8.96.**14; **8.97.**4; **8.98.**9; **8.99.**55; **8.100.**18; **8.101.**257; **8.102.**30; **8.103.**20; **8.104.**20; **8.105.**396; **8.106.**20; **8.107.**280; **8.108.**250; **8.109.**16; **8.110.**72; **8.111.**15; **8.112.**24.

Глава 9. Электростатика

9.1.32; **9.2.**2; **9.3.**2; **9.4.**4; **9.5.**4; **9.6.**2; **9.7.**125; **9.8.**80; **9.9.**100; **9.10.**5; **9.11.**4; **9.12.**960; **9.13.**15; **9.14.**80; **9.15.**3; **9.16.**20; **9.17.**4; **9.18.**136; **9.19.**190; **9.20.**3; **9.21.**150; **9.22.**100; **9.23.**3; **9.24.**210; **9.25.**4; **9.26.**40; **9.27.**8; **9.28.**7; **9.29.**4; **9.30.**39; **9.31.**20; **9.32.**50; **9.33.**7500; **9.34.**40; **9.35.**2; **9.36.**30; **9.37.**10; **9.38.**175; **9.39.**1500; **9.40.**200; **9.41.**800; **9.42.**9; **9.43.**6; **9.44.**54; **9.45.**54; **9.46.**81; **9.47.**4; **9.48.**220; **9.49.**165; **9.50.**15; **9.51.**21; **9.52.**0; **9.53.**18; **9.54.**60; **9.55.**10; **9.56.**1; **9.57.**2000; **9.58.**40; **9.59.**2000; **9.60.**1; **9.61.**5; **9.62.**2500; **9.63.**196; **9.64.**3; **9.65.**540; **9.66.**180; **9.67.**300; **9.68.**360; **9.69.**5; **9.70.**1; **9.71.**64; **9.72.**300; **9.73.**3; **9.74.**320; **9.75.**20; **9.76.**24; **9.77.**3; **9.78.**9; **9.79.**240; **9.80.**240; **9.81.**90; **9.82.**630; **9.83.**100; **9.84.**3; **9.85.**9; **9.86.**96; **9.87.**8; **9.88.**2; **9.89.**4; **9.90.**6; **9.91.**4; **9.92.**30; **9.93.**16; **9.94.**9; **9.95.**30; **9.96.**15; **9.97.**3; **9.98.**36; **9.99.**750; **9.100.**1; **9.101.**27; **9.102.**24; **9.103.**20; **9.104.**6; **9.105.**5; **9.106.**3; **9.107.**16; **9.108.**1; **9.109.**15; **9.110.**2; **9.111.**2; **9.112.**10; **9.113.**400; **9.114.**2000; **9.115.**7; **9.116.**2; **9.117.**600; **9.118.**16; **9.119.**2; **9.120.**2; **9.121.**200; **9.122.**15; **9.123.**6; **9.124.**25; **9.125.**2; **9.126.**2; **9.127.**5; **9.128.**10; **9.129.**3; **9.130.**2; **9.131.**2; **9.132.**100; **9.133.**200; **9.134.**12; **9.135.**24; **9.136.**3; **9.137.**3; **9.138.**12; **9.139.**2; **9.140.**25; **9.141.**2; **9.142.**500; **9.143.**4; **9.144.**20; **9.145.**150; **9.146.**20; **9.147.**1350; **9.148.**360; **9.149.**80; **9.150.**90; **9.151.**75.

Глава 10. Постоянный ток

10.1.144; **10.2.**30; **10.3.**2; **10.4.**10; **10.5.**20; **10.6.**4; **10.7.**125; **10.8.**10; **10.9.**200; **10.10.**50; **10.11.**500; **10.12.**4; **10.13.**6; **10.14.**16; **10.15.**7; **10.16.**3; **10.17.**11; **10.18.**4; **10.19.**24; **10.20.**2; **10.21.**10; **10.22.**90; **10.23.**60; **10.24.**40; **10.25.**2; **10.26.**22; **10.27.**200; **10.28.**4; **10.29.**3; **10.30.**110; **10.31.**24; **10.32.**110; **10.33.**10; **10.34.**200; **10.35.**1000; **10.36.**20; **10.37.**6; **10.38.**5; **10.39.**20; **10.40.**11; **10.41.**3; **10.42.**9; **10.43.**3; **10.44.**1; **10.45.**11; **10.46.**7; **10.47.**4; **10.48.**3; **10.49.**8; **10.50.**20; **10.51.**7; **10.52.**8; **10.53.**2; **10.54.**2; **10.55.**4; **10.56.**20; **10.57.**2; **10.58.**3; **10.59.**1; **10.60.**2; **10.61.**2; **10.62.**4; **10.63.**3; **10.64.**30; **10.65.**6; **10.66.**22; **10.67.**5; **10.68.**5; **10.69.**10; **10.70.**1318; **10.71.**5; **10.72.**2; **10.73.**3; **10.74.**420; **10.75.**8; **10.76.**4; **10.77.**25; **10.78.**100; **10.79.**4; **10.80.**60; **10.81.**13; **10.82.**144; **10.83.**500; **10.84.**40; **10.85.**80; **10.86.**45; **10.87.**75; **10.88.**90; **10.89.**30; **10.90.**360; **10.91.**100; **10.92.**30; **10.93.**10; **10.94.**40; **10.95.**5; **10.96.**1; **10.97.**1; **10.98.**9; **10.99.**23 ; **10.100.**7; **10.101.**5; **10.102.**7; **10.103.**2; **10.104.**4; **10.105.**1; **10.106.**15; **10.107.**9; **10.108.**6; **10.109.**36; **10.110.**8; **10.111.**18; **10.112.**220; **10.113.**50; **10.114.**231; **10.115.**3600; **10.116.**125; **10.117.**2430; **10.118.**37; **10.119.**25.

Глава 11. Магнетизм

11.1.30; **11.2.**2; **11.3.**18; **11.4.**14; **11.5.**50; **11. 6.**5; **11.7.**20; **11.8.**30; **11.9.**10; **11.10.**45; **11.11.**8; **11.12.**4; **11.13.**1; **11.14.**5; **11.15.**9; **11.16.**9; **11.17.**75; **11.18.**4; **11.19.**600; **11.20.**9; **11.21.**2; **11.22.**8000; **11.23.**801; **11.24.**2; **11.25.**75; **11.26.**2; **11.27.**50; **11.28.**3750; **11.29.**10; **11.30.**125; **11.31.**6; **11.32.**1; **11.33.**1; **11.34.**1; **11.35.**30; **11.36.**4; **11.37.**3; **11.38.**10; **11.39.**2; **11.40.**30; **11.41.**90; **11.42.**4; **11.43.**1; **11.44.**10; **11.45.**4; **11.46.**15; **11.47.**8; **11.48.**10; **11.49.**200; **11.50.**60; **11.51.**1; **11.52.**25; **11.53.**60; **11.54.**4; **11.55.**150; **11.56.**250; **11.57.**500; **11.58.**4; **11.59.**3; **11.60.**2; **11.61.**4; **11.62.**10; **11.63.**12; **11.64.**4; **11.65.**20; **11.66.**30; **11.67.**15; **11.68.**250.

Глава 12. Колебания и волны

12.1.2200; **12.2.**6; **12.3.**8; **12.4.**2; **12.5.**24; **12.6.**10; **12.7.**4; **12.8.**2; **12.9.**2; **12.10.**20; **12.11.**8; **12.12.**5; **12.13.**16; **12.14.**7; **12.15.**40; **12.16.**2; **12.17.**4; **12.18.**10; **12.19.**9; **12.20.**36; **12.21.**3; **12.22.**628; **12.23.**20; **12.24.**2; **12.25.**4; **12.26.**10; **12.27.**50; **12.28.**10; **12.29.**15; **12.30.**125; **12.31.**5; **12.32.**628; **12.33.**10; **12.34.**7; **12.35.**157; **12.36.**1000; **12.37.**4; **12.38.**4; **12.39.**20; **12.40.**8; **12.41.**360; **12.42.**277; **12.43.**2; **12.44.**3; **12.45.**600; **12.46.**2; **12.47.**6; **12.48.**20;

12.49.628; **12.50.**5652; **12.51.**4; **12.52.**10; **12.53.**18; **12.54.**375; **12.55.**11; **12.56.**30; **12.57.**95; **12.58.**40; **12.59.**3; **12.60.**200; **12.61.**100.

Глава 13. Оптика. Атомная физика

13.1.75; **13.2.**125; **13.3.**5500; **13.4.**550; **13.5.**45; **13.6.**60; **13.7.**90; **13.8.**2; **13.9.**20; **13.10.**5; **13.11.**120; **13.12.**6; **13.13.**180; **13.14.**12; **13.15.**30; **13.16.**20; **13.17.**8; **13.18.**45; **13.19.**12; **13.20.**8; **13.21.**100; **13.22.**28; **13.23.**20; **13.24.**8; **13.25.**5; **13.26.**3; **13.27.**2; **13.28.**60; **13.29.**10; **13.30.**3; **13.31.**40; **13.32.**9; **13.33.**9; **13.34.**25; **13.35.**32; **13.36.**8; **13.37.**36; **13.38.**75; **13.39.**7; **13.40.**9; **13.41.**40; **13.42.**4; **13.43.**3; **13.44.**4; **13.45.**5; **13.46.**15; **13.47.**20; **13.48.**8; **13.49.**36; **13.50.**12; **13.51.**6; **13.52.**11; **13.53.**8; **13.54.**12; **13.55.**32; **13.56.**1; **13.57.**2; **13.58.**600; **13.59.**200; **13.60.**600; **13.61.**3; **13.62.**2; **13.63.**3000; **13.64.**8; **13.65.**350; **13.66.**2; **13.67.**2; **13.68.**3; **13.69.**5; **13.70.**300; **13.71.**1000; **13.72.**250; **13.73.**16; **13.74.**4; **13.75.**8; **13.76.**4; **13.77.**3; **13.78.**5; **13.79.**93; **13.80.**17; **13.81.**2; **13.82.**13; **13.83.**5; **13.84.**14; **13.85.**145; **13.86.**36; **13.87.**18; **13.88.**2; **13.89.**50.

Основные формулы и законы физики

Кинематика

1. Координата и перемещение при равномерном движении по прямой:

$$x = x_0 + v_x t, \quad s_x = x - x_0 = v_x t, \tag{1}$$

где x_0 — начальная координата точки.

2. Закон сложения скоростей (для поступательного движения системы отсчета):

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{12} + \vec{v}_2, \tag{2}$$

где $\vec{v}_1$ — скорость первого тела (например, относительно земли), $\vec{v}_{12}$ — скорость первого тела относительно второго тела (подвижной системы отсчета), $\vec{v}_2$ — скорость второго тела (относительно земли). Аналогичный вид имеют закон сложения перемещений ($\vec{s}_1 = \vec{s}_{12} + \vec{s}_2$) и закон сложения ускорений ($\vec{a}_1 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_2$). Эту формулу в виде

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

называют формулой для относительной скорости двух тел.

3. Средняя скорость при неравномерном движении по прямой:

$$v_{ср} = \frac{s}{t}. \tag{3}$$

Два последовательных этапа с разными скоростями:

$$v_{ср} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}, \tag{4}$$

где $s_1 = v_1 t_1$, $s_2 = v_2 t_2$.

4. Скорость и перемещение при равноускоренном движении по прямой:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{5}$$

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \tag{6}$$

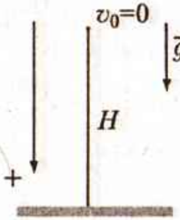
где v_{0x} — начальная скорость. Связь между скоростью и перемещением:

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x. \tag{7}$$

Средняя скорость при равноускоренном движении:

$$s_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \qquad (8)$$

5. Свободное падение ($v_0 = 0$). Скорость и перемещение (ось y направлена вниз, $a_y = g$):



$$v_y = gt, \qquad s_y = \frac{gt^2}{2}.$$

Высота в момент времени t:

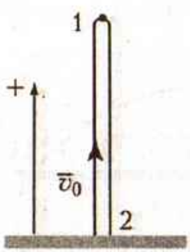
$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2},$$

где H — начальная высота. Время падения и конечная скорость:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \qquad v = \sqrt{2gH}. \qquad (9)$$

6. Бросок вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Скорость и перемещение (ось y направлена вверх, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$):

$$v_y = v_0 - gt, \qquad s_y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$



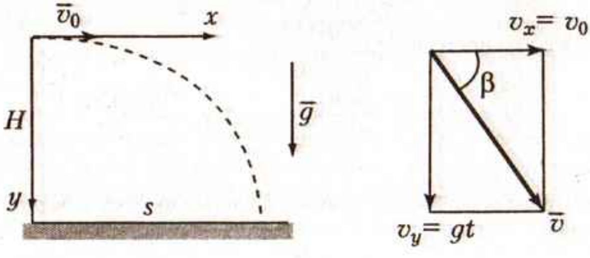
Время подъема до высшей точки (где $v_y = 0$) и высота подъема:

$$t_1 = \frac{v_0}{g}, \qquad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}. \qquad (10)$$

Полное время полета (до возврата в точку броска):

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g}. \qquad (11)$$

7. Горизонтальный бросок со скоростью v_0. Проекции скорости и перемещения (ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вниз):



$$\begin{cases} v_x = v_0, \\ s_x = v_0 t, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_y = gt, \\ s_y = \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

(по горизонтали — равномерное движение со скоростью v_0, по вертикали — свободное падение). Модуль скорости и угол наклона скорости к горизонту:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\ , \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}\ . \tag{13}$$

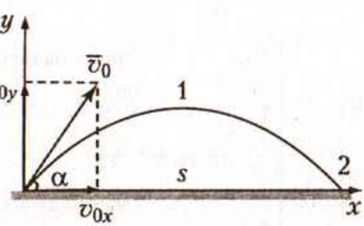
Время до падения на землю (начальная высота H) и дальность полета:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ , \qquad s = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\ . \tag{14}$$

8. Бросок под углом а к горизонту с начальной скоростью v_0. Проекции скорости и перемещения (ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вверх):

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha, \\ s_x = (v_0 \cos\alpha)t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y = (v_0 \sin\alpha) - gt, \\ s_y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}, \end{cases}$$



(по горизонтали — равномерное движение со скоростью $v_0\cos\alpha$, по вертикали — бросок вертикально вверх с начальной скоростью $v_{0y} = v_0\sin\alpha$). Время подъема до высшей точки ($v_y = 0$) и максимальная высота:

$$t_1 = \frac{(v_0 \sin\alpha)}{g}\ , \qquad h_{\max} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}\ . \tag{15}$$

Полное время и дальность полета:

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2(v_0 \sin\alpha)}{g}\ , \qquad s = v_x t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\ . \tag{16}$$

9. Равномерное вращение с угловой скоростью ω. Угол поворота (в рад) и число оборотов:

$$\varphi = \omega t, \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \nu t,$$

где ν — частота вращения ($\nu = \omega/2\pi$). Период вращения:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Связь между угловыми и линейными переменными

$$l = \varphi R, \quad v = \omega R,$$

где l — длина дуги. Центростремительное ускорение:

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

10. Объем и масса (жидкости, газа), проходящие через сечение s струи за время Δt (уравнение расхода):

$$\Delta V = sv\Delta t, \quad \Delta m = \rho\Delta V = \rho sv\Delta t, \tag{17}$$

где v — скорость струи, ρ — плотность (жидкости, газа).

Динамика

1. Второй закон Ньютона (уравнение движения тела):

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

Третий закон Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

2. Сила упругости:

$$F_{\text{упр}} = kx,$$

где k — жесткость пружины (упругого стержня, шнура), x — изменение длины. Сила упругости направлена противоположно изменению длины. Жесткость измеряется в Н/м.

3. Сила трения скольжения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения, N — сила нормальной реакции опоры. Такой же вид имеет формула для максимального значения силы трения покоя (при котором возникает проскальзывание).

4. Вес тела — суммарная сила, которая действует со стороны тела на опору или подвес (относительно которых тело покоится), возникающая под действием силы тяготения и/или ускоренного движения тела (вместе с опорой). По третьему закону Ньютона вес равен по модулю равнодействующей сил реакции.

5. Закон всемирного тяготения:

$$F = G\frac{mM}{r^2},$$

где m — масса тела, M — масса другого тела или планеты, r — расстояние до центра планеты, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — постоянная всемирного тяготения.

Ускорение свободного падения ($g = F/m$) на поверхности планеты и на высоте h:

$$g = G\frac{M}{R^2}, \quad g(h) = G\frac{M}{(R+h)^2}, \tag{18}$$

где R — радиус планеты.

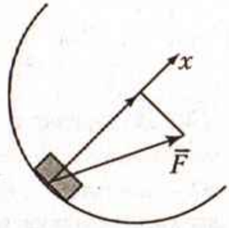
6. Уравнение движения и скорость спутника на круговой орбите радиусом $r = R+h$:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}. \tag{19}$$

Первая космическая скорость ($h = 0$):

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}. \tag{20}$$

7. Движение по окружности. Уравнение движения в проекции на ось x, направленную от тела к центру окружности (по радиусу):



$$\sum F_x = m\frac{v^2}{R}.$$

Закон сохранения импульса

1. Импульс тела (материальной точки):

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс системы тел (материальных точек):

$$\vec{p} = \sum m\vec{v}.$$

Импульс измеряется в кг·м/с.

2. Изменение импульса тела равно импульсу силы:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Изменение импульса системы (двух) тел равно импульсу равнодействующей внешних сил:

$$\Delta\vec{p} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t\ , \tag{21}$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ — внешние силы, действующие на отдельные тела системы.

Средняя сила за конечный промежуток времени:

$$\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\ . \tag{22}$$

3. Закон сохранения импульса.

а) Если система замкнута, т. е. внешние силы отсутствуют, или если их сумма равна нулю, то импульс системы сохраняется: $\sum\vec{p} = \text{const}$.

б) Если внешние силы перпендикулярны некоторой оси x, то проекция импульса системы на это направление сохраняется: $\sum p_x = \text{const}$.

в) Если время взаимодействия мало (взрыв, удар), а внешняя сила имеет фиксированную величину (например, $m\vec{g}$), то вкладом импульса этой силы $\vec{F}\Delta t$ в изменение импульса системы можно пренебречь.

4. Координаты центра масс системы тел

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}, \qquad (\text{так же для } y_{\text{ц}} \text{ и } z_{\text{ц}}). \tag{23}$$

Центр масс симметричного однородного тела лежит в его центре симметрии. Положение центра масс совпадает с центром тяжести.

Импульс системы тел равен произведению массы системы на скорость центра масс:

$$\vec{v}_{\text{ц}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots} = \frac{\vec{p}}{m}. \tag{24}$$

Ускорение центра масс равно ускорению точки массой m, равной массе системы, к которой приложена равнодействующая внешних сил:

$$\vec{F}_{\text{внешн}} = m\vec{a}_{\text{ц}}\ . \tag{25}$$

Закон сохранения энергии

1. Общая связь между энергией системы и работой внешних сил:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A.$$

Работа и энергия измеряются в джоулях (Дж = Н·м).

2. Механическая работа (определение):

$$A = Fs\cos\alpha = F_s s,$$

где α — угол между силой и перемещением, F_s — проекция силы на перемещение.

Работа силы, линейно зависящей от перемещения:

$$A = F_{\text{ср}} s = \frac{F_{1s} + F_{2s}}{2} s, \tag{26}$$

где F_{1s}, F_{2s} — проекции силы на перемещение в начальной и конечной точках.

3. Средняя мощность за время t:

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{t} = F_s v_{\text{ср}}.$$

Мгновенная мощность (или просто мощность):

$$P(t) = Fv\cos\alpha = F_v v,$$

где α — угол между силой и скоростью точки ее приложения, F_v — проекция силы на скорость. Мощность измеряется в ваттах (Вт = Дж/с).

4. Кинетическая энергия материальной точки (поступательного движения тела):

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы (двух) тел:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Теорема о кинетической энергии:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A$$

(изменение кинетической энергии равно работе всех действующих сил).

5. Изменение потенциальной энергии (для силы тяжести, упругости, кулоновского взаимодействия — любой силы, работа которой не зависит от траектории):

$$\Delta E_{\text{пот}} = -A, \tag{27}$$

где A — работа самой силы взаимодействия. Потенциальная энергия силы тяжести:

$$E_{\text{пот}} = mgh,$$

где h отсчитывается от произвольно выбранного нулевого уровня. Для протяженного тела h — высота центра тяжести. Потенциальная энергия силы упругости:

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2},$$

где за ноль принята энергия недеформированной пружины.

6. Закон сохранения механической энергии. Если в замкнутой системе действуют только силы тяжести, упругости и кулоновского взаимодействия, то механическая энергия системы сохраняется:

$$E_{\text{мех}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}.$$

7. Изменение механической энергии под действием внешних сил и внутренних сил трения равно суммарной работе этих сил:

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{\text{внешн}} + A_{\text{тр}}. \qquad (28)$$

Количество энергии, перешедшей во внутреннюю за счет трения (количество выделившейся теплоты), равно абсолютной величине работы сил трения:

$$Q = -A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}s. \qquad (29)$$

8. Сохранения энергии замкнутой системы с учетом изменения внутренней энергии:

$$E_{\text{мех}1} = E_{\text{мех}2} + \Delta E_{\text{вн}}.$$

При действии диссипативных сил (трение, неупругий удар) $\Delta E_{\text{вн}} = Q \geq 0$ — количество выделившейся теплоты:

$$E_{\text{мех}1} = E_{\text{мех}2} + Q. \qquad (30)$$

При выделении энергии (взрыв, работа механизма, человека) $E_{\text{выд}} = -\Delta E_{\text{вн}}$:

$$E_{\text{выд}} = E_{\text{мех}2} - E_{\text{мех}1}. \qquad (31)$$

9. Неупругий удар: после удара тела движутся вместе. Выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{u}\ .$$

Упругий удар. Выполняются законы сохранения энергии и импульса:

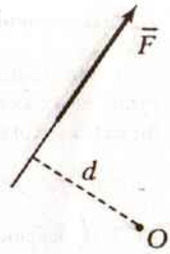
$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2,$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Статика

1. Необходимое условие отсутствия поступательного движения:

$$\sum \vec{F} = 0 .$$



2. Вращательный момент силы относительно оси:

$$M = \pm Fd,$$

где d — плечо силы относительно оси. Знак (+) — для сил, вызывающих вращение по часовой стрелке, знак (–) — для противоположного случая. Вращательный момент измеряется в Н·м.

3. Необходимое условие отсутствия вращения относительно оси:

$$\sum M = 0 .$$

4. Общие условия равновесия. В состоянии равновесия равны нулю как векторная сумма внешних сил, так и алгебраическая сумма моментов внешних сил относительно произвольной оси.

5. Центр тяжести системы (в однородном поле тяготения) — точка, относительно которой сумма моментов сил тяжести равна нулю. В этой точке приложена равнодействующая сил тяжести. Центр тяжести совпадает с центром масс.

Гидростатика

1. Давление:

$$p = \frac{F_д}{S} .$$

Сила давления $\vec{F}_д$ перпендикулярна площадке. Давление измеряют в паскалях (Па = Н/м^2). Атмосфера: 1 атм = 10^5 Па.

2. Закон Паскаля: давление в данной точке не зависит от ориентации площадки.

3. Сила давления на площадку:

$$F_д = p_{ср}S.$$

4. Давление столба жидкости:

$$p_A - p_B = \rho g h. \qquad (32)$$

(точка A лежит на h ниже точки B). Давление на глубине h:

$$p = p_0 + \rho g h,$$

где p_0 — атмосферное давление. Давление p в мм рт.ст.: $h = p/\rho_{рт}g$ (h — в мм).

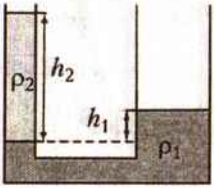
5. Гидравлический пресс:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \qquad \text{(равенство давлений);}$$

$$F_1 x_1 = F_2 x_2 \qquad \text{(равенство работ);}$$

$$S_1 x_1 = S_2 x_2 \qquad \text{(равенство объемов).}$$

6. Сообщающиеся сосуды:



$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2,$$

где h_1 — разность уровней нижней (общей) жидкости в сосудах, h_2 — высота верхней (долитой) жидкости. ($p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$: давления в общей жидкости на одном уровне одинаковы).

7. Закон Архимеда:

$$F_{\text{арх}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{выт}}$$

(выталкивающая сила равна весу жидкости в вытесненном объеме).

8. Вес тела, погруженного в жидкость:

$$P_{\text{ж}} = mg - F_{\text{арх}}. \qquad (33)$$

9. Условие плавания тела:

$$mg = F_{\text{арх}},$$

где выталкивающая сила равна весу жидкости в объеме погруженной части тела:

$$F_{\text{арх}} = \rho g V_{\text{погр}}.$$

Молекулярная физика. Газовые законы

1. Количество вещества (в молях):

$$\nu = \frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{N}{N_{\mathrm{A}}},$$

где m — масса вещества, N — число молекул, M — молярная масса (измеряется в кг/моль), $N_{\mathrm{A}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро.

2. Основное уравнение МКТ идеальных газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle, \qquad (34)$$

где $m_0 = \mathrm{M}/N_{\mathrm{A}}$ — масса молекулы, $n = N/V$ — концентрация (измеряется в 1/м^3).

3. Связь абсолютной температуры ($T = t + 273$ К) со средней кинетической энергией поступательного движения молекул:

$$<\varepsilon> = \frac{m_0 < \upsilon^2 >}{2} = \frac{3}{2}kT, \tag{35}$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

4. Средняя квадратичная скорость молекул:

$$\upsilon_{\text{кв}} = \sqrt{<\upsilon^2>} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mathrm{M}}}, \tag{36}$$

где $R = kN_{\text{А}} = 8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.

5. Уравнение состояния идеального газа в МКТ:

$$p = nkT. \tag{37}$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}}RT.$$

6. Следствия уравнения состояния. Если p_1, V_1 и T_1 описывают начальное состояние газа, а p_2, V_2 и T_2 — конечное состояние того же газа (m и М не изменились), то

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \tag{38}$$

(объединенный газовый закон). Если при этом $p_1 = p_2$ (изобарный процесс), то

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Если $V_1 = V_2$ (изохорный процесс), то

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Если $T_1 = T_2$ (изотермический процесс), то

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

7. Давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2 + \ldots, \tag{39}$$

где $p_1, p_2, \ldots$ — парциальные давления отдельных газов (закон Дальтона).

Парциальное давление — такое давление, которое создавал бы при той же температуре данный газ в отсутствие в сосуде остальных компонентов смеси.

Термодинамика

1. Первый закон термодинамики

$$Q = \Delta U + A$$

(подведенная к системе теплота идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил).

2. Количество полученной теплоты

а) при изменении температуры

$$Q = C\Delta T = cm\Delta T,$$

где C — теплоемкость тела (измеряется в Дж/К), а c — удельная теплоемкость материала (измеряется в Дж/(кг·К));

б) при плавлении (таянии) твердого тела или испарении (парообразовании) жидкости

$$Q = \lambda m, \quad Q = rm,$$

где λ — удельная теплота плавления, r — удельная теплота парообразования (измеряются в Дж/кг). При кристаллизации (замерзании) жидкости или конденсации пара теплота отбирается

$$Q = -\lambda m, \quad Q = -rm.$$

Плавление (кристаллизация) происходит при постоянной температуре, называемой температурой плавления (таяния). Таяние льда происходит при 0°С. Равновесное испарение (конденсация) происходит при температуре кипения (для воды при атмосферном давлении 100°С).

Работой твердого тела или жидкости можно пренебречь, т. е. приведенные формулы можно использовать для изменения внутренней энергии.

в) При сгорании массы m топлива выделяется теплота

$$Q = qm,$$

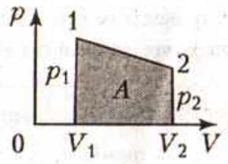
где q — удельная теплота сгорания топлива.

3. Уравнение теплового баланса. Если между телами системы происходит теплообмен, то конечная температура всех тел одинакова (состояние теплового равновесия), и ее можно найти из закона сохранения энергии:

$$Q_1 + Q_2 + ... = 0$$

(сумма полученных теплот равна сумме отданных).

4. Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. В изотермическом процессе $\Delta U = 0$, т. е. $Q = A$.



В изохорном процессе работа газа равна нулю, т. е. $Q = \Delta U$. Изменение внутренней энергии газа можно выразить через теплоемкость при постоянном объеме

$$\Delta U = c_V m \Delta T = C_{\mu V} \nu \Delta T, \tag{40}$$

где c_V — удельная теплоемкость, $C_{\mu V}$ — молярная теплоемкость.

В изобарном процессе газ совершает работу

$$A = p\Delta V = \nu R \Delta T. \tag{41}$$

Работа газа в произвольном процессе равна площади под графиком процесса в координатах (p, V). При линейной зависимости давления от объема работа газа равна

$$A = p_{\text{ср}} \Delta V = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1). \tag{42}$$

В адиабатическом процессе отсутствует теплообмен ($Q = 0$)

$$0 = \Delta U + A.$$

5. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа

$$U = \tfrac{3}{2}\nu RT.$$

Удельная теплоемкость при постоянном объеме: $c_V = \frac{3}{2}(R/\text{M})$, $C_{\mu V} = \frac{3}{2}R$.

6. В циклическом процессе ΔU за цикл равно нулю. Для любой циклической тепловой машины

$$A = Q = Q_1 - Q_2,$$

где A — работа машины за цикл, Q_1 — теплота, полученная машиной от нагревателя, Q_2 — теплота, отданная холодильнику. КПД машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \tag{43}$$

КПД идеальной (обратимой) тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{44}$$

где T_1, T_2 — абсолютные температуры нагревателя и холодильника.

7. Насыщенный пар — пар, находящийся в равновесии с жидкостью. Давление и плотность насыщенного пара зависят только от температуры.

Относительная влажность воздуха:

$$\varphi = \frac{p}{p_н} = \frac{\rho}{\rho_н},$$

где p, ρ — парциальное давление водяного пара и его плотность, $p_н$, $\rho_н$ — давление и плотность насыщенного водяного пара при той же температуре. При $t = 100°C$ давление насыщенного водяного пара равно 1 атм. Давление и плотность водяного пара связаны уравнением Менделеева–Клапейрона: $p = (\rho/M)RT$.

8. Сила поверхностного натяжения, действующая на участок границы жидкости длиной l:

$$F = \sigma l,$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения. Работа, необходимая для увеличения свободной поверхности жидкости на ΔS при постоянной температуре:

$$A = \sigma \Delta S.$$

Высота поднятия жидкости в капилляре с внутренним радиусом r:

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}, \qquad (45)$$

где θ — краевой угол. В случае полного смачивания $\theta = 0$ (жидкость поднимается), полного несмачивания $\theta = 180°$ (жидкость опускается).

Электростатика

1. Сила взаимодействия точечных зарядов (закон Кулона):

$$F = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где r – расстояние между зарядами, $k = 9{,}0\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2 — коэффициент в системе СИ ($k = 1/4\pi\varepsilon_0$, где ε_0 — электрическая постоянная), ε — диэлектрическая проницаемость среды. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются. Заряд измеряется в кулонах (Кл).

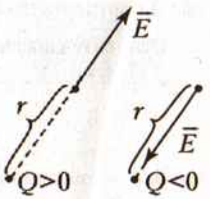
2. Закон сохранения заряда. Алгебраическая сумма зарядов в замкнутой системе $q = q_1 + q_2 + \ldots$ остается постоянной.

3. Напряженность электрического поля:

$$\vec{F}_q = q\vec{E},$$

где $\vec{F}_q$ — сила, действующая со стороны поля на заряд q. Напряженность измеряется в Н/Кл или в В/м.

Вычисление напряженности:



$$E = k\frac{|Q|}{\varepsilon r^2}, \qquad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots$$

(напряженность, создаваемая точечным зарядом Q на расстоянии r, и принцип суперпозиции для напряженности). Вектор напряженности направлен от заряда, если $Q > 0$.

4. Разность потенциалов электростатического поля:

$$A_q = q(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \tag{46}$$

где A_q — работа по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2. Эта работа не зависит от траектории перемещения (свойство потенциальности электростатического поля). Потенциал и разность потенциалов измеряются в вольтах (В).

Разность потенциалов между точками, лежащими на одной силовой линии однородного поля:

$$U = Ed$$

При перемещении вдоль силовой линии потенциал убывает.

Вычисление потенциала:

$$\varphi = k\frac{Q}{\varepsilon r}, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$$

(потенциал, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r, и принцип суперпозиции для потенциала).

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов:

$$W = k\frac{q_1 q_2}{r}\,, \tag{47}$$

где r — расстояние между зарядами.

5. Потенциал проводящего шара радиусом R с зарядом Q:

$$\varphi = k\frac{Q}{R}.$$

6. Емкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}\,,$$

где q — заряд конденсатора, U — напряжение на конденсаторе (разность потенциалов между его обкладками). Емкость измеряется в фарадах (Ф).

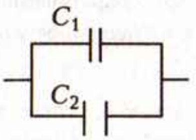
Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$$

где S – лощадь пластин, d – расстояние между ними.

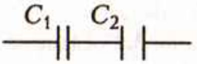
Соединение конденсаторов.

а) параллельное



$$U_1 = U_2 = U, \qquad q = q_1 + q_2, \qquad C = C_1 + C_2;$$

б) последовательное



$$q_1 = q_2 = q, \qquad U = U_1 + U_2, \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

7. Энергия поля в конденсаторе:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Плотность энергии поля

$$\frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \tag{48}$$

Постоянный ток

1. Сила тока:

$$I = \frac{q}{t}.$$

где q — заряд, прошедший через сечение проводника за время t. Сила тока измеряется в амперах (А).

Средняя сила тока при равномерном его изменении:

$$I_{\text{ср}} = \frac{I_1 + I_2}{2}, \tag{49}$$

где I_1 — начальное, а I_2 — конечное значение силы тока.

2. Закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{1}{R} U,$$

где U — напряжение на концах участка, R — сопротивление (измеряется в омах: Ом).

Сопротивление цилиндрического проводника:

$$R = \rho \frac{l}{s}, \qquad (50)$$

где l — длина проводника, s — площадь его поперечного сечения, ρ — удельное сопротивление материала проводника (измеряется в Ом·м).

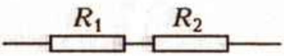
Зависимость сопротивления от температуры:

$$R = R_0(1 + \alpha t), \qquad (51)$$

где R — сопротивление при температуре t (в °С), R_0 — сопротивление при 0°С, α — температурный коэффициент сопротивления (измеряется в 1/К).

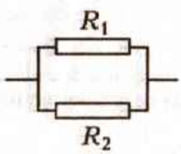
3. Соединение сопротивлений

а) последовательное:



$I_1 = I_2 = I$, $U = U_1 + U_2$, $R = R_1 + R_2$;

б) параллельное:



$U_1 = U_2 = U$, $I = I_1 + I_2$, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.

4. Теплота, выделяющаяся на сопротивлении за время t:

$$Q = I^2Rt$$

(закон Джоуля–Ленца). Для однородного участка цепи также верны формулы $Q = UIt = (U^2/R)t$.

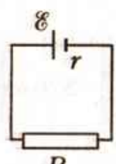
Мощность тока (на однородном участке цепи):

$$P = UI = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

Номинальная мощность и номинальное напряжение прибора:

$$P_н = \frac{U_н^2}{R}.$$

5. Закон Ома для полной цепи:



$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + R},$$

где R — внешнее сопротивление, r — внутреннее сопротивление источника тока, $\mathscr{E}$ — его электродвижущая сила, или ЭДС (измеряется в вольтах).

Ток короткого замыкания $I_{кз} = \mathscr{E}/r$. Напряжение на зажимах источника $U = IR$.

6. Батарея из N одинаковых источников ($\mathcal{E}$, r). ЭДС и внутреннее сопротивление батареи равны:

а) при последовательном соединении ($N\mathcal{E}$, Nr);

б) при параллельном сопротивлении ($\mathcal{E}$, r/N).

7. Полная (затраченная) мощность источника тока:

$$P_{\text{полн}} = \mathcal{E}I, \tag{52}$$

потерянная в источнике тепловая мощность

$$P_{\text{потер}} = I^2 r,$$

переданная во внешнюю цепь (полезная) мощность:

$$P_{\text{полезн}} = \mathcal{E}I - I^2 r = UI, \tag{53}$$

где U — напряжение на зажимах источника.

Если внешняя цепь состоит только из сопротивления R, то

$$P_{\text{полезн}} = I^2 R, \quad P_{\text{полн}} = I^2 R + I^2 r. \tag{54}$$

Полезная мощность максимальна при $R = r$. Если на сопротивлениях R_1 и R_2 выделяется одинаковая мощность, то $R_1 R_2 = r^2$.

КПД источника тока:

$$\eta = \frac{P_{\text{полезн}}}{P_{\text{полн}}} = \frac{R}{r+R}. \tag{55}$$

8. Выделяемая при электролизе масса (первый закон Фарадея):

$$m = kq = kIt,$$

где k — электрохимический эквивалент вещества (измеряется в кг/Кл). Второй закон Фарадея:

$$k = \frac{1}{F}\frac{A}{n},$$

где $F = eN_{\text{A}} = 96500$ Кл/моль — постоянная Фарадея, A — молярная (атомная) масса иона, n — его валентность.

КПД электролиза (при потере части массы):

$$\eta = \frac{m}{kq}.$$

Магнетизм

1. Сила, действующая на проводник с током длиной l в магнитном поле (закон Ампера):

$$F = IBl\sin\alpha,$$

где B — индукция магнитного поля (измеряется в тесла: Тл), α — угол между проводником и вектором $\vec{B}$. Сила направлена перпендикулярно как току, так и вектору $\vec{B}$.

2. Максимальный вращательный момент M, действующий на рамку с током в магнитном поле:

$$M = ISB,$$

где I — сила тока в рамке, S — ее площадь.

3. Сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле (сила Лоренца):

$$F = qvB\sin\alpha,$$

где q — заряд частицы, v — ее скорость, α — угол между скоростью частицы и вектором $\vec{B}$. Сила направлена перпендикулярно векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

4. Магнитный поток Φ через замкнутый контур (измеряется в веберах: Вб):

$$\Phi = BS\cos\theta \text{ (один виток)}, \quad \Phi = NBS\cos\theta \text{ (}N\text{ витков)},$$

где S — площадь контура, θ — угол между вектором индукции и нормалью $\vec{n}$ к контуру.

5. Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея):

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi'(t)$$

(наведенная в контуре ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока). Направление ЭДС определяется правилом Ленца: ЭДС направлена так, чтобы уменьшить скорость изменения потока. Направление $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ можно также найти по ее знаку (положительное направление обхода контура выбирается так, чтобы при вращении буравчика в этом направлении он двигался в направлении нормали $\vec{n}$).

Среднее значение ЭДС индукции за конечное время Δt:

$$\mathscr{E}_{\text{ср}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — изменение магнитного потока за это время.

Примеры.

а) Контур неподвижен, поле меняется со скоростью $\Delta B/\Delta t$:

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t}\cos\theta, \tag{56}$$

где N — число витков в обмотке.

б) Контур вращается в однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} &\Phi = NBS\cos\omega t, \\ &\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\Phi'(t) = \omega NBS\sin\omega t, \quad \mathscr{E}_{\max} = \omega\Phi_{\max} = \omega NBS, \end{aligned} \tag{57}$$

где ω — угловая скорость вращения контура.

в) ЭДС и разность потенциалов на концах проводника, движущегося в магнитном поле:

$$\mathscr{E} = \left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = Bvl\sin\alpha\,, \tag{58}$$

где v — скорость проводника, l — его длина, α — угол между скоростью и магнитной индукцией.

6. Заряд q, проходящий через контур при изменении магнитного потока:

$$q = \left|\frac{\Delta\Phi}{R}\right|, \tag{59}$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ — изменение магнитного потока, R — сопротивление контура.

7. Магнитный поток через контур, создаваемый собственным током контура:

$$\Phi = LI,$$

где L — коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура (измеряется в генри: Гн).

ЭДС самоиндукции, возникающая при изменении тока

$$\mathscr{E}_{сам} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

пропорциональна скорости изменения силы тока. Средняя ЭДС самоиндукции за конечное время Δt равна

$$\mathscr{E}_{ср} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где $\Delta I = I_2 - I_1$ — изменение силы тока за это время.

8. Энергия магнитного поля, создаваемого контуром с током:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{60}$$

Колебания и волны

1. Смещение точки при гармонических колебаниях:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A — амплитуда колебаний, ω — циклическая (круговая) частота (измеряется в рад/с), φ_0 — начальная фаза (в рад). Период T и частота ν колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Частота ν измеряется в герцах (Гц = 1/с). За время T точка проходит путь $4A$.

2. Скорость точки при гармонических колебаниях:

$$v = x'(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0). \tag{61}$$

Амплитуда колебаний скорости (максимальная скорость):

$$v_{max} = \omega A.$$

Ускорение точки:

$$a = v'(t) = x''(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{62}$$

Максимальное ускорение:

$$a_{max} = \omega^2 A.$$

3. Уравнение гармонических колебаний:

$$x'' + \omega^2 x = 0. \tag{63}$$

4. Возвращающая сила:

$$F = ma = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -k_{ef} x, \tag{64}$$

где $k_{ef} = m\omega^2$ — эффективная жесткость колебательной системы (в случае груза на пружине $k_{ef} = k$). Максимальное значение возвращающей силы равно $m\omega^2 A$.

5. Циклическая частота и период колебаний груза на пружине жесткостью k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Циклическая частота и период колебаний математического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

6. Кинетическая, потенциальная и полная энергия колебаний:

$$\begin{aligned}
E_{кин} &= \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)}{2} = E\sin^2(\omega t + \varphi_0),\\
E_{пот} &= \frac{k_{ef} x^2}{2} = \frac{k_{ef} A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)}{2} = E\cos^2(\omega t + \varphi_0),\\
E &= \frac{mv^2}{2} + \frac{k_{ef} x^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{k_{ef} A^2}{2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

7. Циклическая частота и период собственных колебаний контура (формула Томсона):

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Связь между амплитудными (максимальными) значениями тока и напряжения в контуре:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}$$

(закон сохранения энергии).

8. Отношение напряжений на вторичной и первичной обмотках идеального трансформатора:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

где N_1, N_2 — число витков в первичной и вторичной обмотках.

Закон сохранения энергии для идеального трансформатора:

$$U_1 I_1 = U_2 I_2$$

(равенство мощностей в обмотках). КПД неидеального трансформатора:

$$\eta = \frac{U_2 I_2}{U_1 I_1}.$$

9. Средняя по времени тепловая мощность переменного тока:

$$P = I_д^2 R = \frac{U_д^2}{R}, \tag{66}$$

где $I_д$, $U_д$ — действующие значения тока и напряжения. Для синусоидального переменного тока

$$I_д = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \qquad U_д = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \tag{67}$$

где I_0, U_0 — амплитудные (максимальные) значения тока и напряжения.

10. Закон Ома для участков цепи, содержащих емкость или индуктивность (емкостное и индуктивное сопротивление):

$$U_0 = \frac{1}{\omega C} \cdot I_0, \qquad U_0 = \omega L \cdot I_0. \tag{68}$$

11. Связь между длиной волны λ и частотой колебаний ν:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT,$$

где v — скорость волны (для электромагнитных волн $v = c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света), ν — частота, а $T = 1/\nu$ — период колебаний точек волны.

12. Разность фаз колебаний двух точек волны, расстояние между которыми l:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{l}{\lambda}.$$

Ближайшие точки, совершающие колебания в фазе, расположены на расстоянии λ, в противофазе — на расстоянии $\lambda/2$.

13. Условия максимума при интерференции двух волн:

$$\Delta\varphi = m\pi, \quad \Delta l = m\lambda, \tag{69}$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз интерферирующих волн в данной точке, Δl — разность хода двух волн от когерентных синфазных источников. Условия минимума: $\Delta\varphi = (m+1/2)\pi$, $\Delta l = (m+1/2)\lambda$.

Оптика и атомная физика

1. Скорость света в среде:

$$v = \frac{c}{n},$$

где c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления среды. При переходе волны из вакуума в среду частота колебаний не меняется, а длина волны уменьшается в n раз.

2. Главные максимумы дифракционной решетки:

$$d \sin\alpha_k = k\lambda\ , \tag{70}$$

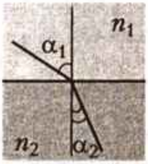
где d — постоянная решетки, k — порядок спектра, α_k — угол, под которым наблюдается k-й максимум.

3. Закон преломления света:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \tag{71}$$

где α_1 — угол падения в среде 1, α_2 — угол преломления в среде 2, n_{21} — показатель преломления второй среды относительно первой. Углы отсчитываются от нормали к поверхности раздела.

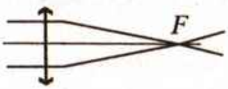
4. Предельный угол полного отражения:

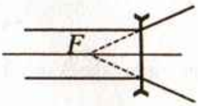


$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n}. \tag{72}$$

Полное отражение наблюдается при падении луча на границу раздела с оптически менее плотной средой (например, из среды в вакуум) под углом, большим $\alpha_{\text{пр}}$.

5. Пучок лучей, параллельных главной оптической оси, собирается в фокусе: Ход лучей в линзе является обратимым.





6. Формула тонкой линзы:

$$\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm \frac{1}{F} \quad (= D), \tag{73}$$

где d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от изображения до линзы, F — фокусное расстояние линзы, D — оптическая сила линзы (измеряется диоптриях, дптр = 1/м). Знак перед $1/F$: (+) для собирающей линзы, (–) для рассеивающей. Знак перед $1/f$: (+) в случае действительного изображения, (–) в случае мнимого. Действительное изображение предмета формируется только собирающей линзой при $d > F$.

7. Увеличение линзы равно отношению размеров изображения l' к размерам предмета l. Поперечное увеличение равно

$$\Gamma = \frac{l'}{l} = \frac{f}{d}. \tag{74}$$

8. Связь между массой и энергией (формула Эйнштейна):

$$E = mc^2.$$

9. Квантовые свойства света:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \qquad p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{75}$$

(энергия и импульс кванта света — фотона). $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

10. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} \qquad (76)$$

(максимальная кинетическая энергия электронов, вылетевших из металла, равна энергии падающего фотона минус работа выхода электрона из металла).

Работа выхода связана с красной границей фотоэффекта (максимальная длина волны света, вызывающего фотоэффект):

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}} = A_{\text{вых}}. \qquad (77)$$

Максимальная кинетическая энергия выражается через задерживающее напряжение:

$$\left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\max} = eU_{\text{зад}}. \qquad (78)$$

11. Уравнение движения электрона в атоме водорода:

$$k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Энергия электрона на n-ой орбите:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}, \qquad (79)$$

где E_1 — энергия нормального (основного) состояния, $|E_1| = 13{,}6$ эВ — энергия ионизации атома водорода.

Закон сохранения энергии при излучении (поглощении) кванта света:

$$h\nu = E_k - E_n.$$

12. Уравнение α-распада (α-частица — ядро атома гелия):

$${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\alpha,$$

где A — массовое число, равное числу протонов Z плюс число нейтронов N.

Уравнение β-распада (β–частица — электрон):

$${}^{A}_{Z}X \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{-1}\beta.$$

Другие частицы: протон ${}_1^1p$, нейтрон ${}_0^1n$, позитрон e^+ (${}_1^0e$) — античастица электрона e$^-$ (${}_{-1}^{0}e$).

В любой реакции сохраняются сумма массовых чисел и полный заряд.

13. Число радиоактивных ядер в момент времени t:

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}},$$

где $T_{1/2}$ — период полураспада (закон радиоактивного распада).

14. Энергия связи ядра выражается через дефект массы (разность между суммой масс нуклонов и массой ядра):

$$E_{\text{св}} = (Nm_{\text{n}} + Zm_{\text{p}} - m_{\text{яд}})c^2,$$

где m_{n} — масса нейтрона, m_{p} — масса протона.

Оглавление