$$q = Ne$$

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}$$

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

$$E = \frac{F}{q} \qquad E = k\frac{|q|}{\varepsilon r^2}$$

$$\Phi = ES\cos\alpha$$

$$\Phi = \int_S E_n dS$$

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{N} q_i$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} \qquad \sigma = \frac{q}{S}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \qquad E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$$

$$\tau = \frac{q}{l}$$

$$\rho = \frac{q}{V}$$

$$A = Eqd$$

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$A = qU \qquad \varphi = \frac{W_\text{п}}{q}$$

$$\varphi = k\frac{|q|}{\varepsilon r} \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = U$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}$$

$$U = \frac{A}{q}$$

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \qquad E = \frac{U}{d}$$

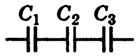
$$\varphi = Er \qquad \varepsilon = \frac{E_\text{в вакууме}}{E_\text{в среде}}$$

$$C = \frac{q}{\varphi} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$$

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \qquad C = \frac{q}{U}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$$

$$\boxed{\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \qquad \text{Ф} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}}$$



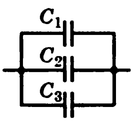
q одинаково

$$U_\text{общ} = U_1 + U_2 + \ldots + U_N$$

$$\frac{1}{C_\text{общ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

$$U_\text{общ} = NU_1$$

$$C_\text{общ} = \frac{C_1}{N}$$



U одинаково

$$q_\text{общ} = q_1 + q_2 + \ldots + q_N$$

$$C_\text{общ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

$$q_\text{общ} = Nq_1$$

$$C_\text{общ} = NC_1$$

$$W_\text{эл} = \frac{q\varphi}{2} \qquad W_\text{эл} = \frac{C\varphi^2}{2}$$

$$W_\text{эл} = \frac{q^2}{2C} \qquad W_\text{эл} = \frac{qU}{2}$$

$$W_\text{эл} = \frac{CU^2}{2}$$

$$\omega_\text{эл} = \frac{W_\text{эл}}{V}$$

$$\omega_\text{эл} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}$$

$$I = \frac{q}{t} \qquad I = \frac{dq}{dt} = q'$$

$$I = nevS \qquad j = \frac{I}{S}$$

$$j = nev$$

$$R = \frac{U}{I} \qquad R = \rho\frac{l}{S}$$

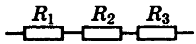
$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t^\circ)$$

$$R = R_0(1 + \alpha t^\circ)$$

$$G = \frac{1}{R} \qquad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$I = \frac{U}{R} \qquad j = \frac{1}{\rho}E$$

$$j = \sigma E$$



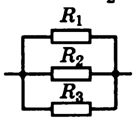
I одинакова

$$U_\text{общ} = U_1 + U_2 + \ldots + U_N$$

$$R_\text{общ} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N$$

$$U_\text{общ} = NU_1$$

$$R_\text{общ} = NR_1 \qquad \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



U одинаково

$$I_\text{общ} = I_1 + I_2 + \ldots + I_N$$

$$\frac{1}{R_\text{общ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}$$

$$I_\text{общ} = NI_1 \qquad R_\text{общ} = \frac{R_1}{N}$$

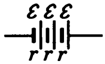
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \mathcal{E} = \frac{A_\text{ст. сил}}{q}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$$

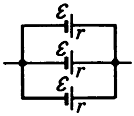
$$\mathcal{E} = U_\text{внеш} + U_\text{внутр}$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$



$$I = \frac{N\mathcal{E}}{R + Nr}$$



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{N}}$$

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

$$A = UIt$$

$$A = Pt$$

$$A = I^2Rt$$

$$A = \frac{U^2}{R}t$$

$$P = \frac{A}{t}$$

$$P = UI$$

$$P = I^2R$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$Q = I^2Rt$$

$$Q = \frac{U^2}{R}t$$

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{E}}100\%$$

$$\eta = \frac{R}{R + r}100\%$$

$$m = kq \quad m = kIt$$

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{n}It$$

$$F = eN_A$$

$$\boxed{\text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}} \qquad \text{См} = \frac{1}{\text{Ом}}}$$

$$\boxed{\text{Дж} = \text{В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} \qquad \text{Вт} = \text{В} \cdot \text{А}}$$

$$B = \frac{M_{\max}}{IS}$$

$$B = \frac{F_{\max}}{Il}$$

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2\pi d}$$

$$B = \mu_0\mu\frac{I}{2R}$$

$$B = \mu_0\mu\frac{N}{l}I$$

$$n = \frac{N}{l}$$

$$B = \mu_0\mu nI$$

$$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$$

$$F_{\text{А}} = BIl\sin\alpha$$

$$F_{\text{Л}} = Bqv\sin\alpha$$

$$M = BIS\sin\alpha$$

$$\Phi = BS\cos\alpha$$

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

$$\mu = \frac{B_{\text{в магнетике}}}{B_{\text{в вакууме}}}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}N = -\Phi' N$$

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} \quad \mathcal{E}_i = Bvl\sin\alpha$$

$$\mathcal{E}_m = Bvl$$

$$\mathcal{E}_i = B\omega SN\sin\alpha$$

$$\mathcal{E}_m = B\omega SN \quad \Phi = LI$$

$$L = \mu_0\mu\frac{N^2}{l}S$$

$$L = \mu_0\mu n^2 lS$$

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{dI}{dt} = -LI'$$

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}$$

$$\omega_{\text{м}} = \frac{W_{\text{м}}}{V}$$

$$\omega_{\text{м}} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$$

$$x = A\cos\alpha$$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\nu = \frac{1}{T}$$

$$\nu = \frac{N}{t}$$

$$T = \frac{t}{N}$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$v = x' = -\omega A\sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$v_m = \omega A$$

$$a = v' = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$a_m = \omega^2 A$$

И. Л. Касаткина

РЕПЕТИТОР ПО ФИЗИКЕ

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
ОПТИКА
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
ФИЗИКА АТОМА И АТОМНОГО ЯДРА

Под ред. Т. В. Шкиль

Издание четвертое, дополненное и исправленное

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2004

ББК 22.3 Я72
К 38

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования Ростовской области в качестве учебного пособия для студентов и учащихся общеобразовательных учреждений общего и профессионального образования

Рецензент:
профессор П. Н. Тищенко

Консультанты:
генерал-майор Ю. А. Гордеев,
доктор технических наук В. В. Хуторцев

Касаткина И. Л.
К 38 Репетитор по физике. Электромагнетизм. Колебания и волны. Оптика. Элементы теории относительности. Физика атома и атомного ядра. Изд-е 4-е, исправленное и переработанное. / Под ред. Т. В. Шкиль. — Ростов н/Д: изд-во «Феникс», 2004. — 832 с.

В пособии даны методические указания к решению задач физики, изучаемой в 9—10-х классах средней школы и младших курсов вузов. Рассмотрено решение множества задач как средней, так и повышенной трудности. Предложено большое количество задач для самостоятельного решения.

Пособие незаменимо в процессе учебы, при подготовке к контрольным работам, государственному централизованному тестированию и экзаменам. Оно окажет большую помощь старшеклассникам и студентам в течение всего учебного процесса, а также всем, кто занимается самообразованием и сдает экзамены экстерном.

ISBN 5-222-05156-0 ББК 22.3 Я72

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

1. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯДОВ. ЗАКОН КУЛОНА

Решение задач о взаимодействии двух или более точечных зарядов чаще всего основывается на применении закона Кулона.

Закон Кулона: сила взаимодействия двух покоящихся точечных электрических зарядов прямо пропорциональна произведению модулей этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Эта сила направлена вдоль прямой, соединяющей заряды. Ее величина зависит от диэлектрических свойств среды, в которой заряды взаимодействуют:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon\, r^2}.$$

Поскольку $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, то в рационализованном виде

$$F = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, r^2}. \qquad (1.1)$$

Здесь F – сила взаимодействия только точечных зарядов или заряженных равномерно шаров, $k = 9\cdot10^9$ Н·м²/Кл², $|q_1|$ и $|q_2|$ – модули зарядов, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Кл²/Н·м² (или Ф/м) – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, в которой взаимодействуют заряды q_1 и q_2 ($\varepsilon_{вакуума} = 1$, $\varepsilon_{воздуха} \approx 1$). Относительную диэлектрическую проницаемость других веществ можно найти в соответствующих таблицах.

Если при взаимодействии зарядов между ними устанавливается равновесие или возникает движение зарядов, то к закону Кулона можно добавить законы механики. Если заряды (заряженные тела) покоятся или движутся равномерно, то применяем первый закон Ньютона, а если они движутся с ускорением, то второй. Если при взаимодействии заряженных тел между ними происходит перераспределение зарядов, то к закону Кулона добавляем закон сохранения зарядов, согласно которому общий заряд системы не меняется при любых перераспределениях зарядов внутри системы. При этом следует учитывать знаки зарядов. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются.

Решать задачи на применение закона Кулона к системе точечных зарядов можно в следующем порядке:

а) выполнить крупный рисунок, на котором обозначить все заряды системы и изобразить векторы приложенных к ним сил, обозначив каждую силу буквой с индексом, соответствующим индексу заряда; при этом следует знать, что силами тяжести электронов (за редким исключением) можно пренебречь, так как они несравненно меньше кулоновских сил взаимодействия этих частиц;

б) если заряд находится в равновесии, то все силы, приложенные к нему, должны быть скомпенсированы, поэтому можно выбрать направление, на которое спроецировать все эти силы и их алгебраическую сумму приравнять нулю или модули антинаправленных сил приравнять друг другу;

в) записать систему уравнений, соответствующих условию равновесия, и решить ее относительно искомой величины. Непременно проверить единицу измерения, переведя все единицы в одну систему, желательно в СИ. Правда, в целях экономии бумаги мы такую проверку делали только в сложных случаях, но вам советуем делать это всегда.

При решении задач мы везде записывали закон Кулона в рационализованном виде.

Внимание! Обозначая заряды q_1 и q_2, мы не ставили возле них вертикальные черточки, имея в виду, что q_1 и q_2 – только модули зарядов, а знаки их мы учитывали при выборе направления действующих на заряды электрических сил. Если вы тоже не будете ставить эти черточки, то непременно уточните, что q_1 и q_2 – модули зарядов, иначе могут посчитать их отсутствие за ошибку. Правда, во многих учебниках и учебных пособиях эти черточки в записи закона Кулона отсутствуют. Но ведь их авторам экзамены не сдавать.

Если в условии задачи ничего не сказано о среде, в которой взаимодействуют заряды, значит, этой средой является вакуум или воздух и ее относительную диэлектрическую проницаемость можно считать равной единице.

Закон Кулона в записи, приведенной выше, справедлив также применительно к заряженным телам сферической формы. В этом случае r – расстояние между их центрами (рис. 1-1, *а*).

Если в условии вашей задачи говорится о расстоянии l между поверхностями шаров или расстоянии от точечного заряда до поверхности шара (рис. 1-1), то в формуле закона Кулона $r = l + R_1 + R_2$ (см. рис. 1-1, *а*) или $r = R + l$ (рис. 1-1, б).

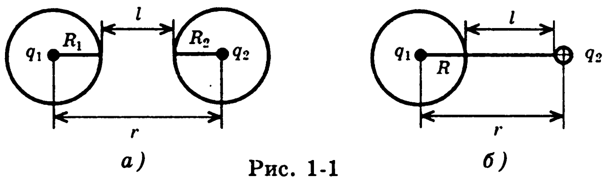


Рис. 1-1

Если на данный заряд q действует N точечных зарядов q_1, q_2, q_3, ..., q_N, то сила $\vec{F}$, с которой все они вместе действуют на заряд q, по принципу суперпозиции равна векторной сумме сил, действующих на заряд q со стороны каждого заряда в отдельности:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_N .$$

Для нахождения равнодействующей силы $\vec{F}$ в каждом конкретном случае нужно показать все силы, приложенные к заряду q со стороны каждого заряда в отдельности, с учетом знаков взаимодействующих зарядов. При этом вектор каждой силы должен быть направлен вдоль прямой, проходящей через заряд q, и заряд, со стороны которого эта сила действует на заряд q. Показав каждую силу, действующую на заряд q со стороны каждого отдельного заряда, можно произвести векторное сложение сил, пользуясь правилами сложения векторов (обычно правилом параллелограмма сил). Если заряд q и действующие на него заряды q_1, q_2, q_3, ..., q_N находятся на одной прямой, то для определения величины силы F, действующей на заряд q, достаточно произвести алгебраическое сложение сил F_1, F_2, F_3, ..., F_N с учетом их направления (т. е. с учетом знаков перед ними). Если же силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_N$, приложенные к заряду q, действуют под углом друг к другу, то для определения величины равнодействующей силы $\vec{F}$ придется пользоваться соответствующими формулами тригонометрии, теоремой Пифагора или теоремой косинусов.

Количество нескомпенсированных элементарных зарядов N (протонов или электронов) на теле можно определить, разделив весь заряд тела q на элементарный заряд (заряд электрона или протона): $N = \frac{q}{e}$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд, поскольку любой электрический заряд на теле всегда является кратным элементарному заряду e (заряду электрона или протона). Напомним, что заряд электрона отрицательный, а протона – положительный, но по модулю они друг другу равны. Поэтому любой заряд q можно представить в виде произведения числа элементарных зарядов N, содержащихся в нем, и величины элементарного заряда e:

$q = Ne$, где $N = 1, 2, 3, \ldots$ – целое число.

Если число электронов в проводнике больше, чем число протонов в ядрах атомов этого проводника, то проводник несет избыточный отрицательный заряд, а если наоборот, то положительный.

Если два одинаковых по форме и размерам проводника, заряженных одинаковыми по модулю, но разноименными зарядами, привести в соприкосновение, то алгебраическая сумма их зарядов станет равна нулю, так как разноименные заряды нейтрализуют друг друга, и проводники окажутся незаряженными. Когда говорят «одинаковые проводники», то имеют в виду, что они имеют одинаковые размеры и форму, а также находятся в одной и той же среде. Если один из таких проводников заряжен зарядом q и приведен в соприкосновение с другим незаряженным проводником, то в результате соприкосновения заряд q распределится поровну между ними, т. е. на каждом таком проводнике окажется заряд $q/2$.

Если на одинаковых проводниках были разные заряды q_1 и q_2, то после соприкосновения они перераспределятся так, что заряды проводников станут одинаковыми.

Чем больше объем одного незаряженного проводника по сравнению с другим заряженным, тем больший заряд перейдет на него при их соприкосновении. Если объем незаряженного проводника во много раз больше объема заряженного, то практически весь заряд перейдет на незаряженный проводник.

Для характеристики распределения заряда вдоль нити вводят понятие линейной плотности заряда.

Определение линейной плотности заряда τ: линейная плотность заряда, равномерно распределенного по нити, равна отношению заряда нити q к ее длине l:

$$\tau = \frac{q}{l}. \qquad (1.2)$$

Для характеристики распределения заряда по поверхности вводят понятие поверхностной плотности заряда.

Определение поверхностной плотности заряда σ: поверхностная плотность заряда равна отношению заряда q, равномерно распределенного по поверхности, к площади S этой поверхности:

$$\sigma = \frac{q}{S}. \quad (1.3)$$

Для характеристики распределения заряда в некотором объеме вводят понятие объемной плотности заряда.

Определение объемной плотности заряда ρ: объемная плотность заряда q, равномерно распределенного в объеме V, равна отношению заряда к объему, в котором он распределен:

$$\rho = \frac{q}{V}. \quad (1.4)$$

Рассмотрим примеры на принцип суперпозиции сил.

Пример 1. Точечный заряд q помещен в точку O (рис. 1-2, *а*). В точках 1 и 2 находятся точечные заряды q_1 и q_2, которые действуют на заряд q с силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Равнодействующая этих сил в векторной записи $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, в скалярной $F = F_1 - F_2$.

При этом $F_1 = \dfrac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}$ и $F_2 = \dfrac{q_2 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon (r_1 + r_2)^2}$.

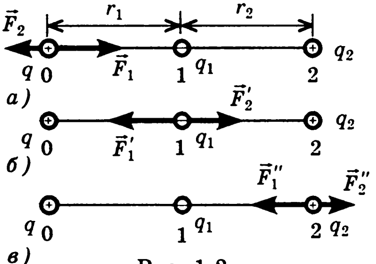


Рис. 1-2

Знак перед равнодействующей силой F определяется модулями зарядов q_1 и q_2 и расстояниями r_1 и r_2. Поэтому, если перед F при вычислениях вдруг появится знак «минус», поменяйте местами силы F_1 и F_2.

На рис. 1-2, б) показаны силы, действующие на заряд q_1 со стороны зарядов q и q_2. Их равнодействующая F' может быть определена следующим образом (здесь штрих – просто индекс, а не знак производной):

$$F' = F_1' - F_2', \text{ где } F_2' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}, \quad F_1' = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}.$$

На рис. 1-2, в) показаны силы, действующие на заряд q_2 со стороны зарядов q и q_1. Их равнодействующая F'' может быть определена так:

$$F'' = F_1'' - F_2'', \text{ где } F_1'' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}, \quad F_2'' = \frac{q_2 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon (r_1 + r_2)^2}.$$

Пример 2. В вершинах равностороннего треугольника находятся одинаковые положительные заряды q. В центр этого треугольника помещен отрицательный заряд $-q_0$ (в точку пересечения его биссектрис, медиан и высот) (рис. 1-3).

Определим силу, действующую на заряд q в вершине m со стороны остальных зарядов. На заряд q в вершине треугольника действует равнодействующая $\vec{F}_{1,2}$ сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которую можно определить, выполнив векторное сложение сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующих на него со стороны двух других зарядов, расположенных в вершинах треугольника, и силы $\vec{F}_0$, действующей на этот заряд со стороны заряда q_0 в центре треугольника. Тогда равнодействующая всех этих сил в векторной записи

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_0.$$

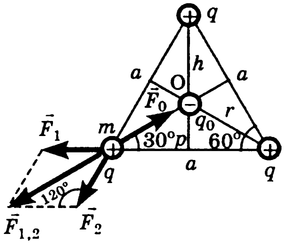


Рис. 1-3

Для определения модуля $\vec{F}$ можно сначала сложить по правилу параллелограмма силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю друг другу и определяемые по закону Кулона формулой

$$F_1 = F_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}.$$

Здесь a – сторона треугольника.

Равнодействующая $\vec{F}_{1,2}$ сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ является диагональю параллелограмма, построенного на силах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как на сторонах. Поскольку наш треугольник равносторонний, то все его углы равны 60°. Несложно доказать, что равнодействующая $\vec{F}_{1,2}$ лежит против угла 120°, поэтому ее величина может быть найдена по теореме косинусов

$$F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos 120°} = F_1\sqrt{2(1+\cos 60°)},$$

так как $F_1 = F_2$ $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60°$.

Очевидно, что равнодействующая $\vec{F}_{1,2}$ антинаправлена силе $\vec{F}_0$, действующей на заряд q со стороны заряда q_0, поэтому равнодействующая $\vec{F}$ всех сил, действующих на заряд q, по модулю равна разности сил $F_{1,2}$ и F_0:

$$F = F_{1,2} - F_0. \tag{1.5}$$

По закону Кулона $F_0 = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Здесь r – расстояние от вершины треугольника до его центра. Это расстояние можно определить, используя теоремы геометрии. Известно, что расстояние r составляет $\frac{2}{3}$ высоты треугольника h, которая из прямоугольного треугольника mOp равна: $a\sin 60°$, поэтому

$$r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}a\sin 60°.$$

Осталось подставить значения $F_{1,2}$ и F_0 в формулу (1.5), и сила F, действующая на заряд q со стороны всех других зарядов системы, будет определена. Если же заряд q в равновесии, то $F = 0$ и $F_{1,2} = F_0$.

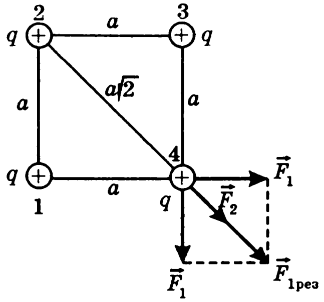


Рис. 1-4

Пример 3. В вершинах квадрата находятся одинаковые по модулю положительные заряды q (рис. 1-4). Определим результирующую силу F, с которой три заряда действуют на четвертый.

На заряд q в вершине квадрата 4 действуют с равными по модулю силами F_1 заряды в вершинах 1 и 3. Пусть сторона квадрата a. Тогда

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}.$$

Равнодействующую двух сил F_1, которую мы обозначили $F_{1рез}$, определим по теореме Пифагора:

$$F_{1рез} = \sqrt{F_1^2 + F_1^2} = \sqrt{2F_1^2} = F_1\sqrt{2} = 1{,}4\,F_1 = \frac{1{,}4\,q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} = 0{,}35\frac{q^2}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}.$$

Со стороны заряда q в вершине 2 на заряд q в вершине 4 действует сила F_2. Заряд q в вершине 2 расположен на расстоянии $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ от заряда q в вершине 4. Тогда по закону Кулона $F_2 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} = 0{,}125\dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$.

Поскольку силы $F_{рез1}$ и F_2 сонаправлены, общая результирующая сила, действующая на заряд q в четвертой вершине со стороны остальных трех зарядов,

$$F = F_{1рез} + F_2 = 0{,}35\frac{q^2}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2} + 0{,}125\frac{q^2}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2} = 0{,}475\frac{q^2}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}.$$

Если на некоторый заряд q, кроме силы Кулона, действуют другие силы, например, силы тяжести, натяжения, упругости и т. п., то равнодействующая сила будет равна векторной сумме всех сил, включая и силу Кулона. При этом, если говорится, что заряд q находится в равновесии или движется равномерно и прямолинейно, то по первому закону Ньютона все силы, действующие на него, уравновешены, т. е. их равнодействующая равна нулю. Если же они не уравновешены, то заряд q движется с ускорением a, которое по второму закону Ньютона равно отношению равнодействующей F сил, действующих на этот заряд, к массе m тела или частицы, несущей заряд q: $a = \dfrac{F}{m}$.

Если при этом заряд q движется равномерно по окружности, то равнодействующая $\vec{F}$ направлена по радиусу к центру окружности, поэтому заряд движется с центростремительным ускорением $\vec{a}_ц$, направленным тоже по радиусу к центру окружности перпендикулярно вектору линейной скорости $\vec{v}$ заряда.

Рассмотрим примеры применения законов динамики в задачах электростатики.

Пример 4. Два малых шарика массами m_1 и m_2, несущие заряды q_1 и q_2, висят на нити (рис. 1-5). Поскольку они покоятся, то силы, действующие на каждый шарик, уравновешены. На нижний шарик действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения $\vec{F}_{н1}$. Кроме того, на него действует кулонова сила $\vec{F}_к$, которая, если заряды на шариках одноименные (рис. 1-5, *а*), направлена вниз, поскольку шарики отталкиваются друг от друга. Тогда применительно к нижнему шарику первый закон Ньютона можно записать следующим образом:

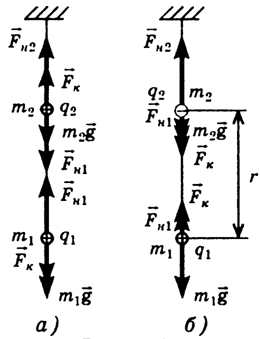


Рис. 1-5

в векторном виде $m_1\vec{g} + \vec{F}_к + \vec{F}_{н1} = 0$,

в скалярном виде $m_1 g + F_к = F_{н1}$.

На верхний шарик действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила натяжения со стороны нижней нити $\vec{F}_{н1}$, сила натяжения со стороны верхней нити $\vec{F}_{н2}$ и сила Кулона $\vec{F}_к$, которая теперь направлена вверх. С учетом направления этих сил первый закон Ньютона применительно к этому шарику запишем следующим образом:

в векторном виде $m_2\vec{g} + \vec{F}_{н1} + \vec{F}_{н2} + \vec{F}_к = 0$,

в скалярном виде $m_2 g + F_{н1} = F_{н2} + F_к$.

Если заряды q_1 и q_2 разноименные, то теперь они будут притягиваться, поэтому направления сил Кулона, действующих на каждый шарик со стороны другого, изменятся на противоположные (рис. 1-5, б). Теперь запись первого закона Ньютона применительно к нижнему шарику будет:

в векторном виде (по-прежнему) $m_1\vec{g} + \vec{F}_{н1} + \vec{F}_к = 0$,

в скалярном виде $m_1 g = F_к + F_{н1}$.

Применительно к верхнему шарику этот же закон выглядит следующим образом:

в векторном виде (по-прежнему) $m_2\vec{g} + \vec{F}_{н1} + \vec{F}_{н2} + \vec{F}_к = 0$,

в скалярном виде $m_2 g + F_{н1} + F_к = F_{н2}$.

Здесь во всех случаях сила Кулона $F_к = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где r – длина нижней нити.

Пример 5. Маленький шарик массой m с зарядом q_1 подвешен на абсолютно упругой пружине жесткостью k над заряженным шаром радиусом R, несущим отрицательный заряд $-q_2$ (рис. 1-6). Шары заряжены разноименно, поэтому вследствие их взаимного притяжения пружина удлинилась на Δl, после чего шары оказались в равновесии. Расстояние от маленького шарика до поверх-

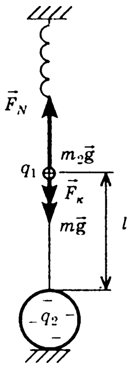


Рис. 1-6

ности большого равно l. Применим к этому случаю первый закон Ньютона. На малый шарик действуют сила тяжести $m\vec g$ со стороны Земли, сила реакции пружины $\vec F_N$ и сила Кулона $\vec F_к$ со стороны большого шара. Поскольку заряды q_1 и q_2 разноименные, то они притягиваются и, значит, сила Кулона направлена вниз. При равновесии сумма сил тяжести и Кулона, направленных вниз, будет уравновешена силой упругости $\vec F_N$, направленной вверх. Первый закон Ньютона в этом случае выглядит так:

в векторном виде $m\vec g + \vec F_к + \vec F_N = 0$,

в скалярном виде $mg + F_к = F_N$. (1-6)

Здесь согласно закону Гука $F_N = k\Delta l$ (1-7)

и по закону Кулона $F_к = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+l)^2}$. (1-8)

Осталось подставить (1-7) и (1-8) в (1-6) и из полученного выражения определить ту величину, о которой спрашивается в условии задачи.

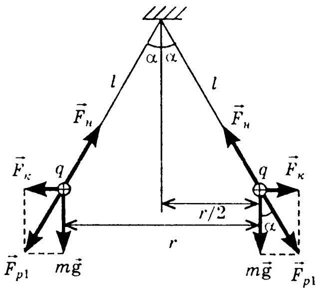


Рис. 1-7

Пример 6. Два одинаковых малых шарика массами по m каждый с равными по знаку и модулю зарядами q подвесили на нитях длиной l в одной точке. Вследствие отталкивания они разошлись на расстояние r (рис. 1-7).

Применим первый закон Ньютона к этому случаю.

На каждый шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec g$, сила Кулона $\vec F_к$ и сила натяжения $\vec F_н$. Поскольку шарики находятся в покое, векторная сумма этих сил по первому закону Ньютона равна нулю: $m\vec g + \vec F_к + \vec F_н = 0$.

Для записи этого закона в скалярном виде сложим векторно силы $m\vec g$ и $\vec F_к$ и модуль их равнодействующей F_{p1} приравняем модулю силы натяжения $F_н$: $F_{p1} = \sqrt{(mg)^2 + F_к^2}$ и $F_{p1} = F_н$, поэтому

$$F_н = \sqrt{(mg)^2 + F_к^2}, \qquad \text{где} \qquad F_к = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Если в условии задачи идет речь об угле α, на который отклонилась каждая нить от вертикали, или об угле 2α, на который они разошлись, то воспользуемся формулами тригонометрии

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{F_к}{mg}$ или $\sin\alpha = \dfrac{F_к}{F_{р1}} = \dfrac{F_к}{F_н}$, или $\cos\alpha = \dfrac{mg}{F_н}$, или $\sin\alpha = \dfrac{r}{2l}$

в зависимости от условия задачи.

Пример 7. Вокруг неподвижного заряда q_0 движется по окружности подвешенный на нити шарик массой m, несущей заряд q. Длина нити l. Нить с шариком образует конический маятник с углом при вершине 2α (рис. 1-8). Применим второй закон Ньютона к этому случаю.

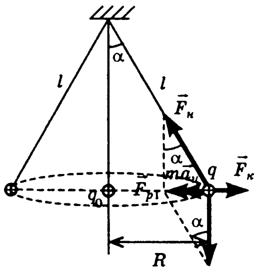


Рис. 1-8

На шарик, подвешенный на нити, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила Кулона $\vec{F}_к$, с которой одноименные заряды q_0 и q отталкиваются друг от друга, поэтому на рис. 1-8 сила $\vec{F}_к$, приложенная к шарику, направлена вправо. По второму закону Ньютона, записанному в векторном виде, равнодействующая этих сил $m\vec{a}_ц$ равна их векторной сумме: $m\vec{a}_ц = m\vec{g} + \vec{F}_н + \vec{F}_к$.

Поскольку шарик движется по окружности, то равнодействующая $m\vec{a}_ц$ направлена по радиусу к центру окружности. Чтобы ее найти, можно сначала сложить векторно силы $m\vec{g}$ и $\vec{F}_н$. Их равнодействующая тоже должна действовать вдоль радиуса окружности, более того, она должна быть направлена к центру и по модулю превосходить антинаправленную ей кулонову силу $\vec{F}_к$. В противном случае равнодействующая этих сил $\vec{F}_{р1}$ и $\vec{F}_к$ не будет направлена по радиусу к центру и шарик не сможет двигаться по окружности.

Тогда по второму закону Ньютона, записанному в скалярном виде, $ma_ц = F_{р1} - F_к$, где $F_{р1} = mg\,tg\alpha$ или $F_{р1} = \sqrt{F_н^2 - (mg)^2}$ (в зависимости от условия задачи выберем одну из этих формул).

Кроме того, $a_ц = \dfrac{v^2}{R} = \omega^2 R$ и $F_к = \dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}$, где $R = l\sin\alpha$.

Все эти формулы могут вам пригодиться при дальнейшем решении задач.

Пример 8. Два одинаковых шарика с одноименными зарядами q_1 и q_2 взаимодействуют с силой $F_{к1} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Эти шарики привели в соприкосновение. Поскольку их общий заряд равен $q_1 + q_2$ и шарики одинаковые, значит, на каждый шарик попадет заряд $\frac{q_1+q_2}{2}$. Теперь они будут взаимодействовать с силой $$F_{к2} = \frac{(q_1+q_2)(q_1+q_2)}{2\cdot 2\cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{(q_1+q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Отношение силы $F_{к2}$ к силе $F_{к1}$

$$\frac{F_{к2}}{F_{к1}} = \frac{(q_1+q_2)^2\cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2\cdot q_1 q_2} = \frac{(q_1+q_2)^2}{4q_1q_2}.$$

Пусть $q_1 = q_2$. Тогда $\frac{F_{к2}}{F_{к1}} = \frac{(2q_1)^2}{4q_1^2} = 1.$

Пусть $q_2 = 2q_1$. Тогда $\frac{F_{к2}}{F_{к1}} = \frac{(q_1+2q_1)^2}{4q_1\cdot 2q_1} = \frac{9q_1^2}{8q_1^2} = 1{,}125.$

Пусть $q_2 = 3q_1$. Тогда $\frac{F_{к2}}{F_{к1}} = \frac{(q_1+3q_1)^2}{4q_1\cdot 3q_1} = \frac{16q_1^2}{12q_1^2} = 1{,}333.$

Таким образом, сила взаимодействия зарядов после соприкосновения всегда больше, чем до него, и это различие тем больше, чем более заряды различаются по модулю.

Решение отдельных задач

Задача 1

Два шарика, расположенных на расстоянии $r = 20$ см друг от друга, имеют одинаковые по модулю заряды и взаимодействуют в воздухе с силой $F = 0{,}3$ мН. Найти число нескомпенсированных электронов N на каждом шарике.

Дано:
$r = 20$ см
$F = 0{,}3$ мН
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Кл^2}{Н\cdot м^2}$

N – ?

Решение. По закону Кулона

$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где $q = eN$ – модуль заряда каждого шарика, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заря q. С учетом этого

$$F = \frac{(eN)^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$ откуда

$$eN = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 F} \quad и \quad \boxed{N = \frac{2r}{e}\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\pi F}}$$

Переведем все единицы в СИ: 20 см = 0,2 м, 0,3 мН= $= 0{,}3\cdot 10^{-3}$ Н $= 3\cdot 10^{-4}$ Н.

Произведем вычисления:

$$N = \frac{2\cdot 0{,}2}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\sqrt{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^{-4}} = 2{,}3\cdot 10^{11}.$$

Ответ: $N = 2{,}3 \cdot 10^{11}$.

Задача 2

С какой силой взаимодействовали бы в воздухе две капли воды массами по $m = 1$ г, расположенные на расстоянии $r = 50$ см друг от друга, если бы одной из них передали 10% всех электронов, содержащихся в другой капле?

Дано:
$m = 1$ г
$r = 50$ см
$\frac{N_1}{N_0} = 10\% = 0{,}1$
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$

F – ?

Обозначим N_1 число нескомпенсированных электронов, переданных первой капле, N_0 – все число электронов на второй капле до того, как у нее забрали 10% ее электронов, ε – относительную диэлектрическую проницаемость воздуха.

Решение. Вначале обе капли были нейтральны. Затем первой капле со второй передали $N_1 = 0{,}1N_0$ электронов, и заряд первой капли стал $q_1 < 0$, а заряд второй капли стал $q_2 > 0$, поэтому капли стали притягиваться друг к другу.

По закону Кулона сила взаимодействия двух капель с модулями зарядов q_1 и q_2 $F = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Здесь q_2 – модуль заряда второй капли после того, как у нее отняли 10% электронов. Согласно кратности заряда $q_1 = eN_1$ и $q_2 = eN_2$, где $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл – заряд элементарный и N_2 – число нескомпенсированных электронов на второй капле после того, как у нее забрали $N_1 = 0{,}1N_0$ электронов. Очевидно, что $N_2 = N_1$.

С учетом этого запишем:

$$F = \frac{eN_1eN_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{0{,}1eN_0\cdot 0{,}1eN_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{0{,}01(eN_0)^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \quad (1)$$

Чтобы найти число электронов N_0 в капле воды массой m, найдем сначала число молекул N в ней. Для этого вспомним, что число молекул N равно произведению числа молей ν в капле, на число молекул в одном моле, т. е. на число Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$: $N = \nu N_A$,

где $\nu = \dfrac{m}{M}$, поэтому $N = \dfrac{m}{M} N_A$.

Здесь $M = 0{,}018$ кг/моль – молярная масса воды.

В каждой молекуле воды имеются 2 атома водорода, содержащих 2 электрона, и атом кислорода, содержащий 8 электронов. Значит, всего молекула воды имеет 10 электронов, а N молекул воды имеют соответственно 10 N электронов, т. е.

$$N_0 = 10N = 10\frac{m}{M} N_A. \qquad (2)$$

Нам осталось подставить (2) в (1), и задача будет решена. Проделаем это действие:

$$F = \frac{0{,}01(e10mN_A)^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 M^2}, \text{ или } \boxed{F = \frac{0{,}25}{\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{emN_A}{rM}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ: 1 г = $1 \cdot 10^{-3}$ кг, 50 см = = 0,5 м.

Произведем вычисления:

$$F = \frac{0{,}25}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{0{,}5 \cdot 0{,}018}\right)^2 \text{ Н} =$$
$= 1 \cdot 10^{18}$ Н.

Ответ: $F = 1 \cdot 10^{18}$ Н.

Задача 3

Два одинаковых шарика зарядили так, что заряд одного из них оказался по модулю в n раз больше другого. Шарики привели в соприкосновение и развели на вдвое большее, чем прежде, расстояние. Во сколько раз изменилась сила их кулоновского взаимодействия, если их заряды до соприкосновения были разноименными?

Дано:
$q_1 = nq_2$
$r_2 = 2r_1$

$\dfrac{F_2}{F_1}$ – ?

Обозначим q_1 и q_2 – модули зарядов первого и второго шариков до соприкосновения, r_1 и r_2 – расстояния между ними до и после соприкосновения, F_1 и F_2 – силы их взаимодействия до и после соприкосновения.

Решение. Сила взаимодействия шариков до соприкосновения по закону Кулона

$$F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_1^2} = \frac{n q_2 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_1^2} = \frac{n}{\pi\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\frac{q_2}{2r_1}\right)^2. \qquad (1)$$

Общий заряд шариков до соприкосновения с учетом того, что они разноименные, равен $q_1 - q_2 = nq_2 - q_2 = q_2(n - 1)$. Поскольку шарики одинаковые, на каждом из них после соприкосновения появится заряд $\frac{q_1 - q_2}{2} = \frac{q_2(n-1)}{2}$. Тогда по закону Кулона сила их взаимодействия после соприкосновения будет

$$F_2 = \frac{q_2(n-1)q_2(n-1)}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r_2^2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{q_2^2(n-1)^2}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon (2r_1)^2}$$

(ведь по условию $r_2 = 2r_1$) или

$$F_2 = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\frac{q_2(n-1)}{8r_1}\right)^2. \qquad (2)$$

Разделив (2) на (1), мы ответим на вопрос задачи:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0 \varepsilon}\left(\frac{q_2(n-1)}{8r_1}\right)^2 \frac{\pi\varepsilon_0 \varepsilon}{n}\left(\frac{2r_1}{q_2}\right)^2 = \frac{q_2^2(n-1)^2 4r_1^2}{n\ 64\ r_1^2 q_2^2},$$

$$\boxed{\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n-1)^2}{16n}}$$

Задача решена.

Ответ: $\frac{F_2}{F_1} = \frac{(n-1)^2}{16n}$.

Задача 4

Два маленьких заряженных шарика взаимодействуют в вакууме с некоторой силой, находясь на расстоянии r_1 друг от друга. На каком расстоянии r_2 друг от друга они будут взаимодействовать в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2, если сила их взаимодействия останется прежней?

Дано:
r_1
$\varepsilon_1 = 1$
ε_2
$F_1 = F_2$
r_2 – ?

Обозначим ε_1 относительную диэлектрическую проницаемость вакуума, F_1 – силу взаимодействия зарядов в вакууме, F_2 – силу их взаимодействия в среде с диэлектрической проницаемостью ε_2.

Решение. По закону Кулона сила взаимодействия шариков с зарядами q_1 и q_2 в вакууме

$$F_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1^2}. \qquad (1)$$

Сила их взаимодействия в среде с проницаемостью ε_2

$$F_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2^2}. \qquad (2)$$

Согласно условию эти силы равны, поэтому приравняем правые части равенств (1) и (2) и из полученного уравнения найдем искомое расстояние r_2:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2^2}, \ \varepsilon_1 r_1^2 = \varepsilon_2 r_2^2, \text{ откуда } \boxed{r_2 = r_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$$

Ответ: $r_2 = r_1\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$.

Задача 5

Маленьким шариком с зарядом q коснулись внутренней поверхности очень большого незаряженного металлического шара, в результате чего на большом шаре поверхностная плотность зарядов стала равна σ. Найти объем V большого шара. Среда – воздух.

Дано:
q
σ
$\varepsilon = 1$
V – ?

Решение. Поскольку размеры большого шара намного больше маленького, весь заряд q с маленького шарика перейдет на большой и распределится равномерно по его поверхности.

При этом поверхностная плотность зарядов на поверхности большого шара

$$\sigma = \frac{q}{S}, \qquad (1)$$

где $S = 4\pi R^2$ (2) – площадь поверхности большого шара, а R – его радиус.

Теперь подставим (2) в (1) и определим радиус большого шара, а затем, зная его радиус, найдем и объем этого шара: $\sigma = \dfrac{q}{4\pi R^2}$, откуда $R = \sqrt{\dfrac{q}{4\pi\sigma}}$. (3)

Объем шара $$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (4)$$

Подставив (3) в (4), мы решим задачу: $\boxed{V = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{\frac{q}{\pi\sigma}}\right)^3}$

Задача решена.

Ответ: $V = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{\frac{q}{\pi\sigma}}\right)^3$.

Задача 6

Два металлических шарика имеют массу m = 10 г каждый. Какое число электронов N надо удалить с каждого шарика, чтобы сила их кулоновского отталкивания стала равна силе их гравитационного тяготения друг к другу?

Дано:
m = 10 г
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
$F_н = F_{тяг}$
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

N –?

Здесь и далее e – модуль заряда электрона, G – гравитационная постоянная, $F_н$ – сила кулоновского отталкивания шариков, $F_{тяг}$ – сила их гравитационного тяготения.

Решение. По закону Кулона $F_к = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где $q = Ne$ – заряд каждого шарика после того, как с него удалили N электронов, r – расстояние между ними (точнее, между их центрами).

Поэтому $$F_к = \frac{(Ne)^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \quad (1)$$

По закону всемирного тяготения $$F_{тяг} = G\frac{m^2}{r^2}. \quad (2)$$

Согласно условию задачи $F_н = F_{тяг}$, поэтому приравняем (1) и (2):

$$\frac{(Ne)^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = G\frac{m^2}{r^2},\ (Ne)^2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon G m^2, \text{ откуда}$$

$$\boxed{N = \frac{2m}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon G}}$$

Переведем единицу массы в СИ: 10 г = 0,01 кг.
Произведем вычисления:

$$N = \frac{2 \cdot 0{,}01}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\sqrt{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}4 \cdot 10^6.$$

Ответ: $N = 5{,}4 \cdot 10^6$.

Задача 7

Между двумя одноименными точечными зарядами $q_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл, расстояние между которыми $r = 9$ см, помещают третий заряд q_0 так, что все три заряда оказываются в равновесии. Чему равен этот третий заряд q_0 и каков его знак? На каком расстоянии r_1 от заряда q_1 он располагается?

Дано:
$q_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл
$q_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл
$r = 9$ см

q_0 – ?
r_1 – ?

Решение. По условию задачи все силы, действующие на каждый заряд со стороны других зарядов, уравновешены, следовательно, их равнодействующая согласно первому закону Ньютона равна нулю. Это условие может быть выполнено только в том случае, если заряд q_0 будет отрицательным и, кроме того, он будет располагаться ближе к меньшему заряду q_1 (рис. 1-9).

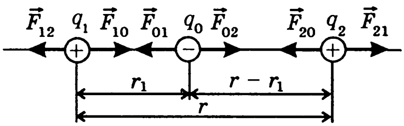


Рис. 1-9

При этом сила притяжения $\vec{F}_{10}$ заряда q_1 к заряду q_0 может оказаться уравновешенной силой отталкивания $\vec{F}_{12}$ заряда q_1 от одноименного заряда q_2, и тогда заряд q_1 окажется в равновесии. Точно так же сила притяжения $\vec{F}_{01}$ заряда q_0 к заряду q_1 может оказаться уравновешенной силой притяжения $\vec{F}_{02}$ заряда q_0 к заряду q_2, и при этом заряд q_0 тоже окажется в равновесии. И наконец сила отталкивания $\vec{F}_{21}$ заряда q_2 от заряда q_1 может оказаться уравновешенной силой притяжения $\vec{F}_{20}$ заряда q_2 к заряду q_0, и тогда заряд q_2 тоже будет в равновесии. Отметим, что равновесие зарядов будет неустойчивым, так как с изменением расстояния между любыми зарядами оно нарушится и заряды уже не смогут самопроизвольно вернуться в прежнее положение.

Если же заряд q_0 будет тоже положительным, как и заряды q_1 и q_2, то он еще может оказаться в равновесии, будучи отталкиваемым как от заряда q_1, так и от заряда q_2. Но сами заряды q_1 и q_2 уже не смогут оказаться в равновесии, поскольку на каждый из них будут действовать по две силы отталкивания от одного из этих зарядов и от заряда q_0, направленные в одну сторону, поэтому под суммарным действием этих сил заряды q_1 и q_2 станут «разбегаться» с ускорением от заряда q_0 в противоположные стороны.

Для определения расстояния r_1 воспользуемся условием равновесия заряда q_0. На этот заряд со стороны заряда q_1 действует сила притяжения $\vec{F}_{01}$, а со стороны заряда q_2 действует тоже сила притяжения $\vec{F}_{02}$, причем, как мы уже отметили, эти силы уравновешивают друг друга, т. е. по модулю друг другу равны: $F_{01} = F_{02}$.

Поскольку наши заряды точечные, то к их взаимодействию применим закон Кулона:

$$F_{01} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} \text{ и } F_{02} = \frac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon (r - r_1)^2}.$$

Так как $F_{01} = F_{02}$, то $\dfrac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} = \dfrac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon (r - r_1)^2}$ или

$\dfrac{q_1}{r_1^2} = \dfrac{q_2}{(r - r_1)^2}$, откуда $q_1 (r - r_1)^2 = q_2 r_1^2$.

Поскольку все величины в этом уравнении положительные, то можно взять корень квадратный из левой и правой частей этого выражения. От этого равенство не нарушится, а неизвестное r_1 окажется в первой степени:

$$(r - r_1)\sqrt{q_1} = r_1\sqrt{q_2}.$$

Решим полученное уравнение относительно r_1:

$$r\sqrt{q_1} - r_1\sqrt{q_1} = r_1\sqrt{q_2}, \quad r\sqrt{q_1} = r_1\sqrt{q_2} + r_1\sqrt{q_1},$$

$$\boxed{r_1 = \frac{r\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}}$$

Мы нашли одну из искомых величин в общем виде. Теперь для определения заряда q_0 воспользуемся условием равновесия заряда q_1 (или можно q_2, результат будет одинаков). Согласно условию равновесия заряда q_1 $F_{10} = F_{12}$.

По закону Кулона $F_{10} = \dfrac{q_1 q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}$ и $F_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, поэтому $\dfrac{q_1 q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ или, после сокращения, $\dfrac{q_0}{r_1^2} = \dfrac{q_2}{r^2}$.

Отсюда $q_0 = q_2 \dfrac{r_1^2}{r^2}$ или $\boxed{q_0 = q_2\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^2}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 9 см = 0,09 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$r_1 = \frac{0{,}09\sqrt{1\cdot 10^{-8}}}{\sqrt{1\cdot 10^{-8}} + \sqrt{4\cdot 10^{-8}}}\ \text{м} = 0{,}03\ \text{м},$$

$$q_0 = 4\cdot 10^{-9}\left(\frac{0{,}03}{0{,}09}\right)^2 \text{Кл} = 4{,}0\cdot 10^{-10}\ \text{Кл}.$$

Ответ: $r_1 = 0{,}03$ м, $q_0 = 4{,}0\cdot 10^{-10}$ Кл.

Задача 8

Заряды $q_1 = 20$ нКл и $q_2 = -30$ нКл расположены на некотором расстоянии друг от друга (рис. 1-10). Заряд q_0 помещают сначала в точку 1, расположенную слева от заряда q_1 на расстоянии $\dfrac{r}{2}$ от него, а затем в точку 2, расположенную между зарядами q_1 и q_2. Найти отношение силы F_1, с которой заряды q_1 и q_2 действуют на заряд q_0 в точке 1, к силе F_2, с которой они действуют на него в точке 2.

Дано:
$q_1 = 20$ нКл
$q_2 = -30$ нКл

$\dfrac{F_2}{F_1}$ – ?

Решение. Пусть заряд q_0 находится в точке 1 (см. рис. 1-10, *а*). При этом на него со стороны заряда q_1 действует сила отталкивания $\vec{F}_{01}$, направленная влево (ведь q_1 и q_2 – оба положительные заряды). Одновременно на положительный заряд q_0 со стороны отрицательного заряда q_2 действует сила притяжения $\vec{F}_{02}$, направленная вправо. Поскольку эти силы антинаправлены, то их равнодействующая F_1 по модулю равна их разности: $F_1 = F_{01} - F_{02}$ (мы наугад предположили, что F_{01} больше, чем F_{02}, а если при вычислениях сила F_1 будет отрицательна, то поменяем местами F_{01} и F_{02}).

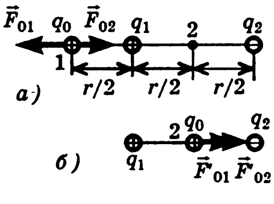


Рис. 1-10

По закону Кулона

$$F_{01} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{q_0 q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,\frac{r^2}{4}} = \frac{q_0 q_1}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Аналогично

$$F_{02} = \frac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(3\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{q_0 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\,9\frac{r^2}{4}} = \frac{q_0 q_2}{9\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Поэтому $F_1 = \frac{q_0 q_1}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} - \frac{q_0 q_2}{9\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\left(q_1 - \frac{q_2}{9}\right)$. (1)

Теперь поместим заряд q_0 в точку 2 (рис. 1-10, б).

В этом случае силы $\vec{F}'_{01}$ и $\vec{F}'_{02}$, действующие на положительный заряд q_0 со стороны тоже положительного заряда q_1 и отрицательного заряда q_2, сонаправлены, поэтому их равнодействующая сила F_2 равна сумме этих сил: $F_2 = F'_{01} + F'_{02}$, где по закону Кулона

$$F'_{01} = \frac{q_1 q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{q_1 q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \text{ и } F'_{02} = \frac{q_2 q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{q_2 q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

поэтому $F_2 = \frac{q_1 q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} + \frac{q_2 q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\left(q_1 + q_2\right)$. (2)

Нам осталось разделить (2) на (1), и задача будет решена: $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 q_0\left(q_1 + q_2\right)}{q_0\left(q_1 - \frac{q_2}{9}\right)\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, $\boxed{\frac{F_2}{F_1} = \frac{9\left(q_1 + q_2\right)}{9q_1 - q_2}}$

Задача решена. Можно не переводить единицы заряда в СИ, ведь в конечной формуле остались только заряды, выраженные в нанокулонах, поэтому отношение $\frac{F_2}{F_1}$ будет безразмерным.

Произведем вычисления (знак «минус» перед зарядом q_2 мы уже учли, когда выбирали направление сил F_{02} и F'_{02}): $\frac{F_2}{F_1} = \frac{9(20 + 30)}{9 \cdot 20 - 30} = 3$.

Ответ: $F_2/F_1 = 3$.

Задача 9

В вершинах равностороннего треугольника находятся одинаковые заряды $q = 2$ нКл (рис. 1-11). Какой заряд q_0 надо поместить в центр треугольника C, чтобы система всех этих зарядов оказалась в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

Дано:
$q = 2$ нКл
$2\alpha = 60°$

q_0 – ?

Решение. Очевидно, что заряд q_0 должен быть отрицательным (иначе заряды в вершинах «разбегутся» от него) и по модулю таким, чтобы сила притяжения всех зарядов q к заряду q_0. компенсировала взаимное отталкивание зарядов q друг от друга. Пусть сторона треугольника r.

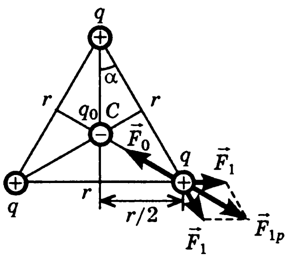


Рис. 1-11

Равнодействующая сил, приложенных к заряду q_0 со стороны зарядов q в вершинах, равна нулю в силу симметрии его расположения в центре треугольника.

Покажем силы, приложенные к заряду q, расположенному в правой нижней вершине треугольника. На этот заряд со стороны двух других зарядов q действуют равные по модулю силы F_1. Построим на этих силах, как на сторонах, ромб с острым углом $2\alpha = 60°$, сложив их векторно. Диагональ этого ромба $\vec{F}_{p1}$ является равнодействующей сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_1$. По модулю эта равнодействующая согласно теореме косинусов

$$F_{p1} = \sqrt{F_1^2 + F_1^2 - 2F_1F_1\cos(180° - 2\alpha)} = F_1\sqrt{2(1+\cos 2\alpha)} =$$

$$= F_1\sqrt{2(1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = 2F_1\cos\alpha,$$ ведь $\cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$, где $\alpha = 30°$, и $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, а $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$.

По закону Кулона $F_1 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

С учетом этого $$F_{p1} = \frac{2q^2\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q^2\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (1)$$

Чтобы система зарядов была в равновесии, на тот же заряд q со стороны заряда q_0 должна действовать сила притяжения $\vec{F}_0$, антинаправленная силе $\vec{F}_{p1}$ и равная ей по модулю: $F_0 = F_{p1}$, где по закону Кулона

$$F_0 = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\dfrac{r}{2\cos\alpha}\right)^2} = \frac{q_0 q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos^2\alpha, \qquad (2)$$

ведь расстояние между зарядами q_0 и q есть гипотенуза в прямоугольном треугольнике с катетом $\frac{r}{2}$ и прилежащим к нему углом α, которая равна $\frac{r}{2\cos\alpha}$.

Нам осталось приравнять (1) и (2) и из полученного уравнения найти заряд q_0:

$$\frac{q^2\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q_0 q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos^2\alpha,$$

$$\boxed{q_0 = \frac{q}{2\cos\alpha}}$$

Произведем вычисления:

$$q_0 = \frac{2}{2\cos 30^\circ}\ \text{нКл} = 1{,}2\ \text{нКл}.$$

Равновесие зарядов будет неустойчивым, так как, если хотя бы один из зарядов вывести из состояния равновесия, переместив его на некоторое расстояние, то система зарядов самостоятельно в состояние равновесия уже не вернется.

Ответ: $q_0 = 1{,}2$ нКл; не будет.

Задача 10

В вершинах квадрата расположены заряды q (рис. 1-12). Какой заряд q_0 и где надо поместить, чтобы вся система зарядов оказалась в равновесии? Будет ли равновесие устойчивым?

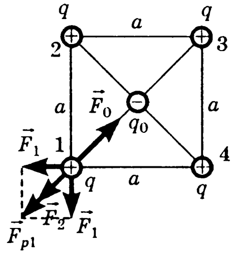


Рис. 1-12

Дано:
q

q_0 – ?

Решение. Заряд q_0, конечно, должен быть отрицательным, иначе заряды в вершинах квадрата, отталкиваясь от него и друг от друга, «разбегутся» с ускорением по продолжениям диагоналей квадрата. В силу симметрии он должен располагаться в центре квадрата, т. е. в точке пересечения его диагоналей. При этом силы притяжения заряда q_0 к зарядам q, расположенным в вершинах квадрата, скомпенсируют друг друга. Чтобы заряды в вершинах квадрата были в равновесии, нужно, чтоб суммарная сила отталкивания, действующая на каждый заряд в вершине квадрата со стороны остальных трех зарядов, была уравновешена силой притяжения этого положительного заряда q к отрицательному заряду q_0.

Рассмотрим силы, приложенные к заряду q, расположенному в вершине 1. На него со стороны зарядов q, расположенных в вершинах 2 и 4, действуют две взаимно перпендикулярные и равные по модулю силы отталкивания $\vec{F}_1$, а со стороны заряда q в вершине 3 – сила отталкивания $\vec{F}_2$. Суммарное действие этих трех сил должно быть скомпенсировано силой притяжения $\vec{F}_0$ заряда q в вершине 1 к заряду q_0. Иначе говоря, векторная сумма всех сил, приложенных к заряду q в вершине 1, должна быть равна нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_0 = 0$.

В скалярной записи условие равновесия запишем так:

$$F_{p1} + F_2 = F_0, \qquad (1)$$

где $F_{p1} = \sqrt{F_1^2 + F_1^2} = F_1\sqrt{2}$ – результирующая сила, действующая на заряд q в вершине 1 со стороны зарядов q в вершинах 2 и 4. По закону Кулона $F_1 = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, поэтому

$$F_{p1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\sqrt{2}, \qquad (2)$$

где a – сторона квадрата. Она нам не дана, но должна сократиться в процессе решения.

По закону Кулона сила, с которой на заряд q в вершине 1 действует заряд q в вершине 3, расположенный на расстоянии $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ от него,

$$F_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}. \qquad (3)$$

Сила, с которой на заряд q в вершине 1 действует заряд q_0, расположенный от него на расстоянии, равном половине диагонали квадрата $\dfrac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$F_0 = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}. \qquad (4)$$

Нам осталось подставить (2), (3) и (4) в (1) и, выполнив сокращения, найти заряд q_0:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\sqrt{2} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} = \frac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}, \quad q\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{q}{4} = q_0 \text{ или}$$

$$\boxed{q_0 = 0{,}5q\left(\sqrt{2} + 0{,}5\right)}$$

Поскольку $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, то $q_0 = 0{,}5q(1{,}4 + 0{,}5) = 0{,}95q$.

Равновесие будет неустойчивым, так как при выводе любого заряда из равновесия система самостоятельно не вернется в прежнее равновесие.

Ответ: $q_0 = 0{,}95q$; не будет.

Задача 11

В трех соседних вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены положительные заряды q, а в трех других – равные им по модулю, но отрицательные заряды. С какой силой F эти шесть зарядов будут действовать на заряд q_0, помещенный в центр шестиугольника (рис. 1-13)?

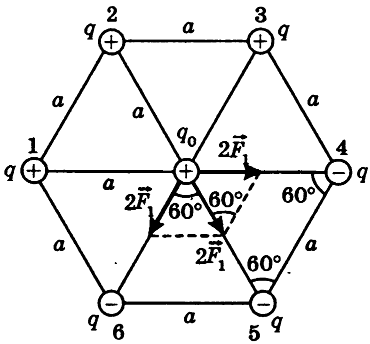


Рис. 1-13

Дано:	
a	
q	
q_0	
ε_0	
ε	
F – ?	

Решение. Сила F, с которой все заряды в вершинах шестиугольника действуют на заряд q_0 в его центре, по принципу суперпозиции равна векторной сумме сил, с которой каждый заряд q действует на q_0 в отдельности. Обозначим силу, с которой каждый заряд q действует на заряд q_0, буквой $\vec{F}_1$.

На заряд q_0 со стороны зарядов q в вершинах 1 и 4 действуют две такие силы, направленные к вершине 4, потому что положительный заряд q в вершине 1 толкает заряд q_0 от себя, а отрицательный заряд q в вершине 4 его притягивает. Следовательно, суммарная сила, с которой заряды q в вершинах 1 и 4 действуют на заряд q_0, равна $2\vec{F}_1$. Но с такими же силами $2\vec{F}_1$ на заряд q_0 действуют и заряды q, расположенные в вершинах 3 и 6, векторная сумма которых направлена к вершине 6.

Векторы $2\vec{F}_1$ сил, действующих на заряд q_0 со стороны зарядов q в вершинах 2 и 4, а также 3 и 6, если их векторно сложить, будут являться сторонами ромба с острым углом при вершине 60°, поэтому векторная сумма сил $2\vec{F}_1$ и $2\vec{F}_1$ тоже будет равна $2\vec{F}_1$ и направлена к вершине 5. Но к этой векторной сумме следует прибавить еще одну силу $2\vec{F}_1$, с которой на заряд q_0 действуют заряды q, расположенные в вершинах 2 и 5, ведь эта сила сонаправлена с векторной суммой сил $2\vec{F}_1$ и $2\vec{F}_1$, так как они обе направлены к вершине 5. Поэтому суммарная сила, с которой все шесть зарядов q действуют на заряд q_0, по модулю $4F_1$: $F = 4F_1$, где по закону Кулона $F_1 = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, ведь расстояние между каждым зарядом q и зарядом q_0 тоже равно a.

Поэтому $F = \dfrac{4qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$, $\boxed{F = \dfrac{qq_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}}$

Задача решена.

Ответ: $F = \dfrac{qq_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$.

Задача 12

Два одинаковых маленьких шарика массами по m = = 10 г каждый заряжены одинаково и подвешены на непроводящих и невесомых нитях так, как показано на рис. 1-14. Какой заряд q должен быть на каждом шарике, чтобы нити испытывали одинаковое натяжение? Среда – воздух, длина каждой нити l = 30 см.

Дано:
m = 10 г
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}$
l = 30 см
$g = 9{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

q – ?

Решение. Покажем силы, приложенные к верхнему заряду.

На него действуют направленные вверх сила натяжения верхней нити $\vec{F}_н$ и сила кулоновского отталкивания от нижнего заряда $\vec{F}_к$, а вниз направлены сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нижней нити, которая согласно условию задачи по модулю тоже равна $\vec{F}_н$. При равновесии этого шарика векторная сумма этих сил равна нулю: $\vec{F}_н + \vec{F}_к + m\vec{g} + \vec{F}_н = 0$, а в скалярной записи $F_н + F_к = mg + F_н$, поэтому

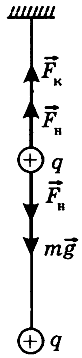


Рис. 1-14

$F_к = mg$, где по закону Кулона $F_к = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2}$.

Тогда $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2} = mg$, откуда $\boxed{q = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon mg}}$

Переведем все единицы в СИ: 10 г = 0,01 кг, 30 см = 0,3 м.

Произведем вычисления:

$$q = 2 \cdot 0{,}3\sqrt{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}8} \text{ Кл} = 3{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$$

Ответ: $q = 3{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Задача 13

На изолирующей нити подвешен маленький шарик массой $m = 1$ г, имеющий заряд $q_1 = 1$ нКл. К нему снизу подносят на расстояние $r = 2$ см другой заряженный маленький шарик, и при этом сила натяжения нити уменьшается вдвое. Чему равен заряд q_2 другого шарика? Среда – воздух.

Дано:
$m = 1$ г
$q_1 = 1$ нКл
$r = 2$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
$g = 9{,}8 \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$
$F_{н1} = 2F_{н2}$

---

q_2 – ?

Обозначим $F_{н1}$ силу натяжения нити до того, как к шарику на ней поднесли другой шарик, $F_{н2}$ – силу натяжения нити после того, как его поднесли.

Решение. Когда шарик на нити был один, на него действовали уравновешивающие друг друга сила натяжения $F_{н1}$ и сила тяжести mg (рис. 1-15, *а*), поэтому $F_{н1} = mg$.

Когда снизу поднесли заряд q_2, на q_1 стала действовать вверх сила Кулона $\vec{F}_к$ и новая сила натяжения $\vec{F}_{н2}$ (рис. 1-15, б), а вниз – прежняя сила тяжести $m\vec{g}$. Равновесие наступило, когда стало выполняться равенство $F_к + F_{н2} = mg$.

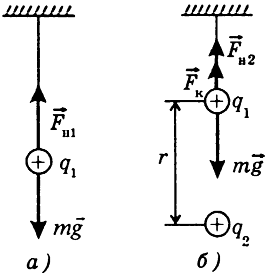


Рис. 1-15

Поскольку $F_{н2} = \dfrac{F_{н1}}{2}$, где $F_{н1} = mg$, то $F_{н2} = \dfrac{mg}{2}$, и поэтому

$$F_к + \frac{mg}{2} = mg\,, \quad F_к = \frac{mg}{2}\,. \qquad (1)$$

По закону Кулона

$$F_к = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\,. \qquad (2)$$

Приравняем (1) и (2) и найдем заряд q_2: $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \dfrac{mg}{2}$,

откуда $$\boxed{q_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon m g}{q_1}}$$

Переведем все единицы в СИ:

1 г = $1 \cdot 10^{-3}$ кг, 1 нКл = $1 \cdot 10^{-9}$ Кл, 2 см = 0,02 м.

Произведем вычисления:

$$q_2 = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8}{1 \cdot 10^{-9}}\ Кл = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\ Кл.$$

Ответ: $q_2 = 5{,}4 \cdot 10^{-4}$Кл.

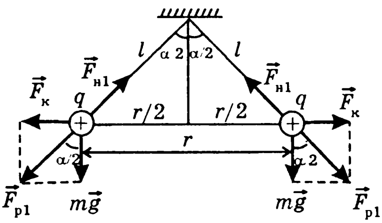


Рис. 1-16

Задача 14

Два одинаковых маленьких шарика подвешены на невесомых нитях длиной l каждая в одной точке. Когда им сообщили одинаковые заряды q, шарики разошлись на угол α (рис 1-16). Найти силу натяжения $F_н$ каждой нити. Среда – воздух.

Дано:
l
α
q
ε
ε_0
$F_н$ – ?

Решение. На каждый шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec g$, сила Кулона $\vec F_к$ и сила натяжения $\vec F_н$. Они скомпенсированы, поэтому шарики согласно первому закону Ньютона остаются в покое.

Условие равновесия каждого шарика в векторной записи:

$$\vec{F}_к + m\vec{g} + \vec{F}_н = 0 \text{ или } \vec{F}_{p1} + \vec{F}_н = 0,$$

где $\vec{F}_{p1} = \vec{F}_к + m\vec{g}$ – равнодействующая сил тяжести и Кулона.

В скалярной записи $F_{p1} = F_н$.

Из рис. 1-16 следует, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{F_к}{F_{p1}}$ или $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{F_к}{F_н}$,

откуда
$$F_н = \frac{F_к}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

По закону Кулона
$$F_к = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, \quad (2)$$

где из прямоугольного треугольника с гипотенузой l

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2l}, \text{ откуда } r^2 = 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2):

$$F_к = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\cdot 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \quad (4)$$

Теперь подставим (4) в (1), и задача будет решена:

$$\boxed{F_н = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2\sin^3\frac{\alpha}{2}}}$$

Задача решена.

Ответ: $F_н = \dfrac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 15

Два одинаково заряженных шарика, подвешенных на нитях равной длины, разошлись на некоторый угол (рис. 1-17, *а*). Чему равна плотность материала шариков ρ, если после погружения их в керосин угол между нитями не изменился (рис. 1-17, *б*)? Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon_1 = 1$, относительная диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon_2 = 2$. Плотность керосина $\rho_0 = 800$ кг/м^3.

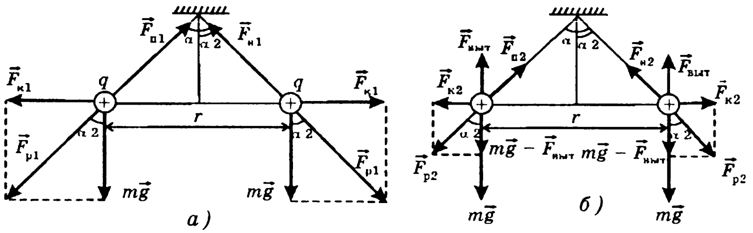


Рис. 1-17

Дано:
$\varepsilon_1 = 1$
$\varepsilon_2 = 2$
$\rho_0 = 800\ \frac{кг}{м^3}$

ρ – ?

Решение. Из условия задачи следует, что после того как шарики разошлись на угол α, отталкиваясь друг от друга из-за того, что заряды на них одноименные, они оказались в равновесии. Это значит, что согласно первому закону Ньютона силы, действующие на каждый шарик со стороны других тел, скомпенсировали друг друга и их равнодействующая стала равна нулю. Поэтому решение задачи и в этом случае мы начнем с составления уравнений, определяющих условия равновесия шариков в воздухе и в керосине.

На каждый шарик в воздухе будут действовать три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли, сила Кулона $\vec{F}_{к1}$ со стороны другого шарика, заряженного одноименно с первым, и сила натяжения нити $\vec{F}_{н1}$. Согласно первому закону Ньютона, равнодействующая этих сил, т. е. их векторная сумма, равна нулю: $m\vec{g} + \vec{F}_{к1} + \vec{F}_{н1} = 0$.

В скалярной записи мы такое же соотношение между силами записать не можем, так как они ориентированы под углом друг к другу. Поэтому, чтобы записать соотношение между этими силами в скалярном виде, обратимся к рис. 1-17, *а*. Из него следует, что угол между векторами силы тяжести $m\vec{g}$ и вектором силы $\vec{F}_{р1}$, являющейся равнодействующей сил $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{к1}$, равен углу $\alpha/2$ между нитью, на которой подвешен шарик, и высотой равнобедренного треугольника, образованного обеими нитями и отрезком r (отметим, что вектор силы $\vec{F}_{р1}$ является продолжением вектора $\vec{F}_{н1}$ и по модулю равен ему, поскольку эти векторы уравновешивают друг друга. Поэтому длина их должна быть одинакова).

Из прямоугольного треугольника, катетами которого являются вектор $m\vec{g}$ и штриховой отрезок, равный по

длине вектору $\vec{F}_{к1}$, а гипотенузой – вектор $\vec{F}_{р1}$, следует, что
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{F_{к1}}{mg}. \qquad (1)$$

Это соотношение и есть запись первого закона Ньютона в скалярном виде применительно к случаю, когда шарики были в воздухе.

Теперь рассмотрим случай, когда шарики оказались в керосине. При этом на каждый из них, помимо сил, названных прежде, стала действовать еще и выталкивающая сила $\vec{F}_{выт}$ со стороны керосина, направленная по закону Архимеда вертикально вверх, т. е. антинаправленно силе тяжести. Кроме того, следует отметить, что величина силы Кулона уменьшилась, поскольку в диэлектрике заряды взаимодействуют слабее, чем в вакууме. Вместе с ней уменьшилась и сила натяжения нити (рис. 1-17, б).

По первому закону Ньютона, записанному в векторном виде, поскольку заряды остались в равновесии, векторная сумма и в этом случае осталась равной нулю:
$$m\vec{g} + \vec{F}_{к2} + \vec{F}_{н2} + \vec{F}_{выт} = 0.$$

Для записи соотношения между силами, действующими на шарики, в скалярном виде опять рассмотрим прямоугольный треугольник на рис. 1-17, *б*. Теперь его катетами служат отрезок $mg - F_{выт}$ и отрезок, равный по длине вектору $\vec{F}_{к2}$, а гипотенузой – вектор $\vec{F}_{р2}$. Из этого треугольника следует, что
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{F_{к2}}{mg - F_{выт}}. \qquad (2)$$

Поскольку левые части равенств (1) и (2) равны, то приравняем их правые части:
$$\frac{F_{к1}}{mg} = \frac{F_{к2}}{mg - F_{выт}}. \qquad (3)$$

Теперь нам осталось выразить величины, входящие в полученное выражение, через величины, известные нам из условия задачи, и искомую плотность ρ. Конечно, в формулы, которые мы сейчас запишем, войдут и неизвестные величины (например, q и r), но поскольку они будут стоять в обеих частях равенства (3), то, вероятно, сократятся. Поскольку заряды, расположенные на шариках, можно считать точечными, то для определения сил $F_{к1}$ и $F_{к2}$ применим закон Кулона:
$$F_{к1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2} \qquad (4)$$
и
$$F_{к2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2}. \qquad (5)$$

Так как нам необходимо найти плотность материала шариков ρ, то выразим массу шариков m через плотность ρ и их объем V: $$m = \rho V. \quad (6)$$

Наконец, запишем формулу выталкивающей силы, которая, как это следует из закона Архимеда,

$$F_{\text{выт}} = \rho_0 g V. \quad (7)$$

Теперь подставим (4), (5), (6) и (7) в (3). Получим

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^2 \rho V g} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2 (\rho V g - \rho_0 V g)}.$$

Выполнив сокращения, получим $\varepsilon_1\rho = \varepsilon_2(\rho - \rho_0)$.

Отсюда уже легко определить искомую плотность материала шариков ρ: $\varepsilon_1\rho = \varepsilon_2(\rho - \rho_0)$, $\varepsilon_2\rho_0 = \varepsilon_2\rho - \varepsilon_1\rho$,

откуда $$\boxed{\rho = \frac{\varepsilon_2\rho_0}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}$$

Мы решили задачу в общем виде.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\rho = \frac{2 \cdot 800}{2-1}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1600\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = 1600$ кг/м³.

Задача 16

Три одноименных заряда $q_1 = 1$ нКл, $q_2 = 2$ нКл и $q_3 = 0{,}8$ нКл связаны горизонтальными нитями длиной $l = 50$ см (рис. 1-20) и находятся в равновесии. Найти силы натяжения нитей $F_{\text{н}1}$ и $F_{\text{н}2}$. Среда – воздух.

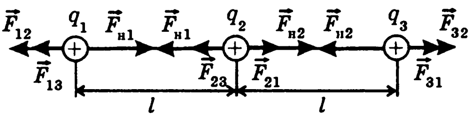


Рис. 1-18

Дано:
$q_1 = 1$ нКл
$q_2 = 2$ нКл
$q_3 = 0{,}8$ нКл
$l = 50$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

$F_{\text{н}1}$ – ?
$F_{\text{н}2}$ – ?

Решение. На заряд q_1 действуют следующие силы: сила отталкивания $\vec F_{12}$ со стороны заряда q_2, сила отталкивания $\vec F_{13}$ со стороны заряда q_3 и сила натяжения $F_{\text{н}1}$, которая антинаправлена силам Кулона и уравновешивает их, поэтому

$\vec F_{12} + \vec F_{13} + \vec F_{\text{н}1} = 0$, а по модулям

$$F_{12} + F_{13} = F_{\text{н}1}. \quad (1)$$

На заряд q_3 действуют сила отталкивания $\vec{F}_{31}$ от заряда q_1, сила отталкивания $\vec{F}_{32}$ от заряда q_2 и сила натяжения другой нити $F_{н2}$. Поскольку эти силы тоже уравновешивают друг друга, значит,

$$\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{н2} = 0 \text{, а по модулю } F_{н2} = F_{31} + F_{32}. \quad (2)$$

По закону Кулона $F_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}$, (3)

$$F_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon (2l)^2} = \frac{q_1 q_3}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}. \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (1), найдем силу натяжения $F_{н1}$:

$$F_{н1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2} + \frac{q_1 q_3}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2} = \frac{4q_1 q_2 + q_1 q_3}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2},$$

$$\boxed{F_{н1} = \frac{q_1(4q_2 + q_3)}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}}$$

По закону Кулона $F_{32} = \dfrac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}$. (5)

Кроме того, по модулю $F_{31} = F_{13}$ согласно третьему закону Ньютона.

Подставим (4) и (5) в (2):

$$F_{н2} = \frac{q_1 q_3}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2} = \frac{q_1 q_3 + 4q_2 q_3}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2} \quad \text{или}$$

$$\boxed{F_{н2} = \frac{q_3(q_1 + 4q_2)}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}}$$

Задача решена.

Ответ: $F_{н1} = \dfrac{q_1(4q_2 + q_3)}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}$, $F_{н2} = \dfrac{q_3(q_1 + 4q_2)}{16\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}$.

Задача 17

Построить график зависимости силы взаимодействия двух точечных зарядов $q_1 = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл от расстояния r между ними в интервале от $r_1 = 2$ см до $r_2 = 10$ см через каждые 2 см. Среда – воздух.

Дано:
$q_1 = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл
$q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$
$r_1 = 2$ см
$r_2 = 10$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

$F_к = F_к(r)$ – ?

Решение. Прежде чем строить график, запишем формулу, выражающую зависимость силы Кулона $F_к$ от расстояния r между зарядами, т. е. закон Кулона:

$$F_к = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Теперь вычислим $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}$:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Значит, $F_к = \dfrac{1{,}8 \cdot 10^{-8}}{r^2}$.

Теперь подставим в знаменатель этого выражения последовательно численные значения r от $r_1 = 2$ см до $r_2 = 10$ см и вычислим соответствующую им силу Кулона.

Например, $F_{к1} = \dfrac{1{,}8 \cdot 10^{-8}}{0{,}02^2}$ Н = $9 \cdot 10^{-5}$ Н и т. д.

Заполним таблицу:

r, м	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
F, Н	$4{,}5 \cdot 10^{-5}$	$1{,}1 \cdot 10^{-5}$	$0{,}5 \cdot 10^{-5}$	$0{,}3 \cdot 10^{-5}$	$0{,}2 \cdot 10^{-5}$

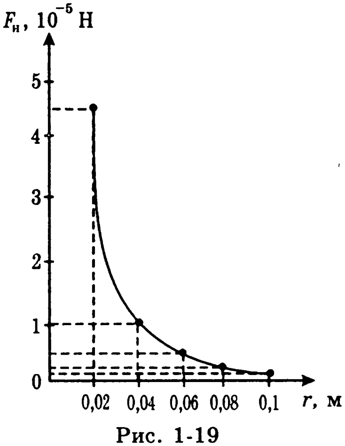


Рис. 1-19

Проведем оси координат и выберем масштаб. Будем откладывать по оси абсцисс расстояние r, а по оси ординат – силу Кулона $F_к$. Сила Кулона изменяется от $4{,}5 \cdot 10^{-5}$ до $0{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н, поэтому удобно, чтобы одному делению на оси ординат соответствовала сила $0{,}5 \cdot 10^{-5}$ Н. Расстояние r изменяется от 0,02 до 0,1 м, поэтому пусть одному делению на оси абсцисс соответствует отрезок 0,02 м, тем более, что нас просят выбрать интервал на оси расстояний, равный 2 см. Проведем оси координат, нанесем на них масштаб, затем обозначим точки и, соединив их линией, построим график $F_к = F_к(r)$ (рис 1-15).

Задача решена.

Задача 18

Шарик массой m с положительным зарядом q_1, подвешенный на нити длиной l, равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг неподвижного отрицательного заряда q_2. При этом угол между нитью и вертикалью равен α (рис. 1-20). Найти линейную скорость шарика v. Среда – воздух.

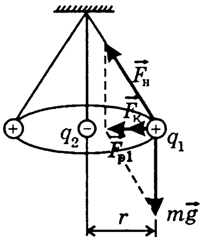


Рис. 1-20

Дано:
m
q_1
l
q_2
α
ε_0
ε
v – ?

Решение. На шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec g$, сила кулоновского притяжения $\vec F_н$ заряда q_1 к заряду q_2 и сила натяжения нити $\vec F_н$. По второму закону Ньютона векторная сумма этих сил равна произведению массы шарика m на его центростремительное ускорение $\vec a_ц$:

$$m\vec g + \vec F_к + \vec F_н = m\vec a_ц.$$

Для записи этого закона в скалярном виде, поскольку эти силы направлены под углом друг к другу, сначала сложим векторно силы $m\vec g$ и $\vec F_н$. Их равнодействующая, как следует из чертежа, по модулю $F_{равн1} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и сонаправлена с силой Кулона $\vec F_к$, поэтому в скалярном виде второй закон Ньютона запишем так:

$$F_{равн1} + F_к = ma_ц \text{ или } mg\,\mathrm{tg}\,\alpha + F_к = ma_ц. \qquad (1)$$

По закону Кулона $F_к = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где r – расстояние между зарядами q_1 и q_2. Это расстояние найдем из прямоугольного треугольника с гипотенузой l и острым углом α, противолежащим катету r, поэтому $r = l\sin\alpha$ и

тогда $$F_к = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2 \sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

По формуле центростремительного ускорения

$$a_ц = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{l \sin\alpha}. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1) и оттуда найдем искомую скорость v: $mg\,\mathrm{tg}\alpha + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2 \sin^2\alpha} = m\frac{v^2}{l\sin\alpha}$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha}{m} + \frac{l q_1 q_2 \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l^2 m \sin^2\alpha}},$$

$$\boxed{v = \sqrt{gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l m \sin\alpha}}}$$

Задача решена.

Ответ: $v = \sqrt{gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\alpha + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l m \sin\alpha}}$.

Задача 19

Четыре электрона, расположенных в вершинах квадрата со стороной a, равномерно вращаются вокруг ядра с зарядом q, расположенного в точке пересечения диагоналей квадрата (рис. 1-21). Определить частоту вращения электронов ν.

Дано:
m_e
e
a
q
ε_0
ε
ν – ?

Решение. Поскольку каждый электрон движется по окружности, то на него действует сила, направленная по радиусу к центру окружности перпендикулярно вектору его линейной скорости $\vec{v}$. Эта сила является равнодействующей всех сил, приложенных к данному электрону со стороны остальных трех и со стороны ядра.

Под действием этой равнодействующей электрон движется с центростремительным ускорением $\vec{a}_ц$, тоже направленным, как и равнодействующая сила, по радиусу к центру окружности. По второму закону Ньютона, записанному в векторном виде,

$$m_e \vec{a}_ц = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_0.$$

Здесь $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ – силы, приложенные к данному электрону со стороны остальных трех электронов, а $\vec{F}_0$ – сила, приложенная к данному электрону со стороны ядра.

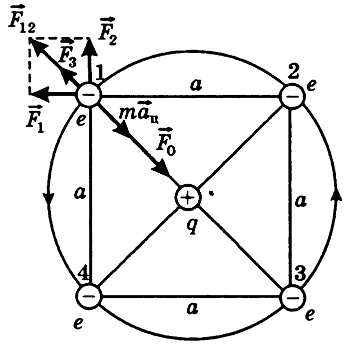


Рис. 1-21

Чтобы записать второй закон Ньютона в скалярной форме, обратимся к рис. 1-21. На нем показаны силы, приложенные к электрону 1, расположенному в верхнем левом углу квадрата. Сила $\vec{F}_1$ приложена к этому электрону со стороны электрона 2, который находится в этот момент в правом верхнем углу; сила $\vec{F}_2$ приложена к нему со стороны электрона 3, расположенного в левом нижнем углу; и, наконец, сила $\vec{F}_3$ приложена к этому электрону со стороны электрона 4, расположенного в нижнем правом углу (надо отметить, что эти электроны не покоятся, а движутся равномерно по окружности, это просто мы «поймали» момент, в который их расположение соответствует рис. 1-21). Кроме сил отталкивания со стороны электронов, на электрон 1 еще действует сила притяжения $\vec{F}_0$ со стороны ядра.

Обратим внимание, что силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по модулю равны друг другу, поскольку заряды электронов 2 и 3 одинаковы и одинаковы расстояния от них до электрона 1, поэтому равнодействующая этих сил по теореме Пифагора $F_{1,2} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = F_1\sqrt{2}$.

С равнодействующей $\vec{F}_{1,2}$ сонаправлена сила $\vec{F}_3$, действующая на электрон 1 со стороны электрона 4, поэтому равнодействующая всех трех сил, действующих на электрон 1 со стороны остальных трех электронов, по модулю равна сумме $F_{1,2} + F_3$ или $F_1\sqrt{2} + F_3$. Сила притяжения $\vec{F}_0$ электрона к ядру антинаправлена равнодействующей сил, приложенных к электрону 1 со стороны остальных электронов, поэтому равнодействующая всех сил, действующих на электрон 1 $m_e a_ц$, в скалярной записи

$$m_e a_ц = F_0 - \left(F_1\sqrt{2} + F_3\right). \qquad (1)$$

Отметим, что сила $\vec{F}_0$ направлена по радиусу к центру окружности (т. е. сонаправлена с центростремительным ускорением $\vec{a}_ц$), по которой вращаются электроны, поэтому она по величине превосходит равнодействующую сил, действующих на электрон 1 со стороны электронов 2, 3 и 4, направленную по радиусу от центра.

Уравнение (1) представляет собой запись второго закона Ньютона в скалярном виде применительно к условию данной задачи. Теперь нам нужно выразить величины, входящие в него, через известные величины и искомую. Рассмотрим каждую величину, входящую в это уравнение. Масса электрона m_e нам известна. Центростремительное ускорение электрона $a_ц$ мы не знаем, но его легко выразить через радиус окружности, по которой движутся электроны, и частоту их вращения ν.

Радиус окружности равен половине диагонали квадрата, в вершинах которого находятся электроны. Поскольку сторона этого квадрата согласно условию равна a, то диагональ его по теореме Пифагора равна $\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Тогда радиус окружности, по которой движутся электроны, равен $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (не перепутайте длину стороны a с центростремительным ускорением $a_ц$).

Центростремительное ускорение $a_ц$ связано с угловой скоростью электронов ω известной из кинематики формулой $a_ц = \omega^2 R$, где $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

В свою очередь угловая скорость ω связана с частотой вращения электронов ν соотношением $\omega = 2\pi\nu$. С учетом этого

$$a_ц = (2\pi\nu)^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = 2a\sqrt{2}(\pi\nu)^2. \qquad (2)$$

Теперь выразим силы F_0, F_1 и F_3, применив закон Кулона:

$$F_0 = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2} = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}, \qquad (3)$$

$$F_1 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}, \tag{4}$$

$$F_3 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}. \tag{5}$$

Теперь подставим (2), (3), (4) и (5) в (1), после чего, выполнив необходимые преобразования, определим искомую частоту ν:

$$m_e \cdot 2a\sqrt{2}(\pi\nu)^2 = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} - \left(\frac{e^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\right).$$

Несколько упростим полученное выражение:

$$2\sqrt{2}(\pi\nu)^2 m_e a = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} - \frac{e^2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8}\right),$$

$$2{,}8(\pi\nu)^2 m_e a = \frac{eq}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} - \frac{0{,}48\,e^2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2},$$

$$(\pi\nu)^2 m_e a = \frac{e}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\left(\frac{q}{5{,}6} - \frac{0{,}48\,e}{2{,}8}\right) = \frac{0{,}2\,e}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}(q-e),$$ так как

$\frac{1}{5{,}6} \approx \frac{0{,}48}{2{,}8} \approx 0{,}2$. Поэтому $\boxed{\nu = \frac{1}{\pi a}\sqrt{0{,}2\frac{e(q-e)}{\pi\varepsilon_0\varepsilon m_e a}}}$

Задача решена.

Ответ: $\nu = \frac{1}{\pi a}\sqrt{0{,}2\frac{e(q-e)}{\pi\varepsilon_0\varepsilon m_e a}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти массу m воды, содержащей $N = 10^{25}$ электронов. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, молярная масса воды $M = 0{,}018$ кг/моль.

Ответ: $m = \frac{MN}{10N_A} = 0{,}03$ кг.

Задача 2. Сколько избыточных электронов находится на каждой из двух пылинок, если на расстоянии $r = 2$ см в воздухе они отталкиваются с силой $F = 1 \cdot 10^{-7}$ нН?

Ответ: $N = 2\dfrac{r}{e}\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon F} = 1{,}3 \cdot 10^4$.

Задача 3. Во сколько раз изменится сила взаимодействия двух точечных зарядов, если расстояние между ними увеличить в n_1 раз и поместить в среду с относительной диэлектрической проницаемостью в n_2 раз большей, чем прежде?

Ответ: $\dfrac{F_1}{F_2} = n_1^2 n_2$.

Задача 4. Во сколько раз надо изменить расстояние между зарядами, если один из них увеличить в n_1 раз, второй уменьшить в n_2 раз, а среда и сила взаимодействия зарядов останутся прежними?

Ответ: $\dfrac{r_2}{r_1} = \sqrt{\dfrac{n_1}{n_2}}$.

Задача 5. Два одинаковых шарика зарядили одноименными зарядами так, что заряд одного из них оказался в 3 раза больше заряда другого, а затем привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Во сколько раз по модулю изменится сила их взаимодействия?

Ответ: $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{4}{3}$.

Задача 6. Маленьким шариком, содержащим N избыточных электронов, коснулись поверхности очень большого незаряженного металлического шара диаметром D. Найти поверхностную плотность зарядов σ на большом шаре после этого.

Ответ: $\sigma = \dfrac{Ne}{\pi D^2}$.

Задача 7. Точечные заряды $q_1 = 2$ нКл и $q_2 = -1$ нКл расположены на расстоянии $r = 4$ см друг от друга. Где и какой заряд q_0 надо поместить, чтобы все три заряда оказались в равновесии?

Ответ: $r_2 = \dfrac{r\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}} = 10$ см правее заряда q_2, если заряд q_1 расположен слева, а q_2 – справа; $q_0 = q_1\left(\dfrac{r_2}{r}\right)^2 = 12{,}5$ нКл.

Задача 8. Заряды $+2q$ и $-3q$ расположены так, как показано на рис. 1-22.

Заряд $+q$ помещают сначала в точку 1, а затем в точку 2. Во сколько раз сила F_1, действующая на заряд $+q$ в точке 1, отличается от силы F_2, действующей на него точке 2?

Ответ: $\dfrac{F_1}{F_2} = 1{,}8$.

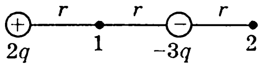


Рис. 1-22

Задача 9. С заряженного шарика на незаряженный передали 40% всех избыточных электронов. После этого шарики развели на расстояние r между их поверхностями. С какой силой F стали отталкиваться шарики? Заряженный шарик вначале содержал N избыточных электронов. Радиус каждого шарика равен расстоянию r между их поверхностями.

Ответ: $F = \dfrac{2 \cdot 10^{-2}}{3\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{Ne}{r}\right)^2$.

Задача 10. С какой силой F действуют два точечных положительных заряда q_1 = 1 нКл и q_2 = 2 нКл, расположенных на расстоянии r = 5 см друг от друга, на заряд q_0 = 3 нКл, расположенный на расстоянии r_1 = 3 см от заряда q_1 и r_2 = 4 см от заряда q_2? Среда – воздух.

Примечание: обратите внимание на расстояния 3, 4 и 5 см.

Ответ: $F = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\left(\dfrac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\dfrac{q_2}{r_2^2}\right)^2} = 4{,}5 \cdot 10^{-9}$ Н.

Задача 11. Наэлектризованный маленький шарик был приведен в соприкосновение с равным ему ненаэлектризованным, после чего шарики раздвинули на расстояние r = 9 см. При этом между ними возникла сила отталкивания F = 0,25 мН. Каков был первоначальный заряд q_0 на шарике?

Ответ: $q_0 = 4r\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon F} = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл.

Задача 12. Во сколько раз изменится сила взаимодействия двух заряженных шаров, если расстояние между их центрами и заряд одного из них увеличить в n раз?

Ответ: $\dfrac{F_1}{F_2} = n$, уменьшится в n раз.

Задача 13. В вершине равнобедренного треугольника с основанием r и высотой h расположен заряд q_1, а в углах при основании расположены заряды q_2 и q_3, причем q_3 по модулю больше q_2. С какой силой F все три заряда будут действовать на заряд q_0, расположенный посередине основания? Среда – воздух.

Ответ: $F = \dfrac{q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\left(\dfrac{q_1}{4h^2}\right)^2 + \left(\dfrac{q_3 - q_2}{r^2}\right)^2}$.

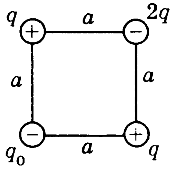


Рис. 1-23

Задача 14. В двух вершинах квадрата находятся положительные заряды q, а в третьей – отрицательный заряд $-2q$ (рис. 1-23). С какой силой F они будут действовать на отрицательный заряд $-q_0$, помещенный в четвертую вершину? Сторона квадрата a.

Ответ: $F = \dfrac{qq_0}{10\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$.

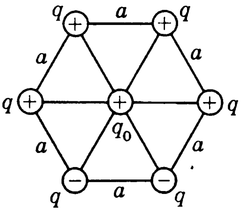


Рис. 1-24

Задача 15. В четырех вершинах правильного шестиугольника со стороной a находятся заряды $+q$, а в двух $-q$ (рис. 1-24).

С какой силой F все эти заряды действуют на заряд $+q_0$, помещенный в центр шестиугольника? Среда – воздух.

Ответ: $F = 0{,}8\dfrac{qq_0}{\pi\varepsilon\varepsilon_0 a^2}$.

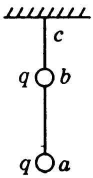


Рис. 1-25

Задача 16. Два одинаковых шарика подвешены на нити так, как показано на рис. 1-25.

Масса каждого шарика m = 0,2 г, расстояние между ними r = 3 см. Найти силы натяжения нитей $F_{н1}$ и $F_{н2}$ на участках ab и bc. Рассмотреть случаи, когда шарики заряжены одноименно и разноименно. Заряд на каждом шарике q = 10 нКл.

Ответ: а) одноименно:

$$F_{н1} = mg + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = 3\cdot10^{-3}\ \text{Н};$$

$$F_{н2} = 2mg = 4\cdot10^{-3}\ \text{Н};$$

б) разноименно: $F_{н1} = mg - \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = 1\cdot10^{-3}$ Н;

$F_{н2} = 2mg = 4\cdot10^{-3}$ Н.

Задача 17. Когда два одинаковых шарика массой по m = 400 мг, подвешенные на закрепленных в одной точке нитях равной длины, зарядили одноименными и одинаковыми зарядами, они разошлись на r = 15 см так, что нити образовали прямой угол. Найти заряд каждого шарика q.

Ответ: $q = 2r\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon mg\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = 1\cdot10^{-7}$ Кл.

Задача 18. К маленькому шарику массой m = 1 г, подвешенному на нити и несущему заряд q_1 = 2 мкКл, поднесли снизу заряд q_2 = –4 мкКл, расположив его на расстоянии r = 2 см от шарика. Во сколько раз изменилась при этом сила натяжения нити? Среда – воздух.

Ответ: $\dfrac{F_{н2}}{F_{н1}} = 1 + \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 mg} = 170$.

Задача 19. На невесомой упругой пружине подвешен маленький шарик массой m с зарядом q_1 . К нему подносят снизу одноименный заряд q_2. Во сколько раз изменится деформация пружины? Среда – воздух.

Ответ: $\dfrac{x_2}{x_1} = 1 - \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2 mg}$.

Задача 20. Три одноименных заряда q, $2q$ и $3q$ связаны горизонтальными нитями длиной l и $2l$ и находятся в равновесии. Насколько сила натяжения длинной нити отличается от силы натяжения короткой (рис. 1-26)? Среда – воздух.

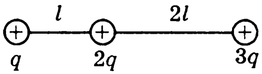


Рис. 1-26

Ответ: $\Delta F_н = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 \varepsilon l^2}$.

Задача 21. На двух одинаковых капельках воды находится по одному избыточному электрону. При этом сила электростатического отталкивания капелек уравновешивает силу их гравитационного притяжения. Найти радиус R капелек. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{11}$ Н $\cdot\ 10^{-7}$ Н·м^2/кг^2.

Ответ: $R = \sqrt[3]{\dfrac{3e}{8\pi\rho\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon G}}} = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 22. Построить график зависимости силы взаимодействия двух точечных зарядов $q_1 = 2$ мкКл и $q_2 = 4$ мкКл, расположенных в воде, от расстояния r между ними. Относительная диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon = 81$.

Задача 23. Определить линейную скорость v и период электрона T, движущегося по круговой орбите радиусом $R = 5 \cdot 10^{-11}$ м вокруг ядра атома водорода.

Ответ: $v = \dfrac{e}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e R}} = 2 \cdot 10^6$ м/с , $T = \dfrac{2\pi R}{v} = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ с.

Задача 24. Два одинаковых разноименно заряженных шарика расположены на расстоянии r между их центрами и притягиваются друг к другу с силой F_1. После того, как их соединили проволочкой из металла, а затем убрали ее, они стали отталкиваться с силой F_2. Найти первоначальные заряды q_1 и q_2 на шариках.

Ответ: $q_1 = r\left(\sqrt{4\pi\varepsilon_0\varepsilon F_2} + \sqrt{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(F_2 - F_1)}\right)$,

$q_2 = r\left(\sqrt{4\pi\varepsilon_0\varepsilon F_2} - \sqrt{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(F_2 - F_1)}\right)$.

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Переносчиком взаимодействия электрических зарядов является электрическое поле.

Определение электрического поля: электрическое поле – это форма материи, окружающей электрически заряженные тела. Электрическое поле является составной частью единого электромагнитного поля.

Электрическое поле, окружающее неподвижные заряды, называется электростатическим (т. е. полем неподвижных зарядов).

Силовой характеристикой электрического поля является его напряженность $\vec{E}$.

Определение напряженности электрического поля: напряженность электрического поля в данной точке равна отношению силы, действующей на заряд, внесенный в эту точку, к модулю этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Здесь $\vec{F}$ – сила, действующая со стороны электрического поля напряженностью $\vec{E}$ на заряд q, внесенный в эту точку поля.

Напоминаем, что закон Кулона можно применять для определения силы взаимодействия только точечных зарядов или заряженных тел сферической формы. В других случаях силу взаимодействия тел, несущих протяженный заряд, или силу взаимодействия протяженного, но не сферического заряда с точечным, можно определить, умножив напряженность поля одного заряженного тела, принятого за заряд-источник, на заряд другого тела – пробный заряд – по формуле $F = qE$.

Здесь F – сила, действующая на заряд q (точечный или протяженный, все равно), E – напряженность электрического поля, в котором находится заряд q.

Напряженность $\vec{E}$ – важнейшая силовая характеристика электрического поля. Она определяется зарядом – источником данного электрического поля и не зависит от пробного заряда q, внесенного в это поле. Конечно, в условии задачи заряд не называют пробным или источником, но по условию всегда можно догадаться, о чем идет речь. Если сказано, что вокруг заряда q создано электрическое поле или в поле заряда q вносят другой заряд, то, конечно, заряд q – источник этого поля. А если говорится, что заряд q вносят в электрическое поле или что на заряд q действует в электрическом поле сила, или, наконец, что заряд q перемещают в электрическом поле, совершая работу (или что поле перемещает заряд q) и т. д., то заряд q в этом случае является пробным зарядом. Это очень важно определить правильно, потому что от того, каким является заряд q, пробным или источником поля, зависит выбор формулы напряженности электрического поля E.

Если заряд q пробный, напряженность поля E, в которое он внесен, можно определить отношением силы F, с которой поле действует на него, к модулю этого заряда q:

$$E = \frac{F}{q}. \qquad (2.1)$$

Если же заряд q – источник электрического поля, то напряженность этого поля E в данной точке пространства, по которому оно распределено, зависит от размеров и формы этого заряда-источника, от расстояния между точкой, в которой определяется напряженность, и зарядом-источником, и диэлектрических свойств среды, в которой это поле создано.

Напряженность поля точечного заряда-источника или заряженной сферы в некоторой точке пространства, занятого этим полем, определяется выражением

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (2.2)$$

Здесь r – расстояние между точкой, в которой определяется напряженность E электрического поля, и точечным зарядом – источником этого поля, q – модуль этого заряда. Если же заряд-источник – шар, то r – расстояние между точкой, в которой определяется напряженность E, и центром шара (рис. 2-1).

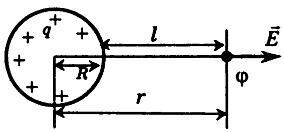


Рис. 2-1

Если в условии задачи даны радиус шара R (или диаметр $D = 2R$), а также расстояние l между точкой, в которой определяется напряженность E, и поверхностью шара, то $r = R + l$, и тогда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+l)^2}. \qquad (2.3)$$

Если электрическое поле создано бесконечной равномерно заряженной плоскостью (рис. 2-2, *а*), то напряженность поля этой плоскости во всех точках окружающего ее пространства одинакова и определяется выражением $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$,

где $\sigma = \dfrac{q}{S}$.

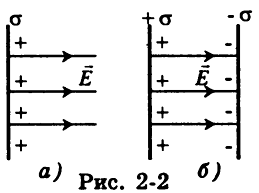


Рис. 2-2

Здесь σ – поверхностная плотность зарядов на плоскости, равная заряду на единице площади поверхности, когда заряды распределены по ней равномерно.

Если электрическое поле создано двумя бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскостями с одинаковой поверхностной плотностью зарядов σ (рис. 2-2, б), то напряженность электрического поля между ними вдвое больше, чем напряженность поля одного из них, поэтому она определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \tag{2.5}$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на каждой из плоскостей.

Таким образом, мы видим, что как напряженность поля бесконечной плоскости, так и напряженность поля между двумя разноименно заряженными плоскостями одинаковы во всех точках пространства, поскольку они не зависят от расстояния до этой плоскости или каждой из плоскостей. Такое поле называется однородным. Конечно, бесконечных плоскостей не бывает. Но если расстояние от точки пространства до заряженной плоскости или расстояние между плоскостями мало по сравнению с размерами этих плоскостей, то эти формулы при расчете напряженности поля таких плоскостей применимы. Так, в частности, по формуле (2.4) можно определять напряженность поля между обкладками плоского конденсатора, когда на его обкладках содержатся одинаковые по модулю и разноименные заряды.

Напряженность поля заряженной нити или стержня

$E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где $\tau = \dfrac{q}{l}$ – линейная плотность зарядов на нити,

r – расстояние от точки поля с напряженностью E до нити.

Напряженность – векторная величина. Вектор напряженности $\vec{E}$ сонаправлен с вектором силы $\vec{F}$, которая будет действовать на положительный пробный заряд q, если этот заряд внести в электрическое поле заряда-источника q_0. При этом очевидно, что если заряд-источник q_0 положительный, то вектор силы $\vec{F}$, приложенной к пробному заряду q, «отвернется» от заряда-источника q_0, а если заряд-источник q_0 отрицательный, то вектор силы $\vec{F}$ «повернется» к заряду-источнику. Но, как мы отметили, вектор напряженности $\vec{E}$ сонаправлен с вектором силы $\vec{F}$, если пробный заряд положителен. Поэтому вектор $\vec{E}$ тоже «отворачивается» от положительного заряда-источника в данной точке поля (рис. 2-3, *а*), причем и когда в этой точке нет никакого пробного заряда, а имеется только электрическое поле (мы уже отмечали, что ни величина, ни направление вектора $\vec{E}$ не зависят ни от величины, ни от знака пробного заряда, а целиком определяются величиной и знаком заряда-источника, расстоянием до него и окружающей средой).

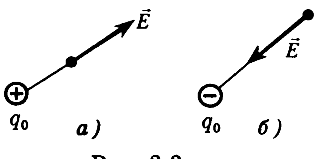


Рис. 2-3

Если же заряд-источник q_0 отрицателен, то вектор напряженности поля $\vec{E}$ этого заряда в любой точке окружающего пространства «повернут» к этому заряду (рис. 2-3, б).

Если поле в данной точке пространства создано N зарядами-источниками q_1, q_2, q_3, ..., q_N, то результирующая напряженность этого поля $\vec{E}$ по принципу суперпозиции полей равна векторной сумме напряженностей полей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots, \vec{E}_N$, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_N$.

Если все эти векторы ориентированы вдоль одной прямой, то результирующая напряженность равна алгебраической сумме модулей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3, \ldots, \vec{E}_N$, с учетом знаков, стоящих перед ними. Здесь так же, как и в случае с определением результирующей силы, одно из направлений выбирается положительным, тогда перед напряженностями, сонаправленными с этим направлением, ставится знак «плюс», а перед антинаправленными – знак «минус».

Если все векторы $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ и т. д. сонаправлены, то результирующая напряженность равна их арифметической сумме.

Если векторы $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ и т. д. ориентированы под углом друг к другу, то для определения результирующего вектора напряженности $\vec{E}$ приходится пользоваться правилом векторного сложения (правилом параллелограмма), а для определения модуля вектора $\vec{E}$ привлекать теоремы и формулы геометрии и тригонометрии.

Рассмотрим примеры применения принципа суперпозиции к определению результирующего вектора $\vec{E}$ поля, созданного точечными зарядами.

Пример 1. Два точечных заряда $+q_1$ и $-q_2$ расположены на расстоянии r друг от друга. Найдем напряженность поля, созданного ими в точках 1, 2 и 3 (рис. 2-4). Расстояния r_1, r_2 и r_3 известны.

Заряд $+q_1$ создает в точке 1 поле, вектор напряженности которого $\vec{E}_{11}$ направлен от заряда q_1, поскольку этот заряд положительный. Заряд $-q_2$ создает в этой же точке 1 поле, вектор напряженности которого $\vec{E}_{12}$ направлен к заряду $-q_2$, поскольку тот отрицательный. Результирующая напряженность поля в точке 1 $\vec{E}_{p1}$ по принципу суперпозиции равна векторной сумме векторов $\vec{E}_{11}$ и $\vec{E}_{12}$, а по модулю она будет равна их разности, поскольку векторы $\vec{E}_{11}$ и $\vec{E}_{12}$ антинаправлены. Поэтому в векторной записи $\vec{E}_{p1} = \vec{E}_{11} + \vec{E}_{12}$, а в скалярной $E_{p1} = E_{11} - E_{12}$,

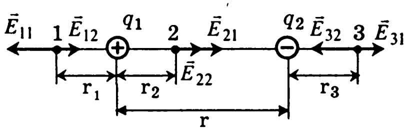


Рис. 2-4

где $$E_{11} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} \text{ и } E_{12} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r_1 + r)^2}.$$

Если при вычислениях $\vec{E}_{p1}$ окажется отрицательной величиной, значит, E_{12} больше E_{11}. Понятно, что величины E_{11} и E_{12} зависят от модулей зарядов q_1 и q_2 и от расстояний между ними и точками, в которых E_{11} и E_{12} определяются.

Рассуждая аналогично, получим: $\vec{E}_{p2} = \vec{E}_{21} + \vec{E}_{22}$ и

$E_{p2} = E_{21} + E_{22}$, где $E_{21} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}$ и $E_{22} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r - r_2)^2}$.

$\vec{E}_{p3} = \vec{E}_{31} + \vec{E}_{32}$, $E_{p3} = E_{32} - E_{31}$, $E_{32} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2}$ и

$$E_{31} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r + r_3)^2}.$$

Пример 2. Два точечных заряда $+q_1$ и $-q_2$ расположены на расстоянии r друг от друга. Определим напряженность $\vec{E}_p$ поля, созданного ими в точке М (рис. 2-5). Расстояния r_1 и r_2 от зарядов до точки М известны.

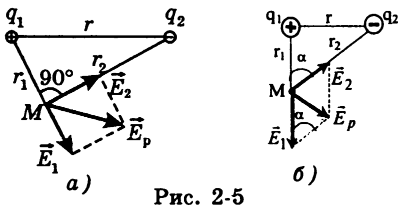


Рис. 2-5

Прежде всего обратите внимание на величины расстояний r_1, r_2 и r. Проверьте, не равен ли r^2 сумме $r_1^2 + r_2^2$ (например, если $r = 5$ см, $r_1 = 3$ см и $r_2 = 4$ см, или $r = 10$ см, $r_1 = 6$ см, $r_2 = 8$ см). Если да, то треугольник, образованный отрезками r_1, r_2 и r, прямоугольный (рис. 2-5, *а*) и задача упрощается. Постройте в точке М векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, выбрав их направление с учетом знаков зарядов $+q_1$ и $-q_2$, и, применив правило параллелограмма, покажите $\vec{E}_p$. Далее обратите внимание на то, что треугольник, составленный из векторов E_1, E_2 и E_p, тоже должен быть прямоугольным, так как векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ параллельны катетам r_1 и r_2. По принципу суперпозиции вектор $\vec{E}_p$ по-прежнему равен сумме векторов $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Для определения модуля E_p здесь можно применить теорему Пифагора: $E_p = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$, где $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}$, и $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}$, где q_1 и q_2 – модули зарядов.

Если же отрезки r_1, r_2 и r таковы, что треугольник, образованный ими, не является прямоугольным, то и треугольник, образованный векторами E_p, E_1 и E_2, не является прямоугольным тоже. В этом случае для определения модуля E_p можно применить теорему косинусов: $E_p = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}$. (2-5)

Далее обратим внимание, что в треугольниках, образованных отрезками r_1, r_2 и r, а также векторами $\vec{E}_p$, $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, есть равные углы, лежащие против отрезка r и вектора $\vec{E}_p$ (поскольку они образованы параллельными сторонами). Поэтому $\cos\alpha$ можно найти, тоже воспользовавшись теоремой косинусов, применив ее уже к треугольнику со сторонами r_1, r_2 и r: $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$.

Выразив отсюда $\cos\alpha$ и определив значение E_1 и E_2 по формулам $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}$ и $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}$, подставьте их в формулу (2.5), и величина E_p будет найдена.

Пример 3. В трех вершинах квадрата расположены равные по модулю заряды q, $-q$ и q (рис. 2-6). Сторона квадрата a. Найдем результирующую напряженность поля этих зарядов E_p в четвертой вершине.

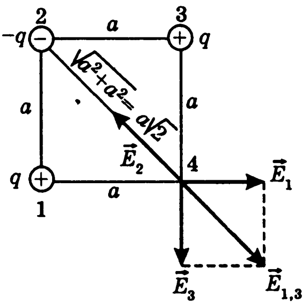


Рис. 2-6

Поскольку заряды в вершинах 1 и 3 равны друг другу и расположены от четвертой вершины на равных расстояниях a, то векторы напряженности $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ полей, созданных ими, по модулю тоже равны друг другу: $E_1 = E_3 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$.

Тогда по теореме Пифагора результирующая напряженность полей, созданных этими зарядами

$$E_{1,3} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{E_1^2 + E_1^2} = \sqrt{2E_1^2} = E_1\sqrt{2}.$$

Напряженность поля, созданного в точке 4 отрицательным зарядом $-q$, расположенным в точке 2, по модулю

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}.$$

Вектор $\vec{E}_2$ направлен по диагонали квадрата к заряду $-q$ и антинаправлен вектору $\vec{E}_{1,3}$, поэтому результирующая напряженность поля, созданного всеми тремя зарядами в точке 4,

$$E_p = E_{1,3} - E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\sqrt{2} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} = 0{,}23\frac{q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}.$$

Если электрическое поле создано между двумя параллельными, бесконечными, равномерно заряженными плоскостями и если поверхностные плотности зарядов на этих плоскостях разные и равны соответственно σ_1 и σ_2, то в случае разноименных зарядов на плоскостях (рис. 2-7, *а*) напряженность поля между ними $E = E_1 + E_2 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} + \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, а если плоскости заряжены одноименно (рис. 2-7, *б*), то $E = E_1 - E_2 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} - \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

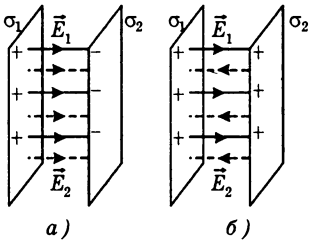


Рис. 2-7

Если в поле одного протяженного заряда, например, заряженной бесконечной плоскости с поверхностной плотностью зарядов σ внесен другой протяженный заряд, например, заряженная нить длиной l с линейной плотностью зарядов τ, то на эту нить со стороны поля плоскости будет действовать сила Кулона $F_к$, равная произведению напряженности E поля плоскости на заряд q нити: $F_к = qE$, где

$$q = \tau l \quad \text{и} \quad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Внутри проводника любой формы с неподвижными зарядами (которые всегда распределяются по его поверхности), как полого, так и сплошного, напряженность электрического поля равна нулю. Если этот проводник имеет форму сферы радиусом R, то напряженность поля в каждой точке на его поверхности определяется формулой $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2}$, где q – модуль заряда этой сферы.

В каждой точке пространства, окружающего эту сферу, напряженность поля можно определить по формуле $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где r – расстояние от этой точки до центра сферы.

При решении задач на принцип суперпозиции полей необходимо делать подробный чертеж. Не забывайте проверить единицу полученной величины.

Решение отдельных задач

Задача 1

Электрон движется без начальной скорости вдоль силовой линии однородного электрического поля напряженностью $E = 2 \cdot 10^4$ Н/Кл. Какой путь S он пролетит прежде, чем его скорость станет $\upsilon = 100$ км/с? Среда – воздух. Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$кг.

Дано:
$v_0 = 0$
$E = 2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$
$v = 100 \dfrac{\text{км}}{\text{с}}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

S – ?

Решение. Обратимся к рис. 2-8. Электрон – частица, несущая отрицательный заряд, и согласно условию задачи он разгоняется электрическим полем, т. е. движется к положительным зарядам – источникам этого поля. А линии вектора $\vec{E}$ (силовые линии поля) всегда направлены от «плюса» к «минусу» источника. Значит, электрон движется навстречу линиям вектора напряженности под действием силы $F = m_e a$, согласно второму закону Ньютона.

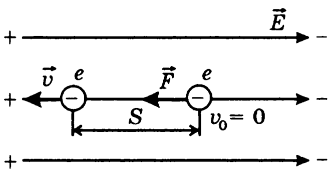


Рис. 2-8

Силу F определить по закону Кулона нельзя, так как, несмотря на то, что электрон – заряд точечный, другой заряд – источник поля – протяженный, ведь поле однородное, и, значит, оно создано одной или двумя заряженными пластинами, а закон Кулона можно применять только тогда, когда оба заряда точечные.

В случае протяженного заряда – источника поля силу F можно определить через напряженность поля, воспользовавшись формулой (2-1): $F = eE$, ведь здесь $q = e$.

Тогда $eE = m_e a$, откуда ускорение $a = \dfrac{eE}{m_e}$. (1)

Для определения пути S воспользуемся формулой кинематики: $v^2 - v_0^2 = 2aS$.

Здесь $v_0 = 0$, поэтому $v^2 = 2aS$, откуда $S = \dfrac{v^2}{2a}$. (2)

Нам осталось подставить (1) в (2): $\boxed{S = \dfrac{m_e v^2}{2Ee}}$

Переведем единицу скорости в СИ: $100 \dfrac{\text{км}}{\text{с}} = 1 \cdot 10^5 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Проверим единицу полученной величины:

$$[S]_{\text{СИ}} = \frac{\text{кг} \cdot \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}} \cdot \text{Кл}} = \frac{\text{кг}\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Произведем вычисления:

$$S = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{4}}\ \text{м} = 1{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{м}.$$

Ответ: $S = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ м.

Задача 2

Пылинка с зарядом q = 1нКл неподвижно висит в однородном электрическом поле напряженностью $E = 2 \cdot 10^4$ Н/Кл, вектор напряженности которого направлен вверх (рис. 2-9). Найти массу пылинки m. Сколько избыточных электронов N содержит пылинка?

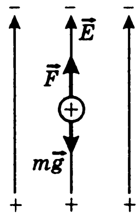


Рис. 2-9

Дано:
q = 1нКл
$E = 2 \cdot 10^4 \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$
$mg = F$
$g = 9{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

m – ?
N – ?

Решение. Поскольку вектор $\vec{E}$ согласно условию направлен вверх, значит, снизу располагаются положительные заряды – источники этого поля, а сверху – отрицательные. Чтобы пылинка не падала, на нее со стороны поля должна действовать сила $\vec{F}$, направленная вверх и уравновешивающая силу тяжести $m\vec{g}$, которая направлена вниз. Значит, пылинка несет на себе положительный заряд, так как положительные заряды – источники, расположенные снизу, ее отталкивают, а отрицательные сверху притягивают к себе.

При равновесии пылинки $\vec{F} + m\vec{g} = 0$, а в скалярной записи $F = mg$, где $F = qE$, поэтому $qE = mg$, откуда

$$\boxed{m = \frac{qE}{g}}$$

Число нескомпенсированных электронов N равно отношению заряда пылинки q к модулю заряда электрона e:

$$\boxed{N = \frac{q}{e}}$$

Переведем единицу заряда в СИ: 1 нКл = $1 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Проверьте единицу полученной величины самостоятельно.

Произведем вычисления:

$$m = \frac{1 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{4}}{9{,}8}\ \text{кг} = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{кг}.$$

$$N = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 6 \cdot 10^9.$$

Ответ: $m = 2 \cdot 10^{-6}$ кг, $N = 6 \cdot 10^9$.

Задача 3

Заряженный шар диаметром D находится в равновесии в жидком диэлектрике плотностью ρ_1 с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 2-10). Найти поверхностную плотность зарядов на шаре σ, если плотность вещества шара ρ_2. Напряженность электрического поля в диэлектрике E, вектор напряженности направлен вверх.

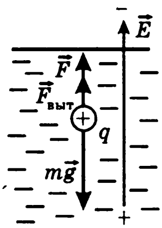


Рис. 2-10

Дано:
D
ρ_1
ε
ρ_2
E
g
σ – ?

Решение. На шар в жидком диэлектрике действуют три силы: электрическая сила $F = qE$, выталкивающая (архимедова) сила $F_{выт} = \rho_1 gV$ и сила тяжести mg. Первые две направлены вверх, а сила тяжести – вниз.

При равновесии $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{выт} = 0$, а в скалярной записи $F + F_{выт} = mg$ или $qE + \rho_1 gV = mg$.

Здесь $q = \sigma S$ – модуль заряда на шаре, $S = \pi D^2$ – площадь поверхности шара, $V = \frac{1}{6}\pi D^3$ – объем шара и $m = \rho_2 V$ – масса шара. С учетом этого запишем:

$$\sigma \cdot \pi D^2 E + \rho_1 g \frac{1}{6}\pi D^3 = \rho_2 \frac{1}{6}\pi D^3 g, \quad 6\sigma E + \rho_1 gD = \rho_2 gD.$$

Отсюда найдем поверхностную плоскость зарядов σ:

$$\boxed{\sigma = \frac{gD(\rho_2 - \rho_1)}{6E}}$$

Задача решена.

Ответ: $\sigma = \dfrac{gD(\rho_2 - \rho_1)}{6E}$.

Задача 4

На каком расстоянии r_2 от точечного заряда напряженность электрического поля этого заряда в жидком диэлектрике с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 81$ (вода) такая же, как на расстоянии $r_1 = 9$ см от этого заряда в воздухе?

Дано:	
$\varepsilon_1 = 1$	
$\varepsilon_2 = 81$	
$E_1 = E_2$	
$r_1 = 9$ см	
r_2 – ?	

Обозначим ε_1 диэлектрическую проницаемость воздуха, E_1 – напряженность поля в воздухе, E_2 – напряженность поля в диэлектрике.

Решение. Напряженность поля точечного заряда q в воздухе и в диэлектрике определяется формулами

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1^2} \text{ и } E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2^2}.$$

Поскольку $E_1 = E_2$, то $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_1^2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r_2^2}$,

$\varepsilon_1 r_1^2 = \varepsilon_2 r_2^2$, откуда $\boxed{r_2 = r_1\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$

Произведем вычисления: $r_2 = 9\sqrt{\dfrac{1}{81}}$ см $= 1$ см.

Ответ: $r_2 = 1$см.

Задача 5

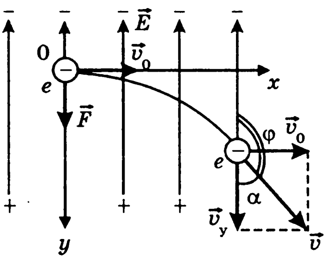


Рис. 2-11

Электрон влетает в однородное электрическое поле со скоростью v_0, направленной перпендикулярно вектору напряженности $\vec{E}$ (рис. 2-11). Под каким углом φ к линиям вектора напряженности будет направлен вектор его скорости через время t полета в поле? Чему будет равна работа сил поля A за это время? Чему будет равна кинетическая энергия электрона $W_к$ через время t ? Напряженность поля E. Масса электрона m_e и его заряд e известны.

Дано:	
E	
m_e	
v_0	
e	
g	
$v_{0y} = 0$	
t	
φ – ?	
A – ?	
$W_к$ – ?	

Решение. ***Внимание!*** В нашем прежнем пособии «Репетитор по физике» мы обозначали энергию буквой E, как это делается в большинстве школьных учебников. В этой книге мы будем обозначать энергию буквой W, чтобы не возникло путаницы с напряженностью электрического поля E.

На электрон, влетевший в электрическое поле, будет действовать со стороны поля сила $\vec{F}$, антинаправленная вектору напряженности $\vec{E}$, потому что линии вектора $\vec{E}$ направлены от «плюса» к «минусу», а отрицательный электрон притягивается к «плюсу». В результате движение электрона, влетевшего в поле перпендикулярно линиям вектора $\vec{E}$, будет представлять собой суперпозицию двух движений: равномерного и прямолинейного в направлении вектора начальной скорости электрона $\vec{v}_0$ (ведь в этом направлении на электрон никакие силы не действуют) и равноускоренного вниз под действием электрической силы $\vec{F}$. Такое движение аналогично движению камешка, брошенного горизонтально в поле сил тяжести. Вы помните, мы решали такие задачи, когда изучали кинематику. В таком случае тело движется по параболе.

Наш электрон тоже станет двигаться по параболе. Через время t его скорость станет равна v. Вектор этой скорости $\vec{v}$ равен векторной сумме начальной скорости $\vec{v}_0$, которая за время движения электрона не изменяется, и вектора $\vec{v}_y$, который является вектором конечной скорости электрона при его движении навстречу линии вектора $\vec{E}$ под действием силы $\vec{F}$. А начальная скорость электрона в направлении оси OY $v_{0y} = 0$, ведь он влетел в электрическое поле горизонтально, перпендикулярно линиям вектора $\vec{E}$, поэтому проекция его начальной скорости на ось OY равна нулю.

По теореме Пифагора $v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2}$. (1)

Проекцию скорости v_y найдем, воспользовавшись уравнением кинематики: $v_y = v_{0y} + at$ или $v_y = at$, ведь $v_{0y} = 0$.

Ускорение электрона a найдем по второму закону Ньютона: $a = \frac{F}{m_e}$, где $F = eE$, поэтому $a = \frac{eE}{m_e}$.

С учетом этого $v_y = \frac{eEt}{m_e}$. (2)

Подставим (2) в (1): $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEt}{m_e}\right)^2}$. (3)

Теперь несложно найти кинетическую энергию электрона $W_к$ по формуле $\boxed{W_к = \frac{m_e}{2}\left(v_0^2 + \left(\frac{eEt}{m_e}\right)^2\right)}$

Из прямоугольного треугольника, гипотенузой которого служит вектор $\vec{v}$, найдем тангенс угла α (можно найти синус или косинус этого угла, но тангенс проще):

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_0}{v_y}$ или с учетом (2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{v_0 m_e}{eEt}$, откуда $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{mv_0}{eEt}\right)$. Искомый угол $\varphi = 180° - \alpha$. Следовательно,

$$\boxed{\varphi = 180° - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{mv_0}{eEt}\right)}$$

Работа силы F (вспомним механику) равна изменению кинетической энергии электрона:

$A = W_к - W_{ко}$, где $W_{ко} = \dfrac{m_e v_0^2}{2}$, а энергию $W_к$ мы уже нашли. Поэтому $\boxed{A = W_к - \dfrac{m_e v_0^2}{2}}$

Задача решена.

Ответ: $\varphi = \alpha - \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{mv_0}{eEt}\right)$, $W_к = \dfrac{m}{2}\left(v_0^2 + \left(\dfrac{eEt}{m_e}\right)^2\right)$, $A = W_к - \dfrac{m_e v_0^2}{2}$.

Задача 6

Тонкая металлическая пластинка массой m падает вертикально вниз равноускоренно так, что ее плоскость остается горизонтальной. Падению пластинки противодействует сила сопротивления среды $F_{сопр}$. Найти напряженность электрического поля E, возникающего внутри пластинки вследствие инерции свободных электронов. Масса электрона m_e, его заряд e.

Дано:
m
$F_{сопр}$
g
m_e
e

E – ?

Решение. Свободные электроны, падающие вместе с пластинкой, вследствие инерции смещаются к ее верхней поверхности, а у нижней поверхности из-за этого возникают положительные заряды. В результате внутри пластинки появляется электрическое поле, направленное снизу вверх. По второму закону Ньютона, записанному применительно к движению пластинки,

$$ma = mg - F_{сопр}, \qquad (1)$$

а применительно к движению свободных электронов $m_e a = m_e g - F$, где $F = eE$, поэтому $m_e a = m_e g - eE$. (2)

Здесь мы не можем пренебречь силой тяжести, действующей на электрон, так как электрическая сила F, действующая на него при падении пластинки, сравнима по величине с этой силой тяжести.

Разделив (1) на (2), мы исключим ускорение a и найдем напряженность E:

$$\frac{ma}{m_e a} = \frac{mg - F_{\text{сопр}}}{m_e g - eE}, \quad \frac{m}{m_e} = \frac{mg - F_{\text{сопр}}}{m_e g - eE},$$

$$m_e g - eE = \frac{m_e}{m}\left(mg - F_{\text{сопр}}\right) \text{ или } m_e g - eE = m_e g - \frac{m_e F_{\text{сопр}}}{m}.$$

Отсюда $eE = \dfrac{m_e F_{\text{сопр}}}{m}$ и $\boxed{E = \dfrac{m_e F_{\text{сопр}}}{me}}$

Задача решена.

Ответ: $E = \dfrac{m_e F_{\text{сопр}}}{me}$.

Задача 7

К бесконечной, вертикальной, равномерно заряженной плоскости прикреплена одним концом невесомая нить, на другом конце которой находится одноименно с нитью заряженный шарик радиусом $R = 0{,}5$ см, несущий заряд $q = 1 \cdot 10^{-10}$ Кл. Плотность вещества шарика $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м^3. Натяжение нити $F_н = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ Н. Какой угол α образует с плоскостью нить, на которой висит шарик (рис. 2-12)? Среда – воздух. Чему равна поверхностная плотность σ зарядов на плоскости?

Дано:
$R = 0{,}5$ см
$q = 1 \cdot 10^{-10}$ Кл
$\rho = 2 \cdot 10^3 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$F_н = 4{,}9 \cdot 10^{-2}$ Н
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

α – ?
σ – ?

Решение. На шарик, висящий на нити, одновременно действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли, сила натяжения $\vec{F}_н$ со стороны нити и электрическая сила отталкивания $\vec{F}$ со стороны одноимен-

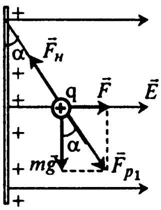


Рис. 2-12

но с шариком заряженной плоскости. Поскольку шарик находится под действием всех этих сил в равновесии, то их векторная сумма согласно первому закону Ньютона должна быть равна нулю, т. е. они должны уравновешивать друг друга:
$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_н = 0.$

Для записи этого закона в скалярном виде сначала сложим векторы $m\vec{g}$ и $\vec{F}$. Их равнодействующая $\vec{F}_{р1}$ по модулю равна диагонали прямоугольника, построенного на силах $m\vec{g}$ и $\vec{F}$ как на сторонах, поэтому по теореме Пифагора $F_{р1} = \sqrt{(mg)^2 + F^2}$.

Заряд будет в равновесии, когда равнодействующая $\vec{F}_{р1}$ будет уравновешена силой натяжения нити $\vec{F}_н$, т. е. когда она будет этой силе равна по модулю и антинаправлена, поэтому $F_{р1} = F_н$ и $F_н = \sqrt{(mg)^2 + F^2}$. (1)

Поскольку сила тяжести $m\vec{g}$ направлена параллельно вертикальной плоскости, угол, образованный вектором $m\vec{g}$ и вектором $\vec{F}_{р1}$, тоже равен α как соответственные углы при параллельных и секущей, которой является нить, поэтому искомый угол α можно найти из треугольника, образованного силами $m\vec{g}$, $\vec{F}_{р1}$ и $\vec{F}$, следующим образом: $\cos\alpha = \dfrac{mg}{F_{р1}}$ или $\cos\alpha = \dfrac{mg}{F_н}$. (2)

Массу шарика m можно найти, выразив ее через плотность вещества шарика ρ и его объем V: $m = \rho V$.

Объем шарика $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3.$

С учетом этого $m = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3.$ (3)

Подставив (3) в (2), мы определим одну из искомых в этой задаче величин: $\cos\alpha = \dfrac{4\pi\rho g R^3}{3F_н}$ и

$$\boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{4\pi\rho g R^3}{3F_н}\right)}$$

Для определения поверхностной плотности зарядов σ на плоскости воспользуемся формулой напряженности плоскости, в которую входит искомая величина σ:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (4)$$

С другой стороны, напряженность измеряется отношением силы F, действующей в электрическом поле на внесенный в него заряд, к величине этого заряда q:

$$E = \frac{F}{q}. \qquad (5)$$

Приравняв (4) и (5), получим: $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \dfrac{F}{q}$. (6)

Здесь для окончательного определения поверхностной плотности зарядов на плоскости σ нам не известна электрическая сила F. Ее мы можем найти из формулы (1), в которой все остальные величины (кроме F) нам известны, $F_н^2 = (mg)^2 + F^2$, откуда

$$F = \sqrt{F_н^2 - (mg)^2} = \sqrt{F_н^2 - \left(\frac{4}{3}\pi\rho g R^3\right)^2}. \qquad (7)$$

Теперь подставим (7) в (6), откуда затем найдем искомую поверхностную плотность зарядов σ:

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sqrt{F_н^2 - \left(\frac{4}{3}\pi\rho g R^3\right)^2}}{q},$$ откуда

$$\boxed{\sigma = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon}{q}\sqrt{F_н^2 - \left(\frac{4}{3}\pi\rho g R^3\right)^2}}$$

Мы определили вторую искомую величину. Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: 0,5 см = $5 \cdot 10^{-3}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\cos\alpha = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 125 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-2}} = 0{,}2093 \text{ и}$$

$\alpha = 78°$,

$$\sigma = \frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{10^{-10}} \times$$

$$\times\sqrt{\left(4{,}9 \cdot 10^{-2}\right)^2 - \left(\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 125 \cdot 10^{-9}\right)}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} =$$

$$= 8{,}5 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $\alpha = 78°$, $\sigma = 8{,}5 \cdot 10^{-3}$ Кл/м^2.

Задача 8

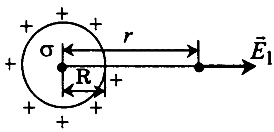


Рис. 2-13

Сфера радиусом R = 1 см равномерно заряжена. Поверхностная плотность зарядов на сфере σ = 10 Кл/см^2. Найти напряженность E_1 электрического поля на расстоянии r_1 = 10 см от центра сферы (рис. 2-13). Построить график зависимости напряженности E от расстояния r в пределах от r_0 = 0 до r_1 = 10 см. Среда – воздух.

Дано:
R = 1 см

$\sigma = 10\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{см}^2}$

r_1 = 10 см

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

$\varepsilon = 1$

E_1 – ?
$E = E(r)$ – ?

Решение. Для определения напряженности E_1 воспользуемся формулой

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2},$$

где $q = \sigma S$ – модуль заряда сферы, $S = 4\pi R^2$ – площадь ее поверхности. С учетом этого запишем:

$$E_1 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}, \quad \boxed{E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{R}{r_1}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ:
1 см =0,01 м,

$$10\,\frac{\text{Кл}}{\text{см}^2} = 10\,\frac{10^{-9}}{10^{-4}}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 1\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

10 см = 0,1 м. Произведем вычисления:

$$E_1 = \frac{1\cdot 10^{-4}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{0{,}01}{0{,}1}\right)^2 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 1{,}1\cdot 10^5\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

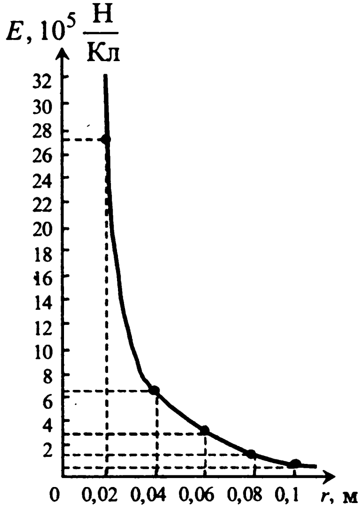


Рис. 2-14

Чтобы построить график функции $E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}$, сначала вычислим коэффициент пропорциональности $\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon}$.

$$\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{1\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-4}}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}\text{м}^2 = $$

$$= 1{,}1\cdot 10^3\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}\text{м}^2.$$

Итак, имеем

$$E = \frac{1{,}1\cdot 10^3}{r^2}.$$

Будем придавать расстоянию r значения 0; 0,02 м; 0,04 м; 0,06 м; 0,08 м; 0,1 м и вычислять по этой формуле соответствующие им величины напряженности E. Составим таблицу:

r, м	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
E, $\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$	∞	$27{,}5\cdot 10^5$	$6{,}9\cdot 10^5$	$3{,}1\cdot 10^5$	$1{,}7\cdot 10^5$	$1{,}1\cdot 10^5$

Выберем следующий масштаб: пусть на оси абсцисс одно деление соответствует 0,02 м, а на оси ординат – 2 Н/Кл.

Построим график (рис. 2-14).

Ответ: $E_1 = 1{,}1\cdot 10^5$ Н/Кл.

Задача 9

Заряды $q_1 = 20$ нКл и $q_2 = 10$ нКл расположены на расстоянии $r = 10$ см друг от друга. Найти напряженность электрического поля E_1, созданного этими зарядами в точке 1, расположенной на расстоянии $r_1 = 4$ см от заряда q_1, и напряженность E_2 в точке 2, расположенной на расстоянии $r_2 = 2$ см от заряда q_2 (рис. 2-15). Среда – вакуум.

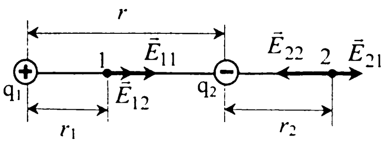


Рис. 2-15

Дано:
$q_1 = 20$ нКл
$q_2 = 10$ нКл
$r = 10$ см
$r_1 = 4$ см
$r_2 = 2$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

E_1 – ?
E_2 – ?

Решение. Вектор напряженности поля $\vec{E}_1$ в точке 1 по принципу суперпозиции равен сумме вектора напряженности $\vec{E}_{11}$ поля заряда q_1 в точке 1 и вектора напряженности $\vec{E}_{12}$ поля заряда q_2 в этой же точке 1. Поскольку эти векторы сонаправлены (они оба направлены от «плюса» к «минусу»), то $E_1 = E_{11} + E_{12}$, где по формуле напряженности поля точечного заряда

$$E_{11} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} \text{ и}$$

$$E_{12} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r - r_1)^2}, \text{ поэтому}$$

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r - r_1)^2} \text{ или}$$

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{(r - r_1)^2}\right)}$$

В точке 2 векторы напряженности полей $\vec{E}_{21}$ и $\vec{E}_{22}$, созданных этими же зарядами, антинаправлены, поэтому

$E_2 = E_{22} - E_{21}$, где $E_{21} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r+r_2)^2}$ и $E_{22} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^{\,2}}$,

поэтому $E_2 = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^{\,2}} - \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r+r_2)^2}$ или

$$\boxed{E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_2}{r_2^{\,2}} - \frac{q_1}{(r+r_2)^2}\right)}$$

Переведем все единицы в СИ: 20 нКл = $20 \cdot 10^{-9}$ Кл = $= 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, 10 нКл = $1 \cdot 10^{-8}$ Кл, 10 см = 0,1 м, 4 см = = 0,04 м, 2 см = 0,02 м.

Произведем вычисления:

$$E_1 = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{2 \cdot 10^{-8}}{16 \cdot 10^{-4}} + \frac{1 \cdot 10^{-8}}{(0{,}1-0{,}04)^2}\right)\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} =$$

$$= 1{,}4 \cdot 10^5\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$E_2 = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1 \cdot 10^{-8}}{0{,}04^2} - \frac{2 \cdot 10^{-8}}{(0{,}1+0{,}02)}\right)\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} =$$

$$= 2{,}1 \cdot 10^5\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $E_1 = 1{,}4 \cdot 10^5$ Н/Кл, $E_2 = 2{,}1 \cdot 10^5$ Н/Кл.

Задача 10

Два одноименных точечных заряда q и $4q$ расположены на расстоянии r друг от друга. На каком расстоянии r_1 от заряда q находится точка M, в которой напряженность поля этих зарядов $E = 0$? На каком расстоянии r_2 от заряда q находится такая точка, если эти заряды разноименные?

Дано:
q
$4q$
r
$E = 0$
r_1 – ?
r_2 – ?

Решение. 1) Заряды одноименные.

Если оба заряда положительные, то вектор напряженности $\vec{E}_1$ поля, созданного зарядом q, направлен в точке M направо, а вектор напряженности $\vec{E}_2$ поля заряда $4q$ в этой точке направлен налево (рис. 2-16). По модулю эти векторы равны, ведь результирующая напряженность $E = 0$. Точка M располагается ближе к меньшему заряду, т. е. к заряду q. Значит, мы можем записать

$E_1 = E_2$, где $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^{\,2}}$ и

$$E_2 = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r-r_1)^2}.$$

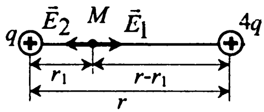


Рис. 2-16

Следовательно, $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^{\,2}} = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r-r_1)^2}$,

$4r_1^2 = (r-r_1)^2$ или $2r_1 = r - r_1$, откуда $\boxed{r_1 = \dfrac{r}{3}}$

2) Заряды разноименные.

Если, например, заряд q положительный, а заряд $4q$ отрицательный, то тогда M уже не может располагаться между ними, ведь в этом случае векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ будут сонаправлены (вектор $\vec{E}_2$ будет направлен к заряду $-4q$) и результирующая напряженность E уже не будет равна нулю. Она будет равна нулю только в точке M, расположенной слева от заряда q (рис. 2-17).

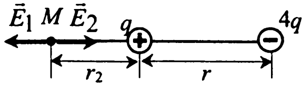


Рис. 2-17

В этом случае $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^{\,2}}$ и $E_2 = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r+r_2)^2}$.

Поскольку $E_1 = E_2$, $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^{\,2}} = \dfrac{4q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r+r_2)^2}$, откуда

$4r_2^2 = (r+r_2)^2$ или $2r_2 = r + r_2$ и $\boxed{r_2 = r}$

Задача решена.

Ответ: $r_1 = \dfrac{r}{3}$; $r_2 = r$.

Задача 11

На расстоянии $r = 3$ см от поверхности шара радиусом $R = 2$ см находится точечный отрицательный заряд $q = -2$ нКл. Шар заряжен положительно с поверхностной плотностью зарядов $\sigma = 2$ нКл/м^2. Найти напряженность поля E, созданного заряженным шаром и точечным зарядом, в точке, расположенной на расстоянии $r_1 = 4$ см от центра шара, и $r_2 = 3$ см от заряда q. Среда – воздух.

Дано:
$r = 3$ см
$R = 2$ см
$q = -2$ нКл
$\sigma = 2\ \dfrac{\text{нКл}}{\text{м}^2}$
$r_1 = 4$ см
$r_2 = 3$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

E – ?

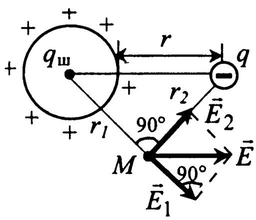


Рис. 2-18

Решение. Если соединить центр шара с зарядом q и точкой M, то получим треугольник, одна сторона которого $R + r = 5$ см, вторая $r_1 = 4$ см и третья $r_2 = 3$ см (рис. 2-18). Вы, конечно, знаете, что такой треугольник прямоугольный. Вектор $\vec{E}_1$ поля положительно заряженного шара направлен в точке M от шара вдоль прямой, проходящей через центр шара O и точку M.

Вектор $\vec{E}_2$ поля отрицательного заряда $-q$ направлен в точке M к этому заряду вдоль прямой, которая тоже проходит через эту точку и заряд $-q$. Поэтому векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ взаимно перпендикулярны и являются сторонами прямоугольника, а вектор результирующей напряженности $\vec{E}$ по принципу суперпозиции равен их векторной сумме: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и является гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетом $\vec{E}_1$, а другим катетом в этом треугольнике служит сторона, равная модулю вектора $\vec{E}_2$. Тогда по теореме Пифагора

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}\,, \qquad (1)$$

где
$$E_1 = \frac{q_ш}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}. \qquad (2)$$

Здесь $q_ш = \sigma S$ – заряд на шаре, $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности шара.

С учетом этого $E_1 = \dfrac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}$. $\qquad (3)$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}\right)^2} \quad \text{или}$$

$$\boxed{E=\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{\sigma R^2}{r_1{}^2}\right)^2+\left(\frac{q}{4\pi r_2{}^2}\right)^2}}$$

Переведем все единицы в СИ: 3 см = 0,03 м, 2 см = = 0,02 м, 4 см = 0,04 м, $2\,\frac{\text{нКл}}{\text{м}^2}=2\cdot 10^{-9}\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, 2 нКл = = $2\cdot 10^{-9}$ Кл.

Произведем вычисления:

$$E=\frac{1}{8{,}85\cdot 10^{-12}}\sqrt{\left(\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-4}}{16\cdot 10^{-4}}\right)+\left(\frac{2\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 9\cdot 10^{-4}}\right)}=$$

$$=210\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $E = 210$ Н/Кл.

Задача 12

В вершинах равностороннего треугольника со стороной a находятся заряды q, $-q$ и q. Найти напряженность поля E, созданного этими зарядами в центре треугольника. Среда – воздух.

Дано:
a
q
$-q$
ε
ε_0
α

E – ?

Решение. В центре равностороннего треугольника C пересекаются биссектрисы, медианы и высоты. Векторы $\vec{E}_1$ полей, созданных положительными зарядами q в центре C, направлены, как показано на рис. 2-19. Их результирующая напряженность $\vec{E}_{\text{p}1}$ является короткой диагональю ромба, сторонами которого служат векторы $\vec{E}_1$. Она делит ромб на два равных и равносторонних треугольника, поэтому $E_{\text{p}1}=\vec{E}_1$. Отрицательный заряд $-q$ создает в центре C вектор напряженности, модуль которого тоже равен E_1 в силу симметрии картины, но вектор напряженности поля заряда $-q$ направлен к этому заряду и сонаправлен с результирующим вектором $\vec{E}_{p1}$ полей двух положительных зарядов q. Поэтому модуль векто-

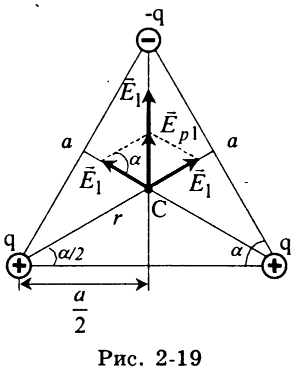


Рис. 2-19

ра напряженности E поля всех трех зарядов равен удвоенной напряженности E_1:

$E = 2E_1$, где $E_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, и значит,

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (1)$$

Здесь r – расстояние от вершины треугольника до точки C. Из прямоугольного треугольника с катетом $\dfrac{a}{2}$ и острым углом $\dfrac{\alpha}{2}$ имеем $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{a}{2r}$, откуда $r = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$. $\qquad$ (2)

Подставим (2) в (1):

$$E = \frac{4q\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}, \qquad E = \frac{2q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $\alpha = 60°$, то $\dfrac{\alpha}{2} = 30°$ и $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда получим окончательно $E = \dfrac{2q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}\cdot\dfrac{3}{4}$, $\boxed{E = \dfrac{3q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}}$

Задача решена.

Ответ: $E = \dfrac{3q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$.

Задача 13

В однородном электрическом поле находятся вплотную прижатые друг к другу пластины винипласта с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 3{,}5$, текстолита с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 7$ и слюды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3 = 6$. Линии вектора напряженности поля перпендикулярны большим граням пластин. Найти напряженности E_1 и E_2 электрических полей в винипласте и слюде, а также напряженность E_4 поля вне их, т. е. в воздухе. Напряженность поля в текстолите $E_2 = 50$ Н/Кл.

Дано:
$\varepsilon_1 = 3{,}5$
$\varepsilon_2 = 7$
$\varepsilon_3 = 6$
$\varepsilon_4 = 1$

Решение. Предположим, что источником однородного поля, в которое поместили эти вещества, является бесконечная плоскость с поверхностной плотностью зарядов σ. Тогда

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} \text{ и } E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}.$$

$E_2 = 50\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$

E_1 – ?
E_3 – ?
E_4 – ?

Разделив эти равенства друг на друга, сократим неизвестную σ и из полученной пропорции найдем E_1, ведь ε_1, ε_2 и E_2 нам известны: $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\sigma \cdot 2\varepsilon_0\varepsilon_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_1\sigma}$, $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$, откуда

$$\boxed{E_1 = E_2\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Аналогично запишем: $\boxed{E_3 = E_2\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}}$ и $\boxed{E_4 = E_2\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_4}}$

Произведем вычисления: $E_1 = 50\dfrac{7}{3{,}5}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 100\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$,

$E_3 = 50\dfrac{7}{6}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 58\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$, $E_4 = 50\dfrac{7}{1}\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 350\ \dfrac{\text{Н}}{\text{Кл}}$.

Ответ: $E_1 = 100$ Н/Кл, $E_3 = 58$ Н/Кл, $E_4 = 350$ Н/Кл.

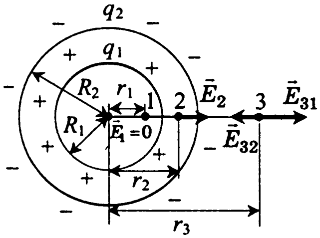


Рис. 2-20

Задача 14

Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см (рис. 2-20) несут заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -0{,}5$ нКл. Найти напряженность E_1, E_2 и E_3 электрического поля, образованного этими сферами в точках 1, 2 и 3, отстоящих от центра сфер на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Среда – воздух.

Дано:
$R_1 = 6$ см
$R_2 = 10$ см
$q_1 = 1$ нКл
$q_2 = -0{,}5$ нКл
$r_1 = 5$ см
$r_2 = 9$ см
$r_3 = 15$ см
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$

Решение. Судя по условию задачи, заряды на поверхностях обеих сфер неподвижны. Точка 1 находится на расстоянии $r_1 = 5$ см от центра внутренней сферы радиусом $R_1 = 6$ см, т. е. она находится внутри обеих сфер. А из теории мы знаем, что внутри проводника с неподвижными зарядами электрическое поле отсутствует, поэтому напря-

$\varepsilon = 1$

E_1 – ?
E_2 – ?
E_3 – ?

женность E_1 в точке 1 равна нулю. Таким образом, ответ на один вопрос задачи готов: $\boxed{E_1 = 0}$

Поле в точке 2 создано зарядом q_1, распределенным только по внутренней сфере, поскольку поле заряда q_2 на внешней сфере внутри этой внешней сферы отсутствует. Напряженность поля, созданного заряженной внутренней сферой в точке 2, определяется формулой, аналогичной формуле напряженности поля точечного заряда-источника: $\boxed{E_2 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}}$

Поле в точке 3 создано как зарядом q_1, так и зарядом q_2. Обозначим напряженность поля в точке 3, созданного зарядом q_1, буквой E_{31}, а напряженность поля в этой же точке, созданного зарядом q_2, буквой E_{32}. Поскольку заряд q_1 положительный, вектор напряженности этого поля в точке 3 $\vec{E}_{31}$ направлен от центра сфер. Поскольку заряд q_2 отрицательный, вектор напряженности этого поля в той же точке 3 $\vec{E}_{32}$ направлен к центру сфер. Вектор напряженности результирующего поля $\vec{E}_3$ по принципу суперпозиции равен векторной сумме векторов $\vec{E}_{31}$ и $\vec{E}_{32}$:

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{31} + \vec{E}_{32}.$$

Поскольку векторы $\vec{E}_{31}$ и $\vec{E}_{32}$ антинаправлены, то в скалярной записи принцип суперпозиции примет вид

$$E_3 = E_{31} - E_{32}.$$

Модули векторов $\vec{E}_{31}$ и $\vec{E}_{32}$ зависят от зарядов q_1 и q_2 и от расстояния r_3. Поскольку заряд q_1 по модулю больше заряда q_2 (см. условие задачи), то и вектор $\vec{E}_{31}$ по модулю тоже больше вектора $\vec{E}_{32}$. Модули этих векторов

$$E_{31} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2} \quad \text{и} \quad E_{32} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2}.$$

С учетом этого $\boxed{E_3 = \dfrac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2}}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ:

6 см = 0,06 м, 9 см = 0,09 м, 10 см = 0,1 м,
15 см = 0,15 м, 5 см = 0,05 м, 1 нКл = $1 \cdot 10^{-9}$ Кл,

$0,5$ нКл $= 0,5 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Подставим числа и произведем вычисления (обратим внимание, что знак «минус» перед зарядом q_2 мы уже учли, поэтому при вычислении E_3 мы подставим в формулу только модуль q_2):

$$E_2 = \frac{1 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}09^2} \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 1{,}1 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}},$$

$$E_3 = \frac{10^{-9} - 0{,}5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}15^2} \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 2{,}0 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Ответ: $E_1 = 0$, $E_2 = 1{,}1 \cdot 10^3$ Н/Кл, $E_3 = 2{,}0 \cdot 10^2$ Н/Кл.

Задача 15

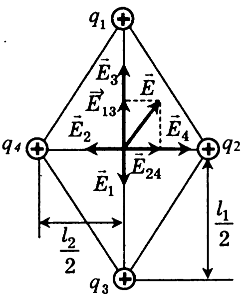


Рис. 2-21

В вершинах ромба расположены точечные заряды $q_1 = 64$ нКл, $q_2 = 8$ нКл, $q_3 = 352$ нКл и $q_4 = 40$ нКл (рис. 2-21). Определить напряженность E поля, созданного этими зарядами в центре ромба, если его длинная диагональ $l_1 = 96$ см, а короткая $l_2 = 32$ см. Среда – воздух. Какой угол α образует вектор напряженности $\vec{E}$ с короткой диагональю l_2?

Дано:
$q_1 = 64$ нКл
$q_2 = 8$ нКл
$q_3 = 352$ нКл
$q_4 = 40$ нКл
$l_1 = 96$ см
$l_2 = 32$ см
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
$\varepsilon = 1$

E – ?
α – ?

Решение. По принципу суперпозиции напряженность поля, созданного в центре ромба системой четырех точечных зарядов q_1, q_2, q_3 и q_4, равна векторной сумме напряженностей полей $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ и $\vec{E}_4$, созданных в этом центре каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4. \quad (1)$$

Для записи этого принципа в скалярном виде выполним чертеж (рис. 2-21). На этом чертеже вектор $\vec{E}_1$ – это вектор напряженности поля, созданного зарядом q_1 в центре ромба, а вектор $\vec{E}_3$ – это вектор напряженности поля, созданного зарядом q_3 в этом же центре. Поскольку эти заряды положительны, то вектор $\vec{E}_1$ направлен из центра ромба от заряда q_1 к заряду q_3 по диагонали l_1, а вектор $\vec{E}_3$ направлен из этой же точки по той же диагонали от заряда q_3 к заряду q_1. Расстояние между центром и зарядами q_1 и q_3 одинаково и равно $\frac{l_1}{2}$, поскольку диагонали ромба делят друг друга пополам, но заряд q_3 больше заряда q_1, поэтому и вектор E_3 численно больше вектора E_1 и, кроме того, эти векторы антинаправлены, поэтому их равнодействующая E_{13} в скалярной записи будет равна их разности: $E_{13} = E_3 - E_1$. (2)

Аналогичные рассуждения можно отнести и к векторам напряженности $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_4$, созданным в центре ромба зарядами q_2 и q_4 соответственно. Эти векторы будут направлены вдоль короткой диагонали l_2 и тоже будут антинаправлены друг другу, причем вектор $\vec{E}_4$ будет длиннее вектора $\vec{E}_2$, поскольку заряд q_4 больше заряда q_2, а расстояния от центра ромба до этих зарядов тоже одинаковы и равны $\frac{l_2}{2}$. Поэтому равнодействующая векторов $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_4$, которую мы обозначили $\vec{E}_{24}$, в скалярной записи

$$E_{24} = E_4 - E_2 . \quad (3)$$

Теперь, чтобы найти результирующий вектор $\vec{E}$, достаточно сложить векторы $\vec{E}_{13}$ и $\vec{E}_{24}$, заменив сумму векторов (1) суммой (4): $\vec{E} = \vec{E}_{13} + \vec{E}_{24}$. (4)

Поскольку векторы $\vec{E}_{13}$ и $\vec{E}_{24}$ направлены друг к другу под прямым углом (ведь они направлены вдоль диагоналей ромба, а диагонали ромба взаимно перпендикулярны), то для записи равенства (4) в скалярном виде приходится применять теорему Пифагора: $E = \sqrt{E_{13}^2 + E_{24}^2}$ или с учетом (2) и (3) $E = \sqrt{(E_3 - E_1)^2 + (E_4 - E_2)^2}$. (5)

Теперь, чтобы окончательно найти результирующую напряженность E в центре ромба, нам осталось записать значения E_1, E_2, E_3 и E_4. Воспользуемся формулой напряженности поля точечного заряда-источника:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{l_1}{2}\right)^2} = \frac{q_1}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2}, \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{l_2}{2}\right)^2} = \frac{q_2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_2^2},$$

$$E_3 = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{l_1}{2}\right)^2} = \frac{q_3}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2}, \quad E_4 = \frac{q_4}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{l_2}{2}\right)^2} = \frac{q_4}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_2^2}.$$

Подставив эти выражения в формулу (5), получим

$$E = \sqrt{\left(\frac{q_3}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2} - \frac{q_1}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_4}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_2^2} - \frac{q_2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon l_2^2}\right)^2},$$

$$\boxed{E = \frac{1}{\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{q_3 - q_1}{l_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_4 - q_2}{l_2^2}\right)^2}}$$

Нам осталось определить угол α между вектором $\vec{E}$ и диагональю l_2. Удобнее всего определить синус этого угла из прямоугольного треугольника, в котором гипотенузой является вектор $\vec{E}$, величину которого мы уже знаем, а катетом, противолежащим искомому углу α, служит вектор $\vec{E}_{13}$: $\sin\alpha = \frac{E_{13}}{E}$, где $E_{13} = E_3 - E_1$

или $E_{13} = \frac{q_3 - q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2}$, поэтому $\sin\alpha = \frac{q_3 - q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2 E}$ и

$$\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{q_3 - q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l_1^2 E}\right)}$$

Мы определили последнюю искомую величину.
Задача решена в общем виде. Переведем единицы в СИ:
64 нКл = $64 \cdot 10^{-9}$ Кл, 40 нКл = $40 \cdot 10^{-9}$ Кл,
8 нКл = $8 \cdot 10^{-9}$ Кл, 96 см = 0,96 м,
352 нКл = $352 \cdot 10^{-9}$ Кл, 32 см = 0,32 м.
Подставим числа и произведем вычисления:

$$E = \frac{1}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \times$$

$$\times\sqrt{\left(\frac{352\cdot10^{-9}-64\cdot10^{-9}}{0{,}96^2}\right)+\left(\frac{40\cdot10^{-9}-8\cdot10^{-9}}{0{,}32^2}\right)}\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}}=$$

$$=1{,}6\cdot10^4\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}},$$

$$\sin\alpha=\frac{352\cdot10^{-9}-64\cdot10^{-9}}{3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}96^2\cdot1{,}6\cdot10^4}=0{,}7,\ \alpha=45°.$$

Ответ: $E=1{,}6\cdot10^4\ \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}$, $\alpha=45°$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Электрон пролетает по силовой линии электрического поля до остановки расстояние S = 0,1 мм, двигаясь с начальной скоростью $v_0 = 1\cdot10^5$ м/с. Найти напряженность E поля, затормозившего электрон.

Ответ: $E=\frac{m_e v_0^2}{2eS}=280$ Н/Кл.

Задача 2. За какое время t электрическое поле напряженностью $E = 1\cdot10^4$ Н/Кл разгонит электрон, движущийся по его силовой линии, от скорости v_0 = 100 м/с до скорости v = 10 км/с?

Ответ: $t=\frac{m_e(v-v_0)}{eE}=5{,}6\cdot10^{-12}$ с.

Задача 3. С каким ускорением a движется электрон в поле, образованном бесконечной, равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью зарядов σ = 2 нКл/м²? Среда – воздух.

Ответ: $a=\frac{e\sigma}{2m_e\varepsilon_0\varepsilon}=2\cdot10^{13}$ м/с².

Задача 4. Пылинка массой $m = 1\cdot10^{-10}$ г висит в однородном электрическом поле напряженностью $E = 2\cdot10^5$ Н/Кл. Найти заряд пылинки q, если сила тяжести уравновешена силой, с которой поле действует на пылинку.

Ответ: $q=\frac{mg}{E}=4{,}9\cdot10^{-18}$ Кл.

Задача 5. Между двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями, параллельными друг другу, неподвижно висит пылинка массой m, несущая N избыточных электронов. Среда – воздух. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскостях.

Ответ: $\sigma=\frac{\varepsilon_0\varepsilon mg}{eN}$.

Задача 6. Найти диаметр d маленького шарика, неподвижно висящего в электрическом поле бесконечной, равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью зарядов σ, если плотность вещества шарика ρ. Среда – воздух. На шарике имеется N избыточных электронов.

Ответ: $d = \sqrt[3]{\dfrac{3e\sigma N}{\pi\varepsilon_0\varepsilon\rho g}}$.

Задача 7. На площади S = 20 см^2 каждой из двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей содержится заряд q = 1 нКл. Между плоскостями находится диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε = 6. Найти напряженность поля в диэлектрике E.

Ответ: $E = \dfrac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S} = 5{,}6 \cdot 10^5$ Н/Кл.

Задача 8. Шар с зарядом $+q$ находится в равновесии в жидком диэлектрике. Напряженность электрического поля в диэлектрике E, вектор $\vec{E}$ направлен вверх. Плотность диэлектрика ρ_1. Найти плотность материала шара ρ_2. Радиус шара R.

Ответ: $\rho_2 = \rho_1 + \dfrac{3qE}{4\pi R^3 g}$.

Задача 9. В вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 10 см расположены точечные заряды q = 1 нКл. Определить напряженность E поля этих зарядов в точке на середине стороны треугольника.

Ответ: $E = \dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2} = 1200$ Н/Кл.

Задача 10. В трех вершинах квадрата находятся заряды q, $2q$ и q. Найти напряженность E поля этих зарядов в четвертой вершине. Сторона квадрата a.

Ответ: $E = 0{,}6\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}$.

Задача 11. В однородное электрическое поле, образованное двумя бесконечными разноименно заряженными пластинами с поверхностной плотностью зарядов σ, расположенными вертикально, помещен маленький шарик массой m с зарядом q, подвешенный на тонкой шелковой нити. На какой угол α от вертикали отклонилась при этом нить?

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{q\sigma}{mg\varepsilon_0\varepsilon}\right)$.

Задача 12. Электрон, летевший горизонтально со скоростью v_0 = = 1,6 Мм/с, влетел в однородное поле напряженностью E = = 90 В/см, направленное вертикально вверх. Чему равна будет скорость электрона v через t = 1 нс (наносекунду)? Какой угол α составит вектор этой скорости с силовой линией поля?

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + \left(\dfrac{eEt}{m_e}\right)^2} = 2 \cdot 10^6$ м/с,

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{m_e v_0}{eEt}\right) = 45°.$$

Задача 13. Положительно заряженный шарик массой $m = 0,18$ г и плотностью вещества $\rho_1 = 1800$ кг/м^3 находится в равновесии в жидком диэлектрике плотностью $\rho_2 = 900$ кг/м^3. В диэлектрике имеется электрическое поле напряженностью $E = 45$ кВ/м, направленное вертикально вверх. Найти заряд q шарика.

Ответ: $q = \dfrac{mg(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 E} = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл.

Задача 14. Металлический шар, заряженный равномерно с поверхностной плотностью зарядов $\sigma = 2$ нКл/м^2, погружен в керосин с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Найти напряженность E поля этого шара в точке, удаленной от центра шара на расстояние, равное половине его диаметра.

Ответ: $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0\varepsilon} = 28$ Н/Кл.

Задача 15. Две разноименно заряженные плоскости расположены горизонтально. Поверхностная плотность зарядов на них σ. В пространство между ними влетает электрон в направлении, параллельном плоскостям, со скоростью v_0. Найти кинетическую энергию электрона $W_к$ после того, как он пролетит расстояние l по горизонтали. Считать электрон классической частицей.

Ответ: $W_к = \dfrac{m_e}{2}\left(v_0^2 + \left(\dfrac{\sigma e l}{\varepsilon_0 \varepsilon m_e v_0}\right)^2\right)$.

Задача 16. Электрон влетает в электрическое поле, созданное двумя параллельными, горизонтальными, разноименно заряженными плоскостями параллельно им на равном расстоянии от плоскостей (рис. 2-12). Напряженность электрического поля между плоскостями $E = 100$ Н/Кл, расстояние между ними $d = 5$ см. Через какое время t электрон долетит до одной из плоскостей?

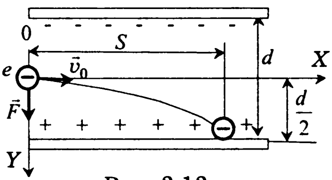


Рис. 2-12

Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{m_e d}{eE}} = 5 \cdot 10^{-8}$ с.

Задача 17. Электрон влетает в пространство между двумя горизонтальными разноименно заряженными плоскостями под углом $\alpha = 30°$ к их поверхностям, а вылетает параллельно им, пролетев расстояние $l = 5$ см по горизонтали. Найти начальную кинетическую энергию электрона $W_{к0}$, если напряженность поля между плоскостями $E = 6 \cdot 10^4$ Н/Кл.

Ответ: $W_{к0} = \dfrac{eEl}{\sin 2\alpha} = 5,6 \cdot 10^{-16}$ Дж.

Задача 18. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 6,4 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -4,8 \cdot 10^{-8}$ Кл $r = 10$ см. Найти напряженность E электрического поля в точке, удаленной на расстояние $r_1 =$

= 8 см от первого заряда и на r_2 = 6 см от второго. Среда – воздух.

Ответ: $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\dfrac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\dfrac{q_2}{r_2^2}\right)^2} = 1{,}5 \cdot 10^5$ Н/Кл.

Задача 19. В точке 1 напряженность E_1, а в точке 2 напряженность E_2. Найти напряженность E в точке M, лежащей посередине между точками 1 и 2 (рис. 2-13).

Ответ: $E = \dfrac{4E_1E_2}{\left(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2}\right)^2}$.

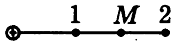


Рис. 2-13

Задача 20. Напряженность электрического поля E_1 на расстоянии r_1 = 4 см от точечного заряда равна 50 Н/Кл. На каком расстоянии r_2 от этого же заряда напряженность поля E_2 = 5 Н/Кл?

Ответ: $r_2 = r_1\sqrt{\dfrac{E_1}{E_2}} = 0{,}01$ м.

Задача 21. Найти напряженность электрического поля в точке M (рис. 2-14). Заряды q и проницаемость ε, а также расстояние r известны.

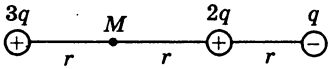


Рис. 2-14

Ответ: $E = \dfrac{5q}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$.

Задача 22. Два одноименных заряда, один из которых в 9 раз больше другого, расположены на расстоянии r = 10 см друг от друга. На каком расстоянии r_1 от большего заряда расположена точка, в которой напряженность поля этих зарядов равна нулю?

Ответ: $r_1 = 0{,}75\,r$.

Задача 23. Маленький шарик, подвешенный на изолирующей нити и имеющий заряд q, вносят в вертикальное электрическое поле напряженностью E. Найти массу шарика m, если натяжение нити увеличилось в n раз?

Ответ: $m = \dfrac{qE}{g(n-1)}$.

Задача 24. Сила электрического отталкивания двух одинаковых водяных капель радиусом R втрое превышает силу их гравитационного притяжения. Найти заряд капель q, если их радиусы R = 1 мм, каждый.

Ответ: $q = 8\rho\pi R^3\sqrt{\dfrac{\pi\varepsilon_0\varepsilon G}{3}} = 2 \cdot 10^{-15}$ Кл.

Задача 25. Маленький шарик массой m с зарядом q подвешен на изолирующей нити, другой конец которой закреплен. При помещении его в вертикальное электрическое поле сила натяжения нити при новом положении шарика осталась прежней. Найти напряженность этого поля E.

Указание: так может быть, если поле подняло шарик вверх.

Ответ: $E = \dfrac{2mg}{q}$.

Задача 26. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля конденсатора $E = 6 \cdot 10^4$ Н/Кл. Заряд капельки $q = 6 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найти радиус капельки R. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³. Выполнить чертеж.

Ответ: $R = \sqrt[3]{\dfrac{3qE}{4\pi\rho g}} = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 27. Большая равномерно заряженная пластина с поверхностной плотностью зарядов $\sigma = 9$ мкКл/м² расположена горизонтально. Над ней находится алюминиевый шарик с зарядом $q = 0{,}37$ мкКл. Какой радиус R должен иметь шарик, чтобы он оставался в равновесии? Считать радиус шарика малым по сравнению с расстоянием до пластины. Среда – воздух. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $R = 0{,}5\sqrt[3]{\dfrac{3\sigma q}{\pi\varepsilon_0\rho g}} = 0{,}012$ м.

Задача 28. Две бесконечные пластины расположены под прямым углом друг к другу и несут равномерно распределенные по поверхности заряды. Поверхностные плотности зарядов на пластинах $\sigma_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м² и $\sigma_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ мкКл/м². Определить напряженность электрического поля E. Среда – воздух.

Ответ: $E = \dfrac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 126$ Н/Кл.

Задача 29. Бесконечная вертикальная равномерно заряженная плоскость имеет поверхностную плотность зарядов $\sigma = 33{,}3$ мкКл/м². К ней прикреплена нить, к другому концу которой подвешен маленький шарик массой $m = 1$ г, несущий одноименный с плоскостью заряд. Найти число избыточных элементарных зарядов на шарике, если нить образовала с плоскостью угол $\alpha = 30°$. Среда – воздух. Выполнить чертеж.

Ответ: $N = \dfrac{2\varepsilon_0 mg}{e\sigma}\operatorname{tg}\alpha = 2 \cdot 10^{10}$.

Задача 30. Капля массой $m = 0{,}1$ нг (нанограмм), на которой находится заряд q, равный 10 зарядам электрона ($q = 10\,e$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл), поднимается вертикально вверх с ускорением $a = 2{,}2$ м/с² между двумя разноименно и равномерно заряженными параллельными пластинами бесконечных размеров. Поверхностная плотность зарядов на пластинах одинакова. Определить поверхностную плотность зарядов σ на пластинах. Среда – воздух.

Ответ: $\sigma = 0{,}1\dfrac{m\varepsilon_0}{e}(a + g) = 6{,}6 \cdot 10^{-6}$ Кл/м².

Задача 31. Построить график $E(r)$ поля заряженного стержня радиусом $r = 1$ см с линейной плотностью зарядов $\tau = 1$ Кл/см в пределах от $r_1 = 1$ см до $r_2 = 5$ см. Среда – воздух.

Указание: внутри стержня $E = 0$.

3. РАБОТА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ЗАРЯДА В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛ. РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Работа перемещения заряда A в однородном электростатическом поле равна произведению модуля этого заряда q, напряженности поля E и проекции вектора перемещения d на силовую линию: $A = qEd$.

Потенциал электрического поля φ равен отношению потенциальной энергии заряда $W_п$ в этом поле к модулю этого заряда:

$$\varphi = \frac{W_п}{q_{пр}}. \qquad (3.1)$$

Потенциал – энергетическая характеристика электрического поля.

Потенциал поля точечного заряда-источника можно определить по формуле

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (3.2)$$

Здесь r – расстояние от точки поля, потенциал которой равен φ, до заряда-источника q или до центра заряженной сферы.

Потенциал поля, созданного в данной точке множеством зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности (с учетом их плюсов и минусов): $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i$.

Здесь N – число зарядов – источников поля.

Чем ближе точка поля к положительному заряду-источнику, тем выше потенциал поля в этой точке. И наоборот, чем ближе точка к отрицательному заряду-источнику, тем он ниже.

Потенциал поля в точках на поверхности сферы с неподвижными зарядами или в любых точках внутри сферы (сплошной или пустой), если внутри нее нет зарядов, определяет формула

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, \text{ где } R \text{ – радиус сферы.}$$

Отметим, что внутри заряженной сферы, неподвижный заряд которой распределен по поверхности, электрическое поле отсутствует, поэтому напряженность там в каждой точке равна нулю, тогда как потенциал не равен нулю и одинаков во всех точках.

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ или $\varphi_1 - \varphi_2$ (напряжение U) между двумя точками электрического поля равна отношению работы перемещения заряда из одной точки поля в другую, к величине этого заряда:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q} \quad \text{или} \quad U = \frac{A}{q}. \qquad (3.3)$$

Здесь $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между точками 1 и 2 электрического поля, U – напряжение между ними.

При решении задач, связанных с определением потенциала электрического поля шарового проводника или величин, зависящих от потенциала, следует помнить, что потенциал каждой точки поля внутри проводника (полого или сплошного, все равно) с неподвижными на его поверхности зарядами одинаков. Например, на рис. 3-1, *а* потенциал поля в точках 1 и 2 внутри сферы радиусом R, несущей заряд q, одинаков

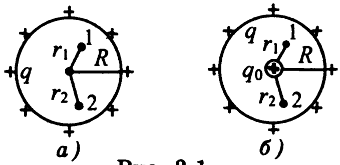


Рис. 3-1

$$\varphi_{1,2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Другое дело, если внутрь этой сферы поместить заряд q_0 (рис. 3-1, б). Тогда, если этот заряд расположить, например, в центре сферы, то результирующий потенциал точек внутри сферы будет складываться из потенциала поля заряда q_0 (потенциал в точках 1 и 2 различен, так как различны расстояния r_1 и r_2 от этих точек до заряда q_0) и потенциала поля заряда сферы q, который одинаков в точках 1 и 2. Тогда результирующий потенциал в точке 1

$\varphi_{p1} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} + \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}$, а результирующий потенциал в точке 2

$$\varphi_{p2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}.$$

В отличие от напряженности потенциал внутри проводника с неподвижными электрическими зарядами не равен нулю.

Если в условии задачи говорится о расстоянии l между точкой поля, в которой определяется потенциал поля φ заряженной сферы, и ее поверхностью, то в формуле (3.2) $r = l + R$. Тогда

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l + R)}.$$

Подчеркнем, что в отличие от напряженности потенциал – не векторная, а скалярная величина. Причем потенциал – алгебраическая величина, т. е. он может быть как положительным, так и отрицательным. Потенциал поля, созданного положительным зарядом в некоторой точке окружающего пространства, тоже положителен, а потенциал поля, созданного отрицательным зарядом, тоже отрицателен. Потенциал поля, созданного в данной точке системой положительных и отрицательных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности с учетом их знаков.

Рассмотрим примеры определения потенциала поля, созданного несколькими зарядами.

Пример 1. Обратимся снова к рис. 2-4 и определим теперь потенциалы полей, созданных зарядами q_1 и q_2 в точках 1, 2 и 3.

Потенциал φ_1 поля, созданного зарядами q_1 и q_2 в точке 1, равен алгебраической сумме потенциала φ_{11} поля, созданного зарядом q_1 в этой точке, и потенциала φ_{12} поля, созданного в этой же точке зарядом q_2. Поскольку заряды q_1 и q_2 разноименные, а алгебраическая сумма – это сумма с учетом всех плюсов и минусов, то

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + (-\varphi_{12}) = \varphi_{11} - \varphi_{12}, \text{ где } \varphi_{11} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} \text{ и } \varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r_1 + r)}.$$

Аналогично потенциал φ_2 поля этих зарядов в точке 2 будет

$$\varphi_2 = \varphi_{21} - \varphi_{22}, \text{ где } \varphi_{21} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} \text{ и } \varphi_{22} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r - r_2)}.$$

Аналогично потенциал φ_3 поля этих зарядов в точке 3

$$\varphi_3 = \varphi_{31} - \varphi_{32}, \text{ где } \varphi_{31} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r + r_3)} \text{ и } \varphi_{32} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3}.$$

Пример 2. Теперь обратимся к рис. 3-2 и определим потенциал φ поля, созданного в точке M зарядами q_1 и q_2. Поскольку потенциал – скалярная величина, то в этой точке он будет определяться только алгебраической суммой потенциалов полей каждого из этих зарядов в отдельности, так что никакие правила векторного сложения, теоремы Пифагора или косинусов, как при определении напряженности, нам уже здесь не понадобятся, поэтому определение потенциала поля системы зарядов значительно проще, чем напряженности. Согласно сказанному выше $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, где $\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}$ и $\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}$ при любых длинах отрезков r_1, r_2 и r.

Интересно, что в данной точке поля потенциал может быть равен нулю, тогда как поле в ней присутствует и напряженность не равна нулю. Например, поле в точке M создано одинаковыми по величине и разноименными зарядами $+q$ и $-q$, причем точка M расположена посередине между ними (см. рис. 3-2). В этом случае напряженность $E_р$ поля в точке M численно равна удвоенной напряженности E_1, так как векторы E_1 и E_2 напряженностей полей зарядов $+q$ и $-q$ сонаправлены и по модулю равны друг другу. Поэтому $E_р = 2E_1$, где $E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(0{,}5r)^2}$.

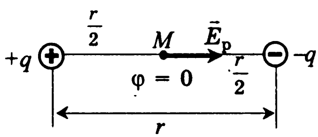


Рис. 3-2

Однако потенциал φ как алгебраическая сумма потенциалов φ_1 и φ_2 полей зарядов q и $-q$ в точке M оказывается равным нулю. Действительно, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot 0{,}5r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot 0{,}5r} = 0$.

Поэтому потенциал считается относительной величиной, а напряженность – абсолютной. Напряженность полнее, чем потенциал, характеризует свойства электрического поля.

Следует отметить, что в некоторых пособиях знак «минус» перед потенциалом поля отрицательного заряда ставят только перед численным значением потенциала, а в формуле потенциала с буквенными обозначениями величин пишут «плюс». Понятно, что тогда потенциал точки M на рис. 3-2 не будет равен нулю, а будет $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \dfrac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \cdot 0{,}5r}$, где $q_1 = q$, $q_2 = -q$.

Знак «минус» здесь скрыт в выражении $q_1 + q_2$, где q_1 – положителен, а q_2 – отрицателен. Что ж, можно поступать и так, подставляя «минус» только при вычислениях. Но все же, особенно на письменном экзамене, советуем вам этот момент оговорить сразу, чтобы экзаменаторы не посчитали, что он вам неизвестен, и не снизили оценку, т. е. подчеркнуть, что $q_1 + q_2$ есть алгебраическая сумма зарядов с учетом их положительного и отрицательного значений.

Если любое заряженное тело соединяют с Землей, то потенциал тела становится равным потенциалу Земли, и поэтому за точку с нулевым потенциалом можно принять любую точку поверхности земного шара.

Сравним формулы напряженности и потенциала поля точечного заряда или заряженного шара:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Мы видим, что эти формулы очень похожи, разница состоит лишь в том, что в формуле напряженности расстояние r в квадрате, а в формуле потенциала оно в первой степени. Поэтому потенциал и напряженность одной и той же точки поля, созданного точечным зарядом или шаром на расстоянии r от этого заряда или от центра шара радиусом $R < r$, связаны простым соотношением

$$\varphi = Er$$

Пример 3. Проводящая сфера M радиусом R несет положительный заряд q_0, распределенный равномерно по ее поверхности. В небольшое отверстие 0 в этой сфере вставлен бесконечно тонкий стержень AB с шариками радиусом r на концах (рис. 3-3). Найдем заряд q на шариках.

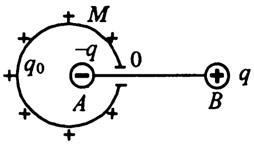


Рис. 3-3

Очевидно, что на шарике A заряд q будет отрицательным, так как свободные электроны проводника AB и шарика B перейдут на шарик A, будучи притянутыми положительными зарядами сферы M. Соответственно на шарике B возникает положительный заряд $+q$. Потенциал φ_A шарика A будет обусловлен его собственным отрицательным зарядом $-q$ и зарядом q_0 сферы M, поэтому

$$\varphi_A = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_0}{R} - \frac{q}{r}\right).$$

Потенциал шарика B будет обусловлен только его зарядом q, поскольку нить AB бесконечно длинная, и значит, потенциал сферы M на бесконечном удалении от нее равен 0. Тогда $\varphi_B = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

Поскольку шарики A и B соединены, значит, $\varphi_A = \varphi_B$ или

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_0}{R}-\frac{q}{r}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r},\quad \frac{q_0}{R}-\frac{q}{r}=\frac{q}{r},\quad \frac{q_0}{R}=2\frac{q}{r},$$

откуда $q = q_0 \dfrac{r}{2R}$.

Работа перемещения заряда A в любом электрическом поле, как в однородном, так и в неоднородном, определяется выражением

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{или} \quad A = qU.$$

Здесь $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов, или падение потенциала $\Delta\varphi$, или напряжение U в случае отсутствия источника тока между точками с потенциалами φ_1 и φ_2.

Очевидно, что если заряд перемещают между точками с одинаковым потенциалом (например, по поверхности заряженного проводника или между точками, расположенными на одинаковом расстоянии от точечного заряда – источника или заряженной сферы), то работа перемещения заряда равна нулю. Точно так же равна нулю и работа перемещения заряда по замкнутой траектории, т. е. когда он возвращается в исходную точку с прежним потенциалом. Действительно, в этом случае $A = q(\varphi_1 - \varphi_1) = 0$.

В однородном электростатическом поле работа перемещения заряда q может быть также определена по формуле $A = Eqd$, где $d = S\cos\alpha$. Здесь E – напряженность этого поля, а d – проекция перемещения $\vec{S}$ заряда q на силовую линию этого поля (рис. 3-4), α – угол между направлением перемещения $\vec{S}$ и вектором $\vec{E}$. Если заряд перемещается по силовой линии, то d – модуль перемещения. Если заряд перемещается перпендикулярно силовым линиям, то $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$ и $A = 0$.

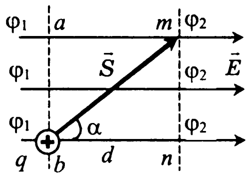


Рис. 3-4

Напомним, что в каждой точке однородного электрического поля (оно изображается параллельными прямыми, направленными от положительных зарядов – источников этого поля к отрицательным зарядам-источникам или в бесконечность) напряженность одинакова по величине и направлению, а потенциал – нет, так как он понижается при переходе от точек, которые ближе к положительным зарядам – источникам, к точкам, которые ближе к отрицательным зарядам – источникам. В этом случае связь между разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ (или U) и напряженностью E выражает простое соотношение $E = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$ или $E = \dfrac{U}{d}$.

Следует отметить, что в электрическом поле можно отыскать точки, потенциалы которых одинаковы. Эти точки располагаются на поверхностях, перпендикулярных линиям вектора $\vec{E}$. Такие поверхности называются эквипотенциальными. На рис. 3-4 такими поверхностями, например, являются плоские поверхности ab и mn, перпендикулярные плоскости чертежа и линиям вектора $\vec{E}$.

Работа перемещения заряда q вдоль эквипотенциальной поверхности равна нулю, так как $A = q(\varphi_1 - \varphi_1) = 0$.

Поверхность проводника с неподвижными зарядами тоже является эквипотенциальной, поэтому при перемещении заряда по такому проводнику (как внутри, так и на его поверхности) работы не совершается.

Отметим, что последние формулы можно применять к полю бесконечной равномерно заряженной плоскости и к полю плоского конденсатора, обкладки которого заряжены разноименно (при этом, если $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов между обкладками, то d – расстояние между ними).

При решении задач на движение заряженных частиц в электрическом поле надо сразу определить, как движется частица: равномерно, равнопеременно или с переменным ускорением, от этого зависит выбор уравнений и законов кинематики и динамики, без которых в этом случае, как правило, не обойтись. Следует учитывать, что положительно заряженная частица, внесенная в электрическое поле, под действием только сил электрического поля движется равноускоренно от точки с большим потенциалом, которая ближе к положительному заряду – источнику, к точке с меньшим потенциалом, которая дальше от положительного заряда – источника, т. е. ближе к отрицательному заряду, а отрицательно заряженная частица – наоборот.

При этом работа поля идет на увеличение кинетической энергии заряда, поэтому согласно закону сохранения энергии справедливо соотношение $A = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$, где $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$ или $A = qU$.

Здесь m – масса заряженного тела или частицы, v_1 и v_2 – его начальная и конечная скорости (подчеркнем, что когда мы говорим «заряд», мы всегда имеем в виду заряженное тело, имеющее массу, размеры и т. д., поскольку сам по себе заряд как материальный объект не существует, заряд – это величина, которая, как и масса, температура и другие величины, характеризует тело).

Соответственно росту кинетической энергии заряженного тела в электрическом поле уменьшается потенциальная энергия этого тела. И наоборот, если тело тормозится, то его кинетическая энергия уменьшается, а потенциальная увеличивается. Если в задаче говорится, что тело, разогнанное до скорости v_0, влетело в электрическое поле, которое его стало тормозить (например, когда заряд q приближается к одноименному заряду) так, что в конце концов это тело остановилось, то здесь можно сказать, что кинетическая энергия тела $W_К$ полностью превратилась в потенциальную энергию взаимодействия $W_П$ с полем тормозящего его заряда, которая равна работе этого поля: $W_К = W_П$ или $W_К = A$, где

$$W_К = \frac{mv_0^2}{2} \text{ и } A = q\varphi\text{, поэтому } \frac{mv_0^2}{2} = q\varphi.$$

Если заряд q тормозится, например, заряженным шаром с зарядом q_0 (или одноименным точечным зарядом q_0), то потенциал φ точки поля, в которой заряд q полностью остановится (т. е. где его скорость v станет равна нулю), можно определить по формуле

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \text{ и тогда } \frac{mv_0^2}{2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Отсюда можно определить нужную вам величину, входящую в это уравнение.

Решение отдельных задач

Задача 1

Металлический шар диаметром d заряжен с поверхностной плотностью зарядов σ. Найти потенциал φ этого шара, если он окружен заземленной проводящей сферой, имеющей общий с шаром центр. Диаметр сферы D. Среда – воздух.

Дано:
d
σ
D
ε_0
ε
$\varphi - ?$

Решение. Заряд шара $q = \sigma S_1$, где площадь его поверхности $S_1 = \pi d^2$, поэтому $q = \sigma\,\pi d^2$.

Заряд на шаре обусловит появление потенциала φ_1: $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \dfrac{\sigma\pi d^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\dfrac{d}{2}} = \dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Здесь $r = \dfrac{d}{2}$ – радиус шара.

Из земли на сферу вследствие электростатической индукции придет заряд, равный по модулю заряду шара, но противоположного знака.

Заряд сферы обусловит появление потенциала $-\varphi_2$:

$$-\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = -\frac{\sigma\pi d^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\dfrac{D}{2}} = -\frac{\sigma d^2}{2\varepsilon_0\varepsilon D}.$$

Тогда потенциал шара, обусловленный зарядами шара и сферы,

$$\varphi = \varphi_1 + \left(-\varphi_2\right) \text{ или } \varphi = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0\varepsilon} - \frac{\sigma d^2}{2\varepsilon_0\varepsilon D},$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(1 - \frac{d}{D}\right)}$$

Задача решена.

Ответ: $\varphi = \dfrac{\sigma d}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(1 - \dfrac{d}{D}\right)$.

Задача 2

Потенциал заряженного шара $\varphi_1 = 300$ В. Чему равен потенциал φ_2 электрического поля этого шара в точке, отстоящей на расстоянии $l = 50$ см от его поверхности, если радиус шара $R = 25$ см?

Дано:
$\varphi_1 = 300$ В
$l = 50$ см
$R = 25$ см

φ_2 – ?

Решение. Потенциал шара определяется формулой $\varphi_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$, (1)

где q – заряд шара.

Потенциал поля в точке, отстоящей на расстоянии $r = R + l$ от центра шара, определяется формулой $\varphi_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ или $\varphi_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+l)}$. (2)

Разделим (1) на (2) и из полученного соотношения найдем φ_2: $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{q\cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R+l)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\cdot q}$, $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{R+l}{R}$, откуда

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1\frac{R}{R+l}}$$

Здесь можно не переводить сантиметры в метры, ведь они все равно сокращаются.

Произведем вычисления: $\varphi_2 = 300\dfrac{25}{25+50}\ \text{В} = 100\ \text{В}$.

Ответ: $\varphi_2 = 100$ В.

Задача 3

Определить потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии $a = 9$ см от поверхности заряженного шара радиусом $R = 1$ см, если поверхностная плотность зарядов на шаре $\sigma = 1\cdot10^{-11}$ Кл/см^2. Среда – воздух.

Дано:
$a = 9$ см
$R = 1$ см
$\sigma = 1\cdot10^{-11}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{см}^2}$
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$

φ – ?

Решение. Из теории электростатики известно, что потенциал электрического поля, созданного точечным зарядом или заряженным шаром с зарядом q в некоторой точке M на расстоянии r от центра шара(рис. 3-5), определяется выражением $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. (1)

Из рис. 3-5 следует, что
$r = a + R$. (2)

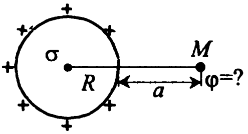


Рис. 3-5

Заряд шара q можно определить, умножив поверхностную плотность зарядов на шаре σ (т. е. заряд на единице площади поверхности шара) на площадь поверхности шара S: $\quad q = \sigma S$. (3)

Остается выразить площадь шара S через его радиус R, подставить выражения (2), (3) и (4) в формулу (1), и задача будет решена: $S = 4\pi R^2$, (4)

$$\varphi = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(a+R)}, \quad \boxed{\varphi = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon(a+R)}}$$

Переведем все единицы в СИ:

9 см = 0,09 м, 1 см = 0,01 м,

$$1\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Кл}}{\text{см}^2} = 1\cdot\frac{10^{-11}}{10^{-4}}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 1\cdot 10^{-11}\cdot 10^{4}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 1\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\varphi = \frac{1\cdot 10^{-7}\cdot 10^{4}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot(0{,}09+0{,}01)}\ \text{В} = 11{,}3\ \text{В}.$$

Ответ: φ = 11,3 В.

Задача 4

В точке 1 поля точечного заряда-источника потенциал φ_1 = 40 В, а в точке 2 φ_2 = 10 В. Найти потенциал φ в точке M, лежащей посередине между точками 1 и 2 (рис. 3-6).

Дано:
φ_1 = 40 В
φ_2 = 10 В
φ – ?

Решение. Обозначим расстояние от заряда – источника q до точки 1 буквой r, а расстояние между точками 1 и 2 обозначим Δr. Тогда расстояние от заряда-источника до точки 2 $r + \Delta r$, а до точки M $r + 0{,}5\Delta r$.

Запишем формулу потенциала поля точечного заряда применительно к точкам 1, 2 и M:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad (1) \qquad \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r+\Delta r)} \quad (2)$$

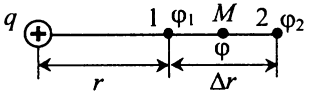


Рис. 3-6

и $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r+0{,}5\Delta r)}$. (3)

Разделим (1) на (2) и (1) на (3), чтобы исключить из решения неизвестный заряд q:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{q \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r + \Delta r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon q r} = \frac{r + \Delta r}{r}, \qquad (4)$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{q \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon(r + 0{,}5\Delta r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon q r} = \frac{r + 0{,}5\Delta r}{r} = 1 + \frac{\Delta r}{2r}. \qquad (5)$$

Если из (4) определить Δr и подставить его значение в (5), то неизвестное расстояние r тоже сократится и мы получим одно уравнение с одним неизвестным потенциалом φ, который из него определим:

$$r + \Delta r = r\frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad \Delta r = r\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - r = r\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} - 1\right) = r\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_2}. \qquad (6)$$

Теперь подставим (6) в (5):

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = 1 + r\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2r\varphi_2} = \frac{2\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2}{2\varphi_2}, \quad \frac{\varphi_1}{\varphi} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\varphi_2},$$

откуда $$\boxed{\varphi = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}}$$

Произведем вычисления: $\varphi = \dfrac{2 \cdot 40 \cdot 10}{40 + 10}$ В $= 16$ В.

Ответ: $\varphi = 16$ В.

Задача 5

В трех вершинах квадрата со стороной $a = 20$ см находятся заряды $q_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_3 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл (рис. 3-7). Определить потенциал φ электрического поля, созданного этими зарядами в четвертой вершине.

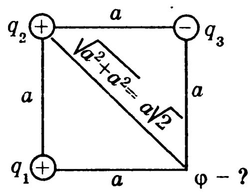


Рис. 3-7

Дано:
$a = 20$ см
$q_1 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл
$q_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл
$q_3 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$\varepsilon = 1$

φ – ?

Решение. Напомним еще раз, что потенциал – скалярная алгебраическая величина, поэтому потенциал поля системы точечных зарядов в данной точке равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных в этой точке каждым зарядом в отдельности. При этом потенциал поля, созданного положительным зарядом, тоже положителен, а потенциал поля, созданного отрицательным зарядом, тоже отрицателен. В нашей задаче система состоит из двух положительных зарядов q_1 и q_2 и одного отрицательного

$-q_3$, поэтому потенциал электрического поля в четвертой вершине $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$.

Потенциал φ_1 поля точечного заряда q_1, отстоящего на расстоянии a от четвертой вершины, определяется выражением

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}.$$

Потенциал поля, созданного зарядом q_2, который отстоит на расстоянии $a\sqrt{2}$ от четвертой вершины,

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a\sqrt{2}}.$$

И, наконец, потенциал поля точечного заряда $-q_3$, отстоящего от четвертой вершины, как и заряд q_1, на расстоянии a, по модулю $\varphi_3 = \dfrac{q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

Тогда потенциал поля системы этих зарядов в четвертой вершине

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a\sqrt{2}} - \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}, \quad \boxed{\varphi = \frac{q_1 + 0{,}7q_2 - q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}}$$

Здесь $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7$.

Переведем все единицы в СИ: 20 см = 0,02 м.
Подставим числа и произведем вычисления:

$$\varphi = \frac{10^{-8} + 0{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 2 - 2 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}2}\ \text{В} = 180\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi = 180$ В.

Задача 6

Четыре одинаковых точечных заряда q расположены на одной прямой на расстоянии r друг от друга. Какую работу A надо совершить, чтобы переместить эти заряды в вершины тетраэдра со стороной r? Среда — вакуум.

Дано:
q
r
$\varepsilon = 1$

A – ?

Решение. Работа по переносу зарядов равна разности энергий системы зарядов W_2, расположенных в вершинах тетраэдра (рис. 3-8, *б*), и энергии системы зарядов W_1, расположенных на одной прямой (рис. 3-8, *а*):

$$A = W_2 - W_1. \qquad (1)$$

Энергия системы N точечных зарядов определяется формулой:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3 + \ldots + q_N\varphi_N).$$

Здесь q — заряд в некоторой точке, φ — потенциал поля в этой же точке, созданного остальными зарядами системы.

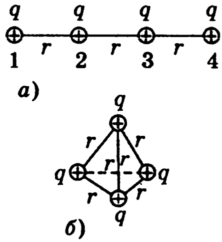


Рис. 3-8

Запишем эту формулу применительно к системе четырех зарядов, расположенных на одной прямой:

$$W_1 = \frac{1}{2}(q\varphi_1 + q\varphi_2 + q\varphi_3 + q\varphi_4) =$$

$$= \frac{q}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4).$$

Здесь φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 — потенциалы поля, созданного в точках 1, 2, 3 и 4 остальными зарядами, не считая того заряда, который находится в данной точке.

Потенциал φ_1 поля в точке 1, созданного зарядами в точках 2, 3 и 4, равен:

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3r} = \frac{11q}{24\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3)$$

В силу симметрии $\varphi_4 = \varphi_1$. (4)

Потенциал φ_2 поля в точке 2, созданного зарядами в точках 1, 3 и 4, равен:

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2r} = \frac{5q}{8\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (5)$$

В силу симметрии $\varphi_3 = \varphi_2$.

Подставим (3)—(6) в (2):

$$W_1 = \frac{q}{2}\left(2\frac{11q}{24\pi\varepsilon_0 r} + 2\frac{5q}{8\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{13q^2}{12\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (7)$$

Теперь определим энергию системы зарядов W_2, расположенных в вершинах тетраэдра. Очевидно, что энергия заряда в одной вершине $W_{2,1}$ равна

$$W_{2,1} = \frac{1}{2}q \cdot 3\varphi = 1{,}5q\varphi,$$

где φ — потенциал поля, созданного в этой вершине каждым из остальных трех зарядов.

В силу симметрии вся энергия этой системы четырех зарядов будет в 4 раза больше:

$$W_2 = 4W_{2,1} = 4\cdot 1{,}5q\varphi = 6q\varphi, \text{ где } \varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Поэтому $$W_2 = 6q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{3}{2}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (8)$$

Нам осталось подставить (7) и (8) в (1), и задача будет решена.

$$A = \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 r} - \frac{13q^2}{12\pi\varepsilon_0 r} = \boxed{\frac{5q^2}{12\pi\varepsilon_0 r}}$$

Ответ: $A = \dfrac{5q^2}{12\pi\varepsilon_0 r}$.

Задача 7

Две концентрические металлические заряженные сферы радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 10$ см (рис. 2-20) несут заряды $q_1 = 1$ нКл и $q_2 = -0{,}5$ нКл. Найти потенциалы φ_1, φ_2 и φ_3 электрического поля, образованного этими сферами в точках 1, 2 и 3, отстоящих от центра сфер на расстояния $r_1 = 5$ см, $r_2 = 9$ см и $r_3 = 15$ см. Среда – воздух.

Дано:
$R_1 = 6$ см
$R_2 = 10$ см
$q_1 = 1$ нКл
$q_2 = -0{,}5$ нКл
$r_1 = 5$ см
$r_2 = 9$ см
$r_3 = 15$ см
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
$\varepsilon = 1$

φ_1 – ?
φ_2 – ?
φ_3 – ?

Решение. Обратимся к рис. 2-20.

Потенциал поля, созданного обеими сферами в точке 1, равен алгебраической сумме потенциала φ_{11} поля, созданного положительно заряженной сферой радиусом R_1, и потенциала $-\varphi_{12}$ поля, созданного отрицательно заряженной сферой радиусом R_2: $\varphi_1 = \varphi_{11} - \varphi_{12}$, где

$$\varphi_{11} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}$$ и

$$\varphi_{12} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2},$$ поэтому

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}$$ или

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_1}{R_1} - \frac{q_2}{R_2}\right)}$$

Точка 2 находится вне сферы радиусом R_1 на расстоянии r_2 от ее центра, поэтому потенциал поля этой сферы

$$\varphi_{21} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}.$$

По отношению к сфере радиусом R_2 точка 2 находится внутри нее, поэтому потенциал поля, созданного этой сферой в точке 2, $\varphi_{22} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}$.

Тогда потенциал поля обеих сфер в точке 2

$$\varphi_2 = \varphi_{21} - \varphi_{22} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}$$

$$\text{или} \quad \boxed{\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q_1}{r_2} - \frac{q_2}{R_2}\right)}$$

Точка 3 находится вне обеих сфер на расстоянии r_3 от их общего центра, поэтому

$$\varphi_{31} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3} \quad \text{и} \quad \varphi_{32} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3},$$

поэтому потенциал поля обеих сфер в точке 3

$$\varphi_3 = \varphi_{31} - \varphi_{32} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3} - \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3} \quad \text{или} \quad \boxed{\varphi_3 = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3}}$$

Переведем все единицы в СИ:
6 см = 0,6 м, 10 см = 0,1 м,
1 нКл = $1 \cdot 10^{-9}$ Кл, 0,5 нКл = $0,5 \cdot 10^{-9}$ Кл,
5 см = 0,5 м, 15 см = 0,15м.
Произведем вычисления:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1 \cdot 10^{-9}}{0,06} - \frac{0,5 \cdot 10^{-9}}{0,1}\right)В = 105\ \text{В},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1 \cdot 10^{-9}}{0,09} - \frac{0,5 \cdot 10^{-9}}{0,1}\right)\text{В} = 50\ \text{В},$$

$$\varphi_3 = \frac{1 \cdot 10^{-9} - 0,5 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,15}В = 30\ \text{В}.$$

Ответ: φ_1 = 105 В, φ_2 = 50 В, φ_3 = 30 В.

Задача 8

В однородном электрическом поле напряженностью E = 2 кВ/см переместили заряд q = −20 нКл в направлении силовой линии поля на расстояние d = 10 см. Найти работу поля A, изменение потенциальной энергии поля $\Delta W_п$ и напряжение (разность потенциалов) U между начальной и конечной точками перемещения.

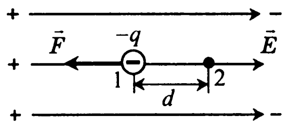


Рис. 3-9

Дано:
$E = 2\ \dfrac{кВ}{см}$
$q = -20$ нКл
$d = 10$ см

A – ?
$\Delta W_п$ – ?
U – ?

Решение. На отрицательный заряд q со стороны поля будет действовать постоянная сила $F = qE$, антинаправленная его перемещению из точки 1 в точку 2 в направлении силовой линии (рис. 3-9). Поскольку работа перемещения заряда определяется формулой $A = Fd\cos\alpha$, где $\alpha = 180°$ и $\cos\alpha = -1$, то $\boxed{A = -qEd}$

Работа A равна изменению потенциальной энергии $\Delta W_п$, взятой со знаком «минус»: $A = -\Delta W_п$ или $\Delta W_п = -A$, поэтому $\boxed{\Delta W_п = qEd}$

Поскольку $A = qU$, напряжение $\boxed{U = \dfrac{A}{q}}$

Переведем все единицы в СИ:

$$2\ \frac{кВ}{см} = 2\frac{10^3}{10^{-2}}\frac{В}{м} = 2\cdot 10^5\frac{В}{м},$$

20 нКл $= 20\cdot 10^{-9}$ Кл $= 2\cdot 10^{-8}$ Кл, 10 см $= 0{,}1$ м.

Произведем вычисления:

$A = -2\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^5\cdot 0{,}1$ Дж $= -4\cdot 10^{-4}$ Дж,

$$\Delta W_п = 4\cdot 10^{-4}\ Дж,\quad U = \frac{-4\cdot 10^{-4}}{-2\cdot 10^{-8}}\ В = 2\cdot 10^4\ В.$$

Ответ: $A = -4\cdot 10^{-4}$ Дж, $\Delta W_п = 4\cdot 10^{-4}$ Дж, $U = 2\cdot 10^4$ В.

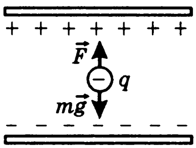


Рис. 3-10

Задача 9

Между двумя горизонтальными плоскостями, заряженными разноименно и расположенными на расстоянии $d = 5$ мм друг от друга, находится в равновесии капелька масла массой 20 нг (нанограмм) (рис. 3-10). Найти число избыточных электронов N на этой капельке. Среда – воздух. Разность потенциалов между плоскостями $U = 2$ кВ.

Дано:
$d = 5$ мм
$m = 20$ нг
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл
$U = 2$ кВ
$g = 9{,}8\ \dfrac{м}{с^2}$

N – ?

Решение. Капелька будет находиться в равновесии, когда сила тяжести $m\vec g$, приложенная к ней со стороны Земли, будет уравновешена силой $\vec F$, приложенной к капельке со стороны электрического поля: $mg = F$, (1)

где $F = qE$.

Напряженность однородного поля плоскостей связана с напряжением на них U соотношением $E = \frac{U}{d}$, поэтому $F = q\frac{U}{d}$. (2)

Заряд капельки q выразим через число избыточных электронов N и заряд электрона e: $q = Ne$. (3)

Подставим (3) в (2): $F = Ne\frac{U}{d}$. (4)

Теперь подставим (4) в (1) и из полученного соотношения найдем число избыточных электронов N:

$$mg = Ne\frac{U}{d}, \text{ откуда } \boxed{N = \frac{mgd}{eU}}$$

Переведем все единицы в СИ: 5 мм = $5 \cdot 10^{-3}$ м,
20 нг = $20 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-3}$ кг = $2 \cdot 10^{-11}$ кг, 2 кВ = $2 \cdot 10^3$ В.
Покажем, что число N – безразмерная величина:

$$[N] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\text{м}}{\text{Кл} \cdot \text{В}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл}\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} \text{ – безразмерная величина.}$$

Напомним, что $\text{Н} = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и $\text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$.

Произведем вычисления:

$$N = \frac{2 \cdot 10^{-11} \cdot 9{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10^3.$$

Ответ: $N = 3 \cdot 10^3$.

Задача 10

На пластине M поддерживается потенциал $\varphi_1 = +80$ В, а на пластине N – $\varphi_2 = -80$ В (рис. 3-11, *а*). Расстояние между пластинами $d = 10$ см. На расстоянии $d_1 = 4$ см от пластины M помещают заземленную пластину P (рис. 3-11, б). Найти изменение напряженности ΔE_1 поля на участке MP и изменение напряженности поля ΔE_2 на участке PN при этом. Построить графики зависимостей напряженностей $E = E(x)$ и потенциала $\varphi = \varphi(x)$ от расстояния между точками поля и пластинами.

Дано:
$\varphi_1 = +80$ В
$\varphi_2 = -80$ В
$d = 10$ см
$d_1 = 4$ см
$\varphi = 0$

Решение. Напряженность однородного поля E между пластинами M и N до помещения пластины P между ними

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}.$$

После того, как пластину P расположили параллельно пластине M на расстоянии d_1 от нее, напряженность поля между пла-

ΔE_1 – ?
ΔE_2 = ?
$E = E\,(x)$ – ?
$\varphi = \varphi\,(x)$ – ?

стинами M и P $E_1 = \dfrac{\varphi_1 - \varphi}{d_1}$, где $\varphi = 0$ – потенциал заземленной пластины P, поэтому $E_1 = \dfrac{\varphi_1}{d_1}$.

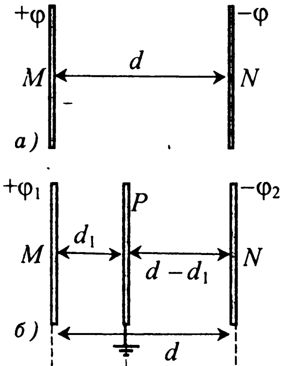


Рис. 3-11

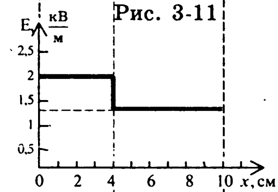


Рис. 3-12

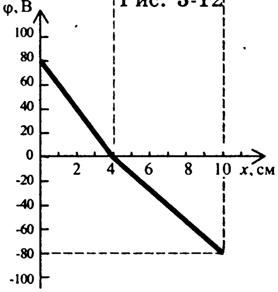


Рис. 3-13

Изменение напряженности электрического поля на участке MP

$\Delta E_1 = E_1 - E$

или $\boxed{\Delta E_1 = \dfrac{\varphi_1}{d_1} - \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}}$

Напряженность поля на участке PN после помещения пластины P

$$E_2 = \frac{\varphi - \varphi_2}{d - d_1} = \frac{-\varphi_2}{d - d_1},$$

так как $\varphi = 0$.

Тогда изменение напряженности на этом участке

$\Delta E_2 = E_2 - E$ или

$$\boxed{\Delta E_2 = \frac{-\varphi_2}{d - d_1} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}}$$

Переведем все единицы в СИ: 10 см = 0,1 м, 4 см = 0,04 м.

Произведем вычисления:

$$\Delta E_1 = \left(\frac{80}{0{,}04} - \frac{80 - (-80)}{0{,}1}\right)\frac{\text{В}}{\text{м}} = 400\,\frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$\Delta E_2 = \left(\frac{-(-80)}{0{,}1 - 0{,}04} - \frac{80 - (-80)}{0{,}1}\right)\frac{\text{В}}{\text{м}} = -267\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Знак «минус» означает, что напряженность поля на участке PN уменьшилась.

График $E = E\,(r)$ показан на рис. 3-12.

$$E_1 = \frac{80}{0{,}04}\,\frac{В}{м} = 2000\,\frac{В}{м} = 2\,\frac{кВ}{м},$$

$$E_2 = \frac{-(-80)}{0{,}06}\,\frac{В}{м} = 1333\,\frac{В}{м} = 1{,}3\,\frac{кВ}{м}.$$

График $\varphi = \varphi\,(r)$ показан на рис. 3-13.

Задача 11

Два одинаково заряженных шарика диаметрами d = 0,5 см каждый расположены на расстоянии l = = 2 см между их поверхностями (рис. 3-14). До какого потенциала φ они заряжены, если сила их отталкивания друг от друга F = 2 мкН? Среда – воздух.

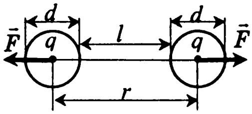


Рис. 3-14

Дано:
d = 0,5 см
l = 2 см
F = 2 мкН
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}$

φ – ?

Решение. Потенциал заряженного шарика можно определить по формуле $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$, где q – заряд на шарике и $R = \frac{d}{2}$ – его радиус, поэтому

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{d}{2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon d}. \qquad (1)$$

Заряд q найдем из закона Кулона, применив его к отталкивающимся шарикам: $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где $r = 2R + l = d + l$ – расстояние между центрами шариков.

Поэтому $F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(d+l)^2}$, откуда

$$q = 2(d+l)\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon F}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\varphi = \frac{2(d+l)\sqrt{\pi\varepsilon_0\varepsilon F}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon d} = \left(1+\frac{l}{d}\right)\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon F}{\pi^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2}}; \quad \boxed{\varphi = \left(1+\frac{l}{d}\right)\sqrt{\frac{F}{\pi\varepsilon_0\varepsilon}}}$$

Переведем все единицы в СИ:
0,5 см = $5 \cdot 10^{-3}$ м, 2 см = 0,02 м, 2 мкН = $2 \cdot 10^{-6}$ Н.
Произведем вычисления:

$$\varphi = \left(1 + \frac{0{,}02}{5 \cdot 10^{-3}}\right)\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-6}}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}}\ \text{В} = 1340\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi = 1340$ В.

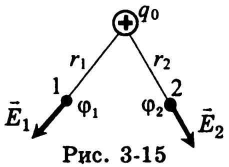


Рис. 3-15

Задача 12

Точечный заряд q_0 создает в точках 1 и 2 поле напряженностью E_1 и E_2 (рис. 3-15). Какую работу совершает электрическая сила при перемещении точечного пробного заряда q из точки 1 в точку 2?

Дано:
q_0
q
E_1
E_2

A – ?

Решение. Поле точечного заряда q_0 неоднородное. Работа перемещения пробного заряда q из точки 1 в точку 2 определяется выражением

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (1)$$

где $\varphi_1 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}$ (2) и $\varphi_2 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}$ (3) – потенциалы точек 1 и 2 в поле заряда-источника q_0. С учетом (2) и (3) формула (1) примет вид

$$A = q\left(\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} - \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}\right) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (4)$$

Расстояния r_1 и r_2 от точек 1 и 2 до заряда-источника q_0 найдем из формул $E_1 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}$ и $E_2 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}$, откуда $r_1 = \sqrt{\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_1}}$ (5) и $r_2 = \sqrt{\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_2}}$. (6)

Подставим (5) и (6) в (4):

$$A = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_1}{q_0}} - \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_2}{q_0}}\right) =$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{q_0}}\left(\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2}\right) = q\sqrt{\frac{q_0^2\, 4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{4^2\pi^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2 q_0}}\left(\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2}\right),$$

$$\boxed{A = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon}}\left(\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2}\right)}$$

Задача решена.

Ответ: $A = \dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{q_0}{\pi\varepsilon_0\varepsilon}}\left(\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2}\right)$.

Задача 13

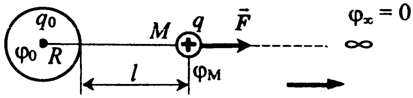


Рис. 3-16

При переносе точечного заряда q = 10 нКл из точки М, расположенной на расстоянии l = 10 см от поверхности заряженного металлического шара в бесконечность (рис. 3-16), была совершена работа A = 0,5 мкДж. Радиус шара R = 4 см. Найти потенциал φ_0 на поверхности шара. Среда – воздух.

Дано:
q = 10 нКл
$\varphi_\infty = 0$
l = 10 см
A = 0,5 мкДж
R = 4 см
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
$\varepsilon = 1$

φ_0 – ?

Решение. Решим эту задачу двумя способами:

а) используя формулу работы перемещения заряда в электрическом поле;

б) используя закон сохранения энергии перемещаемого заряда q.

а) Поле шарового проводника неоднородное. Работа А перемещения заряда q в таком поле может быть определена по формуле
$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, где $\varphi_1 = \varphi_м$ и $\varphi_2 = \varphi_\infty$, поэтому $A = q(\varphi_м - \varphi_\infty)$. (1)

Здесь $\varphi_\infty = 0$ – потенциал поля в бесконечно удаленной точке (если проводник уединенный, то потенциал его поля в бесконечности равен нулю), $\varphi_м$ – потенциал поля этого же шарового проводника в начальной точке перемещения М. Он определяется формулой

$$\varphi_м = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \tag{2}$$

где q_0 – заряд шарового проводника, r – расстояние между этой точкой и центром шара. Из рис. 3-16 видно, что это расстояние $r = l + R$. (3)

Заряд шарового проводника q_0 свяжем искомым потенциалом на поверхности шара формулой, аналогичной формуле (2): $\varphi_0 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$, откуда $q_0 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\varphi_0$. (4)

Теперь подставим (3) и (4) в (2), а затем то выражение, которое получится в результате этой подстановки, подставим в (1):

$$\varphi_м = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\varphi_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l+R)} = \frac{R}{l+R}\varphi_0, \quad A = q\varphi_0\frac{R}{l+R}.$$

Отсюда найдем искомый потенциал шар φ_0:

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{A}{q}\left(1 + \frac{l}{R}\right)}$$

Задача в общем виде решена.

б) По закону сохранения энергии работа перемещения заряда q из точки М в бесконечность равна изменению потенциальной энергии $\Delta W_п$ этого заряда, взятой со знаком «минус»: $A = -\Delta W_п = -(W_{п\infty} - W_{пм}) = W_{пм} - W_{п\infty}$.

Здесь $W_{пм}$ – потенциальная энергия этого заряда в точке М, $W_{п\infty}$ – потенциальная энергия заряда q в бесконечности. По определению потенциала

$$\varphi_м = \frac{W_{пм}}{q} \text{ и } \varphi_\infty = \frac{W_{п\infty}}{q} = 0,$$

поэтому $W_{пм} = q\varphi_м = q\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = q\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l+R)}$.

Тогда $A = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l+R)}$ или с учетом (4)

$$A = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\varphi_0 q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l+R)} = \varphi_0\frac{Rq}{l+R} \text{ откуда } \boxed{\varphi_0 = \frac{A}{q}\left(1+\frac{l}{R}\right)}$$

Мы получили прежний результат.

Переведем все единицы в СИ:

10 нКл = $10 \cdot 10^{-9}$ Кл = 10^{-8} Кл, 10 см = 0,1 м,

0,5 мкДж = $0,5 \cdot 10^{-6}$ Дж = $5 \cdot 10^{-7}$ Дж, 4 см = 0,04 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\varphi_0 = \frac{5\cdot 10^{-7}}{10^{-8}}\left(1+\frac{0,1}{0,04}\right) \text{ В} = 175 \text{ В}.$$

Ответ: $\varphi_0 = 175$ В.

Задача 14

Между вертикальными разноименно заряженными пластинами помещена палочка длиной l = 2 см, изготовленная из диэлектрика. На ее концах находятся точечные заряды q_1 = –1 мкКл и q_2 = +1 мкКл. Разность потенциалов между пластинами U = 2 В, расстояние между ними d = 4 см. Какую работу A надо совершить, чтобы повернуть эту палочку на угол α = 180° (рис. 3-17) вокруг оси mn?

Дано:
l = 2 см
q_1 = –1 мкКл
q_2 = +1 мкКл
U = 2 В
d = 4 см
α = 180°

A – ?

Решение. Работа A поворота палочки на 180° вокруг оси mn складывается из работы перемещения отрицательного заряда q_1 из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 $A_1 = -q_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ и

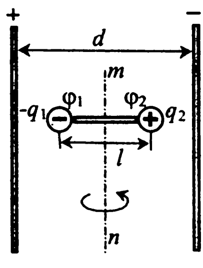


Рис. 3-17

работы перемещения положительного потенциального заряда q_2 из точки с потенциалом φ_2 в точку с потенциалом φ_1

$A_2 = q_2(\varphi_2 - \varphi_1) = -q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$.

Обозначим $q_1 = q_2 = q$.

Тогда $A = A_1 + A_2 = -q(\varphi_1 - \varphi_2) + (-q(\varphi_1 - \varphi_2)) =$
$= -2q(\varphi_1 - \varphi_2)$. (1)

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ определим через напряженность однородного поля между пластинами:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}, \text{ откуда } \varphi_1 - \varphi_2 = El.$$

С другой стороны, $E = \dfrac{U}{d}$, поэтому $\varphi_1 - \varphi_2 = \dfrac{U}{d}l$. (2)

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\boxed{A = -2qU\frac{l}{d}}$$

Знак «минус» говорит о том, что работа совершается внешними силами против сил электрического поля, так как отрицательный заряд перемещается ближе к отрицательной пластине, а положительный – к положительной.

Переведем все единицы в СИ:

2 см = 0,02 м, 1мкКл = $1 \cdot 10^{-6}$ Кл, 4 см = 0,04 м.

Произведем вычисления:

$$A = -2 \cdot 1 \cdot 10^{-6}\frac{0{,}02}{0{,}04}\text{ Дж} = -1 \cdot 10^{-6}\text{ Дж} = -1\text{ мкДж}.$$

Ответ: $A = -1$ мкДж.

Задача 15

Проводящая сфера радиусом $R = 2$ см с зарядом $q = 0{,}2$ нКл помещена в масло с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5$. Построить график зависимости потенциала поля этой сферы φ от расстояния r между центром сферы и точками поля, лежащими на продолжении радиуса (от значения $r_1 = 0$ до $r_2 = 8$ см).

Дано:
$R = 2$ см
$q = 0{,}2$ нКл
$\varepsilon = 5$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
$r_1 = 0$
$r_2 = 8$ см

$\varphi = \varphi(r)$ – ?

Решение. Выразим все единицы в СИ: 2 см = 0,02 м, 8 см = 0,08 м, 0,2 нКл = $2 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Теперь запишем формулу, выражающую зависимость потенциала φ от расстояния r, и подставим в эту формулу численные значения известных и неизменных величин q, ε и ε_0:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5r} = \frac{0{,}36}{r}.$$

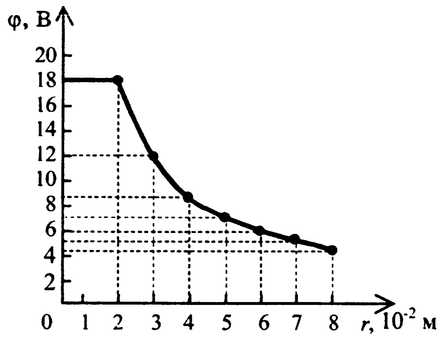


Рис. 3-18

Учтем, что при $r \leqslant R$ потенциал φ_0 внутри сферы и на ее поверхности одинаков

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} = 18\ \text{В}.$$

Для определения потенциала точек, лежащих вне сферы на расстояниях $r > R$, будем придавать расстоянию r значения 3 см, 4 см, 5 см, 6 см, 7 см, 8 см и вычислять соответствующие этим расстояниям потенциалы. Заполним таблицу:

r, м	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
φ, В	12	9	7,2	6	5,1	4,5

Теперь построим график $\varphi = \varphi(r)$ (рис. 3-18). При этом учтем, что между точками с $r_1 = 0$ и $r = R = 2$ см потенциал φ неизменен и равен 18 В.

Задача решена.

Задача 16

Электрон пролетел по силовой линии однородного электрического поля из точки 1 с потенциалом $\varphi_2 = 400$ В в точку 2 с потенциалом $\varphi_1 = 600$ В, двигаясь со скоростью в точке 1 $v_1 = 100$ км/с. Найти скорость электрона v_2 в точке 2, изменение его кинетической энергии $\Delta W_к$ и изменение его потенциальной энергии $\Delta W_п$.

Дано:
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$\varphi_1 = 600$ В
$\varphi_2 = 400$ В
$v_1 = 100\ \frac{км}{с}$

---

v_2 – ?
$\Delta W_к$ – ?
$\Delta W_п$ – ?

Решение. Отметим, что потенциал точки 1, равный 400 В, ниже потенциала точки 2, равного 600 В, поэтому более высокий потенциал в точке 2 мы обозначили φ_1, а в точке 1 более низкий потенциал мы обозначили φ_2. Советуем и вам всегда более высокий потенциал (тот, что ближе к «плюсу» – источнику поля) обозначать φ_1, а тот, что ближе к «минусу», φ_2, чтобы не запутаться в знаках. Работа A, совершенная силами электрического поля при перемещении электрона из точки 1 в точку 2, равна изменению его кинетической энергии $\Delta W_к$:

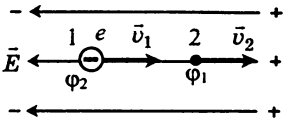


Рис. 3-19

$A = \Delta W_к = W_{к2} - W_{к1}$, где

$A = e(\varphi_1 - \varphi_2)$, $W_{к2} = \dfrac{m_e v_2^2}{2}$ и

$W_{к1} = \dfrac{m_e v_1^2}{2}$, поэтому $e(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{m_e v_2^2}{2} - \dfrac{m_e v_1^2}{2}$, откуда

$$\frac{m_e v_2^2}{2} = e(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{m_e v_1^2}{2}$$

и $$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2e(\varphi_1 - \varphi_2) + m_e v_1^2}{m_e}}}$$

Изменение кинетической энергии электрона

$$\Delta W_к = A \text{ или } \boxed{\Delta W_к = e\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}$$

Изменение его потенциальной энергии $\Delta W_п$ равно совершенной полем работе A, взятой со знаком «минус», что говорит об уменьшении потенциальной энергии электрона при его движении в сторону повышения потенциала:

$$\boxed{\Delta W_п = -A}$$

Переведем в СИ единицу скорости:

$100\ \dfrac{км}{с} = 1 \cdot 10^5\ \dfrac{м}{с}$.

Произведем вычисления:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}(600 - 400) + 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 10^{10}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}}\ \frac{м}{с} =$$

$= 5{,}9 \cdot 10^6 \dfrac{м}{с}$,

$\Delta W_к = 1{,}6 \cdot 10^{-19}(600 - 400)$ Дж $= 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж,

$\Delta W_п = -3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж.

Ответ: $v_2 = 5{,}9 \cdot 10^6$ м/с, $\Delta W_к = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж, $\Delta W_п = -3{,}2 \cdot 10^{-17}$ Дж.

Задача 17

Как соотносятся скорости протона v_1 и альфа-частицы v_2, прошедших одинаковую ускоряющую разность потенциалов, если заряд протона q_1 вдвое меньше массы альфа-частицы q_2, а масса протона m_1 в 4 раза меньше массы альфа-частицы m_2? Начальные скорости обеих частиц равны нулю.

Дано:
$q_2 = 2q_1$
$m_2 = 4m_1$
$v_0 = 0$

$\dfrac{v_1}{v_2}$ – ?

Решение. Поскольку начальная скорость протона $v_0 = 0$, работа поля A_1 идет на сообщение ему кинетической энергии $W_{к1}$:

$A_1 = W_{к1}$, где $A_1 = q_1(\varphi_1 - \varphi_2)$ и $W_{к1} = \dfrac{mv_1^2}{2}$,

поэтому $q_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$. (1)

Аналогично применительно к альфа-частице запишем:

$$q_2(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{m_2 v_2^2}{2}. \quad (2)$$

Разделим (1) на (2). При этом неизвестная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ сократится и мы определим v_2:

$$\frac{q_1(\varphi_1 - \varphi_2)}{q_2(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{m_1 v_1^2 \cdot 2}{2m_2 v_2^2}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2, \text{ откуда}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{q_1}{2q_1} \cdot \frac{4m_1}{m_1}} = \sqrt{2} = 1{,}4.$$

Задача решена.

Ответ: $\dfrac{v_1}{v_2} = 1{,}4$, т. е. скорость протона в 1,4 раза будет больше скорости альфа-частицы.

Задача 18

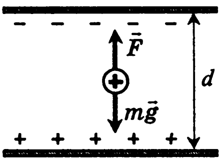


Рис. 3-20

В электрическом поле плоского конденсатора с горизонтально расположенными обкладками покоится капелька масла, заряд которой равен элементарному заряду (рис. 3-20). На обкладки подано напряжение $U = 500$ В, расстояние между обкладками $d = 0{,}5$ см. Найти радиус капельки R. Плотность масла $\rho = 900$ кг/м³, среда – воздух.

Дано:
$q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$U = 500$ В
$d = 0{,}5$ см
$\rho = 900\ \dfrac{кг}{м^3}$
$g = 9{,}8\ \dfrac{м}{с^2}$

R – ?

Решение. Поскольку капелька покоится, значит, все силы, приложенные к ней со стороны других тел, уравновешены согласно первому закону Ньютона. На капельку действуют две силы: сила тяжести $m\vec g$ со стороны Земли и сила $\vec F$ со стороны поля конденсатора (поскольку среда – воздух, а его плотность очень невелика по сравнению с плотностью масла и, кроме того, объем капельки чрезвычайно мал, то выталкивающей силой, действующей на капельку со стороны воздушной среды, будем пренебрегать). Эти силы обязательно должны быть антинаправлены и по модулю равны друг другу, поскольку их равнодействующая согласно первому закону Ньютона должна быть равна 0. Поскольку сила тяжести направлена всегда вниз, то сила F должна быть направлена только вверх:

$$m\vec{g} + \vec{F} = 0 \quad \text{или} \quad F = mg. \qquad (1)$$

Теперь нам надо выразить эти силы через известные из условия задачи и искомую величины и подставить соответствующие выражения для сил $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ в равенство (1), откуда определить искомую величину R.

Силу F выразим через напряженность поля конденсатора E, а напряженность этого однородного поля в свою очередь – через напряжение U: $F = qE$, где $E = \frac{U}{d}$.

Тогда $F = q\frac{U}{d}$. (2)

Силу тяжести mg свяжем с плотностью масла ρ и искомым радиусом капельки R, воспользовавшись формулой плотности вещества и выразив объем шарика V через его радиус R: $m = \rho V$, где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим формулу, в которой все величины, кроме искомого радиуса R, будут известны. Из нее мы и найдем радиус R. Проделаем эти действия: $q\frac{U}{d} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho g$. Отсюда $\boxed{R = \sqrt[3]{\frac{3qU}{4\pi\rho g d}}}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 0,5 см = $5 \cdot 10^{-3}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 500}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 900 \cdot 9{,}8 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}}\ \text{м} = 7{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

Ответ: $R = 7{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 19

На какое минимальное расстояние l от поверхности заряженной сферы радиусом R сможет приблизиться к ней одноименно заряженная частица массой m с зарядом q, скорость которой на бесконечном удалении от сферы была равна v_0? Среда – воздух. Поверхностная плотность заряда на сфере σ.

Дано:
m
R
q
v_0
ε
ε_0
σ
l – ?

Решение. Применим для решения этой задачи закон сохранения энергии. В бесконечности заряженная частица обладала кинетической энергией

$$W_{к0} = \frac{mv_0^2}{2} \quad (1)$$

при условии, что скорость частицы во много раз меньше скорости света в вакууме.

По мере приближения заряженной частицы к одноименно заряженной сфере ее скорость уменьшалась из-за действия сил отталкивания, антинаправленных перемещению заряженной частицы. Когда частица приблизилась к сфере на расстояние l от ее поверхности, скорость частицы упала до нуля, т. е. она остановилась. По закону сохранения энергии кинетическая энергия частицы $W_{к0}$, которой она обладала в бесконечности, полностью превратилась в потенциальную энергию $W_п$ взаимодействия этой частицы с полем заряженной сферы, поэтому

$$W_{к0} = W_п, \quad (2)$$

где

$$W_п = q\varphi. \quad (3)$$

Здесь φ – потенциал той точки поля сферы, в которой частица остановилась. Величину этого потенциала можно определить по формуле потенциала поля, создаваемого в некоторой точке заряженной сферой, если эта точка удалена от центра сферы на расстояние r:

$$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \quad (4)$$

Расстояние r можно представить как сумму радиуса сферы R и расстояния от точки до поверхности сферы l:

$$r = R + l. \quad (5)$$

Заряд q_0 в предыдущей формуле – это заряд сферы. Его можно выразить через известную из условия задачи поверхностную плотность заряда на сфере σ и площадь поверхности сферы S, которую в свою очередь можно выразить через радиус сферы R: $q_0 = \sigma S$, где $S = 4\pi R^2$, поэтому $q_0 = 4\pi R^2\sigma$. (6)

Подставим (5) и (6) в (4). Получим

$$\varphi = \frac{4\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R + l)} = \frac{R^2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon(R + l)}.$$

Теперь это выражение подставим в (3):

$$W_п = \frac{R^2\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon(R+l)}. \qquad (7)$$

Нам осталось подставить (1) и (7) в (2) и оттуда определить искомое расстояние l, поскольку остальные величины известны из условия задачи: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{R^2\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon(R+l)}$, откуда $R+l = \frac{2R^2\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon m v_0^2}$.

Отсюда $l = \frac{2R^2\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon m v_0^2} - R$ или $\boxed{l = R\left(\frac{2R\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon m v_0^2} - 1\right)}$

Задача решена.

Ответ: $l = R\left(\frac{2R\sigma q}{\varepsilon_0\varepsilon m v_0^2} - 1\right)$.

Задача 20

В плоский конденсатор влетает электрон со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^6$ м/с, направленной параллельно обкладкам конденсатора (рис. 3-21). На какое расстояние h сместится электрон к нижней обкладке за время пролета конденсатора? Расстояние между обкладками конденсатора $d = 2$ см, длина конденсатора $l = 5$ см, разность потенциалов между обкладками $U = 2$ В.

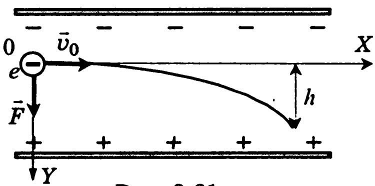


Рис. 3-21

Дано:
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$v_0 = 2 \cdot 10^6\ \frac{м}{с}$
$d = 2$ см
$l = 5$ см
$U = 2$ В

h – ?

Решение. Сразу отметим на будущее, что если в задаче говорится о движении электрона, протона или какой-либо еще заряженной частицы, то вам намекают, что известны масса и заряд этой частицы, которые вы можете взять из соответствующих таблиц в справочнике. Исключение составляют случаи, когда эту массу или заряд требуется найти.

Если бы конденсатор, о котором идет речь, был не заряжен, то электрон продолжал бы двигаться между его обкладками равномерно и прямолинейно по инерции в направлении вектора скорости $\vec{v}_0$ и пролетел бы за некоторое время t путь l, причем согласно уравнению равномерного движения этот путь

$$l = v_0 t \,. \tag{1}$$

Но при влете электрона в заряженный конденсатор на него со стороны поля конденсатора сразу начинает действовать постоянная сила $F = m_e a$, (2)
направленая в сторону положительной обкладки конденсатора (поскольку электрон – частица отрицательная) перпендикулярно первоначальному направлению движения электрона. Под действием этой силы электрон, продолжая двигаться равномерно в направлении оси OX со скоростью v_0, одновременно начнет смещаться к положительной обкладке без начальной скорости, двигаясь в этом направлении равноускоренно. Его смещение к этой обкладке за время t

$$h = \frac{at^2}{2}, \text{ поскольку } v_{0y} = 0. \tag{3}$$

Исключив из уравнения (1) и (3) неизвестное время t, мы определим траекторию движения электрона. Из уравнения (1)

$$t = \frac{l}{v_0}.$$

Подставив это выражение в уравнение (3), получим

$$h = \frac{a}{2v_0^2} l^2 \,. \tag{4}$$

Мы видим, что смещение h пропорционально квадрату длины l (ведь все остальные величины в этом уравнении не зависят ни от h, ни от l). Значит, полученное уравнение аналогично уравнению $y = kx^2$, траекторией которого является парабола. Поэтому электрон, влетевший в конденсатор параллельно его обкладкам, будет двигаться по параболе и вылетит из конденсатора, сместившись на расстояние h к положительной обкладке.

Для дальнейшего решения задачи выразим из уравнения (2) ускорение a:

$$a = \frac{F}{m_e}. \tag{5}$$

Нам не известна сила F, действующая на электрон со стороны поля конденсатора. Для ее определения применять закон Кулона нельзя, так как он применим только к точечным электрическим зарядам, а в нашей задаче хотя электрон и можно принять за такой заряд, но вот обкладки конденсатора считать точечным зарядом уже никак нельзя. Поэтому для определения силы F нам остается воспользоваться определением напряженности электрического поля $E = \dfrac{F}{e}$, откуда $F = eE$. (6)

Советуем вам в подобных задачах, когда закон Кулона неприменим, а электрическую силу F необходимо знать, пользоваться этой формулой, она вас выручит во всех случаях.

Но в формуле (6) опять стоит неизвестная нам величина – напряженность поля конденсатора E. Правда, определить ее достаточно просто. Поскольку поле плоского конденсатора однородное, то его напряженность E связана с напряжением U на обкладках простым соотношением $E = \dfrac{U}{d}$.

Подставим это выражение в формулу (6), а то, что получится в результате, в свою очередь подставим в формулу (5): $F = e\dfrac{U}{d}$, тогда $a = \dfrac{eU}{m_e d}$. (7)

Теперь нам осталось подставить (7) в (4), и задача в общем виде будет решена:

$$h = \frac{eUl^2}{2m_e dv_0^2} \quad \text{или} \quad \boxed{h = \frac{eU}{2m_e d}\left(\frac{l}{v_0}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ: 2 см = 0,02 м, 5 см = 0,05 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$h = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}02}\left(\frac{0{,}05}{2 \cdot 10^6}\right)^2 \text{ м} = 5{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: $h = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 21

На двух параллельных металлических пластинах находятся заряды q и $3q$. Между пластинами поддерживается разность потенциалов U, площадь пластин S. Найти расстояние d между ними, если $S >> d^2$ (т. е. площадь каждой пластины S во много раз больше квадрата расстояния между пластинами d^2, что свидетельствует об однородности поля между ними).

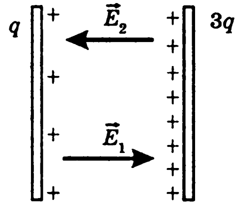


Рис. 3-22

Дано:	
q $3q$ U S	
d – ?	

Решение. Из рис. 3-22 следует, что вектор напряженности $\vec{E}_1$ поля пластины с зарядом q антинаправлен вектору напряженности $\vec{E}_2$ поля пластины с зарядом $3q$, ведь обе пластины заряжены одноименно. Поэтому результирующая напряженность поля между пластинами

$$E = E_2 - E_1, \qquad (1)$$

где $$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} \qquad (2) \qquad \text{и} \qquad E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (3)$$

Здесь $\sigma_1 = \dfrac{q}{S}$ и $\sigma_2 = \dfrac{3q}{S}$ – поверхностные плотности зарядов на первой и второй пластинах. Поскольку поле между пластинами однородное, то $E = \dfrac{U}{d}$. (4)

Нам осталось подставить (2), (3) и (4) в (1) и из полученного выражения найти расстояние d:

$$\frac{U}{d} = \frac{3q}{2\varepsilon_0\varepsilon S} - \frac{q}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}, \text{ откуда } \boxed{d = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SU}{q}}$$

Задача решена.

Ответ: $d = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon SU}{q}$.

Задача 22

Два электрона, находившихся на очень большом расстоянии друг от друга, запустили навстречу друг другу с одинаковыми начальными скоростями $v_0 = 2$ км/с. На какое минимальное расстояние r они смогут сблизиться? Среда – вакуум.

Дано:
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $v_0 = 2\ \dfrac{\text{км}}{\text{с}}$ $\varepsilon = 1$ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
r – ?

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся законом сохранения энергии, применив его к системе двух сближающихся электронов. На бесконечности каждый электрон обладал кинетической энергией:

$W_к = \dfrac{m_e v_0^2}{2}$, поэтому их суммарная кинетическая энергия была

$$2W_к = 2\frac{m_e v_0^2}{2} = m_e v_0^2.$$

Когда они сблизились на минимальное расстояние, то остановились из-за взаимного отталкивания. При этом их суммарная кинетическая энергия превратилась в потенциальную энергию, которой обладает один электрон в поле второго. Эта энергия $W_п = e\varphi$, где $\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ – потенциал точки поля, в которой остановился электрон. Поэтому $W_п = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$.

По закону сохранения энергии $2W_к = W_п$ или

$$m_e v_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \text{ откуда } \boxed{r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon m_e}\left(\frac{e}{2v_0}\right)^2}$$

Переведем единицу скорости в СИ: $2\ \frac{км}{с} = 2 \cdot 10^3\ \frac{м}{с}$.

Произведем вычисления:

$$r = \frac{1}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 2 \cdot 10^3}\right)^2 м = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ м.$$

Ответ: $r = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 23

К покоящемуся свободному ядру изотопа гелия массой $m_1 = 5{,}04 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q_1 = 2e$ устремился со скоростью $v_0 = 10$ км/с протон с массой $m_2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг и зарядом $q_2 = e$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд. На какое минимальное расстояние r они сблизятся? Среда – вакуум.

Дано:
$m_1 = 5{,}04 \cdot 10^{-27}$ кг
$q_1 = 2e$
$q_2 = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$v_0 = 10\ \frac{км}{с}$
$m_2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{Кл^2}{Н \cdot м^2}$
$\varepsilon = 1$

r – ?

Решение. Если бы ядро гелия и протон двигались навстречу друг другу, как в предыдущей задаче электроны, то на минимальном расстоянии друг от друга они бы остановились. Но ядро покоилось и имело одноименный заряд с протоном, т. е. положительный заряд. Поэтому, как только ядро «почувствовало» на себе отталкивающее действие протона, оно стало «удирать» от него с нарастающей скоростью. Значит, на минимальном расстоянии от ядра до протона их скорость не была равна нулю, как в предыдущей задаче. Обозначим скорость центра масс системы тел ядро – протон на минимальном расстоянии между ними v. Эту скорость найдем из закона сохранения импульса. Согласно этому закону импульс системы из ядра и протона при покоящемся ядре и движущемся со скоростью v_0 протоне был равен m_2v_0. На расстоянии r между этими частицами их суммарный импульс центра масс системы этих зарядов стал равен $(m_1 + m_2)v$. По закону сохранения импульса

$$m_2v_0 = (m_1 + m_2)v, \text{ откуда } v = \frac{m_2v_0}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Теперь применим закон сохранения энергии к системе этих частиц. Согласно этому закону кинетическая энергия протона $W_{к0}$, когда он был бесконечно удален от ядра, равна сумме кинетической энергии системы этих частиц $W_к$ и потенциальной энергии их взаимодействия $W_п$:

$$W_{к0} = W_к + W_п, \qquad (2)$$

где $W_{к0} = \dfrac{m_2v_0^2}{2}$ и $\qquad (3)$

$W_к = \dfrac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$ или с учетом (1)

$$W_к = \frac{(m_1 + m_2)m_2^2v_0^2}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{(m_2v_0)^2}{2(m_1 + m_2)}. \qquad (4)$$

И, наконец, $W_п = 2e\varphi = \dfrac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$. $\qquad (5)$

Подставим (3), (4) и (5) в (2):

$$\frac{m_2v_0^2}{2} = \frac{(m_2v_0^2)^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \text{ откуда}$$

$$\frac{e^2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = m_2v_0^2 - \frac{m_2^2v_0^2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{m_1m_2v_0^2 + m_2^2v_0^2 - m_2^2v_0^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1m_2v_0^2}{m_1 + m_2}.$$

Отсюда $r = \dfrac{e^2(m_1 + m_2)}{\pi\varepsilon_0\varepsilon m_1m_2v_0^2}$ или $\boxed{r = \dfrac{m_1 + m_2}{\pi\varepsilon_0\varepsilon m_1m_2}\left(\dfrac{e}{v_0}\right)^2}$

Переведем в СИ единицу скорости: 10 км/с = $1 \cdot 10^4$ м/с.

Произведем вычисления:

$$r = \frac{5{,}04 \cdot 10^{-27} + 1{,}67 \cdot 10^{-27}}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5{,}04 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}}{1 \cdot 10^{-4}} \right)^2 \text{ м} =$$
$= 1{,}7 \cdot 10^{-9}$ м.

Ответ: $r = 1{,}7 \cdot 10^{-9}$ м.

Задача 24

Пучок электронов, движущихся с классической скоростью v (т. е. во много раз меньшей скорости света в вакууме), падает на металлический изолированный шар диаметром D. Какое максимальное число электронов N может накопиться на шаре? Среда – воздух.

Дано:
m_e
e
v
D
ε
ε_0

N – ?

Решение. Когда на шарике накопится N электронов, потенциальная энергия $W_п$ поля, отталкивающего налетающие сверх этого количества электроны, станет равна их кинетической энергии $W_к$. Сверх этого количества N ни один электрон попасть на шарик не сможет, так как он их оттолкнет. Значит, когда на шарике накопится N электронов, $W_п = W_к$, где $W_п = e\varphi$ и

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, \text{ поэтому } W_п = \frac{qe}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Здесь $q = eN$ – заряд на шарике, $R = \frac{D}{2}$ – радиус шарика. Кроме того, $W_к = \frac{m_e v^2}{2}$. С учетом этого запишем:

$$\frac{Ne^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{D}{2}} = \frac{m_e v^2}{2}, \text{ откуда } N = \frac{\pi\varepsilon_0\varepsilon D m_e v^2}{e^2} \text{ или}$$

$$\boxed{N = \pi\varepsilon_0\varepsilon D m_e \left(\frac{v}{e} \right)^2}$$

Задача решена.

Ответ: $N = \pi\varepsilon_0\varepsilon D m_e \left(\frac{v}{e} \right)^2$.

Задача 25

Два маленьких шарика массой по $m = 1$ г, заряженных одинаково, расположены на одной вертикали на расстоянии $r_1 = 20$ см друг от друга (рис. 3-23). Верхнему шарику сообщают скорость $v_0 = 10$ см/с, направленную вниз, в результате чего он сближается с нижним неподвижным шариком на минимальное расстояние $r_2 = 2$ см. Найти заряд q на каждом шарике. Среда – воздух, ее сопротивлением пренебречь.

Дано:
$m = 1$ г
$r_1 = 20$ см
$v_0 = 10\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$
$r_2 = 2$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$
$g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

q – ?

Решение. На высоте r_1 верхний шарик обладает потенциальной энергией в электрическом поле нижнего заряда, равной $W_{п1} = q\varphi_2$, где потенциал поля нижнего шарика

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}, \text{ поэтому}$$

$$W_{п1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1}.$$

Кроме того, верхний шарик обладает потенциальной энергией в гравитационном поле Земли, равной $W_{п2} = mgr_1$. И наконец, он обладает кинетической энергией $W_к = \frac{mv_0^2}{2}$. Таким образом, его полная энергия в точке 1 равна $W_{п1} + W_{п2} + W_к$.

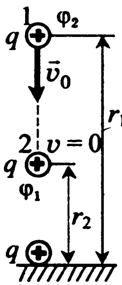


Рис. 3-23

В точке 2 шарик будет обладать потенциальной энергией в поле нижнего заряда, равной $W_{п3} = q\varphi_1$, где $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}$ (заметим, что потенциал φ_1 выше потенциала φ_2, потому что точка 2 ближе к нижнему заряду-источнику поля, в котором перемещается верхний заряд). Поэтому

$W_{п3} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2}$. Кроме того, в точке 2 верхний шарик обладает потенциальной энергией в гравитационном поле Земли, равной $W_{п4} = mgr_2$. Его кинетическая энергия в точке 2 равна нулю, потому что на минимальном расстоянии r от нижнего верхний шарик остановится.

По закону сохранения энергии $W_{п1} + W_{п2} + W_к = W_{п3} + W_{п4}$ или $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1} + mgr_1 + \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2} + mgr_2$.

Отсюда найдем искомый заряд q:

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=m\left(g(r_1-r_2)+\frac{v^2}{2}\right),$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\frac{r_1-r_2}{r_1r_2}=\frac{m\left(2g(r_1-r_2)+v^2\right)}{2},$$

$$\boxed{q=\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1r_2m\left(2g(r_1-r_2)+v^2\right)}{r_1-r_2}}}$$

Переведем все единицы в СИ: $1\ \text{г} = 1\cdot10^{-3}$ кг, 20 см = 0,2 м, 10 см/с = 0,1 м/с, 2 см = 0,02 м.

Произведем вычисления:

$$q=\sqrt{\frac{2\cdot3{,}14\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot0{,}2\cdot0{,}02\cdot1\cdot10^{-3}\left(2\cdot9{,}8(0{,}2-0{,}02)+0{,}01\right)}{0{,}2-0{,}02}}\ \text{Кл}=$$

$= 7\cdot10^{-8}$ Кл.

Ответ: $q = 7\cdot10^{-8}$ Кл.

Задача 26

Ртутный шарик, потенциал которого $\varphi_0 = 1$ кВ, разбился при падении на $N = 8$ одинаковых шариков. Определить потенциал φ каждого получившегося шарика.

Дано:
$\varphi_0 = 1$ кВ
$N = 8$

φ – ?

Решение. Пусть радиус большого шарика R, а маленького r. Потенциалы большого и маленького шариков определяют формулы

$$\varphi_0=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R} \qquad (1)$$

и $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где $q_0 = Nq$ – заряд большого шарика, q – маленького, поэтому $\varphi_0=\dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$. (2)

Разделим (1) на (2). При этом неизвестный заряд q на маленьком шарике сократится:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi}=\frac{Nq\cdot4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\cdot q},\qquad \frac{\varphi_0}{\varphi}=\frac{Nr}{R}. \qquad (3)$$

Теперь слёдует сообразить, что объем большого шарика V_0 равен N объемам маленьких шариков V: $V_0 = NV$, где $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$ и $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, поэтому

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N\frac{4}{3}\pi r^3, \quad R^3 = Nr^3, \text{ откуда } R = r\sqrt[3]{N}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3). При этом радиус r сократится, и мы найдем искомый потенциал φ:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi} = \frac{Nr}{r\sqrt[3]{N}}, \quad \varphi = \varphi_0 \frac{\sqrt[3]{N}}{N} = \varphi_0\sqrt[3]{\frac{N}{N^3}} \text{ или } \boxed{\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt[3]{N^2}}}$$

Переведем в СИ единицу потенциала: 1 кВ = $1 \cdot 10^3$ В.

Произведем вычисления: $\varphi = \frac{1 \cdot 10^3}{\sqrt[3]{64}}$ В = 250 В.

Ответ: $\varphi = 250$ В.

Задача 27

Металлическому шару радиусом $R_1 = 10$ см сообщили заряд $q_0 = 3$ мкКл, а затем привели в соприкосновение с незаряженным шаром радиусом $R_2 = 20$ см. Найти заряды q_1 и q_2 на шарах после соприкосновения.

Дано:
$R_1 = 10$ см
$q_0 = 3$ мкКл
$R_2 = 20$ см

q_1 – ?
q_2 – ?

Решение. После соединения потенциал φ обоих шаров станет одинаков:

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} \text{ и } \varphi = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}, \text{ поэтому}$$

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}, \quad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}. \qquad (1)$$

По закону сохранения заряда заряд q_0, бывший на первом шаре до соприкосновения со вторым, равен сумме зарядов q_1 и q_2 на шарах после соединения:

$$q_0 = q_1 + q_2. \qquad (2)$$

Выразим из (2) q_2 и подставим его в (1). Так мы получим одно уравнение с одним неизвестным q_1, которой и найдем: $q_2 = q_0 - q_1$. (3)

Подставим (3) в (1):

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_0 - q_1}{R_2}, \qquad q_1 R_2 = q_0 R_1 - q_1 R_1,$$

$$q_1 R_1 + q_1 R_2 = q_0 R_1, \text{ откуда } \boxed{q_1 = \frac{q_0 R_1}{R_1 + R_2}}$$

Согласно (3) $q_2 = q_0 - q_1$.

Переведем все единицы в СИ:

10 см = 0,1 м, 3 мкКл = $3 \cdot 10^{-6}$ Кл, 20 см = 0,2 м.

Произведем вычисления:

$$q_1 = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}1}{0{,}1 + 0{,}2} \text{ Кл} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ Кл},$$

$$q_2 = \left(3 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-6}\right) \text{ Кл} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Ответ: $q_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл, $q_2 = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Задача 28

Два шарика диаметрами D_1 и D_2 с зарядами q_{01} и q_{02} приводят в соприкосновение. Каков будет их потенциал φ после этого?

Дано:
D_1
D_2
q_{01}
q_{02}
φ – ?

Решение. Потенциал φ шаров после соприкосновения станет одинаков:

$$\varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} \qquad (1)$$

и $\varphi = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}$, поэтому

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}, \qquad \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}.$$

Здесь q_1 – заряд на шаре диаметром D_1 и q_2 – заряд на шаре диаметром D_2, $R_1 = \dfrac{D_1}{2}$ и $R_2 = \dfrac{D_2}{2}$ – радиусы шаров. С учетом этого запишем:

$$\frac{2q_1}{D_1} = \frac{2q_2}{D_2} \quad \text{и} \quad \frac{q_1}{D_1} = \frac{q_2}{D_2}. \qquad (2)$$

Заряды q_1 и q_2 нам не известны, но мы знаем заряды на шарах до их соединения. По закону сохранения зарядов суммарный заряд шаров $q_{01} + q_{02}$ до соединения равен суммарному заряду $q_1 + q_2$ после соединения:

$$q_{01} + q_{02} = q_1 + q_2. \qquad (3)$$

Выразим из (3) один из зарядов – q_1 или q_2, например, q_2, и подставим его в (2), как мы это сделали в предыдущей задаче. Так мы получим одно уравнение с неизвестным зарядом q_1, который определим из него и, подставив в (1), найдем искомый потенциал φ. Приступим:

$$q_2 = q_{01} + q_{02} - q_1, \quad \frac{q_1}{D_1} = \frac{q_{01} + q_{02} - q_1}{D_2},$$

$$q_1 D_2 = (q_{01} + q_{02})D_1 - q_1 D_1,$$

$$q_1 D_1 + q_1 D_2 = (q_{01} + q_{02})D_1, \quad \text{откуда}$$

$$q_1 = \frac{(q_{01} + q_{02})D_1,}{D_1 + D_2}. \qquad (4)$$

Нам осталось подставить (4) в (1), и задача будет решена (учтем, что $R_1 = \frac{D_1}{2}$):

$$\varphi = \frac{(q_{01} + q_{02})D_1}{(D_1 + D_2)4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{D_1}{2}} \quad \text{или} \quad \boxed{\varphi = \frac{q_{01} + q_{02}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon(D_1 + D_2)}}$$

Задача решена.

Ответ: $\varphi = \dfrac{q_{01} + q_{02}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon(D_1 + D_2)}$.

Задача 29

Два шара, заряженные одинаково, имеют потенциалы $\varphi_1 = 10$ В и $\varphi_2 = 40$ В. Найти потенциал φ этих проводников после их соприкосновения друг с другом.

Дано:
$\varphi_1 = 10$ В
$\varphi_2 = 40$ В

φ – ?

Решение. Обозначим одинаковый заряд на шарах до соприкосновения q_0, а после соприкосновения пусть их заряды станут q_1 и q_2. Тогда потенциалы шаров до и после соприкосновения равны: $\varphi_1 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}$, (1)

$$\varphi_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}, \ (2) \quad \varphi = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} \ (3) \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}. \ (4)$$

Здесь R_1 и R_2 – радиусы шаров.

Теперь давайте подумаем, как нам «уйти» от неизвестных зарядов и радиусов шаров. Если разделить (1) на (3), и (2), и (4), то радиусы R_1 и R_2 сократятся. Правда, при этом мы получим только два уравнения с тремя неизвестными зарядами q_0, q_1 и q_2 и искомым потенциалом φ. Но заряды «связаны» законом сохранения заряда, согласно которому $q_0 + q_0 = q_1 + q_2$.

Отсюда $q_2 = 2q_0 - q_1$. (5)

Значит, заменив q_2 на эту разность, мы получим два уравнения с уже двумя неизвестными зарядами q_0 и q_1 и потенциалом φ, которые и попробуем решить.

Приступим: $\dfrac{\varphi_1}{\varphi} = \dfrac{q_0 \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 \cdot q_1}$, $\quad \dfrac{\varphi_1}{\varphi} = \dfrac{q_0}{q_1}$, (6)

$\dfrac{\varphi_2}{\varphi} = \dfrac{q_0 \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 \cdot q_2}$, $\quad \dfrac{\varphi_2}{\varphi} = \dfrac{q_0}{q_2}$, или с учетом (5)

$$\frac{\varphi_2}{\varphi} = \frac{q_0}{2q_0 - q_1}. \qquad (7)$$

Теперь выразим из (6) заряд q_1 и подставим его в (7). При этом, если вынести в знаменателе за скобки заряд q_0, то он сократится и мы сумеем найти φ. Проделаем эти действия. Из (6) $\qquad q_1 = q_0 \dfrac{\varphi}{\varphi_1}$. (8)

Подставим (8) в (7):

$$\frac{\varphi_2}{\varphi} = \frac{q_0}{2q_0 - q_0 \frac{\varphi}{\varphi_1}}, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi} = \frac{q_0}{q_0\left(2 - \frac{\varphi}{\varphi_1}\right)}, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi} = \frac{1}{2 - \frac{\varphi}{\varphi_1}}$$

или $\dfrac{\varphi_2}{\varphi} = \dfrac{\varphi_1}{2\varphi_1 - \varphi}$, $2\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2\varphi = \varphi_1\varphi$, $2\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1\varphi + \varphi_2\varphi$,

откуда $$\boxed{\varphi = \frac{2\varphi_1\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2}}$$

Произведем вычисления: $\varphi = \dfrac{2 \cdot 10 \cdot 40}{10 + 40}\ \text{В} = 16\ \text{В}$.

Ответ: $\varphi = 16$ В.

Задача 30

В результате слияния $N = 64$ капелек воды, заряженных одинаково, образовалась одна большая капля. Во сколько раз потенциал φ_0 большой капли отличается от потенциала φ малой капли? Капли имеют форму шара.

Дано:	
$N = 64$	*Решение.* По закону сохранения заряда заряд большой капли q_0 равен сумме зарядов маленьких капелек, слившихся в одну, т. е. $q_0 = Nq$. (1)
$\dfrac{\varphi_0}{\varphi}$ – ?	Здесь q – заряд одной маленькой капельки. Кроме того, можно также утверждать, что объем большой капли V_0 равен сумме объемов всех маленьких капелек: $V_0 = NV$. (2)

Здесь V – объем каждой маленькой капли.

Мы можем связать заряд большой и малой капель q_0 и q с их потенциалами φ_0 и φ, воспользовавшись формулой потенциала заряженной сферы, аналогичной формуле потенциала точечного заряда:

$\varphi_0 = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ и $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$, где согласно (1) $q_0 = Nq$.

Тогда $\dfrac{\varphi_0}{\varphi} = \dfrac{q_0 \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R \cdot q}$ или $\dfrac{\varphi_0}{\varphi} = \dfrac{Nqr}{Rq}$,

$$\frac{\varphi_0}{\varphi} = N\frac{r}{R}. \qquad (3)$$

Здесь R – радиус большой капли, r – радиус малой капли.

Теперь уже несложно догадаться связать радиусы большой и малой капель с их объемами V_0 и V, воспользовавшись формулой объема сферы:

$V_0 = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ и $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, откуда $R = \sqrt[3]{\dfrac{3V_0}{4\pi}}$ или с учетом (2) $R = \sqrt[3]{\dfrac{3NV}{4\pi}}$ (4)

и
$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Подставив эти выражения в формулу (3), мы получим одно искомое соотношение $\dfrac{\varphi_0}{\varphi}$, поскольку неизвестный нам объем сократится:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi} = N\frac{\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}}{\sqrt[3]{\dfrac{3NV}{4\pi}}} = N\sqrt[3]{\frac{3V \cdot 4\pi}{4\pi \cdot 3NV}} = \frac{N}{\sqrt[3]{N}} = \sqrt[3]{\frac{N^3}{N}} = \sqrt[3]{N^2}$$

или $\boxed{\dfrac{\varphi_0}{\varphi} = N^{\frac{2}{3}}}$

Произведем вычисления: $\dfrac{\varphi_0}{\varphi} = 64^{\frac{2}{3}} = 16$.

Ответ: $\dfrac{\varphi_0}{\varphi} = 16$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Металлический шар радиусом R_1 имеет заряд q. Он окружен заземленной сферой, имеющей общий с шаром центр. При этом потенциал шара φ. Найти радиус сферы R_2.

Ответ: $R_2 = \dfrac{qR_1}{q - 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi}$.

Задача 2. Полый шар равномерно заряжен. В центре шара потенциал φ_1 = 120 В, а в точке на расстоянии r от центра потенциал φ_2 = 20 В. Каков радиус шара R?

Ответ: $R = r\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} = 0{,}06$ м.

Задача 3. Металлическая сфера диаметром D = 18 см заряжена до потенциала φ = 300 В. Определить поверхностную плотность заряда σ на сфере.

Ответ: $\sigma = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon\varphi}{D} = 2{,}95 \cdot 10^{-8}$ Кл/м².

Задача 4. Две концентрические проводящие сферы с радиусами R и $2R$ заряжены соответственно зарядами q_1 = 0,1 мкКл и q_2 = = 0,2 мкКл. На равном расстоянии от каждой из сфер в точке M потенциал φ = 3 кВ. Найти радиус внутренней сферы R.

Ответ: $R = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\varphi}\left(\dfrac{2}{3}q_1 + \dfrac{1}{2}q_2\right) = 0{,}5$ м.

Задача 5. Радиус заряженного шара R. Потенциал точки M, отстоящей на расстояние l от поверхности шара, равен φ_M. Найти потенциал φ_N точки N, лежащей посередине между поверхностью шара и точкой M.

Ответ: $\varphi_N = 2\varphi_M \dfrac{R + l}{2R + l}$.

Задача 6. Два точечных заряда q_1 = 1,5 нКл и q_2 = 2 нКл расположены на некотором расстоянии друг от друга. Найти потенциал φ поля этих зарядов в точке, удаленной на r_1 = 3 см от первого заряда и на r_2 = 4 см от второго. Среда – воздух.

Ответ: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{q_1}{r_1} + \dfrac{q_2}{r_2}\right) = 9 \cdot 10^2$ В.

Задача 7. Три маленьких одноименно заряженных шарика с зарядом q каждый удерживаются в вакууме вдоль одной прямой на расстоянии r друг от друга двумя нитями (рис. 3-24). Какую максимальную кинетическую энергию приобретет каждый крайний шарик, если обе нити одновременно пережечь?

Ответ: $W_к = \dfrac{5q^2}{16\pi\varepsilon_0 r}$.

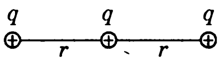


Рис. 3-24

Задача 8. Металлический шар радиусом R = 5 см, заряженный равномерно с поверхностной плотностью заряда σ = 2 нКл/м², погружен в керосин (ε = 2). Определить напряженность E и потенциал φ поля этого шара в точке, удаленной на расстояние $r_1 = R$ от его поверхности. Какую работу A нужно совершить, чтобы переместить точечный заряд q = 0,5 нКл из точки, удаленной на расстояние $r_2 = 2R$ от поверхности шара, в точку, удаленную на расстояние $r_1 = R$ от его поверхности?

Ответ: $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0\varepsilon} = 28$ Н/Кл, $\varphi = \dfrac{R\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 2{,}8$ В,

$A = 0{,}17\dfrac{q\sigma R}{\varepsilon_0\varepsilon} = 4{,}8 \cdot 10^{-9}$ Дж.

Задача 9. Три одинаковых заряда q находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной a. Найти напряженность E и потенциал φ электрического поля этих зарядов в центре треугольника.

Ответ: $E = 0$, $\varphi = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

Задача 10. В вершинах квадрата со стороной a находятся заряды q. Найти потенциал электрического поля в центре квадрата.

Ответ: $\varphi = \dfrac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

Задача 11. Найти потенциал φ в точке C на рис. 2-19. Заряды q и сторона треугольника a известны (см. условие задачи 12, п.2). Среда – воздух.

Ответ: $\varphi = 0{,}4\dfrac{q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a}$.

Задача 12. В однородном поле напряженностью E = 20 кВ/м переместили заряд q = 2 нКл под углом $\alpha = 30°$ к направлению силовых линий поля. Модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ = 80 см. Найти работу поля A, изменение потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем $\Delta W_п$ и напряжение U между начальной и конечной точками перемещения.

Ответ: $A = qE|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$ Дж, $\Delta W_п = -2{,}7 \cdot 10^{-5}$ Дж,

$U = E|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = 1{,}4 \cdot 10^4$ В.

Задача 13. Какую разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ должен пролететь электрон по силовой линии, чтобы его скорость увеличилась в 5 раз, если его начальная скорость v_0 = 1 Мм/с?

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2 = 12\dfrac{m_e v_0^2}{e}$.

Задача 14. Бесконечная положительно заряженная плоскость имеет поверхностную плотность зарядов σ = 2 нКл/дм^2. Насколько потенциал φ_1 точки, расположенной на расстоянии r_1 = 10 см от плоскости, выше потенциала φ_2 точки, расположенной на расстоянии r_2 = 1 м от плоскости. Среда – воздух.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{\sigma(r_2 - r_1)}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 1 \cdot 10^4$ В.

Задача 15. Электрон движется по направлению силовой линии электрического поля из точки с потенциалом $\varphi_1 = 10$ кВ. Какое время t он будет двигаться до остановки, если его начальная скорость $v_0 = 20$ Мм/с и пролетит он при этом $d = 4$ мм? Найти потенциал φ_2 точки, в которой он остановится.

Ответ: $t = \dfrac{2d}{v_0} = 4 \cdot 10^{-10}$ с, $\varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{m_e v_0^2}{2e} = 8863$ В.

Задача 16. Электрон в однородном электрическом поле получает ускорение $a = 10^{10}$ м/с^2 и движется по силовой линии без начальной скорости в течение $t = 1$ мкс. Найти разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между начальной и конечной точками его перемещения.

Ответ: $U = \dfrac{m(at)^2}{2e} = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ В.

Задача 17. Расстояние между двумя разноименно заряженными параллельными пластинами $d = 2$ см, напряженность однородного электрического поля между ними $E = 2$ В/см. Электрон влетает в пространство между ними параллельно пластинам на равном расстоянии от них. До того как влететь в поле пластин, электрон был разогнан из состояния покоя разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = 50$ В. На каком расстоянии r от начала пластин электрон попадет на одну из них и через какое время t, считая с момента его попадания в поле пластин, это произойдет?

Ответ: $t = \sqrt{\dfrac{m_e d}{eE}} = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ с, $r = t\sqrt{\dfrac{2e(\varphi_1 - \varphi_2)}{m_e}} = 0{,}12$ м.

Задача **18.** Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, причем первый электрон вначале покоится, а второй имеет скорость v_0, направленную к первому. На какое минимальное расстояние r_{min} они сблизятся?

Ответ: $r_{\min} = \dfrac{e^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}$.

Задача 19. Шар радиусом $R = 2$ см, имеющий заряд $q = 10$ нКл, помещен в воду. Начертите график зависимости потенциала точек его поля от расстояния r между каждой точкой и центром шара в пределах от $r_1 = 0$ до $r_2 = 10$ см.

Задача 20. Между двумя горизонтальными и разноименно заряженными пластинами расстояние $d = 0{,}5$ см. Между ними падает с постоянной скоростью заряженная капелька массой $m = 1 \cdot 10^{-10}$ г, когда на пластины подано напряжение $U = 500$ В. Если же пластины отключить от источника напряжения, то капелька падает вдвое быстрее. Сила сопротивления воздуха, действующая на капельку, прямо пропорциональна скорости ее падения. Найти заряд капельки q.

Ответ: $q = \dfrac{mgd}{2U} = 4{,}9 \cdot 10^{-18}$ Кл.

Задача 21. Электрон, пролетев от одной пластины до другой, параллельной первой, приобрел скорость $v = 1 \cdot 10^6$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 4$ мм. Найти напряжение U и поверхностную плотность зарядов на пластинах σ. Начальная скорость электрона $v_0 = 0$. Среда – воздух.

Ответ: $U = \dfrac{m_e v^2}{2e} = 2{,}8$ В, $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{d} = 6{,}2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м².

Задача 22. Шарик диаметром D = 5 см заряжен до потенциала φ = 1 кВ. Найти массу m всех недостающих на нем электронов, чье отсутствие обусловило заряд шарика. Среда – воздух.

Ответ: $m = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon \dfrac{D\varphi}{e} m_e = 1{,}6 \cdot 10^{-20}$ кг.

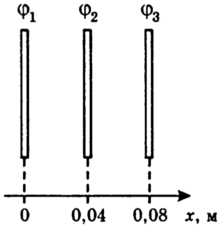


Рис. 3-25

Задача 23. На рис. 3-25 изображены три заряженные пластины с потенциалами φ_1 = = 40 В, φ_2 = −40 В и φ = 0. Построить графики напряженности $E = E(x)$ и потенциала $\varphi = \varphi(x)$ в зависимости от координаты x.

Задача 24. Ртутный шарик радиусом R с зарядом q разбился на N одинаковых капелек ртути. Определить потенциал φ каждой капельки.

Ответ: $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R\sqrt[3]{N^2}}$.

Задача 25. С какой силой F отталкиваются друг от друга два одинаково заряженных шарика, если потенциал каждого φ, расстояние между их центрами r и диаметр D?

Ответ: $F = \varepsilon_0\varepsilon\left(\dfrac{D\varphi}{r}\right)^2$.

Задача 26. Какая совершается работа A при перенесении точечного заряда $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии a = 1 см от поверхности заряженного шара радиусом R = 1 см с поверхностной плотностью зарядов σ = = 10^{-9} Кл/см²? Среда – воздух.

Ответ: $A = \dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon_0\varepsilon(a+R)} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 27. Определить потенциал φ точки M поля, расположенной на расстоянии a = 9 см от поверхности заряженного шара радиусом R = 1 см, если потенциал шара $\varphi_{\text{шара}}$ = 300 В. Среда – воздух.

Ответ: $\varphi = \dfrac{\varphi_{\text{шара}} R}{a+R} = 30$ В.

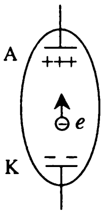


Рис. 3-26

Задача 28. Между катодом K и анодом A электронной лампы создана разность потенциалов U = 90 В. Расстояние между электродами d = 1 мм (рис. 3-26). С каким ускорением a движется электрон от катода к аноду? Какова скорость электрона v в момент удара об анод? За какое время t электрон пролетит расстояние от катода до анода? Поле между электродами считать однородным. Начальная скорость электрона равна нулю, электрон – классическая частица. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Среда – вакуум.

Ответ: $a = \dfrac{eU}{m_e d} = 1{,}6 \cdot 10^{16}$ м/с², $v = \sqrt{2ad} = 5{,}7 \cdot 10^6$ м/с,

$t = \dfrac{v}{a} = 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ с.

Задача 29. Заряженный шарик массой $m = 1$ г и зарядом $q = 10^{-8}$ Кл перемещается из точки с потенциалом $\varphi_1 = 600$ В в точку с потенциалом $\varphi_2 = 0$ (в бесконечность). Чему была равна его скорость в первой точке v_1, если во второй точке она стала $v_2 = 20$ см/с? Среда – воздух.

Ответ: $v_1 = \sqrt{v_2^2 - \dfrac{2q\varphi_1}{m}} = 0{,}17$ м/с.

Задача 30. При радиоактивном распаде из ядра атома полония вылетает альфа-частица со скоростью $v = 1{,}6 \cdot 10^8$ см/с. Найти разность потенциалов U поля, в котором можно разогнать покоящуюся альфа-частицу до этой скорости. Масса альфа-частицы $m = 6{,}65 \cdot 10^{-27}$ кг, ее заряд равен $2e$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд.

Ответ: $U = \dfrac{mv^2}{4e}$.

Задача 31. Определить потенциал электрического поля φ, образованного четырьмя зарядами $q = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, расположенными в вершинах ромба, в точке пересечения его диагоналей. Сторона ромба $a = 10$ см, среда – воздух. Острый угол ромба $\alpha = 30°$.

Ответ: $\varphi = \dfrac{2{,}4q}{\pi\varepsilon_0\varepsilon a} = 8 \cdot 10^3$ В.

Задача 32. Электрон влетел в плоский конденсатор, имея скорость $v = 1 \cdot 10^5$ м/с, параллельно его обкладкам. В момент вылета из конденсатора направление скорости электрона составило угол $\alpha = 45°$ с первоначальным направлением. Определить разность потенциалов U между пластинами, если длина пластин $l = 10$ см и расстояние между ними $d = 2$ см. Среда – воздух.

Ответ: $U = \dfrac{m_e d v_0}{el} = 0{,}01$ В.

Задача 33. Маленький шарик массой $m = 1$ г, которому сообщили заряд $q = 0{,}15$ мкКл, брошен издалека со скоростью $v_0 = 1$ м/с в неподвижную сферу с зарядом $q_0 = 0{,}3$ мкКл. При каком минимальном значении радиуса сферы R он достигнет ее поверхности?

Ответ: $R = \dfrac{qq_0}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon m v_0^2} = 0{,}8$ м.

Задача 34. Между двумя обкладками конденсатора, расположенными горизонтально, находится в равновесии отрицательно заряженная капелька масла массой $m = 10$ нг. Сколько избыточных электронов N имеет капелька, если расстояние между обкладками конденсатора $d = 4{,}8$ мм, а разность потенциалов между ними $U = 1$ кВ? После облучения капелька потеряла часть электронов, в результате чего она стала двигаться вниз с ускорением $a = 6$ м/с^2. Сколько электронов ΔN потеряла капелька?

Ответ: $N = \dfrac{mgd}{eU} = 3 \cdot 10^3, \quad \Delta N = \dfrac{mad}{eU} = 1{,}8 \cdot 10^3.$

Задача 35. Электрон вылетел из точки с потенциалом $\varphi_1 = 450$ В со скоростью $v_1 = 190$ м/с. Какую скорость v_2 он будет иметь в точке с потенциалом $\varphi_2 = 475$ В?

Ответ: $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2\dfrac{e}{m_e}(\varphi_2 - \varphi_1)} = 3 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 36. N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены до одинакового потенциала φ. Каков будет потенциал $\varphi_{общ}$ большой капли ртути, получившейся в результате слияния этих капель?

Ответ: $\varphi_{общ} = \varphi N^{\frac{2}{3}}.$

Задача 37. Шар радиусом $R_1 = 15$ см, заряженный до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, соединяют с незаряженным шаром. После соединения потенциал на каждом шаре стал $\varphi = 100$ В. Каков радиус R_2 второго шара?

Ответ: $R_2 = R_1\left(\dfrac{\varphi_1}{\varphi} - 1\right) = 0{,}3$ м.

4. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Электроемкость (емкость) проводника C равна отношению заряда q, сообщенного проводнику, к потенциалу φ, который при этом проводник приобрел: $C = \dfrac{q}{\varphi}$. (4.1)

Емкость проводника является важной характеристикой его свойств (подчеркиваем, характеристикой не электрического поля как напряженности, потенциала, а самого проводника).

Любой проводник, заряженный или незаряженный, всегда обладает емкостью, которая характеризует способность этого проводника накопить большее или меньшее количество зарядов для приобретения данного потенциала. Поэтому емкость проводника не зависит от величины и знака заряда, который ему сообщили, и не зависит от потенциала, который он при этом приобрел. Нельзя сказать, ссылаясь на формулу $C = \dfrac{q}{\varphi}$, что емкость проводника прямо пропорциональна его заряду или обратно пропорциональна потенциалу, это грубая физическая ошибка. Емкость проводника зависит от его размеров, формы, окружающей среды (от ее диэлектрических свойств и от наличия вблизи других проводников, потому что при приближении другого проводника емкость данного проводника увеличивается). Емкость C уединенного шарового проводника радиусом R (полого или сплошного, все равно) определяется формулой $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. (4.2)

Здесь ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей сферу.

Подчеркиваем, что по этой формуле можно определить только емкость проводника, имеющего форму шара. Если у проводника иная форма, например, форма куба, цилиндра и др., то рассчитать его емкость по этой формуле нельзя, а других формул, которые связывают емкость проводника с его размерами и формулой, вы не знаете. Выручить вас в этом случае могут формулы $C = \dfrac{q}{\varphi}$ или $W_{эл} = \dfrac{C\varphi^2}{2}$, $W_{эл} = \dfrac{q^2}{2C}$, где W – энергия заряженного проводника, если остальные величины, входящие в эти формулы, вам известны или вы их можете определить в процессе решения.

Если проводники с одинаковой емкостью имели разноименные заряды, то при их соприкосновении или соединении их проводником, емкостью которого можно пренебречь, равные по модулю заряды нейтрализуются, а оставшийся заряд разделится между проводниками поровну. Например, первый проводник содержал заряды $+7q$, а второй имел заряд $-2q$. Если их соединить, то часть заряда первого проводника $+2q$ полностью нейтрализует заряд $-2q$ второго проводника. В результате на обоих проводниках останется заряд $+5q$, который распределится между ними поровну, поэтому каждый проводник приобретет заряд $+2,5q$. Но так будет только в том случае, когда емкости проводников одинаковы. Если это шары, то должны быть одинаковы их радиусы.

В общем случае при распределении зарядов на проводниках следует применять закон сохранения зарядов: в замкнутой системе зарядов алгебраическая сумма зарядов не изменяется. Замкнутой здесь считается система, которая не обменивается зарядами с окружающими телами.

Если емкости проводников различны (например, это шары с разными радиусами), то заряды распределятся между ними уже не поровну, но закон сохранения общей суммы зарядов остается справедливым во всех случаях. Например, если до соединения заряды на проводниках были q_{01} и q_{02}, а после соединения они стали q_1 и q_2, то закон сохранения зарядов будет иметь вид

$$q_{01} + q_{02} = q_1 + q_2.$$

Напоминаем, что сумма эта алгебраическая, т. е. необходимо учитывать знаки зарядов.

Еще раз подчеркнем, что после соединения заряженных проводников заряды на них не всегда оказываются одинаковыми. Но всегда одинаковыми оказываются после соединения потенциалы этих проводников, поскольку, если их потенциалы после соединения окажутся различными, то по проводнику, соединяющему их, пойдет ток. И если потенциалы двух соединенных проводников будут оставаться разными, то ток будет продолжать идти, чего, конечно, быть не может, поскольку для поддержания тока нужно тратить энергию. Поэтому при соединении проводников между ними возникает кратковременный ток, который приводит к выравниванию потенциалов этих проводников, после чего ток прекращается. Если потенциалы проводников после соединения обозначить φ_1 и φ_2, то справедливо равенство $\varphi_1 = \varphi_2$, где $\varphi_1 = \dfrac{q_1}{C_1}$ и $\varphi_2 = \dfrac{q_2}{C_2}$, поэтому $\dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2}$.

Здесь C_1 и C_2 – емкости этих проводников, q_1 и q_2 – их заряды после соединения.

Решая совместно систему этих уравнений, мы можем определить заряды на проводниках до или после соединения в зависимости от условия задачи.

Обычно в задачах электростатики пренебрегают изменением емкости проводника при приближении к нему другого проводника или при соединении этих проводников и считают, что емкость от этого не меняется. Когда вы решаете задачу, в которой с проводниками что-то делают, не меняя их размеров и формы (например, шары приводят в соприкосновение или соединяют проводником), то можно считать, что емкость каждого проводника остается прежней.

Если вам необходимо определить общую емкость или общий заряд системы проводников, то иногда удобно использовать условие аддитивности энергии, согласно которому электрическая энергия системы проводников равна сумме энергий каждого проводника в отдельности. Например, если энергия одного проводника

W_1, а второго W_2, то общая энергия $W_{общ}$ системы этих двух проводников $W_{общ} = W_1 + W_2$.

Энергию проводника или системы проводников можно определить по одной из трех равнозначных формул: $W = \frac{q\varphi}{2}$, $W = \frac{C\varphi^2}{2}$ или $W = \frac{q^2}{2C}$ в зависимости от условия задачи.

Как правило, в таких задачах используется еще и закон сохранения заряда: $q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_N$, а также равенство потенциалов проводников после их соединения друг с другом.

Если заряженные проводники соединить, то в результате их соединения может выделиться энергия, например в виде теплоты. В этом случае выделившееся количество теплоты Q по модулю равно разности суммы энергий проводников $W_1 + W_2$ до их соединения и общей энергии системы двух проводников $W_{общ}$ после их соединения: $Q = W_1 + W_2 - W_{общ}$.

При соединении двух одноименно заряженных проводников, которые ранее были удалены друг от друга, совершается работа A. Эта работа может быть найдена как разность энергии системы проводников $W_{общ}$ после их соединения и энергии этих проводников W_1 и W_2 до их соединения:

$$A = W_{общ} - (W_1 + W_2).$$

Если два проводника сблизить до расстояния, значительно меньшего, чем размеры этих проводников, то они образуют конденсатор. Емкость конденсатора определяется отношением заряда на его обкладках к разности потенциалов между ними:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad \text{или} \quad C = \frac{q}{U}.$$

Как и емкость проводника, емкость конденсатора не зависит от заряда на проводниках, из которых он образован (обкладках конденсатора), и разности потенциалов между ними, а зависит от размеров и формы конденсатора и диэлектрика, помещаемого между обкладками.

Отметим, что емкость как проводника, так и конденсатора не зависит от металла, из которого изготовлен этот проводник или обкладки конденсатора.

Емкость плоского конденсатора с площадью каждой из одинаковых обкладок, равной S, и с расстоянием между ними d определяется формулой

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

Здесь ε – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками, ε_0 – электрическая постоянная.

Если обкладки конденсатора не одинаковы, то под S в этой формуле подразумевается только перекрываемая часть площади обкладок.

Если в конденсатор вводят или выводят из него диэлектрик, или изменяют расстояние между его обкладками, не отключая от источника зарядов, то у такого конденсатора изменяются вследствие этих манипуляций емкость и заряд на обкладках, а напряжение на них остается неизменным и равным напряжению на полосах источника зарядов. Если же конденсатор сначала заряжают, а затем отключают от источника, после чего меняют диэлектрик между обкладками или изменяют расстояние между ними, то неизменным остается заряд на обкладках, а изменяются емкость конденсатора и напряжение на нем.

Конденсаторы соединяют последовательно и параллельно с целью получения нужной емкости. При последовательном соединении N конденсаторов (рис. 4-1) заряд на всех обкладках одинаков, напряжение на всей батарее конденсаторов равно сумме напряжений на каждом конденсаторе в отдельности:

$$U_{общ} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N,$$

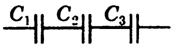


Рис. 4-1

а величина $\dfrac{1}{C_{общ}}$, обратная общей емкости батареи последовательно соединенных конденсаторов, равна сумме величин, обратных емкостям отдельных конденсаторов:

$$\frac{1}{C_{общ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots + \frac{1}{C_N}.$$

Если конденсатора два, то их общую емкость при последовательном соединении можно определить так:

$$\frac{1}{C_{общ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2}, \text{ откуда } C_{общ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Если их три, то $C_{общ} = \dfrac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1}$ и т. д.

Если емкости всех N последовательно соединенных конденсаторов одинаковы и равны С, то общее напряжение на всей батарее $U_{общ}$ и ее общая емкость $C_{общ}$ соответственно равны:

$$U_{общ} = NU \quad \text{и} \quad C_{общ} = \frac{C}{N}.$$

Здесь U – напряжение на каждом конденсаторе в отдельности.

Если у вас спросят, чему равна емкость батареи из $N = 100$ последовательно соединенных конденсаторов емкостью $C_1 = 200$ пФ каждый, то не надо складывать сто раз $\dfrac{1}{C_1} = \dfrac{1}{200\,\text{пФ}}$, а достаточно разделить 200 пФ на 100: $C_{общ} = \dfrac{C_1}{N} = \dfrac{200}{100}\,\text{пФ} = 2$ пФ.

При параллельном соединении N конденсаторов (рис. 4-2) напряжение U на всех конденсаторах одинаково, общий заряд $q_{общ}$ батареи конденсаторов равен сумме зарядов на каждом из них:

$$q_{общ} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_N$$

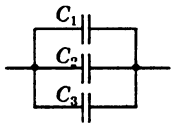


Рис. 4-2

и общая емкость $C_{общ}$ батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

$$C_{общ} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_N.$$

Если N конденсаторов с одинаковой емкостью C каждого соединяют параллельно, то общий заряд $q_{общ}$ батареи и общая емкость $C_{общ}$ определяются по формулам $q_{общ} = Nq$ и $C_{общ} = NC$.

Здесь q – заряд каждого конденсатора.

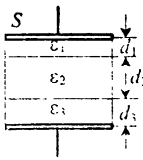


Рис. 4-3

Если между обкладками конденсатора помещены диэлектрики с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1, ε_2, ε_3 так, как показано на рис. 4-3, то этот случай аналогичен последовательному соединению трех конденсаторов с одинаковыми площадями обкладок S, расстояниями между обкладками d_1, d_2, d_3 и диэлектрическими проницаемостями диэлектриков между обкладками ε_1, ε_2 и ε_3. В этом случае

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 S}{\varepsilon_1\varepsilon_2 d_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 d_1 + \varepsilon_3\varepsilon_1 d_2}.$$

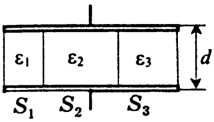


Рис. 4-4

Если эти диэлектрики расположены так, как это показано на рис. 4-4, то этот случай аналогичен параллельному соединению трех конденсаторов с одинаковыми расстояниями между обкладками d, площадями обкладок S_1, S_2 и S_3 и диэлектриками с проницаемостями ε_1, ε_2 и ε_3. В этом случае общая емкость батареи

$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2 + C_3 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S_2}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_3 S_3}{d}.$$

Рис. 4-5

Если конденсатор содержит N обкладок, расположенных на одинаковом расстоянии и разделенных одинаковым диэлектриком, то его можно представить как батарею последовательно соединенных одинаковых конденсаторов, число которых равно $N - 1$. Действительно, если, например, таких обкладок три (рис. 4-5), то мы имеем два последовательно соединенных конденсатора, общая емкость которых $C_{\text{общ}} = \dfrac{C}{2}$.

Если же такой конденсатор содержит N прокладок, т. е. диэлектриков между обкладками, то он представляет собой систему N последовательно соединенных конденсаторов, общая емкость которых в этом случае $C_{\text{общ}} = \dfrac{C}{N}$.

Таким образом, число таких конденсаторов равно числу прокладок, но на единицу меньше числа обкладок.

Рассмотрим примеры на последовательное и параллельное соединение конденсаторов, когда надо определить общую емкость батареи конденсаторов, если известны емкости отдельных конденсаторов.

Пример 1 (рис. 4-6).

Общая емкость параллельно соединенных конденсаторов C_2 и C_3

$$C_{2,3} = C_2 + C_3.$$

Теперь можно заменить параллельный участок на рис. 4-6, *а* одним конденсатором емкостью $C_{2,3}$. Тогда получим эквивалентную схему (рис. 4-6, б), на которой конденсаторы C_1 и $C_{2,3}$ соединены последовательно, поэтому их общая емкость, равная емкости батареи из трех конденсаторов,

$$C_{общ} = \frac{C_{общ\,2,3}C_1}{C_1 + C_{2,3}} \quad \text{или}$$

$$C_{общ} = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

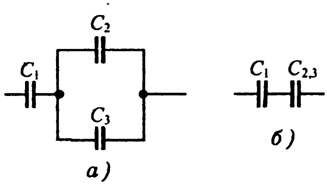


Рис. 4-6

Пример 2 (рис. 4-7).

Опять найдем сначала общую емкость $C_{2,3,4}$ параллельного участка схемы:

$C_{2,3,4} = C_2 + C_3 + C_4$.

Теперь согласно схеме на рис. 4-7, *б*, эквивалентной схеме на рис. 4-7, *а*,

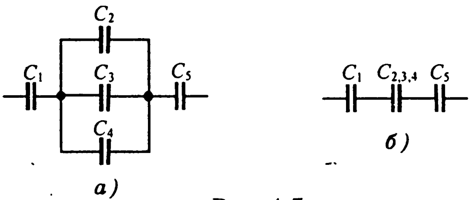


Рис. 4-7

$$C_{общ} = \frac{C_1 C_{3,2,4} C_5}{C_1 C_{3,2,4} + C_{3,2,4} C_5 + C_1 C_5} =$$

$$= \frac{C_1(C_2 + C_3 + C_4)C_5}{C_1(C_2 + C_3 + C_4) + (C_2 + C_3 + C_4)C_5 + C_1 C_5} =$$

$$= \frac{C_1 C_5 (C_2 + C_3 + C_4)}{(C_1 + C_5)(C_2 + C_3 + C_4) + C_1 C_5}.$$

Пример 3 (рис. 4-8).

Здесь емкости всех конденсаторов одинаковы. Емкость параллельного участка из трех конденсаторов равна $3C$, поэтому

$$C_{общ} = \frac{C \cdot 3C}{C + 3C} = \frac{3C^2}{4C} = 0{,}75 C.$$

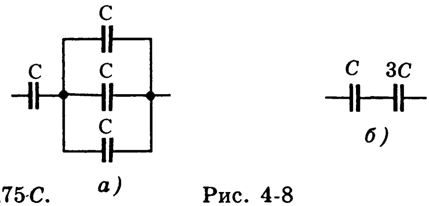


Рис. 4-8

Пример 4 (рис. 4-9).

Эту систему можно представить как три последовательно соединенных участка *ав*, *вс*, *cd* с емкостями $C_{ав}$, $C_{вс}$, C_{cd}. Общая емкость $C_{общ}$ этих трех участков определяется формулой

$$C_{общ} = \frac{C_{ab} C_{cd} C_{bc}}{C_{ab} C_{bc} + C_{bc} C_{cd} + C_{cd} C_{ab}}.$$

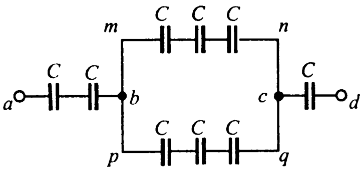


Рис. 4-9

Емкость участка ab, содержащего два последовательно соединенных конденсатора с одинаковыми емкостями по C каждого,

$$C_{ab} = \frac{C}{2}.$$

Емкость участка cd $\qquad C_{cd} = C.$

Участок bc включает в себя две параллельные ветви mn и pq, каждая из которых содержит три одинаковых последовательно соединенных конденсатора с емкостью C у каждого, поэтому емкость участка mn или pq равна $\dfrac{C}{3}$, а емкость участка bc

$$C_{bc} = \frac{C}{3} + \frac{C}{3} = \frac{2}{3}C.$$

Подставим эти выражения в формулу общей емкости всей системы:

$$C_{\text{общ}} = \frac{\frac{C}{2}\cdot\frac{2C}{3}\cdot C}{\frac{C}{2}\cdot\frac{2C}{3} + \frac{2C}{3}\cdot C + C\cdot\frac{C}{2}} = \frac{2}{9}C.$$

Пример 5. Определим общую емкость системы конденсаторов, изображенную на рис. 4-10, *а*.

Да, эта схема намного сложнее предыдущей. Сразу и не скажешь, какое здесь соединение конденсаторов, последовательное или параллельное. Попробуем представить эту схему иначе. Мы видим, что левые обкладки конденсаторов на участках mn и ab соединены в точке a, значит, они имеют одинаковый потенциал, например φ_1. Расположим эти конденсаторы друг под другом (рис. 4-10, б). Правая обкладка конденсатора на участке mn соединена с правой обкладкой конденсатора на участке be, а правая обкладка конденсатора на участке ab соединена с левой обкладкой конденсатора на участке be, значит, этот конденсатор емкостью C

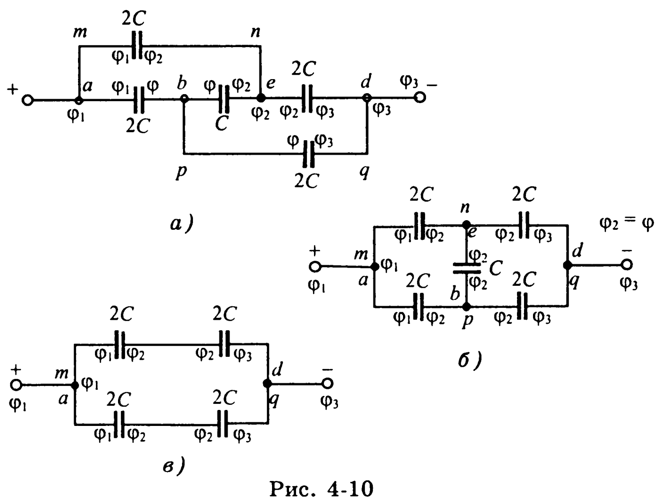


Рис. 4-10

может служить как бы перемычкой между конденсаторами емкостью $2C$ на участках mn и ab. Поэтому расположим участок be вертикально, соединив точки n и e (а также b и p) в одну точку. Мы видим, что конденсаторы на участках mn и ab оказались расположенными симметрично относительно конденсатора C слева от него. Точно так же рассуждая, можно расположить конденсаторы на участках ed и pq справа от конденсатора C. Тогда мы получим схему, изображенную на рис. 4-10, *б*.

Но, глядя на эту схему, мы по-прежнему не можем установить, какие здесь конденсаторы соединены последовательно, а какие – параллельно, без чего мы не можем найти общую емкость этой батареи. Однако, если мы внимательно рассмотрим эту симметричную схему, то, проведя нехитрые рассуждения, установим следующий замечательный факт. Мы установим, что левые обкладки верхнего и нижнего конденсаторов, расположенных слева от конденсатора C, имеют одинаковый потенциал φ_1, такой же, как и потенциал точки a (мы это уже отмечали). Но, поскольку емкости этих конденсаторов тоже одинаковы, значит, и заряд на их обкладках будет одинаков. Но это означает, что и правые обкладки этих конденсаторов в силу симметрии схемы относительно перемычки mn тоже имеют одинаковый потенциал, который обозначим, например, φ_2. Верхняя обкладка конденсатора C соединена с правой обкладкой верхнего конденсатора, расположенного на участке mn, значит, она тоже имеет потенциал φ_2. А нижняя обкладка конденсатора C соединена с правой обкладкой нижнего конденсатора на участке ab, значит, и она имеет потенциал φ_2. Следовательно, обкладки конденсатора C в этой схеме всегда будут иметь одинаковый потенциал φ_2, и, значит, разность потенциалов между обкладками этого конденсатора всегда будет равной нулю при подключении этой батареи к любому источнику зарядов. Но если разность потенциалов на обкладках конденсатора всегда равна нулю, значит, и заряд на его обкладках тоже будет всегда равным нулю согласно формуле $q = C\,(\varphi_2 - \varphi_2) = 0$.

Следовательно, конденсатор C всегда будет оставаться незаряженным при подключении этой батареи к любому источнику зарядов. Но тогда зачем он здесь нужен? Его ведь можно убрать, заменив схему на рис. 4-10, *б* схемой, изображенной на рис. 4-10, *в*.

Вот теперь мы можем утверждать со всей определенностью, что наша схема содержит две параллельные ветви, содержащие по два одинаковых конденсатора каждая. Поскольку емкость каждого конденсатора равна $2C$, то емкость одной ветви, содержащей два таких последовательных конденсатора, равна $\frac{2C}{2} = C$. А поскольку таких ветвей две и они параллельны, то общая емкость всей этой батареи конденсаторов $C_{общ} = 2C$.

Пример 6 (рис. 4-11, *а*). Здесь тоже нельзя утверждать, что конденсаторы соединены последовательно или параллельно. И если бы схема была несимметричной, т. е., если бы на месте, скажем, нижнего

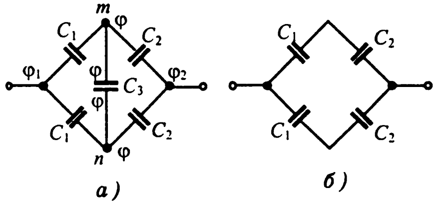


Рис. 4-11

конденсатора был не C_1, а конденсатор с иной емкостью, то ваших знаний не хватило бы для определения общей емкости этой батареи конденсаторов. Но в силу симметрии схемы потенциалы точек m и n, в которых соединены конденсаторы C_1 и C_2, одинаковы, поэтому конденсатор C_3 всегда будет не заряжен, ведь разность потенциалов на его обкладках равна нулю. Значит, и его заряд тоже будет равен нулю, поэтому конденсатор C_3 можно из схемы убрать, заменив ее эквивалентной, изображенной на рис. 4-11, *б*. Поскольку общая емкость последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2 $C_{1,2} = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$, а ветвей, содержащих эти конденсаторы, две и они параллельны, то $C_{общ} = \dfrac{C_{1,2}}{2}$ или $C_{общ} = \dfrac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}$.

Пример 7. Рассмотрим еще более сложную схему, изображенную на рис. 4-12, *а*. Проводники соединены так, что образуют куб, в каждое ребро которого включен конденсатор емкостью C (понятно, что емкостью соединительных проводов мы во всех этих случаях пренебрегаем). Однако эта схема проще предыдущей, поскольку здесь нет перемычек, поэтому, проведя некоторые размышления, можно сразу представить эту схему как систему последовательно и параллельно соединенных конденсаторов. Что здесь самое главное: **а) все обкладки, соединенные в одной точке, имеют одинаковый потенциал. Поэтому, где бы на схеме конденсаторы ни располагались, если их обкладки имеют одинаковый потенциал, эти обкладки можно соединить в одной точке; б) если одни из обкладок**

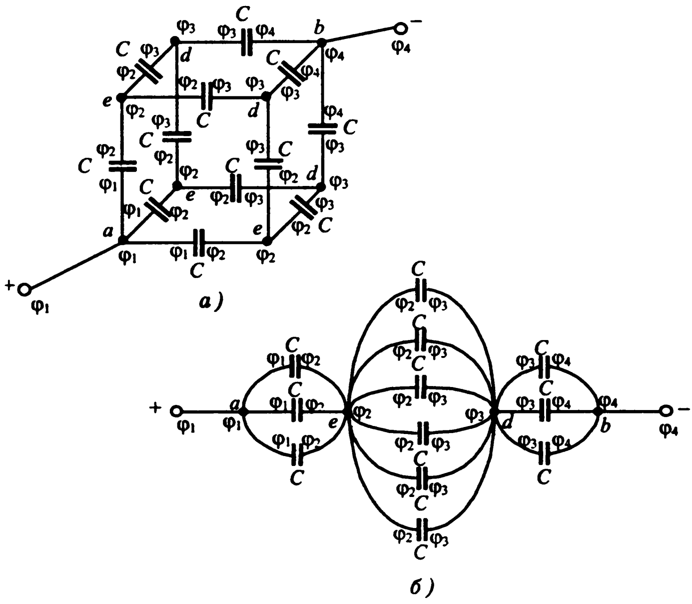


Рис. 4-12

конденсаторов имеют одинаковый потенциал и емкости этих конденсаторов тоже одинаковы, то и другие обкладки этих конденсаторов имеют, хоть и другой, но тоже одинаковый потенциал.

Исходя из этих правил, можно убедиться, что три конденсатора на схеме, изображенной на рис. 4-12, *а*, имеют потенциал одной из обкладок φ_1, девять конденсаторов имеют потенциал одной из обкладок φ_2, девять конденсаторов имеют потенциал одной из обкладок φ_3 и, наконец, три конденсатора имеют потенциал одной из обкладок φ_4. Значит, три конденсатора имеют разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, шесть конденсаторов имеют разность потенциалов на обкладках $\varphi_2 - \varphi_3$ и три конденсатора имеют разность потенциалов на обкладках $\varphi_3 - \varphi_4$. Поэтому схему, изображенную на рис. 4-12, *а*, (хорошенько подумав) можно заменить эквивалентной схемой, например, такой, которая изображена на рис. 4-12, *б*. Эта схема состоит из трех последовательно соединенных участков *ae*, *ed* и *db*, причем участки *ae* и *db*, в свою очередь, содержат по три параллельных конденсатора емкостью С каждый, поэтому общая емкость каждого такого участка равно 3С. Участок *ed* содержит 6 таких конденсаторов, поэтому общая емкость этого участка равна 6С. Тогда общая емкость батареи конденсаторов, изображенной на рис. 4-12, *б*,

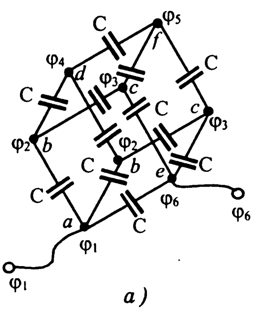
$$C_{\text{общ}} = \frac{3C \cdot 6C \cdot 3C}{3C \cdot 6C + 6C \cdot 3C + 3C \cdot 3C} = \frac{6}{5}C = 1{,}2\ C\ .$$

Пример 8. На рис. 4-13, *а* тот же кубик с конденсаторами включен в цепь источника зарядов в точках *a* и *e*. На рис. 4-13, *б* показана эквивалентная схема.

Узлы с одинаковыми потенциалами обозначены одинаковыми буквами. Рассуждая аналогично, соединим точки с одинаковыми потенциалом в одну точку и изобразим схему в одной плоскости (рис. 4-13, б). Будем определять общую емкость, спускаясь сверху вниз, т. е. начиная с ветвей, наиболее удаленных от точек *a* и *e*, где батарея включена в цепь. Общая емкость ветви

$$bdfc = \frac{2C \cdot C \cdot 2C}{2C \cdot C + C \cdot 2C + 2C \cdot 2C} = \frac{4C^3}{8C^2} = 0{,}5\,C\ .$$

С ветвью *bdfc* ветвь *bc* емкостью 2*C* соединена параллельно, поэтому общая емкость этих ветвей равна 0,5*C* + 2*C* = 2,5*C*.



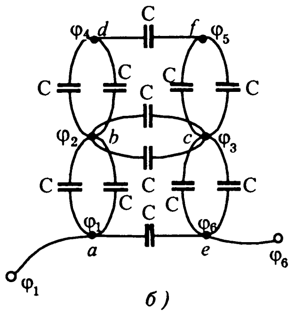


Рис. 4-13

К этим двум ветвям общей емкостью $2{,}5C$ ветви ab и ce емкостью по $2C$ каждая подсоединены последовательно, поэтому общая емкость батареи, кроме ветви ae, равна

$$\frac{2C \cdot 2{,}5C \cdot 2C}{2C \cdot 2{,}5C + 2C \cdot 2{,}5C + 4C^2} = \frac{10}{14}C = \frac{5}{7}C.$$

Нам осталось к этому участку, включающему все, кроме нижнего, конденсаторы, добавить параллельную ветвь ae с конденсатором C. Тогда получим окончательно $C_{\text{общ}} = \frac{5}{7}C + C = \frac{12}{7}C$.

Пример 9 (рис. 4-14). Рассмотрим третий возможный случай включения этого кубика в цепь, когда он подключен в точках a и d (рис. 4-14, *а*).

Эквивалентная схема на плоскости показана на рис. 4-14, *б*. Узлы с одинаковыми потенциалами обозначены одинаковыми буквами. В силу симметрии средний участок ce будет не заряжен и его можно из схемы исключить. Тогда получим схему, изображенную на рис. 4-14, *в*.

Емкость ветви bcf, состоящей из двух одинаковых последовательных ветвей bc и cf, емкостью по $2C$ каждая, равна $\frac{2C}{2} = C$.

К ветви bf последовательно подсоединены ветви ab и fd емкостью по C каждая, поэтому емкость ветви $abcfd$ равна $\frac{C}{3}$. К ней параллельно подключена ветвь aed с общей емкостью $\frac{2C}{2} = C$, поэтому $C_{\text{общ}} = \frac{C}{3} + C = \frac{4}{3}C$.

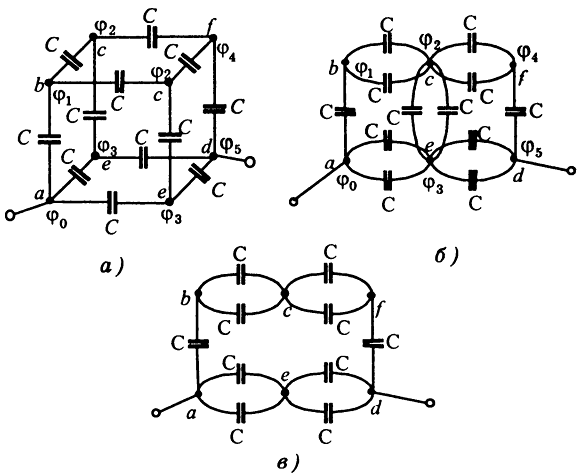


Рис. 4-14

Пример 10. На рис. 4-15 показаны эквивалентные схемы одной и той же батареи конденсаторов. Если вы уже разобрались в предыдущих примерах, то найти общую емкость такой батареи для вас не составит труда:

$$C_{общ} = C + \frac{C}{3} = \frac{4}{3}C.$$

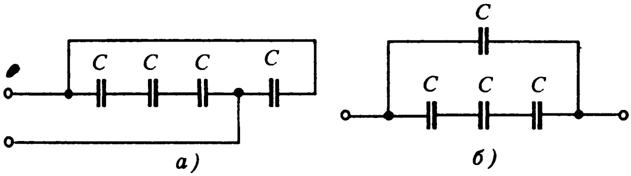


Рис. 4-15

Энергия $W_{эл}$ электрического поля конденсатора емкостью C с зарядом на обкладках q и с напряжением между обкладками U (или разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$) определяется одной из трех формул: $W_{эл} = \frac{qU}{2}$, $W_{эл} = \frac{CU^2}{2}$, $W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$.

Иногда в условии задачи речь идет не обо всей энергии поля конденсатора $W_{эл}$, а об энергии $w_{эл}$, приходящейся на единицу объема пространства между его обкладками, т. е. об объемной плотности энергии поля конденсатора. В этом случае нужно всю энергию поля $W_{эл}$ разделить на объем V пространства между обкладками конденсатора, который, очевидно, равен произведению площади обкладок S и расстояния d между ними:

$$w_{эл} = \frac{W_{эл}}{V}, \text{ где } V = Sd.$$

Кроме того, объемную плотность энергии $W_{эл}$ можно определить по формуле

$$w_{эл} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}.$$

Здесь ε_0 – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками, E – напряженность поля между обкладками.

Если в условии задачи идет речь о силе притяжения обкладок конденсатора друг к другу или о давлении p, которое оказывают разноименно заряженные обкладки конденсатора, на диэлектрик между ними, то нужно это давление выразить как отношение силы взаимного притяжения F разноименно заряженных обкладок к их площади S: $$p = \frac{F}{S}.$$

Примерная схема дальнейшего решения может быть такой:

$$F = qE_1,\ q = \sigma S,\ E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ и т. д.}$$

Здесь E_1 – напряженность поля одной из обкладок, q – заряд на ней, σ – поверхностная плотность зарядов на обкладке.

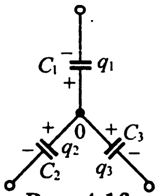


Рис. 4-16

Если конденсаторы соединены обкладками в одной точке 0, как на рис. 4-16, то алгебраическая сумма зарядов на этих обкладках равна нулю:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

При этом следует учитывать знак соединенных обкладок.

Решение отдельных задач

Задача 1

Медный шар массой $m = 1$ кг содержит $N = 1 \cdot 10^{10}$ нескомпенсированных элементарных зарядов. Определить емкость шара и его потенциал. Плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Среда – воздух.

Дано:
$m = 1$ кг
$N = 1 \cdot 10^{10}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$\rho = 8{,}9 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$

C – ?
φ – ?

Решение. Емкость шара определим по формуле $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$. (1)

Радиус шара R можно определить из формулы его объема $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. (2)

Теперь воспользуемся формулой плотности, подставив в нее (2):

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3}.$$

Отсюда $R = \sqrt[3]{\dfrac{3m}{4\pi\rho}}$. (3)

Подставив (3) в (1), мы ответим на один вопрос задачи: $\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt[3]{\dfrac{3m}{4\pi\rho}}}$

Потенциал φ определим из формулы емкости проводника: $C = \dfrac{q}{\varphi}$, откуда $\varphi = \dfrac{q}{C}$. Здесь $q = Ne$, поэтому

$$\boxed{\varphi = \frac{Ne}{C}}$$

Произведем вычисления:

$$C = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}9 \cdot 10^3}}\ \text{Ф} = 3 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф},$$

$$\varphi = \frac{10^{10} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^{-12}}\ \text{В} = 533\ \text{В}.$$

Ответ: $C = 3 \cdot 10^{-12}$ Ф, $\varphi = 533$ В.

Задача 2

Заряженный проводящий шар диаметром $D = 4$ см обладает электрической энергией $W = 1$ Дж. Определить потенциал шара φ. Среда – воздух.

Дано:
$D = 4$ см
$W = 1$ Дж
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$

φ – ?

Решение. Потенциал φ определим из формулы энергии проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2}, \text{ откуда } \varphi = \sqrt{\frac{2W}{C}}. \qquad (1)$$

Емкость шара C найдем, зная его диаметр, по формуле

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{D}{2} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon D. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу: $\varphi = \sqrt{\dfrac{2W}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon D}}$,

$$\boxed{\varphi = \sqrt{\frac{W}{\pi\varepsilon_0\varepsilon D}}}$$

Переведем единицу диаметра в СИ: 4 см = 0,04 м.
Проверим единицу полученной величины:

$$[\varphi]_{\text{СИ}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\frac{\text{Кл}}{\text{В}}}} = \sqrt{\text{В} \cdot \text{В}} = \text{В}, \text{ ведь } \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}.$$

Произведем вычисления:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}04}}\ \text{В} = 9{,}5 \cdot 10^5\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi = 9{,}5 \cdot 10^5$ В.

Задача 3

Два проводящих шара радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 5$ см, заряженных до потенциалов $\varphi_{01} = 20$ В и $\varphi_{02} = 10$ В, соединяют проводником, емкостью которого можно пренебречь. Найти заряды q_1 и q_2 на шарах после их соединения.

Дано: $R_1 = 10$ см $R_2 = 5$ см $\varphi_{01} = 20$ В $\varphi_{02} = 10$ В	
q_1 – ? q_2 – ?	

Решение. Поверхностные плотности зарядов на шарах после соединения σ_1 и σ_2 можно найти, разделив заряды на шарах q_1 и q_2 после соединения на площади поверхностей этих шаров S_1 и S_2:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S_1} \text{ и } \sigma_2 = \frac{q_2}{S_2}, \text{ где}$$

$S_1 = 4\pi R_1^2$ и $S_2 = 4\pi R_2^2$, поэтому

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}. \quad (2)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению зарядов q_1 и q_2 на шарах после их соединения проводником. Для этого воспользуемся законом сохранения заряда, согласно которому суммарный заряд шаров после их соединения не изменился. Если до соединения заряды на шарах были q_{01} и q_{02}, а после соединения они стали q_1 и q_2, то по закону сохранения заряда

$$q_{01} + q_{02} = q_1 + q_2. \quad (3)$$

Кроме того, учтем, что потенциалы шаров φ_1 и φ_2 после соединения станут одинаковы, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$, где из определения емкости следует, что $\varphi_1 = \dfrac{q_1}{C_1}$ и $\varphi_2 = \dfrac{q_2}{C_2}$, поэтому

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}. \quad (4)$$

Мы получили систему уравнений (3) и (4) с двумя нужными нам неизвестными q_1 и q_2. Правда, остальные величины, входящие в эти уравнения, нам тоже не известны, но зато нам известны радиусы шаров, а значит, и их емкости, и, кроме того, мы знаем потенциалы шаров до соединения, поэтому заряды на шарах до соединения q_{01} и q_{02} определить будет достаточно просто. Наша задача сейчас определить из уравнений (3) и (4) заряды на шарах q_1 и q_2 после их соединения. Для этого выразим из уравнения (4) один из искомых зарядов, например, заряд q_2, и подставим его значение в уравнение (3). Так мы получим одно уравнение с одним неизвестным – зарядом q_1, которое и решим относительно этого заряда:

$$q_2 = q_1 \frac{C_2}{C_1}, \quad (5)$$

$$q_{01} + q_{02} = q_1 + q_1 \frac{C_2}{C_1}, \quad q_{01} + q_{02} = q_1\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right),$$

$$q_1 = \frac{q_{01} + q_{02}}{1 + \dfrac{C_2}{C_1}}. \qquad (6)$$

Здесь согласно определению емкости, а также согласно формуле емкости шара имеем: $q_{01} = C_1\varphi_{01}$, $q_{02} = C_2\varphi_{02}$, где $C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1$ (7) и $C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2$. (8)

С учетом этого

$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_{01} + 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2\varphi_{02}}{1 + \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1}} = \boxed{\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\left(R_1\varphi_{01} + R_2\varphi_{02}\right)}{1 + \dfrac{R_2}{R_1}}}. \qquad (9)$$

Для определения q_2 воспользуемся формулой (5), в которую подставим (7) и (8):

$$q_2 = q_1 \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} = \boxed{q_1 \frac{R_2}{R_1}}$$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: 10 см = 0,1 м, 5 см = = 0,05 м.

$$q_1 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}(0{,}1 \cdot 20 + 0{,}05 \cdot 10)}{1 + \dfrac{0{,}05}{0{,}1}} \text{ Кл} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}.$$

$$q_2 = 2 \cdot 10^{-10} \frac{0{,}05}{0{,}1} \text{ Кл} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}.$$

Ответ: $q_1 = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл, $q_2 = 1 \cdot 10^{-10}$ Кл.

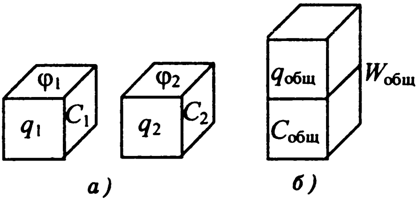


Рис. 4-17

Задача 4

Два кубика емкостями C_1 и C_2 заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно (рис. 4-17, *а*). Чему равна общая емкость $C_{общ}$ прямоугольной призмы, составленной из этих кубиков (рис. 4-17, *б*)? Потерями энергии пренебречь.

Дано:
C_1
C_2
φ_1
φ_2
$C_{общ}$ – ?

Решение. Для нахождения общей емкости сложенных вместе кубиков никакие формулы последовательного и параллельного соединения конденсаторов неприменимы. Для решения подобных задач можно воспользоваться законами сохранения зарядов и энергии.

Рассмотрим следующий способ решения этой задачи. Если бы нам была известна энергия $W_{общ}$ заряженной призмы, составленной из двух кубиков, то емкость такой призмы мы могли бы определить из формулы энергии призмы $W_{общ} = \dfrac{q_{общ}^2}{2C_{общ}}$. (1)

Здесь $q_{общ}$ – общий заряд призмы. По закону сохранения заряда заряд призмы $q_{общ}$ равен сумме зарядов кубиков q_1 и q_2: $q_{общ} = q_1 + q_2$.

Заряд каждого кубика мы легко найдем, зная его емкость и потенциал. По определению емкости проводника $C_1 = \dfrac{q_1}{\varphi_1}$ и $C_2 = \dfrac{q_2}{\varphi_2}$, откуда $q_1 = C_1\varphi_1$ и $q_2 = C_2\varphi_2$, поэтому $q_{общ} = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$. (2)

Общая энергия заряженной призмы $W_{общ}$ по закону сохранения энергии равна сумме энергий заряженных кубиков: $W_{общ} = W_1 + W_2$.

Энергию каждого кубика найдем, зная его емкость и потенциал: $W_1 = \dfrac{C_1\varphi_1^2}{2}$ и $W_2 = \dfrac{C_2\varphi_2^2}{2}$.

Тогда $W_{общ} = \dfrac{C_1\varphi_1^2}{2} + \dfrac{C_2\varphi_2^2}{2} = \dfrac{C_1\varphi_1^2 + C_2\varphi_2^2}{2}$. (3)

Подставив (2) и (3) в (1), получим уравнение, из которого найдем общую емкость призмы $C_{общ}$:

$$\frac{C_1\varphi_1^2 + C_2\varphi_2^2}{2} = \frac{(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)^2}{2C_{общ}}.$$

Отсюда $$\boxed{C_{общ} = \frac{(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)^2}{C_1\varphi_1^2 + C_2\varphi_2^2}}.$$

Задача решена.

Ответ: $C_{общ} = \dfrac{(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)^2}{C_1\varphi_1^2 + C_2\varphi_2^2}$.

Задача 5

Найти поверхностную плотность зарядов на обкладках плоского конденсатора, разделенных слоем парафина толщиной $d = 2$ мм, если на обкладки подано напряжение $U = 4$ кВ. Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$.

Дано:
$d = 2$ мм
$U = 4$ кВ
$\varepsilon = 2$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$

σ – ?

Решение. Вспомним, что поверхностная плотность зарядов определяется отношением заряда q на пластине к ее площади S: $\sigma = \dfrac{q}{S}$. (1)

Если теперь записать формулы емкости плоского конденсатора $C = \dfrac{q}{U}$ и $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}$ и приравнять их правые части, то можно из полученного равенства определить заряд на обкладках, а затем подставить полученное выражение для заряда в формулу (1). При этом неизвестная площадь обкладок сократится, и мы найдем σ. Приступим:

$$\frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \text{ откуда } q = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SU}{d}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $\sigma = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon SU}{dS}$, $\boxed{\sigma = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon U}{d}}$

Переведем все единицы в СИ:
2 мм = $2 \cdot 10^{-3}$ м, 4 кВ = $4 \cdot 10^{3}$ В.
Произведем вычисления:

$$\sigma = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $\sigma = 3{,}5 \cdot 10^{-5}$ Кл/м².

Задача 6

Во сколько раз изменится емкость плоского воздушного конденсатора, если уменьшить площадь его обкладок в 1,5 раза, уменьшить расстояние между ними в 2 раза и пространство между обкладками заполнить слюдой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 6$?

Дано:

$S_2 = \dfrac{S_1}{1{,}5}$

$d_2 = \dfrac{d_1}{2}$

$\varepsilon_1 = 1$

$\varepsilon_2 = 6$

$\dfrac{C_2}{C_1}$ – ?

Решение. Запишем формулы емкости конденсатора до и после происшедших с ним изменений: $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{d_1}$ (1) и $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S_2}{d_2}$. (2)

Здесь S_1 и d_1 – площадь обкладок и расстояние между ними до изменения, S_2 и d_2 – после.

Разделим (2) на (1) и заменим S_2 на $\dfrac{S_1}{1{,}5}$ и d_2 на $\dfrac{d_1}{2}$ согласно условию задачи:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S_2 d_1}{d_2\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1} = \frac{\varepsilon_2 S_2 d_1}{d_2\varepsilon_1 S_1} = \frac{\varepsilon_2 S_1 d_1 2}{1{,}5 d_1\varepsilon_1 S_1},$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\varepsilon_2}{1{,}5\varepsilon_1} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{4\varepsilon_2}{3\varepsilon_1}}$$

Произведем вычисления: $\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{4 \cdot 6}{3} = 8$.

Ответ: $\dfrac{C_2}{C_1} = 8$, т. е. емкость увеличится в 8 раз.

Задача 7

Плоский конденсатор состоит из двух круглых пластин диаметром $D = 2$ см, между которыми находится слой парафина с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Какой максимальный заряд q должен быть на пластинах, чтобы при напряженности электрического поля $E = 5$ МВ/м произошел пробой диэлектрика?

Дано:
$D = 2$ см
$\varepsilon = 2$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$E = 5\ \dfrac{\text{МВ}}{\text{м}}$

$q - ?$

Решение. Запишем формулы емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} \quad (1) \quad \text{и} \quad C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \quad (2)$$

Заметим, что формула (1) применима к любому конденсатору, а не только к плоскому.

Теперь приравняем (1) и (2) и из полученного равенства найдем заряд q. Там, правда, будет неизвестное напряжение U, но его мы определим, воспользовавшись формулой, связывающей напряженность E однородного поля плоского конденсатора с напряжением U на его обкладках: $\dfrac{q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, откуда

$$q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d}. \quad (3)$$

Поскольку $E = \dfrac{U}{d}$, то $U = Ed$. (4)

Кроме того, площадь круглых обкладок $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$. (5)

Подставим (4) и (5) в (3). При этом расстояние d между обкладками конденсатора, которое нам не дано, сократится, и мы определим заряд q через известные нам величины: $q = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi D^2 E d}{4d}$, $\boxed{q = 0{,}25\pi\varepsilon_0\varepsilon E D^2}$

Переведем все единицы в СИ:
2 см = 0,02 м, 5 МВ/м = $5 \cdot 10^6$ В/м.
Произведем вычисления:
$q = 0{,}25 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}$ Кл $=$
$= 5{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл $= 5{,}6$ нКл.
Ответ: $q = 5{,}6$ нКл.

Задача 8

Разность потенциалов между обкладками плоского конденсатора увеличили на $\Delta U = 200$ В, а расстояние увеличили на 25%. Определить изменение заряда Δq на обкладках. Первоначальное расстояние между обкладками было $d_1 = 0{,}5$ мм, радиус круглых обкладок конденсатора $R = 0{,}5$ см, конденсатор воздушный, первоначальное напряжение на его обкладках $U_1 = 100$ В.

Дано:
$\Delta U = 200$ В
$\Delta d = 25\% = 0{,}25\, d_1$
$d_1 = 0{,}5$ мм
$R = 0{,}5$ см
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$U_1 = 100$ В

Δq – ?

Решение. Запишем формулы емкости плоского конденсатора до и после происшедших с ним изменений: $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}$ (1)

и $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2}$. (2)

С другой стороны, согласно определению емкости конденсатора

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1} \quad (3) \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{q_2}{U_2}. \quad (4)$$

Приравняем (1) и (3), а также (2) и (4) и из полученных равенств найдем q_1 и q_2, а затем и $\Delta q = q_2 - q_1$: (5)

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1} = \frac{q_1}{U_1} \ \text{и} \ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2} = \frac{q_2}{U_2}, \ \text{откуда}$$

$$q_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_1}{d_1} \ \text{и} \ q_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_2}{d_2}.$$

Изменение заряда

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_2}{d_2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_1}{d_1} = \varepsilon_0 \varepsilon S \left(\frac{U_2}{d_2} - \frac{U_1}{d_1} \right).$$

Здесь $d_2 = d_1 + \Delta d = d_1 + 0{,}25\, d_1 = 1{,}25\, d_1$, $U_2 = U_1 + \Delta U$ и $S = \pi R^2$.

С учетом этого запишем:

$$\Delta q = \varepsilon_0 \varepsilon \pi R^2 \left(\frac{U_1 + \Delta U}{1{,}25 d_1} - \frac{U_1}{d_1} \right) = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon R^2}{d_1} \cdot \frac{U_1 + \Delta U - 1{,}25 U_1}{1{,}25},$$

$$\boxed{\Delta q = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon R^2 (\Delta U - 0{,}25 U_1)}{1{,}25 d_1}}$$

Переведем все единицы в СИ: 0,5 мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м, 0,5 см $= 5 \cdot 10^{-3}$ м.

Произведем вычисления:

$$\Delta q = \frac{3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^{-6} (200 - 0{,}25 \cdot 100)}{1{,}25 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \text{Кл} =$$

$= 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Ответ: $\Delta q = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Задача 9.

На двух обкладках плоского конденсатора находятся заряды $+3q$ и $-q$. Площадь обкладок S, расстояние между ними d. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками. Конденсатор воздушный.

Дано:
$+3q$
$-q$
S
d
ε
ε_0
$\Delta\varphi$ – ?

Решение. Отметим, что емкость конденсатора, конечно, не зависит от того, одинаковые или разные заряды на его обкладках. Она вообще не зависит от того, заряжен конденсатор или нет. Емкость заряженного конденсатора равна емкости незаряженного, и у плоского конденсатора она определяется по формуле $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ во всех случаях. Но по общей формуле $C = \dfrac{q}{U}$ в случае, когда заряды на обкладках разные, емкость определять нельзя, она применима только тогда, когда они равны по модулю, но противоположны по знаку.

Решим эту задачу, не пользуясь общей формулой емкости. Поскольку поле между обкладками при равномерном распределении зарядов на них однородное,

$$E_{\text{рез}} = \frac{\Delta\varphi}{d}, \qquad (1)$$

где $E_{\text{рез}}$ – напряженность поля, созданного обеими обкладками, между ними. Поскольку обкладки заряжены разноименно, векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ напряженностей полей каждой обкладки сонаправлены, поэтому $E_{\text{рез}} = E_1 + E_2$, где $E_1 = \dfrac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon}$ и $E_2 = \dfrac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$.

Здесь $\sigma_1 = \dfrac{3q}{S}$ и $\sigma_2 = \dfrac{q}{S}$ – поверхностные плотности зарядов на обкладках (знак «минус» мы учли при выборе направления вектора $\vec{E}_2$).

Тогда $E_1 = \dfrac{3q}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$ и $E_2 = \dfrac{q}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$, поэтому

$$E_{\text{рез}} = \frac{3q}{2\varepsilon_0\varepsilon S} + \frac{q}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{2q}{\varepsilon_0\varepsilon S}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем $\Delta\varphi$: $\dfrac{2q}{\varepsilon_0\varepsilon S} = \dfrac{\Delta\varphi}{d}$, откуда

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2qd}{\varepsilon_0\varepsilon S}}$$

Задача решена.

Ответ: $\Delta\varphi = \dfrac{2qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$.

Задача 10

Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов $U_1 = 600$ В, а затем отключили от источника тока. Какой станет разность потенциалов U_2 между пластинами, если расстояние между ними увеличить от $d_1 = 0{,}2$ мм до $d_2 = 0{,}7$ мм и, кроме того, пространство между пластинами заполнить слюдой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 7$?

Дано:
$\varepsilon_1 = 1$
$U_1 = 600$ В
$d_1 = 0{,}2$ мм
$\varepsilon_2 = 7$
$d_2 = 0{,}7$ мм

U_2 – ?

Решение. Поскольку конденсатор сначала отключили от источника, а только потом заменили диэлектрик между пластинами и изменили расстояние между ними, значит, заряд на его обкладках остался неизменным, а изменилось напряжение на них вследствие изменения емкости конденсатора. Поэтому $q_1 = q_2$, где $q_1 = C_1U_1$ и $q_2 = C_2U_2$.

Тогда
$$C_1U_1 = C_2U_2. \qquad (1)$$

Здесь согласно формуле емкости плоского конденсатора

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} \quad (2) \qquad \text{и} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}, \quad (3)$$

где S – одинаковая до и после отключения площадь обкладки конденсатора.

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} U_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2} U_2, \quad \frac{\varepsilon_1}{d_1} U_1 = \frac{\varepsilon_2}{d_2} U_2.$$

Отсюда мы определим искомое напряжение U_2:

$$\boxed{U_2 = \frac{d_2 \varepsilon_1 U_1}{d_1 \varepsilon_2}}$$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: $0{,}2$ мм $= 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ м $= 2 \cdot 10^{-4}$ м, $0{,}7$ мм $= 0{,}7 \cdot 10^{-3}$ м $= 7 \cdot 10^{-4}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U_2 = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 600}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 7} \text{ В} = 300 \text{ В}.$$

Ответ: $U_2 = 300$ В.

Задача 11

Площадь обкладок плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см^2, расстояние между ними $d_1 = 5$ мм. К обкладкам приложена разность потенциалов $U_1 = 300$ В. Не отключая конденсатор от источника напряжения, обкладки сближают, уменьшая расстояние между ними на $\Delta d =$ $= 2$ мм, после чего заполняют пространство между ними эбонитом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 2{,}6$. Какова емкость конденсатора C_1 до и C_2 после заполнения? Какова поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора σ_1 до и σ_2 после заполнения?

Дано:
$\varepsilon_1 = 1$
$S = 100$ см^2
$d_1 = 5$ мм
$U_1 = 300$ В
$U_1 = U_2$
$\Delta d = 2$ мм
$\varepsilon_2 = 2{,}6$

C_1 – ?
C_2 – ?
σ_1 – ?
σ_2 – ?

Решение. Емкость плоского конденсатора определяется выражением $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$.

Соответственно этому выражению емкость конденсатора до и после заполнения его эбонитом можно определить по формулам

$$\boxed{C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1}} \qquad (1)$$

и $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}$, где $d_2 = d_1 - \Delta d$ – расстояние между обкладками конденсатора после их сближения. Поэтому

$$\boxed{C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_1 - \Delta d}} \qquad (2)$$

Мы определили в общем виде две искомые величины. Теперь определим поверхностную плотность зарядов на обкладках конденсатора.

По определению поверхностная плотность зарядов на пластине равна отношению заряда к площади пластины:

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S} \quad (3) \qquad \text{и} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{S}. \quad (4)$$

Здесь q_1 и q_2 – заряды на обкладках конденсатора до и после заполнения его эбонитом.

Величины зарядов q_1 и q_2 определим из следующих рассуждений. Поскольку конденсатор не отключают от источника напряжения, значит, с изменением его емкости изменяется заряд на обкладках. По определению емкости $C_1 = \dfrac{q_1}{U_1}$, (5) $\quad C_2 = \dfrac{q_2}{U_2}$, откуда напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах до и после сближения:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} \text{ и } U_2 = \frac{q_2}{C_2}.$$

Но так как $U_1 = U_2$, поскольку эти напряжения равны напряжению на полюсах источника зарядов, ведь конденсаторы не отключали от него, то и $\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$. (6)

Заряд q_1 найдем из формулы (5): $q_1 = C_1U_1$.

Поскольку напряжение U_1 нам известно из условия задачи, а емкость конденсатора определена формулой (5), то и заряд q_1 тоже определен. Тогда согласно (3) поверхностная плотность зарядов на пластинах

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{C_1U_1}{S}}$$

Из (6) определим заряд q_2: $q_2 = q_1 \frac{C_2}{C_1}$.

Тогда согласно (4) поверхностная плотность зарядов

$$\sigma_2 = \frac{q_1C_2}{C_1S}, \qquad \boxed{\sigma_2 = \frac{U_1C_2}{S}}$$

Переведем все единицы в СИ: 100 см² = 0,01 м², 2 мм = 0,002 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$C_1 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 0{,}01}{0{,}005} \text{ Ф} = 1{,}8 \cdot 10^{-11} \text{ Ф},$$

$$C_2 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}6 \cdot 0{,}01}{0{,}005 - 0{,}002} \text{ Ф} = 7{,}7 \cdot 10^{-11} \text{ Ф},$$

$$\sigma_1 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-11} \cdot 300}{0{,}01} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 5{,}4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{300 \cdot 7{,}7 \cdot 10^{-11}}{0{,}01} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} = 2{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $C_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-11}$ Ф, $C_2 = 7{,}7 \cdot 10^{-11}$ Ф, $\sigma_1 = 5{,}4 \cdot 10^{-7}$ Кл/м², $\sigma_2 = 2{,}3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м².

Задача 12

Поверхностная плотность зарядов на обкладках плоского воздушного конденсатора $\sigma = 0{,}1$ мкКл/м², площадь обкладок $S = 5$ см², емкость конденсатора $C = 1$ пФ. Какую скорость v приобретет электрон, пройдя по сило-

вой линии расстояние от одной обкладки до другой, если его начальная скорость $v_0 = 0$?

Дано:

$\sigma = 0{,}1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2}$

$S = 5$ см²

$C = 1$ пФ

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

$\varepsilon = 1$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$

$v_0 = 0$

---

v – ?

Решение. Кинетическая энергия электрона $W_к = A$, где $W_к = \dfrac{m_e v^2}{2}$ и $A = eU$ при условии, что $v_0 = 0$.

Поэтому $\dfrac{m_e v^2}{2} = eU$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}. \qquad (1)$$

Напряжение U найдем из формулы емкости конденсатора

$$C = \frac{q}{U}, \text{ откуда } U = \frac{q}{C}.$$

Заряд на обкладках $q = \sigma S$, поэтому $U = \dfrac{\sigma S}{C}$. (2)

Подставив (2) в (1), мы решим задачу: $\boxed{v = \sqrt{\dfrac{2e\sigma S}{m_e C}}}$

Переведем все единицы в СИ: $0{,}1\ \dfrac{\text{мкКл}}{\text{м}^2} = 1 \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$, $5\ \text{см}^2 = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$, $1\ \text{пФ} = 1 \cdot 10^{-12}$ Ф.

Проверим единицу полученной величины:

$$[v]_{СИ} = \sqrt{\frac{\text{Кл} \cdot \dfrac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{Ф}}} = \text{Кл}\sqrt{\frac{\text{В}}{\text{кг} \cdot \text{Кл}}} = \text{Кл}\sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{Кл} \cdot \text{Кл}}} =$$

$$= \frac{\text{Кл}}{\text{Кл}}\sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}}} = \sqrt{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

(вспомним, что Ф = Кл/В, Дж = Н · м и Н = кг · м/с²).

Произведем вычисления:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-12}}}\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4 \cdot 10^6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v = 4 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 13

Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками d погружают до половины в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_2. Во сколько раз изменится его емкость? Рассмотрим два случая, указанных на рис. 4-18, *а* и *б*.

Дано:
$\varepsilon_1 = 1$
d
ε_2

$\dfrac{C_2}{C_1}$ – ?

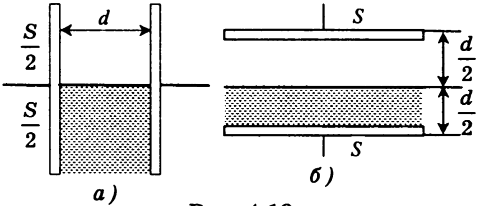


Рис. 4-18

Решение. 1) Решим задачу применительно к случаю, изображенному на рис. 4-18, *а*.

Когда конденсатор не был заполнен жидкостью, его емкость
$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d}. \qquad (1)$$

Когда его наполовину заполнили жидкостью так, как показано на рис. 4-18, *а*, то получили батарею из двух конденсаторов с равной площадью обкладок $\dfrac{S}{2}$ и расстоянием между ними d, причем эти конденсаторы соединены параллельно (рис. 4-19). Один из них емкостью C_{21} – воздушный, поэтому $C_{21} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2d}$, а второй содержит между обкладками жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_2, поэтому его емкость

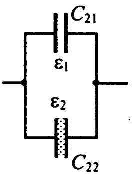


Рис. 4-19

$$C_{22} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2d}.$$

Общая емкость такой батареи
$$C_2 = C_{21} + C_{22} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2d}. \qquad (2)$$

Разделив (2) на (1), мы ответим на один вопрос задачи:
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\varepsilon_0 S(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d}{2d \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_1 S}, \qquad \boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1}}$$

2) Теперь обратимся к рис. 4-18, *б*.

При таком заполнении конденсатора жидкостью получается батарея двух последовательно соединенных конденсаторов с площадью обкладок S и расстоянием между ними $\dfrac{d}{2}$, причем один из них с емкостью C_{21} – воздушный, а другой с емкостью C_{22} – содержит между обкладками жидкость. Эта батарея изображена на рис. 4-20. По формуле емкости плоского конденсатора

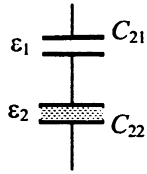


Рис. 4-20

$$C_{21} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{\frac{d}{2}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d} \text{ и}$$

$$C_{22} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{\frac{d}{2}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}.$$

Поскольку эти два конденсатора соединены последовательно, их общая емкость

$$C_2 = \frac{C_{21}C_{22}}{C_{21}+C_{22}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 S \cdot 2\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d \cdot d\left(\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d} + \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}\right)} =$$

$$= \frac{4\varepsilon_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2 S^2}{d^2 \cdot 2\varepsilon_0 S\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{d}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}. \qquad (3)$$

Разделив (3) на (1), мы ответим на второй вопрос задачи:

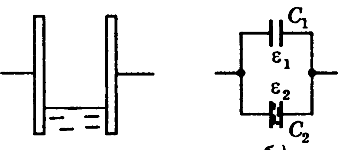
$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 Sd}{d(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varepsilon_0\varepsilon_1 S}, \qquad \boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

Задача решена.

Ответ: *а*) $\frac{C_2}{C_1} = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2\varepsilon_1}$; *б*) $\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

Задача 14

Воздушный конденсатор с зарядом на обкладках q, площадью обкладок S и расстоянием между ними d погружают в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_2 на $\frac{1}{4}$ его объема (рис. 4-21, *а*). Найти напряжение на обкладках конденсатора после погружения.



а) Рис. 4-21 *б)*

Дано:
ε_1
q
S
d
ε_2
$V_2 = \frac{1}{4}V_1$

U – ?

Решение. Конденсатор, частично погруженный в жидкость, можно представить в виде двух параллельно соединенных конденсаторов с одинаковым расстоянием между обкладками d, одинаковым напряжением на них U, но с разными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 и разными площадями обкладок: $S_1 = \frac{V_1}{d}$ и $S_2 = \frac{V_2}{d}$, где $V_1 = \frac{3}{4}Sd$ и $V_2 = \frac{1}{4}Sd$, поэтому $S_1 = \frac{3}{4}S$ и $S_2 = \frac{1}{4}S$.

Общая емкость этой батареи $C = C_1 + C_2$, где

$C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{d} = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{4d}$ и $C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S_2}{d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{4d}$ – емкости каждого конденсатора. Поэтому

$$C = \frac{3\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{4d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{4d} = \frac{\varepsilon_0 S(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4d}. \qquad (1)$$

Суммарный заряд на батарее из этих двух конденсаторов остался таким же, каким он был до погружения, т. е. q. Поэтому согласно формуле емкости конденсатора

$$C = \frac{q}{U}, \text{ откуда } U = \frac{q}{C}. \qquad (2)$$

Подставив (1) в (2), мы решим эту задачу: $\boxed{U = \frac{4qd}{\varepsilon_0 S(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}$

Задача решена.

Ответ: $U = \frac{4qd}{\varepsilon_0 S(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$.

Задача 15

В плоский воздушный конденсатор ($\varepsilon_1 = 1$) с площадью обкладок S_1 и расстоянием между ними d_1 внесена параллельно обкладкам диэлектрическая пластинка площадью $S_2 = \frac{S_1}{2}$ и толщиной $d_2 = \frac{d_1}{2}$ с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 2$ (рис. 4-22, *а*). Во сколько раз изменилась при этом емкость конденсатора?

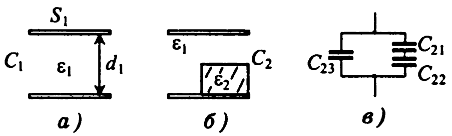


Рис. 4-22

Дано:
$\varepsilon_1 = 1$
$\varepsilon_2 = 2$
$S_2 = \frac{S_1}{2}$
$d_2 = \frac{d_1}{2}$

$\frac{C_2}{C_1}$ – ?

Обозначим ε_1 относительную диэлектрическую проницаемость воздуха, C_1 – емкость конденсатора до внесения в него пластинки, C_2 – емкость конденсатора после внесения в него пластинки.

Решение. Емкость конденсатора C_1 до внесения в него пластинки (рис. 4-24, *а*) определим, воспользовавшись формулой емкости плоского конденсатора

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S_1}{d_1}. \quad (1)$$

Сложнее определить его емкость C_2 после внесения пластинки. Такой конденсатор может быть представлен как батарея из трех конденсаторов, два из которых соединены последовательно и еще один подсоединен к ним параллельно.

Схема, эквивалентная показанной на рис. 4-22, *б*, приведена на рис. 4-22, *в*. Из нее следует, что введенная пластинка с воздушным промежутком над ней представляет собой два последовательно соединенных конденсатора с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, расстоянием между обкладками $\frac{d_1}{2}$ и площадью обкладок $\frac{S_1}{2}$. Если обозначить емкости этих конденсаторов C_{21} и C_{22} (рис. 4-22, *в*), то их общая емкость

$$C_{общ1} = \frac{C_{21} C_{22}}{C_{21} + C_{22}}.$$

Третий конденсатор является воздушным и имеет площадь обкладок, равную $\frac{S_1}{2}$, а расстояние между обкладками d_1. Обозначим его емкость C_{23}. Так как он подключен к двум предыдущим конденсаторам параллельно, то их общая емкость

$$C_2 = C_{23} + C_{общ1} = C_{23} + \frac{C_{21} C_{22}}{C_{21} + C_{22}}.$$

Емкости C_{21}, C_{22} и C_{23} по формуле емкости плоского конденсатора соответственно будут:

$$C_{21} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S_1}{2}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S_1}{d_1}, \quad C_{22} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S_1}{2}}{\frac{d_1}{2}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S_1}{d_1} \text{ и}$$

$$C_{23} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{2d_1}.$$

Тогда

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{2d_1} + \frac{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{d_1}\cdot\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S_1}{d_1}}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S_1}{d_1}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2 S_1^2}{d_1^2\frac{\varepsilon_0 S_1}{d_1}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{2d_1} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S_1}{d_1\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)} = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right). \qquad (2)$$

Теперь для определения искомого отношения $\frac{C_2}{C_1}$ нам надо разделить (2) на (1):

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\frac{\varepsilon_0 S_1}{d_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S_1}{d_1}} = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) \text{ или}$$

$$\boxed{\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

Произведем вычисления: $\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{1+2} = \frac{7}{6}$.

Ответ: $\frac{C_2}{C_1} = \frac{7}{6}$.

Задача 16

Определить емкость C батареи конденсаторов, изображенной на рис. 4-23, *а*. Емкости C_1 и C_2 известны.

Дано:	
C_1	
C_2	
C – ?	

Решение. Отсутствие на участке ab конденсатора дает понять, что точки a и b имеют одинаковый потенциал, и значит, их можно соединить в одну точку, как показано на рис. 4-23, *б*. Теперь мы видим, что участок ma содержит два параллельных конденсатора C_2, как и участок an,

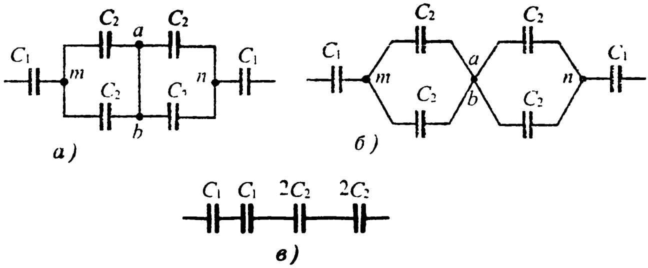


Рис. 4-23

и значит, емкость каждого такого участка $2C_2$. Перерисуем схему так, чтобы расположить крайние левый и правый конденсаторы рядом, от такого переноса емкость батареи не изменится.

Мы получили два конденсатора емкостью по C_1 каждый и два конденсатора емкостью по $2C_2$ каждый, соединенные последовательно (рис. 4-23, *в*). Общая емкость двух левых конденсаторов на схеме 4-23, *в* равна $\frac{C_1}{2}$, а общая емкость двух правых равна $\frac{2C_2}{2} = C_2$. Поэтому общая емкость всей батареи

$$C = \frac{\frac{C_1}{2}C_2}{\frac{C_1}{2} + C_2}, \quad \boxed{C = \frac{C_1C_2}{C_1 + 2C_2}}$$

Задача решена.

Ответ: $C = \frac{C_1C_2}{C_1 + 2C_2}$.

Задача 17

На рис. 4-24, *а* изображена батарея конденсаторов, подключенная к источнику напряжением U = 200 В. Определить общий заряд батареи q, если $C_1 = C_2 = 1$ пФ, $C_3 = C_4 = C_5 = 2$ пФ, $C_6 = 4$ пФ.

Дано:
U = 200 В
$C_1 = C_2 = 1$ пФ
$C_3 = C_4 = C_5 = 2$ пФ
$C_6 = 4$ пФ

q – ?

Решение. Общий заряд q этой батареи можно определить из формулы общей емкости этой батареи

$$C = \frac{q}{U}, \text{ откуда } q = CU. \qquad (1)$$

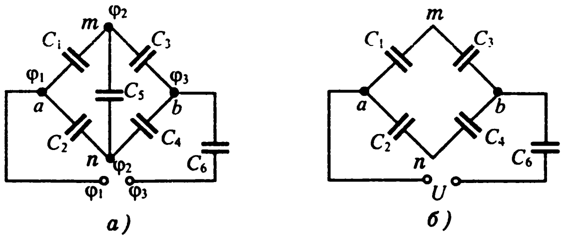


Рис. 4-24

Таким образом, задача сводится к определению общей емкости батареи C. Однако ее определение связано с некоторой трудностью. Эта трудность состоит в том, что соединение конденсаторов C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 не является ни последовательным, ни параллельным, поскольку при последовательном соединении конденсаторов узлы на проводниках, соединяющих конденсаторы, вообще отсутствуют, а при параллельном соединении конденсаторов узлы соединяют только параллельные ветви, а между отдельными конденсаторами тоже отсутствуют. Поэтому в подобных случаях рассчитать емкость такой батареи по формулам последовательного и параллельного соединения конденсаторов невозможно, необходимо пользоваться иными методами. Но в нашем случае эту трудность можно обойти, воспользовавшись некоторыми данными из условия задачи.

Обратим внимание на то, что емкости конденсаторов C_1 и C_2 одинаковы и, кроме того, одинаковы емкости конденсаторов C_3 и C_4. Если потенциал точки a равен φ_1, то φ_1 равны и потенциалы левых обкладок конденсаторов C_1 и C_2. Но тогда потенциалы правых обкладок этих конденсаторов в силу симметрии схемы тоже одинаковы и равны, допустим, φ_2. С этими обкладками соединены точки m и n батареи, поэтому потенциалы точек m и n тоже равны φ_2, следовательно, они тоже одинаковы. С точками m и n в свою очередь соединены обкладки конденсатора C_5, поэтому потенциалы обеих обкладок этого конденсатора тоже равны, и они все время будут одинаковы при любых зарядах и напряжениях на других конденсаторах батареи. Но, если потенциалы на обкладках конденсатора C_5 будут одинаковы, то разность потенциалов между ними будет равна нулю, поэтому и заряжаться такой конденсатор, естественно, не будет, т. е. его как бы нет и в создании общей емкости C он не участвует. Поэтому схему, изображенную на рис. 4-24, *а*, можно заменить эквивалентной схемой, в которой конденсатор C_5 отсутствует (рис. 4-24, *б*). Батарея конденсаторов, изображенная на рис. 4-24, *б*), теперь состоит из двух параллельных ветвей, содержащих по два конденсатора в каждой ветви: C_1 и C_2, C_3 и C_4, и к этим двум параллельным ветвям последовательно подсоединен конденсатор C_6. Емкость C такой батареи уже достаточно просто определить, пользуясь законами последовательного и параллельного соединения конденсаторов.

Общая емкость последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_3 $\quad C_{1,3} = \dfrac{C_1C_3}{C_1 + C_3}$.

Общая емкость конденсаторов C_2 и C_4, тоже соединенных последовательно, $\quad C_{2,4} = \dfrac{C_2C_4}{C_2 + C_4}$.

Поскольку $C_{1,3}$ и $C_{2,4}$ соединены между собой параллельно, то их общая емкость

$$C_{1,2,3,4} = C_{1,3} + C_{2,4} = \frac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2C_4}{C_2 + C_4}. \qquad (2)$$

Конденсатор C_6 к общей емкости четырех конденсаторов $C_{1,2,3,4}$ подсоединен последовательно, поэтому емкость всей батареи

$$C = \frac{C_{1,2,3,4} \cdot C_6}{C_{1,2,3,4} + C_6}. \qquad (3)$$

Чтобы несколько упростить полученные выражения, учтем, что согласно условию задачи $C_1 = C_2$ и $C_3 = C_4 = 2C_1$. Подставив эти данные в правую часть формулы (2), получим

$$C_{1,2,3,4} = \frac{C_1 \cdot 2C_1}{C_1 + 2C_1} + \frac{C_1 \cdot 2C_1}{C_1 + 2C_1} = \frac{2C_1^{\,2}}{3C_1} + \frac{2C_1^{\,2}}{3C_1} = \frac{4}{3}C_1. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), найдем общую емкость батареи C:

$$C = \frac{\frac{4}{3}C_1 \cdot C_6}{\frac{4}{3}C_1 + C_6} = \frac{4C_1C_6}{3\,\frac{4C_1 + 3C_6}{3}} = \frac{4C_1C_6}{4C_1 + 3C_6}.$$

Теперь можно также учесть, что по условию задачи

$$C_6 = 4C_1:\ C = \frac{4C_1 \cdot 4C_1}{4C_1 + 12C_1} = \frac{16C_1{}^2}{16C_1} = C_1.$$

Подставив в формулу (1) вместо C емкость C_1, мы решим задачу в общем виде: $\boxed{q = C_1U}$

Переведем величину емкости C_1 в СИ: 1 пФ = 10^{-12} Ф.

Подставим числа и произведем вычисления:

$q = 10^{-12} \cdot 200$ Кл $= 2 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Ответ: $q = 2 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Задача 18

Дана схема (рис. 4-25, *а*). Емкость $C = 0{,}2$ нФ, напряжение $U = 200$ В. Найти заряды q_1, q_2, q_3 и q_4 на конденсаторах.

Дано:
$C = 0{,}2$ нФ
$U = 200$ В

q_1 – ?
q_2 – ?
q_3 – ?
q_4 – ?

Решение. Рассматривая схему на рис. 4-25, *а*, мы видим, что конденсаторы $2C$ и $3C$ соединены последовательно, а конденсатор $4C$ к ним подключен параллельно. Если обозначить их общую емкость $C_{2,3,4}$, то конденсатор C окажется соединенным с конденсатором $C_{2,3,4}$ последовательно. Таким образом, проблем с нахождением общей емкости всех четырех конденсаторов $C_{общ}$ нет. Когда мы найдем $C_{общ}$, то по формуле

$$q_1 = C_{общ}U \qquad (1)$$

сумеем найти заряд q_1 на конденсаторе C, а поскольку участок с емкостью $C_{2,3,4}$ подсоединен к конденсатору C последовательно, значит, такой же суммарный заряд q_1 будет и на конденсаторах $2C$, $3C$ и $4C$. Конденсаторы $2C$ и $3C$ соединены последовательно, значит, $q_2 = q_3$. Конденсатор C_4 к ним подсоединен параллельно, а при таком соединении общий заряд

$$q_1 = q_2 + q_4. \qquad (2)$$

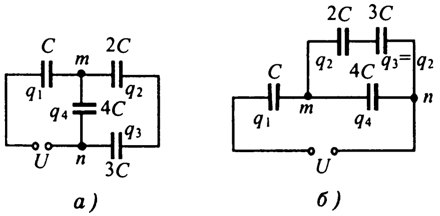


Рис. 4-25

Поскольку напряжение U_{mn} на конденсаторе такое же, как общее напряжение на конденсаторах $2C$ и $3C$, то

$U_{mn} = \dfrac{q_2}{C_{2,3}}$ и $U_{mn} = \dfrac{q_4}{4C}$, значит, $\dfrac{q_2}{C_{2,3}} = \dfrac{q_4}{4C}$, откуда

$$q_4 = q_2 \frac{4C}{C_{2,3}}. \tag{3}$$

Здесь $C_{2,3} = \dfrac{2C \cdot 3C}{2C + 3C} = \dfrac{6}{5}C$ (4) – общая емкость конденсаторов $2C$ и $3C$. С учетом этого запишем:

$$q_4 = q_2 \frac{4C}{\frac{6}{5}C} = \frac{10}{3} q_2. \tag{5}$$

Подставим (1) и (5) в (2) и найдем заряд q_2:

$$UC_{общ} = q_2 + \frac{10}{3} q_2, \quad UC_{общ} = \frac{13}{3} q_2,$$

откуда $q_2 = \dfrac{3}{13} UC_{общ}$. (6)

Теперь найдем сначала $C_{2,3,4}$, а затем $C_{общ}$ и подставим результат в (6): $C_{2,3,4} = 4C + C_{2,3} = 4C + \dfrac{6}{5}C = \dfrac{26}{5}C$.

С учетом этого

$$C_{общ} = \frac{C \cdot C_{2,3,4}}{C + C_{2,3,4}} = \frac{C \cdot \frac{26}{5}C}{C + \frac{26}{5}C} = \frac{26C^2}{5\frac{5C + 26C}{5}} = \frac{26}{31}C. \tag{7}$$

Нам осталось подставить (7) в (6), и заряд $q_2 = q_3$ будет найден:

$$q_2 = q_3 = \frac{3U \cdot 26C}{13 \cdot 31} \quad \boxed{q_2 = q_3 = \frac{6}{31}CU} \tag{8}$$

Заряд q_4 найдем, подставив в (3) (4) и (8):

$$q_4 = \frac{6}{31}CU \frac{4C \cdot 5}{6C}, \quad \boxed{q_4 = \frac{20}{31}CU} \tag{9}$$

Теперь подставим (8) и (9) в (2) и найдем заряд q_1:

$$q_1 = \frac{6}{31}CU + \frac{20}{31}CU, \quad \boxed{q_1 = \frac{26}{31}CU}$$

Переведем в СИ единицу емкости:

0,2 нФ = $0{,}2 \cdot 10^{-9}$ Ф = $2 \cdot 10^{-10}$ Ф.

Произведем вычисления:

$$q_1 = \frac{26}{31} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \cdot 200 \text{ Кл} = 3{,}4 \cdot 10^{-8} \text{Кл},$$

$$q_2 = q_3 = \frac{6}{31} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \cdot 200 \text{ Кл} = 7{,}7 \cdot 10^{-9} \text{Кл},$$

$$q_4 = \frac{20}{31} \cdot 2 \cdot 10^{-10} \cdot 200 \text{ Кл} = 2{,}6 \cdot 10^{-8} \text{Кл}.$$

Ответ: $q_1 = 3{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_2 = q_3 = 7{,}7 \cdot 10^{-9}$ Кл, $q_4 = 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Кл.

Задача 19

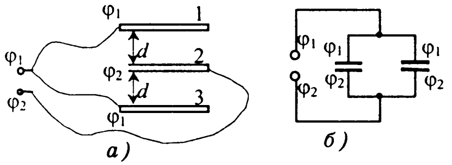


Рис. 4-26

Плоский воздушный конденсатор состоит из трех пластин, соединенных так, как показано на рис. 4-26, *а*. Площадь каждой пластины S = 80 см^2, расстояние между ними d = 4 мм. Найти емкость C этого конденсатора.

Дано:	
$\varepsilon = 1$	
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$	
S = 80 см^2	
d = 4 мм	
C – ?	

Решение. Надо помнить, что соединенные пластины имеют одинаковый потенциал. Значит, потенциал пластин 1 и 3 одинаков. Обозначим его φ_1, а потенциал пластины 2 обозначим φ_2. Пластину 2 можно представить как две пластины с потенциалом φ_2, расположенные так, что разность потенциалов между ними и пластинами 1 и 3 будет по $\varphi_1 - \varphi_2$, т. е. одинакова, как это следует из рис. 4-26, *а*. Но одинакова разность потенциалов у двух параллельных конденсаторов, поэтому схеме, изображенной на рис. 4-26, *а*, будет эквивалентна схема на рис. 4-26, *б*.

Дальше уже легко. Пусть емкость каждого конденсатора C_1, тогда их общая емкость

$$C = 2\ C_1, \text{ где } C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \text{ поэтому } \boxed{C = 2\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}}$$

Переведем все единицы в СИ:
$80\ см^2 = 80 \cdot 10^{-4}\ м^2 = 8 \cdot 10^{-3}\ м^2$,
$4\ мм = 4 \cdot 10^{-3}\ м$.
Произведем вычисления:

$$C_{общ} = 2\frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} Ф = 3{,}5 \cdot 10^{-11} Ф.$$

Ответ: $C_{общ} = 3{,}5 \cdot 10^{-11} Ф$.

Задача 20

Общая емкость двух последовательно соединенных конденсаторов $C_{общ1} = 3{,}2$ пФ, а общая емкость при их параллельном соединении $C_{общ2} = 20$ пФ. Найти емкости C_1 и C_2 каждого конденсатора.

Дано:
$C_{общ1} = 3{,}2$ пФ
$C_{общ2} = 20$ пФ
C_1 – ?
C_2 – ?

Решение. При последовательном соединении двух конденсаторов

$C_{общ1} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, а при параллельном

$C_{общ2} = C_1 + C_2$. (1)

С учетом этого $C_{общ1} = \dfrac{C_1 C_2}{C_{общ2}}$,

откуда $C_2 = \dfrac{C_{общ1} C_{общ2}}{C_1}$. (2)

Подставим (2) в (1) и решим полученное уравнение относительно C_1: $C_{общ2} = C_1 + \dfrac{C_{общ1} C_{общ2}}{C_1}$,

$$C_{общ2} C_1 = C_1^2 + C_{общ1} C_{общ2},\quad C_1^2 - C_{общ2} C_1 + C_{общ1} C_{общ2} = 0,$$

$$\boxed{C_{1,2} = \frac{C_{общ2}}{2} \pm \sqrt{\frac{C_{общ2}^2}{4} - C_{общ1} C_{общ2}}}$$

Произведем вычисления:

$$C_{1,2} = \left(\frac{20}{2} \pm \sqrt{\frac{400}{4} - 3{,}2 \cdot 20}\right) Ф = (10 \pm 6) Ф.$$

Выходит, что $C_{1,1} = 16$ пФ, а $C_{1,2} = 4$ пФ.
Ответ: $C_1 = 16$ пФ, $C_2 = 4$ пФ.

Задача 21

Два одинаковых воздушных конденсатора емкостью по $C_1 = 100$ пФ каждый соединены последовательно и под-

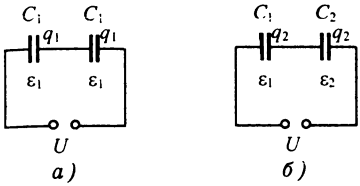


Рис. 4-27

ключены к источнику напряжения $U = 10$ В. Найти изменение заряда Δq на конденсаторах, если в один из них ввести диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 2$, не отключая конденсаторы от источника.

Дано:
$C = 100$ пФ
$\varepsilon_1 = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$U = 10$ В
$\varepsilon_2 = 2$

Δq – ?

Поскольку конденсаторы соединены последовательно, заряды на каждом из них в обоих случаях одинаковы. Обозначим заряд до введения в один из конденсаторов диэлектрика q_1 (рис. 4-27, *а*), а после введения q_2 (рис. 4-27, *б*).

Тогда изменение заряда

$$\Delta q = q_2 - q_1. \tag{1}$$

Заряд q_1 до введения диэлектрика найдем по формуле $q_1 = C_{общ1}U$, где

$$C_{общ1} = \frac{C}{2},\ \text{поэтому}\ q_1 = \frac{1}{2}C_1U. \tag{2}$$

После введения диэлектрика емкость одного конденсатора осталась C_1, а второго изменилась. Обозначим ее C_2. Теперь общая емкость конденсаторов

$$C_{общ2} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2},\ \text{где}\ C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}\ \text{и}\ C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}.$$

Емкость C_1 нам известна, а C_2 – нет. Но если мы разделим C_1 на C_2, то неизвестные S и d сократятся и из полученной пропорции мы найдем C_2, ведь диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 мы знаем. Приступим:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 Sd}{d\varepsilon_0\varepsilon_2 S},\ \frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},\ \text{откуда}\ C_2 = C_1\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

С учетом этого

$$C_{общ2} = \frac{C_1 \cdot C_1\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{C_1 + C_1\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{C_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 C_1\left(1 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)} = \frac{\varepsilon_2 C_1}{\varepsilon_1\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1}} =$$

$$= C_1\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Теперь несложно найти заряд q_2, ведь напряжение U на конденсаторах осталось прежним, поскольку их от источника напряжения не отключали:

$$q_2 = C_{общ2}\, U = C_1 U \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \qquad (3)$$

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1):

$$\Delta q = C_1 U \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{1}{2} C_1 U = C_1 U \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= C_1 U \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

$$\boxed{\Delta q = C_1 U \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}$$

Переведем в СИ единицу емкости: 100 пФ = $1 \cdot 10^{-10}$ Ф.

Произведем вычисления:

$$\Delta q = 1 \cdot 10^{-10} \cdot 10 \frac{2 - 1}{2(2 + 1)} \text{ Кл} = 1{,}7 \cdot 10^{-10} \text{ Кл}.$$

Ответ: $\Delta q = 1{,}7 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Задача 22

В некоторой цепи имеется участок, изображенный на рис. 4-28. Потенциалы точек A, B, D равны соответственно φ_A, φ_B и φ_D, а емкости конденсаторов C_1, C_2 и C_3.

Найти потенциал φ_0 точки 0.

Дано:
φ_A
φ_B
φ_D
C_1
C_2
C_3

φ_0 – ?

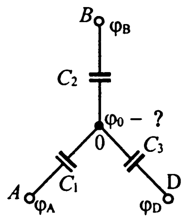


Рис. 4-28

Решение. Для решения этой задачи нужно знать следующее правило, являющееся следствием закона сохранения заряда: если обкладки нескольких конденсаторов соединены в одной точке, то алгебраическая сумма зарядов на этих обкладках равна нулю (напоминаем, что слова «алгебраическая сумма» означают, что при сложении зарядов нужно учитывать их знак. Если знак заряда на обкладке не указан и из условия задачи нельзя сделать вывод о знаке заряда, то его можно считать положительным, как в нашем случае).

Пусть заряд на обкладке конденсатора C_1, соединенной с точкой 0, равен q_1, заряд на обкладке конденсатора C_2, соединенной с той же точкой, равен q_2 и заряд на соответствующей обкладке конденсатора C_3 равен q_3. Тогда из сказанного выше следует равенство

$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$

Согласно определению емкости конденсатора

$$C_1 = \frac{q_1}{\varphi_0 - \varphi_A}, \quad C_2 = \frac{q_2}{\varphi_0 - \varphi_B}, \quad C_3 = \frac{q_3}{\varphi_0 - \varphi_D}, \text{ откуда}$$

$$q_1 = C_1(\varphi_0 - \varphi_A), \; q_2 = C_2(\varphi_0 - \varphi_B), \; q_3 = C_3(\varphi_0 - \varphi_D),$$

и тогда $C_1(\varphi_0 - \varphi_A) + C_2(\varphi_0 - \varphi_B) + C_3(\varphi_0 - \varphi_D) = 0.$

Отсюда, выполнив необходимые алгебраические преобразования, найдем искомый потенциал φ_0 точки 0:

$$C_1\varphi_0 - C_1\varphi_A + C_2\varphi_0 - C_2\varphi_B + C_3\varphi_0 - C_3\varphi_D = 0,$$

$$(C_1 + C_2 + C_3)\varphi_0 = C_1\varphi_A + C_2\varphi_B + C_3\varphi_D,$$

откуда $$\varphi_0 = \frac{C_1\varphi_A + C_2\varphi_B + C_3\varphi_D}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Задача решена.

Ответ: $\varphi_0 = \dfrac{C_1\varphi_A + C_2\varphi_B + C_3\varphi_D}{C_1 + C_2 + C_3}.$

Задача 23

Слюдяная пластинка заполняет все пространство между обкладками плоского конденсатора емкостью $C_1 = 10$ мкФ. Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon_1 = 6$, заряд конденсатора $q = 100$ мкКл. Какую работу A надо совершить, чтобы вынуть пластинку из конденсатора?

Дано:
$C_1 = 10$ мкФ
$\varepsilon_1 = 6$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$q = 100$ мкКл
$\varepsilon_2 = 1$

A – ?

Здесь ε_2 – диэлектрическая проницаемость воздуха.

Решение. Работа A равна изменению потенциальной энергии конденсатора $\Delta W_п$, взятому со знаком «минус»: $A = -\Delta W_п = -(W_{п2} - W_{п1})$, (1)

где $W_{п1} = \dfrac{q^2}{2C_1}$ (2) – потенциальная энергия конденсатора с пластинкой,

$W_{п2} = \dfrac{q^2}{2C_2}$ (3) – его энергия без нее.

Емкость конденсатора без пластинки нам не дана, и найти ее мы сразу не можем, поскольку не знаем ни площади обкладок S, ни расстояния между ними d. Но если мы запишем формулу емкости конденсатора $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}$ с пластинкой и формулу емкости $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}$ без нее, а затем разделим их друг на друга, то все неизвестные сократятся и из полученной пропорции мы найдем C_2, выразив ее через C_1, ε_1 и ε_2:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 Sd}{d\varepsilon_0\varepsilon_2 S}, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \text{ откуда } C_2 = C_1\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3): $W_{п2} = \dfrac{q^2\varepsilon_1}{2\varepsilon_2 C_1}$. (5)

Нам осталось подставить (2) и (5) в (1), и задача будет решена: $A = -\left(\dfrac{q^2\varepsilon_1}{2\varepsilon_2 C_1} - \dfrac{q^2}{2C_1}\right)$, $A = -\dfrac{q^2}{2C_1}\left(\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right)$.

Переведем все единицы в СИ:

10 мкФ = $10 \cdot 10^{-6}$ Ф = $1 \cdot 10^{-5}$ Ф,

100 мкКл = $100 \cdot 10^{-6}$ Кл = $1 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Произведем вычисления:

$$A = -\frac{1 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-5}}\left(\frac{6}{1} - 1\right) \text{ Дж} = -2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = -2{,}5 \text{ мДж}.$$

Знак «минус» означает, что энергия поля конденсатора уменьшилась.

Ответ: $A = -2{,}5$ мДж.

Задача 24

Найти мощность P фотовспышки при разряде конденсатора емкостью 0,6 мФ, заряженного до напряжения $U = 220$ В, если разряд конденсатора происходит в течение $t = 2{,}5$ мс.

Дано:
$C = 0{,}6$ мФ
$U = 220$ В
$t = 2{,}5$ мс

P – ?

Решение. При разряде конденсатора выделяется энергия $W = \dfrac{CU^2}{2}$. (1)

Мощность разряда P равна энергии, выделяемой в единицу времени: $P = \dfrac{W}{t}$. (2)

Подставив (1) в (2), мы ответим на вопрос задачи:

$$\boxed{P = \frac{CU^2}{2t}}$$

Переведем все единицы в СИ:
0,6 мФ = $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Ф = $6 \cdot 10^{-4}$ Ф, 2,5 мс = $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ с.
Произведем вычисления:

$$P = \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot 220^2}{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}} \text{ Вт} = 5{,}8 \cdot 10^3 \text{ Вт} = 5{,}8 \text{ кВт}.$$

Ответ: P = 5,8 кВт.

Задача 25

Плоский воздушный конденсатор состоит из двух круглых пластинок радиусом R = 1 см. Расстояние между ними d = 0,5 см. Напряженность электрического поля между пластинами E = 4 кВ/см. Найти энергию W и объемную плотность энергии w поля конденсатора.

Дано:
$\varepsilon = 1$
R = 1 см
d = 0,5 см
$E = 4\ \dfrac{\text{кВ}}{\text{см}}$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$

W – ?
w – ?

Решение. Энергию электрического поля можно определить по формуле $W = \dfrac{CU^2}{2}$, (1)

где емкость плоского конденсатора $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ и площадь обкладок $S = \pi R^2$, поэтому $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi R^2}{d}$. (2)

Напряженность однородного поля плоского конденсатора связана с напряжением между его обкладками формулой

$$E = \frac{U}{d}, \text{ откуда } U = Ed. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы ответим на один вопрос задачи: $W = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi R^2 \cdot E^2 d^2}{2d}$, $\boxed{W = 0{,}5\pi\varepsilon_0 \varepsilon d (ER)^2}$

Согласно определению $w = \dfrac{W}{V}$, где объем пространства между обкладками $V = dS$, поэтому $w = \dfrac{W}{dS}$ или $\boxed{w = \dfrac{W}{\pi d R^2}}$

Примечание: эту задачу можно решить короче, если воспользоваться формулой объемной плотности энергии электрического поля $w = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$.

Но некоторые недоверчивые экзаменаторы могут потребовать ее доказать.

Переведем все в единицы СИ: 1 см = 0,01 м,

$0{,}5$ см $= 5 \cdot 10^{-3}$ м, $4\dfrac{\text{кВ}}{\text{см}} = 4\dfrac{10^3}{10^{-2}}\dfrac{\text{В}}{\text{м}} = 4 \cdot 10^5\ \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Произведем вычисления:

$W = 0{,}5 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-3}(4 \cdot 10^5 \cdot 0{,}01)^2$ Дж $=$
$= 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Дж $= 1{,}1$ мкДж,

$$w = \frac{1{,}1 \cdot 10^{-6}}{3{,}14 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4}}\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = 0{,}7\,\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $W = 1{,}1$ мкДж, $w = 0{,}7$ Дж/м^3.

Задача 26

Расстояние между обкладками плоского конденсатора уменьшили в 3 раза, предварительно отключив его от источника напряжения. Во сколько раз изменились при этом энергия поля конденсатора и объемная плотность энергии? Во сколько раз изменятся эти величины, если конденсатор при сближении обкладок не отключать от источника напряжения?

Дано:

$d_2 = \dfrac{d_1}{3}$

$\dfrac{W_2}{W_1}$ – ?

Решение. а) Источник отключили.

Поскольку конденсатор сначала зарядили, сообщив ему энергию W_1, а затем отключили от источника напряжения, значит, заряд q на его обкладках при уменьшении расстояния между ними от d_1 до d_2 оставался неизменным, а менялись емкость и напряжение. Поэтому воспользуемся формулой, определяющей энергию поля конденсатора через его емкость и заряд на обкладках, записав ее применительно к первому и второму состояниям:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1} \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2}, \text{ где } C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2},$$

поэтому $W_1 = \dfrac{q^2 d_1}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$ (1) и $W_2 = \dfrac{q^2 d_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}$. (2)

Разделив (2) на (1), мы ответим на один вопрос задачи:

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{q^2 d_2 \cdot 2\varepsilon_0 \varepsilon S}{2\varepsilon_0 \varepsilon S \cdot q^2 d_1}, \quad \boxed{\frac{W_2}{W_1} = \frac{d_2}{d_1}} \quad (3) \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{W_1}{W_2} = \frac{d_1}{d_2} = 3}$$

Поскольку $w_1 = \dfrac{W_1}{V_1}$ и $w_2 = \dfrac{W_2}{V_2}$, где $V_1 = d_1S$ и $V_2 = d_2S$, то $w_1 = \dfrac{W_1}{d_1S}$ и $w_2 = \dfrac{W_2}{d_2S}$,

поэтому $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{W_2 \cdot d_1S}{d_2S \cdot W_1} = \dfrac{W_2d_1}{d_2W_1}$ (4) или с учетом (3)

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{d_2d_1}{d_1d_2} = 1\text{, т. е. } \boxed{w_1 = w_2}$$

Таким образом, мы получили, что если источник отключить, энергия электрического поля при этом уменьшится в 3 раза, а объемная плотность энергии не изменится.

б) Источник не отключали.

В этом случае напряжение на конденсаторе при сближении его обкладок остается неизменным и равным напряжению на полюсах источника, а меняются емкость конденсатора и заряд на его обкладках. Теперь удобнее воспользоваться формулой, определяющей энергию поля конденсатора через его емкость и напряжение, записав ее применительно к первому и второму состояниям:

$$W_1 = \frac{C_1U^2}{2} \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{C_2U^2}{2}.$$

Тогда $\dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{C_2U^2 \cdot 2}{2 \cdot C_1U^2} = \dfrac{C_2}{C_1}$, где по-прежнему

$C_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_1}$, $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_2}$, поэтому $\dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon Sd_1}{d_2\varepsilon_0\varepsilon S}$,

$$\boxed{\frac{W_2}{W_1} = \frac{d_1}{d_2} = 3} \tag{5}$$

Поскольку, согласно (4) $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{W_2d_1}{d_2W_1}$, то с учетом (5)

получим $\dfrac{w_2}{w_1} = \dfrac{d_1d_1}{d_2d_2}$, $\boxed{\dfrac{w_2}{w_1} = \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 = 9}$

Ответ: а) энергия уменьшится в 3 раза; объемная плотность энергии не изменится;

б) энергия увеличится в три раза, а объемная плотность энергии увеличится в 9 раз.

Задача 27

При увеличении напряжения на конденсаторе в 3 раза энергия поля между его обкладками увеличилась на $\Delta W =$ $= 200$ мДж. Найти начальную энергию конденсатора W_1.

Дано:
$\frac{U_2}{U_1} = 3$
$\Delta W = 200$ мДж

W_1 – ?

Решение. Судя по условию, емкость конденсатора не изменилась, значит, изменились заряд и напряжение. Поскольку речь идет о напряжении и емкости, запишем формулу, определяющую энергию поля конденсатора через эти величины, применительно к первому и второму случаям:

$$W_1 = \frac{CU_1^2}{2} \quad (1) \qquad W_2 = \frac{CU_2^2}{2}.$$

Изменение энергии

$\Delta W = \frac{CU_2^2}{2} - \frac{CU_1^2}{2} = 0{,}5C\left(U_2^2 - U_1^2\right)$, где согласно условию $U_2 = 3\ U_1$, поэтому

$$\Delta W = 0{,}5C\left(9U_1^2 - U_1^2\right) = 0{,}5C \cdot 8U_1^2 = 4CU_1^2. \qquad (2)$$

Из (2) мы можем найти начальное напряжение U_1 и, подставив его в (1), найти W_1: $U_1 = \sqrt{\frac{\Delta W}{4C}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta W}{C}}$. (3)

Теперь подставим (3) в (1), и задача будет решена:

$$W_1 = \frac{C}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta W}{C}}\right)^2 = \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta W}{C}, \quad W_1 = \frac{\Delta W}{8}.$$

Произведем вычисления: $W_1 = \frac{200}{8}$ мДж $= 25$ мДж.

Ответ: $W_1 = 25$ мДж.

Задача 28

Найти количество теплоты Q, выделившееся при соединении одноименно заряженных обкладок конденсаторов с емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 0{,}5$ мкФ. Напряжения на конденсаторах до соединения были соответственно $U_1 =$ $= 100$ В и $U_2 = 50$ В.

Дано:
$C_1 = 2$ мкФ
$C_2 = 0{,}5$ мкФ
$U_1 = 100$ В
$U_2 = 50$ В

Q – ?

Решение. При решении этой задачи без закона сохранения энергии не обойтись. Требуемое количество теплоты Q по этому закону равно разности общей энергии конденсаторов после соединения их обкладок и их суммарной энергии до соединения: $Q = W_{общ} - (W_1 + W_2)$. (1)

Энергию конденсаторов W_1 и W_2 до и $W_{общ}$ после их соединения определим по формулам

$$W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2} \quad (2), \qquad W_2 = \frac{C_2U_2^2}{2}. \quad (3)$$

Кроме того, $W_{общ} = \dfrac{q_{общ}^2}{2C_{общ}}$. (4)

Для определения $q_{общ}$ и $U_{общ}$ нужно установить, как соединены конденсаторы: последовательно или параллельно. Для этого нужно помнить, что при последовательном соединении конденсаторов соединяют их разноименно заряженные обкладки, а при параллельном – одноименно. У нас в условии задачи сказано, что соединяют одноименно заряженные обкладки, т. е. тем самым нам дают понять, что конденсаторы соединяют параллельно. Значит, их общая емкость $C_{общ}$ равна сумме емкостей C_1 и C_2 отдельных конденсаторов: $C_{общ} = C_1 + C_2$.

Общий заряд на конденсаторах $q_{общ}$ после их соединения равен сумме зарядов на каждом конденсаторе в отдельности до их соединения: $q_{общ} = q_1 + q_2$. (5)

Здесь $q_1 = C_1U_1$ и $q_2 = C_2U_2$ – заряды конденсаторов до их соединения.

Тогда $q_{общ} = C_1U_1 + C_2U_2$. (6)

Подставив (5) и (6) в (4), найдем

$$W_{общ} = \frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}. \quad (7)$$

Теперь, подставив (2), (3) и (7) в формулу закона сохранения энергии (1) и выполнив несложные преобразования, мы найдем искомое количество теплоты Q в общем виде:

$$\boxed{Q = -\frac{C_1C_2(U_2 - U_1)^2}{2(C_1 + C_2)}}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 2 мкФ = $2 \cdot 10^{-6}$ Ф, 0,5 мкФ = $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Знак «минус» свидетельствует об уменьшении энергии конденсаторов после их соединения.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$Q = -\frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}(100 - 50)^2}{2(2 \cdot 10^{-6} + 0{,}5 \cdot 10^{-6})} \text{ Дж} = -5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = -5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 29

Воздушный конденсатор емкостью C = 3 нФ заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi$ = 100 В. Площадь обкладки

$S = 10$ см². С какой силой F одна обкладка притягивается к другой?

Дано:
$\varepsilon = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$C = 3$ нФ
$\Delta\varphi = 100$ В
$S = 10$ см²

$F - ?$

Решение. Силу F, с которой одна из обкладок притягивается к другой, найдем, умножив заряд q на одной обкладке на напряженность поля E_1, созданного другой обкладкой: $F = qE_1$, где $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$. Здесь $\sigma = \frac{q}{S}$ – поверхностная плотность заряда на обкладке. С учетом этого запишем:

$$E_1 = \frac{q}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \qquad F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \tag{1}$$

Нам осталось определить заряд q из формулы емкости конденсатора $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ (2) и подставить полученное выражение в (1). Из (2) имеем $q = C\Delta\varphi$. С учетом этого

$$\boxed{F = \frac{(C\Delta\varphi)^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}}$$

Переведем все единицы в СИ: 3 нФ = $3 \cdot 10^{-9}$ Ф, 10 см² = $1 \cdot 10^{-3}$ м².
Произведем вычисления:

$$F = \frac{\left(3 \cdot 10^{-9} \cdot 100\right)^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3}}\ \text{Н} = 5{,}1\ \text{Н}.$$

Ответ: $F = 5{,}1$ Н.

Задача 30

Один заряженный проводник обладает энергией W_1, а второй – W_2. Какое количество теплоты Q выделится, если их соединить проводником, емкостью которого можно пренебречь? Емкости проводников одинаковы.

Дано:
W_1
W_2

$Q - ?$

Решение. По закону сохранения энергии

$$W_1 + W_2 = Q + W_{общ}, \tag{1}$$

где $W_{общ}$ – общая энергия этих проводников после соединения. Из (1) $Q = W_1 + W_2 - W_{общ}$, (2) где $W_1 = \frac{q_1^2}{2C}$, (3) $W_2 = \frac{q_2^2}{2C}$ (4) и $W_{общ} = \frac{(q_1 + q_2)\varphi}{2}$. (5)

Здесь q_1 и q_2 – заряды на проводниках до соединения (их сумма осталась после соединения прежней), φ – потенциал проводников после соединения, C – емкость каждого проводника.

Из (3) и (4) $q_1 = \sqrt{2CW_1}$ (6) и $q_2 = \sqrt{2CW_2}$. (7)

Кроме того, поскольку после соединения заряд каждого проводника стал $\frac{q_1 + q_2}{2}$, то $\varphi = \frac{q_1 + q_2}{2C}$. (8)

Подставим (8) в (5):

$$W_{общ} = \frac{(q_1 + q_2)(q_1 + q_2)}{2 \cdot 2C} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{4C}. \quad (9)$$

Теперь подставим (6) и (7) в (9):

$$W_{общ} = \frac{\left(\sqrt{2CW_1} + \sqrt{2CW_2}\right)^2}{4C} = \frac{\left(\sqrt{2C}\right)^2\left(\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2}\right)^2}{4C} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2}\right)}{2}. \quad (10)$$

Нам осталось подставить (10) в (2), и задача будет решена:

$$Q = W_1 + W_2 - \frac{\left(\sqrt{W_1} + \sqrt{W_2}\right)^2}{2} = W_1 + W_2 - 0{,}5W_1 -$$

$$- \sqrt{W_1 W_2} - 0{,}5W_2 = 0{,}5W_1 - \sqrt{W_1 W_2} + 0{,}5W_2 \quad \text{или}$$

$$\boxed{Q = 0{,}5\left(\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2}\right)^2}$$

Задача решена.

Ответ: $Q = 0{,}5\left(\sqrt{W_1} - \sqrt{W_2}\right)^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Поверхностная плотность зарядов на шаре $\sigma = 2$ нКл/см², его потенциал $\varphi = 100$ В. Найти емкость шара C. Среда – воздух.

Ответ: $C = 4\pi(\varepsilon_0\varepsilon)^2 \frac{\varphi}{\sigma} = 4{,}9 \cdot 10^{-15}$ Ф.

Задача 2. Емкость медного шара на 20% больше емкости алюминиевого. Как соотносятся массы этих шаров? Плотность меди $\rho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность алюминия $\rho_2 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $\frac{m_1}{m_2} = 2\frac{\rho_1}{\rho_2} = 6{,}6$.

Задача 3. N одинаковых шарообразных капелек ртути радиусами r сливаются в одну большую каплю. Найти емкость C большой капли.

Ответ: $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r\sqrt[3]{N}$.

Задача 4. Шар диаметром $D = 2$ см заряжен до потенциала $\varphi = 3 \cdot 10^4$ В. Найти энергию W заряженного шара. Среда – воздух.

Ответ: $W = \pi\varepsilon_0 D\varphi^2 = 5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 5. Два металлических шарика радиусами $R_1 = 3$ см и $R_2 = 2$ см заряжены. Заряд первого шарика $q_1 = 10^{-8}$ Кл. Потенциал второго шарика $\varphi_2 = 9 \cdot 10^3$ В. Найти общую электрическую энергию системы шаров W. Среда – воздух.

Ответ: $W = \frac{q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1} + 2\pi\varepsilon_0 R_2\varphi_2^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 6. Два близко расположенных шара радиусами R_1 и R_2 заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2. Найти емкость C системы этих шаров.

Ответ: $C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2)^2}{R_1\varphi_1^2 + R_2\varphi_2^2}$.

Задача 7. Во сколько раз изменится емкость плоского воздушного конденсатора, если расстояние между его обкладками уменьшить на 30% и поместить туда диэлектрик из слюды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$?

Ответ: увеличится в 8,6 раза.

Задача 8. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено стеклом. Расстояние между ними $d = 4$ мм. На обкладки подано напряжение $U = 1200$ В. Найти поверхностную плотность свободных зарядов σ на обкладках конденсатора. Относительная диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

Ответ: $\sigma = \frac{\varepsilon_0\varepsilon U}{d} = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$ Кл/м².

Задача 9. Площадь одной пластины плоского конденсатора $S = 400$ см², а площадь второй меньше на 10%. Диэлектрик между пластинами имеет диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 6$, расстояние между ними $d = 0{,}5$ мм. Найти емкость этого конденсатора.

Указание: следует учитывать только перекрываемую (общую) площадь обкладок.

Ответ: $C = 0{,}9\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d} = 3{,}8 \cdot 10^{-9}$ Ф.

Задача 10. Емкость одного конденсатора больше емкости второго на 20%. Как соотносятся напряжения на конденсаторах, если их заряды одинаковы?

Ответ: $\frac{U_1}{U_2} = 1{,}2$.

Задача 11. На конденсаторе написано: 200 пФ, 250 В. Не будет ли пробит этот конденсатор, если ему сообщить заряд q = 0,3 нКл?

Ответ: $q_{max} = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл больше q; не будет.

Задача 12. При введении в воздушный конденсатор диэлектрика напряжение на нем уменьшилось с U = 240 В на ΔU = 160 В, а заряд остался прежним. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика ε.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{U}{U - \Delta U} = 3$.

Задача 13. Плоский конденсатор состоит из двух обкладок площадью S = 40 см^2 каждая. Между ними находится слой стекла с диэлектрической проницаемостью ε = 7. Какой максимальный заряд q может быть накоплен на обкладках этого конденсатора, если при напряженности поля между обкладками E = 8 МВ/м происходит пробой?

Ответ: $q = \varepsilon_0 \varepsilon S E = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Задача 14. Расстояние между обкладками воздушного конденсатора уменьшили в 2 раза и поместили туда диэлектрик из парафина с проницаемостью ε = 2. Конденсатор оставался подключенным к источнику напряжения. Во сколько раз изменился заряд конденсатора?

Ответ: $\dfrac{q_2}{q_1} = 2\varepsilon = 4$.

Задача 15. Плоский конденсатор состоит из двух круглых обкладок радиусом R = 3 см, между которыми находится слой стекла с диэлектрической проницаемостью ε = 7. Найти поверхностную плотность зарядов на обкладках этого конденсатора, если расстояние между ними d = 1 мм. Чему равно напряжение U на обкладках, если одна из них содержит $N = 1 \cdot 10^{10}$ избыточных электронов, а второй столько же недостает?

Ответ: $\sigma = \dfrac{eN}{\pi R^2} = 5{,}7 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2, $\quad U = \dfrac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon} = 9{,}2$ В.

Задача 16. На одной обкладке плоского конденсатора содержится N избыточных электронов, а на второй электронов на ΔN меньше по сравнению с числом элементарных положительных зарядов. Найти напряжение на обкладках U этого конденсатора, если расстояние между обкладками равно d, а площадь обкладок S.

Ответ: $U = \dfrac{ed(N - \Delta N)}{\varepsilon_0 \varepsilon S}$.

Задача 17. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого d_1 = 2 см, заряжен до разности потенциалов U_1 = 3000 В. Какова будет напряженность поля E_2 конденсатора, если, не отключая источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния d_2 = 5 см? Вычислить энергию конденсатора W_1 и W_2 до и после раздвижения пластин. Площадь пластин S = 100 см^2.

Ответ: $E_2 = \dfrac{U_1}{d_2} = 6 \cdot 10^4$ В/м, $\quad W_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_1^2}{2d_1} = 8 \cdot 10^{-6}$ Дж,

$$W_2 = W_1 \frac{d_1}{d_2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Задача 18. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов U_1 = 300 В. После отключения от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в пять раз ($d_2 = 5d_1$). Определить разность потенциалов U_2 на обкладках конденсатора после их раздвижения.

Ответ: $U_2 = U_1 \dfrac{d_2}{d_1} = 5U_1 = 1{,}5 \cdot 10^3$ В.

Задача 19. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов U = 100 В. Не отключая его от источника напряжения, в пространство между обкладками вводят два диэлектрика так, что каждый из них занимает половину пространства между обкладками (рис. 4-29). Диэлектрическая проницаемость левого диэлектрика ε_1 = 2 (парафин), правого – ε_2 = 6 (стекло). Расстояние между обкладками d = 4 мм. Найти заряд на обкладках q_2 после введения диэлектриков. Площадь обкладок S = 100 см².

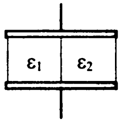


Рис. 4-29

Ответ: $q_2 = \dfrac{\varepsilon_0 SU}{2d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 9$ нКл.

Задача 20. Между обкладками плоского конденсатора расположены в два слоя диэлектрики одинаковой толщины с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 = 5 и ε_2 = 6 (рис. 4-30). Отключив конденсатор от источника тока, диэлектрик с проницаемостью ε_1 = 5 вынимают. Во сколько раз изменится при этом напряжение на обкладках конденсатора? Диэлектрическая проницаемость воздуха ε_3 = 1.

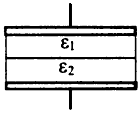


Рис. 4-30

Ответ: $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = 3{,}2.$

Задача 21. К воздушному конденсатору с площадью обкладок S = 10 см² и расстоянием между обкладками d = 1 мм подключают параллельно второй конденсатор емкостью C_2 = 2 пФ, не отключая первый конденсатор от источника напряжения U_1 = 200 В. Чему будет равен заряд q полученной батареи конденсаторов?

Ответ: $q = \left(\dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} + C_2\right)U_1 = 2{,}2 \cdot 10^{-9}$ Кл.

Задача 22. Между обкладками плоского конденсатора зажата стеклянная пластинка. Площадь обкладок конденсатора S = 100 см². Обкладки притягиваются друг к другу с силой $F = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ Н. Найти поверхностную плотность свободных зарядов σ на обкладках. Относительная диэлектрическая проницаемость стекла ε = 6.

Ответ: $\sigma = \sqrt{\dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon F}{S}} = 7 \cdot 10^{-6}$ Кл/м².

Задача 23. В плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d введена параллельно обкладкам тонкая проводящая пластинка, площадь которой равна площади обкладок конденсатора. Найти емкость полученной системы.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$.

Задача 24. Два одинаковых воздушных конденсатора ($\varepsilon_1 = 1$) емкостью $C = 100$ пФ каждый соединены последовательно и подключены к источнику тока с напряжением $U_0 = 10$ В. Насколько изменится заряд на конденсаторах, если один из них погрузить в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 2$, не отключая от источника напряжения?

Ответ: $\Delta q = \dfrac{CU_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = 5 \cdot 10^{-10}$ Кл.

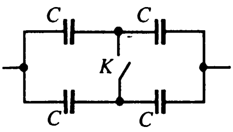


Рис. 4-31

Задача 25. Во сколько раз изменится общая емкость системы четырех конденсаторов с одинаковой емкостью каждого, если ключ K замкнуть (рис. 4-31)?

Ответ: $\dfrac{C_2}{C_1} = 1$, не изменится.

Задача 26. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков: фарфором и парафином. Разность потенциалов между обкладками $U = 2$ кВ. Определить напряженности E_1 и E_2 и падения потенциала U_1 и U_2 в каждом из слоев в случаях, указанных на рис. 4-29 и 4-30. Относительная диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon_1 = 6$, относительная диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon_2 = 2$. Расстояние между обкладками $d = 1$ см.

Ответ: 1) рис. 4–29:

$U = U_1 = U_2 = 2 \cdot 10^3$ В, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ В/м;

2) рис. 4–30: $U_2 = \dfrac{U}{1 + \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = 1{,}5 \cdot 10^3$ В, $U_1 = U - U_2 = 500$ В,

$E_1 = \dfrac{2U_1}{d} = 1 \cdot 10^5$ В/м, $E_2 = \dfrac{2U_2}{d} = 3 \cdot 10^5$ В/м.

Задача 27. Два проводника с емкостями C_1 и C_2 заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно. Чему будет равен потенциал φ этих проводников, если их привести в соприкосновение?

Ответ: $\varphi = \dfrac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}$.

Задача 28. Конденсатор состоит из $N = 21$ металлических обкладок, проложенных стеклянными прокладками толщиной $d = 2$ мм. Площадь каждой из обкладок и прокладок $S = 200$ см^2. Относительная диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$. Найти емкость конденсатора, если его выводы подсоединены к крайним обкладкам.

Ответ: $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(N-1)} = 3{,}1 \cdot 10^{-11}$ Ф.

Задача 29. Емкость одного из последовательно соединенных конденсаторов $C_1 = 5$ пФ, а их общая емкость $C_{общ} = 1$ пФ. Найти емкость C_2 второго конденсатора.

Ответ: $C_2 = \dfrac{C_1 C_{общ}}{C_1 - C_{общ}} = 1{,}25$ пФ.

Задача 30. Два плоских конденсатора с емкостями C_1 и C_2 каждый соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U_1. Каким будет напряжение U_2 на этих конденсаторах, если их отключить от источника и соединить параллельно?

Ответ: $U_2 = \dfrac{C_1 C_2 U_1}{(C_1 + C_2)^2}$.

Задача 31. К пластинам плоского конденсатора площадью $S = 200$ см^2 и с расстоянием между ними $d = 1$ мм приложено напряжение $U = 300$ В. Найти силу притяжения F пластин друг к другу. Диэлектрик – воздух.

Ответ: $F = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2} \left(\dfrac{U}{d} \right)^2 = 8 \cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 32. Напряжение $U_1 = 100$ В на обкладках плоского конденсатора уменьшили на 30%, а расстояние между ними $d_1 = 1$ мм уменьшили в 1,5 раза. Площадь обкладок $S = 1$ см^2 не изменяли. Найти изменение заряда конденсатора Δq. Диэлектрик – воздух.

Ответ: $\Delta q = 0{,}05 \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S U_1}{d_1} = 4{,}4 \cdot 10^{-12}$ Кл.

Задача 33. Поверхностная плотность зарядов на обкладках плоского воздушного конденсатора $\sigma = 2$ мкКл/м^2, площадь обкладки $S = 100$ см^2, емкость конденсатора $C = 10$ мкФ. Найти изменение скорости электрона Δv, движущегося по силовой линии поля конденсатора к положительной обкладке, за время $t = 0{,}01$ мкс. Расстояние между обкладками $d = 1$ мм.

Ответ: $\Delta v = \dfrac{e \sigma S t}{m_e d C} = 3{,}5 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 34. Какой путь S за время t пролетит электрон, двигаясь без начальной скорости по силовой линии к положительной обкладке конденсатора емкостью C? Расстояние между обкладками конденсатора d, заряд на обкладках q.

Ответ: $S = \dfrac{e q t^2}{2 C m_e d}$.

Задача 35. Треть объема пространства между обкладками плоского конденсатора занимает винипласт, а 2/3 – слюда (рис. 4-32). Найти заряд конденсатора q, если он подключен к источнику напряжения $U = 100$ В. Площадь обкладок конденсатора $S = 1$ см^2,

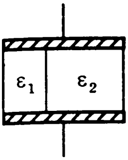


Рис. 4-32

расстояние между ними d = 2 мм. Диэлектрическая проницаемость винипласта ε_1 = 3,5, слюды – ε_2 = 6.

Ответ: $q = \dfrac{\varepsilon_0 US}{3d}\left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\right) = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ Кл.

Задача 36. Заряд конденсатора q = 2 нКл, площадь обкладок S = 2 см². Между обкладками помещены в три слоя винипласт с ε_1 = 3,5, парафин с ε_2 = = 2 и слюда с ε_3 = 6 (рис. 4-33). Толщина каждого слоя d = 0,5 мм. Найти падение напряжения на каждом слое.

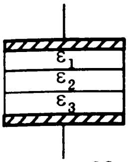


Рис. 4-33

Ответ: $U = \dfrac{qd\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1\right)}{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 S} = 518$ В.

Задача 37. Найти емкость $C_{общ}$ батареи конденсаторов, изображенных на рис. 4-34.

Ответ: а) $C_{общ} = \dfrac{2C_1C_2C_3}{C_1C_2 + 2C_3\left(C_1 + C_2\right)}$;

б) $C_{общ} = \dfrac{3C_1C_2}{C_1 + C_2}$; *в)* $C_{общ} = 0{,}4C$;

г) $C_{общ} = \dfrac{4}{3}C$; *д)* $C_{общ} = 2C$; *е)* $C_{общ} = \dfrac{C}{3}$;

ж) $C_{общ} = \dfrac{C}{3}$.

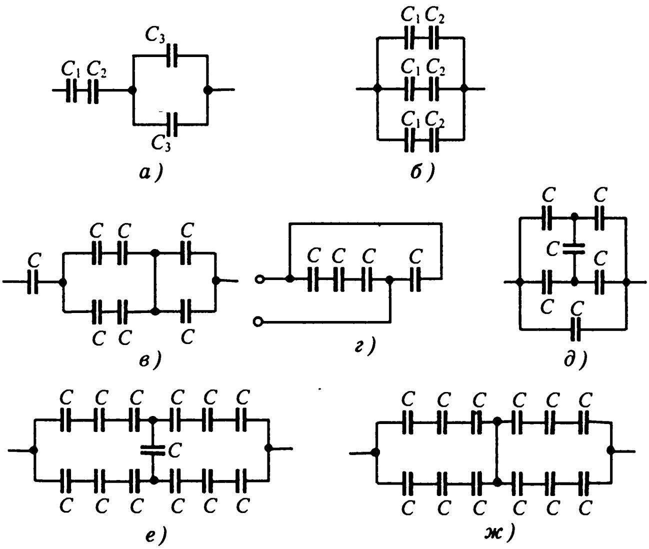


Рис. 4-34

Задача 38. Между обкладками плоского конденсатора находится парафиновая пластинка с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$. Емкость конденсатора $C = 4$ мкФ, его заряд $q = 0{,}2$ мКл. Какую работу A нужно совершить, чтобы вытащить пластинку из конденсатора?

Ответ: $A = -\dfrac{q^2(\varepsilon - 1)}{2C} = 5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 39. С какой силой F взаимодействуют обкладки плоского конденсатора площадью $S = 0{,}01$ м^2, если разность потенциалов между ними $U = 500$ В, а расстояние $d = 3$ мм? Конденсатор воздушный ($\varepsilon = 1$).

Ответ: $F = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2}\left(\dfrac{U}{d}\right)^2 = 1{,}23 \cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 40. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 20$ нФ заряжен до разности потенциалов $U = 100$ В.

1) Какую работу A надо совершить, чтобы увеличить расстояние между его обкладками вдвое, не отключая конденсатор от источника?

2) Какую работу A нужно совершить, если отключить его от источника, а затем увеличить расстояние вдвое?

Ответ: 1) $A = \dfrac{CU^2}{4} = 5 \cdot 10^{-5}$ Дж; 2) $A = \dfrac{CU^2}{2} = 1 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 41. При зарядке батареи, состоящей из $N = 20$ параллельно соединенных конденсаторов с емкостью каждого $C = 4$ мкФ, выделилось $Q = 10$ Дж теплоты. До какой разности потенциалов U были заряжены конденсаторы?

Ответ: $U = \sqrt{\dfrac{2Q}{NC}} = 500$ В.

Задача 42. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. Какая разность потенциалов U была приложена к его пластинам, если известно, что при разрядке конденсатора выделилось $Q = 4 \cdot 10^{-3}$ Дж тепловой энергии?

Ответ: $U = \sqrt{\dfrac{2dQ}{\varepsilon_0 \varepsilon S}} = 2{,}1 \cdot 10^4$ В.

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

5. ЗАКОН ОМА ДЛЯ УЧАСТКА ЦЕПИ. СОЕДИНЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ

Электрический ток – это упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

В задачах на законы постоянного тока обычно идет речь о движении электрических зарядов по линейному металлическому проводнику, когда за одинаковое время t через его поперечное сечение проходит одинаковый заряд q. При этом сила тока в проводнике определяется формулой $I = \frac{q}{t}$.

Если в условии задачи идет речь о количестве свободных электронов N, переносимых через поперечное сечение проводника, то может пригодиться формула $q = Ne$, где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – модуль заряда электрона, или формула $I = nevS$.

Здесь n – концентрация свободных электронов, v – скорость упорядоченного движения и S – площадь поперечного сечения проводника.

Если в условии задачи упоминается плотность тока j или концентрация свободных электронов n в проводнике, то могут понадобиться формулы $j = \frac{I}{S}$ или $j = nev$, где $v = \frac{l}{t}$.

Здесь l – длина проводника.

Если даны радиус R или диаметр D поперечного сечения проводника, то площадь поперечного сечения S надо будет выражать через R или D по формулам $S = \pi R^2$ или $S = \frac{\pi D^2}{4}$.

Только не перепутайте радиус R с сопротивлением проводника, особенно при решении задач, где используются обе эти величины. В таком случае ставьте индексы, например, обозначайте радиус $R_р$ или R_1, а сопротивление – $R_с$ или R_2.

Если в условии задачи что-нибудь сказано о массе m или весе P проводника, то может понадобиться массу определить через плотность вещества ρ и объем проводника $V = lS$, а длину проводника l «связать» с его сопротивлением R, используя формулу $R = \rho \frac{l}{S}$.

Здесь ρ – не плотность, а удельное сопротивление. Поскольку плотность вещества тоже обычно обозначают буквой ρ, то опять же вводите индексы. Например, обозначьте удельное сопротивление $\rho_с$, а плотность $\rho_п$ (или ρ_1 и ρ_2), иначе в процессе решения вы можете их перепутать. Формулы, которые вам понадобятся для дальнейшего решения, могут быть записаны так: $R = \rho_с \frac{l}{S}$, $m = \rho_п V$, где $V = lS$, $P = mg$, и т. п.

Напомним, что плотность $\rho_п$ и удельное сопротивление $\rho_с$ вы можете определить по справочным данным. Там они приводятся при $0°C$, а если в условии сказано, что проводник нагрет до температуры $t° > 0°C$, то придется воспользоваться формулами зависимости удельного сопротивления ρ или сопротивления R от температуры: $\rho = \rho_0(1 + \alpha t°)$, $\rho = \rho_0(1 + \alpha\Delta T)$ и $R = R_0(1 + \alpha t°)$ или $R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$.

Здесь ρ_0 – удельное сопротивление при $0°C$, $\Delta T = T_2 - T_1$, где T_2 – конечная температура, а T_1 – начальная температура проводника (более точно $\Delta T = T - T_0$, где T_0 = 273 К, но приближенно можно считать $\Delta T = T_2 - T_1$), $R_0 = \rho_0 \dfrac{l_0}{S_0}$ – сопротивление при $0°C$, l_0 – длина проводника при $0°C$ и S_0 – площадь его поперечного сечения при этой температуре.

Температурный коэффициент сопротивления α для каждого металла тоже приводится в справочниках.

Если в условии идет речь о длине двухпроводной линии l_1 или о расстоянии между источником напряжения и потребителем (лампой, плитой и т. п.), то в формуле $R = \rho\dfrac{l}{S}$ длина провода $l = 2l_1$.

Для получения нужного сопротивления проводники можно соединять последовательно и параллельно.

Последовательным называют такое соединение проводников, при котором конец каждого предыдущего проводника соединяют с началом только одного последующего проводника (рис. 5-1).

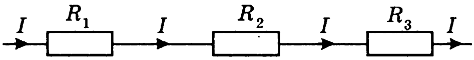


Рис. 5-1

Правило 1: сила тока во всех последовательно соединенных проводниках одинакова.

Правило 2: общее напряжение на N последовательно соединенных проводниках равно сумме напряжений на отдельных проводниках:

$$U_{общ} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N$$

Правило 3: общее сопротивление последовательно соединенных проводников равно сумме сопротивлений отдельных проводников:

$$R_{общ} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_N$$

Если все N проводников имеют одинаковое сопротивление R, то

$$U_{общ} = NU \text{ и } R_{общ} = RN .$$

Общее сопротивление N последовательно соединенных одинаковых проводников в N раз больше сопротивления каждого из них. Следовательно, чтобы увеличить сопротивление цепи, проводники надо соединять последовательно.

Напряжения на двух последовательно соединенных проводниках прямо пропорциональны сопротивлениям этих проводников:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Параллельным называют такое соединение проводников, при котором начала всех проводников соединяются в один узел, а концы – в другой (рис. 5-2).

Правило 1: при параллельном соединении проводников сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме сил токов в отдельных проводниках:

$$I_{общ} = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_N.$$

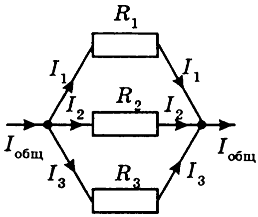


Рис. 5-2

Правило 2: напряжения на параллельно соединенных проводниках одинаковы.

Правило 3: величина, обратная общему сопротивлению параллельно соединенных проводников, равна сумме величин, обратных сопротивлениям отдельных проводников:

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_N}.$$

Если все N параллельно соединенных проводников имеют одинаковое сопротивление R, то $I_{общ} = NI$, $R_{общ} = \dfrac{R}{N}$.

Общее сопротивление N параллельно соединенных одинаковых проводников в N раз меньше сопротивления каждого из них.

При параллельном соединении любого количества проводников их общее сопротивление всегда будет меньше самого меньшего сопротивления этих проводников. Поэтому для уменьшения сопротивления цепи проводники надо соединять параллельно.

Силы токов в двух параллельно соединенных проводниках обратно пропорциональны сопротивлениям этих проводников:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

В задачах на последовательное и параллельное соединение проводников непременно делайте чертеж, на котором обозначьте все сопротивления с соответствующими индексами. Если в вашей схеме отсутствует «узел», т. е. место, в котором соединено более двух проводников (рис. 5-3), то здесь имеет место последовательное соединение проводников, как бы их ни располагали (рис. 5-4).

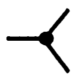


Рис. 5-3

При соединении проводников, изображенном на рис. 5-4, *а*, *б* и *в*, их общее сопротивление $R_{общ} = R_1 + R_2 + R_3$.

Если на каком-либо участке цепи имеется узел, то законы только последовательного соединения проводников применять к такому участку нельзя. Если все начала проводников на участке цепи соединены только в одной точке, а их концы соеди-

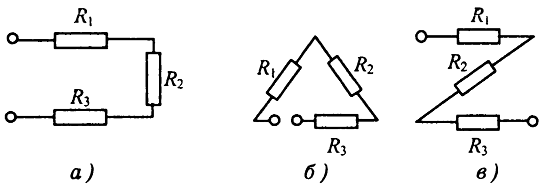


Рис. 5-4

нены все вместе в другой точке, как на рис. 5-2, то такие проводники соединены параллельно.

Если вас просят определить общее сопротивление $R_{общ}$ 100 параллельно соединенных проводников ($N = 100$) с сопротивлением $R = 2$ Ом каждого, то не надо сто раз складывать $\frac{1}{R}$, а определите $R_{общ}$ по формуле, которая годится, когда соединяют параллельно одинаковые проводники: $R_{общ} = \frac{R}{N} = \frac{2}{100}$ Ом $= 0{,}02$ Ом.

Решая задачи на сложное соединение проводников, сначала проанализируйте схему, которую вам предложили. Найдите на ней только последовательно или только параллельно соединенные проводники и определите их общее сопротивление $R_{общ1}$. Затем определите общее сопротивление участка, на котором иные сопротивления соединены с $R_{общ1}$ только последовательно или только параллельно, и найдите их общее сопротивление $R_{общ2}$ и т. п., пока не найдете общее сопротивление всего участка.

Рассмотрим примеры определения общего сопротивления некоторых участков цепи, содержащих последовательные и параллельные соединения проводников.

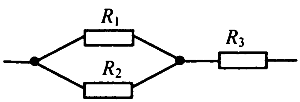


Рис. 5-5

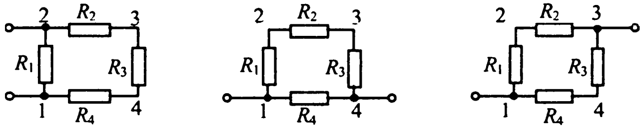
Пример 1. На рис. 5-5 показан участок, состоящий из трех проводников с сопротивлениями R_1, R_2, R_3. Найдем общее сопротивление всего участка. Проводники R_1 и R_2 соединены параллельно, а проводник R_3 подключен к ним последовательно. Общее сопротивление проводников R_1 и R_2

$R_{общ1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Общее сопротивление всего этого участка

$$R_{общ} = R_{общ1} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 .$$

Пример 2. Определим общее сопротивление $R_{общ}$ участка цепи при разном подключении проводников, изображенных на рис. 5-6, к источнику напряжения.

Рис. 5-6, *а*. Здесь сопротивления R_2, R_3 и R_4 соединены последовательно, а сопротивление R_1 подключено к ним параллельно. Общее сопротивление участка с R_2, R_3 и R_4 $R_{2,3,4} = R_2 + R_3 + R_4$, а общее сопротивление всего участка



а) б) в)

Рис. 5-6

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_{2,3,4}}{R_1 + R_{2,3,4}} = \frac{R_1\left(R_2 + R_3 + R_4\right)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Рис. 5-6, *б*. Теперь сопротивления R_1, R_2 и R_3 соединены последовательно, а R_4 подключено к ним параллельно, поэтому $R_{1,2,3} = R_1 + R_2 + R_3$, а $R_{\text{общ}} = \dfrac{R_{1,2,3}R_4}{R_{1,2,3} + R_4} = \dfrac{\left(R_1 + R_2 + R_3\right)R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$.

Рис. 5-6, *в*. При таком включении участка в общую цепь соединенными последовательно будут попарно R_1 и R_2, а также R_3 и R_4, поэтому $R_{1,2} = R_1 + R_2$ и $R_{3,4} = R_3 + R_4$, а сами участки с $R_{1,2}$ и $R_{3,4}$ соединены друг с другом параллельно, поэтому

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_{1,2}R_{3,4}}{R_{1,2} + R_{3,4}} = \frac{\left(R_1 + R_2\right)\left(R_3 + R_4\right)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

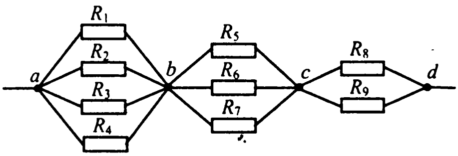


Рис. 5-7

Пример 3. На рис. 5-7 приведена более сложная схема, включающая в себя три последовательно соединенных участка: *ab*, *bc* и *cd*, причем участок *ab* содержит четыре параллельно соединенных проводника, участок *bc* – три, а участок *cd* – два таких проводника. Рассуждая аналогично, определим общее сопротивление всей схемы $R_{общ}$ следующим образом:

$$R_{\text{общ}} = R_{\text{общ}\ ab} + R_{\text{общ}\ bc} + R_{\text{общ}\ cd} =$$

$$= \frac{R_1R_2R_3R_4}{R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2} +$$

$$+ \frac{R_5R_6R_7}{R_5R_6 + R_6R_7 + R_7R_5} + \frac{R_8R_9}{R_8 + R_9}.$$

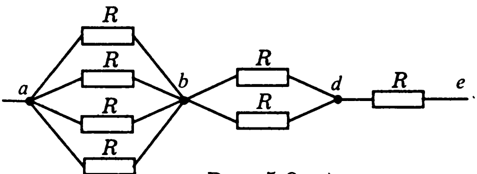


Рис. 5-8

Пример 4. Сопротивления отдельных проводников на рис. 5-8 одинаковы и равны R. Общее сопротивление участка *ab*, содержащего четыре таких сопротивления, $R_{\text{общ}\ ab} = \dfrac{R}{4}$, общее сопротивление участка bd с двумя такими же сопротивлениями $R_{\text{общ}\,bd} = \frac{R}{2}$. Поскольку участок de содержит только одно сопротивление, $R_{\text{общ}\ de} = R$. Все участки ab, bd и de соединены друг с другом последовательно, поэтому общее сопротивление схемы, изображенной на рис. 5-8,

$$R_{\text{общ}} = R_{\text{общ}\ ab} + R_{\text{общ}\,bd} + R_{\text{общ}\ de} =$$

$$= \frac{R}{4} + \frac{R}{2} + R = \frac{7}{4}R.$$

Если в вашей задаче говорится о проводнике длиной l, представляющем собой сплав двух или более разных металлов, то такой проводник можно представить в виде параллельно соединенных проводников, изготовленных из этих металлов, причем длина каждого такого проводника равна длине l, а сумма площадей поперечного сечения всех этих параллельных проводников равна площади поперечного сечения проводника, представляющего собой сплав.

Пример 5. Проводник длиной l изготовлен из сплава серебра и меди. Площадь поперечного сечения, занимаемого серебряной частью, равна S_1, а медной – S_2. Удельное сопротивление серебра ρ_1 и удельное сопротивление меди ρ_2 можно найти из соответствующей таблицы. Общее сопротивление такого проводника

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_{\text{серебра}} R_{\text{меди}}}{R_{\text{серебра}} + R_{\text{меди}}} = \frac{\rho_1 \frac{l}{S_1} \cdot \rho_2 \frac{l}{S_2}}{\rho_1 \frac{l}{S_1} + \rho_2 \frac{l}{S_2}} = \frac{\rho_1 \rho_2 l^2}{S_1 S_2 l \left(\frac{\rho_1}{S_1} + \frac{\rho_2}{S_2} \right)} =$$

$$= \frac{\rho_1 \rho_2 l}{\rho_1 S_2 + \rho_2 S_1}.$$

Можно отметить, что площадь поперечного сечения всего этого проводника $S = S_1 + S_2$.

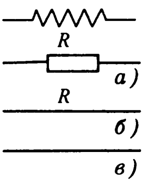


Рис. 5-9

Обратите внимание, что участок цепи, имеющий сопротивление R (резистор), может быть обозначен, как показано на рис. 5-9, *а* или как на рис. 5-9, *б*. При этом буква R может и отсутствовать на схеме, но если о сопротивлении этого участка что-либо сказано в условии, то его нужно учитывать и на схеме лучше сразу обозначить узким прямоугольником или хотя бы буквой R. Если же на схеме изображен проводник так, как это показано на рис. 5-9, *в*, и о его сопротивлении ничего не сказано (не говорится ни о длине, ни о веществе, ни о площади поперечного сечения, радиусе или диаметре), то сопротивлением такого проводника следует пренебречь. В некоторых задачниках сопротивление проводника обозначают буквой r, как обычно обозначают сопротивление источника тока (внутреннее сопротивление). Если в вашей схеме есть и источник тока, и внешняя часть цепи, то, чтобы не запутаться, лучше сопротивление проводников внешней части цепи обозначать буквой R, а сопротивление источника тока – буквой r или использовать индексы. Если же источник тока на данном участке цепи не показан, то не имеет значения, как обозначать сопротивления проводников участка, R или r. Помните только, что разные сопротивления нельзя обозначать одинаково.

Пример 6. Требуется определить общее сопротивление участка цепи, изображенного на рис. 5-10, *а*.

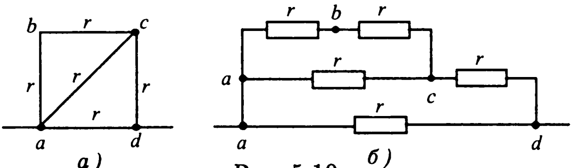


Рис. 5-10

Эту схему можно изобразить так, как мы показали на рис. 5-10, *б*. Теперь уже несложно рассчитать общее сопротивление $R_{общ}$ такого участка. Сопротивление участка *abc* равно $2r$. Проводник на участке *ac* подключен к участку *abc* параллельно, поэтому общее сопротивление этих двух участков $\frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3}r$. К параллельному участку *abc* проводник на участке *cd* подключен последовательно, поэтому общее сопротивление участка *abcd* $\frac{2}{3}r + r = \frac{5}{3}r$. И наконец, проводник на участке *ad* подключен ко всем остальным параллельно, поэтому

$$R_{общ} = \frac{\frac{5}{3}r \cdot r}{\frac{5}{3}r + r} = \frac{5r^2}{3\frac{5+3}{3}r} = \frac{5}{8}r.$$

Не правда ли, такую схему, как на рис. 5-10, б, рассчитать легче, чем схему на рис. 5-10, *а*, хотя это одна и та же схема. Поэтому, если вы не можете сразу определить, как соединены проводники, начертите эквивалентную схему. При этом следует помнить следующие правила:

если схема содержит проводники с одинаковым сопротивлением, расположенными симметрично относительно какой-либо оси или плоскости симметрии (такую ось или плоскость никто на схеме, конечно, не обозначает, вы сами должны ее отыскать, анализируя схему), то точки этих проводников, симметричные относительно этой оси или плоскости, имеют одинаковый потенциал;

все концы проводников, потенциалы которых одинаковы, можно сводить в один узел, заменяя несколько разных точек схемы одной точкой (одним узлом), это может существенно упростить схему. При этом справедливо и обратное действие: концы проводников, соединенные в одном узле, можно пространственно развести, и при этом потенциалы этих концов по-прежнему остаются одинаковыми. Такое разведение концов с одинаковыми потенциалами тоже может существенно упростить схему;

если две точки схемы соединены проводником, не имеющим сопротивления (т. е. его сопротивлением можно пренебречь, так как проводников без сопротивления в принципе не существует), то эти точки можно свести в одну, связав концы проводников, которые соединяют проводник без сопротивления, в один узел;

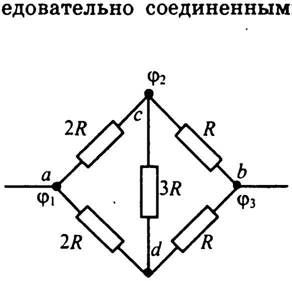
если в результате анализа схемы вы обнаруживаете, что концы какого-либо проводника, входящего в схему, имеют одинаковые потенциалы, то такой проводник из схемы можно исключить, потому что по нему ток идти не будет, ведь $I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$. А если $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ и $I = 0$.

В результате таких действий схема, на которой последовательное или параллельное соединение проводников, на первый взгляд, отсутствовало, может быть заменена эквивалентной схемой, на которой такое соединение сразу видно, благодаря чему нахождение общего сопротивления схемы становится достаточно простым.

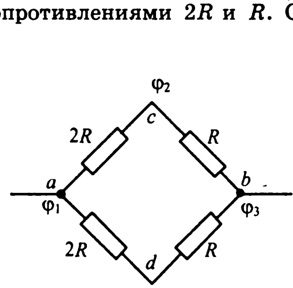
Рассмотрим примеры на расчет общего сопротивления участков цепи, где нет, на первый взгляд, последовательного или параллельного соединения проводников, но путем замены данной схемы на эквивалентную такое соединение можно получить.

Пример 1. Участок цепи, изображенный на рис. 5-11, *а*, включает в себя проводники сопротивлением $2R$, $3R$ и R. Нужно определить общее сопротивление этого участка $R_{общ}$, если он включен во внешнюю часть цепи в точках *a* и *в*.

Анализируя эту схему, мы видим, что, как проводники с сопротивлениями по $2R$, так и проводники сопротивлением R, расположены симметрично относительно неразветвленной части цепи. Кроме того, одни концы проводников $2R$ соединены в узле *a* и, значит, имеют одинаковый потенциал φ_1. Поскольку сопротивления этих проводников тоже одинаковы, то вследствие их симметрии другие концы этих проводников в точках *c* и *d* также имеют равный потенциал φ_2. Следовательно, проводник сопротивлением $3R$, включенный между точками *c* и *d*, на своих концах будет иметь одинаковый потенциал φ_2, поэтому разность потенциалов между его концами будет равна нулю, и ток по такому проводнику идти не будет. Значит, этот проводник из схемы можно исключить, заменив ее на эквивалентную схему, показанную на рис. 5-11, *б*. Эта схема содержит две параллельные ветви *acв* и *adb* с двумя последовательно соединенными сопротивлениями $2R$ и R. Общее



а)



б)

Рис. 5-11

сопротивление каждой ветви $2R + R = 3R$, а поскольку ветви одинаковы, то общее сопротивление всей схемы

$$R_{\text{общ}} = \frac{3R}{2} = 1{,}5R\ .$$

Пример 2. Для определения общего сопротивления цепи, изображенной на рис. 5-12, *а*, нужно учесть, что проводник *amnc*, соединяющий точки *a* и *c*, не имеет сопротивления (т. е. оно пренебрежимо мало по сравнению с остальными сопротивлениями) и, значит, все точки этого проводника имеют одинаковый потенци-

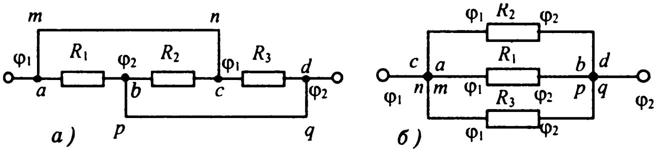


Рис. 5-12

ал, например, φ_1. Поэтому этот проводник можно заменить одним узлом, соединив точки *a* и *c* в этом узле, т. е. совсем убрав соединительный провод *amnc*, сопротивлением которого мы пренебрегаем. Точно так же можно заменить одним узлом проводник *bpqd*. Тогда мы получим схему (рис. 5-12, *б*), эквивалентную схеме, изображенной на рис. 5-12, *а*. Общее сопротивление этой схемы определить уже достаточно просто. Поскольку все три проводника оказались соединенными параллельно, их общее сопротивление

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\ .$$

Пример 3. Схема на рис. 5-13, *а* внешне похожа на схему на рис. 5-12, *а*. Но здесь пренебречь сопротивлением участков *amnc* и *bpqd* нельзя, поэтому и решение будет иным. Схему, эквивалентную той, что на рис 5-13, *а*, можно изобразить так, как на рис. 5-13, *б*, расположив проводник *вс* вертикально. Теперь мы видим, что сопротивления R на участках *mn* и *mb*, а также на участках *nd* и *pq*, расположены симметрично относительно некоторой оси, которую можно мысленно провести через точки *md*. Значит, разность потенциалов между точками *m* и *n* $\varphi_1 - \varphi_3$ равна разности

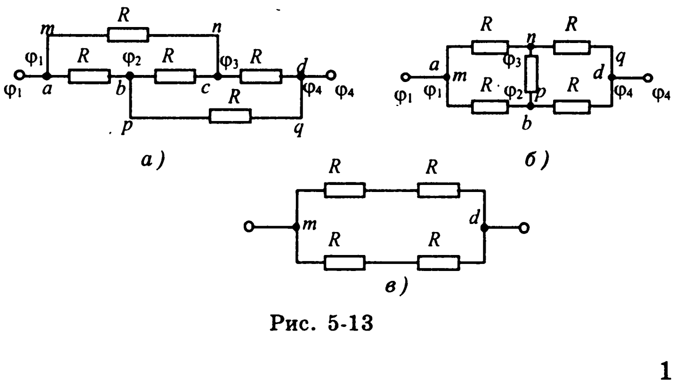


Рис. 5-13

потенциалов между точками m и b $\varphi_1 - \varphi_2$. Но, если $\varphi_1 - \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$, то $\varphi_2 = \varphi_3$, и перемычку nb можно из этой схемы исключить. Тогда получим еще одну эквивалентную схему (рис. 5-13, *в*), сопротивление которой вы теперь легко определите: $R_{общ} = \dfrac{2R}{2} = R$.

Пример 4. Схема на рис. 5-14, *а* похожа на ту, что изображена на рис. 5-13, *а*, но здесь в участок *amnc* включен конденсатор C. Запомните: для постоянного тока конденсатор – разрыв цепи, через него постоянный ток не идет, потому что сопротивление диэлектрического промежутка между обкладками конденсатора бесконечно велико (пока не произойдет пробой при очень большом токе, о котором речь не идет).

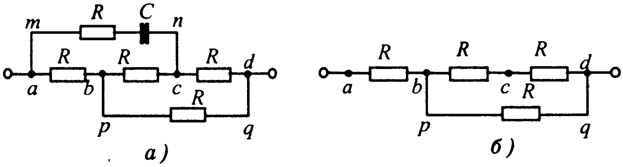


Рис. 5-14

Поэтому участок *amnc* можно исключить из цепи, и тогда получим схему, показанную на рис. 5-14, *б*, общее сопротивление которой найти очень легко. Сопротивление участка *bcd* равно $2R$, а участок *pq* к нему подсоединен параллельно, поэтому их общее сопротивление $\dfrac{2R \cdot R}{2R + R} = \dfrac{2}{3}R$. Поскольку участок *ab* соединен с участком *bdqp* последовательно, то

$$R_{общ} = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R.$$

Пример 5. На рис. 5-15, *а* приведена схема, общее сопротивление которой надо определить. Для решения подобной задачи проводники, соединенные в узле O, удобно развести так, как показано на рис. 5-15, *б*. Тогда сразу становится ясно, что здесь мы имеем две параллельные ветви *abcde* и *amnpe*. Ветвь *abcde* состоит из трех последовательно соединенных участков *ab*, *bcd* и *de*. Общее сопротивление участка *bcd0b*, состоящего из двух параллельных сопротивлений по $2R$ каждое, равно $\dfrac{2R}{2} = R$.

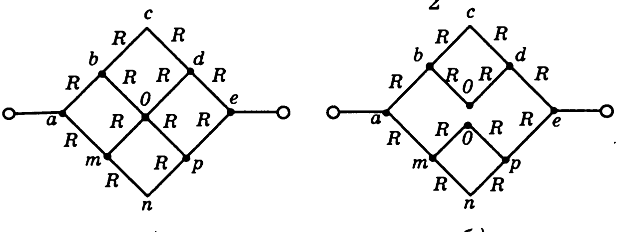


Рис. 5-15

Тогда общее сопротивление ветви *abcde* будет равно $R + R + R = 3R$. Ветвь *amnpe* совершенно такая же, как и ветвь *abcde*, поэтому ее общее сопротивление, очевидно, тоже равно $3R$. Поскольку эти ветви параллельны и имеют одинаковое сопротивление $3R$, то общее сопротивление всей этой цепи

$$R_{общ} = \frac{3R}{2} = 1{,}5R\,.$$

Пример 6. На рис. 5-16, *а–е* показаны разные участки цепи и даны эквивалентные схемы к ним. Поскольку вы уже поднакопили опыт, мы дали только краткие пояснения расчета $R_{общ}$ каждого такого участка.

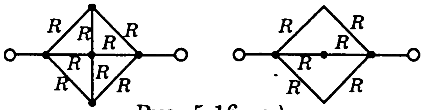


Рис. 5-16, *а)*

а) $R_{общ} = \dfrac{2}{3}R$;

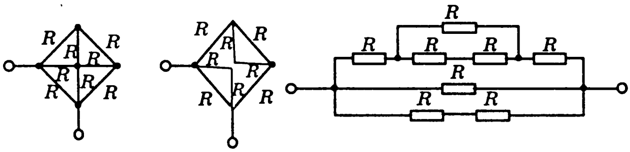


Рис. 5-16, *б)*

б) $R_{общ\,1} = \dfrac{R\cdot 2R}{R+2R} = \dfrac{2}{3}R$, $R_{общ\,2} = R + \dfrac{2}{3}R + R = \dfrac{8}{3}R$,

$$R_{общ} = \frac{R_{общ\ 1}R_{общ\ 2}}{R_{общ\ 1} + R_{общ\,2}} = \frac{\frac{2}{3}R\cdot\frac{8}{3}R}{\frac{2}{3}R + \frac{8}{3}R} = \frac{16R^2}{9\frac{10}{3}R} = \frac{8}{15}R;$$

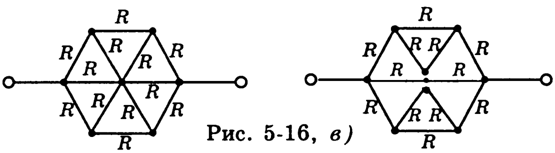


Рис. 5-16, *в)*

в) $R_{общ\,1} = \dfrac{R\cdot 2R}{R+2R} = \dfrac{2}{3}R,$ $R_{общ\,2} = R + \dfrac{2}{3}R + R = \dfrac{8}{3}R,$

$R_{общ\ 3} = \dfrac{\frac{8}{3}R}{2} = \dfrac{4}{3}R$ (мы нашли общее сопротивление верхнего и нижнего параллельных участков, к которым ось симметрии сопротивлением $2R$ подключена тоже параллельно).

$$R_{общ} = \frac{\frac{4}{3}R \cdot 2R}{\frac{4}{3}R + 2R} = \frac{8R^2}{3\frac{4R+6R}{3}} = \frac{4}{5}R;$$

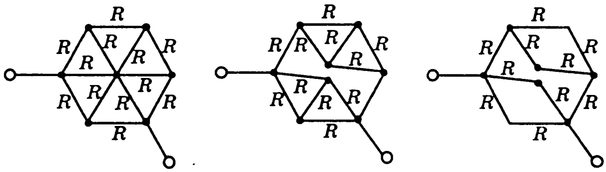


Рис. 5-16, *г)*

г) $R_{общ\ 1} = \frac{2R}{2} = R$, $R_{общ\ 2} = R + R_{общ\ 1} + R = 3R$,

$$R_{общ} = \frac{3R \cdot R_{общ\ 1}}{3R + R_{общ\ 1}} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R;$$

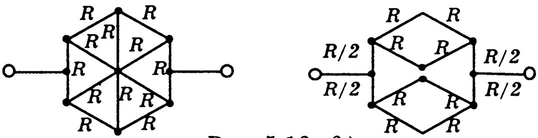


Рис. 5-16, *д)*

д) $R_{общ\ 1} = \frac{R}{2} + \frac{2R}{2} + \frac{R}{2} = 2R$, $R_{общ} = \frac{R_{общ\ 1}}{2} = R$.

е) Квадрат разделен на 9 маленьких квадратов, каждая сторона которых имеет сопротивление R.

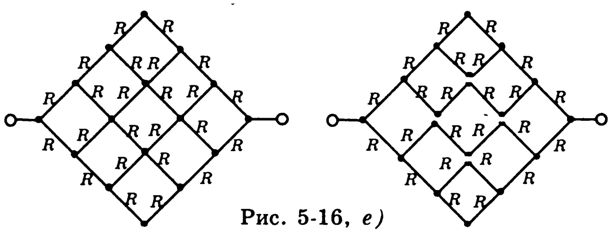


Рис. 5-16, *е)*

$R_{общ1} = \frac{2R}{2} = R$, $R_{общ2} = R + R_{общ1} + R = 3R$,

$$R_{общ3} = \frac{R_{общ2} \cdot 4R}{R_{общ2} + 4R} = \frac{3R \cdot 4R}{3R + 4R} = \frac{12}{7}R,$$

$R_{общ4} = R + R_{общ3} + R = R + \dfrac{12}{7}R + R = \dfrac{26}{7}R$ – это общее сопротивление верхней половины участка цепи.

Поскольку нижняя точно такая же половина подключена к верхней параллельно, то $R_{общ} = \dfrac{R_{общ4}}{2} = \dfrac{13}{7}R$.

Пример 8. Кубик, изображенный на рис. 5-17, *а*, включен в цепь между точками *a* и *d*. Найти его общее сопротивление, если сопротивление каждого ребра равно *R*.

Чтобы решить эту непростую, но интересную задачу, нужно установить точки с одинаковым потенциалом. Для этого нужно отыскать на схеме какую-либо ось или плоскость симметрии, чтобы одинаковые сопротивления по обе стороны от этой оси или плоскости располагались симметрично. Чтобы легче определить такую ось или плоскость, мы поставили наш кубик на ребро *ad* (рис. 5–17, б). Тогда стало ясно, что плоскость симметрии, о которой мы только что говорили, проходит через точки *adge*. Ребра кубика *ab* и *af* соединены одними концами в точке *a* и поэтому потенциал их одинаков. Пусть он будет φ_1. Другие концы этих ребер *b* и *f* расположены симметрично относительно плоскости симметрии, и поскольку сопротивления этих ребер одинаковы, их вторые концы *b* и *f* тоже имеют одинаковый потенциал, допустим, φ_2. По этой же причине концы ребер *dc* и *dh*, соединяющиеся в точке *d*, имеют потенциал, например, φ_4, а их другие концы *c* и *h* имеют одинаковый потенциал φ_3. Нам осталось обозначить потенциал точек *e* и *g*, например, буквами φ_5 и φ_6.

Теперь перейдем от объемной схемы к плоской, соединив все концы с одинаковыми потенциалами в один узел (рис. 5–17, *в*). Это, конечно, непросто, но и не очень сложно, если хорошенько подумать. Нужно только следить, чтобы не соединить концы с разными потенциалами и не разъединить – с одинаковыми.

Схему, изображенную на рис. 5-17 *в*, тоже не назовешь простой, но по крайней мере на ней уже отчетливо видны участки с параллельным соединением проводников, поэтому, рассуждая не

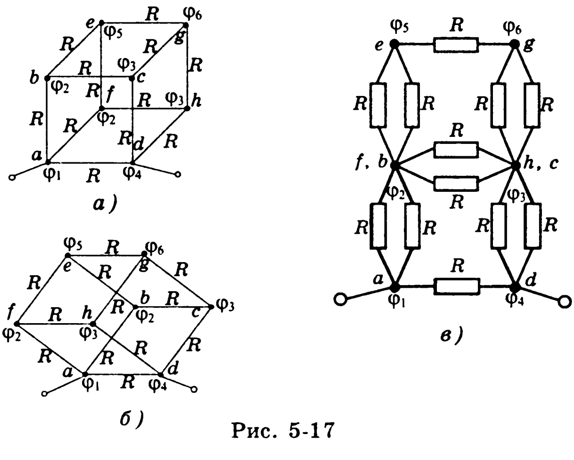


Рис. 5-17

торопясь, можно постепенно прийти к окончательному решению. Участки fe и cg содержат по два параллельных одинаковых сопротивления R, поэтому общее сопротивление каждого такого участка равно $\frac{R}{2}$. Участок eg к этим двум участкам подсоединен последовательно, поэтому общее сопротивление ветви $fegc$ будет равно $\frac{R}{2} + R + \frac{R}{2} = 2R$. Эта ветвь соединена параллельно с участком bc, состоящим тоже из двух параллельных сопротивлений R и поэтому имеющим тоже общее сопротивление $\frac{R}{2}$.

Тогда общее сопротивление участков fe, eg, gc и bc будет

$$\frac{2R \cdot \frac{R}{2}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2}{5}R .$$

К ветви $begc$, общее сопротивление которой $\frac{2}{5}R$ мы только что нашли, последовательно подключены участки ab и dc из двух параллельных сопротивлений каждый, имеющих поэтому общее сопротивление каждого участка $\frac{R}{2}$. Тогда общее сопротивление ветви $abegcd$ будет $\frac{R}{2} + \frac{2}{5}R + \frac{R}{2} = \frac{7}{5}R .$

К этой ветви участок ad подключен параллельно, поэтому общее сопротивление всего кубика

$$R_{общ} = \frac{\frac{7}{5}R \cdot R}{\frac{7}{5}R + R} = \frac{7}{12}R .$$

Если вам нужно определить силу тока в последовательно и параллельно соединенных проводниках некоторого участка цепи или напряжения на этих участках, то помните следующее:

а) в последовательно соединенных проводниках сила тока одна и та же, какими бы ни были их сопротивления, поэтому обозначайте ее одной и той же буквой с одним и тем же индексом;

б) в параллельно соединенных проводниках силы токов одинаковы, только если одинаковы их сопротивления. Если сопротивления разные, то и силы токов разные, поэтому их надо обозначать буквой I с разными индексами. Возьмите за правило обозначать силу тока в неразветвленном участке цепи буквой $I_{общ}$ и вести ее через все последовательные участки до первого узла. Сразу после узла обозначайте силы токов в параллельно соединенных участках уже иначе, лучше, чтобы их индексы соответствовали индексам сопротивлений, по которым эти токи текут (рис. 5-18). На рис. 5-18 ток $I_{общ}$ в узле a «растекается» на токи I_3 и I_4, а затем в узле $в$ они снова «стекаются» и опять идет ток $I_{общ}$. Можно, конечно, вместо $I_{общ}$ обозначить силу тока I_1 или I_2, или еще

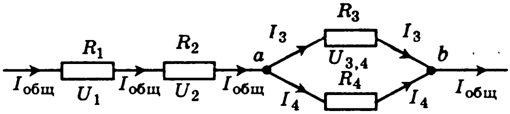


Рис. 5-18

как-нибудь иначе. Но при этом следует помнить, что это общий ток для параллельных проводников на данном участке, чтобы не обозначить силу тока с тем же индексом в каком-нибудь параллельном проводнике;

в) напряжения на последовательно соединенных проводниках одинаковы, только если одинаковы сопротивления этих проводников. Если они разные, то и напряжения на них разные (обратите внимание, что обычно говорят: «ток в проводнике», «напряжение на проводнике» и «сопротивление проводника»). Их найти можно, умножив силу тока в проводнике на его сопротивление.

Например, применительно к рис. 5-18: $U_1 = I_{общ}R_1$, $U_2 = I_{общ}R_2$.

г) напряжение на параллельных проводниках можно найти, умножив силу тока в общей части цепи на общее сопротивление этих проводников или силу тока в одном из проводников на его сопротивление. Применительно к участку цепи ab, изображенному на рис. 5-18, это правило может быть записано так:

$$U_{34} = I_{общ}R_{общ34} = I_{общ}\frac{R_3R_4}{R_3 + R_4} \text{ или } U_{34} = I_3R_3, \text{ или } U_{34} = I_4R_4.$$

Обратимся к рис. 5-19. На концах изображенного здесь участка цепи поддерживается разность потенциалов $\varphi_1-\varphi_2$. Поскольку в этот участок не включен источник тока, то разность потенциалов $\varphi_1-\varphi_2 = U_{общ}$, где $U_{общ}$, – это общее напряжение на этом участке (его бы показал вольтметр, подключенный к концам этого участка, т. е. к клеммам с потенциалами φ_1 и φ_2). Если в условии задачи что-нибудь сказано о соединительных проводах (сказано, из какого материала они изготовлены, или дана их длина, площадь сечения или диаметр) и схема не дана, а вам надо ее самим изобразить, то в самом неразветвленном, самом общем участке цепи рядом с источником тока изобразите сопротивление $R_{пров}$, которое будет символизировать собой сопротивление всех соединительных проводов цепи (см. рис. 5-19). Через это сопротивление может идти только общий ток $I_{общ}$.

Применительно к рис. 5-19 напряжение на $R_{пров}$: $U_{пров} = I_{общ}R_{пров}$. Если обозначить напряжение на участке ac U_{ac}, то $\varphi_1 - \varphi_2 = U$общ $= U_{пров} + U_{ac}$.

В свою очередь $U_{ac} = U_{ab} + U_{bc}$ или $U_{ac} = U_4 = I_4R_4$, $U_{ab} = U_1 = I_1R_1$ и $U_{bc} = U_{2,3} = I_2R_2$ или $U_{23} = I_3R_3$.

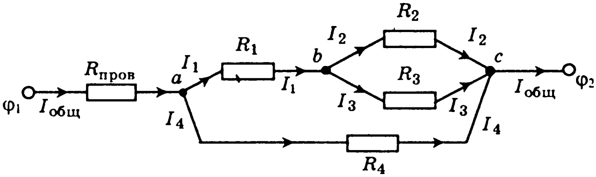


Рис. 5-19

В зависимости от того, что дано и что спрашивается, вы можете выбирать любую из этих формул для расчета напряжений на участке, изображенном на рис. 5-19.

Здесь могут пригодиться формулы $R_{пров} = \rho\frac{l}{S}$ и $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где ρ – удельное сопротивление, l – длина проводника, S– площадь его поперечного сечения и d – диаметр проводника.

Решение отдельных задач

Задача 1

Медный проводник весом $P = 0{,}1$ Н имеет сопротивление $R = 1$ мОм. Найти диаметр d его поперечного сечения. Плотность меди $\rho_п = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³, ее удельное сопротивление $\rho_с = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
$P = 0{,}1$ Н
$R = 1$ мОм
$\rho_п = 8{,}9 \cdot 10^3\ \frac{кг}{м^3}$
$\rho_с = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

d – ?

Решение. Определим вес P через массу m проводника, а массу – через плотность меди $\rho_п$ и размеры проводника: его длину и диаметр. Затем размеры проводника «свяжем» с его сопротивлением R, ведь они входят и в формулу сопротивления. А там посмотрим, что делать дальше. Приступим:

$P = mg$, где $m = \rho_п V$. Здесь $V = lS$ – объем проводника и $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь его поперечного сечения.

Тогда $m = \rho_п lS = \rho_п l\frac{\pi d^2}{4}$ и $P = \rho_п l\frac{\pi d^2}{4}g$. (1)

С другой стороны, $R = \rho_с\frac{l}{S} = \rho_с\frac{4l}{\pi d^2}$. (2)

Если теперь разделить (1) на (2), то неизвестная нам длина l сократится и мы получим одно уравнение с одним неизвестным диаметром d, который из него и определим. Приступим: $\frac{P}{R} = \frac{\rho_п l\pi d^2 g\pi d^2}{4 \cdot 4l\rho_с}$, $\frac{P}{R} = \frac{\pi^2\rho_п g d^4}{16\rho_с}$,

$\frac{P}{R} = \left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2\frac{\rho_п g}{\rho_с}$, $\frac{\pi d^2}{4} = \sqrt{\frac{\rho_с P}{\rho_п g R}}$, откуда

$$\boxed{d = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\rho_с P}{\rho_п g R}}}}$$

Переведем в СИ единицу сопротивления:
1 мОм = $1 \cdot 10^{-3}$ Ом.

Проверим единицу полученной величины:

$$[d]_{СИ} = \sqrt{\sqrt{\frac{Ом \cdot м \cdot Н}{\frac{кг}{м^3} \cdot \frac{м}{с^2} \cdot Ом}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{м^4 \cdot Н}{Н}}} = \sqrt{м^2} = м.$$

Произведем вычисления:

$$d = 2\sqrt{\frac{1}{3{,}14}\sqrt{\frac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}1}{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-3}}}}\ м = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ м = 2{,}4\ мм.$$

Ответ: d = 2,4 мм.

Задача 2

Определить напряженность E электрического поля в серебряном проводнике с радиусом поперечного сечения r = 0,5 мм при силе тока I = 2 А. Удельное сопротивление серебра $\rho = 1{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
r = 0,5 мм
I = 2 А
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
E – ?

Решение. При прохождении постоянного тока по линейному проводнику внутри него существует однородное электрическое поле, линии вектора напряженности которого направлены вдоль оси проводника от конца с более высоким потенциалом к концу проводника, потенциал которого ниже. В однородном поле напряженность E связана с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ на концах проводника формулой $E = \frac{U}{l}$ (1), где l – длина проводника.

Разность потенциалов определим из закона Ома для однородного участка цепи: $I = \frac{U}{R}$, откуда $U = IR$. (2)

Нам известен радиус поперечного сечения проводника r и его удельное сопротивление ρ. Запишем формулу, которая определяет сопротивление проводника R через эти величины: $R = \rho\frac{l}{S}$, где $S = \pi r^2$ – площадь поперечного сечения. С учетом этого $R = \rho\frac{l}{\pi r^2}$. (3)

Теперь подставим (3) в (2). Так мы определим разность потенциалов U, необходимую нам для нахождения напряженности E (см. (1)): $U = I\rho\dfrac{l}{\pi r^2}$. (4)

Нам осталось подставить (4) в (1), и задача будет решена: $E = \dfrac{I\rho l}{l\pi r^2}$, $\boxed{E = \dfrac{\rho I}{\pi r^2}}$

Переведем единицу радиуса в СИ:

$0{,}5$ мм $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м $= 5 \cdot 10^{-4}$ м.

Проверим единицу полученной величины (должен получиться В/м): $[E]_{\text{СИ}} = \dfrac{\text{Ом} \cdot \text{м} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} = \dfrac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$.

Напомним, что Ом = В/А.

Произведем вычисления:

$$E = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-8}} \, \frac{\text{В}}{\text{м}} = 0{,}04 \, \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: $E = 0{,}04$ В/м.

Задача 3

Напряжение на стальном проводнике $U = 100$ В, его длина $l = 200$ м. Средняя скорость упорядоченного движения свободных электронов в проводнике $v = 5 \cdot 10^{-4}$ м/с. Найти концентрацию n свободных электронов в этом проводнике. Удельное сопротивление стали $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано:
$U = 100$ В
$l = 200$ м
$v = 5 \cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
$\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

n – ?

Решение. Для решения воспользуемся формулой $I = nevS$. (1)

Силу тока I определим из закона Ома для участка цепи $I = \dfrac{U}{R}$, где $R = \rho\dfrac{l}{S}$ – сопротивление этого проводника и S – площадь его поперечного сечения.

С учетом этого получим $I = \dfrac{US}{\rho l}$. (2)

Если теперь приравнять правые части равенств (1) и (2), то площадь поперечного сечения S, которая нам не дана, сократится и мы определим искомую концентрацию n через известные величины:

$$nevS = \frac{US}{\rho l}, \quad nev = \frac{U}{\rho l}, \text{ откуда } \boxed{n = \frac{U}{ev\rho l}}$$

Проверим единицу полученной величины (надо, чтобы получился $м^{-3}$):

$$[n]_{СИ} = \frac{В}{Кл \cdot \frac{м}{с} \cdot Ом \cdot м \cdot м} = \frac{В}{А \cdot с \cdot \frac{м^3}{с} \cdot \frac{В}{А}} = \frac{1}{м^3} = м^{-3}.$$

Напомним, что Кл = А · с и Ом = В/А.

Произведем вычисления:

$$n = \frac{100}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 200} м^{-3} = 5 \cdot 10^{28} м^{-3}.$$

Ответ: $n = 5 \cdot 10^{28}$ $м^{-3}$.

Задача 4

Между обкладками плоского конденсатора находится вещество с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Чему равно электрическое сопротивление R этого вещества, если емкость конденсатора C?

Дано:	
ε_0 ρ C	*Решение.* Запишем формулы емкости плоского конденсатора и сопротивления вещества, заполняющего пространство между обкладками конденсатора, площадь которых S и расстояние между
R – ?	которыми d: $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ (1) и $R = \rho \frac{d}{S}$, (2)

поскольку расстояние между обкладками и есть «длина» прямоугольной призмы из этого вещества, заполняющей пространство между обкладками.

Из (1) найдем площадь S и подставим ее в (2):

$$S = \frac{dC}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad R = \rho \frac{d\varepsilon_0 \varepsilon}{dC}, \quad \boxed{R = \frac{\rho \varepsilon_0 \varepsilon}{C}}$$

Задача решена.

Ответ: $R = \frac{\rho \varepsilon_0 \varepsilon}{C}$.

Задача 5

Какой силы ток пройдет по проводам, соединяющим обкладки плоского конденсатора с источником напряжения, если из конденсатора удалить с постоянной скоростью $v = 5$ см/с диэлектрик? Площадь обкладок квадратной формы $S = 300$ $см^2$, расстояние между ними $d = 3$ мм, диэлектрик – слюда. Диэлектрическая проницаемость слюды $\varepsilon_1 = 6$. Напряжение на клеммах источника $U = 4$ В.

Дано:	
$v = 5\ \frac{см}{с}$ $S = 300\ см^2$ $d = 3$ мм $\varepsilon_1 = 6$ $\varepsilon_2 = 1$ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$ $U = 4$ В	*Решение.* Заряд на обкладках конденсатора с диэлектриком $q_1 = C_1U$, где $C_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}$ – емкость конденсатора до того, как из него вынули диэлектрик. Если из конденсатора удалить диэлектрик, не отключая конденсатор от источника напряжения, то заряд на нем станет $q_2 = C_2U$, где $C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}$ – новая емкость конденсатора.
I – ?	

Разность $\Delta q = q_1 - q_2$ есть тот заряд, который пройдет по проводам, соединяющим конденсатор с источником напряжения.

С учетом приведенных выше формул

$$\Delta q = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d}U - \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d}U = \frac{\varepsilon_0 S}{d}U(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Согласно определению силы тока

$$I = \frac{\Delta q}{t} = \frac{\varepsilon_0 S}{dt}U(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \qquad (1)$$

Здесь $t = \frac{l}{v}$ – время выдвигания диэлектрика, l – длина стороны квадратной обкладки.

Поскольку $S = l^2$, то $l = \sqrt{S}$ и $t = \frac{\sqrt{S}}{v}$. $\qquad (2)$

Осталось подставить (2) в (1), и задача будет решена:

$$I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)vUS}{d\sqrt{S}} \quad \text{или} \quad \boxed{I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)vU}{d}\sqrt{S}}$$

Переведем все единицы в СИ:

$5\frac{см}{с} = 0{,}05\frac{м}{с}$, $300\ см^2 = 300 \cdot 10^{-4}\ м^2 = 0{,}03\ м^2$, 3 мм = 0,003 м.

Проверим единицу полученной величины:

$$[I]_{СИ} = \frac{Ф \cdot м \cdot В}{м \cdot с \cdot м}\sqrt{м^2} = \frac{Кл \cdot В \cdot м}{В \cdot с \cdot м} = \frac{А \cdot с}{с} = А.$$

Напоминаем, что Кл = А · с и Ф = Кл/В.

Произведем вычисления:

$$I = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}(6-1) \cdot 0{,}05 \cdot 4}{0{,}003}\sqrt{0{,}03}\ A = 5 \cdot 10^{-10} A.$$

Ответ: $I = 5 \cdot 10^{-10}$ А.

Задача 6

Чему равно напряжение U на катушке, содержащей $N = 1500$ витков стального провода с диаметром витка $D = 8$ см, если плотность тока в ней $j = 10$ А/мм^2 ? Удельное сопротивление стали $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом $\cdot$ м.

Дано:
$N = 1500$
$D = 8$ см
$j = 10 \dfrac{\text{А}}{\text{мм}^2}$
$\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом $\cdot$ м

U – ?

Решение. Напряжение на катушке определим из закона Ома для участка цепи

$$I = \frac{U}{R}, \text{ откуда } U = IR. \qquad (1)$$

Здесь I – сила тока в катушке, R – ее сопротивление.

Силу тока определим через плотность тока j и площадь поперечного сечения проводника, из которого намотана катушка:

$$j = \frac{I}{S}, \text{ откуда } I = jS. \qquad (2)$$

Площадь поперечного сечения S нам не дана, но она входит и в формулу сопротивления $R = \rho \dfrac{l}{S}$ (3)

и при подстановке всех величин в формулу (1) должна сократиться.

Длину проводника l, из которого изготовлена катушка, можно найти, умножив число витков N на длину окружности одного витка. Поскольку диаметр этой окружности D, то $l = N\pi D$. (4)

Подставим (4) в (3): $R = \rho \dfrac{N\pi D}{S}$. (5)

Нам осталось подставить (2) и (5) в (1), и задача будет решена:

$$U = jS\rho\frac{N\pi D}{S}, \ \boxed{U = \pi D N \rho j}$$

Переведем все единицы в СИ: 8 см = 0,08 м,

$$10\frac{\text{А}}{\text{мм}^2} = \frac{10}{10^{-6}}\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 1 \cdot 10^7 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Произведем вычисления:
$U = 3{,}14 \cdot 0{,}08 \cdot 500 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^7$ В = 151 В.
Ответ: $U = 151$ В.

Задача 7

По проводу течет ток плотностью $j = 1$ А/мм^2. Найти массу электронов m, проходящих через поперечное сечение этого провода площадью сечения $S = 1$ мм^2 за время $t = 1$ ч.

Дано:
$j = 1\ \dfrac{\text{А}}{\text{мм}^2}$
$t = 1$ ч
$S = 1$ мм^2
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-19}$ кг

m – ?

Решение. Массу всех электронов m можно определить, умножив массу одного электрона m_e на число электронов N, прошедших через поперечное сечение провода за время t:

$$m = m_e N.$$

Число всех электронов N найдем, разделив заряд q всех электронов, прошедших через поперечное сечение за время t, на заряд одного электрона e (элементарный заряд): $N = \dfrac{q}{e}$.

Заряд q найдем из формулы, определяющей силу постоянного тока: $I = \dfrac{q}{t}$, откуда $q = It$, где по определению плотности тока $I = jS$.

Выполнив необходимые подстановки, получим

$$q = jSt,\ N = \frac{jSt}{e} \quad \text{и} \quad \boxed{m = \frac{m_e jSt}{e}}$$

Задача решена в общем виде. Переведем все единицы в СИ: 1 мм^2 = $1 \cdot 10^{-6}$ м^2, $1\dfrac{\text{А}}{\text{мм}^2} = \dfrac{1}{10^{-6}}\dfrac{\text{А}}{\text{м}^2} = 1 \cdot 10^6 \dfrac{\text{А}}{\text{м}^2}$, 1 ч = 3600 с.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$m = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ кг} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ кг}.$$

Ответ: $m = 2 \cdot 10^{-8}$ кг.

Задача 8

При $t^\circ_1 = 20$°С сопротивление стальной проволоки $R_1 = 20$ Ом. Когда на концах этой проволоки поддерживается разность потенциалов $U = 100$ В, по ней идет ток силой $I = 2$ А. Чему равна температура t_2° проволоки при этом? Температурный коэффициент сопротивления стали $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано:
$t_1^\circ = 20$ °С
$R_1 = 20$ Ом

Решение. Сопротивление проводника при температурах t°_1 и t°_2 определяется формулами $R_1 = R_0(1 + \alpha t_1^\circ)$ и $R_2 = R_0(1 +$

$U = 100$ В
$I = 2$ А
$\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$

T_2 – ?

$+ \alpha t_2°)$, где R_0 – сопротивление этого проводника при 0 °С.

Разделим эти равенства друг на друга. При этом сопротивление R_0 сократится, и мы сможем определить температуру $t_2°$ через R_1 и R_2, а сопротивление R_2 найдем из закона Ома.

Приступим: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{R_0\left(1 + \alpha t_1^\circ\right)}{R_0\left(1 + \alpha t_2^\circ\right)}$, $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{1 + \alpha t_1^\circ}{1 + \alpha t_2^\circ}$, откуда

$1 + \alpha t_2^\circ = \dfrac{R_2}{R_1}\left(1 + \alpha t_1^\circ\right)$, $\alpha t_2^\circ = \dfrac{R_2}{R_1}\left(1 + \alpha t_1^\circ\right) - 1$ и

$$t_2^\circ = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \alpha t_1^\circ\right) - 1\right). \quad (1)$$

По закону Ома $I = \dfrac{U}{R_2}$, откуда $R_2 = \dfrac{U}{I}$. (2)

Подставив (2) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{t_2^\circ = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{U}{IR_1}\left(1 + \alpha t_1^\circ\right) - 1\right)}$$

Произведем вычисления:

$$t_2^0 = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}}\left(\frac{100}{2 \cdot 20}\left(1 + 6 \cdot 10^{-3} \cdot 20\right) - 1\right) \text{°C} = 300 \text{ °C}$$

или $T_2 = (300 + 237)$ К $= 573$ К.

Ответ: $T_2 = 573$ К.

Задача 9

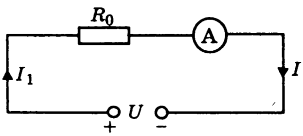


Рис. 5-20

Резистор из медной проволоки и амперметр включены последовательно (рис. 5-20). При температуре $t_0° = 0$ °С сопротивление резистора $R_0 = 20$ Ом. Сопротивление амперметра $R_A = 10$ Ом. Какую силу тока I_2 будет показывать амперметр, когда резистор нагреется до $t° = 100$ °С, если при $t_0° = 0$ °С он показывает $I_1 = 4$ А? Температурный коэффициент меди $\alpha = 4{,}3 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано:
$t_0° = 0$ °С
$R_0 = 20$ Ом

Решение. Судя по условию задачи, общее напряжение U на резисторе с амперметром не изменялось, а с повышением температуры резистора изменялась сила тока в этом

$R_А = 10$ Ом
$t° = 100$ °C
$I_1 = 4$ А
$\alpha = 4{,}3 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$

I_2 – ?

участке цепи вследствие увеличения сопротивления резистора от R_0 при температуре 0 °C до R при температуре $t°$.

Запишем закон Ома применительно к этим условиям:

$$I_1 = \frac{U}{R_0 + R_А} \text{ и } I_2 = \frac{U}{R + R_А},$$

откуда $U = I_1(R_0 + R_А)$ и $U = I_2(R + R_А)$, поэтому

$$I_1(R_0 + R_А) = I_2(R + R_А), \text{ откуда } I_2 = I_1 \frac{R_0 + R_A}{R + R_A}. \qquad (1)$$

Согласно зависимости сопротивления от температуры
$R = R_0(1 + \alpha t°)$. (2)

Подставим (2) в (1): $\boxed{I_2 = I_1 \dfrac{R_0 + R_A}{R_0\left(1 + \alpha t^0\right) + R_A}}$

Произведем вычисления:

$$I_2 = 4 \frac{20 + 10}{20\left(1 + 4{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 100\right) + 10} \text{ А} = 3 \text{ А}.$$

Ответ: $I_2 = 3$ А.

Задача 10

Угольный и железный стержни одинакового диаметра соединены последовательно. Как должны соотноситься длины этих стержней, чтобы их общее сопротивление не зависело от температуры? Температурные коэффициенты сопротивления угля и железа соответственно равны $\alpha_{угля} = -0{,}08 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$ и $\alpha_{жел} = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$. Удельные сопротивления при 0°C этих веществ $\rho_{угля} = 4 \cdot 10^{-5}$ Ом · м и $\rho_{жел} = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

Примечание: температурный коэффициент угля отрицателен, потому что при повышении температуры его сопротивление уменьшается.

Дано:
$\alpha_{уг} = -0{,}08 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$
$\alpha_{жел} = 6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$
$\rho_{уг} = 4 \cdot 10^{-5}$ Ом · м
$\rho_{жел} = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м

$\dfrac{l_{жел}}{l_{уг}}$ – ?

Решение. Общее сопротивление последовательно соединенных стержней $R_{общ}$ при некоторой температуре $t°$ равно сумме сопротивлений каждого стержня при этой температуре:

$R_{общ} = R_{уг} + R_{жел} = R_{0\,уг}(1 + \alpha_{уг} t°) + R_{0\,жел}(1 + \alpha_{жел} t°) = R_{0\,уг} + R_{0\,уг}\alpha_{уг} t° + R_{0\,жел} + R_{0\,жел}\alpha_{жел} t°$ или

$$R_{общ} = (R_{0\,уг} + R_{0\,жел}) + t°(R_{0\,уг}\,\alpha_{уг} + R_{0\,жел}\alpha_{жел}). \qquad (1)$$

Здесь $R_{0\,уг} = \rho_{уг}\dfrac{l_{уг}}{S}$ и $R_{0\,жел} = \rho_{жел}\dfrac{l_{жел}}{S}$ – сопротивления угольного и железного стержней при 0°С, S – площадь поперечного сечения каждого стержня (она у них одинакова, ведь согласно условию одинаковы их диаметры).

Теперь давайте внимательно посмотрим на равенство (1). Согласно условию общее сопротивление стержней не должно зависеть от температуры. В формуле (1) $R_{общ}$ равно сумме двух слагаемых $(R_{0у} + R_{0жел})$ и $t°(R_{0уг}\alpha_{уг} + R_{0жел}\alpha_{жел})$. Температура $t°$ входит во второе слагаемое. Значит, чтобы $R_{общ}$ не зависело от температуры $t°$, надо, чтобы это второе слагаемое было равно нулю. Тогда $R_{общ} = R_{0\,уг} + R_{0\,жел}$ не будет зависеть от $t°$ (ведь $t°$ не будет входить в эту формулу).

Таким образом, чтобы выполнить условия задачи, надо записать: $t°(R_{0уг}\alpha_{уг} + R_{0жел}\alpha_{жел}) = 0$ или

$$\rho_{уг}\frac{l_{уг}}{S}\alpha_{уг} + \rho_{жел}\frac{l_{жел}}{S}\alpha_{жел} = 0, \text{ откуда } \rho_{уг}l_{уг}\alpha_{уг} = -\rho_{жел}l_{жел}\alpha_{жел}$$

и $$\boxed{\frac{l_{жел}}{l_{уг}} = -\frac{\rho_{уг}\alpha_{уг}}{\rho_{жел}\alpha_{жел}}}$$

Произведем вычисления:

$$\frac{l_{жел}}{l_{уг}} = -\frac{4\cdot10^{-5}\cdot\left(-0{,}08\cdot10^{-3}\right)}{1{,}2\cdot10^{-7}\cdot6\cdot10^{-3}} = 44,$$

т. е. железный стержень должен быть в 44 раза длиннее угольного.

Ответ: $l_{жел}/l_{уг} = 44$.

Задача 11

Во сколько раз уменьшится сопротивление проводника без изоляции, если его согнуть пополам, а затем скрутить?

Дано:

$l_2 = \dfrac{l_1}{2}$

$S_2 = 2S_1$

$\dfrac{R_1}{R_2}$ – ?

Обозначим l_1 длину проводника до того, как его согнули пополам, S_1 – его площадь поперечного сечения при этом, R_1 – его сопротивление до сгибания пополам, l_2 – длину согнутого пополам проводника, S_2 – его новую площадь поперечного сечения и R_2 – его новое сопротивление.

Решение. Сопротивление проводника до того, как его согнули пополам, было

$$R_1 = \rho\frac{l_1}{S_1}, \qquad (1)$$

где ρ – удельное сопротивление проводника.

После скручивания его сопротивление

$R_2 = \rho\frac{l_2}{S_2}$, или согласно условию

$$R_2 = \rho\frac{l_1}{2\cdot 2S_1} = \rho\frac{l_1}{4S_1}. \qquad (2)$$

Разделив (1) на (2), мы ответим на вопрос задачи:

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho l_1\cdot 4S_1}{S_1\rho l_1}$, $\frac{R_1}{R_2} = 4$, т. е. сопротивление при этом уменьшится в 4 раза.

Ответ: $R_1/R_2 = 4$.

Задача 12

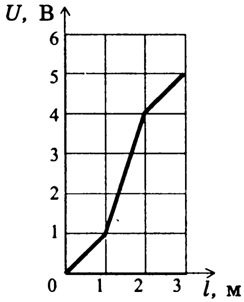


Рис. 5-21

На рис. 5-21 показан график падения напряжения на трех последовательно соединенных проводниках одинаковой длины и сечения. Как соотносятся сопротивления этих проводников?

Из рис. 5-21 следует, что падение напряжения на первом проводнике сопротивлением R_1 и длиной $l_1 = 1$ м было $U_1 = 1$ В, на втором проводнике сопротивлением R_2 и тоже длиной $l_2 = 1$ м оно было $U_2 = (4 - 1)$ В $= 3$ В и на третьем проводнике сопротивлением R_3 и такой же длиной оно было $U_3 = (5 - 4)$ В $= 1$ В.

Поскольку сила тока во всех трех последовательно соединенных проводниках одинакова, мы можем записать: $I = \frac{U_1}{R_1}$, $I = \frac{U_2}{R_2}$ и $I = \frac{U_3}{R_3}$, откуда $\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_3}{R_3}$ или $R_1 : R_2 : R_3 = U_1 : U_2 : U_3$, $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 3 : 1$.

Задача решена.

Ответ: $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 3 : 1$.

Задача 13

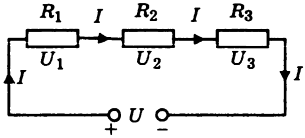


Рис. 5-22

Участок цепи состоит из трех последовательно соединенных проводников, подключенных к источнику напряжения U = 50 В (рис. 5-22). Сопротивление первого проводника R_1 = 2 Ом, второго R_2 = = 6 Ом, а напряжение на третьем проводнике U_3 = 10 В. Найти силу тока I в этих проводниках, сопротивление третьего проводника R_3 и напряжения U_1 и U_2 на первом и втором проводниках.

Дано:
U = 50 В
R_1 = 2 Ом
R_2 = 6 Ом
U_3 = 10 В
I – ?
R_3 – ?
U_1 – ?
U_2 – ?

Решение. Напряжение U на зажимах источника, которое нам известно, равно сумме напряжений на каждом проводнике, потому сумму напряжений на первом и втором проводниках $U_1 + U_2$ можно найти, отняв от общего напряжения U напряжение на третьем проводнике U_3, которое нам тоже известно. А зная напряжение на этих проводниках и их суммарное сопротивление $R_1 + R_2$, по закону Ома найдем силу тока в каждом из этих проводников, ведь при последовательном соединении она во всех проводниках одинакова.

Приступим: $U_1 + U_2 = U - U_3$, $I = \dfrac{U_1 + U_2}{R_1 + R_2}$ или

$$\boxed{I = \frac{U - U_3}{R_1 + R_2}}$$

Разделив общее напряжение U на силу тока I, мы найдем общее сопротивление $R_{общ}$ всех трех проводников, а отняв от $R_{общ}$ сумму сопротивлений $R_1 + R_2$, определим сопротивление R_3: $R_{общ} = \dfrac{U}{I}$, $R_3 = R_{общ} - (R_1 + R)$ или

$$\boxed{R_3 = \frac{U}{I} - R_1 - R_2}$$

Теперь уже легко найти напряжения U_1 и U_2, используя закон Ома:

$$\boxed{U_1 = IR_1} \text{ и } \boxed{U_2 = IR_2}$$

Произведем вычисления:

$$I = \frac{50 - 10}{2 + 6}\text{ А} = 5\text{А}, \; R_3 = \left(\frac{50}{5} - 2 - 6\right)\text{Ом} = 2\text{ Ом},$$

$U_1 = 5 \cdot 2$ В $= 10$ В, $U_2 = 5 \cdot 6$ В $= 30$ В.

Ответ: $I = 5$ А, $R_3 = 2$ Ом, $U_1 = 10$ В, $U_2 = 30$ В.

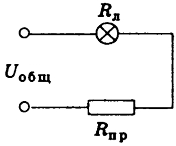


Рис. 5-23

Задача 14

Электрическую лампу сопротивлением $R_л = 200$ Ом, рассчитанную на напряжение $U_л = 100$ В, надо питать от сети с напряжением $U_{общ} = 220$ В. Какой длины l вольфрамовый проводник с диаметром поперечного сечения $d = 0{,}4$ мм надо включить последовательно с лампой, чтобы она не перегорела? Удельное сопротивление вольфрама $\rho = 5{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
$R_л = 200$ Ом
$U_л = 100$ Ом
$U_{общ} = 220$ В
$d = 0{,}4$ мм
$\rho = 5{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

l – ?

Решение. Напоминаем: если в условии задачи хоть что-нибудь сказано о соединительных проводах, то надо на вашей схеме последовательно к источнику напряжения «подключить» сопротивление $R_{пр}$, символизирующее собой сопротивление всех соединительных проводов (рис. 5-23).

Нам надо найти длину только вольфрамового проводника, подключенного последовательно к лампе (значит, сопротивлением остальных соединительных проводов можно пренебречь), поэтому воспользуемся формулой сопротивления $R_{пр} = \rho\dfrac{l}{S}$, где $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения проводника. С учетом этого $R_{пр} = \rho\dfrac{4l}{\pi d^2}$. (1)

Лампа и вольфрамовый проводник соединены последовательно. Из законов такого соединения следует, что напряжения на двух последовательно соединенных проводниках (ведь лампа – тоже проводник) прямо пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{U_л}{U_{пр}} = \frac{R_л}{R_{пр}}, \qquad (2)$$

где $U_{пр} = U_{общ} - U_л$. (3)

Подставив (1) и (3) в (2), мы получим равенство с одной неизвестной длиной l:

$$\frac{U_л}{U_{общ} - U_л} = \frac{R_л \pi d^2}{4\rho l}, \text{ откуда } \quad l = \frac{\pi d^2 R_л\left(U_{общ} - U_л\right)}{4\rho U_л}$$

или $$\boxed{l = \frac{\pi d^2 R_л}{4\rho}\left(\frac{U_{общ}}{U_л} - 1\right)}$$

Переведем в СИ единицу диаметра:
0,4 мм = $4 \cdot 10^{-4}$ м.
Произведем вычисления:

$$l = \frac{3{,}14 \cdot 16 \cdot 10^{-8} \cdot 200}{4 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-8}}\left(\frac{220}{200} - 1\right) \text{м} = 46 \text{ м}.$$

Ответ: l = 46 м.

Задача 15

N = 10 ламп, рассчитанных на напряжение $U_л$ = 2,5 В и силу тока $I_л$ = 0,1 А, надо соединить параллельно. Для их питания имеется источник напряжением $U_{общ}$ = 6 В. Резистор какого сопротивления R надо подключить последовательно к этому источнику (рис. 5-24), чтобы лампы не перегорели?

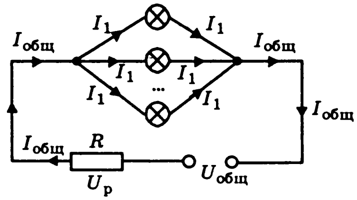


Рис. 5-24

Дано:
N = 10
$U_л$ = 2,5 В
$I_л$ = 0,1 А
$U_{общ}$ = 6 В

R – ?

Решение. Сопротивление резистора R можно найти, разделив напряжение на нем $U_р$ на силу тока в неразветвленном участке цепи $I_{общ}$, который течет и по резистору:

$$R = \frac{U_р}{I_{общ}}. \quad (1)$$

Напряжение на резисторе $U_р$ (падение напряжения, так его называют, чтобы показать, что на лампы попадет меньшее напряжение, чем дает источник) можно найти, отняв от напряжения источника $U_{общ}$ напряжение на лампах $U_л$, ведь оба этих напряжения нам известны: $U_р = U_{общ} - U_л$. (2)

Силу тока в общей части цепи $I_{общ}$ (т. е. в неразветвленном участке) найдем, умножив силу тока в каждой лампе $I_л$ на их число N, ведь лампы соединены параллельно: $I_{общ} = NI_л$.

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{R = \frac{U_{общ} - U_л}{NI_л}}$$

Произведем вычисления:

$$R = \frac{6 - 2{,}5}{10 \cdot 0{,}1} \text{ Ом} = 3{,}5 \text{ Ом}.$$

Ответ: R = 3,5 Ом.

Задача 16

Кабель состоит из двух стальных жил с площадью поперечного сечения S_1 = 0,4 мм^2 каждая и четырех медных жил с площадью поперечного сечения S_2 = 0,8 мм^2 каждая. Найти падение напряжения U на каждых l = 2 км кабеля при силе тока в нем I = 0,2 А. Удельное сопротивление стали $\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, удельное сопротивление меди $\rho_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
$N_1 = 2$
S_1 = 0,4 мм^2
$N_2 = 4$
S_2 = 0,8 мм^2
l = 2 км
I = 0,2 А
$\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м
$\rho_2 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

U – ?

Обозначим N_1 количество стальных жил, N_2 – количество медных жил.

Решение. Когда говорят о кабеле, сплетенном из разных жил одинаковой длины (или о сплаве), то подразумевают, что все эти жилы соединены параллельно. При таком соединении напряжение U на кабеле равно произведению силы тока I в нем на его общее сопротивление $R_{общ}$:

$$U = IR_{общ}\ . \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к определению общего сопротивления кабеля. Обозначим общее сопротивление N_1 стальных жил $R_{общ1}$, а общее сопротивление N_2 медных жил $R_{общ2}$. Тогда, поскольку эти жилы соединены параллельно, общее сопротивление кабеля

$$R_{общ} = \frac{R_{общ\,1} R_{общ\,2}}{R_{общ\,1} + R_{общ\,2}},$$

где $R_{общ1} = \dfrac{R_1}{N_1}$ и $R_{общ\,2} = \dfrac{R_2}{N_2}$, ведь сопротивления R_1 всех стальных жил одинаковы, а также одинаковы сопротивления R_2 всех медных жил.

Тогда

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1R_2}{N_1N_2\left(\dfrac{R_1}{N_1}+\dfrac{R_2}{N_2}\right)} = \frac{R_1R_2}{N_1N_2\,\dfrac{R_1N_2+R_2N_1}{N_1N_2}} =$$

$$= \frac{R_1R_2}{R_1N_2+R_2N_1}.$$

Здесь $R_1 = \rho_1\dfrac{l}{S_1}$ и $R_2 = \rho_2\dfrac{l}{S_2}$. С учетом этого получим

$$R_{\text{общ}} = \frac{\rho_1 l\rho_2 l}{S_1S_2\left(\rho_1\dfrac{l}{S_1}N_1+\rho_2\dfrac{l}{S_2}N_2\right)} =$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2 l^2}{S_1S_2 l\,\dfrac{\rho_1N_1S_2+\rho_2N_2S_1}{S_1S_2}} = \frac{\rho_1\rho_2 l}{\rho_1N_1S_2+\rho_2N_2S_1}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы ответим на вопрос задачи:

$$\boxed{U = I\frac{\rho_1\rho_2 l}{\rho_1N_1S_2+\rho_2N_2S_1}}$$

Переведем в СИ единицы величин:
0,4 мм^2 = $4\cdot10^{-7}$ м^2, 0,8 мм^2 = $8\cdot10^{-7}$ м^2,
2 км = $2\cdot10^3$ м.
Произведем вычисления:

$$U = 0{,}2\frac{1{,}2\cdot10^{-7}\cdot1{,}7\cdot10^{-8}\cdot2\cdot10^{3}}{1{,}2\cdot10^{-7}\cdot2\cdot8\cdot10^{-7}+1{,}7\cdot10^{-8}\cdot4\cdot4\cdot10^{-7}}\text{ В} =$$

$= 3{,}7$ В.

Ответ: $U = 3{,}7$ В.

Задача 17

Сопротивление одного из последовательно соединенных проводников в $N = 4$ раза больше сопротивления другого. Во сколько раз изменится сила тока в цепи, если эти проводники включить параллельно, а напряжение на них оставить прежним?

Дано:
$R_1 = NR_2$
$N = 4$

I_2 – ?
I_1 – ?

Обозначим I_1 силу тока в проводниках при их последовательном соединении, I_2 – силу тока в неразветвленном участке цепи при параллельном соединении этих проводников.

Решение. При последовательном соединении проводников их общее сопротивление

$$R_{общ1} = R_1 + R_2 = NR_2 + R_2 = R_2(N + 1).$$

При этом сила тока I_1 в этих проводниках

$$I_1 = \frac{U}{R_{общ1}} = \frac{U}{R_2(N+1)}, \qquad (1)$$

где U – общее напряжение на проводниках.

При параллельном соединении проводников их общее сопротивление

$$R_{общ2} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{NR_2 \cdot R_2}{NR_2 + R_2} = \frac{NR_2^2}{R_2(N+1)} = \frac{N}{N+1}R_2.$$

При этом сила тока I_2 в неразветвленной части цепи

$$I_2 = \frac{U}{R_{общ\,2}} = \frac{U(N+1)}{NR_2}. \qquad (2)$$

Нам осталось разделить (2) на (1), и задача будет решена: $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{U(N+1)R_2(N+1)}{NR_2U}$, $\boxed{\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{(N+1)^2}{N}}$

Произведем вычисления: $\dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{(4+1)^2}{4} = 6{,}25$.

Ответ: $I_2/I_1 = 6{,}25$.

Задача 18

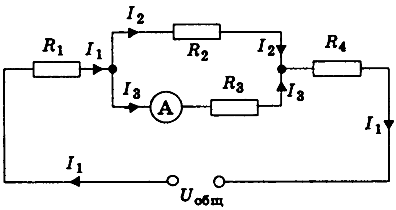


Рис. 5-25

Найти силы токов I_1, I_2 и I_4 в каждом сопротивлении и напряжения на них, если амперметр показывает I_3 = 1 А (рис. 5-25), а сопротивления R_1 = 3 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 10 Ом, R_4 = 1 Ом. Найти напряжение $U_{общ}$ на всем участке цепи.

Дано:
$I_3 = 1$ А
$R_1 = 3$ Ом
$R_2 = 2$ Ом
$R_3 = 10$ Ом
$R_4 = 1$ Ом

I_1 – ?
I_2 – ?
I_4 – ?
$U_{общ}$ – ?

Решение. Амперметр А соединен последовательно с сопротивлением R_3, поэтому мы силу тока, текущего через амперметр и сопротивление R_3, обозначили I_3, а силу тока в неразветвленном участке цепи, текущего через сопротивления R_1 и R_4, мы обозначили I_1.

Понятно, что $I_1 = I_4$, ведь оба сопротивления R_1 и R_4 соединены друг с другом последовательно.

Нам известны I_3 и R_3, значит, нам несложно определить напряжение $U_{2,3}$ на параллельных сопротивлениях R_2 и R_3: $U_{2,3} = I_3 R_3$.

Если теперь это напряжение разделить на общее сопротивление $R_{2,3}$ проводников R_2 и R_3, то мы сразу найдем силу тока I_1 в неразветвленной части цепи:

$$I_1 = I_4 = \frac{U_{2,3}}{R_{2,3}}, \text{ где } R_{2,3} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

поэтому $I_1 = I_4 = U_{2,3} \dfrac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}$

или $I_1 = I_4 = I_3 R_3 \dfrac{R_2 + R_3}{R_2 R_3}$, $\boxed{I_1 = I_4 = I_3 \dfrac{R_2 + R_4}{R_2}}$

Разделив $U_{2,3}$ на R_2, мы найдем силу тока I_2:

$$I_2 = \frac{U_{2,3}}{R_2} \quad \text{или} \quad \boxed{I_2 = \frac{I_3 R_3}{R_2}}$$

Общее напряжение $U_{общ}$ найдем как сумму напряжений U_1, $U_{2,3}$ и U_4, где $U_1 = I_1 R_1$ и $U_4 = I_1 R_4$. С учетом этого получим $U_{общ} = U_1 + U_{2,3} + U_4 = I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_1 R_4$

или $$\boxed{U_{общ} = I_1(R_1 + R_4) + I_3 R_3}$$

Произведем вычисления: $I_1 = I_4 = 1 \dfrac{2+1}{2}\text{ А} = 1{,}5\text{ А}$,

$I_2 \dfrac{1 \cdot 10}{2}\text{ А} = 5\text{ А}$.

$U_{общ} = (1{,}5(3+1) + 1 \cdot 10)$ В $= 16$ В.

Ответ: $I_1 = I_4 = 1{,}5$ А, $I_2 = 5$ А, $U_{общ} = 16$ В.

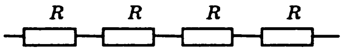
Задача 19

Четыре одинаковых сопротивления R соединяют параллельно всеми возможными способами. Определить общие сопротивления во всех этих случаях.

Дано:	
$N = 4$	
R	
$R_{общ}$ – ?	

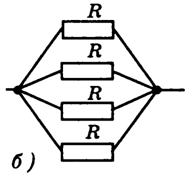
Решение. Чтобы решить эту задачу, надо непременно выполнить схемы всех полученных соединений сопротивлений (рис. 5-26, *а–з*).

а) $\boxed{R_{общ} = 4R}$



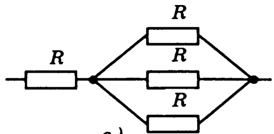
а)

б) $\boxed{R_{общ} = \frac{R}{4}}$ или $\boxed{R_{общ} = 0{,}25R}$



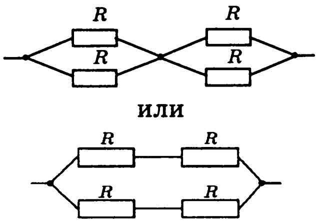
б)

в) $R_{общ} = R + \frac{R}{3}$, $\boxed{R_{общ} = \frac{4}{3}R}$



в)

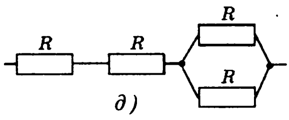
г) $R_{общ} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2}$, $\boxed{R_{общ} = R}$



г)

д) $R_{общ} = 2R + \frac{R}{2} = \frac{5}{2}R$,

$\boxed{R_{общ} = 2{,}5R}$



д)

Рис. 5-26

е) $R_{общ} = \dfrac{3R \cdot R}{3R + R} = \dfrac{3}{4}R$,

$\boxed{R_{общ} = 0{,}75R}$

ж) $R_{общ} = \dfrac{\dfrac{R}{2} \cdot 2R}{\dfrac{R}{2} + 2R} = \dfrac{R^2}{2{,}5R}$,

$\boxed{R_{общ} = 0{,}4R}$

з) $R_{общ} = \dfrac{\left(\dfrac{R}{2} + R\right)R}{\dfrac{R}{2} + R + R} = \dfrac{\dfrac{3}{2}R^2}{\dfrac{5}{2}R} = \dfrac{3}{5}R$,

$\boxed{R_{общ} = 0{,}6R}$

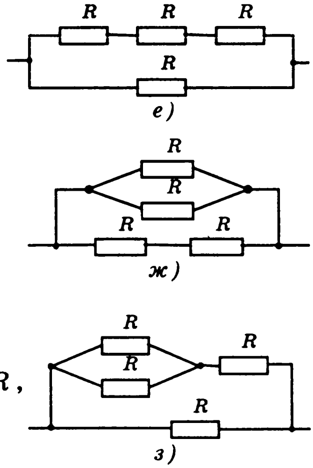


Рис. 5-26

Ответ: а) $R_{общ} = 4R$; б) $R_{общ} = 0{,}25R$;

в) $R_{общ} = \dfrac{4}{3}R$; г) $R_{общ} = R$; д) $R_{общ} = 2{,}5R$;

е) $R_{общ} = 0{,}75R$; ж) $R_{общ} = 2{,}5R$; з) $R_{общ} = 0{,}6R$.

Задача 20

Если вольтметр включить последовательно с резистором R_1 = 100 Ом, то он покажет напряжение U_1 = 40 В при напряжении на данном участке цепи U = 120 В. Какое напряжение U_2 покажет вольтметр, если к нему подключить последовательно резистор R_2 = 30 Ом, а напряжение U оставить прежним?

Дано:
R_1 = 100 Ом
U_1 = 40 В
U = 120 В
R_2 = 30 Ом
U_2 – ?

Решение. Выполним схему (рис. 5-27).

Вольтметр подключают параллельно к участку с напряжением U (между клеммами *ав* может быть включен какой-нибудь проводник, какая-нибудь нагрузка, например, лампочка или прибор, на котором напряжение U). Согласно условию к этому вольтметру подключают последовательно резисторы сначала сопротивлением R_1, затем R_2, поэтому напряжения на резисторах будут сначала $U - U_1$, затем $U - U_2$.

Мы знаем, что при последовательном соединении вольтметра и резистора напряжения на них прямо пропорциональны их сопротивлениям, поэтому в обоих случаях

$$\frac{U_1}{U - U_1} = \frac{R_в}{R_1} \qquad (1)$$

и $$\frac{U_2}{U - U_2} = \frac{R_в}{R_2}. \qquad (2)$$

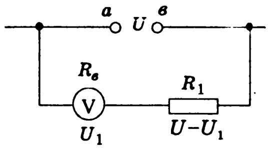


Рис. 5-27

Здесь $R_в$ – сопротивление вольтметра.

Если теперь разделить (1) на (2), то неизвестное сопротивление $R_в$ сократится и из полученного уравнения можно будет определить напряжение U_2. Проделаем эти действия: $\dfrac{U_1(U - U_2)}{(U - U_1)U_2} = \dfrac{R_в R_2}{R_1 R_в}$,

$$\frac{U_1 U - U_1 U_2}{U_2 U - U_1 U_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad U_1 U R_1 - U_1 U_2 R_1 = U_2 U R_2 - U_1 U_2 R_2,$$

$$U_1 U R_1 = U_1 U_2 R_1 + U_2 U R_2 - U_1 U_2 R_2,$$

$$\boxed{U_2 = \frac{U_1 U R_1}{U_1 R_1 + R_2(U - U_1)}}$$

Произведем вычисления:

$$U_2 = \frac{40 \cdot 120 \cdot 100}{40 \cdot 100 + 30(120 - 40)}\ В = 75\,В.$$

Ответ: $U_2 = 75$ В.

Задача 21

Напряжение на концах участка цепи, изображенного на рис. 5-28, равно $U_{общ}$. Найти силу тока $I_{общ}$ в его неразветвленной части, если сопротивления равны R.

Дано:
$U_{общ}$
R

$I_{общ}$ – ?

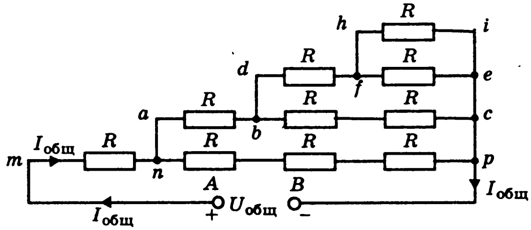


Рис. 5-28

Решение. Силу тока $I_{общ}$ в неразветвленной части можно найти по закону Ома для участка цепи: $I_{общ} = \dfrac{U_{общ}}{R_{общ}}$.

Здесь $R_{общ}$ – общее сопротивление всего этого участка.

Таким образом, задача сводится к нахождению общего сопротивления участка цепи, изображенного на рис. 5-28. Мы видим, что он включает в себя проводники, соединенные как последовательно, так и параллельно. Чтобы не ошибиться, найдем сначала общее сопротивление ветвей, наиболее удаленных от клемм АВ, соединяющих цепь с источником тока. Затем будем определять общее сопротивление других ветвей, постепенно приближаясь к этим клеммам, пока не найдем $R_{общ}$ всего участка.

Сначала найдем общее сопротивление двух ветвей *hi* и *fe*, соединенных параллельно. Сопротивление ветви *hi* равно R и сопротивление ветви *fe* равно R, поэтому общее сопротивление этих ветвей

$$R_{общ\,1} = \frac{R}{2}.$$

К этим двум ветвям сопротивление R ветви *fd* подключено последовательно, значит, общее сопротивление ветвей *dfe* и *hi* $R_{общ\,2} = R + R_{общ\,1} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$.

К ветвям, общее сопротивление которых $R_{общ\,2}$, участок *bc*, имеющий сопротивление $2R$, подключен параллельно. Тогда общее сопротивление всех трех ветвей *hi*, *dfe* и *bc* составит

$$R_{общ\,3} = \frac{R_{общ\,2} \cdot 2R}{R_{общ\,2} + 2R} \quad \text{или} \quad R_{общ\,3} = \frac{\frac{3}{2}R \cdot 2R}{\frac{3}{2}R + 2R} = \frac{6}{7}R.$$

Таким образом, весь участок *bdfhiec* имеет общее сопротивление $R_{общ3} = \frac{6}{7}R$. К нему последовательно подключено сопротивление R участка *ab*, поэтому общее сопротивление всего участка *abdfhiec*

$$R_{общ\,4} = R_{общ\,3} + R = \frac{6}{7}R + R = \frac{13}{7}R.$$

К участку *abdfhiec* подсоединен параллельно участок *np* сопротивлением $3R$. Тогда общее сопротивление участка *nabdfhiecp*

$$R_{общ\,5} = \frac{R_{общ\,4}3R}{R_{общ\,4} + 3R} \quad \text{или} \quad R_{общ\,5} = \frac{3 \cdot \frac{13}{7}R \cdot R}{\frac{13}{7}R + 3R} = \frac{39}{34}R.$$

К сопротивлению $R_{общ5}$ сопротивление R участка mn подключено последовательно, поэтому общее сопротивление всего участка цепи

$$R_{общ} = R_{общ\,5} + R \text{ или } R_{общ} = \frac{39}{34}R + R = \frac{73}{34}R.$$

Подставив полученное выражение для $R_{общ}$ в формулу закона Ома, с которой мы начали решать задачу, найдем

$$\boxed{I_{общ} = \frac{34U_{общ}}{73R}}$$

Задача решена.

Ответ: $I_{общ} = \dfrac{34U_{общ}}{73R}$.

Задача 22

К проволочному кольцу в двух точках a и b присоединены подводящие ток провода (рис. 5-29). В каком отношении делят точки a и b длину окружности кольца, если общее сопротивление $R_{общ}$ получившегося участка цепи в $n = 4{,}5$ раза меньше сопротивления R проволоки, из которой сделано кольцо?

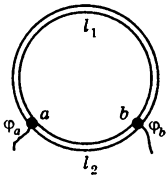


Рис. 5-29

Дано:
$R = nR_{общ}$
$n = 4{,}5$

$\dfrac{l_1}{l_2}$ – ?

Обозначим l_1 длину одной из частей кольца, на которые его делят точки a и b; l_2 – длину другой его части.

Решение. Длина проводника l связана с его сопротивлением R соотношением

$$R = \rho\frac{l}{S}. \qquad (1)$$

Здесь ρ – удельное сопротивление проводника, S – площадь его поперечного сечения. Очевидно, что эти величины применительно к проволочному кольцу, включенному в цепь, одинаковы для обеих частей, на которые точки a и b делят кольцо, и поэтому им можно не приписывать индекс. Тогда согласно (1)

$$R_1 = \rho\frac{l_1}{S} \text{ и } R_2 = \rho\frac{l_2}{S}.$$

Нам не известны сопротивления R_1 и R_2 этих участков, но известно их общее сопротивление $R_{общ}$. Поскольку разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b$ на концах обоих участков одинакова, значит, они находятся под одинаковым напряжением и, следовательно, соединены параллельно. Поэтому

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\rho l_1 \rho l_2}{S \cdot S\left(\rho \dfrac{l_1}{S} + \rho \dfrac{l_2}{S}\right)} = \frac{\rho}{S} \cdot \frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}. \quad (2)$$

Формула (1) определяет сопротивление R проволочного кольца, когда оно еще не было включено в цепь. Очевидно, что длина кольца l равна сумме длин l_1 и l_2, на которые точки a и b его делят:

$$l = l_1 + l_2, \text{ тогда } R = \rho \frac{l_1 + l_2}{S}. \quad (3)$$

Тогда с учетом того, что по условию задачи $R = nR_{\text{общ}}$, запишем: $\rho \dfrac{l_1 + l_2}{S} = n \dfrac{\rho}{S} \dfrac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ или $l_1 + l_2 = \dfrac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} n$. (4)

Таким образом, мы очень удачно исключили все неизвестные нам в уравнениях (1), (2) и (3) величины и оставили только те, о которых идет речь в условии задачи. Правда, теперь мы имеем только одно уравнение, в которое входят две неизвестные величины l_1 и l_2, так что определить их из этого уравнения мы не можем, а второе взять негде. Но нам, собственно, и не нужно их определять, а нужно найти отношение $\dfrac{l_1}{l_2}$. Значит, нам надо как-то исхитриться и выразить это отношение из уравнения (4). Для этого разделим сначала левую и правую части уравнения (4) на l_2. Получим

$$\frac{l_1}{l_2} + \frac{l_2}{l_2} = \frac{l_1 l_2}{l_2(l_1 + l_2)} n, \quad \frac{l_1}{l_2} + 1 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} n. \quad (5)$$

Теперь еще раз разделим на l_2 числитель и знаменатель правой части уравнения (5), причем разделим почленно:

$$\frac{l_1}{l_2} + 1 = \frac{\dfrac{l_1}{l_2}}{\dfrac{l_1}{l_2} + 1} n.$$

Отсюда $\left(\dfrac{l_1}{l_2} + 1\right)^2 = \dfrac{l_1}{l_2} n$, $\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^2 + 2\dfrac{l_1}{l_2} + 1 = \dfrac{l_1}{l_2} n$.

Так мы получили уравнение с одним неизвестным – отношением $\dfrac{l_1}{l_2}$, которое стоит в нем в квадрате, в первой степени и имеется свободный от $\frac{l_1}{l_2}$ член. Значит, придется решать квадратное уравнение. Приведем его к стандартному виду (типа $x^2 + pq + q = 0$) и решим относительно $\frac{l_1}{l_2}$: $\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 - (n-2)\frac{l_1}{l_2} + 1 = 0$.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} - 1} = \frac{n-2}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2 - 4n + 4 - 4}{4}} =$$

$$= \frac{n - 2 \pm \sqrt{n(n-4)}}{2},$$

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2} = 0{,}5\left(n - 2 + \sqrt{n(n-4)}\right)}$$

Задача в общем виде решена. Знак «минус» перед квадратным корнем мы опустили, так как отрицательное значение $\frac{l_1}{l_2}$ не имеет физического смысла, а вычисления с учетом этого минуса дают отрицательную величину $\frac{l_1}{l_2}$.

Очевидно, что отношение $\frac{l_1}{l_2}$ – безразмерная величина.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\frac{l_1}{l_2} = 0{,}5\left(4{,}5 - 2 + \sqrt{4{,}5(4{,}5-4)}\right) = 2.$$

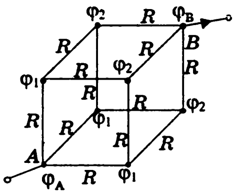
Ответ: $l_1/l_2 = 2$.

Задача 23

Кубик, сопротивление каждого ребра которого равно R, включен в цепь так, как показано на рис. 5-30, *а*. По общей части цепи течет ток $I_{\text{общ}}$. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками А и В.

Дано:
R
$I_{\text{общ}}$
$\varphi_A - \varphi_B$ – ?

Решение. Решая задачи электростатики, мы подробно рассмотрели подобные задачи, только там в ребра кубика были включены не сопротивления, а конденсаторы. Еще раз подчеркнем, что, когда вы сталкиваетесь с



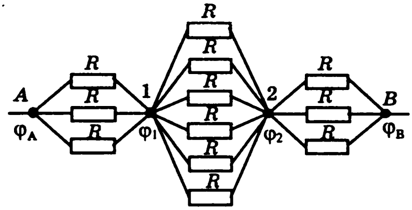


Рис. 5-30

задачами, в которых не сразу определишь, какое здесь соединение, последовательное или параллельное (конденсаторов или проводников, все равно), прежде всего отметьте точки (узлы, в которых соединены концы более двух проводников), имеющие одинаковые потенциалы (обозначьте эти потенциалы буквой φ с одинаковым индексом). Кроме того, помните, что если концы проводников с одинаковым сопротивлением соединены в одной точке и, значит, имеют одинаковый потенциал, а сами проводники расположены симметрично относительно некоторой оси или плоскости симметрии, проходящей через точки включения системы проводников в схему (в нашем случае такой осью служит ось А – В), то другие концы этих проводников тоже имеют равные потенциалы. Концы всех проводников, имеющих одинаковый потенциал, можно соединить в одной точке (или, наоборот, разъединить), заменив вашу сложную схему на более простую, эквивалентную первой.

Теперь обратимся к рис. 5-30, *а* и, исходя из этих рассуждений, убедимся, что три проводника, концы которых соединены в точке А с потенциалом φ_A, имеют на других концах, симметрично расположенных относительно оси А – В, тоже равные потенциалы, которые мы обозначили φ_1. Точно так же проводники, одни концы которых соединены в точке В с потенциалом φ_B, имеют на других концах равные потенциалы, например φ_2. Таких проводников тоже три. Остальные шесть проводников на одних концах имеют потенциалы φ_1, а на других φ_2. Поэтому соединим все концы с потенциалом φ_A в одну точку (их всего три), все концы с потенциалом φ_1 – в другую точку (их девять), все концы с потенциалом φ_2 – в третью точку (их тоже девять) и, наконец, все концы с потенциалом $\varphi_В$ – в одну точку (их три). Тогда мы получим схему, изображенную на рис. 5-30, *б*, эквивалентную схеме на рис. 5-30, *а*.

Теперь наша задача найти $R_{общ}$ существенно упрощена. Мы видим, что полученная схема содержит три последовательно соединенных участка: А – 1, 1 – 2 и 2 – В. Участки А – 1 и 2 – В содержат по три одинаковых параллельных сопротивления R, и, значит, общее сопротивление каждого такого участка равно $\frac{R}{3}$. Участок 1 – 2 содержит шесть таких сопротивлений, тоже параллельных друг другу, и значит, его общее сопротивление равно $\frac{R}{6}$. Тогда, поскольку эти три участка последовательны друг другу, общее сопротивление всей этой цепи

$$R_{общ} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$

Еще раз хотим обратить ваше внимание на то, что сопротивление R (резистор) обычно изображается на схемах узким прямоугольником —▭—, а просто прямой линией обычно изображают соединительные провода, сопротивлением которых, как правило, пренебрегают. Однако в некоторых задачниках встречаются задачи, в которых проводники, имеющие сопротивления, обозначаются просто прямой линией, как на рис. 5-30, *а*.

Зная сопротивление $R_{общ}$, мы легко найдем искомую разность потенциалов $\varphi_А - \varphi_В$ по закону Ома для участка цепи: $\varphi_А - \varphi_В = I\,R_{общ}$ или $\varphi_А - \varphi_В = \frac{5}{6}IR$

Задача решена.

Ответ: $\varphi_А - \varphi_В = \frac{5}{6}IR$.

Задача 24

Какое напряжение $U_В$ показывает вольтметр, включенный, как показано на схеме (рис. 5-31, *а*)? Напряжение $U_0 = 200$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 40$ Ом, $R_4 = 30$ Ом. Сопротивление вольтметра во много раз больше сопротивлений резисторов.

Дано:
$U_0 = 200$ В
$R_1 = 10$ Ом
$R_2 = 20$ Ом
$R_3 = 40$ Ом
$R_4 = 30$ Ом

$U_В$ – ?

Решение. Словами «сопротивление вольтметра во много раз больше сопротивлений резисторов» нам дают понять, что сила тока, текущего через вольтметр, во много раз меньше сил токов, текущих в резисторах, поэтому силой тока в вольтметре можно пренебречь, т. е. считать ее равной нулю. Тогда участки этой схемы с сопротивлениями $R_1 + R_2$ и $R_3 + R_4$ будут соединены параллельно (рис. 5-31, б) и их общее сопротивление

$$R_{общ} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

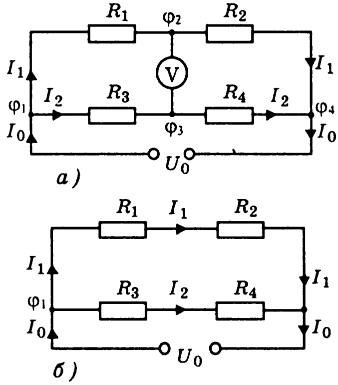


Рис. 5-31

Напряжение $U_В$, которое показывает вольтметр, равно разности потенциалов $\varphi_2 - \varphi_3$ между точками, к которым он подключен. Если мы определим разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_1 - \varphi_3$ через силы токов I_1 и I_2 и соответствующие сопротивления, а затем вычтем из разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_3$ разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, то потенциал φ_1 сократится и мы определим напряжение $\varphi_2 - \varphi_3 = U_В$, выразив его через силы токов в параллельных ветвях и их сопротивления. Силы токов I_1 и I_2 в свою очередь найдем, используя закон Ома и законы соединения проводников. Приступим:

$\varphi_1 - \varphi_2 = I_1R_1$, $\varphi_1 - \varphi_3 = I_2R_3$, поэтому

$\varphi_1 - \varphi_3 - (\varphi_1 - \varphi_2) = I_2R_3 - I_1R_1$,

$\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_1 + \varphi_2 = I_2R_3 - I_1R_1$ и

$$\varphi_2 - \varphi_3 = I_2R_3 - I_1R_1. \qquad (1)$$

Силы токов I_1 и I_2 в параллельных ветвях обратно пропорциональны сопротивлениям этих ветвей $R_1 + R_2$ и $R_3 + R_4$: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2}$, откуда $I_2 = I_1 \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4}$. (2)

Подставим (2) в (1). Так мы исключим силу тока I_2. Правда, силы тока I_1 мы тоже не знаем, но ее можно найти, если разделить напряжение U_0 на параллельных ветвях на сопротивление $R_1 + R_2$ ветви, по которой течет ток силой I_1. Проделаем эти действия. Подставим (2) в (1):

$$U_{\text{В}} = \varphi_2 - \varphi_3 = I_1 \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} R_3 - I_1 R_1 = I_1\left(\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} R_3 - R_1\right) =$$

$$= I_1\left(\frac{R_1R_3 + R_2R_3 - R_1R_3 - R_1R_4}{R_3 + R_4}\right) = I_1 \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{R_3 + R_4}. \quad (3)$$

Теперь найдем I_1: $I_1 = \dfrac{U_0}{R_1 + R_2}$. (4)

Подставив (4) в (3), мы решим задачу:

$$\boxed{U_{\text{В}} = \frac{U_0(R_2R_3 - R_1R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}}$$

Произведем вычисления:

$$U_{\text{В}} = \frac{200(20 \cdot 40 - 10 \cdot 30)}{(10 + 20)(40 + 30)} \text{ В} = 48 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{\text{В}} = 48$ В.

Задача 25

Сопротивление гальванометра $R_{\text{Г}} = 400$ Ом. При прохождение через него тока силой $I_0 = 0{,}2$ мА стрелка гальванометра отклоняется на одно деление. Вся шкала гальванометра имеет $N = 100$ одинаковых делений. Если к этому гальванометру подключить один шунт, то он сможет измерять токи силой до $I_1 = 2$ А, а если к нему подключить другой шунт, то он сможет измерять токи силой до $I_2 = 8$ А. Найти сопротивления R_1 и R_2 этих шунтов.

Дано:
$R_{\text{Г}} = 400$ Ом
$I_0 = 0{,}2$ мА
$N = 100$
$I_1 = 2$ А
$I_2 = 8$ А

R_1 – ?
R_2 – ?

Решение. Гальванометр представляет собой чувствительный прибор, позволяющий измерять очень слабые токи. Согласно условию, когда по нему проходит ток силой I_0, стрелка гальванометра отклоняется на одно деление, а всего у гальванометра N делений.

Значит, этот прибор рассчитан на измерение токов силой до $I_{\text{Г}} = NI_0$, а если по нему пропустить ток большей силы, то он «сгорит», испортится.

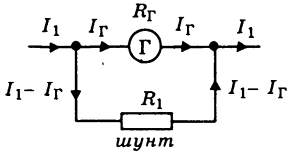


Рис. 5-32

Чтобы этого не случилось, подключим к гальванометру параллельно шунт сопротивлением R_1 (рис. 5-32), который позволит гальванометру измерять токи силой до I_1. Тогда через шунт пойдет ток силой $I_1 - I_{\text{Г}}$. Согласно законам параллельного соединения двух проводников силы токов в них обратно пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{I_1 - I_г}{I_г} = \frac{R_г}{R_1}, \text{ откуда } R_1 = \frac{I_г R_г}{I_1 - I_г}.$$

Поскольку $I_г = NI_0$, то $\boxed{R_1 = \frac{NI_0 R_г}{I_1 - NI_0}}$.

Аналогично сопротивление второго шунта R_2, который требуется для измерения токов силой до I_2

$$\boxed{R_2 = \frac{NI_0 R_г}{I_2 - NI_0}}$$

Переведем в СИ единицу силы тока I_0:
$0{,}2$ мА $= 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ А $= 2 \cdot 10^{-4}$ А.
Произведем вычисления:

$$R_1 = \frac{100 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 400}{2 - 100 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \text{ Ом} = 4 \text{ Ом},$$

$$R_1 = \frac{100 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 400}{8 - 100 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \text{ Ом} = 10 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 1$ Ом.

Задача 26

Сопротивление гальванометра $R_г = 4$ Ом. Если на него подать напряжение $U_0 = 2$ мВ, то стрелка отклонится на одно деление (т. е. цена деления шкалы прибора 2 мВ/дел). Вся шкала имеет $N = 50$ делений. Найти добавочное сопротивление $R_{д.с.}$, которое следует подключить последовательно к этому гальванометру, чтобы с его помощью можно было измерять напряжения до $U = 10$ В (рис. 5-33).

Дано:
$R_г = 4$ Ом
$U_0 = 2$ мВ
$N = 50$
$U = 10$ В

$R_{д.с.}$ – ?

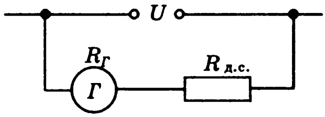


Рис. 5-33

Решение. При последовательном соединении гальванометра с добавочным сопротивлением напряжения на них прямо пропорциональны их сопротивлениям. Наш гальванометр рассчитан на напряжения не более $U_г = NU_0$, а надо измерить напряжение U. Значит, на добавочное сопротивление должно «упасть» напряжение $U - U_г = U - NU_0$.

С учетом сказанного

$$\frac{U - U_г}{U_г} = \frac{R_{д.с.}}{R_г} \text{ или } \frac{U - NU_0}{NU_0} = \frac{R_{д.с.}}{R_г}, \text{ откуда}$$

$$R_{д.с.} = R_Г \frac{U - NU_0}{NU_0} \quad \text{или} \quad \boxed{R_{д.с.} = R_Г\left(\frac{U}{NU_0} - 1\right)}$$

Переведем в СИ единицу U_0: 2 мВ = $2 \cdot 10^{-3}$ В.

Произведем вычисления:

$$R_{д.с.} = 4\left(\frac{10}{50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} - 1\right) \text{Ом} = 396 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{д.с.}$ = 396 Ом.

Задача 27

Вольтметр сопротивлением $R_В$ = 10 Ом имеет цену деления шкалы $U_ц$ = 0,1 В. Шкала вольтметра содержит N = 150 делений. Для расширения шкалы прибора к вольтметру последовательно подключают добавочное сопротивление $R_{д.с.}$ (рис. 5-34). Какой длины l должен быть проводник с сопротивлением $R_{д.с.}$, чтобы вольтметр мог измерять напряжения до U = 200 В? Проводник стальной, площадь его поперечного сечения S = 0,5 мм^2. Удельное сопротивление стали $\rho = 1 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

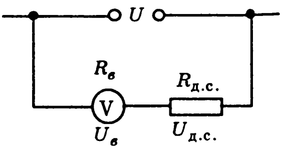


Рис. 5-34

Дано:
$R_В$ = 10 Ом
$U_ц$ = 0,1 В
N = 150
U = 200 В
S = 0,5 мм^2
$\rho = 1 \cdot 10^{-7}$ Ом · м

l – ?

Решение. Чтобы можно было измерять вольтметром напряжения, большие, чем те, на которые он рассчитан, и прибор при этом не сгорел, к вольтметру последовательно подключают проводник, который называется добавочным сопротивлением $R_{д.с.}$. При этом часть измеряемого напряжения U «падает» на сам вольтметр, а часть – на добавочное сопротивление $R_{д.с.}$. Если вольтметр рассчитан на напряжение $U_В$, а с его помощью хотят измерить напряжение U, то на добавочное сопротивление «упадет» $U_{д.с.} = U - U_В$. Поскольку добавочное сопротивление $R_{д.с.}$ и вольтметр сопротивлением $R_В$ соединены последовательно, то напряжения на них прямо пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{U_{д.с.}}{U_В} = \frac{R_{д.с.}}{R_В} \quad \text{или} \quad \frac{U - U_В}{U_В} = \frac{R_{д.с.}}{R_В}. \qquad (1)$$

Сопротивление проводника $R_{д.с.}$ связано с его длиной l и сечением S соотношением $R_{д.с.} = \rho\frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление проводника.

Максимальное напряжение $U_В$, на которое рассчитан вольтметр без добавочного сопротивления, равно произведению его цены деления $U_ц$ и числа делений N шкалы прибора: $U_В = NU_ц$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1):

$$\frac{U - NU_ц}{NU_ц} = \frac{\rho l}{R_В S} \quad \text{или} \quad \frac{U}{NU_ц} - 1 = \frac{\rho l}{R_В S}.$$

Отсюда определим искомую длину проводника добавочного сопротивления l, поскольку остальные величины нам известны: $\boxed{l = \frac{R_В S}{\rho}\left(\frac{U}{NU_ц} - 1\right)}$

Переведем единицу площади поперечного сечения S в СИ: 0,01 мм^2 = $1 \cdot 10^{-8}$ м^2.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$l = \frac{10 \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-7}}\left(\frac{200}{150 \cdot 0{,}1} - 1\right) \text{м} = 12{,}3 \text{ м}.$$

Ответ: l = 12,3 м.

Задача 28

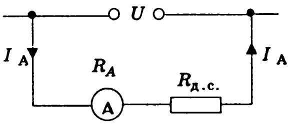


Рис. 5-35

Если к амперметру, рассчитанному на предельный ток силой $I_А$ = 10 А, подсоединить шунт сопротивлением $R_ш$ = 10 Ом, то цена деления амперметра увеличится в N = 10 раз. Какое добавочное сопротивление $R_{д.с.}$ следует подключить к этому амперметру, чтобы им можно было измерять напряжение до U = 150 В?

Дано:
$I_А$ = 10 А
$R_ш$ = 10 Ом
N = 10
U = 150 В

$R_{д.с.}$ – ?

Решение. Через амперметр, как зашунтированный, так и с подключенным добавочным сопротивлением, может течь только ток силой $I_А$, не более, иначе он «сгорит». Если этот амперметр с добавочным сопротивлением подключить к участку с напряжением U, чтобы это напряжение измерить, то ток силой $I_А$ должен течь и по добавочному сопротивлению $R_{д.с.}$ (рис. 5-35). При этом согласно закону Ома общее сопротивление амперметра $R_А$ и добавочного сопротивления

$$R_А + R_{д.с.} = \frac{U}{I_А}, \text{ откуда } R_{д.с.} = \frac{U}{I_А} - R_А. \quad (1)$$

Таким образом, решение сводится к определению сопротивления амперметра R_A.

Поскольку цена деления амперметра с шунтом увеличилась в N раз по сравнению с ценой деления амперметра без шунта, значит, этот амперметр смог измерять в N раз большую силу тока I по сравнению с силой тока I_A, которую он мог измерять без шунта, т. е. $N = \dfrac{I}{I_A}$.

Сопротивление шунта можно определить по формуле

$$R_ш = \frac{R_A}{N-1}, \text{ откуда } R_A = R_ш(N-1). \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1), и задача будет решена:

$$\boxed{R_{д.с.} = \frac{U}{I_A} - R_ш(N-1)}$$

Произведем вычисления:

$$R_{д.с.} = \left(\frac{150}{10} - 1(10-1)\right) \text{Ом} = 6 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_{д.с.} = 6$ Ом.

Задача 29

Из проводника сопротивлением $R = 10$ Ом сделали два одинаковых кольца с перемычками по диаметру и присоединили их к источнику напряжения $U = 100$ В (рис. 5-36, *а*). Найти силу тока I в неразветвленном участке цепи. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

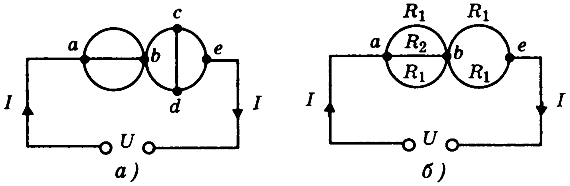


Рис. 5-36

Дано:	
$R = 10$ Ом	
$U = 100$ В	
I – ?	

Решение. Поскольку кольца одинаковы, значит, сопротивление проводника, из которого сделано каждое кольцо с перемычкой, равно $0{,}5R$.

Теперь обратимся к схеме. Поскольку картина симметрична относительно оси, которую можно провести через точки *аве*, то точки *c* и *d* будут иметь одинаковые потенциалы, поэтому перемычку *cd* можно исключить из схемы, и тогда получим эквивалентную схему, изображенную на рис. 5-36, *б*. Эта схема нам нужна для определения общего сопротивления $R_{общ}$ двух колец, потому что, зная его, мы найдем силу тока I в неразветвленной части цепи по формуле

$$I = \frac{U}{R_{общ}}. \qquad (1)$$

Если бы мы знали сопротивления половинок окружностей R_1 и диаметра ab R_2, то $R_{общ}$ определили бы по законам последовательного и параллельного соединения проводников:

$$R_{общ} = R_{общ\ ab} + R_{общ\ be} = \frac{\frac{R_1}{2} \cdot R_2}{\frac{R_1}{2} + R_2} + \frac{R_1}{2} =$$

$$= \frac{R_1 R_2}{R_1 + 2R_2} + \frac{R_1}{2} = \frac{2R_1 R_2 + R_1^2 + 2R_1 R_2}{2(R_1 + 2R_2)} =$$

$$= \frac{R_1(R_1 + 4R_2)}{2(R_1 + 2R_2)}. \qquad (2)$$

Таким образом, задача сводится к определению сопротивлений половинки окружности R_1 и диаметра R_2. Если две половинки окружности и диаметр соединить последовательно, то их сопротивление станет равно $0{,}5R$, ведь из проводника сопротивлением $0{,}5R$ изготовлены эти половинки и диаметр.

Теперь нам надо «связать» длину половинки окружности l_1 и диаметра l_2 с длиной проводника l сопротивлением $0{,}5R$: $l = 2l_1 + l_2$.

Между длиной половинки окружности l_1 и длиной диаметра ab l_2 тоже есть связь: $2l_1 = \pi l_2$, (3)
поэтому $l = \pi l_2 + l_2 = l_2(\pi + 1)$. (4)

Но $\frac{1}{2}R = \rho\frac{l}{S}$ (5), а $R_2 = \rho\frac{l_2}{S}$, (6)

где ρ – удельное сопротивление проводника, а S – площадь его поперечного сечения. Если из (5) определить l, а из (6) – l_2 и подставить полученные выражения в (4), то мы установим связь R_2 с R, а ведь R нам известно. Проделаем эти действия:

из (5) $l = \frac{RS}{2\rho}$ и из (6) $l_2 = \frac{R_2 S}{\rho}$. (7)

С учетом (4) $\frac{RS}{2\rho} = \frac{R_2 S}{\rho}(\pi + 1)$, откуда

$$R_2 = \frac{R}{2(\pi + 1)}. \qquad (8)$$

Теперь выразим длину l_1 через сопротивление R_1:

$$R_1 = \rho\frac{l_1}{S}, \text{ откуда } l_1 = \frac{R_1 S}{\rho}. \qquad (9)$$

Подставим (7) и (9) в (3). Тем самым мы установим связь R_1 с R_2, а поскольку R_2 мы уже определили через известное R, то сможем определить и R_1, а затем и $R_{общ}$.

Подставим (7) и (9) в (3):

$2\frac{R_1 S}{\rho} = \pi\frac{R_2 S}{\rho}$, $R_1 = \frac{\pi R_2}{2}$ или согласно (8)

$$R_1 = \frac{\pi R}{4(\pi + 1)}. \qquad (10)$$

Теперь подставим (8) и (10) в (2) и найдем $R_{общ}$:

$$R_{общ} = \frac{\pi R\left(\frac{\pi R}{4(\pi+1)} + 4\frac{R}{2(\pi+1)}\right)}{4(\pi+1)\cdot 2\left(\frac{\pi R}{4(\pi+1)} + 2\frac{R}{2(\pi+1)}\right)} =$$

$$= \frac{\pi R^2(\pi + 8)}{4(\pi+1)\cdot 8(\pi+1)\frac{R(\pi+4)}{4(\pi+1)}} = \frac{\pi R(\pi + 8)}{8(\pi + 1)(\pi + 4)}. \qquad (11)$$

Нам осталось подставить (11) в (1), и задача будет решена:

$$\boxed{I = U\frac{8(\pi + 1)(\pi + 4)}{\pi R(\pi + 8)}}$$

Произведем вычисления:

$$I = 100\frac{8(3{,}14 + 1)(3{,}14 + 4)}{3{,}14 \cdot 10(3{,}14 + 8)} \text{ А} = 67{,}6 \text{ А}.$$

Ответ: $I = 67{,}6$ А.

Задача 30

На схеме (рис. 5-37, *а*) изображен участок цепи, состоящей из бесконечно большого числа соединений трех резисторов сопротивлением R каждый. Определите сопротивление $R_{общ}$ всего участка.

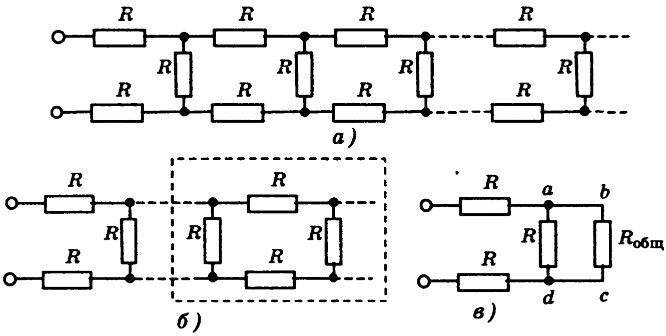


Рис. 5-37

Дано:	
R	
$R_{общ}$ – ?	

Решение. Да, так сразу и не сообразишь, как такое может быть, чтобы общее сопротивление всего участка $R_{общ}$ при любом количестве звеньев из трех одинаковых R независимо от их числа оставалось одним и тем же. Ведь вроде бы при присоединении каждой последующей тройки резисторов общее сопротивление всего участка цепи должно изменяться. А надо, чтобы оно не изменялось. Вот за эту мысль давайте и «уцепимся».

Значит, если мы мысленно первую тройку резисторов отсоединим от этого участка, то вся оставшаяся часть цепи (мы ее на рис. 5-37, *б* обвели пунктиром) должна по-прежнему иметь общее сопротивление $R_{общ}$. Поэтому мы к первой тройке можем подключить резистор, сопротивление которого равно общему сопротивлению $R_{общ}$ участка, обведенного штриховой линией рис. 5-37, *в*. И при этом общее сопротивление всего изображенного на схеме рис. 5-37, *в* участка тоже должно быть $R_{общ}$.

Только при таком условии $R_{общ}$ не будет зависеть от количества троек резисторов, подключаемых справа к схеме.

До главного мы додумались. Теперь уже проще. Используя законы последовательного и параллельного соединения проводников, запишем: $R_{общ} = 2R + R_{общ\ abcd}$, где общее сопротивление участка

$$R_{общ\ abcd} = \frac{RR_{общ}}{R + R_{общ}}, \qquad (2)$$

и тогда $R_{общ} = 2R + \dfrac{RR_{общ}}{R + R_{общ}}$,

$$RR_{общ} + R^2_{общ} = 2R^2 + 2RR_{общ} + RR_{общ},$$

$$R^2_{общ} - 2RR_{общ} - 2R^2 = 0,$$

$$R_{общ} = R \pm \sqrt{R^2 + 2R^2}\,, \quad \boxed{R_{общ} = R\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 2{,}7R}$$

Решение с «минусом» перед корнем мы опускаем, потому что вычитаемое $\sqrt{3R^2}$ больше R и сопротивление $R_{общ}$ будет отрицательным, что не имеет смысла.

Ответ: $R_{общ} = R\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 2{,}7R$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти длину проводника l, выполненного из медной проволоки с площадью поперечного сечения $S = 0{,}5$ мм^2. При силе тока $I = 100$ мА напряжение на этом проводнике $U = 2$ В. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $l = \dfrac{US}{\rho I} = 588$ м.

Задача 2. Напряженность электрического поля в стальном проводнике $E = 20$ мВ/м, диаметр поперечного сечения проводника $d = 0{,}8$ мм. Найти силу тока I в этом проводнике. Удельное сопротивление $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

Ответ: $I = \dfrac{\pi d^2 E}{4\rho} = 0{,}08$ А.

Задача 3. Определить плотность тока j в медном проводнике, если на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Молярная масса меди $M = 0{,}064$ кг/моль, ее плотность $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3. Свободные электроны за время $t = 20$ с, двигаясь упорядоченно, проходят расстояние $l = 16$ см.

Ответ: $j = \dfrac{\rho e l N_A}{Mt} = 1{,}1 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 4. Найти массу m алюминиевого провода с площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2 и сопротивлением $R = 20$ Ом. Удельное сопротивление алюминия $\rho_{сопр} = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$Ом · м, плотность алюминия $\rho_{пл} = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $m = RS^2 \dfrac{\rho_{пл}}{\rho_{сопр}} = 2$ кг.

Задача 5. Напряжение на выходе электростанции $U = 10$ кВ, а потребитель электроэнергии находится на расстоянии $l = 40$ км от нее. Найти диаметр d медного провода для изготовления двухпроводной линии электропередачи, чтобы при силе тока $I = 10$ А потери напряжения на сопротивлении соединительных проводов не превышали $\Delta U/U = 5\%$.

Примечание: здесь ΔU – потери напряжения на проводах.

Ответ: $d = 4\sqrt{\dfrac{10\rho lI}{\pi U}} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м $= 1{,}2$ мм.

Задача 6. Между круглыми обкладками плоского конденсатора с радиусом r и расстоянием между ними d находится диэлектрик с удельным сопротивлением ρ. Чему равно электрическое сопротивление R этого диэлектрика?

Ответ: $R = \dfrac{\rho d}{\pi r^2}$.

Задача 7. Какое напряжение U можно подать на катушку с концентрацией витков n и диаметром витков D, чтобы плотность тока в ней была j? Длина катушки l и удельное сопротивление проводника ρ известны.

Ответ: $U = \pi D n l \rho j$.

Задача 8. Найти массу свободных электронов m, проходящих через поперечное сечение проводника за время $t = 10$ ч при силе тока в проводнике $I = 10$ А. Масса одного электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль его заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $m = m_e \dfrac{It}{e} = 2 \cdot 10^{-6}$ кг.

Задача 9. Моток проволоки имеет массу m. При напряжении на нем U по проволоке проходит ток силой I. Найти длину проволоки l и площадь ее поперечного сечения S. Удельное сопротивление проволоки $\rho_{\text{сопр}}$ и ее плотность $\rho_{\text{пл}}$ известны.

Ответ: $S = \sqrt{\dfrac{m\rho_{\text{сопр}} I}{\rho_{\text{пл}} U}}$, $l = \dfrac{US}{\rho_{\text{сопр}} I}$.

Задача 10. Чему равна плотность тока j в проводнике, если за $t = 1$ мин через его поперечное сечение протекает $N = 2 \cdot 10^{21}$ электронов, а диаметр поперечного сечения проводника $d = 1$ мм? Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $j = \dfrac{4Ne}{\pi d^2 t} = 6{,}8 \cdot 10^{6}$ А/м^2.

Задача 11. Электрическая цепь состоит из двух последовательно соединенных кусков медного провода сечением $S_1 = 2$ мм^2 и $S_2 = 3$ мм^2. Во сколько раз скорость упорядоченного движения электронов в первом куске больше их скорости во втором куске?

Ответ: $v_1/v_2 = S_2/S_1 = 1{,}5$.

Задача 12. Найти скорость v упорядоченного движения электронов в медном проводнике сечением $S = 25$ мм^2 при силе тока $I = 50$ А, считая, что на каждый атом приходится один электрон проводимости. Молярная масса меди $M = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, число Авагадро (число атомов в одном моле меди) $N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Ответ: $v = \dfrac{MI}{\rho e S N_А} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м/с.

Задача 13. Сколько электронов проходит через поперечное сечение проводника длиной $l = 10$ м с диаметром поперечного сечения $d = 2$ мм за $t = 10$ мин при напряжении на этом проводнике $U = 220$ В? Проводник медный, удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $N = \dfrac{\pi d^2 t U}{4 e \rho l} = 1{,}5 \cdot 10^{25}$.

Задача 14. Сила тока в проводнике равномерно возрастает от $I_1 = 0$ до $I_2 = 5$ А за $t = 8$ с. Какой заряд q проходит при этом через поперечное сечение проводника?

Указание: поскольку сила тока возрастает равномерно, в формуле силы тока можно использовать ее среднее значение.

Ответ: $q = 0{,}5 I_2 t = 20$ Кл.

Задача 15. Чему равна плотность тока j в медном проводнике длиной $l = 5$ м, если он находится под напряжением $U = 10$ В?

Ответ: $j = \dfrac{U}{\rho l} = 1{,}2 \cdot 10^8$ А/м^2.

Задача 16. Две проволоки – медная и алюминиевая – имеют одинаковую массу. Медная проволока в 4 раза длиннее алюминиевой, плотность меди в 3,3 раза больше плотности алюминия, а удельное сопротивление меди в 1,65 раза меньше удельного сопротивления алюминия. Во сколько раз различаются их сопротивления?

Ответ: $\dfrac{R_{Cu}}{R_{Al}} = \dfrac{16\, \rho_{сопр\,Cu} \rho_{пл\,Cu}}{\rho_{сопр Al} \rho_{пл Al}} = 32$.

Задача 17. По нихромовой нити лампы идет ток $I = 1$ А. Диаметр нити $d = 0{,}1$ мм, а ее температура во время горения лампы $t° = 3000$°С. Чему равна напряженность E электрического поля в нити? Удельное сопротивление нихрома при $t_0° = 0$°С $\rho_0 = 1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, его температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 1 \cdot 10^{-4}$ К$^{-1}$.

Ответ: $E = \dfrac{4 \rho_0 I}{\pi d^2} \left(1 + \alpha t^0\right) = 166$ В/м.

Задача 18. Сопротивление вольфрамовой нити лампы $R_1 = 40$ Ом при $T_1 = 300$ К. Чему равна температура T_2 нити, когда по ней течет ток силой $I = 2$ А при напряжении на лампе $U = 220$ В? Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

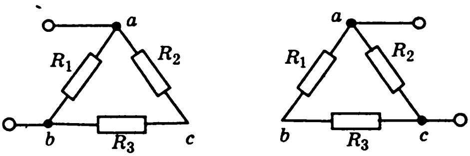
Ответ: $T_2 = T_0 + \dfrac{U}{IR_1}\left(\dfrac{1}{\alpha} + T_1 - T_0\right) - \dfrac{1}{\alpha} = 712$ К.

Здесь $T_0 = 273$ К.

Задача 19. Имеются в наличии три одинаковых проводника сопротивлением $R = 2$ Ом каждый. Какие сопротивления можно получить, соединяя их всеми возможными способами?

Ответ: $R_1 = \dfrac{R}{3}$, $R_2 = \dfrac{2}{3}R$, $R_3 = 1{,}5R$, $R_4 = 3R$.

Задача 20. Три сопротивления включены по схеме, изображенной на рис. 5-38, *а* во внешнюю цепь в точках *a* и *b*. При этом сопротивление всего этого участка $R_{общ1} = 20$ Ом. Если же этот участок цепи включить во внешнюю цепь в точках *a* и *c* (рис. 5-38, *б*, то его общее сопротивление $R_{общ2} = 15$ Ом. Найти сопротивления R_1, R_2 и R_3, если $R_1 = 2R_2$.



а) *б)*

Рис. 5-38

Ответ: $R_2 = \dfrac{4R_{общ2} - R_{общ1}}{2} = 20$ Ом, $R_1 = 2R_2 = 40$ Ом,

$$R_3 = \frac{(R_{общ1} - R_{общ2})(4R_{общ2} - R_{общ1})}{2R_{общ2} - R_{общ1}} = 20 \text{ Ом}.$$

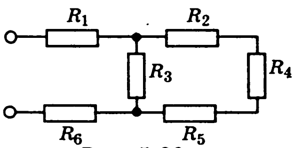


Рис. 5-39

Задача 21. Найти общее сопротивление проводников, включенных по схеме, изображенной на рис. 5-39. Сопротивления отдельных проводников R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 известны.

Ответ:

$$R_{общ} = \frac{(R_1 + R_6)(R_2 + R_3 + R_4 + R_5) + (R_2 + R_4 + R_5)R_3}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}.$$

Задача 22. Найти общее сопротивление $R_{общ}$ участков цепи, изображенных на рис. 5-40. Сопротивление R известно.

Ответ: а) $R_{общ} = 3\ R$; б) $R_{общ} = \dfrac{2}{3}R$; в) $R_{общ} = 1{,}5\ R$;

г) $R_{общ} = 0{,}6\ R$; д) $R_{общ} = \dfrac{4}{3}\ R$; е) $R_{общ} = 2{,}625\ R$;

ж) $R_{общ} = 0{,}5\ R$; з) $R_{общ} = \dfrac{7}{6}\ R$.

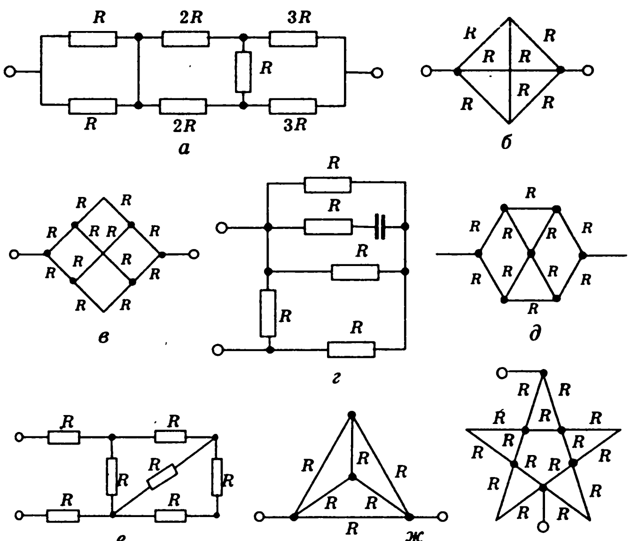


Рис. 5-40

Задача 23. Сопротивление каждого ребра кубика R (рис. 5-41). Найти его общее сопротивление $R_{общ}$ при включении в цепь в точках a и b. *Указание:* см. рис. 4-14, *б*.

Ответ: $R_{общ}$ = 0,75 R.

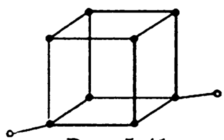


Рис. 5-41

Задача 24. Найти силу тока в каждом резисторе и в неразветвленном участке цепи, изображенном на рис. 5-42, если R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = = 3 Ом и R_4 = 4 Ом, U = 100 В.

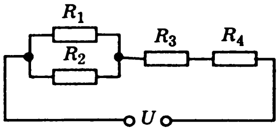


Рис. 5-42

Ответ:

$$I_1 = \frac{UR_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} = 8{,}7\ \text{А},$$

$$I_2 = \frac{UR_1}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} = 4{,}3\ \text{А},$$

$$I_3 = I_4 = I_1 + I_2 = 13\ \text{А}.$$

Задача 25. Во сколько раз изменятся показания амперметра, если от схемы на рис. 5-43, *а* перейти к схеме на рис. 5-43, *б*?

Ответ: сила тока увеличится вдвое.

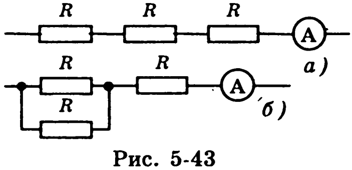


Рис. 5-43

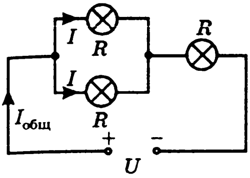


Рис. 5-44

Задача 26. К цепи, показанной на рис. 5-44, подведено напряжение $U = 90$ В. Сила тока в общем участке цепи $I_{общ} = 1$ А. Найти сопротивление R, силу тока в каждой лампе и напряжение на них.

Ответ: $R = \dfrac{2U}{3I_{общ}} = 60$ Ом,
$I = 0{,}5$ А, $U_1 = 30$ В,
$U_2 = 60$ В.

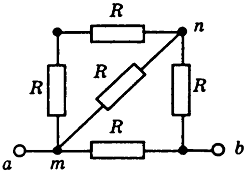


Рис. 5-45

Задача 27. Во сколько раз изменится сила тока в неразветвленном участке цепи, изображенном на рис. 5-45, если перемычку *mn* убрать? Разность потенциалов между точками *a* и *b* неизменна.

Ответ: уменьшится в 1,2 раза.

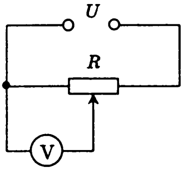


Рис. 5-46

Задача 28. К потенциометру сопротивлением $R = 40$ Ом приложено напряжение $U = 100$ В. Ползунок стоит на середине потенциометра (рис. 5-46). Какое напряжение показывает вольтметр $U_в$, если его сопротивление $R_в = 1 \cdot 10^3$ Ом?

Ответ: $U_в = \dfrac{2UR_в}{R + 4R_в} = 49{,}5$ В.

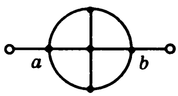


Рис. 5-47

Задача 29. Из проволоки, единица длины которой имеет сопротивление R_0, сделан каркас в форме окружности, пересеченной двумя взаимно перпендикулярными диаметрами D (рис. 5-47). Найти сопротивление этого каркаса R, если он включен в цепь в точках *a* и *b*.

Ответ: $R = \dfrac{\pi D R_0}{\pi + 4}$.

Задача 30. Проволока имеет сопротивление $R_1 = 36$ Ом. Когда ее разрезали на несколько равных частей и соединили эти части параллельно, то получилось сопротивление $R_2 = 1$ Ом. На сколько частей разрезали проволоку?

Ответ: $n = \sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}} = 6$.

Задача 31. Вольтметр, включенный последовательно с резистором, показал напряжение на некотором участке цепи $U_1 = 200$ В. Когда же последовательно к вольтметру присоединили резистор с вдвое большим сопротивлением, он показал напряжение $U_2 = 160$ В. Найти сопротивление резистора R и напряжение U на этом участке цепи, если сопротивление вольтметра $R_в = 900$ Ом.

Ответ: $R = R_в \dfrac{U_1 - U_2}{2U_2 - U_1} = 300$ Ом,

$$U = U_1\left(1 + \frac{R}{R_в}\right) = 260 \text{ В}.$$

Задача 32. Гальванометр имеет сопротивление $R_г = 10$ Ом. При силе тока $I_г = 100$ мА его стрелка отклоняется от нуля на всю шкалу. Резистор какого добавочного сопротивления $R_{д.с.}$ надо подключить последовательно к гальванометру, чтобы его можно было использовать как вольтметр для измерения напряжений до $U = 2$ В? Какого сопротивления $R_ш$ шунт надо подключить к этому гальванометру, чтобы им можно было измерять силы тока до $I = 10$ А?

Ответ: $R_{д.с.} = \dfrac{U}{I_г} - R_г = 10$ Ом,

$$R_ш = \frac{R_г}{\dfrac{I}{I_г} - 1} = 0{,}1 \text{ Ом}.$$

6. ЗАКОН ОМА ДЛЯ ВСЕЙ ЦЕПИ. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Методические указания к решению задач

В источнике тока на свободные заряды помимо сил Кулона действуют также и силы неэлектростатического происхождения (химического в гальванических элементах и аккумуляторах, механического и магнитного в генераторах тока и т. д.). Эти силы получили название сторонних сил.

Для характеристики способности сторонних сил создавать большую или меньшую разность потенциалов на полюсах источника тока введено понятие электродвижущей силы (ЭДС) $\mathcal{E}$.

Определение ЭДС: электродвижущая сила $\mathcal{E}$ равна отношению работы сторонних сил $A_{ст}$ к величине перемещаемого ими заряда q:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{ст}}{q}. \tag{6.1}$$

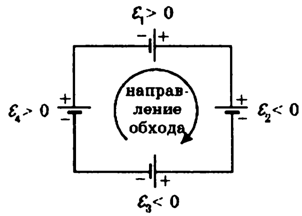


Рис. 6-1

Здесь $A_{ст}$ – работа сторонних сил, перемещающих заряд q.

ЭДС – скалярная алгебраическая величина, т. е. она может быть положительной или отрицательной. ЭДС источника считается положительной, если, обходя контур, содержащий несколько источников тока в произвольно выбранном направлении, мы переходим внутри источника (в узком промежутке между толстой и короткой черточками, обозначающими отрицательный полюс источника, и длинной тонкой, обозначающей его положительный полюс) в сторону повышения потенциала, т. е. от толстой короткой (минуса) к длинной тонкой (плюсу).

На рис. 6-1 изображен контур, в который включено четыре источника тока с ЭДС: $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{E}_4$. Стрелкой внутри контура показано направление произвольного обхода контура, т. е. мы обходим контур по часовой стрелке. При этом в источнике тока с ЭДС $\mathcal{E}_1$ мы переходим в сторону повышения потенциала, т. е. от минуса к плюсу, поэтому ЭДС $\mathcal{E}_1$ положительна. В источнике тока с ЭДС $\mathcal{E}_2$ мы, наоборот, двигаемся в сторону понижения потенциала, переходя от плюса к минусу, поэтому ЭДС этого источника отрицательна. По тем же причинам ЭДС $\mathcal{E}_3$ тоже отрицательна, а ЭДС $\mathcal{E}_4$ положительна.

Суммарная ЭДС контура равна алгебраической сумме ЭДС каждого источника. Поэтому ЭДС контура, изображенного на рис. 6-1, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$.

ЭДС источника равна разности потенциалов на его полюсах при разомкнутой внешней цепи. Поэтому для измерения ЭДС источника надо разомкнуть цепь, в которую он включен, и подключить вольтметр к его полюсам. Вольтметр измерит ЭДС источника тока тем точнее, чем больше его сопротивление по сравнению с сопротивлением источника тока. Если сопротивлением r источника можно пренебречь, то $\mathcal{E} = U_В = IR_В$. Для получения очень точного значения ЭДС используют электрометр при разомкнутой внешней цепи.

ЭДС источника тока равна сумме напряжений на внешнем $U_{внеш}$ и внутреннем $U_{внутр}$ участках замкнутой цепи: $\mathcal{E} = U_{внеш} + U_{внутр}$.

Закон Ома для неоднородного участка цепи: сила тока в неоднородном участке цепи прямо пропорциональна сумме разности потенциалов на его концах и действующей в нем ЭДС и обратно пропорциональна сопротивлению участка:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R}. \qquad (6.2)$$

Закон Ома для полной (или замкнутой) цепи: сила тока в цепи прямо пропорциональна ЭДС источника тока и обратно пропорциональна сумме сопротивлений внешнего и внутреннего участков цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \qquad (6.3)$$

Если цепь содержит N одинаковых источников тока, соединенных последовательно, т. е. разноименными полюсами (рис. 6-2), то и ЭДС, и внутреннее сопротивление такой батареи увеличиваются в N раз по сравнению с ЭДС и внутренним сопротивлением одного источника тока.

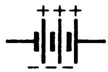


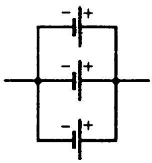
Рис. 6-2

Закон Ома для замкнутой цепи с N последовательно соединенными одинаковыми источниками:

$$I = \frac{N\mathcal{E}}{R + Nr}. \qquad (6.4)$$

Одинаковыми считаются источники тока с одинаковыми ЭДС и внутренними сопротивлениями.

Если цепь содержит N одинаковых источников тока, соединенных параллельно, т. е. одноименными полюсами (рис. 6-3), то ЭДС такой батареи равна ЭДС одного элемента, а внутреннее сопротивление уменьшается в N раз по сравнению с внутренним сопротивлением одного элемента. Закон Ома для цепи, содержащей N одинаковых источников тока, соединенных параллельно:



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{N}}. \qquad (6.5)$$

Рис. 6-3

Если полюса источника тока замкнуты проводником с пренебрежимо малым сопротивлением, т. е. если цепь не содержит внешнего сопротивления (нагрузки) R, то такое соединение концов цепи называется коротким замыканием. При коротком замыкании закон Ома для полной цепи имеет вид

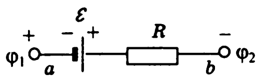
$$I_{к.з.} = \frac{\mathcal{E}}{r}, \text{ так как } R = 0. \qquad (6.6)$$

Здесь $I_{к.з.}$ – сила тока короткого замыкания.

Если в условии задачи что-нибудь сказано об ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока или о его внутреннем сопротивлении r, то здесь без закона Ома для полной цепи не обойтись, равно как и не обойтись без схемы (в большинстве случаев). А если в такой задаче речь идет еще и о параллельном соединении проводников или источников тока, где происходит разветвление токов, то схему надо изобразить непременно.

Если в неоднородный участок цепи включен проводник сопротивлением R (рис. 6-4), то напряжение на этом участке будет равно сумме разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ на его концах и ЭДС источника $U = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}$.

Обратите внимание на то, что на рис. 6-4, *а* «минус» источника тока «сморит» на «плюс» клеммы *a*, а «плюс» источника на «минус» клеммы *b*. Если же источник включен так, как показано на рис. 6-4, *б*, то перед ЭДС в предыдущей формуле следует поставить «минус»: $U = \varphi_1 - \varphi_2 - \mathcal{E}$.



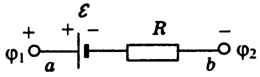


Рис. 6-4

Здесь $U = IR$, если внутренним сопротивлением участка можно пренебречь. Если же внутреннее сопротивление участка надо учитывать, то $U = I(R + r)$ согласно закону Ома для участка цепи. Здесь R – сопротивление только внешней части цепи.

Если в какой–то участок цепи включен конденсатор, то ток по этому участку течь не будет, но напряжение U_c на конденсаторе будет иметь место. Оно будет равно разности потенциалов на его обкладках и может быть «связано» с зарядом q на обкладках и емкостью конденсатора C известной из электростатики формулой

$$C = \frac{q}{U_c}.$$

Рассмотрим **пример** (рис. 6-5). Ток на всех участках этой цепи один и тот же, поскольку она состоит только из последовательно соединенных сопротивлений R_1 и R_2. Здесь есть параллельный участок с конденсатором C, но ток через конденсатор идти не будет, поэтому мы его в расчет не принимаем. Сила этого тока по закону Ома для всей цепи

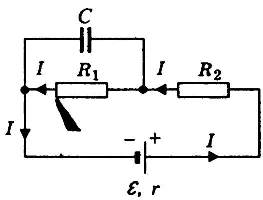


Рис. 6-5

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{общ} + r},$$ где $R_{общ} = R_1 + R_2$, поэтому $$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}.$$

Напряжение на конденсаторе U_c будет таким же, как и напряжение на сопротивлении R_1, поскольку конденсатор подключен к этому сопротивлению параллельно. По закону Ома для участка цепи

$$U_c = IR_1 \text{ или } U_c = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + R_2 + r}.$$

Если к полюсам замкнутого накоротко источника подключить вольтметр с очень большим сопротивлением, то он покажет $U_в = 0$.

Действительно, согласно (6.2) $I_{к.з.} = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{r} = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$, значит, $\varphi_1 - \varphi_2 = U_в = 0$.

В задачах на закон Ома для всей цепи, если внешняя цепь, подключенная к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, содержит систему последовательно и параллельно соединенных проводников, как на рис. 6-6, то соответствующую схему удобно изображать в следующий последовательности. Нарисовав источник тока (короткую толстую черточку, обозначающую отрицательный полюс источника тока, и длинную тонкую, обозначающую его положительный полюс), установите, говорится ли что-нибудь в условии о соединительных проводах (об их веществе, диаметре или радиусе, длине, сечении) или нет. Если да, то сразу последовательно к источнику тока нарисуйте сопротивление $R_{пров}$, обозначающее собой сопротивление всех вместе соединительных проводов данной схемы. Затем изобразите последовательно и параллельно соединенные проводники внешней части цепи и покажите токи в них. При этом следует помнить, что если параллельное соединение проводников во внешней цепи отсутствует, то во всей цепи течет одинаковый ток, поэтому току можно не приписывать никакого индекса. Если же во внешней части цепи есть параллельно соединенные проводники, то, выведя из полюса источника тока ток, обозначьте его лучше всего $I_{общ}$, т. е. общий ток. Этот ток должен течь через сопротивление $R_{пров}$ по всей неразветвленной части цепи до первого разветвления (узла). В узле общий ток $I_{общ}$ должен разветвиться на столько токов, сколько параллельных ветвей соединяются в этом узле. В ветвях индекс тока должен измениться, т. е. он уже не может быть обозначен тем индексом, который был у тока в неразветвленной части цепи. Лучше всего, когда индекс тока соответствует индексу сопротивления, по которому этот ток течет, например, R_1 и I_1, R_2 и I_2 и т. д., так меньше вероятность что-нибудь перепутать. Токи могут и в дальнейшем разветвляться и сходиться, но при этом в неразветвленной части цепи всегда должен течь ток, который вышел из источника и втекает в него, т. е. $I_{общ}$.

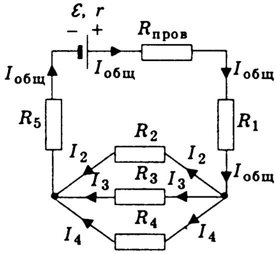


Рис. 6-6

Необходимо учитывать, что если во внешней цепи есть параллельные проводники, то в законе Ома для замкнутой цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$ ток I – это всегда общий ток, т. е. ток, текущий в неразветвленной части цепи, а не в каком-то из параллельных проводников. Сопротивление R в этой формуле – это общее сопротивление всей внешней части цепи, а не какого-либо ее участка. Например, закон Ома для всей цепи применительно к схеме на рис. 6-6

$$I_{\text{общ}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}} + r} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{пров}} + R_1 + \dfrac{R_2R_3R_4}{R_2R_3 + R_3R_4 + R_4R_1} + R_5 + r}.$$

Если в условии задачи речь идет о напряжении на зажимах источника тока (напряжении на полюсах источника тока), когда цепь замкнута, то знайте, что это не внутреннее напряжение $U_{\text{внутр}} = Ir$, а напряжение на всей внешней части цепи $U_{\text{внеш}} = IR_{\text{общ}}$, где $R_{\text{общ}}$ – сопротивление всей внешней части цепи, а I – сила тока в последовательно соединенных проводниках цепи или сила общего тока в неразветвленной части цепи, если в ней есть параллельное соединение проводников.

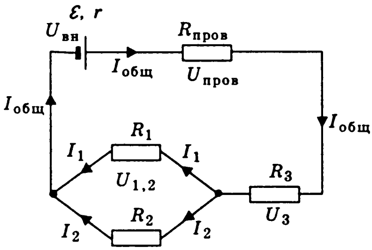


Рис. 6-7

Если цепь разомкнута, то ток в ней отсутствует, а ЭДС источника равна разности потенциалов на его полюсах.

Если цепь замкнута, то ЭДС источника равна сумме напряжений на всех ее участках, включая и источник тока, например применительно к рис. 6-7:

$$\mathcal{E} = U_{\text{вн}} + U_{\text{пров}} + U_{1,2} + U_3.$$

Здесь $U_{\text{вн}} = I_{\text{общ}}r$, $U_{\text{пров}} = I_{\text{общ}}R_{\text{пров}}$, $U_{1,2} = I_{\text{общ}}\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ или $U_{1,2} = I_1R_1$, или $U_{1,2} = I_2R_2$, и $U_3 = I_{\text{общ}}R_3$ – напряжения на отдельных участках этой цепи.

Не следует путать последовательное и параллельное соединение проводников с последовательным и параллельным соединением источников тока, они описываются совершенно разными формулами. Помните: использовать формулы последовательного или параллельного соединения источников тока (6.5) и (6.6) можно, только если эти источники одинаковые, т. е. если одинаковы их ЭДС и внутренние сопротивления. Если хоть одна из этих величин у источников тока, соединенных пусть даже только последовательно или только параллельно, иная, чем у остальных, то пользоваться этими формулами нельзя. В этом случае к расчету цепи применяйте правила Кирхгофа. Эти же правила следует применять и к одинаковым источникам тока, но соединение которых нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному.

Если электрическая цепь содержит только одинаковые источники тока (т. е. источники с одинаковыми ЭДС и внутренними сопротивлениями) и проводники, соединенные только последовательно и параллельно, то рассчитать такую цепь относительно просто, достаточно воспользоваться законами и формулами, приведенными выше. Если же цепь содержит разные источники или в нее включены проводники, соединенные не только последовательно или параллельно, а произвольным образом, то для расчета такой цепи пользуются правилами Кирхгофа, названными так в честь немецкого ученого, первым построившего общую теорию расчетов электрических цепей.

Первое правило Кирхгофа: сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из него.

Рассмотрим узел, изображенный на рис. 6-8.

В него входят два тока силой I_1 и I_2, а выходят три тока силой I_3, I_4 и I_5. Поэтому применительно к этому узлу первое правило Кирхгофа будет записано так: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$.

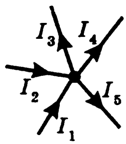


Рис. 6-8

Первое правило Кирхгофа есть следствие из закона сохранения зарядов.

Из закона сохранения заряда следует, что на схеме не может быть такого узла, в который все токи только входят или только выходят, поэтому, если в изображенной вами электрической цепи встречаются такие узлы, значит, вы неправильно распределили токи в ней.

Чтобы уравнения первого правила Кирхгофа, записанные для разных узлов цепи, не повторялись, их должно быть на единицу меньше числа узлов. Например, цепь, изображенная на рис. 6-9, содержит два узла в точках b и c, поэтому для расчета такой цепи надо записать одно первое правило Кирхгофа.

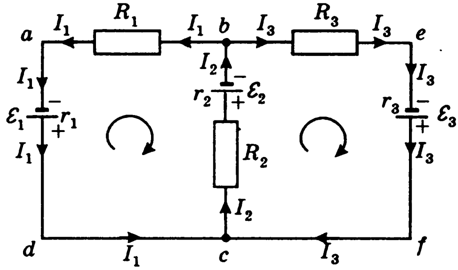


Рис. 6-9

Сложные электрические цепи могут включать в себя несколько контуров, которые можно «обойти» последовательно, двигаясь от одного участка контура к другому в произвольно выбранном направлении. Цепь, изображенная на рис. 6-9, включает в себя три контура: контур *abcd*, контур *befc* и контур *abefcd*. Применительно к контурам цепи записывают второе правило Кирхгофа. Но прежде чем его записать, надо правильно распределить токи в отдельных участках цепи. Изображая стрелками и обозначая соответствующим индексом токи в участках цепи, надо руководствоваться следующими правилами:

– ток в последовательно соединенных проводниках одинаков, поэтому на всем последовательном участке, т. е. не содержащем узлов, индекс тока должен быть один и тот же, через какие бы источники и сопротивления этот ток ни шел;

– после прохождения током узла индекс тока следует обязательно изменить, так как теперь сила тока будет другая.

На рис. 6-9 из плюса источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1$ выведен ток силой I_1, а из плюса источника тока $\mathcal{E}_3$ выведен ток I_3. Эти токи соединились в точке c, и по участку cb пошел ток I_2, причем ни его величина, ни направление после прохождения источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_2$ на участке cb не изменятся, поскольку этот источник тока и сопротивление R_2 соединены последовательно. Ток I_2, подойдя к узлу b, разветвится на токи I_1 и I_3. При этом ток I_1 будет течь через последовательно соединенные сопротивление R_1 и источник $\mathcal{E}_1$, а ток I_3 – через сопротивление R_3 и источник $\mathcal{E}_3$.

Можно и иначе распределить токи в этой цепи, например, выведя из источника тока $\mathcal{E}_2$ ток и разветвив его на два тока в точке c, или вывести из источников $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ токи и соединить их в точке с, или, наконец, вывести из источника $\mathcal{E}_3$ ток и разветвить его на два тока в точке c. Можно поменять направления всех токов на противоположные, т. е. соединять их в точке b, а разъединять в точке c, результат расчетов от этого не изменится. Важно только руководствоваться правилами, сформулированными выше.

Только после того, как все токи распределены по отдельным участкам цепи, можно записывать второе правило Кирхгофа применительно к контурам цепи. При этом число уравнений, соответствующих второму правилу Кирхгофа, должно быть равно числу ветвей в данной цепи минус число узлов в ней и плюс единица. Изображенная на рис. 6-9 цепь содержит три ветви $badc$, bc и $befc$ и два узла b и c, поэтому число уравнений второго правила Кирхгофа $3 - 2 + 1 = 2$.

Второе правило Кирхгофа: алгебраическая сумма всех ЭДС, встречающихся в данном контуре, равна алгебраической сумме произведений всех токов на сопротивления, через которые эти токи текут. Напомним, что алгебраическая сумма – это сумма как положительных, так и отрицательных величин.

Чтобы определить, какие ЭДС и токи будут положительными в данном контуре, а какие – отрицательными, надо выбрать контуры, для которых будут записаны уравнения второго правила Кирхгофа и указать внутри этих контуров направление произвольно выбранного вами обхода этих контуров (или по часовой стрелке, или против).

Обратимся опять к рис. 6-9. Для записи второго правила Кирхгофа нам надо выбрать из трех контуров, входящих в изображенную на рис. 6-9 цепь, два любых. Выберем контуры $abcd$ и $befc$ и будем их обходить по часовой стрелке так, как это показано изогнутой стрелкой внутри контуров. При таком обходе контура $abcd$ ЭДС источника тока $\mathcal{E}_1$ будет отрицательна, так как мы переходим внутри источника в сторону понижения потенциала, т. е. от плюса к минусу, а ЭДС источника $\mathcal{E}_2$, тоже входящего в контур $abcd$, будет положительна, так как в нем мы переходим в сторону повышения потенциала.

По второму правилу Кирхгофа алгебраическая сумма ЭДС $-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ будет равна алгебраической сумме произведений токов на все сопротивления контура. В контур $abcd$ входят четыре сопротивления: r_1, R_1, r_2 и R_2, по которым текут токи I_1 и I_2. При этом знак перед произведением тока на соответствующее ему сопротивление будет положителен тогда, когда направление этого тока совпадает с направлением обхода контура, а если оно противоположно направлению обхода, то перед этим произведением ставится знак «минус», т. е. такой ток отрицателен.

Из сказанного следует, что токи I_1 и I_2, текущие в контуре $abcd$, будут отрицательны, так как они текут навстречу обходу контура, поэтому перед произведениями сил этих токов на сопротивления, по которым они текут, надо ставить минус. Тогда второе правило Кирхгофа применительно к контуру $abcd$ будет записано так: $-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = -I_1r_1 - I_1R_1 - I_2r_2 - I_2R_2$.

В контуре $befc$ ЭДС $\mathcal{E}_2$ будет отрицательна, а ЭДС $\mathcal{E}_3$ – положительна. Токи I_2 и I_3, текущие в этом контуре, будут положительны, поскольку их направление совпадает с направлением обхода контура. Поэтому второе правило Кирхгофа применительно к этому контуру будет иметь вид

$$-\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = I_2R_2 + I_2r_2 + I_3R_3 + I_2r_2.$$

Дополнив эти два уравнения третьим, соответствующим первому правилу Кирхгофа, записанному, например, для узла c:

$$I_1 + I_3 = I_2,$$

мы получим систему уравнений, достаточную для расчета этой цепи. Например, если вам известны числовые значения всех сопротивлений и ЭДС, входящих в эту цепь, то, подставив эти числа вместо соответствующих букв в уравнения правил Кирхгофа, вы можете, решив эту систему, определить искомые силы токов.

Если при решении задач на правила Кирхгофа у найденной вами силы тока появился знак «минус», то здесь ошибки нет. Это означает только то, что направление тока на данном участке цепи противоположно направлению этого тока, выбранному вами произвольно (вы ведь не знали заранее, куда он направлен в вашей сложной схеме).

Внимание! Задачи с применением правил Кирхгофа можно не решать в общем виде (за исключением самых простых случаев), потому что такое решение может привести к очень громоздким промежуточным уравнениям. После того как вы запишете общие уравнения в буквенных обозначениях, сразу в эти уравнения подставьте числовые значения известных величин и сделайте там, где это можно, приведение подобных членов. Затем решайте ваши уравнения (как правило, их бывает всего три с тремя неизвестными, больше – редко) методом подстановки. Выразите из одного уравнения одну неизвестную величину и подставьте ее сразу и во второе уравнение, и в третье. Выполните упрощения (раскройте скобки, сделайте приведение подобных членов и т. п.), после чего вы получите уже два уравнения с двумя неизвестными. Можно опять из одного из них выразить одну неизвестную величину и подставить ее во второе уравнение. Так вы получите уже одно уравнение с одной искомой величиной, которое и решите. Если у вас есть знакомый математик, попросите его научить вас решать три (или более) уравнения методом определителей. Это такая прелесть! Применив несколько простых математических приемов, вы сразу находите искомые величины без нудных подстановок и упрощений. Но ограниченность рамок этой книги не позволяет нам научить вас этим приемам, это дело математиков.

Решение отдельных задач

Задача 1

Чему равно напряжение U на полюсах источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 4$ В, если сопротивление внешней части цепи равно внутреннему сопротивлению источника?

Дано:	
$\mathcal{E} = 4$ В $R = r$	*Решение.* По закону Ома для внешней части цепи $I = \dfrac{U}{R}$, (1)
U – ?	где I – сила тока в цепи.

По закону Ома для всей цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$. (2)

Приравняем (1) и (2) и заменим r на R, ведь согласно условию задачи они равны. После этого внешнее сопротивление R можно будет сократить и определить искомое напряжение на внешней части цепи (или напряжение на полюсах источника при замкнутой цепи, что в данном случае одно и то же). Проделаем эти действия:

$$\frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \text{ или } \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R+R}, \; \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}}{2R}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{U = \frac{\mathcal{E}}{2}}$$

Произведем вычисления: $U = \dfrac{4}{2}$ В $= 2$ В.

Ответ: $U = 2$ В.

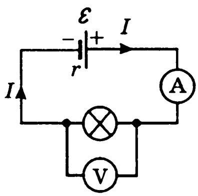


Рис. 6-10

Задача 2

Вольтметр, подключенный к лампочке, показывает $U = 4$ В, а амперметр – $I = 2$ А (рис. 6-10). Чему равно внутреннее сопротивление r источника тока, к которому эта лампочка присоединена, если ЭДС источника $\mathcal{E} = 5$ В?

Примечание: если в условии задачи ничего не сказано о сопротивлении амперметра, то этим сопротивлением можно пренебречь, а если ничего не сказано о сопротивлении вольтметра, то его следует считать бесконечно большим, а силу тока, текущего через вольтметр, равной нулю.

Дано:
$U = 4$ В
$I = 2$ А
$\mathcal{E} = 5$ В

r – ?

Решение. По закону Ома для участка и для всей цепи $I = \dfrac{U}{R}$ (1) и $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$. (2)

Определим из (1) внешнее сопротивление R и подставим его в (2): $R = \dfrac{U}{I}$, поэтому

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{U}{I} + r}, \text{ откуда } \frac{U}{I} + r = \frac{\mathcal{E}}{I} \text{ и } r = \frac{\mathcal{E}}{I} - \frac{U}{I} \text{ или } \boxed{r = \frac{\mathcal{E} - U}{I}}$$

Другое решение, более короткое: напряжение $U_{вн}$ внутри источника тока (на внутренней части цепи) равно разности ЭДС и напряжения U на внешней части цепи:

$$U_{вн} = \mathcal{E} - U.$$

По закону Ома для внутренней части цепи

$$I = \frac{U_{вн}}{r} = \frac{\mathcal{E} - U}{r}, \text{ откуда } \boxed{r = \frac{\mathcal{E} - U}{I}}$$

Произведем вычисления: $r = \frac{5 - 4}{2}$ Ом $= 0{,}5$ Ом.

Ответ: $r = 0{,}5$ Ом.

Задача 3

Дана схема (рис. 6-11, *а*). Во сколько раз изменится сила тока, текущего в неразветвленной части цепи, и напряжение на полюсах источника тока, если ключ *К* замкнуть? Сопротивление лампы $Л_2$ вдвое больше сопротивления лампы $Л_1$, а внутреннее сопротивление источника тока в 10 раз меньше сопротивления лампы $Л_1$.

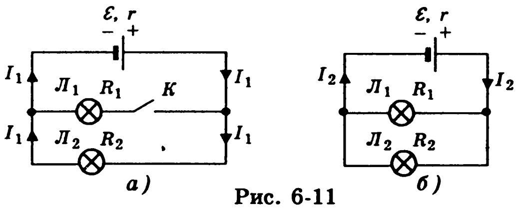


Рис. 6-11

Дано:	
$R_2 = 2R_1$	
$r = \frac{R_1}{10}$	
$\frac{I_2'}{I_1}$ – ?	
$\frac{U_2}{U_1}$ –?	

Решение. Введем обозначения сами. Пусть ЭДС источника $\mathcal{E}$, а его внутреннее сопротивление r. Эти величины постоянны для данного источника тока, т. е. они не зависят от тока во внешней части цепи и останутся неизменными, даже если мы источник отключим от цепи.

Обозначим сопротивление лампы $Л_1$ буквой R_1, а сопротивление лампы $Л_2$ – R_2. Обозначим силу тока в цепи, когда ключ К разомкнут, I_1, а силу тока в неразветвленной части цепи, когда ключ замкнут, I_2. И, наконец, обозначим напряжение на полюсах источника тока при разомкнутом ключе U_1, а при замкнутом – U_2.

Нам надо найти отношения $\frac{I_2}{I_1}$ и $\frac{U_2}{U_1}$.

Когда ключ К разомкнут (рис. 6-11, *а*), ток через лампу $Л_1$ не идет, а идет только через лампу $Л_2$, поэтому согласно закону Ома для полной цепи $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_2 + r}$. (1)

Если ключ замкнуть (рис. 6-11, б), лампы $Л_1$ и $Л_2$ будут соединены параллельно и их общее сопротивление $R_{общ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а закон Ома для полной цепи в этом случае примет вид $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r}$. (2)

Теперь учтем, что согласно условию $R_2 = 2R_1$, а $r = \dfrac{R_1}{10}$. Тогда выражение (2) примет вид

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_1 \cdot 2R_1}{R_1 + 2R_1} + \dfrac{R_1}{10}} = \frac{30\mathcal{E}}{23R_1}, \quad (3)$$

а выражение (1) $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{2R_1 + \dfrac{R_1}{10}} = \dfrac{10\mathcal{E}}{21R_1}$. (4)

Разделив (3) на (4), мы ответим на один вопрос задачи:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{30\mathcal{E} \cdot 21R_1}{23R_1 \cdot 10\mathcal{E}} = 2{,}7.$$

Согласно закону Ома для участка цепи

$$U_2 = I_2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = I_2 \frac{R_1 \cdot 2R_1}{R_1 + 2R_1} = \frac{2}{3} I_2 R_1,$$

$$U_1 = I_1 R_2 = 2 I_1 R_1, \text{ поэтому}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{2I_2 R_1}{3 \cdot 2I_1 R_1} = \frac{1}{3}\frac{I_2}{I_1} \quad \text{или} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{3} \cdot 2{,}7 = \frac{27}{30} = \frac{9}{10}$$

или

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{10}{9} = 1{,}1.$$

Таким образом, сила тока увеличится в 2,7 раза, а напряжение уменьшится в 1,1 раза.

Ответ: $I_2/ I_1 = 2{,}7$; $U_1/ U_2 = 1{,}1$.

Задача 4

В резисторе сопротивлением $R = 5$ Ом сила тока $I = 0{,}2$ А. Резистор присоединен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В. Найти силу тока короткого замыкания $I_{\text{к.з.}}$.

Дано:
$R = 5$ Ом
$I = 0{,}2$ А
$\mathcal{E} = 2$ В

$I_{\text{к.з.}}$ – ?

Решение. Вспомним, что сила тока короткого замыкания определяется отношением ЭДС источника $\mathcal{E}$ к его внутреннему сопротивлению r:

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r}, \tag{1}$$

ведь при коротком замыкании внешнее сопротивление $R = 0$.

ЭДС источника нам дана, значит, задача сводится к определению внутреннего сопротивления источника r. Для его определения есть все необходимые величины, входящие в закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}, \text{ откуда } R + r = \frac{\mathcal{E}}{I} \text{ и } r = \frac{\mathcal{E}}{I} - R. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1): $\boxed{I_{\text{к.з.}} = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{\mathcal{E}}{I} - R}}$

Произведем вычисления: $I_{\text{к.з.}} = \dfrac{2}{\dfrac{2}{0{,}2} - 5}$ А $= 0{,}4$ А.

Ответ: $I_{\text{к.з.}} = 0{,}4$ А.

Задача 5

Вольтметр, подключенный к полюсам источника тока при разомкнутой внешней цепи, показал $U_1 = 8$ В. Когда же цепь замкнули на некоторый резистор (рис. 6-12, *а*), вольтметр показал $U_2 = 5$ В. Что покажет этот вольтметр, если последовательно к этому резистору подключить еще один такой же (рис. 6-12, *б*)? Что покажет этот вольтметр, если второй резистор присоединить к первому параллельно (рис. 6-12, *в*)?

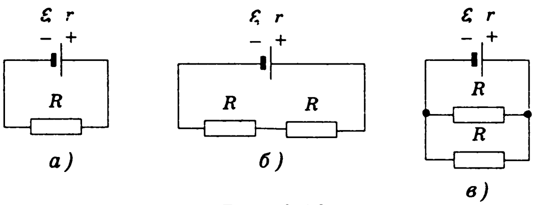


Рис. 6-12

Дано:
$U_1 = 8$ В
$U_2 = 5$ В

U_3 – ?
U_4 – ?

Решение. Вольтметр с очень большим сопротивлением, подключенный к полюсам источника тока при разомкнутой внешней цепи, показывает ЭДС этого источника.

Значит, ЭДС нам известна: $\mathcal{E} = U_1 = 8$ В.

Когда цепь замкнули на резистор сопротивлением R, то напряжение на этом резисторе, равное напряжению на полюсах источника при замкнутой цепи, стало U_2, а по цепи прошел ток силой

$$I_1 = \frac{U_2}{R} \text{ или } I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{U_1}{R+r}, \text{ поэтому}$$

$$\frac{U_2}{R} = \frac{U_1}{R+r}. \qquad (1)$$

Когда к первому резистору подключили последовательно второй с таким же сопротивлением R, то их общее сопротивление стало равно $2R$. Уравнение (1) применительно к этому случаю имеет вид: $\frac{U_3}{2R} = \frac{U_1}{2R+r}$. (2)

Мы получили два уравнения с тремя неизвестными R, r и U_3. Вроде бы маловато уравнений, но мы все же попробуем их решить, может быть, в ходе решения одно из неизвестных сократится. Действительно, если определить из (1) и (2) внутреннее сопротивление источника тока r и полученные равенства приравнять друг другу, то сопротивление резистора R должно сократиться. Давайте попробуем пойти этим путем.

$$\text{Из (1)} \quad R + r = \frac{U_1 R}{U_2}, \quad r = \frac{U_1 R}{U_2} - R = R\left(\frac{U_1}{U_2} - 1\right). \qquad (3)$$

$$\text{Из (2)} \quad 2R + r = \frac{2U_1 R}{U_3}, r = \frac{2U_1 R}{U_3} - 2R = 2R\left(\frac{U_1}{U_3} - 1\right). \qquad (4)$$

Приравняем (3) и (4). При этом сопротивление R сократится и мы определим U_3:

$$R\left(\frac{U_1}{U_2}-1\right)=2R\left(\frac{U_1}{U_3}-1\right),\quad \frac{U_1}{U_2}-1=2\frac{U_1}{U_3}-2,$$

$$2\frac{U_1}{U_3}=\frac{U_1}{U_2}+1,\ \text{откуда}\ U_3=\frac{2U_1}{\frac{U_1}{U_2}+1}\ \text{или}\ \boxed{U_3=\frac{2U_1U_2}{U_1+U_2}}$$

Если второй резистор присоединить к первому параллельно, то их общее сопротивление станет равно $\frac{R}{2}$. В этом случае бывшее уравнение (1) примет вид

$$\frac{U_4}{\frac{R}{2}}=\frac{U_1}{\frac{R}{2}+r}\ \text{или}\ \frac{2U_4}{R}=\frac{2U_1}{R+2r},\ \frac{U_4}{R}=\frac{U_1}{R+2r}. \qquad (5)$$

Выразим из (5) внутреннее сопротивление r и полученное выражение приравняем (3): $R+2r=\frac{U_1R}{U_4}$, откуда

$$2r=\frac{U_1R}{U_4}-R=R\left(\frac{U_1}{U_4}-1\right)\ \text{и}\ r=\frac{R}{2}\left(\frac{U_1}{U_4}-1\right). \qquad (6)$$

Теперь приравняем (3) и (6). При этом сопротивление R «уйдет», и мы найдем U_4: $R\left(\frac{U_1}{U_2}-1\right)=\frac{R}{2}\left(\frac{U_1}{U_4}-1\right)$,

$$\frac{U_1}{U_2}-1=\frac{U_1}{2U_4}-\frac{1}{2},\ \frac{U_1}{2U_4}=\frac{U_1}{U_2}-\frac{1}{2},\ \text{откуда}$$

$$U_4=\frac{U_1}{2\left(\frac{U_1}{U_2}-\frac{1}{2}\right)}\ \text{или}\ U_4=\frac{U_1}{2\frac{U_1}{U_2}-1},\ \boxed{U_4=\frac{U_1U_2}{2U_1-U_2}}$$

Произведем вычисления:

$$U_3=\frac{2\cdot 8\cdot 5}{8+5}\ \text{В}=6{,}2\ \text{В},\ U_3=\frac{8\cdot 5}{2\cdot 8-5}\ \text{В}=3{,}6\ \text{В}.$$

Ответ: $U_3=6{,}2$ В, $U_4=3{,}6$ В.

Задача 6

Цепь питается от источника тока с ЭДС $\mathcal{E}=4$ В и внутреннем сопротивлением $r=0{,}2$ Ом. Построить график зависимости силы тока I в цепи и напряжения U на полюсах источника тока от внешнего сопротивления R.

Дано:
$\mathcal{E} = 4$ В
$r = 0{,}2$ Ом

$I = I(R)$ – ?
$U = U(R)$ – ?

Решение. Запишем закон Ома для замкнутой цепи и подставим в него численные значения известных ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннего сопротивления r:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad \text{или} \quad I = \frac{4}{R + 0{,}2}. \qquad (1)$$

Теперь будем придавать сопротивлению R произвольные значения, начиная от $R = 0$, например: $R = 0$; 1; 2; 3; 4; 5 и 6 Ом (лучше, чтобы их было нечетное число) и, подставляя эти числа в (1), вычислять соответствующие этим значениям R величины сил токов.

Заполним таблицу:

R, Ом	0	1	2	3	4	5	6
I, А	20,00	3,33	1,82	1,25	0,95	0,77	0,65

Выберем масштаб. Пусть одному делению на оси сопротивлений (оси абсцисс, так как независимую переменную откладывают по горизонтальной оси, а ее функцию – по вертикальной) соответствует 1 Ом, а одному делению на оси сил токов – 2 А. Построим оси координат с делениями, обозначим точки, соответствующие каждому значению R и I, и проведем через них кривую $I = I(R)$, которая и есть наш график (рис. 6-13).

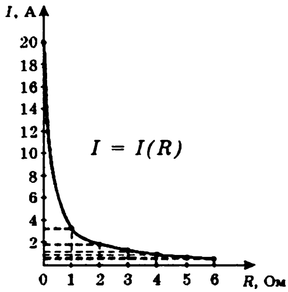


Рис. 6-13

Чтобы построить график $U = U(R)$, запишем закон Ома для участка и для всей цепи и приравняем правые части полученных равенств: $I = \frac{U}{R}$ и $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$, $\frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$, откуда $U = \frac{\mathcal{E}R}{R + r}$ или $U = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r}{R}}$. (2)

Теперь опять будем придавать сопротивлению R те же значения, кроме $R = 0$, так как при $R = 0$ у нас получится неопределенность, и, подставляя их по очереди в (2), вычислять соответствующие им величины напряжения U.

Заполним таблицу:

R, Ом	1	2	3	4	5	6
U, В	3,33	3,64	3,75	3,81	3,85	3,87

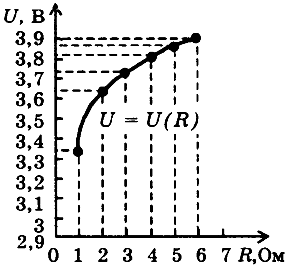


Рис. 6-14

Здесь имеет смысл начинать ось напряжений с $U = 3$ В. Поскольку напряжения у нас меняются от $U_1 = 3{,}33$ В до $U_2 = 3{,}87$ В, можно принять цену деления равной 0,1 В. Проведем оси координат, обозначим точки и построим график $U = U(R)$ (рис. 6-14).

Вывод: с увеличением внешнего сопротивления R сила тока нелинейно убывает, а напряжение увеличивается, причем тоже нелинейно.

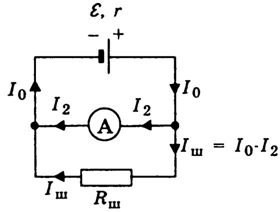


Рис. 6-15

Задача 7

Амперметр, будучи накоротко присоединен к гальваническому элементу с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом, показал ток силой $I_1 = 3$ А. Какую силу тока I_2 покажет этот амперметр, если его зашунтировать сопротивлением $R_ш = 0{,}1$ Ом?

Дано:
$\mathcal{E} = 2$ В
$r = 0{,}2$ Ом
$I_1 = 3$ А
$R_ш = 0{,}1$ Ом

I_2 – ?

Решение. **Внимание!** Здесь сопротивлением R_A амперметра пренебречь нельзя, потому что иначе он бы показывал ток короткого замыкания (при $R_А = 0$ $I_А = I_{к.з.} = \dfrac{\mathcal{E}}{r} = \dfrac{2}{0{,}2}$ А $= 10$ А), а по условию он показывает ток $I_1 = 3$ А меньше $I_{к.з.} = 10$ А.

Значит, сопротивление амперметра здесь необходимо учитывать. Тогда по закону Ома для полной цепи

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_А + r}. \tag{1}$$

Поскольку шунт присоединяют к амперметру параллельно, их общее сопротивление станет равно $\dfrac{R_А R_ш}{R_А + R_ш}$ и тогда закон Ома для всей цепи примет вид

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_А R_ш}{R_А + R_ш} + r} = \frac{\mathcal{E}(R_А + R_ш)}{R_А R_ш + r(R_А + R_ш)}. \tag{2}$$

Здесь I_0 – сила тока в неразветвленной части цепи (рис. 6-15). Теперь определим из (1) сопротивление амперметра $R_А$ и подставим его в (2). Остальные величины здесь нам известны. Проделаем эти действия. Из (1)

$$R_А + r = \frac{\mathcal{E}}{I_1}, \text{ откуда } R_А = \frac{\mathcal{E}}{I_1} - r = \frac{\mathcal{E} - I_1 r}{I_1}. \qquad (3)$$

Через зашунтированный амперметр потечет ток силой I_2, а через шунт – ток силой $I_0 - I_2$. Силы токов в параллельных амперметре и шунте обратно пропорциональны их сопротивлениям: $\dfrac{I_0 - I_2}{I_2} = \dfrac{R_А}{R_ш}$. (4)

Нам осталось определить из (4) силу тока I_2 и в полученное выражение подставить вместо I_0 и $R_А$ правые части выражений (2) и (3), а затем по возможности упростить полученную формулу. Выполним эти действия:

$$\frac{I_0}{I_2} - 1 = \frac{R_А}{R_ш}; \; \frac{I_0}{I_2} = \frac{R_А}{R_ш} + 1 = \frac{R_А + R_ш}{R_ш}, \text{ откуда}$$

$$I_2 = I_0 \frac{R_ш}{R_A + R_ш} \text{ или с учетом (2)}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}(R_А + R_ш)R_ш}{(R_А R_ш + r(R_А + R_ш))(R_А + R_ш)} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}R_ш}{R_А R_ш + r(R_А + R_ш)}. \qquad (5)$$

Осталось подставить в (5) вместо $R_А$ выражение (3):

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}R_ш}{\dfrac{\mathcal{E} - I_1 r}{I_1} R_ш + r\left(\dfrac{\mathcal{E} - I_1 r}{I_1} + R_ш\right)} =$$

$$= \frac{\mathcal{E}R_ш}{\dfrac{\mathcal{E} - I_1 r}{I_1} R_ш + \dfrac{\mathcal{E} - I_1 r}{I_1} r + rR_ш},$$

или окончательно $\boxed{I_2 = \dfrac{\mathcal{E}R_ш I_1}{(\mathcal{E} - I_1 r)(R_ш + r) + I_1 r R_ш}}$

Произведем вычисления:

$$I_2 = \frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 3}{(2 - 3 \cdot 0{,}2)(0{,}1 + 0{,}2) + 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1} \text{ А} = 1{,}25 \text{ А}.$$

Ответ: $I_2 = 1{,}25$ А.

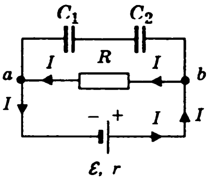


Рис. 6-16

Задача 8

Дана схема (рис. 6-16). Емкости конденсаторов C_1, C_2 и ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ известны. Известно также, что ток короткого замыкания $I_{к.з.}$ этого источника в три раза превосходит ток I, текущий в этой цепи. Найти напряженности E_1 и E_2 полей в конденсаторах, если расстояния между их обкладками равны d.

Дано:
C_1
C_2
$\mathcal{E}$
$I_{к.з.} = 3I$
d

E_1 – ?
E_2 – ?

Решение. Напряженности полей E_1 и E_2 в этих конденсаторах мы могли бы найти по формулам электростатики

$$E_1 = \frac{U_1}{d} \quad (1) \quad и \quad E_2 = \frac{U_2}{d}, \qquad (2)$$

если бы нам были известны напряжения U_1 и U_2 на их обкладках. Нам эти напряжения не известны, но мы можем утверждать, что, поскольку конденсаторы соединены последовательно друг другу, то сумма этих напряжений равна общему напряжению $U_{общ}$ между точками ab, иначе говоря, напряжению на сопротивлении R: $U_{общ} = U_1 + U_2$. (3)

Поскольку нам известны емкости конденсаторов, надо их тоже использовать. Мы знаем, что при последовательном соединении конденсаторов заряд на их обкладках одинаков у всех конденсаторов. Из определения емкости $q_1 = C_1U_1$, $q_2 = C_2U_2$ и $q_1 = q_2$, поэтому $C_1U_1 = C_2U_2$.

Определим отсюда U_2 и подставим в формулу (3). Так мы сумеем выразить одно из напряжений U_1 через общее напряжение на этих конденсаторах $U_{общ}$:

$$U_2 = U_1\frac{C_1}{C_2}, \ (4) \quad U_{общ} = U_1 + U_1\frac{C_1}{C_2}, \quad U_{общ} = U_1\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right),$$

откуда

$$U_1 = \frac{U_{общ}}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_2U_{общ}}{C_1 + C_2}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в (1): $$E_1 = \frac{C_2U_{общ}}{d(C_1 + C_2)}. \qquad (6)$$

Теперь найдем U_2 и E_2, подставив (5) в (4):

$$U_2 = \frac{C_2U_{общ}C_1}{C_2(C_1 + C_2)} = \frac{U_{общ}C_1}{C_1 + C_2}. \qquad (7)$$

Затем подставим (7) в (2): $E_2 = \dfrac{C_1 U_{общ}}{d(C_1 + C_2)}$. (8)

Теперь задача сводится к определению $U_{общ}$, т. е. напряжения на внешнем сопротивлении R. Подчеркнем, что постоянный ток через конденсаторы не идет, потому что они представляют собой разрыв цепи, поэтому ток во всех участках этой цепи один и тот же. По закону Ома для участка цепи и для всей цепи $I = \dfrac{U_{общ}}{R}$ и $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$,

поэтому $\dfrac{U_{общ}}{R} = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$, откуда $U_{общ} = \dfrac{\mathcal{E}R}{R + r}$. (9)

Но нам еще не известно внутреннее сопротивление источника тока r. Зато нам дана связь тока короткого замыкания с током I в цепи. Известно, что короткое замыкание наступает, когда внешнее сопротивление R отсутствует, т. е. когда полюса источника тока замкнуты накоротко. Тогда при $R = 0$ по закону Ома для замкнутой цепи $I_{к.з.} = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$.

Поскольку $I_{к.з.} = 3I$ и $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$, то $\dfrac{\mathcal{E}}{r} = 3\dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$,

$$\frac{1}{r} = \frac{3}{R + r},\ R + r = 3r,\ R = 2r \text{ и } r = \frac{R}{2}. \qquad (10)$$

Подставим (10) в (9): $U_{общ} = \dfrac{\mathcal{E}R}{R + \dfrac{R}{2}} = \dfrac{\mathcal{E}R}{\dfrac{3}{2}R} = \dfrac{2}{3}\mathcal{E}$. (11)

Нам осталось подставить (11) в (6) и (7), и задача будет решена: $\boxed{E_1 = \dfrac{2C_2\mathcal{E}}{3d(C_1 + C_2)}}$ $\boxed{E_2 = \dfrac{2C_1\mathcal{E}}{3d(C_1 + C_2)}}$

Задача решена.

Ответ: $E_1 = \dfrac{2C_2\mathcal{E}}{3d(C_1 + C_2)}$, $E_2 = \dfrac{2C_1\mathcal{E}}{3d(C_1 + C_2)}$.

Задача 9

Дана схема (рис. 6-17). Известны емкости C и $2C$ конденсаторов, сопротивления R и $2R$ проводников и ЭДС источника тока $\mathcal{E}$. Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь ($r = 0$). Определить напряжения U_1 и U_2 на конденсаторах и заряды q_1 и q_2 этих конденсаторов.

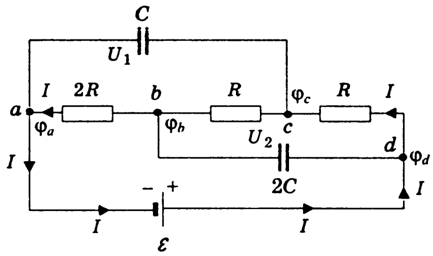


Рис. 6-17

Дано:	
C	
$2C$	
R	
$2R$	
$\mathcal{E}$	
$r = 0$	
U_1 – ?	
U_2 – ?	
q_1 – ?	
q_2 – ?	

Решение. Напряжение U_1 на конденсаторе C равно разности потенциалов $\varphi_c - \varphi_a$ между точками c и a, а напряжение U_2 на конденсаторе $2C$ равно разности потенциалов $\varphi_d - \varphi_в$ между точками d и b. Поскольку ток через конденсаторы не идет, мы имеем цепь с тремя последовательно соединенными проводниками, по которым идет одинаковый ток I. Тогда разность потенциалов $\varphi_c - \varphi_a$, как следует из закона Ома для участка цепи, равна произведению силы тока I и сопротивления участка ac, которое равно $2R + R = 3R$.

Поэтому $U_1 = \varphi_c - \varphi_a = 3\ IR$.

Аналогично разность потенциалов

$$\varphi_d - \varphi_b = U_2 = 2\ IR.$$

Таким образом, чтобы решить задачу, надо определить силу тока I. Ее мы легко определим по закону Ома для замкнутой цепи. С учетом того, что внутреннее сопротивление источника тока $r = 0$, имеем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}}} = \frac{\mathcal{E}}{2R + R + R} = \frac{\mathcal{E}}{4R}.$$

Тогда $\quad U_1 = \frac{3\mathcal{E}R}{4R} = \frac{3}{4}\mathcal{E}$ и $U_2 = \frac{2\mathcal{E}R}{4R} = \frac{\mathcal{E}}{2}$, или

$$\boxed{U_1 = 0{,}75\ \mathcal{E}} \text{ и } \boxed{U_2 = 0{,}5\ \mathcal{E}}$$

Заряды q_1 и q_2 конденсаторов найдем, воспользовавшись определением емкости:

$$C = \frac{q}{U}, \text{ откуда } \boxed{q_1 = CU_1} \text{ и } \boxed{q_2 = 2CU_2}$$

Задача решена.

Ответ: $U_1 = 0{,}75\ \mathcal{E}$, $U_2 = 0{,}5\ \mathcal{E}$,
$q_1 = CU_1$, $q_2 = 2CU_2$.

Задача 10

Имеется N одинаковых источников тока, которые соединяют сначала последовательно, затем параллельно, подключая каждый раз к одному и тому же внешнему сопротивлению R. Внутреннее сопротивление каждого источника r. Во сколько раз при этом изменяется напряжение на внешней части цепи?

Дано:
N
R
r

$\dfrac{U_2}{U_1}$ – ?

Обозначим U_1 напряжение на внешней части цепи при последовательном соединении источников тока, U_2– напряжение на внешней части цепи при их параллельном соединении.

Решение. Напряжение на внешней части цепи, т. е. на сопротивлении R, по закону Ома для участка цепи $U_1 = I_1R$.

Здесь I_1 – сила тока, текущего по цепи при последовательном соединении n одинаковых источников тока (рис. 6-18, *а*). Ее мы найдем по закону Ома для всей цепи, содержащей n последовательно соединенных одинаковых источников тока: $I_1 = \dfrac{N\mathcal{E}}{R + Nr}$.

Здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС каждого источника тока.

Тогда
$$U_1 = \frac{N\mathcal{E}R}{R + Nr}. \qquad (1)$$

Напряжение на внешней части цепи при параллельном соединении источников тока (рис. 6-18, *б*)
$$U_2 = I_2R.$$

Здесь I_2 – сила тока, текущего в общей части цепи при параллельном соединении N одинаковых источников. По закону Ома для всей цепи в этом случае сила тока
$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + \dfrac{r}{N}}.$$

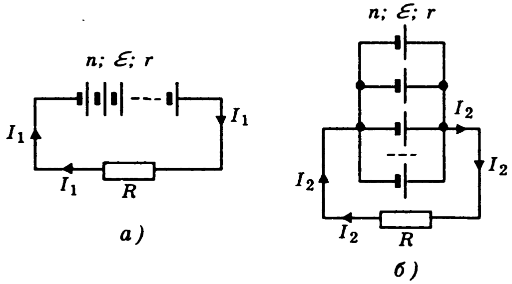


Рис. 6-18

Тогда $U_2 = \dfrac{\mathcal{E}R}{R + \dfrac{r}{N}}$. (2)

Нам осталось поделить (2) на (1), и задача будет решена. Выполним это действие:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\mathcal{E}R(R + Nr)}{\left(R + \dfrac{r}{N}\right)N\mathcal{E}R}, \qquad \boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{R + Nr}{NR + r}}$$

Задача решена.

Ответ: $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{R + Nr}{NR + r}$.

Задача 11

К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 150$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом параллельно подсоединены $n_1 = 10$ ламп сопротивлением по $R_1 = 240$ Ом каждая и $n_2 = 5$ ламп сопротивлением по $R_2 = 145$ Ом каждая. Сопротивление соединительных проводов $R_{пр} = 2{,}5$ Ом. Найти напряжение U на лампах.

Дано:
$\mathcal{E} = 150$ В
$r = 0{,}4$ Ом
$n_1 = 10$
$R_1 = 240$ Ом
$n_2 = 5$
$R_2 = 145$ Ом
$R_{пр} = 2{,}5$ Ом

$U_л$ – ?

Решение. Если в некоторых предыдущих задачах мы могли обходиться без чертежа, то для решения задач на параллельное соединение проводников чертеж необходим, без него очень легко допустить ошибку в решении, приписав не тот ток какому-нибудь сопротивлению или не то напряжение.

Напомним еще раз, что сопротивление соединительных проводов на схеме должно быть подключено последовательно к источнику тока, поэтому, чтобы не забыть его обозначить или включить туда, куда не надо, покажите его сразу после того, как вы изобразите источник тока. Помните также, что индекс тока после прохождения им узла надо изменить, потому что в узле ток «разветвляется», и что в одинаковых параллельных сопротивлениях текут одинаковые токи, а в разных – разные (рис. 6-19).

Для определения напряжения на лампах применим закон Ома для участка цепи: $U_л = I_{общ}R_л$. (1)

Здесь $I_{общ}$ – сила тока в общей части цепи, $R_л$ – общее сопротивление всех ламп.

Силу тока в общей части цепи $I_{общ}$ найдем по закону Ома для полной цепи:

$$I_{общ} = \frac{\mathcal{E}}{R_{общ} + r}.$$

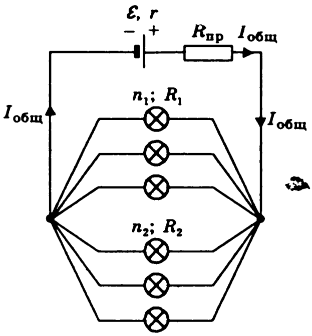


Рис. 6-19

Здесь $R_{общ}$ – общее сопротивление всей внешней части цепи, которая состоит из сопротивления соединительных проводов $R_{пр}$ и участка с лампами, соединенного с сопротивлением $R_{пр}$ последовательно. Поэтому все сопротивление внешней части этой цепи $R_{общ}$ равно сумме сопротивления проводов $R_{пр}$ и общего сопротивления ламп $R_л$:

$$R_{общ} = R_{пр} + R_л \text{ и } I_{общ} = \frac{\mathcal{E}}{R_{пр} + R_л + r}. \qquad (2)$$

Теперь нам осталось определить общее сопротивление ламп $R_л$. Обратим внимание на то, что участок цепи с лампами состоит из двух групп ламп. Первая группа содержит n_1 одинаковых ламп с сопротивлением R_1 каждая, соединенных параллельно, поэтому общее сопротивление этой группы ламп $R_{л1} = \dfrac{R_1}{n_1}$.

Вторая группа ламп содержит n_2 ламп по R_2 каждая, и они тоже соединены друг с другом параллельно, поэтому их общее сопротивление $R_{л2} = \dfrac{R_2}{n_2}$.

Поскольку обе группы ламп тоже параллельны друг другу, то их общее сопротивление $R_л$ можно найти по формуле $R_л = \dfrac{R_{л1}R_{л2}}{R_{л1} + R_{л2}}$

или

$$R_л = \frac{\dfrac{R_1}{n_1} \cdot \dfrac{R_2}{n_2}}{\dfrac{R_1}{n_1} + \dfrac{R_2}{n_2}} = \frac{R_1 R_2}{n_1 n_2 \dfrac{n_2 R_1 + n_1 R_2}{n_1 n_2}} = \frac{R_1 R_2}{n_2 R_1 + n_1 R_2}. \qquad (3)$$

Теперь подставим (3) в (2):

$$I_{\text{общ}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{n_2 R_1 + n_1 R_2} + r}. \qquad (4)$$

Нам осталось подставить (3) и (4) в (1), и задача будет решена:

$$U_{\text{л}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{n_2 R_1 + n_1 R_2} + r} \cdot \frac{R_1 R_2}{n_2 R_1 + n_1 R_2} =$$

$$= \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{(R_{\text{пр}} + r)(n_2 R_1 + n_1 R_2) + \dfrac{R_1 R_2 (n_2 R_1 + n_1 R_2)}{n_2 R_1 + n_1 R_2}},$$

$$\boxed{U_{\text{л}} = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{R_1 R_2 + (R_{\text{пр}} + r)(n_2 R_1 + n_1 R_2)}}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U_{\text{л}} = \frac{150 \cdot 240 \cdot 145}{240 \cdot 145 + (2{,}5 + 0{,}4)(5 \cdot 240 + 10 \cdot 145)} \text{ В} = 122 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{\text{л}} = 122$ В.

Задача 12

Какой ток I_A покажет амперметр A, включенный в схему, изображенную на рис. 6-20, *а*, если $R_1 = 1{,}25$ Ом, $R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 7$ Ом, ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 2{,}8$ В? Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь ($r = 0$).

Дано:
$R_1 = 1{,}25$ Ом
$R_2 = 1$ Ом
$R_3 = 3$ Ом

Решение. Сразу обратим внимание на участок цепи ab, который не обладает сопротивлением (по крайней мере нам о нем ничего не сказано и, значит, можно считать его равным нулю). Но тогда потенциалы на концах этого участка одина-

R_4 = 7 Ом
$\mathcal{E}$ = 2,8 В
r = 0

$I_А$ – ?

ковы, $\varphi_a = \varphi_в$, поэтому его можно «стянуть» в одну точку, соединив точки a и b.

Тогда получим эквивалентную схему, изображенную на рис. 6-20, *б*. Когда вы ее или подобную ей схему будете строить, следите, чтобы концы проводников R_2, R_3 и R_4, соединенные с точками a и b, сошлись в одну точку a, b, концы проводников R_1, R_2 и R_3, соединенные в точке c, так и остались соединенными в этой точке и, наконец, концы проводников R_1 и R_4 остались соединенными в точке d.

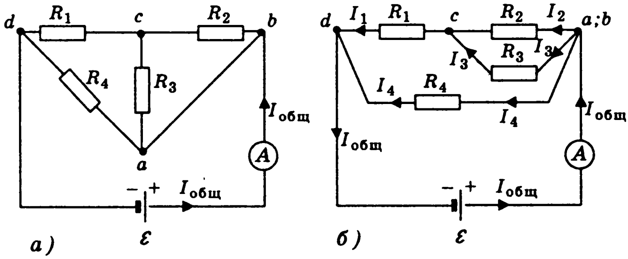


Рис. 6-20

Глядя на эту схему, мы теперь ясно видим, какие участки внешней части цепи соединены последовательно, а какие параллельно. Мы видим, что через амперметр будет идти ток общей части цепи $I_А = I_{общ}$. Следует учесть, что сопротивление амперметра очень мало, поэтому им, как правило, пренебрегают, т. е. если о нем ничего в условии задачи не сказано, то его можно считать равным нулю.

Чтобы найти силу тока $I_{общ}$, воспользуемся законом Ома для полной цепи: $I_{общ} = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{общ}}$ при $r = 0$. (1)

Здесь $R_{общ}$ – сопротивление всей внешней части цепи. Будем находить его постепенно. Сначала найдем общее сопротивление $R_{общ1}$ проводников R_2 и R_3, соединенных друг с другом параллельно: $R_{общ\,1} = \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$.

Таким образом, мы как бы заменяем два проводника R_2 и R_3 одним, сопротивление которого равно $R_{общ1}$. К этому сопротивлению проводник R_1 подключен последовательно, поэтому их общее сопротивление

$$R_{\text{общ}2} = R_1 + R_{\text{общ}1} \text{ или } R_{\text{общ}2} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}.$$

Так мы три сопротивления R_1, R_2, R_3 заменили одним сопротивлением $R_{\text{общ}2}$, к которому проводник сопротивлением R_4 подключен параллельно, поэтому общее сопротивление всей внешней части цепи

$$R_{\text{общ}} = \frac{R_{\text{общ}2}R_4}{R_{\text{общ}2} + R_4} \text{ или } R_{\text{общ}} = \frac{\left(R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}\right)R_4}{R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} + R_4} =$$

$$= \frac{\left(R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3\right)R_4}{(R_2 + R_3)\frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2R_3}{R_2 + R_3}} =$$

$$= \frac{\left(R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3\right)R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2R_3}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\boxed{I_A = \mathcal{E}\frac{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2R_3}{\left(R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3\right)R_4}}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$I_A = 2{,}8\frac{(1{,}25 + 7)(1 + 3) + 1\cdot 3}{\left(1{,}25(1 + 3) + 1\cdot 3\right)7} \text{ А} = 1{,}8 \text{ А}.$$

Ответ: $I_A = 1{,}8$ А.

Задача 13

Электрическая цепь состоит из источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 180$ В и потенциометра сопротивлением $R = 5$ кОм. Ползунок потенциометра стоит посередине прибора (рис. 6-21, *а*). Найти показания вольтметров U_1 и U_2, подключенных к потенциометру, если их сопротивления R_1 =

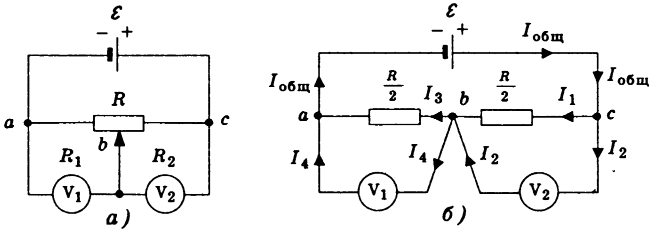


Рис. 6-21

= 6 кОм и R_2 = 4 кОм. Внутренним сопротивлением r источника тока пренебречь.

Дано:
$\mathcal{E}$ = 180 В
R = 5 кОм
R_1 = 6 кОм
R_2 = 4 кОм
r = 0
U_1 – ?
U_2 – ?

Решение. Поскольку ползунок потенциометра стоит на середине, значит, обе половинки потенциометра можно представить в виде двух последовательно соединенных проводников сопротивлениями по $\frac{R}{2}$ каждый, к которым вольтметры V_1 и V_2 подключены параллельно. Тогда получим схему, изображенную на рис. 6-21, *а*. Ее можно представить в виде эквивалентной схемы, изображенной на рис. 6-21, *б*.

Решить эту задачу можно, вообще не определяя сил токов в отдельных ветвях и в общей части цепи, а пользуясь исключительно правилами последовательного и параллельного соединения проводников. Как мы знаем, ЭДС $\mathcal{E}$ равна сумме напряжений на всех участках замкнутой цепи. Поскольку внутренним сопротивлением источника тока мы пренебрегли, напряжения на нем тоже не будет, поэтому здесь ЭДС $\mathcal{E}$ равна сумме только напряжений U_1 и U_2 на вольтметрах (или на сопротивлениях $\frac{R}{2}$), ведь сопротивлением соединительных проводов здесь мы тоже пренебрегаем, так как о нем ничего не сказано. Поэтому

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2. \qquad (1)$$

Итак, мы уже имеем одно уравнение с двумя искомыми неизвестными U_1 и U_2. Надо бы записать еще одно уравнение с ними же. Для этого учтем, что участки ab и bc с сопротивлением $\frac{R}{2}$ каждый с подключенными к ним вольтметрами между собой соединены последовательно, поэтому напряжения U_1 и U_2 на них прямо пропорциональны сопротивлениям этих участков: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_{ab}}{R_{bc}}$.

Здесь R_{ab} – сопротивление участка ab, R_{bc} – сопротивление участка bc. Но каждый из этих участков состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений: сопротивления $\frac{R}{2}$ и сопротивления соответствующего вольтметра, поэтому по закону параллельного соединения проводников сопротивления

$$R_{ab}=\frac{\frac{R}{2}R_1}{\frac{R}{2}+R_1}=\frac{RR_1}{R+2R_1} \text{ и } R_{bc}=\frac{\frac{R}{2}R_2}{\frac{R}{2}+R_2}=\frac{RR_2}{R+2R_2}.$$

С учетом этого $\frac{U_1}{U_2}=\frac{RR_1(R+2R_2)}{(R+2R_1)RR_2}=\frac{R_1(R+2R_2)}{R_2(R+2R_1)}$. (2)

Мы получили второе уравнение, в которое входят те же искомые напряжения U_1 и U_2. Чтобы решить систему уравнений (1) и (2), выразим из (2) одно из искомых напряжений, например U_2, и подставим полученное выражение вместо U_2 в уравнение (1): $U_2=U_1\frac{R_2(R+2R_1)}{R_1(R+2R_2)}$,

$$\mathcal{E}=U_1+U_1\frac{R_2(R+2R_1)}{R_1(R+2R_2)}=U_1\left(1+\frac{R_2(R+2R_1)}{R_1(R+2R_2)}\right).$$

Теперь мы имеем одно уравнение с одним неизвестным напряжением U_1, которое нам требуется найти по условию задачи. Отыщем его: $U_1=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{R_2(R+2R_1)}{R_1(R+2R_2)}}$ или

$$U_1=\mathcal{E}\frac{R_1(R+2R_2)}{R(R_1+R_2)+4R_1R_2}.$$

Напряжение U_2 найдем из уравнения (1). Поскольку U_1 нам уже известно, то $\boxed{U_2=\mathcal{E}-U_1}$

Задача в общем виде решена.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U_1=180\frac{6(5+2\cdot4)}{5(6+4)+4\cdot6\cdot4}\text{ В}=96\text{ В},$$

$U_2=(180-96)$ В $=84$ В.

Ответ: $U_1=96$ В, $U_2=84$ В.

Задача 14

Дана схема, изображенная на рис. 6-22, *а*. Сопротивления R_1, R_2 и R известны. Известны также ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ и его внутреннее сопротивление r. Найти силу тока I_2 в сопротивлении R_2.

Дано:
R_1
R_2

Решение. Сейчас на схеме (6-22, *а*) нет последовательно или параллельно соединенных участков, поэтому решить эту задачу, пользуясь зако-

R	
$\mathcal{E}$	
r	
I_2 – ?	

нами последовательного или параллельного соединения проводников, мы пока не можем. Поэтому подумаем, нельзя ли и эту схему как-нибудь упростить. Обратим внимание на то, что оба сопротивления нижней ветви acd вдвое больше соответствующих сопротивлений верхней ветви abd. Это значит, что ток в каждом сопротивлении нижней ветви acd будет вдвое меньше тока в каждом сопротивлении верхней ветви abd. Следовательно, общий ток $I_{общ}$ в узле d должен «разветвиться» так, чтобы ток I_2 в сопротивлении R_2 был вдвое больше тока в сопротивлении $2R_2$. Поэтому, если по сопротивлению R_2 пойдет, например, ток I_2, то по сопротивлению $2R_2$ пойдет ток $\frac{I_2}{2}$.

Тогда разность потенциалов между точками d и b по закону Ома для участка цепи $\varphi_d - \varphi_b = I_2R_2$, а разность потенциалов между точками d и c по этому же закону

$$\varphi_d - \varphi_c = \frac{I_2}{2} \cdot 2R_2 = I_2R_2.$$

Мы получили, что $\varphi_d - \varphi_b = \varphi_d - \varphi_c$, т. е. что $\varphi_b = \varphi_c$. Но это означает, что разность потенциалов между точками b и c равна нулю, и тогда сила тока I в сопротивлении R тоже должна быть равной нулю. Поэтому ток по сопротивлению R идти не будет. Но тогда оно не играет никакой роли в распределении токов в остальных сопротивлениях, поэтому «перемычку» bc с сопротивлением R можно из схемы исключить, заменив эту схему на эквивалентную, изображенную на рис. 6-22, *б*.

Теперь мы видим, что наша схема состоит из двух параллельных ветвей abd и acd, причем ветвь abd включает в себя два последовательно соединенных сопротивления R_1 и R_2, а ветвь acd включает в себя два последо-

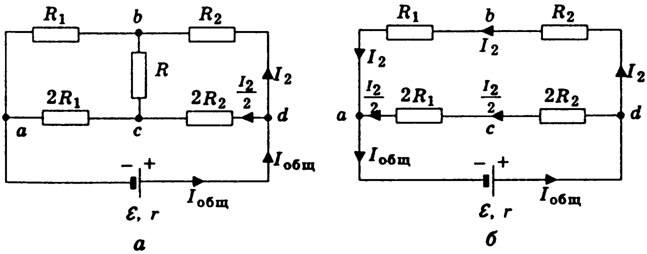


Рис. 6-22

вательных сопротивления $2R_1$ и $2R_2$, поэтому общее сопротивление верхней ветви $R_1 + R_2$ будет вдвое меньше общего сопротивления нижней ветви $2R_1 + 2R_2 = 2(R_1 + R_2)$. Значит, по всей верхней ветви будет течь ток I_2, который вдвое больше тока в нижней ветви. Тогда общий ток, который втекает в узел d,

$$I_{общ} = I_2 + \frac{I_2}{2} = \frac{3}{2}I_2, \text{ откуда } I_2 = \frac{2}{3}I_{общ}. \qquad (1)$$

Теперь для решения задачи нам нужно определить ток в общей части цепи $I_{общ}$. Его мы определим по закону Ома для полной цепи: $I_{общ} = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{общ} + r}$.

Здесь $R_{общ}$ – общее сопротивление внешней части цепи. Поскольку сопротивление верхней ветви равно $R_1 + R_2$, а сопротивление нижней ветви равно $2R_1 + 2R_2 = 2(R_1 + R_2)$ и эти ветви соединены параллельно, то общее сопротивление всей внешней части цепи

$$R_{общ} = \frac{(R_1 + R_2)\cdot 2(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + 2R_1 + 2R_2} = \frac{2(R_1 + R_2)^2}{3(R_1 + R_2)} = \frac{2}{3}(R_1 + R_2).$$

Тогда $I_{общ} = \dfrac{\mathcal{E}}{\frac{2}{3}(R_1 + R_2) + r}$. (2)

Подставив (2) в (1), мы решим задачу:

$$I_2 = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}}{\frac{2}{3}(R_1 + R_2) + r} \quad \text{или} \quad \boxed{I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{2(R_1 + R_2) + 3r}}$$

Ответ: $I_2 = \dfrac{2\mathcal{E}}{2(R_1 + R_2) + 3r}$.

Задача 15

Проволока из нихрома образует кольцо диаметром $D = 2$ м (рис. 6-23, *а*). В центре кольца помещен источник тока с $\mathcal{E} = 2$В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}5$ Ом,

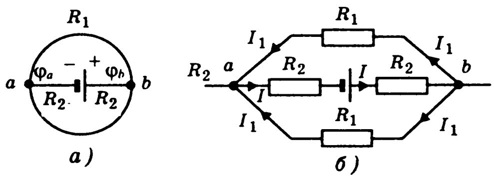


Рис. 6-23

соединенный в точках a и b с кольцом такой же проволокой. Найти разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$ между точками b и a. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1$ мкОм · м, площадь поперечного сечения проволоки $S = 1$ мм^2.

Дано:
$D = 2$ м
$\mathcal{E} = 2$ В
$r = 1{,}5$ Ом
$\rho = 1{,}1$ мкОм · м
$S = 1$ мм^2

$\varphi_b - \varphi_a$ — ?

Решение. Эквивалентую схему мы изобразили на рис. 6-22, *б*). Разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$ между точками b и a равна напряжению U_1 на половине кольца, сопротивление которой мы обозначили R_1. На этой схеме половинки кольца, верхняя и нижняя, изображены в виде двух резисторов с сопротивлениями R_1, а половинки диаметра, соединяющие точку a и точку b с полюсами источника тока, мы обозначили резисторами с сопротивлениями R_2.

Из «плюса» источника тока мы вывели ток I, который в точке b «разветвился» на два одинаковых тока I_1. Эти токи пройдя по сопротивлениям R_1, «стеклись» в точке a, поэтому от точки a к «минусу» источника снова потек ток I.

Напряжение $U_1 = \varphi_b - \varphi_a$ можно найти, умножив силу тока I в неразветвленной части цепи на общее сопротивление двух полуколец, т. е. двух резисторов R_1. Поскольку сопротивления полуколец R_1 одинаковы, то их общее сопротивление равно $\frac{R_1}{2}$. Поэтому $\varphi_b - \varphi_a = U_1 = I\frac{R_1}{2}$. (1)

По закону Ома для полной цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_{общ} + r}$, где общее сопротивление всей внешней части цепи

$$R_{общ} = 2R_2 + \frac{R_1}{2} = \frac{R_1 + 4R_2}{2}, \text{ поэтому}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_1 + 4R_2}{2} + r} = \frac{2\mathcal{E}}{R_1 + 2(2R_2 + r)}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{2\mathcal{E}R_1}{2(R_1 + 2(2R_2 + r))} = \frac{\mathcal{E}R_1}{R_1 + 2(2R_2 + r)}. \quad (3)$$

Нам осталось определить сопротивления R_1 и R_2 через длины проводников l_1 и l_2, их удельное сопротивление ρ

и площадь поперечного сечения проволоки S. Согласно формуле сопротивления $R_1 = \rho\frac{l_1}{S}$ и $R_2 = \rho\frac{l_2}{S}$.

Здесь l_1 – длина полукольца. Выразим ее через известный нам диаметр кольца D. Поскольку длина кольца $2l_1 = \pi D$, то $l_1 = \frac{\pi D}{2}$.

Длина проводника l_2 равна половине длины диаметра кольца D: $l_2 = \frac{D}{2}$.

С учетом этих равенств $R_1 = \rho\frac{\pi D}{2S}$ (4) и $R_2 = \rho\frac{D}{2S}$. (5)

Подставим (4) и (5) в (3) и упростим полученное выражение:

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{\mathcal{E}\rho\pi D}{2S\left(\rho\frac{\pi D}{2S} + 2\left(2\rho\frac{D}{2S} + r\right)\right)} = \frac{\pi\rho D\mathcal{E}}{2S\frac{\pi\rho D + 4\rho D + 4rS}{2S}},$$

$$\boxed{\varphi_b - \varphi_a = \frac{\pi\rho D\mathcal{E}}{\rho D(\pi + 4) + 4rS}}$$

Переведем в СИ единицы величин:
1,1 мкОм · м = 1,1 · 10^{-6} Ом · м, 1 мм^2 = 1 · 10^{-6} м^2.
Произведем вычисления:

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 2}{1{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 2(3{,}14 + 4) + 4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}}\ \text{В} = 0{,}64\ \text{В}.$$

Ответ: $\varphi_b - \varphi_a = 0{,}64$ В.

Задача 16

Для зарядки аккумулятора током $I_1 = 2$ А его подключили к генератору постоянного тока (рис. 6-24, *а*). При этом вольтметр, присоединенный к полюсам аккумулятора, показал $U_1 = 6$ В. Затем этот аккумулятор включили

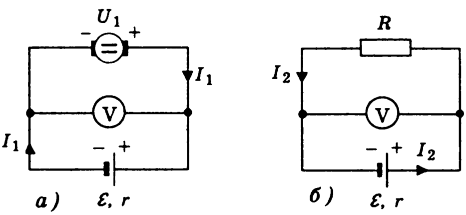


Рис. 6-24

в цепь (рис. 6-24, *б*), и вольтметр показал напряжение на полюсах аккумулятора $U_2 = 5$ В при силе тока в цепи $I_2 = 3$ А. Определить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление аккумулятора r. Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим.

Дано:
$I_1 = 2$ А
$U_1 = 6$ В
$U_2 = 5$ В
$I_2 = 3$ А

$\mathcal{E}$ – ?
r – ?

Решение. При зарядке аккумулятора его положительный полюс подключают к «плюсу» генератора, а отрицательный – к «минусу» генератора. При этом от «плюса» генератора к аккумулятору идет зарядный ток силой I_1 (рис. 6-24, *а*). Вольтметр показывает напряжение на полюсах генератора U_1. Оно равно сумме ЭДС аккумулятора и падения напряжения $I_1 r$ на его внутреннем сопротивлении r:

$$U_1 = \mathcal{E} + I_1 r. \qquad (1)$$

Когда же аккумулятор после зарядки включают в цепь, сила тока I_2 в ней согласно закону Ома для участка цепи сопротивлением R и для полной цепи становится:

$$I_2 = \frac{U_2}{R} \quad (2) \qquad \text{и} \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (3)$$

Найдем из (2) внешнее сопротивление R и подставим полученное выражение в (3). Так мы получим два уравнения с двумя неизвестными – искомыми $\mathcal{E}$ и r, которые решим относительно них. Приступим:

из (2) $R = \dfrac{U_2}{I_2}$, тогда $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{U_2}{I_2} + r} = \dfrac{\mathcal{E} I_2}{U_2 + I_2 r}$. (4)

Выразим из (1) ЭДС $\mathcal{E}$ и подставим в (4). Получим одно уравнение с одним неизвестным – внутренним сопротивлением r: из (1) $\mathcal{E} = U_1 - I_1 r$. (5)

Подставляем (5) в (4): $I_2 = \dfrac{(U_1 - I_1 r) I_2}{U_2 + I_1 r}$,

$$U_2 I_2 + I_2^2 r = U_1 I_2 - I_1 I_2 r, \quad I_1 I_2 r + I_2^2 r = U_1 I_2 - U_2 I_2.$$

Отсюда $r = \dfrac{I_2 (U_1 - U_2)}{I_2 (I_1 + I_2)}$, $\boxed{r = \dfrac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}}$

Теперь, зная внутреннее сопротивление r, найдем ЭДС $\mathcal{E}$ по формуле (5): $\boxed{\mathcal{E} = U_1 - I_1 r}$.

Произведем вычисления: $r = \dfrac{6 - 5}{2 + 3}$ Ом $= 0{,}2$ Ом.

$\mathcal{E} = (6 - 2 \cdot 0{,}2)$ В $= 5{,}6$ В.

Ответ: $\mathcal{E} = 5{,}6$ В, $r = 0{,}2$ Ом.

Задача 17

Полностью «севший» аккумулятор емкостью $q = 40$ А · ч (ампер-часов) заряжают от генератора с напряжением $U_1 = 10$ В в течение времени $t = 10$ ч. Какова ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}$ в конце зарядки, если его внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом?

Дано:
$q = 40$ А · ч
$U_1 = 10$ В
$t = 10$ ч
$r = 0,5$ Ом

$\mathcal{E}$ – ?

Решение. Напомним, что емкостью аккумулятора называют заряд, который накопит аккумулятор в течение времени t (не перепутайте емкость аккумулятора с емкостью конденсатора!). Зная этот заряд q и время зарядки аккумулятора t, найдем силу зарядного тока I: $I = \dfrac{q}{t}$. (1)

Здесь, как и в предыдущей задаче, напряжение на зажимах генератора U_1 равно сумме ЭДС аккумулятора и падения напряжения U_2 на внутреннем сопротивлении аккумулятора r: $U_1 = \mathcal{E} + U_2$, где $U_2 = Ir$, поэтому

$$U_1 = \mathcal{E} + Ir. \qquad (2)$$

Подставим (1) в (2): $U_1 = \mathcal{E} + \dfrac{q}{t}r$, откуда $\boxed{\mathcal{E} = U - \dfrac{q}{t}r}$

Переведем все единицы в СИ:
40 А · ч = 40 · 3600 А · с = $1,44 \cdot 10^5$ Кл, 10 ч = $3,6 \cdot 10^4$ с.
Произведем вычисления:

$$\mathcal{E} = \left(10 - \frac{1,44 \cdot 10^5}{3,6 \cdot 10^4} 0,5\right) \text{В} = 8 \text{ В}.$$

Ответ: $\mathcal{E} = 8$ В.

Задача 18

Вольтметр с сопротивлением $R_в = 100$ Ом присоединили к полюсам источника тока с внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом. Определить относительную погрешность показаний вольтметра δ, если им измеряют ЭДС источника тока при разомкнутой внешней части цепи.

Дано:
$R_в = 100$ Ом
$r = 0,5$ Ом

δ – ?

Решение. Относительной погрешностью δ называют отношение абсолютной погрешности показаний вольтметра, которая равна разности между ЭДС $\mathcal{E}$ источника и показаниями вольтметра U, к ЭДС этого источника, выраженное обычно в процентах:

$$\delta = \frac{\mathcal{E} - U}{\mathcal{E}} 100\%. \qquad (1)$$

По закону Ома для полной цепи и для ее внешней части $\mathcal{E} = I(R_{\text{в}} + r)$ (2) и $U = IR_{\text{в}}$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1). При этом сила тока I, текущего через вольтметр и источник тока, сократится, и мы определим погрешность δ через известные нам сопротивления $R_{\text{в}}$ и r:

$$\delta = \frac{I(R_{\text{в}} + r) - IR_{\text{в}}}{I(R_{\text{в}} + r)} 100\% = \frac{I(R_{\text{в}} + r - R_{\text{в}})}{I(R_{\text{в}} + r)} 100\%,$$

$$\boxed{\delta = \frac{r}{R_{\text{в}} + r} 100\%}$$

Произведем вычисления: $\delta = \dfrac{0{,}5}{100 + 0{,}5} 100\% = 0{,}5\%$.

Ответ: $\delta = 0{,}5\%$.

Задача 19

«Подсевший» аккумулятор с остаточной ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В подключен для зарядки к генератору, на полюсах которого напряжение $U = 16$ В. Внутреннее сопротивление аккумулятора $r = 1$ Ом, сопротивление соединительных проводов $R = 0{,}4$ Ом. Найти силу зарядного тока I.

Дано:
$\mathcal{E} = 2$ В
$U = 16$ В
$r = 1$ Ом
$R = 0{,}4$ Ом

I – ?

Решение. Нарисуем схему, на которой изобразим генератор, резистор, сопротивление которого R равно сопротивлению соединительных проводов, и аккумулятор с сопротивлением r. Все эти части цепи соединены последовательно, поэтому по ним течет одинаковый ток силой I (рис. 6-25). Не забудем, что при зарядке генератор и аккумулятор соединяют одноименными полюсами.

Применим для решения задачи второе правило Кирхгофа, согласно которому алгебраическая сумма всех ЭДС в контуре равна алгебраической сумме произведений сил токов на сопротивления, по которым эти токи текут.

Но при этом учтем, что генератор является сам источником тока, именно из его положительного полюса «вытекает» зарядный ток, поэтому напряжение U на его полюсах «играет роль» ЭДС, т. е. оно должно входить в алгебраическую сумму ЭДС. Кроме того, учтем, что зарядный ток в аккумуляторе течет в сторону понижения потенциала, т. е. от «плюса» к «минусу», поэтому перед ЭДС аккумулятора надо ставить «минус». Тогда второе правило Кирхгофа приме-

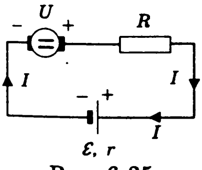


Рис. 6-25

нительно к схеме на рис. 6-25 примет вид $U - \mathcal{E} = IR + Ir$, откуда $\boxed{I = \dfrac{U - \mathcal{E}}{R + r}}$

Произведем вычисления: $I = \dfrac{16 - 2}{0{,}4 + 1}\ \text{А} = 10\ \text{А}$.

Ответ: $I = 10$ А.

Задача 20

К источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}2$ В присоединили последовательно амперметр и вольтметр (рис. 6-26, *а*). Когда параллельно вольтметру присоединили резистор, то его показания уменьшились в полтора раза, а показания амперметра во столько же раз увеличились. Какое напряжение U_1 показывал вольтметр до подключения резистора?

Дано:
$\mathcal{E} = 1{,}2$ В
$\dfrac{U_1}{U_2} = 1{,}5$
$\dfrac{I_2}{I_1} = 1{,}5$

U_1 – ?

Обозначим U_2 напряжение, которое показывает вольтметр при подключенном к нему резисторе, I_1 – силу тока в цепи без резистора, I_2 – силу тока в неразветвленной части цепи с резистором, которую при этом показывает амперметр.

Решение. Применим второе правило Кирхгофа к контуру, изображенному на рис. 6-26, *а*:

$$\mathcal{E} = I_1R_А + U_1 + I_1r = I_1(R_А + r) + U_1. \quad (1)$$

Теперь применим это правило к контуру, включающему в себя источник, амперметр и вольтметр (без резистора) (рис. 6-26, *б*):

$$\mathcal{E} = I_2R_А + U_2 + I_2r = I_2(R_А + r) + U_2. \quad (2)$$

Теперь определим из (1) и (2) силы токов I_1 и I_2:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} - U_1}{R_А + r} \quad (3) \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E} - U_2}{R_А + r}. \quad (4)$$

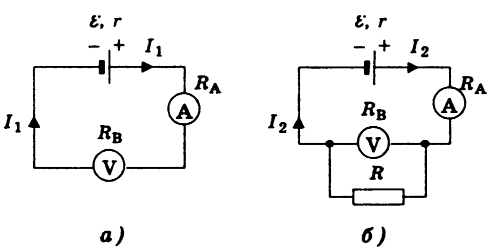


Рис. 6-26

Если разделить (3) на (4), то сумма неизвестных сопротивлений $R_A + r$ сократится. Отношение $\frac{I_2}{I_1}$ нам известно, а неизвестное напряжение U_2 мы можем заменить на $\frac{U_1}{1,5}$ согласно условию задачи. И останется одно уравнение с одним искомым U_1. Проделаем эти действия:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{(\mathcal{E} - U_2)(R_A + r)}{(R_A + r)(\mathcal{E} - U_1)}, \text{ откуда } 1,5 = \frac{\mathcal{E} - \frac{U_1}{1,5}}{\mathcal{E} - U_1},$$

$$1,5\mathcal{E} - 1,5U_1 = \mathcal{E} - \frac{U_1}{1,5}, \ 1,5\mathcal{E} - \mathcal{E} = 1,5U_1 - \frac{U_1}{1,5}.$$

$$U_1 = \frac{0,5\mathcal{E}}{1,5 - \frac{1}{1,5}}, \quad \boxed{U_1 = 0,6\mathcal{E}}$$

Вычислим U_1: $U_1 = 0,6 \cdot 1,2$ В $= 0,72$ В.

Ответ: $U_1 = 0,72$ В.

Задача 21

Мостик Уитстона сбалансирован так, что стрелка гальванометра G стоит на нуле (рис. 6-27). По сопротивлению $R_1 = 1$ Ом течет ток силой $I_1 = 0,4$ А, сопротивления $R_2 = 2$ Ом и $R_3 = 3$ Ом. Найти ЭДС источника тока, если его внутреннее сопротивление $r = 0,2$ Ом.

Дано:
$I_G = 0$
$R_1 = 1$ Ом
$I_1 = 0,4$ А
$R_2 = 2$ Ом
$R_3 = 3$ Ом
$r = 0,2$ Ом

$\mathcal{E}$ – ?

Решение. Поскольку через гальванометр ток не идет, то токи в сопротивлениях R_1 и R_2 одинаковы, а также одинаковы и токи в сопротивлениях R_3 и R_4, т. е. ветвь с сопротивлениями R_1 и R_2 параллельна ветви с сопротивлениями R_3 и R_4. Тогда по закону Ома для полной цепи

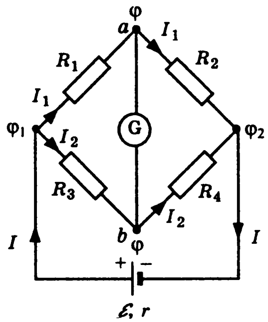


Рис. 6-27

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{общ} + r}, \text{ откуда}$$

$$\mathcal{E} = I(R_{общ} + r). \qquad (1)$$

Здесь I – сила тока в неразветвленной части цепи, $R_{общ}$ – общее сопротивление всей внешней части цепи.

Поскольку ток через гальванометр не идет, потенциалы точек a и b одинаковы и, значит, $\varphi_1 - \varphi = I_1R_1$ и $\varphi_1 - \varphi = I_2R_3$, поэтому $I_1R_1 = I_2R_3$, откуда $I_2 = I_1 \dfrac{R_1}{R_3}$. (2)

Зная силы токов I_1 и I_2, мы легко найдем силу тока I по первому правилу Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = I_1 + I_1 \frac{R_1}{R_3} = I_1\left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right). \qquad (3)$$

Общее сопротивление внешней части цепи

$$R_{общ} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}. \qquad (4)$$

Но сопротивление R_4 нам не дано. Однако его определить не так уж сложно, если учесть, что $\varphi - \varphi_2 = I_1R_2$ и $\varphi - \varphi_2 = I_2R_4$, ведь I_2 мы уже нашли. С учетом этого $I_1R_2 = I_2R_4$, откуда $R_4 = R_2 \dfrac{I_1}{I_2}$ или с учетом (2)

$$R_4 = R_2 \frac{I_1}{I_1 \frac{R_1}{R_3}} = \frac{R_2R_3}{R_1}. \qquad (5)$$

Теперь найдем $R_{общ}$, подставив (5) в (4):

$$R_{общ} = \frac{(R_1 + R_2)\left(R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}\right)}{R_1 + R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_1R_3 + R_2R_3)}{R_1 \frac{R_1(R_1 + R_2 + R_3) + R_2R_3}{R_1}} =$$

$$= \frac{R_3(R_1 + R_2)^2}{R_1(R_1 + R_2 + R_3) + R_2R_3}. \qquad (6)$$

Нам осталось подставить (3) и (6) в (1):

$$\boxed{\mathcal{E} = I_1\left(1 + \frac{R_1}{R_3}\right)\left(\frac{R_3(R_1 + R_2)^2}{R_1(R_1 + R_2 + R_3) + R_2R_3} + r\right)}$$

Произведем вычисления:

$$\mathcal{E} = 0{,}4\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{3(1+2)^2}{1(1+2+3)+2\cdot 3} + 0{,}2\right)\text{В} = 1{,}3\ \text{В}.$$

Ответ: $\mathcal{E} = 1{,}3$ В.

Задача 22

На рис. 6-28 показана схема электрической цепи. Определить силы токов I_1, I_2 и I_3 в сопротивлениях R_1, R_2 и R_3, если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 4$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 4$ Ом и $R_3 = 2$ Ом. Внутренним сопротивлением источников тока можно пренебречь. $\mathcal{E}_3 = 2$ В.

Дано:
$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 4$ В
$\mathcal{E}_3 = 2$ В
$R_1 = 1$ Ом
$R_2 = 4$ Ом
$R_3 = 2$ Ом

I_1 – ?
I_2 – ?
I_3 – ?

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся правилами Кирхгофа. Но прежде чем их записать, надо показать, как текут токи в отдельных участках этой цепи, и выбрать направления произвольного обхода контуров, входящих в эту цепь. Выведем из плюса источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_1$ ток силой I_1 и будем его вести до первого узла n, не изменяя его индекса (поскольку ток в последовательном участке один и тот же независимо от того, через какие сопротивления или источники тока он течет). Пусть в узле n ток I_1 разветвляется на токи I_2 и I_3.

Ток I_2 будет течь от точки n к точке m через сопротивление R_2 и источник тока с ЭДС $\mathcal{E}_2$, ни по величине, ни по направлению не изменяясь. Ток I_3 будет тоже течь от точки n к точке m через сопротивление R_3 и ЭДС $\mathcal{E}_3$, тоже не меняя ни своего направления, ни своего индекса. Подойдя к точке m, токи I_2 и I_3 сольются, и далее будет течь снова ток I_1.

Отметим, что с таким же успехом мы могли вывести ток из источника с ЭДС $\mathcal{E}_2$ и разветвить его в точке n или из источника с ЭДС $\mathcal{E}_3$. Можно также вывести сразу два тока из источников, например, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, и соединить их в точке n (или из источников $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$). Выбор здесь может быть произвольным, главное, чтобы все эти токи не «втекали» в один и тот же узел или не «вытекали» из одного узла, потому что «втекающие» в узел заряды должны где-то «вытекать».

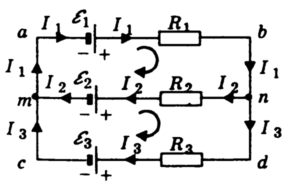


Рис. 6-28

Согласно первому правилу Кирхгофа сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла. На схеме, изображенной на рис. 6-28, в узел n входит ток I_1, а выходят токи I_2 и I_3, поэтому согласно первому правилу Кирхгофа $I_1 = I_2 + I_3$. (1)

В этом уравнении три неизвестных величины, поэтому, чтобы его решить, надо составить еще два уравнения с этими величинами, но так, чтоб остальные величины в этих уравнениях были известны. Для этого воспользуемся вторым правилом Кирхгофа, записанным применительно к контурам *abnm* и *mndc*. Выберем произвольный обход контура *abnm* по часовой стрелке. Согласно второму правилу Кирхгофа алгебраическая сумма ЭДС, входящих в замкнутый контур, равна алгебраической сумме произведений сил токов на все сопротивления, через которые эти токи текут в данном контуре. При этом под словами «алгебраическая сумма» подразумевается, что сложение может быть как со знаком «плюс», так и со знаком «минус». Знак «плюс» ставится перед ЭДС в том случае, когда, следуя обходу контура в произвольно выбранном направлении, мы «переходим» внутри источника тока (в узком промежутке между короткой и толстой палочкой, означающей знак «минус», и длинной тонкой палочкой, означающей знак «плюс») в сторону повышения потенциала, т. е. от «минуса» к «плюсу». Если же, продолжая следовать в данном контуре выбранному направлению обхода, мы «переходим» внутри источника тока в сторону понижения потенциала, т. е. от «плюса» источника тока к его «минусу», то перед ЭДС этого источника тока следует ставить знак «минус».

Знак «плюс» перед произведением силы тока на сопротивление, через которое этот ток течет, ставится в том случае, когда направление тока в этом сопротивлении совпадет с направлением выбранного произвольно обхода контура (независимо от того, через какие ЭДС этот ток течет). Если же ток в данном сопротивлении антинаправлен обходу контура, то перед произведением силы этого тока и соответствующего сопротивления ставится знак «минус».

Обходя контур *abnm* по часовой стрелке (т. е. в произвольно выбранном направлении), переходим внутри источника с ЭДС $\mathcal{E}_1$ от «минуса» к «плюсу», поэтому ЭДС $\mathcal{E}_1$ положительна. Но, продолжая обход в этом направлении, переходим внутри источника тока с ЭДС $\mathcal{E}_2$ от «плюса» к «минусу», поэтому перед ЭДС $\mathcal{E}_2$ следует ставить знак «минус». Других источников тока в контуре *abnm* нет.

В контуре *abnm* имеются сопротивления R_1 и R_2. По сопротивлению R_1 течет ток I_1, причем течет он в направлении выбранного обхода контура, т. е. по часовой стрелке. Ток I_2, течет по сопротивлению R_2 тоже в направлении произвольного обхода контура по часовой стрелке. Поэтому перед произведением I_1R_1 и I_2R_2 нужно ставить знак «плюс». Других сопротивлений в этом контуре нет.

Таким образом, применительно к контуру *abnm* второе правило Кирхгофа запишем следующим образом:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1R_1 + I_2R_2. \qquad (2)$$

Теперь применим это правило к контуру *nmdc* (заметим, что с таким же успехом можно вторым контуром выбрать контур *abdc*). Будем обходить этот контур тоже по часовой стрелке (можно было бы и против, результат от этого не изменился бы, поменялись бы только все знаки в нашем уравнении слева и справа от равенства). При этом в источнике с ЭДС $\mathcal{E}_2$ будем переходить от отрицательного полюса к положительному, поэтому $\mathcal{E}_2$ тоже будет положительна, а в источнике с ЭДС $\mathcal{E}_3$ будем переходить от положительного полюса к отрицательному, поэтому перед $\mathcal{E}_3$ поставим знак «минус».

Далее, ток I_2 будет теперь течь навстречу нашему обходу контура, т. е. против часовой стрелки, поэтому теперь перед I_2R_2 поставим знак «минус», а ток I_3 будет сонаправлен выбранному обходу контура, поэтому перед I_3R_3 поставим знак «плюс». В итоге второе правило Кирхгофа, записанное применительно к контуру *nmdc*, примет вид:

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = -I_2R_2 + I_3R_3. \qquad (3)$$

Мы получим систему трех уравнений (1), (2) и (3) с тремя неизвестными I_1, I_2 и I_3. Исключив из этих уравнений I_2 и I_3, найдем I_1.

Отметим, что если продолжить решение этой задачи в общем виде, то могут получиться чрезвычайно громоздкие уравнения. Чтобы этого избежать, договорились в уравнения задач на правила Кирхгофа, записанные в общем виде, сразу подставлять все известные величины, поскольку эта подстановка существенно облегчает дальнейшее решение задачи. Поэтому подставим в уравнения (2) и (3) вместо $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, R_1, R_2 и R_3 численные значения этих величин. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3, \\ 4 - 4 = I_1 + 4I_2, \\ 4 - 2 = -4I_2 + 2I_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3, & (4) \\ 0 &= I_1 + 4I_2, & (5) \\ 2 &= -4I_2 + 2I_3. & (6) \end{aligned}$$

Решим эту систему методом подстановки. Выразим из уравнения (4) силу тока I_3 и подставим полученное выражение вместо I_3 в (6): $I_3 = I_1 - I_2$. (7)

Подставляем (7) в (6): $2 = 2(I_1 - I_2) - 4I_2$, $2 = 2I_1 - 2I_2 - 4I_2$, $2 = 2I_1 - 6I_2$ или $1 = I_1 - 3I_2$.

Полученное выражение вместе с уравнением (5) представляет собой систему двух уравнений с двумя неизвестными I_1 и I_2. Запишем их в столбик:

$$\begin{cases} 0 = I_1 + 4I_2, & (8) \\ 1 = I_1 - 3I_2. & (9) \end{cases}$$

Нам осталось выразить из (8) силу тока I_2 и подставить полученное выражение вместо I_2 в (9). Тогда у нас останется только одно неизвестное I_1, которое мы определим после приведения подобных членов. Выполним эти действия: из (8) $-4I_2 = I_1$, $I_2 = -\frac{I_1}{4}$, $1 = I_1 - 3\left(-\frac{I_1}{4}\right)$,

$1 = I_1 + \frac{3}{4}I_1$, $1 = \frac{7}{4}I_1$, откуда $I_1 = \frac{4}{7}A$.

Следовательно, $I_2 = -\frac{4}{7 \cdot 4}A = -\frac{1}{7}A$.

Знак «минус» свидетельствует о том, что ток силой I_2 течет не от точки n к точке m, как мы выбрали, а от точки m к точке n.

Теперь найдем силу тока I_3. Согласно (7)

$$I_3 = \left(\frac{4}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)\right)A = \frac{5}{7}A.$$

Задача решена.

Ответ: $I_1 = \frac{4}{7}A$, $I_2 = -\frac{1}{7}A$ и $I_3 = \frac{5}{7}A$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 0{,}8$ Ом подключен резистор сопротивлением $R = 4$ Ом. Напряжение на зажимах источника $U = 3$В. Найти ЭДС источника $\mathcal{E}$ и работу сторонних сил $A_{\text{ст. сил}}$ за $t = 2$ мин.

Ответ: $\mathcal{E} = U\left(1 + \frac{r}{R}\right) = 3{,}6$ В, $A_{\text{ст. сил}} = \frac{U\mathcal{E}}{R}t = 324$ Дж.

Задача 2. Чему равно напряжение U на полюсах источника тока ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}4$ В, если сопротивление внешней части цепи в 4 раза больше внутреннего сопротивления источника ?

Ответ: $U = 0{,}8\,\mathcal{E} = 1{,}92$ В.

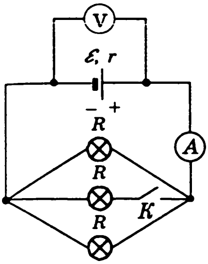


Рис. 6-29

Задача 3. Дана схема (рис. 6-29). Во сколько раз изменятся показания амперметра и вольтметра, если замкнуть ключ К? Внутреннее сопротивление $r = 0{,}5\ R$.

Ответ: $I_2/I_1 = 1{,}2$, $U_1/U_2 = 1{,}25$.

Задача 4. Дана схема (рис. 6-30). Вольтметр показывает напряжение $U_1 = 4$ В, а амперметр силу тока $I_1 = 2$ А. Когда параллельно резистору подключили еще один с таким же сопротивлением, показания вольтметра уменьшились на 20%, а амперметр стал показывать силу тока $I_2 = 3$ А. Найти ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ и его внутреннее сопротивление r.

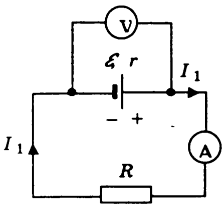


Рис. 6-30

Ответ: $r = \dfrac{U_1}{5(I_2 - I_1)} = 0{,}8$ Ом,

$\mathcal{E} = U_1 + I_1 r = 5{,}6$ В.

Задача 5. ЭДС источника $\mathcal{E} = 6$ В. При внешнем сопротивлении $R = 1$ Ом ток в цепи равен $I = 3$ А. Найти силу тока короткого замыкания $I_{к.з.}$.

Ответ: $I_{к.з.} = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{\mathcal{E}}{I} - R} = 6$ А.

Задача 6. Генератор постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 240$ В питает потребителей, удаленных от электростанции на расстояние $l = 200$ м. Линия передачи выполнена медными проводами сечением $S = 16$ мм^2. Ток в линии $I = 80$ А. Внутреннее сопротивление генератора $r = 0{,}05$ Ом. Найти напряжение U на потребителях. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $U = \mathcal{E} - I\left(2\rho\dfrac{l}{S} + r\right) = 202$ В.

Задача 7. При подключении к источнику тока резистора сопротивлением $R_1 = 10$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 2$ А, а при подключении резистора сопротивлением $R_2 = 5$ Ом сила тока увеличилась в полтора раза. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление источника тока r.

Ответ: $r = 2R_1 - 3R_2 = 5$ Ом,

$\mathcal{E} = I_1(R_1 + r) = 30$ В.

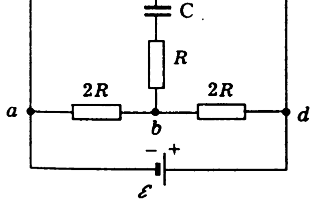


Рис. 6-31

Задача 8. Построить график зависимости напряжения U и силы тока I от внешнего сопротивления R, подключенного к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом.

Задача 9. Определить разность потенциалов между точками a и b, между точками b и d и между точками b и e (рис. 6-31). ЭДС источника тока $\mathcal{E}$, сопротивление R и емкость

С известны. Внутренним сопротивлением источника тока r пренебречь.

Ответ: $\varphi_d - \varphi_b = \varphi_b - \varphi_a = \dfrac{2\mathcal{E}R}{4R} = 0{,}5\mathcal{E}$, $\varphi_b - \varphi_e = 0$.

Задача 10. Определить напряжения U_1, U_2 и U_3 на сопротивлениях R_1, R_2 и R_3 (рис. 6-32), если $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r = 3$ Ом.

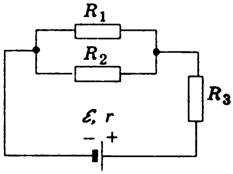


Рис. 6-32

Ответ:

$$U_1 = U_2 = \frac{\mathcal{E}R_1R_2}{R_1R_2 + (R_3 + r)(R_1 + R_2)} = 4 \text{ В},$$

$$U_3 = \frac{\mathcal{E}R_3(R_1 + R_2)}{R_1R_2 + (R_3 + r)(R_1 + R_2)} = 5 \text{ В}.$$

Задача 11. Три одинаковых батареи с внутренним сопротивлением $r = 6$ Ом замкнули на некоторое внешнее сопротивление, соединив их между собой один раз последовательно, а другой раз параллельно. При этом сила тока в неразветвленной части цепи каждый раз была одна и та же. Определить сопротивление R внешней части цепи.

Ответ: $R = r = 6$ Ом.

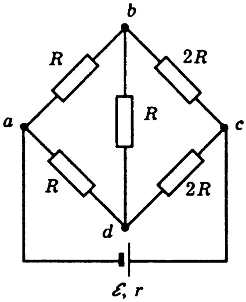


Рис. 6-33

Задача 12. Определить силу тока на участках *ab* (I_1 – ?), *bc* (I_2 – ?), *cd* (I_3 – ?), *da* (I_4 – ?) и *bd* (I_5 – ?) (рис. 6-33), если сопротивление R, ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ и его внутреннее сопротивление r известны.

Ответ: $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R + 2r}$; $I_5 = 0$.

Задача 13. В цепь на рис. 6-34 включены два одинаковых сопротивления $R_1 = R_2 = 28$ Ом и сопротивление $R_3 = 40$ Ом. Параллельно сопротивлению $R_3 = 40$ Ом подключен конденсатор емкостью $C = 5$ мкф, заряд которого $q = 4{,}2$ мкКл. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока, если его внутреннее сопротивление $r = 3$ Ом.

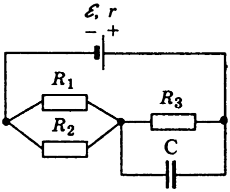


Рис. 6-34

Ответ:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{CR_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + R_3 + r\right) = 1{,}2 \text{ В}.$$

Задача 14. Найти напряжение U_c на конденсаторе С схемы, изображенной на рис. 6-35. Все остальные величины, приведенные на схеме, известны, $r \approx 0$.

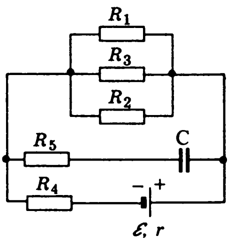


Рис. 6-35

Ответ: $U_c = \dfrac{\mathcal{E} R_3 R_2 R_1}{R_1R_2R_3 + R_1R_3R_4 + R_1R_2R_4 + R_2R_3R_4}$.

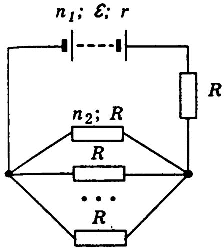


Рис. 6-36

Задача 15. На рис. 6-36 показана схема, содержащая n_1 одинаковых источников тока, соединенных последовательно между собой и включенных во внешнюю цепь, которая содержит n_2 параллельно включенных проводников и один, подключенный к ним последовательно. Сопротивление каждого проводника R. Определить силу тока $I_{общ}$ в неразветвленной части цепи и силу тока I в отдельной ветви параллельного участка. ЭДС источника – $\mathcal{E}$, его внутреннее сопротивление – r.

Ответ: $I_{общ} = \dfrac{n_1 n_2 \mathcal{E}}{R(1+n_2)+n_1 n_2 r}$, $I = \dfrac{I_{общ}}{n_2}$.

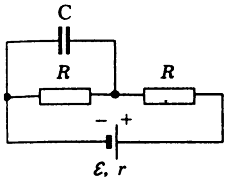


Рис. 6-37

Задача 16. Какова должна быть ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока, изображенного на схеме (рис. 6-37), чтобы напряженность электрического поля между обкладками конденсатора E = = 2 кВ/м? Внутреннее сопротивление $r = R$. Расстояние между обкладками плоского конденсатора d = 5 мм.

Ответ: $\mathcal{E} = 3Ed$ = 30 В.

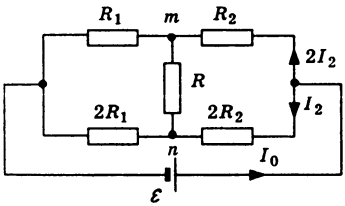


Рис. 6-38

Задача 17. Найти силу тока I_2, текущего по сопротивлению $2R_2$ (рис. 6-38). ЭДС и все сопротивления на этой схемё известны. Внутренним сопротивлением источника тока можно пренебречь.

Ответ: $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{2(R_1 + R_2)}$.

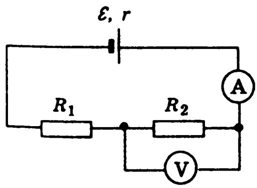


Рис. 6-39

Задача 18. ЭДС источника $\mathcal{E}$ = = 4 В, его внутреннее сопротивление r = 0,5 Ом, сопротивления резисторов R_1 = 2 Ом, R_2 = 8 Ом. Какое напряжение показывает вольтметр и какую силу тока I показывает амперметр, включенные в схему на рис. 6-39?

Ответ: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + r}$ = 0,38 А, $U = IR_2$ = 3 В.

Задача 19. В цепь, состоящую из источника тока и резистора, включают вольтметр сначала последовательно, затем параллельно резистору. Сопротивление резистора R = 8 Ом, сопротивление вольтметра $R_в$ = 200 Ом. Вольтметр показывает оба раза одинаковое напряжение. Чему равно внутреннее сопротивление r источника тока?

Ответ: $r = \dfrac{R^2}{R_в}$ = 0,32 Ом.

Задача 20. Какое напряжение U показывает вольтметр и какую силу тока I – амперметр, если переключатель П помещен на контакте: а) 1; б) 2; в) 3 (рис. 6-40) ? ЭДС источника $\mathcal{E}$ = = 8 В, его внутреннее сопротивление r = 1 Ом, сопротивления резисторов R = 4 Ом.

Ответ: а) $U = 0$, $I = 8$ А;
б) $U = 6{,}4$ В, $I = 1{,}6$ А;
в) $U = 8$ В, $I = 0$.

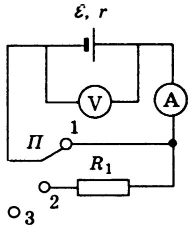


Рис. 6-40

Задача 21. Чему равна ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока, если при измерении напряжения на его полюсах вольтметром с сопротивлением $R_в$ = = 40 Ом он показывает напряжение U_1 = 2 В, а при замыкании этого источника на внешнее сопротивление R = 20 Ом в этом сопротивлении идет ток силой I_2 = 0,2 А ?

Ответ: $\mathcal{E} = U_1 I_2 \dfrac{R_В - R}{I_2 R_В - U_1} = 1{,}3$ В.

Задача 22. Два вольтметра, соединенные последовательно, подключены к источнику тока. При этом первый вольтметр показал напряжение U_1 = 10 В, а второй – U_2 = 8 В. Когда же к этому источнику подключили только первый вольтметр, он показал напряжение U = 12 В. Найти ЭДС источника тока $\mathcal{E}$.

Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{UU_2}{U - U_1} = 48$ В.

Задача 23. Генератор постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 100 В питает сеть, состоящую из параллельно включенных n_1 = 10 ламп сопротивлением по R_1 = 100 Ом и n_2 – 5 ламп сопротивлением по R_2 = 50 Ом каждая. Найти напряжение на зажимах генератора, если его внутреннее сопротивление r = 1 Ом. Сопротивление соединительных проводов R = 2 Ом.

Ответ: $U = \mathcal{E}\dfrac{R_1R_2 + R(n_2R_1 + n_1R_2)}{R_1R_2 + (R + r)(n_2R_1 + n_1R_2)} = 87{,}5$ В.

Задача 24. Найти разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b$ между точками a и b в схеме на рис. 6-41. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь. $\mathcal{E}$ = 6 В.

Указание: $\varphi_a - \varphi_b = \varphi_2 - \varphi_b - (\varphi_2 - \varphi_a) = U_R - U_C$.

Ответ: $\varphi_a - \varphi_b = \dfrac{\mathcal{E}}{12} = 0{,}5$ В.

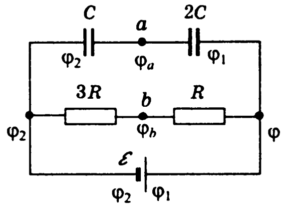


Рис. 6-41

Задача 25. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E}$ = 2,4 В и внутренним сопротивлением r = 0,1 Ом поставлен на подзарядку. Напряжение на выходе заряжающего генератора U = 3,2 В, сила тока в цепи I = 2А. Найти сопротивление R соединительных проводов.

Ответ: $R = \dfrac{U - \mathcal{E}}{I} - r = 0{,}3$ Ом.

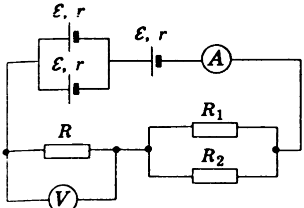


Рис. 6-42

Задача 26. Три одинаковых источника тока с ЭДС $\mathcal{E} = 1{,}6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}8$ Ом каждый включены в цепь по схеме, изображенной на рис. 6-42. Миллиамперметр показывает ток $I = 100$ мА. Сопротивление резисторов $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 15$ Ом. Какое напряжение U показывает вольтметр, если его сопротивление очень велико, а сопротивление амперметра очень мало?

Ответ: $U = 2\mathcal{E} - I\left(\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} + 1{,}5r\right) = 2{,}48$ В.

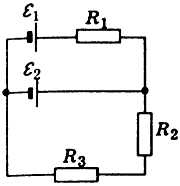


Рис. 6-43

Задача 27. Дана схема электрической цепи (рис. 6-43). Определить силы токов I_1 и I_2 в сопротивлениях R_1 и R_2, если $\mathcal{E}_1 = 2$ В, $\mathcal{E}_2 = 1$ В, $R_1 = R_2 = 1$ Ом, $R_3 = 2$ Ом. Внутренним сопротивлением источников тока пренебречь.

Ответ: $I_1 = 1$ А, $I_2 = \dfrac{1}{3}$ А.

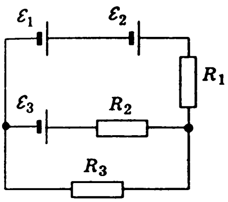


Рис. 6-44

Задача 28. Определить силы токов в сопротивлениях $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 1$ Ом и $R_3 = 1$ Ом, если $\mathcal{E}_1 = 4$ В, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 2$ В (рис. 6-44). Внутренним сопротивлением источников тока можно пренебречь.

Ответ: $I_1 = 2$ А, $I_2 = 0$, $I_3 = 2$ А.

7. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ–ЛЕНЦА. КПД ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Решение задач на работу, мощность и тепловое действие тока обычно сводится к расчету электрической цепи, т. е. к определению силы тока, напряжения или ЭДС и сопротивлений с добавлением формул работы и мощности тока или закона Джоуля–Ленца.

Работа тока на данном участке цепи равна произведению напряжения на этом участке, силы тока в нем и времени прохождения тока: $A = UIt$.

При решении задач на работу A и мощности тока P в последовательно соединенных проводниках удобно использовать формулы

$$A = IUt \text{ или } A = I^2Rt \text{ и } P = I^2R \text{ или } P = UI,$$

поскольку сила тока в таких проводниках одинакова. Если же проводники соединены параллельно, то можно применить формулы

$$A = \frac{U^2}{R}t \quad \text{или} \quad P = \frac{U^2}{R},$$

поскольку в этом случае одинаково напряжение на проводниках.

Кроме того, $A = Pt$.

Если цепь состоит из источника тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, а сопротивление внешней части цепи R, то вся работа тока в этой цепи – затраченная работа $A_{затр}$ – может быть определена как сумма работы на внешнем участке цепи $A_{внеш}$ и работы на внутреннем участке $A_{внутр}$: $A_{затр} = A_{внеш} + A_{внутр}$, где работа $A_{внеш}$ – это обычно «полезная» работа. Здесь $A_{затр} = \mathcal{E} It$, $A_{внеш} = UIt = I^2Rt$ и $A_{внутр} = I^2rt$.

Можно также записать: $A_{затр} = P_пt$, где $P_п$ – полная мощность тока в цепи.

Мощность тока на некотором участке цепи равна произведению напряжения на этом участке и силы тока в нем: $P = UI$.

Кроме того, $P = I^2R$ и $P = \dfrac{U^2}{R}$, а полная мощность в цепи

$$P_п = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r} = I^2(R+r).$$

Мощность тока на внешнем сопротивлении R («полезная» мощность P) может быть определена формулами

$$P = I^2R = I\mathcal{E} - I^2r = \frac{U^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2}.$$

При коротком замыкании $R = 0$ и $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$, поэтому

$$P = \frac{\mathcal{E}}{r}\mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}^2}{r^2}r = 0.$$

Это значит, что при коротком замыкании ток работу во внешней цепи не совершает и его мощность равна нулю.

Закон Джоуля–Ленца: количество теплоты, выделившейся в проводнике при прохождении по нему электрического тока, прямо пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени прохождения тока: $Q = I^2Rt$.

Закон Джоуля–Ленца можно записать иначе:

$$Q = \frac{U^2}{R}t \text{ или } Q = UIt.$$

Если в условии задачи речь идет о превращении энергии тока в иные виды энергии (механическую, тепловую и др.), то работа тока будет «затраченной» работой и в формуле КПД должна располагаться в знаменателе, а «полезная» работа, которая совершается на соответствующем участке цепи, или количество теплоты Q, выделяемое на этом участке, – в числителе. При решении таких задач часто приходится, кроме формул электродинамики, использовать формулы механики, молекулярной физики и термодинамики.

Приведем примеры.

Пример 1. За счет работы тока двигатель какого-либо механизма развивает силу тяги $F_{тяги}$. В этом случае КПД цепи η можно определить так:

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{затр}}100\%, \quad \eta = \frac{F_{тяги}S}{UIt}100\%, \quad \frac{S}{t} = \upsilon, \quad A_{затр} = Pt.$$

Здесь S – путь, пройденный машиной, v – ее скорость (если движение переменное, то v – средняя скорость за время t), P – мощность двигателя.

Пример 2. За счет работы тока тело массой m поднимают на некоторую высоту h, и при этом полезная работа идет на сообщение телу потенциальной энергии $W_п = mgh$. В этом случае КПД

$$\eta = \frac{W_п}{A_{затр}}100\% \text{ или } \eta = \frac{mgh}{UIt}100\% \text{ и т. п.}$$

Пример 3. За счет работы тока некоторая масса m вещества нагрета на ΔT, или выкипела, или вещество массой m расплавлено и т. д. В этих случаях КПД процесса

$$\eta = \frac{Q}{A_{затр}}100\%, \quad \eta = \frac{cm\Delta T}{UIt}100\%,$$

$$\eta = \frac{mr}{UIt}100\%, \quad \eta = \frac{m\lambda}{UIt}100\%.$$

Здесь c – удельная теплоемкость, r – удельная теплота парообразования, λ – удельная теплота плавления вещества, о котором идет речь в условии задачи.

Возможны, конечно, и другие варианты превращения энергии тока в иные неэлектрические виды энергии. Во всех этих случаях энергия тока (или его работа) будет затраченной, т. е. в формуле КПД будет располагаться в знаменателе, а неэлектрическая энергия (механическая, тепловая и др.) или соответствующая ей полезная работа – в числителе формулы КПД.

Возможны и обратные варианты, когда за счет какой-либо энергии (тепловой, механической) вырабатывается электрический ток. Например, когда какой-либо механический генератор тока вырабатывает ток, затратив W механической энергии, то КПД такого генератора $\eta = \frac{UIt}{W}100\%$.

Если в какой-либо тепловой электростанции за счет количества теплоты Q, выделенного сгоревшим топливом массой m с удельной теплотой сгорания q, вырабатывается ток, имеющий энергию $W = UIt$, то КПД такого процесса

$$\eta = \frac{W}{Q}100\% \text{ или } \eta = \frac{UIt}{mq}100\%.$$

Если за счет кинетической энергии падающей воды $W_К = \frac{mv^2}{2}$ вырабатывается ток, то $\eta = \frac{A}{W_К}$ или $\eta = \frac{UIt}{\frac{mv^2}{2}}100\%$.

А если за счет работы тока тело приобретает кинетическую энергию, то наоборот: $\eta = \frac{E}{A}100\%$ или $\eta = \frac{UIt}{mg}100\%$.

Если в задаче на закон сохранения энергии ничего не сказано о КПД процесса, то имеется в виду, что энергия (или работа) тока равна неэлектрической (механической, тепловой и т. д.) энергии (или работе) того процесса, о котором идет речь в задаче. В этом случае выражения, стоящие в числителе и знаменателе формул КПД, приведенных выше, равны (т. е. между ними можно поставить знак равенства, подразумевая, что потерями энергии можно пренебречь).

Когда вы решаете задачи на использование энергии электрического тока для нагревания, например, воды в чайнике, кастрюле и т. п. с помощью какого-либо нагревательного прибора, например, электроплитки, и сказано, что с этой плиткой что-либо делают, например, спирали плитки соединяют сначала последовательно, а затем – параллельно, или укорачивают спираль, или, наоборот, ее удлиняют, то помните, что при этом количество теплоты Q, требуемое для нагревания чайника, кастрюли и т. п., не изменяется. Кроме того, напряжение U в розетке, куда включили электроплитку, тоже будет оставаться неизменным, а будут меняться от этих действий сопротивление электроплитки R и время нагревания t. Поэтому для решения подобной задачи лучше пользоваться формулой закона Джоуля–Ленца $Q = \frac{U^2}{R}t$, записав ее применительно к обоим случаям. Например, спирали плитки сначала были соединены последовательно, а затем – параллельно. Начинайте решать так: $Q = \frac{U^2}{R_{посл}}t_1$, $Q = \frac{U^2}{R_{пар}}t_2$, где $R_{посл} = R_1 + R_2$, а $R_{пар} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

Здесь $R_{посл}$ – общее сопротивление последовательно соединенных спиралей сопротивлениями R_1 и R_2 каждая, а $R_{пар}$ – их общее сопротивление, когда их соединили параллельно. Дальнейшее решение зависит от условия задачи, от того, что дано и что спрашивается. Подробное решение подобной задачи мы рассмотрим в разделе «Решение отдельных задач».

КПД электрической цепи называют отношение «полезной» работы $A_{пол}$, совершенной током в каком-либо участке цепи, ко всей «затраченной» $A_{затр}$, которая равна энергии, выделенной источником тока в процессе его работы за время t:

$$\eta = \frac{A_{пол}}{A_{затр}}100\% \quad \text{или} \quad \eta = \frac{UIt}{\mathcal{E}It}100\%, \quad \eta = \frac{U}{\mathcal{E}}100\%.$$

Поскольку согласно закону Ома $U = IR$ и $\mathcal{E} = I(R + r)$, то формула КПД тока может выглядеть так:

$$\eta = \frac{IR}{I(R+r)}100\% \quad \text{или} \quad \eta = \frac{R}{R+r}100\%.$$

Здесь R – сопротивление всей внешней части цепи, а r – сопротивление источника тока.

Следовательно, КПД электрической цепи можно определить отношением напряжения на участке, где совершается полезная работа или полезно используется тепловая энергия, к ЭДС источника тока, или КПД электрической цепи можно определить отношением сопротивления участка цепи, где совершается полезная работа или полезно используется тепло, к сумме сопротивлений внешнего и внутреннего участков цепи, выраженным обычно в процентах.

Решение отдельных задач

Задача 1

У электроплитки имеются две нагревательные спирали, каждая из которых в рабочем состоянии имеет сопротивление $R = 100$ Ом при напряжении $U = 220$ В. Насколько мощность тока при параллельном включении спиралей P_2 отличается от мощности тока P_1 при их последовательном включении?

Дано:
$R = 100$ Ом
$U = 220$ В
ΔP – ?

Здесь $\Delta P = P_2 - P_1$ – разность между мощностями P_1 и P_2.

Решение. Мощность P_1 и P_2 определим по формулам $P_1 = \frac{U^2}{R_1}$ и $P_2 = \frac{U^2}{R_2}$, где $R_1 = 2R$ – общее сопротивление последовательно соединенных спиралей и $R_2 = \frac{R}{2}$ – их общее сопротивление при параллельном соединении. С учетом этого

$$P_1 = \frac{U^2}{2R} \text{ и } P_2 = \frac{2U^2}{R}.$$

Тогда искомая разность

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{2U^2}{R} - \frac{U^2}{2R}, \quad \boxed{\Delta P = 1{,}5\frac{U^2}{R}}$$

Произведем вычисления: $\Delta P = 1{,}5\frac{220^2}{100}$ Вт $= 726$ Вт.

Значит, если напряжение на данном участке цепи не меняется, то при параллельном соединении проводников выделяется большая мощность, чем при их последовательном соединении.

Ответ: $\Delta P = 726$ Вт.

Задача 2

Участок электрической цепи состоит из лампы сопротивлением $R_1 = 200$ Ом, рассчитанной на мощность $P_1 = 60$ Вт, электроплитки сопротивлением $R_2 = 90$ Ом, включенной параллельно лампе, и соединительных проводов длиной $l = 10$ м с площадью поперечного сечения $S = 0{,}8$ мм², сделанных из стали. Накал лампочки нор-

мальный. Найти силу тока I_2 в плитке, потерю мощности ΔP на соединительных проводах и мощность тока P_2 в электроплитке. Удельное сопротивление стали $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м.

Дано:	
$R_1 = 200$ Ом $P_1 = 60$ Вт $R_2 = 90$ Ом $l = 10$ м $S = 0{,}8$ мм^2 $\rho = 1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м	
I_2 – ? ΔP – ? P_2 – ?	

Решение. Нарисуем схему этого участка цепи, включив последовательно клеммам ab сопротивление $R_п$, символизирующее собой все сопротивления соединительных проводов (рис. 7-1).

Теперь обратимся к условию задачи. Нам дана мощность тока в лампочке и сказано, что она горит с нормальным накалом. Это означает, что мощность тока в ней соответствует мощности, написанной на цоколе лампочки. Поскольку нам известно и сопротивление лампочки, мы можем найти силу тока I_1 в ней из формулы $P_1 = I_1^2 R_1$,

откуда $I_1 = \sqrt{\dfrac{P_1}{R_1}}$. (1)

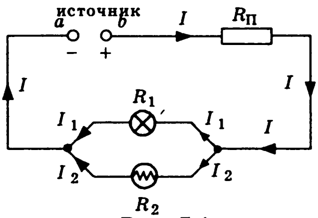


Рис. 7-1

Лампочка и электроплитка соединены параллельно, а при параллельном соединении силы токов в проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям, значит,

$\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$, откуда $I_2 = I_1 \dfrac{R_1}{R_2}$ или с учетом (1)

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2}\sqrt{\frac{P_1}{R_1}}. \quad (2)$$

Здесь I_2 – сила тока в электроплитке. Зная ее сопротивление R_2, мы найдем мощность тока в ней по формуле

$$\boxed{P_2 = I_2^2 R_2} \quad (3)$$

Примечание: можно было решить иначе, найдя сначала напряжение на лампочке и плитке (оно ведь одинаково) по формуле $U = I_1 R_1$, а затем по формуле $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2}$ найти мощность, выделяемую в плитке. Результат был бы тот же.

Теперь найдем потерю мощности в соединительных проводах. Поскольку сила тока I в неразветвленном проводе участка $I = I_1 + I_2$, а сопротивление соединенных проводов $R_п = \rho\frac{l}{S}$, то по формуле мощности $\Delta P = I^2 R_п$

или $$\boxed{\Delta P = \rho\frac{l}{S}\left(\sqrt{\frac{P_1}{R_1}} + I_2\right)^2}$$

Переведем единицу S в СИ: 0,8 мм^2 = $8 \cdot 10^{-7}$ м^2.

Произведем вычисления: $I_2 = \frac{200}{90}\sqrt{\frac{60}{200}}\text{А} = 1{,}2\text{ А}$,

$P_2 = 1{,}2^2 \cdot 90$ Вт = 130 Вт,

$$\Delta P = 1{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10}{8 \cdot 10^{-7}}\left(\sqrt{\frac{60}{200}} + 1{,}2\right)^2 \text{Вт} = 4{,}6 \text{ Вт}.$$

Ответ: I_2 = 1,2 А, P_2 = 130 Вт, ΔP = 4,6 Вт.

Задача 3

При ремонте электрической плитки ее спираль укоротили на 20%. Во сколько раз изменилась при этом мощность тока в плитке?

Дано:
$\frac{\Delta l}{l_1} = 0{,}2$

$\frac{P_2}{P_1}$ – ?

Обозначим $\Delta l = l_1 - l_2$ изменение длины спирали, l_1 – ее первоначальную длину и P_1 – мощность тока в плитке при этой длине, l_2 – длину после укорачивания и P_2 – мощность тока при этой длине.

Решение. **Внимание!** Для определения мощности в подобных задачах лучше пользоваться формулой $P = \frac{U^2}{R}$, а не формулой $P = I^2 R$, потому что при изменении сопротивления спирали R изменяется и сила тока I в ней, тогда как напряжение U на спирали остается прежним, таким, какое оно в розетке, куда включают электроплитку.

Поэтому запишем:

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} \text{ и } P_2 = \frac{U^2}{R_2}, \text{ тогда } \frac{P_2}{P_1} = \frac{U^2 R_1}{R_2 U^2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (1)$$

Здесь $$R_1 = \rho\frac{l_1}{S} \quad (2)$$

– сопротивление спирали до ее укорочения, ρ – удельное сопротивление металла, из которого она изготовлена, S – площадь поперечного сечения спирали.

Аналогично $R_2 = \rho\dfrac{l_2}{S}$ – (3)

сопротивление спирали после ее укорочения.

Подставим (2) и (3) в (1): $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{\rho l_1 S}{S\rho l_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Согласно условию $\dfrac{\Delta l}{l_1} = \dfrac{l_1 - l_2}{l_1} = 0{,}2$, откуда

$1 - \dfrac{l_2}{l_1} = 0{,}2$, $\dfrac{l_2}{l_1} = 0{,}8$ и $\dfrac{l_1}{l_2} = 1{,}25$.

Значит, $\boxed{\dfrac{P_2}{P_1} = 1{,}25}$

Ответ: мощность тока в укороченной спирали увеличивается в 1,25 раза.

Задача 4

Подъемный кран работает под напряжением U = 380 В, поднимая груз массой m = 0,5 т на высоту H = 20 м за время t = 1 мин. КПД подъемного крана η = 50%. Найти силу тока I в обмотке электродвигателя крана.

Дано:
U = 380 В
m = 0,5 т
t = 1 мин
η = 50%
H = 20 м
$g = 9{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

I – ?

Решение. Начнем решать с формулы КПД. Поднимая груз на высоту H, кран сообщает ему потенциальную энергию $E_\text{п}$ = mgH, и при этом ток в двигателе совершает работу $A = UIt$.

Поэтому КПД подъемного крана

$\eta = \dfrac{mgH}{UIt}100\%$, откуда $\boxed{I = \dfrac{mgH}{\eta Ut}100\%}$

Переведем все единицы в СИ:
0,5 т = 500 кг, 1 мин = 60 с.

Проверим единицу полученной величины:

$$[I]_{СИ} = \frac{\text{кг}\cdot\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м}}{\%\cdot\text{В}\cdot\text{с}}\% = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{В}\cdot\text{с}} = \text{А}.$$

Произведем вычисления: $I = \dfrac{500\cdot 9{,}8\cdot 20}{50\cdot 380\cdot 60}100\ \text{А} = 8{,}6\ \text{А}.$

Ответ: I = 8,6 А.

Задача 5

Какого диаметра d надо взять проволоку из нихрома, чтобы изготовить нагревательный прибор с силой тока

$I = 2$ А для превращения в пар в процессе кипения половины объема $V = 4$ л воды, взятой при $t_1° = 25°C$ за время $t = 20$ мин, если тепловые потери составили 20%? Длина проволоки $l = 80$ м, удельное сопротивление нихрома $\rho_c = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, плотность воды $\rho_п = 1 \cdot 10^3$ кг/м³, температура кипения воды $t_2° = 100°C$, ее удельная теплоемкость $c = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Указание: поскольку тепловые потери составили 20%, значит, КПД этого процесса составил 80%, ведь $\eta = 100\% - 20\% = 80\%$.

Дано:
$I = 2А$
$V = 4$ л
$V_п = 0{,}5\ V$
$t_1° = 25°C$
$t = 20$ мин
$\eta = 80\%$
$l = 80$ м
$\rho_c = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м
$\rho_п = 1 \cdot 10^3\ \dfrac{кг}{м^3}$
$t_2° = 100°C$
$c = 4200\ \dfrac{Дж}{кг \cdot К}$
$r = 2{,}3 \cdot 10^6\ \dfrac{Дж}{кг}$

$d = ?$

Решение. КПД процесса передачи тепловой энергии электроплиткой воде равен отношению «полезного» количества теплоты $Q_п$, пошедшего на нагревание воды и превращение половины ее массы в пар, к «затраченному» количеству теплоты $Q_з$, выделенному нагревательным прибором в течение времени t, выраженному в процентах:

$$\eta = \frac{Q_п}{Q_з} 100\%. \tag{1}$$

Из термодинамики мы знаем, что количество теплоты

$Q_п = cm_в(t_2° - t_1°) + m_п r.$

Здесь $m_в = \rho_п V$ – масса нагретой воды, а $m_п = 0{,}5m_в = 0{,}5\rho_п V$ – масса пара.

С учетом этого

$$Q_п = c\rho_п V(t_2° - t_1°) + 0{,}5\rho_п V r = \rho_п V(c(t_2° - t_1°) + 0{,}5r). \tag{2}$$

Затраченное плиткой количество теплоты $Q_з$ определим по закону Джоуля–Ленца: $Q_з = I^2Rt$, где $R = \rho_c \dfrac{l}{S}$ – сопротивление проволоки, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь ее поперечного сечения.

$$\text{С учетом этого } R = \rho_c \frac{4l}{\pi d^2} \text{ и } Q_з = I^2 \rho_c \frac{4l}{\pi d^2} t. \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1) и из полученного выражения определим диаметр проволоки d:

$$\eta = \frac{\rho_п V\left(c\left(t_2^o - t_1^o\right) + 0{,}5r\right)\pi d^2}{4lI^2\rho_c t} 100\%, \text{ откуда}$$

$$\boxed{d = 0{,}2I\sqrt{\frac{l\rho_c t\eta}{\pi\rho_п V\left(c\left(t_2^o - t_1^o\right) + 0{,}5r\right)}}}$$

Переведем единицы e и t в СИ: 4 л = $4 \cdot 10^{-3}$ м^3, 20 мин = 1200 с.

Произведем вычисления:

$$d = 0{,}2 \cdot 2\sqrt{\frac{80 \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-6} \cdot 1200 \cdot 80}{3{,}14 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\left(4200(100 - 25) + 0{,}5 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6\right)}} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Ответ: $d = 2 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 6

От генератора с ЭДС $\mathcal{E} = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}08$ Ом по медному кабелю к месту электросварки поступает ток. Электросварочный аппарат находится на расстоянии $l_1 = 80$ м от генератора. Сила тока в цепи $I = 100$ А. Найти мощность тока P в сварочной дуге. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, площадь поперечного сечения кабельного провода $S = 200$ мм^2.

Дано:
$\mathcal{E} = 60$ В
$r = 0{,}08$ Ом
$l_1 = 80$ м
$I = 100$ А
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м
$S = 200$ мм^2

P – ?

Решение. Мощность тока в сварочной дуге можно определить произведением напряжения U на этом участке цепи на силу тока I в дуге:

$$P = UI. \quad (1)$$

Напряжение U на сварочном аппарате можно определить как разность между ЭДС $\mathcal{E}$ и источника тока и суммарным падением напряжения $U_{вн}$ внутри источника тока и $U_{пр}$ на соединительных проводах: $U = \mathcal{E} - U_{вн} - U_{пр}$, где по закону Ома для участка цепи

$$U_{вн} = Ir \quad \text{и} \quad U_{пр} = IR_{пр} = I\rho\frac{l}{S}.$$

Здесь $l = 2l_1$ – длина двухпроводной линии от генератора до места сварки и обратно.

С учетом этих равенств имеем

$$U = \mathcal{E} - Ir - I\rho\frac{2l_1}{S} = \mathcal{E} - I\left(r + \rho\frac{2l_1}{S}\right). \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{P = I\left(\mathcal{E} - I\left(r + \rho\frac{2l_1}{S}\right)\right)}$$

Переведем в СИ единицу S:
200 мм^2 $= 200 \cdot 10^{-6}$ м^2 $= 2 \cdot 10^{-4}$ м^2.
Произведем вычисления:

$$P = 100(60 - 100(0{,}08 + 2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}\frac{80}{2 \cdot 10^{-4}})\ \text{Вт} =$$

$= 5{,}1 \cdot 10^3$ Вт $= 5{,}1$ кВт.
Ответ: $P = 5{,}1$ кВт.

Задача 7

Сопротивление одного резистора $R_1 = 4$ Ом, а второго $R_2 = 9$ Ом. При подключении поочередно каждого резистора к источнику тока мощность тока в них была одинакова. Найти внутреннее сопротивление r этого источника тока и КПД η_1 и η_2 цепи в каждом случае.

Дано:
$R_1 = 4$ Ом
$R_2 = 9$ Ом
$P_1 = P_2$

r – ?
η_1 – ?
η_2 – ?

Решение. Поскольку речь идет о внутреннем сопротивлении источника r, значит, придется применить закон Ома для всей цепи, в который это внутреннее сопротивление входит. Этот закон определяет силу тока в замкнутой цепи. Поэтому выразим мощности тока в первом и втором случаях P_1 и P_2 через силы токов I_1 и I_2 в цепи и сопротивления резисторов R_1 и R_2: $P_1 = I_1^2R_1$ и $P_2 = I_2^2R_2$.

Согласно условию $P_1 = P_2$, поэтому $I_1^2R_1 = I_2^2R_2$.

Теперь запишем закон Ома для полной цепи применительно к этим случаям: $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_1 + r}$ (2) и $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_2 + r}$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1). При этом неизвестная ЭДС сократится, и мы получим одно уравнение с одним неизвестным – искомым сопротивлением r, откуда его и найдем:

$$\frac{\mathcal{E}^2}{(R_1 + r)^2}R_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{(R_2 + r)^2}R_2, \quad \frac{R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{R_2}{(R_2 + r)^2},$$

$$\frac{\sqrt{R_1}}{R_1 + r} = \frac{\sqrt{R_2}}{R_2 + r}, \quad R_1\sqrt{R_2} + r\sqrt{R_2} = R_2\sqrt{R_1} + r\sqrt{R_1},$$

$r\sqrt{R_2} - r\sqrt{R_1} = R_2\sqrt{R_1} - R_1\sqrt{R_2}$, откуда

$$r = \frac{R_2\sqrt{R_1} - R_1\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}} = \frac{\sqrt{R_1R_2}\left(\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}\right)}{\sqrt{R_2} - \sqrt{R_1}}, \quad r = \sqrt{R_1R_2}.$$

Теперь, зная внутреннее сопротивление источника тока, мы можем найти КПД η_1 и η_2 по формулам

$$\boxed{\eta_1 = \frac{R_1}{R_1 + r}100\%} \quad \text{и} \quad \boxed{\eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r}100\%}$$

Произведем вычисления:

$$r = \sqrt{4 \cdot 9}\ \text{Ом} = 6\ \text{Ом},$$

$$\eta_1 = \frac{4}{4+6}100\% = 40\%, \quad \eta_2 = \frac{9}{9+6}100\% = 60\%.$$

Ответ: $r = 6$ Ом, $\eta_1 = 40\%$, $\eta_2 = 60\%$.

Задача 8

Три одинаковые лампочки, каждая из которых рассчитана на напряжение $U_1 = 4$ В, соединены параллельно и подключены через реостат к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 8$ В (рис. 7-2, *а*). Лампочки горят в номинальном режиме (т. е. в рабочем состоянии напряжение на них U_1 и мощность тока в каждой из них P_1 такие же, как написано на их цоколе). Во сколько раз будет отличаться мощность тока в каждой из лампочек по сравнению с номинальной, если одна из них перегорит, а сопротивление оставшихся будет прежним?

Дано:
$U_1 = 4$ В
$n = 3$
$\mathcal{E} = 8$ В

$\dfrac{P_2}{P_1}$ – ?

Обозначим n количество одинаковых лампочек, P_2 – мощность тока в каждой из оставшихся лампочек, если одна из них перегорит.

Решение. Нам известно напряжение U_1 на каждой лампочке, значит, мы можем определить их номинальную, т. е. ту, на которую они рассчитаны, мощность P_1: $P_1 = U_1I_1$. (1)

Кроме того, по закону Ома для участка цепи мы можем найти сопротивление $R_л$ каждой лампочки:

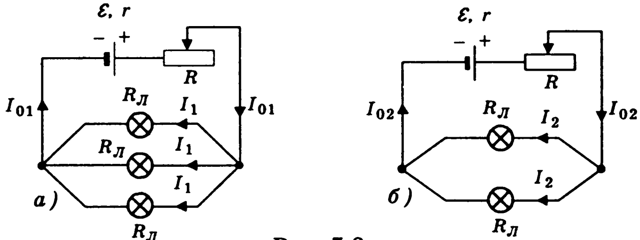


Рис. 7-2

$$R_л = \frac{U_1}{I_1}. \qquad (2)$$

Оно останется таким же, когда одна из лампочек перегорит. Значит, для нахождения мощности тока P_2 в каждой лампочке после перегорания одной из них нам бы надо знать одинаковое напряжение U_2 на оставшихся параллельных лампочках. Тогда бы мы нашли мощность P_2 по формуле $P_2 = \frac{U_2^2}{R_л}$ или с учетом (2) $P_2 = \frac{I_1 U_2^2}{U_1}$. (3)

С учетом (1) $$\frac{P_2}{P_1} = \frac{I_1 U_2^2}{U_1 U_1 I_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2. \qquad (4)$$

Таким образом, дальнейшее решение сводится к нахождению напряжения U_2. Его можно найти, умножив силу тока I_{02} в неразветвленной части цепи (рис. 7-2, б) на общее сопротивление двух параллельных лампочек $\frac{R_л}{2}$:

$$U_2 = I_{02}\frac{R_л}{2} = I_{02}\frac{U_1}{2I_1}. \qquad (5)$$

Силу тока I_{02} в неразветвленной части цепи определим по закону Ома для полной цепи:

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{R_л}{2} + r} = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{U_1}{2I_1} + r}. \qquad (6)$$

Здесь R – неизвестное сопротивление реостата. Чтобы его найти, обратимся к рис. 7-2, *а*. По закону Ома для всей цепи сила тока в неразветвленной части цепи

$$I_{01} = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{R_л}{3} + r} = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{U_1}{3I_1} + r}.$$

С другой стороны, $I_{01} = 3\ I_1$, поэтому

$$3I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + \frac{U_1}{3I_1} + r}.$$

Отсюда найдем сопротивление реостата R и подставим его в (6):

$$R + \frac{U_1}{3I_1} + r = \frac{\mathcal{E}}{3I_1}, \quad R = \frac{\mathcal{E}}{3I_1} - \frac{U_1}{3I_1} - r = \frac{\mathcal{E} - U_1}{3I_1} - r. \qquad (7)$$

Подставим (7) в (6):

$$I_{02} = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{\mathcal{E} - U_1}{3I_1} - r + \dfrac{U_1}{2I_1} + r} = \frac{6I_1\mathcal{E}}{2\mathcal{E} - 2U_1 + 3U_1} = \frac{6I_1\mathcal{E}}{2\mathcal{E} + U_1}. \quad (8)$$

Теперь определим U_2, подставив (8) в (5):

$$U_2 = \frac{6I_1\mathcal{E}}{2\mathcal{E} + U_1} \cdot \frac{U_1}{2I_1} = \frac{3\mathcal{E}U_1}{2\mathcal{E} + U_1}. \quad (9)$$

Нам осталось подставить (9) в (4):

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{3\mathcal{E}U_1}{(2\mathcal{E} + U_1)U_1}\right)^2, \quad \boxed{\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{3\mathcal{E}}{2\mathcal{E} + U_1}\right)^2}$$

Произведем вычисления:

$\dfrac{P_2}{P_1} = \left(\dfrac{3 \cdot 8}{2 \cdot 8 + 4}\right)^2 = 1{,}44$, т. е. мощность каждой из оставшихся лампочек увеличится в 1,44 раза.

Ответ: $P_2/P_1 = 1{,}44$.

Задача 9

Три лампочки сопротивлением $R_л$ каждая соединены последовательно и подключены к источнику тока с внутренним сопротивлением r. Во сколько раз изменится мощность тока в них (полезная мощность), если лампочки соединить параллельно?

Дано:	
$R_л$ r	Обозначим P_1 мощность тока в лампочках, когда они были соединены последовательно, P_2 – мощность тока, когда лампочки соединили параллельно.
$\dfrac{P_2}{P_1}$ – ?	*Решение.* Мощность P_1 найдем, умножив квадрат силы тока I_1 в лампочках на общее сопротивление $3R_1$ при их последовательном сопротивлении: $P_1 = 3I_1^2 R_л$.

По закону Ома для полной цепи $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{3R_л + r}$, поэтому

$$P_1 = 3R_л\left(\frac{\mathcal{E}}{3R_л + r}\right)^2. \quad (1)$$

Аналогично при параллельном соединении лампочек

$P_2 = I_2^2 \dfrac{R_л}{3}$, где $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{\dfrac{R_л}{3} + r}$, поэтому

$$P_2 = \frac{R_л}{3}\left(\frac{\mathcal{E}}{\frac{R_л}{3}+r}\right)^2. \qquad (2)$$

Разделим (2) на (1):

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_л\mathcal{E}^2(3R_л+r)^2}{3\left(\frac{R_л}{3}+r\right)^2 3R_л\mathcal{E}^2} = \frac{(3R_л+r)^2}{9\left(\frac{R_л}{3}+r\right)^2} = \frac{(3R_л+r)^2}{(R_л+3r)^2} \text{ или}$$

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{3R_л+r}{R_л+3r}\right)^2}$$

Задача решена.

Ответ: $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{3R_л+r}{R_л+3r}\right)^2.$

Задача 10

Источники тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 4$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}2$ Ом и $r_2 = 0{,}1$ Ом, соединенные, как показано на рис. 7-3, питают током лампочку, сопротивление которой в нагретом состоянии $R = 20$ Ом. Какова мощность тока P в лампе?

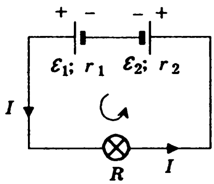


Рис. 7-3

Дано:
$\mathcal{E}_1 = 4$ В
$\mathcal{E}_2 = 2$ В
$r_1 = 0{,}2$ Ом
$r_2 = 0{,}1$ Ом
$R = 20$ Ом
P – ?

Решение. Для определения мощности тока в лампе нам надо знать силу тока I в цепи, поскольку сопротивление лампочки R нам известно. Когда мы найдем силу тока I, то мощность определим по формуле $P = I^2R$. (1)

Силу тока в цепи найдем, воспользовавшись вторым правилом Кирхгофа.

Нам достаточно составить одно уравнение второго правила Кирхгофа, поскольку мы имеем всего один контур. Будем обходить его против часовой стрелки. Тогда перед первой ЭДС $\mathcal{E}_1$ поставим знак «плюс», а перед $\mathcal{E}_2$ – «минус», поскольку в этом источнике мы будем переходить от «плюса» к «минусу», т. е. в сторону понижения потенциала. Запишем: $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = IR + Ir_1 + Ir_2$,

откуда $$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{P = R\left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}\right)^2}$$

Произведем вычисления:

$$P = 20\left(\frac{4-2}{20+0{,}2+0{,}1}\right)^2 \text{ Вт} = 0{,}2 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P = 0{,}2$ Вт.

Задача 11

На расстоянии $l_1 = 5$ м от источника тока находится потребитель, которому подается напряжение $U = 1000$ В. Ток идет по стальным проводам с диаметром поперечного сечения $d = 2{,}5$ мм. Найти потери мощности в проводниках ΔP и КПД η этой передачи. Передаваемая мощность $P = 25$ кВт.

Дано:
$l_1 = 5$ м
$U = 1000$ В
$\rho = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Ом · м
$d = 2{,}5$ мм
$P = 25$ кВт

ΔP – ?
η – ?

Решение. Обратите внимание, что когда пишут «подается от источника на потребитель», «передано потребителю», «на потребитель хотят подать» некоторое напряжение, то, как правило, речь идет о напряжении на зажимах потребителя, а не на зажимах источника или на передающих проводах. То же самое относится и к передаваемой мощности.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, давайте выполним несложный чертеж, иначе здесь очень легко перепутать, какое напряжение к чему относится. Расположим слева на чертеже (рис. 7-4) клеммы ab источника тока, напряжение на которых U_0. Судя по условию задачи, соединительные провода имеют сопротивление (раз уж речь идет об их длине и материале, значит, нам намекают, что это сопротивление следует учитывать). Обозначим это сопротивление (всех соединительных проводов вместе) $R_{пр}$ прямоугольником, расположенным, например, наверху. Расположим справа клеммы cd потребителя, на которые подают напряжение U. Затем все соединим прямыми линиями, обозначающими соединительные провода.

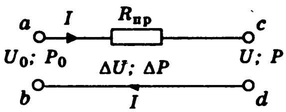


Рис. 7-4

Обозначим на схеме все напряжения и все мощности на всех участках цепи, каждое напряжение и каждую мощность обозначим своим индексом, так как они все различны. И только ток I будет везде одинаков, так как цепь последовательная.

Потерю мощности в соединительных проводах можно найти по формуле мощности: $\Delta P = I^2 R_{пр}$. (1)

Правда, сила тока I в линии нам тоже не известна, но мы ее легко найдем из формулы мощности тока в потребителе, ведь там ток такой же. Поскольку мощность тока в потребителе P и напряжение U на его клеммах нам известны из условия задачи, то по формуле мощности

$P = UI$ найдем I: $$I = \frac{P}{U}. \qquad (2)$$

Сопротивление соединительных проводов $R_{пр}$ нам тоже не дано, но зато мы знаем диаметр их поперечного сечения d, удельное сопротивление ρ и легко определим длину l, которая равна удвоенному расстоянию от источника до потребителя l_1 (обратите на этот момент внимание: если вам дано расстояние от источника до потребителя, то это вам дана не вся длина соединительных проводов, а только ее половина), поскольку цепь должна быть замкнута. Тогда по формуле сопротивления линейных проводников имеем $$R_{пр} = \rho\frac{l}{S} = 2\rho\frac{l_1}{S}.$$

Площадь поперечного сечения проводов S связана с диаметром их сечения d формулой $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Тогда $$R_{пр} = 2\rho\frac{4l_1}{\pi d^2} = 8\frac{\rho l_1}{\pi d^2}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы найдем одну из искомых величин – потери мощности ΔP: $\Delta P = \left(\dfrac{P}{U}\right)^2 \cdot 8\dfrac{\rho l_1}{\pi d^2}$ или

$$\boxed{\Delta P = 8\frac{\rho l_1}{\pi}\left(\frac{P}{dU}\right)^2}$$

Теперь отыщем вторую искомую величину – КПД передачи η. Как известно, КПД многих процессов можно определить отношением «полезной» работы $A_п$ ко всей «затраченной» в данном процессе $A_з$, выраженным, как правило, в процентах: $\eta = \dfrac{A_п}{A_з}100\%$.

В свою очередь работу можно представить как произведение мощности работающего объекта и времени его работы. Тогда в нашем случае $A_п = Pt$ и $A_з = P_0 t$.

Здесь P_0 – мощность тока в источнике. Она может быть определена как сумма мощности тока в потребителе P и потерь мощности ΔP в соединительных проводах из-за выделения в них энергии в виде джоулева тепла: $P_0 = P + \Delta P$.

Тогда $\eta = \dfrac{Pt}{(P + \Delta P)t} 100\%$, $\eta = \dfrac{P}{P + \Delta P} 100\%$.

Мы определили вторую искомую величину. Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ:

2,5 мм = $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м, 25 кВт = $25 \cdot 10^3$ Вт.

Произведем вычисления:

$$\Delta P = 8 \frac{1{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{3{,}14} \left(\frac{25 \cdot 10^3}{2{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} \right)^2 \text{ Вт} = 191 \text{ Вт},$$

$$\eta = \frac{25 \cdot 10^3}{25 \cdot 10^3 + 191} 100\% = 99\%.$$

Ответ: $\Delta P = 191$ Вт, $\eta = 99\%$.

Задача 12

Мощность электрической лампочки $P = 100$ Вт, напряжение $U = 220$ В. В рабочем (т. е. горящем) состоянии температура ее нити накала $t°_2 = 2900$ °С. Определить сопротивление нити лампочки R_1 при комнатной температуре $t°_1 = 20$ °С. Температурный коэффициент сопротивления материала нити $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано:
$P = 100$ Вт
$U = 220$ В
$t°_2 = 2900$ °С
$t°_1 = 20$ °С
$\alpha = 4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$

R_1 – ?

Решение. Сопротивление нити лампочки при комнатной температуре R_1 связано с этой температурой t_1° соотношением, выражающим зависимость сопротивления линейных металлических проводников от температуры:

$$R_1 = R_0 \left(1 + \alpha t_1^\circ\right). \quad (1)$$

Здесь R_0 – сопротивление проводника, т. е. в нашем случае нити лампочки, при $t°_0 = 0$ °С. Эта величина нам неизвестна и определять ее нет нужды, поэтому, чтобы ее исключить, запишем еще одно такое же уравнение, но уже применительно к горящей лампочке:

$$R_2 = R_0 \left(1 + \alpha t_2^\circ\right).$$

Здесь R_2 – сопротивление горящей лампочки. Эта величина нам тоже неизвестна, но мы можем легко определить

из формулы мощности тока $P = \frac{U^2}{R_2}$, откуда $R_2 = \frac{U^2}{P}$.

Тогда $\frac{U^2}{P} = R_0\left(1 + \alpha t_2^\circ\right)$. (2)

Разделив теперь (1) и (2) друг на друга, мы легко определим искомое сопротивление R_1 из получившегося при

этом выражения $\frac{R_1 P}{U^2} = \frac{R_0\left(1 + \alpha t_1^\circ\right)}{R_0\left(1 + \alpha t_2^\circ\right)}$, откуда

$$\boxed{R_1 = \frac{U^2\left(1 + \alpha t_1^\circ\right)}{P\left(1 + \alpha t_2^\circ\right)}}$$

Задача в общем виде решена. Напомним, что здесь переводить градусы Цельсия в градусы шкалы Кельвина путем прибавления числа 273 к данным температурам не следует, так как в формуле $R = R_0\left(1 + \alpha t^\circ\right)$ стоит не просто температура t°, а разность температур $\Delta t^\circ = t^\circ - 0\ ^\circ C = t^\circ$. Но, как известно, $\Delta t ^\circ C = \Delta T$ К, поэтому здесь $t_1^\circ = \Delta t_1^\circ = 20\ ^\circ C$ и $\Delta t_2^\circ = t_2^\circ = 2900\ ^\circ C$.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$R_1 = \frac{220^2\left(1 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot 20\right)}{100\left(1 + 4 \cdot 10^{-3} 2900\right)} \text{ Ом} = 41{,}5 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R_1 = 41{,}5$ Ом.

Задача 13

Найти ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r источника тока, если при токе $I_1 = 15$ А он отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 135$ Вт, а при токе $I_2 = 6$ А – мощность $P_2 = 64{,}8$ Вт.

Дано:
$I_1 = 15$ А
$P_1 = 135$ Вт
$I_2 = 6$ А
$P_2 = 64{,}8$ Вт

$\mathcal{E}$ – ?
r – ?

Решение. Если в условии задачи говорится об ЭДС и внутреннем сопротивлении источника тока, значит, без закона Ома для полной цепи не обойтись. Давайте и начнем с него. Запишем этот закон для

тока I_1: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}$.

Здесь R_1 – сопротивление внешней части цепи, которое нам не известно, но мы его можем легко найти, воспользовавшись формулой мощности тока, в которую входят известная сила тока I_1 и сопротивление R_1:

$$P_1 = I_1^2 R_1, \text{ откуда } R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}.$$

Тогда
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{P_1}{I_1^2} + r}. \qquad (1)$$

Мы получили одно уравнение с двумя неизвестными величинами $\mathcal{E}$ и r. Чтобы их определить, нужно еще одно уравнение с этими же величинами. Запишем такое же уравнение применительно к току I_2 (можно сразу записать уравнение, аналогичное последнему, так как все предыдущие рассуждения справедливы и применительно к току I_2):

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\dfrac{P_2}{I_2^2} + r}. \qquad (2)$$

Вот теперь мы имеем два уравнения (1) и (2) с двумя неизвестными $\mathcal{E}$ и r. Найдем их, решив эту систему уравнений. Для этого можно, например, выразить из обоих уравнений $\mathcal{E}$ и полученные выражения приравнять, тогда мы исключим неизвестную ЭДС $\mathcal{E}$ и получим одно уравнение с одним неизвестным – внутренним сопротивлением r. Проделаем эти действия:

$$\mathcal{E} = I_1\left(\frac{P_1}{I_1^2} + r\right) \ (3) \quad \text{и} \quad \mathcal{E} = I_2\left(\frac{P_2}{I_2^2} + r\right), \qquad (4)$$

$$\frac{P_1}{I_1} + I_1 r = \frac{P_2}{I_2} + I_2 r, \quad I_1 r - I_2 r = \frac{P_2}{I_2} - \frac{P_1}{I_1},$$

$$\boxed{r = \frac{1}{I_1 - I_2}\left(\frac{P_2}{I_2} - \frac{P_1}{I_1}\right)}$$

Мы нашли одну из искомых величин. Вторую величину – ЭДС $\mathcal{E}$ – найдем, уже зная r, по формуле (3) или (4), все равно: $\mathcal{E} = I_1\left(\dfrac{P_1}{I_1^2} + r\right)$ или $\boxed{\mathcal{E} = \dfrac{P_1}{I_1} + I_1 r}$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$r = \frac{1}{15-6}\left(\frac{64{,}8}{6} - \frac{135}{15}\right) \text{ Ом } = 0{,}2 \text{ Ом},$$

$$\mathcal{E} = \left(\frac{135}{15} + 15 \cdot 0{,}2\right) \text{В} = 12 \text{ В}.$$

Ответ: r = 0,2 Ом, $\mathcal{E}$ = 12 В.

Задача 14

Когда источник тока замкнут на внешнее сопротивление, КПД схемы η_1. Найти η_2 схемы, если к этому источнику тока подключили параллельно еще n таких же источников, а внешнее сопротивление осталось прежним.

Дано:
η_1
n

η_2 – ?

Решение. В методических указаниях мы привели разные формулы для расчета КПД электрической цепи. Очевидно, что здесь лучше всего воспользоваться формулой, в которой КПД определяется через внешнее R и внутреннее r сопротивления этой цепи. Пусть оба КПД выражены в частях. Тогда для случая, когда источник тока был один, имеем

$$\eta_1 = \frac{R}{R+r}. \qquad (1)$$

Когда к нему подключили параллельно n таких же источников тока, внутреннее сопротивление получившейся батареи источников уменьшилось в n раз. Поэтому

$$\eta_2 = \frac{R}{R+\frac{r}{n}}. \qquad (2)$$

Мы получили систему двух уравнений (1) и (2) с тремя неизвестными: внешним сопротивлением R, внутренним сопротивлением r, которые нам определять не надо, и η_2, которое мы ищем. Из этих уравнений исключим вначале R, чтобы получить одно уравнение хотя бы с двумя неизвестными r и η_2. Может быть, тогда r сократится. Проделаем эти действия.

Из уравнения (1) $\eta_1 R + \eta_1 r = R$, откуда $\eta_1 r = R - \eta_1 R$ и

$$R = \frac{\eta_1 r}{1-\eta_1}. \qquad (3)$$

Из уравнения (2) $\eta_2 R + \eta_2 \frac{r}{n} = R$, $\eta_2 \frac{r}{n} = R - \eta_2 R$, откуда

$$R = \frac{\eta_2 r}{n(1-\eta_2)}. \qquad (4)$$

Теперь приравняем правые части выражений (3) и (4):

$$\frac{\eta_1 r}{1-\eta_1}=\frac{\eta_2 r}{n(1-\eta_2)}.$$

Как мы и рассчитывали, внутреннее сопротивление r, которое мы тоже не знаем, сокращается. Получим

$$\frac{\eta_1}{1-\eta_1}=\frac{\eta_2}{n(1-\eta_2)}.$$

Отсюда найдем η_2: $n\eta_1 - n\eta_1\eta_2 = \eta_2(1-\eta_1)$, $n\eta_1 = n\eta_1\eta_2 + \eta_2(1-\eta_1)$, откуда

$$\eta_2=\frac{n\eta_1}{n\eta_1+1-\eta_1} \quad \text{или} \quad \boxed{\eta_2=\frac{n\eta_1}{1+\eta_1(n-1)}}$$

Задача решена.

Ответ: $\eta_2=\dfrac{n\eta_1}{1+\eta_1(n-1)}$.

Задача 15

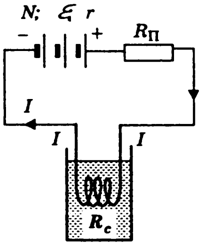


Рис. 7-5

Спираль из никелиновой проволоки длиной l = 52,5 см с диаметром поперечного сечения d = 0,3 мм опущена в стеклянный калориметр массой $m_с$ = = 50 г, в который налита вода массой $m_в$ = 100 г (рис. 7-5). Концы спирали соединены с источником тока с помощью соединительных проводов сопротивлением $R_п$ = 0,25 Ом. Источник тока состоит из N = 3 последовательно соединенных одинаковых элементов с ЭДС $\mathcal{E}$ = 2 В каждый и внутренним сопротивлением по r = 0,05 Ом. За какое время t вода в калориметре нагреется на ΔT = 1 К? Удельное сопротивление никелина ρ = = $4{,}2\cdot10^{-7}$ Ом · м, удельная теплоемкость стекла $c_{ст}$ = = 840 Дж/(кг · К), удельная теплоемкость воды $c_в$ = = 4186 Дж/(кг · К), КПД нагревания η = 85%.

Дано:
l = 52,5 см
d = 0,3 мм
$m_с$ = 50 г
$m_в$ = 100 г
$R_п$ = 0,25 Ом
N = 3
$\mathcal{E}$ = 2 В
r = 0,05 Ом
ΔT = 1 К

Решение. Начнем с формулы КПД:

$$\eta=\frac{Q_п}{Q_з}100\%. \tag{1}$$

Здесь $Q_п$ – количество теплоты, которое пошло на нагревание воды и калориметра, а $Q_з$ – затраченное количество теплоты, которое выделил электрический ток, проходя по спирали в течение времени t.

$\rho = 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м	
$c_{ст} = 840\ \frac{Дж}{кг \cdot К}$	
$c_в = 4186\ \frac{Дж}{кг \cdot К}$	
$\eta = 85\%$	
t – ?	

Количество теплоты $Q_с$, которое идет на нагревание стеклянного колориметра на ΔT К, составит

$Q_с = m_с c_с \Delta T$.

Аналогично количество теплоты, которое идет на такое же нагревание воды: $Q_в = m_в c_в \Delta T$.

Тогда $Q_п = m_с c_с \Delta T + m_в c_в \Delta T = \Delta T(m_с c_с + m_в c_в)$. (2)

Количество теплоты, которое выделит ток, проходя по спирали в течение времени t, по закону Джоуля–Ленца $Q_з = I^2 R_с t$. (3)

Здесь $R_с$ – сопротивление спирали из никелиновой проволоки.

Эту формулу мы выбрали потому, что силу тока в никелиновой проволоке, которая здесь является нагревательным элементом, мы можем найти по закону Ома для полной цепи (нам ведь даны ЭДС, внутреннее сопротивление источника тока и кое-что о сопротивлении цепи), а сопротивление никелиновой проволоки $R_с$ мы легко найдем по формуле сопротивления линейных проводников. Таким образом, по закону Ома для всей цепи, содержащей N последовательно соединенных одинаковых элементов,

$$I = \frac{N\mathcal{E}}{R_П + R_с + Nr}. \qquad (4)$$

Сопротивление никелиновой проволоки найдем по формуле сопротивления: $R_с = \rho \frac{l}{S}$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения никелиновой спирали.

Тогда
$$R_с = \rho \frac{4l}{\pi d^2}. \qquad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), получим

$$Q_з = \left(\frac{N\mathcal{E}}{R_п + \rho \frac{4l}{\pi d^2} + Nr} \right)^2 \rho \frac{4l}{\pi d^2} t. \qquad (6)$$

Теперь подставим (2) и (6) в (1). При этом мы получим одно уравнение с одним неизвестным – искомым временем t, тогда как все остальные величины в нем будут известны:

$$\eta = \frac{\Delta T(m_с c_с + m_в c_в)}{\left(\dfrac{N\mathcal{E}}{R_п + \rho\dfrac{4l}{\pi d^2} + Nr}\right)^2 \rho\dfrac{4l}{\pi d^2}t} 100\,\% =$$

$$= \frac{\pi d^2 \Delta T(m_с c_с + m_в c_в)}{4\rho l t}\left(\frac{R_п + \rho\dfrac{4l}{\pi d^2} + Nr}{N\mathcal{E}}\right)^2 100\,\%.$$

Отсюда $\boxed{t = \dfrac{\pi d^2 \Delta T(m_с c_с + m_в c_в)}{4\rho l \eta}\left(\dfrac{R_п + \rho\dfrac{4l}{\pi d^2} + Nr}{N\mathcal{E}}\right)^2 100\,\%}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 52,5 см = 0,525 м, 0,3 мм = $3 \cdot 10^{-4}$ м, 50 г = 0,05 кг, 100 г = 0,1 кг.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$t = \frac{3{,}14(3 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 1(0{,}05 \cdot 840 + 0{,}1 \cdot 4186)}{4 \cdot 0{,}525 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-7} \cdot 85} \times$$

$$\times \left(\frac{0{,}25 + 4{,}2\dfrac{10^{-7} \cdot 4 \cdot 0{,}525}{3{,}14(3 \cdot 10^{-4})^2} + 3 \cdot 0{,}05}{3 \cdot 2}\right)^2 100 \text{ с} = 60 \text{ с}.$$

Ответ: t = 60 с.

Задача 16

Электрочайник имеет в нагревателе две секции. При включении первой секции вода в чайнике закипает за время t_1 = 10 мин, а при включении второй секции – за t_2 = 40 мин. Через какое время t закипит вода, если обе секции включить: *а*) последовательно, *б*) параллельно?

Дано:
t_1 = 10 мин
t_2 = 40 мин

t – ?

Решение. Чтобы решить эту задачу, нужно знать сопротивление каждой секции. Отметим, что сопротивление каждой секции в отдельности не будет меняться при соединении секций последовательно или параллельно, тогда как сила тока изменяться будет, поскольку ее величина зависит от общего сопротивления последовательно или параллельно соединенных секций. Так как в задаче речь идет о выделении количества теплоты в течение некоторого времени, значит, для ее решения воспользуемся законом Джоуля–Ленца. При этом выберем такую формулу закона Джоуля–Ленца, в которую входят напряжение U и сопротивление R, поскольку напряжение в розетке, в которую включали чайник, тоже не меняется при различном включении секций. Отметим также, что количество теплоты Q, которое идет на нагревание чайника до кипения, во всех случаях одно и то же, поскольку нагревается один и тот же чайник с одним и тем же количеством воды. Количество теплоты, которое выделится в первой секции за время t, $Q = \frac{U^2}{R_1} t_1$, а количество теплоты, которое выделится при включении второй секции,

$$Q = \frac{U^2}{R_2} t_2 .$$

Отсюда определим сопротивления секций R_1 и R_2:

$$R_1 = \frac{U^2}{Q} t_1 \quad (1) \quad \text{и} \quad R_2 = \frac{U^2}{Q} t_2 . \qquad (2)$$

1) Пусть секции соединены последовательно. То же самое количество теплоты Q, которое требуется, чтобы чайник закипел, теперь $Q = \frac{U^2}{R_{\text{общ}\,1}} t$, где, поскольку они соединены последовательно, их общее сопротивление

$$R_{\text{общ}1} = R_1 + R_2, \text{ поэтому } \quad Q = \frac{U^2}{R_1 + R_2} t . \qquad (3)$$

Нам остается подставить в (3) выражения (1) и (2) и выполнить несложные преобразования:

$$Q = \frac{U^2}{\frac{U^2}{Q} t_1 + \frac{U^2}{Q} t_2} = \frac{U^2 Q}{U^2 (t_1 + t_2)} t, \qquad 1 = \frac{t}{t_1 + t_2},$$

откуда $\boxed{t = t_1 + t_2}$

2) Теперь пусть секции соединены параллельно. В этом случае количество теплоты Q, которое необходимо, чтобы чайник закипел, равно:

$$Q = \frac{U^2}{R_{общ\ 2}} t$$, где $R_{общ\ 2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ – общее сопротивление секций при их параллельном соединении, поэтому

$$Q = \frac{U^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} t. \qquad (4)$$

Теперь подставим в (4) выражения (1) и (2). Получим

$$Q = \frac{U^2}{\frac{U^2}{Q} t_1 \cdot \frac{U^2}{Q} t_2} \left(\frac{U^2}{Q} t_1 + \frac{U^2}{Q} t_2 \right) t = \frac{Q^2 U^2}{t_1 t_2 U^2 Q^2} (t_1 + t_2) t,$$

$1 = \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} t$, откуда $\boxed{t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}}$

Задача в общем виде решена.

Подставим числа и произведем вычисления.

1) При последовательном соединении секций $t = (10 + 40)$ мин $= 50$ мин.

2) При параллельном соединении секций

$$t = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} \text{ мин} = 8 \text{ мин}.$$

Мы видим, что при параллельном соединении секций чайник закипит быстрее.

Ответ: 1) $t = 50$ мин; 2) $t = 8$ мин.

Задача 17

Построить график зависимости мощности тока P в резисторе от сопротивления резистора R. Резистор подключен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В, внутреннее сопротивление источника тока $r = 2{,}5$ Ом.

Дано:
$\mathcal{E} = 2$ В
$r = 2{,}5$ Ом
$P = P(R)$ – ?

Решение. Запишем формулу мощности тока в резисторе, выразив мощность через силу тока в цепи I и сопротивление резистора R: $P = I^2 R$, где по закону Ома для всей цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$.

С учетом этого $P = \frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2} R$.

Теперь заменим $\mathcal{E}$ и r их числовыми значениями, после чего будем придавать сопротивлению R, как независимой переменной, произвольные числовые значения, начиная от 0, и вычислять соответствующие этим значениям величины мощности P: $P = \dfrac{4R}{(R+2{,}5)^2}$.

Выберем следующие числовые значения R: R = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4.

Заполним таблицу:

R, Ом	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
P, Вт	0	0,222	0,327	0,375	0,395	0,40	0,397	0,389	0,379

Теперь построим график $P = P(R)$. Будем откладывать сопротивления по оси абсцисс, а мощности – по оси ординат. Пусть одно деление на оси сопротивлений соответствует 0,1 Ом, а на оси ординат – 0,05 Вт.

Обозначим точки, соответствующие каждому значению R и P, и соединим их кривой линией (рис. 7-6).

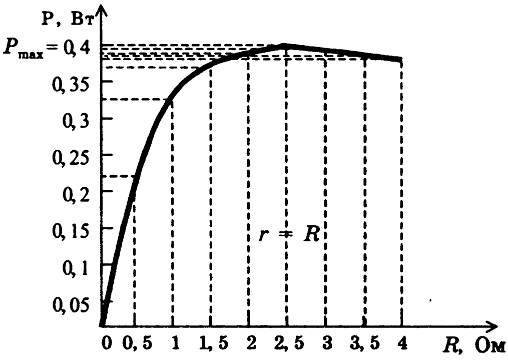


Рис. 7-6

Из графика следует, что **при равенстве внешнего R и внутреннего r сопротивлений мощность тока во внешней части цепи достигает максимальной величины P_{max}**. Этот факт мы будем использовать при решении следующих задач.

Задача 18

Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 8 В и внутренним сопротивлением r = 0,4 Ом замкнут на реостат. Построить графики зависимости мощности тока P в реостате и КПД цепи η от силы тока в цепи I.

Дано:
$\mathcal{E}$ = 8 В
r = 0,4 Ом

$P = P(I)$ – ?
$\eta = \eta(I)$ – ?

Решение. Запишем формулу зависимости мощности P от силы тока I и сопротивления внешней части цепи реостата R:

$$P = I^2R, \qquad (1)$$

где по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \ (2) \text{ откуда } R = \frac{\mathcal{E}}{I} - r. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1) и заменим буквенные обозначения $\mathcal{E}$ и r их числовыми значениями:

$$P = I^2\left(\frac{\mathcal{E}}{I} - r\right) \text{ или } P = \mathcal{E}I - I^2r, \ P = 8I - 0{,}4I^2. \qquad (3)$$

График зависимости P от I согласно (3) представляет собой параболу. Для ее построения будем придавать силе тока I произвольные числовые значения, начиная от 0, и вычислять соответствующие этим значениям величины мощности P, подставляя числовые значения I в (3).

Пусть I = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18 и 20 А.

Заполним таблицу:

I, А	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
P, Вт	0	14,4	25,6	33,6	38,4	40	38,4	33,6	25,6	14,4	0

Будем откладывать по оси абсцисс силу тока I, а по оси ординат – мощность тока P.

Пусть одно деление на оси сил токов соответствует 2 А, а одно деление на оси мощностей – 2 Вт. Построим график $P = P(I)$ (рис. 7-7).

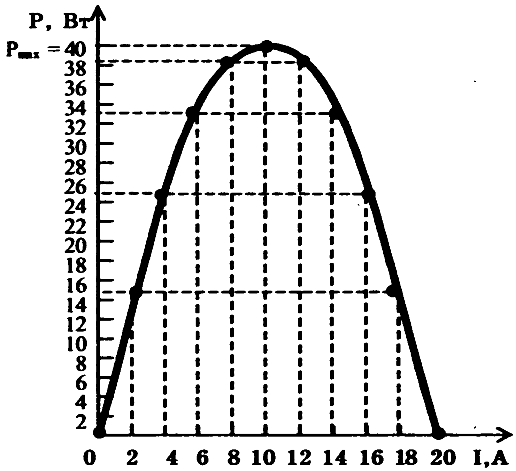


Рис. 7-7

Мы видим, что при I = 10 А мощность тока во внешней цепи максимальна. Так будет, когда $R = r$ (см. задачу 17) . При этом $I = \dfrac{\mathcal{E}}{r + r} = \dfrac{\mathcal{E}}{2r}$. В ином случае каждому значению мощности соответствуют два значения силы тока.

Теперь построим график зависимости КПД η от силы тока в цепи I. Запишем формулу КПД: $\eta = \dfrac{U}{\mathcal{E}}100\%$, где напряжение на зажимах источника при замкнутой внешней цепи $U = \mathcal{E} - Ir$, поэтому

$$\eta = \frac{\mathcal{E} - Ir}{\mathcal{E}}100\% = \left(1 - \frac{r}{\mathcal{E}}I\right)100\%. \qquad (4)$$

Мы видим, что зависимость η от I является линейной, т. е. ее графиком является прямая линия. Подставим в (4) численные значения $\mathcal{E}$ и r, после чего придадим силе тока I два произвольных численных значения, ведь для построения прямой достаточно двух точек:

$$\eta = \left(1 - \frac{0{,}4}{8}I\right)100\% = (1 - 0{,}05I)\ 100\%.$$

Пусть I = 0; 20 А.
Заполним таблицу:

I, А	0	20
η,%	100	0

Будем откладывать по оси абсцисс силу тока I, а по оси ординат – КПД η. Пусть одно деление на оси сил токов соответствует 10 А, а одно деление на оси КПД – 50%. Построим график (рис. 7-8).

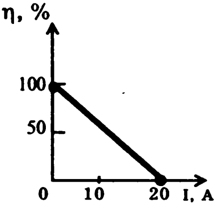


Рис. 7-8

Из формулы (4) следует, что при **токе короткого замыкания** $I = I_{к.з.} = \dfrac{\mathcal{E}}{r}$ **КПД электрической цепи становится равным нулю.**

Задача решена.

Задача 19

Найти плотность тока j в медных проводах двухпроводной линии электропередачи, если электроэнергия передается под напряжением U = 380 В на расстояние l_1 = = 10 км и потери мощности в линии составляют 0,2% от передаваемой мощности. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
$U = 380$ В
$l_1 = 10$ км
$\Delta P = 0{,}002\ P$
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

j – ?

Здесь ΔP – потери мощности, P – передаваемая потребителю мощность (т. е. мощность тока в самом потребителе).

Решение. Потери мощности происходят из-за потерь электроэнергии в виде джоулева тепла, выделяющегося на сопротивлении R линии электропередачи. Определим потери мощности ΔP через силу тока I в линии и сопротивление двухпроводной линии $R = \rho\frac{2l_1}{S}$: $\Delta P = I^2R = I^2\rho\frac{2l_1}{S}$. (1)

Здесь S – площадь поперечного сечения проводов линии.

Нам требуется определить плотность тока в линии, поэтому «свяжем» силу тока I с его плотностью j:

$$I = jS. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $\Delta P = j^2S^2\rho\frac{2l_1}{S} = 2j^2S\rho l_1$. (3)

Теперь определим мощность P, передаваемую потребителю, через известное напряжение U и силу тока I:

$$P = UI = UjS. \qquad (4)$$

Согласно условию $\Delta P = 0{,}002\ P$. (5)

Нам осталось подставить (3) и (4) в (5). При этом неизвестная площадь S сократится, и мы определим плотность тока j: $2j^2S\rho l_1 = 0{,}002\,UjS$, $j\rho l_1 = 0{,}001U$, откуда

$$\boxed{j = 0{,}001\frac{U}{\rho l_1}}$$

Переведем в СИ единицу расстояния l_1: 10 км = $1 \cdot 10^4$ м.
Произведем вычисления:

$$j = 0{,}001\frac{380}{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4}\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 2{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $j = 2{,}2 \cdot 10^3$ А/м².

Задача 20

Определить силу тока короткого замыкания $I_{к.з.}$ в цепи, если при силе тока $I_1 = 2$ А мощность тока во внешней цепи $P_1 = 10$ Вт, а при силе тока $I_2 = 5$ А мощность тока во внешней цепи $P_2 = 15$ Вт.

Дано:
$I_1 = 2$ А
$P_1 = 10$ Вт
$I_2 = 5$ А
$P_2 = 15$ Вт

$I_{к.з.}$ – ?

Решение. Сила тока короткого замыкания определяется отношением ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ к его внутреннему сопротивлению r:

$$I_{к.з.} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \qquad (1)$$

Нам не даны ни ЭДС $\mathcal{E}$, ни внутреннее сопротивление источника тока r, но их отношение определять все равно придется, поэтому запишем закон Ома для всей цепи применительно к токам I_1 и I_2, куда эти величины входят:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r} \quad (2) \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}. \quad (3)$$

Здесь R_1 – сопротивление внешней цепи при силе тока I_1, R_2 – новое сопротивление внешней цепи, когда по ней течет ток силой I_2. Эти сопротивления входят в формулу мощности $P_1 = I_1^2 R_1$ (4) и $P_2 = I_2^2 R_2$. (5)

Итак, мы имеем 5 уравнений с пятью неизвестными величинами: $\mathcal{E}$, r, R_1, R_2 и $I_{к.з.}$. И нам надо определить силу тока $I_{к.з.}$ через известные I_1, I_2, P_1 и P_2, «уйдя» от остальных неизвестных. Давайте наметим путь решения этой системы уравнений. Если из (4) и (5) выразить сопротивления R_1 и R_2 и подставить их в (2) и (3), то количество уравнений и неизвестных величин уменьшится на 2. Давайте выполним эти действия и посмотрим, что получится: из (4) $R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}$ (6) и из (5) $R_2 = \frac{P_2}{I_2^2}$. (7)

Подставляем (6) и (7) в (2) и (3):

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{P_1}{I_1^2} + r} \quad (8) \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{P_2}{I_2^2} + r}. \quad (9)$$

Если теперь определить ЭДС $\mathcal{E}$ из (8) и (9) и приравнять полученные выражения, то у нас останется одно уравнение с одним неизвестным – внутренним сопротивлением r. Определив r, мы легко найдем из (8) или (9) ЭДС $\mathcal{E}$. Приступим: $\mathcal{E} = I_1 \frac{P_1}{I_1^2} + I_1 r$ (10)

и $\mathcal{E} = I_2 \frac{P_2}{I_2^2} + I_2 r$, $\frac{P_1}{I_1} + I_1 r = \frac{P_2}{I_2} + I_2 r$, откуда

$$r = \frac{\frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2}}{I_2 - I_1} = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}. \quad (11)$$

Теперь подставим (11) в (10):

$$\mathcal{E} = I_1\left(\frac{P_1}{I_1^2} + r\right) = I_1\left(\frac{P_1}{I_1^2} + \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}\right) =$$

$$= \frac{P_1}{I_1} + \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_2 (I_2 - I_1)} = \frac{P_1 I_2^2 - I_1 I_2 P_1 + I_1 I_2 P_1 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} =$$

$$= \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} \qquad (11)$$

Нам осталось подставить (10) и (11) в (1), и задача будет решена: $I_{к.з.} = \dfrac{(P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2) I_1 I_2 (I_2 - I_1)}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)(P_1 I_2 - P_2 I_1)}$,

$$\boxed{I_{к.з.} = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{P_1 I_2 - P_2 I_1}}$$

Произведем вычисления:

$$I_{к.з.} = \frac{10 \cdot 25 - 15 \cdot 4}{10 \cdot 5 - 15 \cdot 2}\ \text{А} = 9{,}5\ \text{А}.$$

Ответ: $I_{к.з.} = 9{,}5$ А.

Задача 21

Батарея состоит из $n = 10$ одинаковых источников тока с $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом каждый, соединенных параллельно. Какова максимальная мощность тока P_{max} на внешнем участке цепи?

Дано:
$n = 10$
$\mathcal{E} = 2$ В
$r = 0{,}1$ Ом

P_{max} – ?

Решение. Как следует из решения задач № 17 и 18, мощность тока максимальна, когда сопротивления внешней R и внутренней r_0 частей цепи одинаковы. В этом случае

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r_0} = \frac{\mathcal{E}}{2r_0}$$

и

$$P_{max} = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{4r_0^2} r_0 = \frac{\mathcal{E}^2}{4r_0}.$$

Здесь $\mathcal{E}$ – ЭДС батареи, которая при параллельном соединении одинаковых источников тока равна ЭДС одного источника, и $r_0 = \frac{r}{n}$ – сопротивление батареи из n параллельных источников. С учетом этого получим

$$\boxed{P_{max} = \frac{n\mathcal{E}^2}{4r}}$$

Произведем вычисления: $P_{max} = \frac{10 \cdot 4}{4 \cdot 0{,}1}$ Вт = 100 Вт.

Примечание: если вас попросят доказать, что мощность максимальна при $r = R$, то постройте график при любых R и $\mathcal{E}$. Можно также взять производную функции $P = \frac{\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} R$ по r и приравнять ее нулю, откуда определить $r = R$ (т. е. исследовать эту функцию на экстремум). Но десятиклассники этого делать еще не умеют.

Ответ: $P_{max} = 100$ Вт.

Задача 22

При подключении к источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом сопротивления $R = 1$ Ом напряжение на полюсах источника тока уменьшается на $\Delta U = 0{,}5$ В. Найти полную мощность P, развиваемую источником тока в этой цепи.

Дано:
$r = 0{,}2$ Ом
$R = 1$ Ом
$\Delta U = 0{,}5$ В

P – ?

Решение. Полная мощность в цепи определяется произведением ЭДС источника тока $\mathcal{E}$ на силу тока I в этой цепи (если в ней есть параллельное соединение проводников, то умножать ЭДС надо на силу тока в общей, т. е. неразветвленной, части цепи или на силу тока в самом источнике):

$$P = \mathcal{E} I. \qquad (1)$$

Когда источник тока был разомкнут, напряжение на его полюсах равнялось ЭДС источника. Когда его замкнули на сопротивление R, оно стало $U = \mathcal{E} - \Delta U$. Здесь по закону Ома $U = IR$ и $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$. (2)

Значит, $IR = \mathcal{E} - \Delta U$ и $\frac{\mathcal{E}}{R+r} R = \mathcal{E} - \Delta U$, откуда

$$\Delta U = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}R}{R+r} = \frac{\mathcal{E}R + \mathcal{E}r - \mathcal{E}R}{R+r} = \frac{\mathcal{E}r}{R+r}.$$

Отсюда $\mathcal{E} = \Delta U \dfrac{R + r}{r} = \Delta U\left(\dfrac{R}{r} + 1\right).$ (3)

Подставив (3) в (2), определим силу тока I:

$$I = \frac{\Delta U}{R + r}\left(\frac{R}{r} + 1\right) = \frac{\Delta U}{R + r} \cdot \frac{R + r}{r} = \frac{\Delta U}{r}. \quad (4)$$

Так и должно быть, ведь согласно закону Ома для участка цепи $IR + Ir = \mathcal{E}$, откуда $Ir = \mathcal{E} - IR = \mathcal{E} - U = \Delta U$ и $I = \dfrac{\Delta U}{r}$ (можно найти силу тока и таким образом).

Подставим (3) и (4) в (1):

$$P = \Delta U\left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\Delta U}{r} \text{ или } \boxed{P = \frac{\Delta U^2}{r}\left(\frac{R}{r} + 1\right)}$$

Произведем вычисления:

$$P = \frac{0{,}25}{0{,}2}\left(\frac{1}{0{,}2} + 1\right)\text{Вт} = 7{,}5 \text{ Вт}.$$

Ответ: $P = 7{,}5$ Вт.

Задача 23

Источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом замкнут стальной проволокой, масса которой $m = 20$ г. Сопротивление проволоки таково, что мощность тока в ней максимальна. Найти изменение температуры проволоки ΔT за $t = 1$ мин. Удельная теплоемкость стали $c = 460$ Дж/(кг · К).

Дано:
$\mathcal{E} = 2$ В
$r = 0{,}2$ Ом
$m = 20$ г
$t = 1$ мин
$c = 460 \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$

ΔT – ?

Решение. Судя по условию задачи, вся тепловая энергия, выделяемая током в проволоке, идет на ее нагревание. По закону Джоуля–Ленца количество теплоты, выделенное за время t током,

$$Q = I^2Rt, \quad (1)$$

где по закону Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

В условии сказано, что мощность тока в проволоке максимальна. Так бывает, когда сопротивление проволоки R равно внутреннему сопротивлению источника тока r (см. задачу № 17), поэтому

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + r} = \frac{\mathcal{E}}{2r}. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим: $Q = \frac{\mathcal{E}^2}{4r^2} rt = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} t$.

Это тепло пошло на нагревание проволоки, поэтому

$Q = cm\Delta T$ или $\frac{\mathcal{E}^2}{4r} t = cm\Delta T$, откуда $\boxed{\Delta T = \frac{\mathcal{E}^2 t}{4cmr}}$

Переведем все единицы в СИ: 20 г = 0,02 кг, 1 мин = 60 с.

Произведем вычисления:

$$\Delta T = \frac{4 \cdot 60}{4 \cdot 460 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}2} \text{ К} = 32{,}6 \text{ К}.$$

Ответ: $\Delta T = 32{,}6$ К.

Задача 24

Лебедка поднимает из воды бетонную плиту прямоугольной формы толщиной h с площадью поверхности S, двигая ее без начальной скорости с ускорением a в течение времени t. Напряжение на зажимах мотора U. Плотность бетона $\rho_б$, плотность воды $\rho_в$. Найти силу тока I в моторе лебедки.

Дано:
H
S
$v_0 = 0$
a
t
U
$\rho_б$
$\rho_в$
I – ?

Решение. Силу тока в моторе можно найти из формулы работы тока

$$A = UIt, \text{ откуда } I = \frac{A}{Ut}. \qquad (1)$$

За счет этой работы и совершается подъем плиты из воды. Поскольку здесь ни слова не сказано о КПД этого процесса или о потерях энергии, значит, вся работа тока идет на подъем плиты (т. е. здесь КПД равен 100%, хотя так, конечно, не бывает, просто здесь пренебрегают потерями энергии).

Поскольку работу совершает мотор, действуя на плиту посредством веревки силой натяжения $\vec{F}_н$, сонаправленной с перемещением плиты, то $A = F_н H$. (2)

Здесь H – высота, на которую поднимется плита за время t, двигаясь равноускоренно с ускорением a и без начальной скорости. Из кинематики мы знаем, что в этом случае

$$H = \frac{at^2}{2}. \qquad (3)$$

Силу натяжения найдем, воспользовавшись вторым законом Ньютона. Согласно этому закону равнодействующая всех сил, действующих на плиту, $m\vec{a}$ равна векторной сумме этих сил. На плиту действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила тяжести $\vec{F}_н$ и архимедова выталкивающая сила $\vec{F}_{выт}$ (рис. 7-9). Тогда по второму закону Ньютона

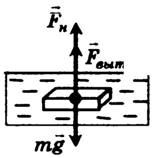


Рис. 7-9

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н + \vec{F}_{выт}.$$

Чтобы записать этот закон в скалярном виде, учтем, что сила натяжения $\vec{F}_н$ и выталкивающая сила $\vec{F}_{выт}$ направлены вверх, а сила тяжести $m\vec{g}$ – вниз и, кроме того, силы $\vec{F}_н$ и $\vec{F}_{выт}$ в сумме превосходят силу тяжести $m\vec{g}$, поскольку плита движется вверх с ускорением. Поэтому $ma = F_н + F_{выт} - mg$, откуда

$$F_н = ma + mg - F_{выт} = m(a + g) - F_{выт}. \quad (4)$$

Здесь m – масса плиты. Она нам не известна, но зато нам известна плотность бетона $\rho_б$, из которого изготовлена плита, ее площадь S и толщина h. Поэтому мы легко найдем массу плиты m, умножив ее плотность ρ на объем V, который в свою очередь равен произведению толщины плиты h и площади ее поверхности S: $m = \rho_б V$, где $V = hS$, поэтому $m = \rho_б hS$. (5)

Выталкивающая сила по закону Архимеда

$$F_{выт} = \rho_в gV = \rho_в ghS. \quad (6)$$

Подставив (5) и (6) в (4), получим

$$F_н = \rho_б hS(a + g) - \rho_в ghS = hS(\rho_б(a + g) - \rho_в g). \quad (7)$$

Теперь подставим (3) и (7) в (2):

$$A = 0{,}5at^2hS(\rho_б(a + g) - \rho_в g). \quad (8)$$

Нам осталось подставить (8) в (1), и задача будет решена:

$$I = \frac{at^2hS}{2Ut}\left(\rho_б(a+g) - \rho_в g\right),$$

$$\boxed{I = \frac{athS}{2U}\left(\rho_б(a+g) - \rho_в g\right)}$$

Задача решена.

Ответ: $I = \dfrac{athS}{2U}\left(\rho_б(a+g) - \rho_в g\right).$

Задача 25

Электровоз массой m двигался со скоростью v вверх по уклону $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}01$, и при этом сила сопротивления движению F_c составляла 3% от веса поезда. Найти силу тока I в его моторе, если напряжение в проводах U, а КПД двигателя η.

Дано:	
m	
v	
$\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}01$	
$F_c = 0{,}03P$	
η	
U	
I – ?	

Решение. Начнем решать эту задачу с формулы η: $\eta = \frac{A_п}{A_з}100\%$. (1)

Здесь $A_п$ – полезная работа по перемещению электровоза вверх по уклону со скоростью v, $A_з$ – вся работа тока, затрачиваемая мотором на это перемещение.

Поскольку полезную работу здесь совершает сила тяги мотора $\vec{F}_{тяги}$, то по определению механической работы, которую совершает сила, сонаправленная с перемещением тела,

$$A_п = F_{тяги}S \quad (2), \quad где\ S = vt. \quad (3)$$

Здесь S – путь, пройденный электровозом со скоростью v за время t. Так как электровоз движется равномерно и прямолинейно, то силы, действующие на него, согласно первому закону Ньютона уравновешены. На электропоезд действует четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила тяги мотора $\vec{F}_{тяги}$, сила сопротивления движению $\vec{F}_c$ и сила реакции опоры $\vec{F}_N$. По первому закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{F}_{тягм} + \vec{F}_c + \vec{F}_N = 0.$$

Чтобы записать этот закон в скалярном виде, разложим силу тяжести $m\vec{g}$, направленную под углом к перемещению электровоза, на тангеницальную $mg\sin\alpha$ и нормальную $mg\cos\alpha$ составляющие (рис. 7-10). Нормальная составляющая уравновешивает реакцию опоры $\vec{F}_N$, а тангенциальная составляющая вместе с силой сопротивления $\vec{F}_c$ уравновешивает антинаправленную им силу тяги мотора $\vec{F}_{тяги}$: $mg\cos\alpha = F_N$ и $F_{тяги} = mg\sin\alpha + F_c$.

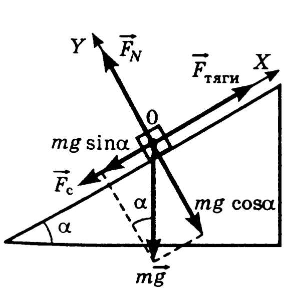


Рис. 7-10

Но нам дан не синус, а тангенс угла α при основании наклонной плоскости. Можно было бы перейти от синуса к тангенсу этого угла, используя формулы тригонометрии, но здесь можно поступить проще, если вспомнить, что при малых углах (а у нас $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}01$, $\alpha \approx 0{,}6°$), т. е. когда $\alpha \leqslant 5°40'$ $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha$. Тогда можно записать, что $F_{тяги} = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha + F_c$.

Согласно условию $F_c = 0{,}03P = 0{,}03\,mg$.

Тогда $F_{тяги} = mg\ \mathrm{tg}\ \alpha + 0{,}03\ mg$ или

$$F_{тяги} = mg(\mathrm{tg}\ \alpha + 0{,}03). \quad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2), получим

$$A_п = mgvt(\mathrm{tg}\ \alpha + 0{,}03) = mgvt(0{,}01 + 0{,}03) =$$
$$= 0{,}04\ mgvt. \quad (5)$$

Затраченную работу $A_з$ определим по формуле работы тока: $A_з = UIt.$ (6)

Теперь подставим (5) и (6) в (1). При этом неизвестное нам время t сократится, и мы получим одно уравнение с одним неизвестным – искомой силой тока I:

$$\eta = \frac{0{,}04mgvt}{UIt}100\% = \frac{0{,}04mgv}{UI}100\%.$$

Отсюда $$\boxed{I = 4\frac{mgv}{\eta U}}$$

Задача в общем виде решена.

Ответ: $I = 4\frac{mgv}{\eta U}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Электрическая лампочка подключена к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом. На цоколе лампочки написано: $P = 4$ Вт. Лампочка работает в нормальном режиме. Определить сопротивление R лампочки.

Ответ: $R_{1,2} = \frac{\mathcal{E}^2}{2P} - r \pm \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{P}\left(\frac{\mathcal{E}^2}{2P} - r\right)} = (0{,}52 \pm 0{,}4)$ Ом.

Задача 2. В электроплитке имеются две спирали, с одинаковым сопротивлением. Во сколько раз изменится мощность плитки, если спирали, соединенные параллельно, соединить последовательно?

Ответ: $\frac{P_1}{P_2} = 4$.

Задача 3. При ремонте электрической плитки спираль была укорочена на 0,2 первоначальной длины. Насколько изменилась мощность плитки, если ее первоначальная мощность $P_1 = 550$ Вт.

Ответ: увеличилась на $\Delta P = 0{,}25P_1 = 137{,}5$ Вт.

Задача 4. Напряжение в контактной сети электровоза $U = 3$ кВ, сила тока в одном двигателе $I = 250$ А, число двигателей $n = 5$. При скорости тепловоза $v = 18$ км/ч сила тяги тепловоза $F = 100$ кН. Найти потребляемую из сети мощность P_1, полезную механическую мощность P_2 и КПД η.

Ответ: $P_1 = nUI = 3{,}75$ МВт, $P_2 = Fv = 0{,}5$ МВт,

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}100\% = 13{,}3\%.$$

Задача 5. В сеть постоянного тока с напряжением $U = 110$ В включен электромотор. Сопротивление обмотки электромотора $R = 2$ Ом, сила тока в обмотке $I = 8$ А. Определить КПД η мотора.

Ответ: $\eta = \frac{U - IR}{U}100\,\% = 85\,\%.$

Задача 6. Электродвигатель подъемного крана потребляет ток силой $I = 20$ А. Определить сопротивление обмотки мотора R, если груз массой $m = 1$ т кран поднимает на высоту $h = 19$ м за $t = 50$ с. Электродвигатель работает под напряжением $U = 380$ В.

Ответ: $R = \frac{UIt - mgh}{I^2 t} = 9{,}7$ Ом.

Задача 7. Трамвай массой $m = 22{,}5$ т движется со скоростью $v = 36$ км/ч по горизонтальному пути. Коэффициент сопротивления движению $k = 0{,}01$, напряжение на линии $U = 500$ В, КПД двигателя $\eta = 75\%$. Определить силу тока I в двигателе.

Ответ: $I = \frac{kmgv100\%}{\eta U} = 59$ А.

Задача 8. Батарея элементов состоит из параллельно соединенных источников тока с ЭДС $\mathcal{E} = 5{,}5$ В и внутренним сопротивлением каждого источника $r = 5$ Ом. При силе тока во внешней части цепи $I = 2$ А полезная мощность (т. е. мощность тока во внешней части цепи) $P = 7$ Вт. Сколько источников тока содержит батарея?

Ответ: $N = \frac{rI^2}{\mathcal{E}I - P} = 5.$

Задача 9. Электровоз массой $m = 300$ т движется вниз по горе со скоростью $v = 72$ км/ч. Уклон горы составляет $h = 1$ м на каждые $l = 100$ м пути. Коэффициент сопротивления движению $k = 0{,}02$, напряжение в линии $U = 3$ кВ, КПД электровоза $\eta = 80\%$. Определить силу тока I в моторе электровоза.

Ответ: $I = \frac{mg\left(k\sqrt{l^2 - h^2} - h\right)v}{lU\eta}100\,\% = 245$ А.

Задача 10. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением $U = 380$ В и потребляет силу тока $I = 2$ А. Каков КПД установки η, если груз массой $m = 1$ т кран поднимает на высоту $h = 19$ м за $t = 50$ с?

Ответ: $\eta = \frac{mgh}{UIt}100\,\% = 50\,\%.$

Задача 11. Электрокипятильник со спиралью сопротивлением $R = 160$ Ом поместили в сосуд, содержащий $V = 0{,}5$ л воды при $t^\circ_1 = 20°$С, и включили в сеть напряжением $U = 220$ В. Через $t = 20$ мин спираль выключили. Какая масса воды $m_п$ выкипела, если КПД спирали $\eta = 80\%$? Температура кипения воды $t^\circ_2 =$

= 100°C, ее плотность ρ = 1000 кг/м³. Удельная теплота парообразования r = 2,3 МДж/кг, удельная теплоемкость воды c = = 4186 Дж/(кг · К).

$$\textit{Ответ: } m_п = \frac{1}{r}\left(\frac{U^2 t\eta}{R\,100\,\%} - \rho V c\left(t_2^\circ - t_1^\circ\right)\right) = 0{,}05 \text{ кг.}$$

Задача 12. Какой мощности P_2 можно установить в конце двухпроводной линии электропечь, имеющую сопротивление R = 10 Ом, если мощность источника тока P_1 = 6 кВт при напряжении на его зажимах U_1 = 1 кВ.

$$\textit{Ответ: } P_2 = P_1\left(1 - \frac{P_1 R}{U_1^2}\right) = 5{,}6 \cdot 10^3 \text{ Вт.}$$

Задача 13. Лифт массой m = 2,4 т поднимается на высоту h = = 25 м в течение t = 40 с. КПД подъема η = 60%. Найти мощность P электродвигателя и силу тока I в нем, если он работает под напряжением U = 220 В.

$$\textit{Ответ: } P = \frac{mgh}{\eta t}100\% = 2{,}45 \cdot 10^4 \text{ Вт}, \quad I = \frac{P}{U} = 111 \text{ А.}$$

Задача 14. Электрическая кастрюля, потребляющая мощность P_1 = 600 Вт, и чайник, потребляющий мощность P_2 = 300 Вт, включены в сеть параллельно. Вода в них закипает одновременно через t = 20 мин. Через какое время t_1 и t_2 закипит вода в кастрюле и чайнике, если их включить в сеть последовательно?

$$\textit{Ответ: } t_1 = \left(\frac{P_1 + P_2}{P_2}\right)^2 t = 1{,}1 \cdot 10^4 \text{ с},$$

$$t_2 = \left(\frac{P_1 + P_2}{P_1}\right)^2 t = 2{,}7 \cdot 10^3 \text{ с.}$$

Задача 15. Электрическая плитка включена в цепь генератора с ЭДС $\mathcal{E}$ = 110 В и внутренним сопротивлением r = 4 Ом. Амперметр, включенный последовательно с плиткой, показывает ток силой I = 2,5 А. Чему равен КПД η плитки, если V = 1 л воды на ней можно вскипятить за t = 0,5 ч? Начальная температура воды t°_1 = 4°C, температура кипения t°_2 = 100°C, удельная теплоемкость воды c = 4186 Дж/(кг · К), ее плотность ρ = 1 · 10³ кг/м³.

$$\textit{Ответ: } \eta = \frac{c\rho V\left(t_2^\circ - t_1^\circ\right)}{I\left(\mathcal{E} - Ir\right)t}100\% = 82\%.$$

Задача 16. Сколько электронов проходит за t = 1 с через поперечное сечение волоска лампы накаливания мощностью P = = 150 Вт, горящей под напряжением U = 220 В? Заряд электрона e = 1,6 · 10⁻¹⁹ Кл.

$$\textit{Ответ: } N = \frac{Pt}{eU} = 4{,}3 \cdot 10^{18}.$$

Задача 17. За время t_1 = 40 с в цепи из n = 3 одинаковых проводников, соединенных параллельно и включенных в сеть, выделилось некоторое количество теплоты. За какое время t_2 выделится такое же количество теплоты, если проводники соединить последовательно?

Ответ: $t_2 = n^2 t_1 = 360$ с.

Задача 18. Нагревательная спираль для испарения воды имеет при температуре $t° = 100°С$ сопротивление $R = 10$ Ом. Какой ток I надо пропускать через эту спираль, чтобы аппарат испарял массу воды $m = 100$ г за время $t = 1$ мин? Удельная теплота парообразования воды $r = 2,3$ МДж/кг.

Ответ: $I = \sqrt{\dfrac{mr}{Rt}} = 19{,}4$ А.

Задача 19. Найти сопротивление внешней части цепи R_1, при котором мощность во внешней цепи P_1 такая же, как и при другом внешнем сопротивлении $R_2 = 10$ Ом. Внутреннее сопротивление источника тока $r = 2,5$ Ом.

Ответ: $R_{1,2} = \dfrac{R_2^2 + r^2 \pm \left(R_2^2 - r^2\right)}{2R_2}$,

$R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 0,625$ Ом.

Задача 20. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 2,2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,1$ Ом замкнут медной проволокой. Сопротивление проволоки подобрано так, что во внешней цепи выделяется наибольшая мощность. За $t = 5$ мин проволока нагрелась на $\Delta T = 315$ К. Найти массу m проволоки.

Ответ: $m = \dfrac{\mathcal{E}^2 t}{4cr\Delta T} = 30$ г.

Задача 21. Под каким напряжением U нужно передавать электроэнергию потребителю на расстояние $r = 10$ км, чтобы при плотности тока $j = 0,5$ А/мм^2 в стальных проводах двухпроводной линии электропередачи потери составляли 1% передаваемой мощности? Удельное сопротивление стали $\rho = 0,12$ мкОм · м.

Ответ: $U = 200\, j\rho r = 1{,}2 \cdot 10^5$ В.

Задача 22. Источник тока замкнут на n резисторов, соединенных последовательно. Во сколько раз изменится постоянная мощность тока в цепи, если резисторы соединить параллельно? $r \approx 0$.

Ответ: $P_2/P_1 = n^2$.

Задача 23. Линия электропередачи сопротивлением $R = 200$ Ом подключена к генератору постоянного тока мощностью $P = 40$ кВт. При каком напряжении U на полюсах генератора потери мощности в линии составляют 5% от мощности генератора?

Ответ: $U = 2\sqrt{5PR} = 12{,}6$ кВ.

Задача 24. К источнику постоянного тока подключили резистор R_1 и при этом мощность тока в резисторе была P_1. Когда вместо резистора R_1 к этому источнику подключили резистор R_2, мощность тока стала P_2. Найти ЭДС источника тока $\mathcal{E}$.

Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{R_1 - R_2}{\sqrt{\dfrac{R_1}{P_1}} - \sqrt{\dfrac{R_2}{P_2}}}$.

Задача 25. В гирлянде для новогодней елки последовательно соединены $n_1 = 10$ одинаковых лампочек. Во сколько раз изменится мощность тока в гирлянде, если в ней оставить только $n_2 =$ 8 лампочек?

Ответ: $P_2/P_1 = n_1/n_2 = 1{,}25$.

Задача 26. Напряжение на зажимах электростанции $U_0 =$ $= 100$ кВ, расстояние до потребителя электроэнергии $l_1 = 800$ км, передаваемая мощность $P_2 = 500$ кВт. Потери напряжения в соединительных проводах составляют $\frac{\Delta U}{U_0} = 5\%$ от напряжения U_0. Найти вес P медных соединительных проводов. Удельное сопротивление меди $\rho_c = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $P = 84 \frac{\rho_п \rho_c l_1^2 P_2}{U_0^2} g = 4 \cdot 10^6$ кг.

Задача 27. Электропечь за $t = 20$ мин превращает в стоградусный пар ($t°_2 = 100°C$) $m = 0{,}5$ кг воды, взятой при $t°_1 = 25°C$. Найти длину l нихромовой проволоки с площадью поперечного сечения $S = 0{,}2$ мм², используемой в качестве нагревательного элемента в печи, если напряжение на зажимах печи $U = 220$ В и ее КПД $\eta = 85\%$. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Ответ: $l = \frac{\eta U^2 S t}{\rho m\left(c\left(t_2^\circ - t_1^\circ\right) + r\right) 100\%} = 1{,}2$ м.

Задача 28. В цепь, состоящую из медного провода сечением $S_1 = 2$ мм², включают плавкий предохранитель из свинца. Какой должна быть площадь поперечного сечения S_2 этого предохранителя, чтобы при нагревании медного провода более чем на $\Delta T =$ $= 10$ К он расплавился, если комнатная температура $t°_1 = 20°C$, а температура плавления свинца $t°_2 = 327°C$? Удельная теплоемкость меди $c_1 = 380$ Дж/(кг · К), удельная теплоемкость свинца $c_2 =$ $= 130$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления свинца 25 кДж/кг, удельное сопротивление меди $\rho_1 = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, удельное сопротивление свинца $\rho_2 = 2{,}1 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, плотность меди $\rho_м =$ $= 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³, плотность свинца $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ответ: $S_2 = S_1 \sqrt{\frac{\rho_м c_1 \rho_2 \Delta T}{\rho_{св}\, \rho_1 \left(c_2\left(t_2^\circ - t_1^\circ\right) + \lambda\right)}} = 5 \cdot 10^{-7}$ м².

Задача 29. При подключении резистора сопротивлением $R =$ $= 10$ Ом к источнику тока сила тока в цепи $I = 2$ А. Сила тока короткого замыкания $I_{к.з.} = 8$ А. Какова максимальная мощность тока P_{max} в резисторе?

Ответ: $P_{max} = \frac{I_{к.з.}^2 IR}{4\left(I_{к.з.} - I\right)} = 53{,}3$ Вт.

Задача 30. Сколько витков N никелиновой проволоки надо навить на фарфоровый цилиндр диаметром $D = 2$ см, чтобы устроить кипятильник для нагревания за $t = 5$ мин кипения $V = 2$ л воды, взятой при $t°_1 = 20°C$? КПД кипятильника $\eta = 80\%$, диаметр проволоки $d = 0,1$ мм, напряжение в сети $U = 220$ В. Удельное сопротивление никелина $\rho_c = 4,2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м, плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), ее температура кипения $t°_2 = 100°C$.

Ответ: $N = \dfrac{\eta t (dU)^2}{4c\rho_в\rho_c VD(t_2^\circ - t_1^\circ)100\%} = 10$.

Задача 31. Электрический чайник с $V = 1$ л воды при $t°_1 = 20°C$ включили и забыли выключить. Сопротивление спирали в чайнике $R = 15$ Ом, напряжение в сети $U = 220$ В, КПД чайника $\eta = 70\%$. Через какое время t вся вода в чайнике выкипит? Плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К), ее удельная теплота парообразования $r = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг, температура кипения воды $t°_2 = 100°C$.

Ответ: $t = \dfrac{R\rho V\left(c(t_2^\circ - t_1^\circ) + r\right)}{\eta U^2} 100\% = 19$ мин.

Задача 32. Три одинаковых источника с внутренним сопротивлением $r_1 = 0,8$ Ом каждый соединены последовательно. Во сколько раз изменится мощность тока в резисторе $R = 10$ Ом, подключенном к ним, если источники соединить параллельно?

Ответ: $\dfrac{P_2}{P_1} = \left(\dfrac{R + 3r}{3R + r}\right)^2 = 0,16$, т. е. мощность уменьшится примерно в 6 раз.

Задача 33. Постройте график зависимости мощности тока P в резисторе от его сопротивления R. Резистор подключен к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,8$ Ом. При каком сопротивлении R мощность тока в резисторе максимальна?

Ответ: $R = 0,8$ Ом.

Задача 34. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут на реостат. Построить графики зависимости мощности тока в реостате и КПД цепи от силы тока I в ней. При какой силе тока мощность в реостате максимальна?

Ответ: $I = 5$ А.

Задача 35. Игрушечный электромобиль массой $m = 200$ г начинает двигаться вверх по наклонной плоскости с углом при основании $\alpha = 30°$ и на пути $S = 1$ м набирает скорость $v = 10$ см/с. Коэффициент сопротивления его движению $k = 0,02$, КПД двигателя $\eta = 80\%$. Найти напряжение U на зажимах батарейки при силе тока в цепи электродвигателя $I = 0,5$ А.

Ответ: $U = \dfrac{m\left(0,5v^2 + gS(\sin\alpha + k\cos\alpha)\right)}{\eta I t} 100\% = 2,5$ В.

8. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ВЕЩЕСТВ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Носителями тока в металлах являются свободные электроны. При возникновении на концах проводника разности потенциалов на хаотическое тепловое движение свободных электронов накладывается их упорядоченное движение под действием сил электрического поля в проводнике. При этом результирующая скорость электронов $\vec{v}$ будет равна сумме скорости их теплового движения $\vec{v}_{\text{тепл}}$ и скорости упорядоченного движения вдоль линий поля $\vec{u}$:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{тепл}} + \vec{u}.$$

Скорость упорядоченного движения электронов можно оценить, воспользовавшись формулой плотности тока, $j = neu$, откуда

$$u = \frac{j}{ne}.$$

Здесь j – плотность тока, e – модуль заряда электрона и n – концентрация свободных электронов в металле.

Предельная плотность тока для медных проводников, при которой они еще не плавятся, порядка 10^7 А/м^2, а их концентрация порядка 10^{29} м$^{-3}$. Подставив эти числа в формулу, получим, что она примерно равна 0,001 м/с, т. е. в сто миллионов раз меньше скорости теплового движения свободных электронов.

Полупроводниками называют вещества, удельное сопротивление которых больше удельного сопротивления металлов, но меньше удельного сопротивления диэлектриков.

С повышением температуры у полупроводников возрастает число свободных электронов и дырок, следовательно, их проводимость увеличивается, а сопротивление падает. В этом состоит основное отличие полупроводников от металлов.

Носителями зарядов, осуществляющих проводимость в химически чистых полупроводниках, являются электроны и дырки. Проводимость химически чистых полупроводников, обусловленная движением электронов и дырок, называется электронно-дырочной или собственной, проводимостью, а сами полупроводники – собственными полупроводниками.

Проводимость полупроводников, обусловленная наличием в них избыточных электронов примеси, называется донорной проводимостью, а само вещество, привнесшее в полупроводник дополнительные электроны, – донором (лат. *donare* – дающий).

Примесь является донором в том случае, когда ее валентность больше валентности основного полупроводника.

Проводимость полупроводников, обусловленная наличием в нем дырок, называется акцепторной, а вещество, привнесшее их в основной полупроводник, – акцептором. В нашем примере акцептор – индий (лат. *acceptor* – приемник).

Акцептором может быть вещество, валентность которого меньше валентности основного полупроводника.

Рассмотрим устройство и принцип действия транзистора с p–n–p–переходом (рис. 8-1). Его средняя часть с полупроводником

n–типа называется базой. К базе прилегают полупроводники p–типа, которые называются эмиттером и коллектором. Обычно базой служит полупроводник из германия с n–проводимостью, в который с обеих сторон вплавляют индий с p–проводимостью. При этом концентрация свободных электронов в базе меньше концентрации дырок в эмиттере и коллекторе.

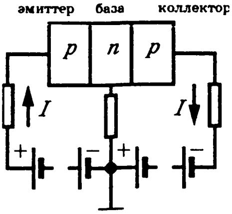


Рис. 8-1

Подключим к эмиттеру источник тока так, чтобы через него шел прямой ток (см. рис. 8-1). Возникшее при этом в нем электрическое поле понесет из эмиттера в базу через p–n–переход основные носители зарядов – дырки. При этом ширина p-n–перехода уменьшится и его сопротивление упадет.

Проникнув в базу, дырки будут продолжать двигаться под действием поля к коллектору и переходить в него через n–p–переход. Но теперь дырки будут двигаться из базы с n–проводимостью, т. е. оттуда, где они являются неосновными носителями зарядов, поэтому через переход база–коллектор (т. е. n–p–переход) потечет обратный ток, вследствие чего ширина n-p–перехода увеличится и его сопротивление возрастет.

Если ток в цепи эмиттера увеличить в несколько раз, то во столько же раз возрастет ток в цепи коллектора, поскольку число дырок, текущих через эмиттер и коллектор, одинаково. Но поскольку сопротивление второго запорного слоя с n-p–переходом значительно больше, чем первого с p-n–переходом, то одинаковое возрастание тока в цепях эмиттера и коллектора будет сопровождаться значительно большим ростом напряжения на втором запорном слое, чем на первом, поскольку напряжение при одинаковом токе больше там, где больше сопротивление. Следовательно, транзистор усиливает напряжение на переходе база–коллектор, причем это усиление происходит за счет энергии источника тока в цепи коллектора.

Явление выделения вещества на электродах при прохождении в электролите электрического тока называется электролизом. Носителями зарядов в электролите являются ионы обоих знаков.

В 1833 г. английский ученый М. Фарадей, изучая экспериментально явление электролиза разных веществ, открыл закон:

масса вещества m, выделившегося на электроде при электролизе, прямо пропорциональна заряду q, прошедшему через электролит,

$$m = kq. \tag{8.1}$$

Коэффициент пропорциональности k в этой формуле называется электрохимическим эквивалентом вещества, выделяющегося на электроде.

Поскольку из определения силы тока следует, что $q = It$, то, подставив это выражение вместо q в формулу (8.1), получим другую запись первого закона Фарадея для электролиза:

$$m = kIt. \tag{8.2}$$

Здесь I – сила тока в электролите, t – время его прохождения, т. е. время электролиза.

При электролизе выделение вещества происходит одновременно на обоих электродах. Поскольку при этом на катоде и аноде выделяются разные вещества, их массы различны, так как различны их электрохимические эквиваленты.

Электрохимический эквивалент вещества k можно определить по формуле

$$k = \frac{M}{N_A ne}. \tag{8.3}$$

Произведение числа Авогадро N_A на элементарный заряд e называется числом Фарадея и обозначается буквой F:

$$F = N_A e = 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл/моль} = 9{,}6 \cdot 10^4\ \text{Кл/моль}.$$

Закон Фарадея можно записать еще и так: $m = \frac{1}{F}\frac{M}{n}It$.

Масса вещества, выделившегося на электроде при электролизе, прямо пропорциональна молярной массе этого вещества, силе тока в электролите, времени электролиза и обратно пропорциональна валентности этого вещества.

Решение задач на электролиз веществ имеет смысл начинать с закона электролиза, ведь его все равно придется использовать. Если известен электрохимический эквивалент вещества, которое выделяется на электроде, то начинайте с формулы

$$m = kq \quad \text{или} \quad m = kIt$$

в зависимости от того, о чем идет речь в условии задачи: о заряде или о силе тока.

Если электрохимический эквивалент не дан и под рукой нет таблицы электрохимических эквивалентов, то начинайте с формулы объединенного закона Фарадея $m = \frac{1}{F}\frac{M}{n}It$, где $F = eN_A$.

Если в задаче на электролиз что-либо говорится о толщине h отлагаемого на электроде вещества, то массу этого вещества m можно выразить через его плотность ρ и объем V, а объем V в свою очередь – через площадь электрода S и толщину отлагаемого слоя h: $m = \rho V$, где $V = Sh$.

Если речь идет не о силе тока I, а о его плотности j, то примените формулу плотности тока $j = \frac{I}{S}$, откуда $I = jS$, где S – площадь электрода.

Если в условии такой задачи что-либо сказано о выходе по току η, то знайте, что выходом по току называют отношение массы вещества $m_ф$, которое фактически выделилось на электроде в процессе электролиза, к массе этого вещества $m_т$, которая должна была выделиться теоретически, т. е. согласно закону электролиза. Фактически выделенная масса может быть меньше теоретической из-за потерь в технологическом процессе.

Если в условии задачи что-либо сказано о количестве N положительных ионов, выделяющихся на катоде, то следует помнить, что заряд, прошедший через электролит, равен сумме зарядов как положительных, так и отрицательных ионов, так как движение отрицательных ионов к аноду эквивалентно движению положительных ионов к катоду. Поэтому заряд q в формуле закона Фарадея $m = kq$ равен удвоенному заряду всех N положительных ионов. Если заряд одного иона обозначить q_1, то $q = 2Nq_1$.

Если в задаче на электролиз речь идет о двух выделяющихся веществах, то закон Фарадея следует записывать для каждого из них и при этом помнить, что электрохимический эквивалент разных веществ различен, поэтому и массы веществ, выделяющихся на катоде и аноде в одной электролитической ванне даже при одинаковой силе тока и за одинаковое время, будут разными. В таких задачах иногда встречается понятие «средняя скорость роста $v_{ср}$ толщины покрытия электрода». Знайте, что так называют отношение толщины покрытия h ко времени электролиза t:

$$v_{ср} = \frac{h}{t}.$$

Для решения задач на токи в газах и в вакууме не требуется знания каких-то особых законов. Достаточно хорошо знать все основные уравнения электростатики и электродинамики, а также необходимо повторить законы и формулы механики (кинематики и динамики), поскольку в таких задачах, как правило, идет речь о движении атомов или молекул ионизированного газа (а также электронов, входящих в его состав) под действием сил электрического поля. Напомним, что когда через газ течет ток насыщения, все носители зарядов в газе (ионы и электроны), образуемые ионизатором в единицу времени, достигают электродов, а если ток в газе меньше тока насыщения, то достигает электродов лишь часть носителей зарядов, содержащихся в ионизированном газе.

Энергией ионизации газа называют энергию, необходимую для отрыва электрона от атома газа. Энергию ионизации часто выражают не в единицах СИ – джоулях, а в электровольтах (эВ) или в мегаэлектровольтах (МэВ). Один электровольт равен энергии, которую приобретает электрон, разогнанный электрическим полем, при перемещении между точками с разностью потенциалов 1 В:

$1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$,

$1 \text{МэВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{6} \text{ Дж} = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$.

Решение отдельных задач

Задача 1

Сила тока в цепи эмиттера $I_э = 10$ мА, а сила тока в базе $I_б$ составляет 5% от силы тока в цепи эмиттера. Во сколько раз сила тока в цепи коллектора $I_к$ меньше силы тока в цепи эмиттера?

Дано:
$I_э = 10$ мА
$I_б = 0{,}05\ I_э$

$\dfrac{I_э}{I_к}$ – ?

Решение. Цепь, в которую включены эмиттер и база (рис. 8-1), называют цепью эмиттера, а цепь, в которую включены база и коллектор – цепью коллектора.

При переходе эмиттер–база дырки, являющиеся основными носителями зарядов в эмиттере, частично рекомбинируют с электронами базы, поэтому сила тока в базе немного меньше, чем в эмиттере. Сила тока в цепи коллектора $I_к$ равна разности сил токов в цепи эмиттера и в базе:

$$I_к = I_э - I_б.$$

Согласно условию $I_б = 0{,}05 I_э$, поэтому

$I_к = I_э - 0{,}05I_э = 0{,}95I_э$. Отсюда $\dfrac{I_э}{I_к} = \dfrac{1}{0{,}95} = 1{,}05$.

Ответ: $I_э/I_к = 1{,}05$.

Задача 2

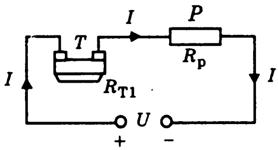


Рис. 8-2

На участок цепи, состоящий из последовательно соединенных термистора T и резистора P (рис. 8-2) подано напряжение $U = 40$ В. При комнатной температуре сила тока на этом участке была $I = 4$ мА. Когда термистор опустили в горячую воду, не отключая от цепи, сила тока увеличилась на $\Delta I = 3$ мА. Во сколько раз изменилось при этом сопротивление термистора? Сопротивление резистора $R_р = 500$ Ом.

Дано:
$U = 40$ В
$I = 4$ мА
$\Delta I = 3$ мА
$R_р = 500$ Ом

$\dfrac{R_{T1}}{R_{T2}}$ – ?

Решение. При комнатной температуре сопротивление термистора $R_{Т1}$ согласно закону Ома равно отношению напряжения U_1 на нем к силе тока I в нем: $R_{Т1} = \dfrac{U_1}{I}$.

Напряжение U_1 на термисторе найдем, отняв от общего напряжения U напряжение $U_р$ на резисторе: $U_1 = U - U_р$, где $U_р = IR_р$.

С учетом этого $R_{Т1} = \dfrac{U - U_р}{I} = \dfrac{U - IR_р}{I} = \dfrac{U}{I} - R_р$. (1)

Здесь $R_р$ – сопротивление резистора, которое, заметим, не меняется при нагревании термистора. Кроме того, сила тока I в последовательно соединенных термисторе и резисторе одинакова.

После того как термистор T нагрели, опустив в горячую воду, его сопротивление уменьшилось, поскольку в нем возросло количество носителей зарядов–электронов и дырок. В результате сила тока в этом участке цепи увеличилась и стала равна $I + \Delta I$. С учетом этого формулу (1) можно записать теперь так: $R_{Т2} = \dfrac{U}{I + \Delta I} - R_р$. (2)

Здесь $R_{Т2}$ – сопротивление термистора после нагревания.

Разделив (1) на (2), мы решим эту задачу в общем виде:

$$\frac{R_{Т1}}{R_{Т2}} = \frac{\dfrac{U}{I} - R_р}{\dfrac{U}{I + \Delta I} - R_р} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{R_{Т1}}{R_{Т2}} = \frac{(U - IR_р)(I + \Delta I)}{I(U - R_р(I + \Delta I))}}$$

Переведем все единицы в СИ:
4 мА = $4 \cdot 10^{-3}$ А, 3 мА = $3 \cdot 10^{-3}$ А.
Произведем вычисления:

$$\frac{R_{\text{Т1}}}{R_{\text{Т2}}} = \frac{\left(40 - 4 \cdot 10^{-3} \cdot 500\right)\left(4 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}\right)}{4 \cdot 10^{-3}\left(40 - 500\left(4 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}\right)\right)} = 1{,}8.$$

Ответ: сопротивление термистора уменьшилось в 1,8 раза.

Задача 3

Концентрация электронов проводимости в германии при комнатной температуре составляет $n_{\text{эл}} = 3 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$, плотность германия $\rho = 5{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3, его молярная масса $M = 0{,}073$ кг/моль. Какую часть составляет число электронов проводимости $N_{\text{эл}}$ от общего числа атомов германия $N_{\text{ат}}$ в некотором объеме этого вещества? Число Авогадро $N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Дано:
$n_{\text{эл}} = 3 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$
$\rho = 5{,}4 \cdot 10^3 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$M = 0{,}073 \ \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$\frac{N_{\text{эл}}}{N_{\text{ат}}}$ – ?

Решение. В некотором объеме V число электронов проводимости $N_{\text{эл}}$ равно произведению их концентрации $n_{\text{эл}}$ на этот объем V:

$$N_{\text{эл}} = n_{\text{эл}} V. \quad (1)$$

Аналогично число атомов в этом объеме

$$N_{\text{ат}} = n_{\text{ат}} V. \quad (2)$$

Разделим (1) на (2):

$$\frac{N_{\text{эл}}}{N_{\text{ат}}} = \frac{n_{\text{эл}}}{n_{\text{ат}}}. \quad (3)$$

Таким образом, задача сводится к отысканию концентрации $n_{\text{ат}}$ атомов германия. Для этого воспользуемся формулами молекулярной физики. Плотность германия ρ равна произведению числа атомов германия в единице объема, т. е. концентрации $n_{\text{ат}}$, на массу одного атома германия $m_{\text{ат}}$: $\rho = n_{\text{ат}} m_{\text{ат}}$, откуда $n_{\text{ат}} = \frac{\rho}{m_{\text{ат}}}$. (4)

Массу одного атома германия найдем отношением массы одного моля германия, т. е. его молярной массы M, к числу Авогадро $N_{\text{А}}$: $m_{\text{ат}} = \frac{M}{N_{\text{А}}}$. (5)

Подставим (5) в (4): $n_{\text{ат}} = \frac{\rho N_{\text{А}}}{M}$. (6)

Нам осталось подставить (6) в (3), и задача будет решена: $\boxed{\dfrac{N_{эл}}{N_{ат}} = \dfrac{n_{эл}M}{\rho N_A}}$

Произведем вычисления:

$$\frac{N_{эл}}{N_{ат}} = \frac{3 \cdot 10^{19} \cdot 0{,}073}{5{,}4 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}} = 6{,}7 \cdot 10^{-10}.$$

Ответ: $N_{эл}/N_{ат} = 6{,}7 \cdot 10^{-10}$.

Задача 4

Как соотносятся массы трехвалентного железа и двухвалентного магния, выделенные на катодах в процессе электролиза при последовательном соединении электролитических ванн? Молярная масса железа $M_1 = 0{,}056$ кг/моль, молярная масса магния $M_2 = 0{,}024$ кг/моль.

Дано:
$n_1 = 3$
$n_2 = 2$
$M_1 = 0{,}056 \dfrac{кг}{моль}$
$M_2 = 0{,}024 \dfrac{кг}{моль}$

$\dfrac{m_1}{m_2}$ – ?

Обозначим n_1 валентность железа, m_1 – его массу, n_2 – валентность магния и m_2 – его массу.

Решение. Согласно закону Фарадея для электролиза

$$m_1 = \frac{1}{F}\frac{M_1}{n_1}It \quad (1)$$

и $$m_2 = \frac{1}{F}\frac{M_2}{n_2}It. \quad (2)$$

Разделив (1) на (2), мы решим задачу в общем виде:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1ItFn_2}{Fn_1M_2It}, \quad \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1n_2}{M_2n_1}}$$

Произведем вычисления:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{0{,}056 \cdot 2}{0{,}024 \cdot 3} = 1{,}56.$$

Ответ: $m_1/m_2 = 1{,}56$.

Задача 5

Сравнить затраты электроэнергии на получение в процессе электролиза одинаковых масс алюминия и меди, если напряжение U_1 при электролизе алюминия в 10 раз больше, чем напряжение U_2 при рафинировании меди. Электрохимический эквивалент алюминия $k_1 = 0{,}093$ мг/Кл, электрохимический эквивалент меди $k_2 = 0{,}33$ мг/Кл.

Дано:

$\frac{U_1}{U_2} = 10$

$k_1 = 0{,}093\ \frac{\text{мг}}{\text{Кл}}$

$k_2 = 0{,}33\ \frac{\text{мг}}{\text{Кл}}$

$\frac{W_1}{W_2}$ – ?

Обозначим W_1 электроэнергию, необходимую для выделения некоторой массы m алюминия за определенное время t_1, W_2 – электроэнергию, необходимую для рафинирования такой же массы меди за время t_2.

Решение. Затраченная электроэнергия W_1 при электролизе алюминия равна работе тока A_1 в этом процессе:

$$W_1 = A_1 = U_1 I t_1. \qquad (1)$$

Здесь I – сила тока, одинаковая в обеих ваннах, поскольку они соединены последовательно, t_1 – время электролиза. Произведение силы тока I на время t_1 определим из закона Фарадея для электролиза:

$$m = k_1 I t_1, \text{ откуда } I t_1 = \frac{m}{k_1}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $W_1 = U_1 \frac{m}{k_1}$. (3)

Аналогично применительно к меди: $W_2 = U_2 \frac{m}{k_2}$. (4)

Нам осталось разделить (3) на (4), и задача в общем виде будет решена:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{U_1 m k_2}{k_1 U_2 m}, \quad \boxed{\frac{W_1}{W_2} = \frac{k_2 U_1}{k_1 U_2}}$$

Можно не переводить единицу электрохимических эквивалентов в СИ, ведь их отношение при этом не изменится, так как их единицы одинаковы.

Произведем вычисления: $\frac{W_1}{W_2} = \frac{0{,}33 \cdot 10}{0{,}093} = 35{,}5$.

Ответ: $W_1/W_2 = 35{,}5$, т. е. для электролиза алюминия требуется в 35,5 раза больше электроэнергии.

Задача 6

Сколько электроэнергии W надо затратить для выделения в процессе электролиза $V = 1$ л кислорода при температуре $t° = 27$ °C и давлении $p = 100$ кПа, если электролиз ведется при напряжении $U = 10$ В и КПД процесса $\eta = 75\%$? Электрохимический эквивалент кислорода $k = 0{,}083$ мг/Кл, его молярная масса $M = 0{,}032$ кг/моль, молярная (универсальная) газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано:
$V = 1$ л
$t° = 27°C$
$p = 100$ кПа
$U = 10$ В
$\eta = 75\%$
$k = 0{,}083\ \dfrac{\text{мг}}{\text{Кл}}$
$M = 0{,}032\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

W – ?

Решение. Начнем с формулы КПД. Коэффициентом полезного действия η здесь является отношение работы тока A, совершенной при электролизе кислорода, ко всей затраченной при этом энергии W, поскольку часть электроэнергии теряется из-за нагревания электролита:

$$\eta = \frac{A}{W} 100\,\%. \qquad (1)$$

Работу тока определим по известной формуле $A = UIt$. (2)

Из закона Фарадея для электролиза $m = kIt$ $It = \dfrac{m}{k}$, поэтому

$$A = U\frac{m}{k}. \qquad (4)$$

Здесь m – масса кислорода. Из уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \dfrac{m}{M}RT$ следует $m = \dfrac{pVM}{RT}$. (5)

Подставим (5) в (4): $A = \dfrac{UpVM}{kRT}$. (6)

Подставим (6) в (1): $\eta = \dfrac{UpVM}{kRTW} 100\,\%$, откуда

$$\boxed{W = \frac{UpVM}{kRT\eta} 100\,\%}$$

Переведем все единицы в СИ: 1 л $= 1 \cdot 10^{-3}$ м^3, $27°C = 300$ К, 100 кПа $= 1 \cdot 10^5$ Па,

$0{,}083\dfrac{\text{мг}}{\text{Кл}} = 8{,}3 \cdot 10^{-8}\dfrac{\text{кг}}{\text{Кл}}$.

Произведем вычисления:

$$W = \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}032}{8{,}3 \cdot 10^{-8} \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot 75} 100 \text{ Дж} = 2{,}1 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $W = 2{,}1 \cdot 10^5$ Дж.

Задача 7

Плотность вещества, выделяемого на электроде при электролизе, ρ, его электрохимический эквивалент k. Плотность тока в электролитической ванне j. Найти скорость роста толщины покрытия h/t.

Дано:	
ρ	
k	
j	
$\dfrac{h}{t}$ – ?	

Решение. Запишем закон Фарадея для электролиза: $m = kIt$. (1)

Массу выделившегося вещества m выразим через его плотность ρ и объем этого вещества V, а объем в свою очередь – через толщину покрытия h и его площадь S. Одновременно выразим силу тока I через его плотность j. Площадь покрытия S нам не дана, но она должна при подстановке этих выражений в (1) сократиться. Проделаем эти действия: $m = \rho V$, где $V = hS$, поэтому

$$m = \rho hS, \tag{2}$$

$$I = jS. \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1): $\rho hS = kjSt$, $\rho h = kjt$, откуда

$$\boxed{\frac{h}{t} = k\frac{j}{\rho}}$$

Задача решена.

Ответ: $\dfrac{h}{t} = k\dfrac{j}{\rho}$.

Задача 8.

Сколько атомов меди (N – ?) выделяется на катоде за время $t = 5$ с при прохождении через раствор электролита тока силой $I = 5$ А? Электрохимический эквивалент меди $k = 0{,}33$ мг/Кл, молярная масса меди $M = 0{,}064$ кг/моль, число Авогадро $N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Дано:	
$t = 5$ с	
$I = 5$ А	
$k = 0{,}33\ \dfrac{\text{мг}}{\text{Кл}}$	
$M = 0{,}064\ \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$	
$N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \dfrac{1}{\text{моль}}$	
N – ?	

Решение. Запишем закон Фарадея для электролиза:

$$m = kIt. \tag{1}$$

Теперь выразим массу меди m, выделившейся на катоде, через массу атома меди $m_{ат}$ и их количество N, а затем массу одного атома – через его молярную массу и число Авогадро, как мы это делали в задачах молекулярной физики: $m = m_{ат}N$, $m_{ат} = \dfrac{M}{N_А}$,

поэтому $m = \dfrac{M}{N_А}N$. (2)

Подставим (2) в (1) и из полученного равенства определим число атомов N:

$$\frac{M}{N_A}N = kIt, \text{ откуда } \boxed{N = \frac{kItN_А}{M}}$$

Переведем единицу k в СИ:
0,33 мг/Кл = $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.
Произведем вычисления:

$$N = \frac{3{,}3 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{0{,}064} = 7{,}8 \cdot 10^{19}.$$

Ответ: $N = 7{,}8 \cdot 10^{19}$.

Задача 9

Определить плотность тока j, прошедшего через раствор электролита в течение времени t, если за это время на катоде выделилась медь толщиной h, покрыв равномерно плоскость катода. Плотность меди ρ и ее электрохимический эквивалент k известны. Выход по току равен η.

Дано:
t
h
ρ
k
η
j – ?

Решение. Выходом по току электрохимики называют величину η, равную отношению фактически выделившейся массы вещества на электроде $m_Ф$ к этой массе $m_Т$, которая должна бы выделиться в соответствии с теорией, т. е. по первому закону Фарадея для электролиза.

Обычно эту величину выражают в процентах:

$$\eta = \frac{m_Ф}{m_Т} 100\,\%. \qquad (1)$$

Фактическая масса вещества, выделившегося на катоде, равна произведению плотности выделившегося вещества ρ и объема V этого вещества: $m_Ф = \rho V$, где $V = hS$, поэтому $m_Ф = \rho hS$. (2)

Площадь поверхности катода S нам не известна и определить ее неоткуда, но, может быть, она в процессе решения сократится.

Масса вещества $m_Т$, которая должна за это время выделиться на катоде, по закону Фарадея определяется формулой $m_Т = kIt$.

Здесь I – сила тока, пошедшего через раствор электролита. Она нам не дана, но зато нам известна плотность тока j, которая связана с силой тока I соотношением

$$j = \frac{I}{S}, \text{ откуда } I = jS.$$

Тогда $m_Т = kjSt$. (3)

Теперь подставим (2) и (3) в (1). При этом, как мы и ожидали, неизвестная нам площадь покрытия S сократится, и получим мы уравнение, из которого сможем определить искомую плотность тока j: $\eta = \frac{\rho hS}{kjSt} 100\,\%$.

Отсюда $\boxed{j = \frac{\rho h}{k\eta t} 100\%}$

Задача решена.

Ответ: $j = \frac{\rho h}{k\eta t} 100\%$.

Задача 10

При электролизе раствора серной кислоты расходуется мощность тока $P = 37$ Вт. Найти сопротивление электролита R, если за время $t = 50$ мин на электроде выделилось $m = 0{,}3$ г водорода. Молярная масса водорода $M = 0{,}002$ кг/моль, его валентность n равна 2. Число Фарадея $F = 9{,}6 \cdot 10^4$ Кл/моль.

Дано:
$P = 37$ Вт
$t = 50$ мин
$m = 0{,}3$ г
$M = 0{,}002 \, \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$
$n = 2$
$F = 9{,}6 \cdot 10^4 \, \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$

R – ?

Решение. Поскольку нам электрохимический эквивалент водорода не дан, то начнем решать эту задачу с объединенного закона Фарадея для электролиза:

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{n} It, \text{ откуда } I = \frac{mFn}{Mt}. \quad (1)$$

Здесь сила тока I, прошедшего за время t через раствор электролита, неизвестна, но зато нам известна мощность тока P и требуется определить сопротивление электролита R, поэтому выразим сопротивление R из формулы мощности тока:

$$P = I^2 R, \text{ откуда } R = \frac{P}{I^2}. \quad (2)$$

Теперь подставим (1) в (2). Получим

$$R = \frac{P}{\left(\frac{mFn}{Mt}\right)^2} \quad \text{или} \quad \boxed{R = P\left(\frac{Mt}{mFn}\right)^2}$$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: 50 мин = 3000 с, 0,3 г = $3 \cdot 10^{-4}$ кг.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$R = 37\left(\frac{0{,}002 \cdot 3000}{3 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}6 \cdot 10^4 \cdot 2}\right)^2 \text{ Ом} = 0{,}4 \text{ Ом}.$$

Ответ: $R = 0{,}4$ Ом.

Задача 11

При электролизе воды течет ток силой $I = 59$ А. Какой объем V гремучего газа при нормальных условиях ($p = 10^5$ Па и $T = 273$ К) образуется за время $t = 1$ мин? Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, молярная масса кислорода $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, электрохимический эквивалент водорода $k_1 = 0{,}0104$ мг/Кл, электрохимический эквивалент кислорода $k_2 = 0{,}083$ мг/Кл. Молярная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Дано:

$I = 59$ А

$p = 1 \cdot 10^5$ Па

$T = 273$ К

$t = 1$ мин

$M_1 = 2 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$M_2 = 32 \cdot 10^{-3} \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

$k_1 = 0{,}0104 \dfrac{\text{мг}}{\text{Кл}}$

$k_2 = 0{,}083 \dfrac{\text{мг}}{\text{Кл}}$

$R = 8{,}31 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

V – ?

Решение. Гремучий газ представляет собой смесь кислорода и водорода. Сразу отметим, что эти газы (каждый в отдельности) занимают в смеси один и тот же объем V, тогда как давление смеси газов p по закону Дальтона равно сумме парциальных (отдельных) давлений каждого газа. Поэтому

$$p = p_1 + p_2.$$

Здесь p_1 – давление водорода в смеси, p_2 – давление кислорода в ней.

Давление каждого газа связано с объемом, который он занимает, его температурой и массой уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$p_1V = \frac{m_1}{M_1}RT \text{ и } p_2V = \frac{m_2}{M_2}RT,$$

откуда $m_1 = \dfrac{p_1VM_1}{RT}$ и

$$m_2 = \frac{p_2VM_2}{RT}.$$

Здесь m_1 – масса водорода, m_2 – масса кислорода в смеси.

Массу каждого газа m_1 и m_2 найдем по первому закону Фарадея для электролиза: $m_1 = k_1It$ и $m_2 = k_2It$.

Подставив эти выражения в предыдущую формулу, получим

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{k_1It}{M_1} + \frac{k_2It}{M_2}\right) \text{ или } p = \frac{RTIt}{V}\left(\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_2}{M_2}\right).$$

Отсюда $$V = \frac{RTIt}{p}\left(\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_2}{M_2}\right).$$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: 1 мин = 60 с, 0,0104 мг/Кл = $1{,}04 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл, 0,083 мг/Кл = $8{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

Произведем вычисления:

$$V = \frac{8{,}31 \cdot 273 \cdot 59 \cdot 60}{1 \cdot 10^5}\left(\frac{1{,}04 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{8{,}3 \cdot 10^{-8}}{32 \cdot 10^{-3}}\right) \text{м}^3 =$$

$$= 6{,}3 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3.$$

Ответ: $V = 6{,}3 \cdot 10^{-4}$ м³.

Задача 12

Площадь каждого электрода в газоразрядной трубке $S = 80$ см². При силе тока насыщения $I_н = 100$ нА за каждую $t = 1$ с несамостоятельного разряда ионизатор образует в объеме $V_1 = 1$ см³ $N_1 = 5 \cdot 10^8$ положительных ионов и столько же отрицательных. Чему равно расстояние d между электродами трубки? Заряд иона равен по модулю заряду электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано:
$I_н = 100$ нА
$S = 80$ см²
$t = 1$ с
$V_1 = 1$ см³
$N_1 = 5 \cdot 10^8$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

d – ?

Решение. В состоянии насыщения число пар ионов, образующихся в газоразрядной трубке, остается неизменным в течение всего разряда. При этом силу тока насыщения можно определить произведением элементарного заряда e на общее число зарядов N в объеме V между электродами, деленным на время t разряда:

$$I_н = \frac{q}{t} = \frac{eN}{t}, \qquad (1)$$

где $q = eN$ – заряд всех ионов.

Число всех пар ионов N можно определить, умножив число пар ионов, образующихся в единице объема, на объем пространства V между электродами. Нам известно, что в объеме V_1 ежесекундно образуется N_1 положительных и столько же отрицательных ионов, значит, всего образуется $2N_1$ пар ионов обоих знаков. Тогда в единице объема образуется $2N_1/V_1$ пар ионов, а в объеме V между электродами их будет $N = \frac{2N_1}{V_1}V$. (2)

Объем пространства V между электродами равен произведению площади электрода S на расстояние d между ними: $V = Sd$. (3)

Подставим (3) в (2), а затем то, что получится, подставим в (1), откуда найдем расстояние d:

$$N = \frac{2N_1}{V_1}Sd, \qquad I_н = \frac{2eN_1Sd}{tV_1}.$$

Отсюда $$\boxed{d = \frac{I_н tV_1}{2eN_1S}}$$

Переведем все единицы в СИ:
100 нА = $100 \cdot 10^{-9}$ А = $1 \cdot 10^{-7}$ А,
80 см^2 = $80 \cdot 10^{-4}$ м^2, 1 см^3 = $1 \cdot 10^{-6}$ м^3.
Произведем вычисления:

$$d = \frac{1 \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{8} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} \text{ м} = 0{,}08 \text{ м}.$$

Ответ: d = 0,08 м.

Задача 13

Молния состоит из отдельных прерывистых разрядов, длящихся t = 1 мс. В каждом разряде по каналу молнии проходит заряд q = 25 Кл при напряжении на концах канала U = 3 ГВ (гигавольт). Какая энергия W выделится при вспышке молнии, состоящей из N = 8 прерывистых разрядов? Чему равна сила тока I в канале молнии и ее мощность P?

Дано:
t = 1 мс
q = 25 Кл
U = 3 ГВ
N = 8

W – ?
I – ?
P – ?

Решение. Энергия, которая выделится при вспышке молнии, равна произведению заряда q_0, проходящего по каналу молнии, на напряжение U на концах канала: $W = q_0U$.

Весь заряд q_0 равен произведению заряда q в одном разряде на их число N: $q_0 = qN$, поэтому $\boxed{W = qNU}$

Силу тока I определим отношением всего заряда q_0 ко времени t вспышки: $I = \frac{q_0}{t}$ или

$$\boxed{I = \frac{qN}{t}}$$

Мощность молнии P равна отношению энергии W ко времени t: $$\boxed{P = \frac{W}{t}}$$

Произведем вычисления:
$W = 25 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^{11}$ Дж = 0,6 ТДж (тераджоулей),

$$I = \frac{25 \cdot 8}{10^{-3}} \text{ А} = 2 \cdot 10^5 \text{ А} = 0{,}2 \text{ МА (мегаампер)},$$

$$P = \frac{6 \cdot 10^{11}}{10^{-3}} \text{ Вт} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Вт} = 600 \text{ ТВт (тераватт)}.$$

Ответ: $W = 0{,}6$ ТДж, $I = 0{,}2$ МА, $P = 600$ ТВт.

Задача 14

Концентрация ионизированных молекул воздуха при температуре $t° = 27°C$ и давлении $p = 770$ мм рт. ст. равна $n_{ион} = 3 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$. Найти, сколько процентов молекул воздуха ионизировано. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Дано:
$t° = 27°C$
$p = 770$ мм рт. ст.
$n_{ион} = 3 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$

$\frac{n_{ион}}{n}$ – ?

Здесь n – концентрация молекул воздуха при данных условиях.

Решение. Давление воздуха P выразим через концентрацию n его молекул и температуру T с помощью известной из молекулярной физики формулы $p = knT$.

Отсюда $n = \frac{p}{kT}$.

Искомое отношение $\frac{n_{ион}}{n}$ равно:

$$\boxed{\frac{n_{ион}}{n} = \frac{n_{ион}kT}{p} 100\,\%}$$

Переведем все единицы в СИ: 27°C = 300 К,
770 мм рт. ст. = 770 · 133 Па = $1{,}024 \cdot 10^5$ Па,
$3 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ = $3 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$.

Произведем вычисления:

$$\frac{n_{ион}}{n} = \frac{3 \cdot 10^{22} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1{,}024 \cdot 10^5} 100\,\% = 0{,}12\,\%.$$

Ответ: $n_{ион}/n = 0{,}12\%$.

Задача 15

Расстояние между электродами в трубке, наполненной парами ртути, $d = 10$ см. Найти среднюю длину свободного пробега электрона $\bar{\lambda}$, если самостоятельный разряд наступает при напряжении $U = 600$ В. Энергия ионизации паров ртути $W_{ион} = 1{,}7 \cdot 10^{-18}$ Дж. Поле считать однородным. Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано:
$d = 10$ см
$U = 600$ В
$W_{ион} = 1{,}7 \cdot 10^{-18}$ Дж
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$\bar{\lambda}$ – ?

Решение. Среднюю длину свободного пробега электрона $\bar{\lambda}$ в однородном электрическом поле, т. е. расстояние, проходимое им от одного столкновения до следующего, можно найти по формуле работы перемещения заряда в однородном электрическом поле, $A = Ee\bar{\lambda}$.

За счет этой работы электрон приобретает энергию $W_{ион}$, равную работе разгоняющего его поля A:

$W_{ион} = A$, поэтому $W_{ион} = E\bar{\lambda}e$, откуда $\bar{\lambda} = \dfrac{W_{ион}}{Ee}$.

Здесь E – напряженность поля между электродами в трубке. Поскольку оно однородное, то его напряженность E связана с напряжением U между электродами формулой $E = \dfrac{U}{d}$.

Тогда $$\boxed{\bar{\lambda} = \frac{W_{ион}d}{Ue}}$$

Задача в общем виде решена. Переведем в СИ единицу расстояния d: 10 см = 0,1 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\bar{\lambda} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-18} \cdot 0{,}1}{600 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ м} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Ответ: $\bar{\lambda} = 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 16

В электронно-лучевой трубке поток электронов с кинетической энергией $W_к = 10$ кэВ пролетает между горизонтально отклоняющими пластинами плоского конденсатора. Длина каждой пластины $l = 2$ см, расстояние между ними $d = 1$ мм. Какое напряжение U надо подать на эти пластины, чтобы за время пролета конденсатора электронный луч сместился по горизонтали на расстояние $x = 1$ см? Модуль заряда электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано:
$W_к = 10$ кэВ
$l = 2$ см
$d = 1$ мм
$x = 1$ см
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

U – ?

Решение. Будем считать движение электронов между пластинами вдоль оси трубки равномерным со скоростью v. Тогда время пролета конденсатора t можно определить отношением длины пластины конденсатора l к скорости v:

$$t = \frac{l}{v}. \qquad (1)$$

Скорость v определим из формулы кинетической энергии:

$$W_к = \frac{m_e v^2}{2}, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{2W_к}{m_e}}. \qquad (2)$$

Здесь m_e – масса электрона.

Подставим (2) в (1): $t = \dfrac{l}{\sqrt{\dfrac{2W_к}{m_e}}} = l\sqrt{\dfrac{m_e}{2W_к}}$. (3)

За это же время t электронный луч сместится равноускоренно без начальной скорости на расстояние x под действием силы F со стороны поля конденсатора, поэтому $x = \dfrac{at^2}{2}$, где $a = \dfrac{F}{m_e}$ по второму закону Ньютона. С учетом этого

$$x = \frac{Ft^2}{2m_e}. \qquad (4)$$

Сила $F = eE$, где напряженность поля конденсатора $E = \dfrac{U}{d}$, поэтому $F = \dfrac{eU}{d}$. (5)

Подставим (3) и (5) в (4), и задача будет решена:

$$x = \frac{eUl^2 m_e}{2m_e d \cdot 2_к}, \quad x = \frac{eU}{dW_к}\left(\frac{l}{2}\right)^2, \text{ отсюда } \boxed{U = \frac{xdW_к}{e}\left(\frac{2}{l}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ:
10 кэВ (кило-электрон-вольт) =
$= 10 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл · В $= 1,6 \cdot 10^{-15}$ Дж,
2 см = 0,02 м, 1 мм = $1 \cdot 10^{-3}$ м, 1 см = 0,01 м.
Произведем вычисления:

$$U = \frac{0,01 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-15}}{1,6 \cdot 10^{-19}}\left(\frac{2}{0,02}\right)^2 \text{ В} = 1000 \text{ В} = 1 \text{ кВ}.$$

Ответ: $U = 1$ кВ.

Задача 17

В электронно-лучевой трубке поток электронов ускоряется полем между катодом и анодом с разностью потенциалов $U = 1$ кВ, а затем пролетает между двумя вертикально отклоняющими пластинами конденсатора. Напряжение электрического поля между ними $E = 20$ кВ/м, а длина этих пластин $l = 4$ см. Найти вертикальное смещение y луча на выходе из пространства между пластинами.

Дано:
$U = 1$ кВ
$E = 20\ \frac{\text{кВ}}{\text{м}}$
$l = 4$ см

y – ?

Решение. Электрическое поле между катодом и анодом трубки разгоняет электрон до скорости v и совершает при этом работу А, которая равна его кинетической энергии $W_к$ (при условии, что начальная скорость электрона $v_0 = 0$).

Поэтому $A = W_к$, где $A = eU$, а

$W_к = \frac{m_e v^2}{2}$, тогда $eU = \frac{m_e v^2}{2}$, откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}. \qquad (1)$$

С этой скоростью электрон пролетает между пластинами конденсатора, проходя расстояние, равное длине пластины l за время t равномерно, поэтому $t = \frac{l}{v}$ или с учетом (1)

$$t = l\sqrt{\frac{m_e}{2eU}}.$$

За это же время t он смещается равноускоренно по вертикали с ускорением a, проходя расстояние y без начальной скорости, ведь проекция скорости $\vec{v}$, направленной вдоль оси трубки, на вертикальное направление равна нулю. Поэтому $y = \frac{at^2}{2} = \frac{al^2 \cdot m_e}{2 \cdot 2eU} = \frac{al^2 m_e}{4eU}$. (2)

По второму закону Ньютона ускорение

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{eE}{m_e}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2) и получим окончательно

$$y = \frac{eEl^2 m_e}{4eUm_e}, \quad \boxed{y = \frac{E}{U}\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ:
1 кВ = $1 \cdot 10^3$ В, 20 кВ/м = $2 \cdot 10^4$ В/м,
4 см = 0,04 м.
Произведем вычисления:

$$y = \frac{2 \cdot 10^4}{10^3}\left(\frac{0{,}04}{2}\right)^2 \text{ м} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8 \text{ мм}.$$

Ответ: $y = 8$ мм.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. При прямом направлении тока в полупроводниковом диоде сила тока I_1 = 10 мА, когда напряжение на нем U_1 = = 0,8 В, а при обратном токе, когда напряжение U_2= 8 В, сила тока всего I_2 = 400 мкА. Насколько сопротивление p–n–перехода при прямом токе меньше, чем при обратном?

Ответ: $\Delta R = \dfrac{U_2}{I_2} - \dfrac{U_1}{I_1} = 1920$ Ом.

Задача 2. Сила тока в цепи эмиттера $I_э$ = 8 мА, а сила тока в цепи коллектора $I_к$ = 7,2 мА. Какой процент составляет сила тока в базе от силы тока в цепи эмиттера?

Ответ: $I_б/I_э = \left(1 - \dfrac{I_к}{I_э}\right)100\% = 10\,\%$.

Задача 3. Число электронов проводимости в кремнии составляет $2 \cdot 10^{-8}$ от общего числа атомов. Чему равна концентрация $n_{эл}$ электронов проводимости в кремнии? Плотность кремния ρ = $2{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3 , его молярная масса M = 0,028 кг/моль.

Ответ: $n_{эл} = 2 \cdot 10^{-8} \dfrac{\rho N_А}{M} = 1{,}03 \cdot 10^{21}$ м$^{-3}$.

Задача 4. Последовательно с электрохимической ванной, заполненной раствором медного купороса, включена ванна с раствором соли никеля. При электролизе за одинаковое время на катоде первой ванны выделилось m_1 = 100 г меди. На сколько процентов масса выделившегося на катоде второй ванны никеля больше массы меди? Электрический эквивалент меди k_1 = 0,33 мг/Кл, электрохимический эквивалент никеля k_2 = 0,36 мг/Кл.

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{m_1} = \left(\dfrac{k_2}{k_1} - 1\right)100\% = 9\%$.

Задача 5. В процессе электролиза меди сопротивление электролита в электрической ванне R = 1 мОм при напряжении на электродах U = 8 В. За какое время t на катоде выделится m = 1 кг меди? Каков при этом расход W электроэнергии?

Ответ: $t = \dfrac{mR}{kU} = 6$ мин, $W = \dfrac{U^2}{R}t = 2{,}3 \cdot 10^7$ Дж.

Задача 6. Какое количество вещества ν осядет на катоде при электролизе любого двухвалентного металла из его соли за t = 1 ч при напряжении U = 10 В и сопротивлении электролита R = = 10 мОм? Число Фарадея $F = eN_А = 9{,}6 \cdot 10^4$ Кл/моль.

Ответ: $\nu = \dfrac{Ut}{FnR} = 19$ моль.

Задача 7. В процессе электролиза V = 4 л кислорода при нормальных условиях ($p = 1 \cdot 10^5$ Па и T = 273 К) было затрачено W = 8 кДж электроэнергии. Чему равно напряжение U на электродах? Электрохимический эквивалент кислорода k = 0,083 мг/Кл, его молярная масса $M = 0{,}032$ кг/моль, молярная (универсальная) газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Ответ: $U = \dfrac{kWRT}{pVM} = 0{,}1$ В.

Задача 8. Средняя скорость роста толщины покрытия катода равна $v_{ср}$, площадь его поверхности S. Чему равна сила тока при электролизе? Плотность выделенного вещества ρ и его электрохимический эквивалент k известны.

Ответ: $I = v_{ср}\rho\, S/k$.

Задача 9. Какое время t требуется для покрытия катода медью с толщиной слоя $h = 80$ мкм при плотности тока в электрической ванне $j = 1$ кА/м^2? Электрохимический эквивалент меди $k = 0{,}33$ мг/Кл, ее плотность $\rho = 8900$ кг/м^3. Выход по току принять равным 1.

Ответ: $t = \dfrac{\rho h}{kj} = 36$ мин.

Задача 10. Для серебрения ложек через раствор серебра в течение времени $t = 5$ ч пропускается ток силой $I = 1{,}8$ А. Катодом служат $N = 12$ ложек, каждая из которых имеет площадь поверхности $S = 50$ см^2. Какой толщины h слой серебра отложится на ложках? Молярная масса серебра $M = 0{,}108$ кг/моль, его валентность $n = 1$ и плотность серебра $\rho = 1{,}05 \cdot 10^4$ кг/м^3. Число Фарадея $F = 9{,}6 \cdot 10^4$ Кл/моль.

Ответ: $h = \dfrac{MIt}{Fn\rho NS} = 5{,}8 \cdot 10^{-5}$ м.

Задача 11. При каком напряжении U происходит электролиз окиси алюминия, если расход электроэнергии $w = 30$ кВт-ч/кг (расход электроэнергии – это величина, равная энергии W, затрачиваемой на электролиз $m = 1$ кг алюминия)? Электрохимический эквивалент алюминия $k = 0{,}093$ мг/кл.

Ответ: $U = wk = 10$ В.

Задача 12. Найти количество атомов меди N, которое осядет на катоде в процессе ее рафинирования при плотности тока $j = 5$ мА/мм^2. Площадь катода $S = 100$ см^2, время электролиза $t = 10$ мин. Электрохимический эквивалент меди $k = 0{,}33$ мг/Кл, ее молярная масса $M =$ $= 0{,}064$ кг/моль. Число Авогадро $N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Ответ: $N = \dfrac{kjStN_А}{M} = 9 \cdot 10^{22}$.

Задача 13. Какой минимальной емкостью Q_{min} должен обладать аккумулятор, чтобы при электролизе подкисленной воды выделилось $V = 3$ л кислорода при $t° = 20°$С и нормальном атмосферном давлении? Электрохимический эквивалент кислорода $k = 0{,}083$ мг/Кл, его молярная масса $M = 0{,}032$ мг/моль, молярная (универсальная) газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж (моль · К).

Напомним, что емкостью аккумулятора называют заряд Q, который может дать данный аккумулятор за определенное время.

Ответ: $Q_{min} = \dfrac{pVM}{kRT} = 1{,}7 \cdot 10^4$ Кл.

Задача 14. При какой силе тока произойдет разложение $V_1 = 1$ мл воды за $t = 1$ мин? Электрохимический эквивалент водорода $k_1 = 0{,}0104$ мг/Кл, электрохимический эквивалент кислорода $k_2 = 0{,}083$ мг/Кл, молярная масса водорода $M_1 = 0{,}002$ кг/моль, молярная масса кислорода $M_2 = 0{,}032$ кг/моль. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Во сколько раз объем V_2 образовавшегося при этом гремучего газа при нормальных условиях будет больше объема V_1 воды? Молярная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Ответ: $I = \dfrac{\rho V_1}{(k_1 + k_2)\,t} = 178$ А, $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{RTIt}{pV_1}\left(\dfrac{k_1}{M_1} + \dfrac{k_2}{M_2}\right) = 1400$.

Задача 15. Площадь электродов в ионизационной камере $S = 100$ см^2, расстояние между ними $d = 6{,}2$ см. Найти силу тока насыщения $I_{нас}$ в такой камере, если известно, что ионизатор образует в объеме $V = 1$ см^3 за $t = 1$ с $N = 10^9$ пар ионов каждого знака. Ионы считать одновалентными.

Ответ: $I_{нас} = \dfrac{NeSd}{Vt} = 10^{-7}$ А .

Задача 16. Объем газа, заключенного между электродами ионизационной камеры, $V = 0{,}5$ л. Газ ионизируется рентгеновскими лучами. Сила тока насыщения $I_{нас} = 4 \cdot 10^{-9}$ А. Сколько пар ионов образуется за $t = 1$ с в единице объема газа? Заряд каждого иона $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $n = \dfrac{I_{нас}}{eV} = 5 \cdot 10^3 \dfrac{1}{м^3 \cdot с}$.

Задача 17. При какой температуре T воздух превратится в полностью ионизированную плазму? Энергия ионизации молекул азота $W = 13{,}3$ эВ. Энергия остальных молекул воздуха еще меньше. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: $T = \dfrac{2W}{3k} = 1{,}2 \cdot 10^5$ К.

Задача 18. Концентрация ионизированных молекул азота при давлении $p = 0{,}6$ МПа и температуре $t° = 27°C$ $n_{ион} = 1 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$. Сколько процентов молекул азота ионизировано? Молярная масса азота $M = 0{,}028$ кг/моль, постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Ответ: $\dfrac{n_{ион}}{n} = \dfrac{n_{ион} \cdot kT}{p} 100\% = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$ %.

Задача 19. При какой напряженности электрического поля E начинается самостоятельный разряд, если энергия ионизации молекул $W_{ион} = 2{,}4 \cdot 10^{-18}$ Дж, а средняя длина свободного пробега электрона $\bar{\lambda} = 5$ мкм? Какова скорость v электронов при ударе о молекулы? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $E = \dfrac{W}{e\bar{\lambda}} = 3 \cdot 10^6 \dfrac{В}{м}$, $v = \sqrt{\dfrac{2W}{m_e}} = 2{,}3 \cdot 10^6 \dfrac{м}{с}$.

Задача 20. В вакуумном диоде анод разогревается за счет кинетической энергии ударяющихся об него электронов. Определить количество теплоты Q, которое выделится на аноде за $t = 1$ ч работы лампы, если скорость электронов в катодном пучке $v = 10^6$ м/с, а сила анодного тока $I = 6{,}3$ мА. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $Q = \dfrac{mv^2 It}{2e} = 64$ Дж.

Задача 23. Определить массу анода $m_А$ в вакуумном диоде, если при попадании на него $N = 2 \cdot 10^{19}$ термоэлектронов, вылетевших из катода, он нагрелся на $\Delta T = 5$ К. Анод алюминиевый, его удельная теплоемкость $c = 896$ Дж/(кг · К). Скорость электронов в катодном пучке $v = 1 \cdot 10^6$ м/с.

Ответ: $m_А = \dfrac{m_e v^2 N}{2c\Delta T} = 2$ г.

Задача 24. Через вакуумный диод протекает ток силой $I = 20$ мА. Сколько электронов попадет на анод за время $t = 0{,}5$ мин?

Ответ: $N = \dfrac{It}{e} = 3{,}75 \cdot 10^{18}$.

Задача 25. Напряженность электрического поля между облаком и землей при вспышке молнии равна $E = 3$ кВ/м, а заряд, уходящий в землю, $q = 40$ Кл. Чему равна энергия разряда W, если высота облаков над землей $d = 3$ км? Поле считать однородным.

Ответ: $W = qEd = 3{,}6 \cdot 10^8$ Дж.

Задача 26. Чему равно напряжение U между вертикально отклоняющими электродами электронно-лучевой трубки, если под действием электрического поля между ними электрон сместился по вертикали на расстояние $y = 4$ мм? Длина пластины $l = 5$ см, расстояние между ними $d = 6$ мм. Скорость электрона при влете в поле пластин $v = 5$ мм/с и направлена вдоль оси трубки. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $U = 2\dfrac{m_e yd}{e}\left(\dfrac{v}{l}\right)^2 = 2{,}7$ В.

МАГНЕТИЗМ

9. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКА. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Магнитное поле – это форма материи, окружающей движущиеся электрические заряды. Магнитное поле является составной частью электромагнитного поля.

Силовой характеристикой магнитного поля является индукция магнитного поля B.

Индукция однородного магнитного поля – это величина, равная отношению максимального момента сил, вращающего рамку с током в этом поле, к силе тока I в рамке и ее площади S:

$$B = \frac{M_{\text{m}}}{IS}. \tag{9.1}$$

Магнитное поле изображают с помощью силовых линий или линий вектора магнитной индукции. Силовой линией магнитного поля называется линия, в каждой точке которой вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ направлен по касательной к ней (рис. 9-1).

Рис. 9-1

Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты, поэтому магнитное поле является вихревым полем в отличие от электростатического поля, силовые линии которого всегда разомкнуты и начинаются или оканчиваются на зарядах, или уходят в бесконечность. Замкнутость силовых магнитных линий свидетельствует о том, что магнитных зарядов, подобных электрическим, в природе не существует.

Однородным магнитным полем называется магнитное поле, в каждой точке которого вектор индукции одинаков по величине и направлению. Магнитные линии однородного поля – параллельные прямые, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 9-2). Однородным является магнитное поле между одноименными полюсами двух магнитов и внутри бесконечно длинного соленоида (катушки с током).

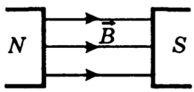


Рис. 9-2

1) Магнитное поле прямого тока

Если вокруг прямого проводника с током посыпать на гладкую поверхность металлические опилки и постучать пальцем по поверхности так, чтобы они, слегка подпрыгнув, расположились в воздухе по силовым линиям магнитного поля этого тока (иначе сила трения между опилками и поверхностью может оказаться слишком велика и они не смогут сориентироваться в магнитном поле), то опилки расположатся по концентрическим окружностям, охватывающим этот проводник.

Магнитные линии прямого тока представляют собой концентрические окружности, охватывающие проводник, с центром на проводнике с током.

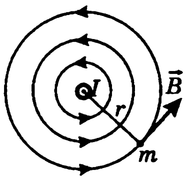


Рис. 9-3

На рис. 9-3 показано ярким кружком сечение прямого проводника с током, идущим от чертежа на наблюдателя. Направление тока изображено точкой в центре кружка, а сам прямой проводник расположен перпендикулярно плоскости чертежа. Тонкие окружности, охватывающие яркий кружок, изображают собой магнитные линии прямого тока. Их направление тоже можно определить по правилу правого винта (буравчика): если поступательное движение правого винта направить по току в проводнике, то направление вращения его головки укажет направление магнитных линий. Если под рукой нет буравчика, то воспользуйтесь своей правой рукой: если большой палец правой руки, отставленный на 90°, направить по току в проводнике (на себя), то четыре свернутых в полуокружность пальца покажут направление магнитных линий вокруг проводника.

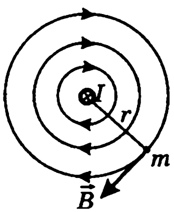


Рис. 9-4

Воспользовавшись этим правилом, убедимся, что на рис.9-3 магнитные линии направлены против часовой стрелки, а на рис. 9-4 – по часовой стрелке, так как здесь ток в сечении проводника направлен от нас за чертеж (он показан крестиком внутри яркого кружка, обозначающего сечение проводника). При этом во всех точках силовых линий вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен по касательной к ним.

Индукция магнитного поля B, возникшего вокруг прямого тока силой I в точке m на расстоянии r от проводника, определяется формулой $B = \mu_0 \mu \dfrac{I}{2\pi r}$. (9.2)

Здесь и далее $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м $= 12{,}6 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость среды, в которой располагается проводник с током. Эта безразмерная скалярная величина показывает, во сколько раз изменяется индукция магнитного поля при переносе проводника с током из вакуума в данную среду:

$$\mu = \frac{B}{B_0}. \tag{9.3}$$

Здесь B_0 – индукция магнитного поля в вакууме, B – индукция магнитного поля в среде с магнитной проницаемостью μ.

Относительная магнитная проницаемость большинства веществ примерно равна единице. Лишь у ферромагнетиков она достигает 10^3–10^6.

Индукция магнитного поля прямого тока в некоторой точке прямо пропорциональна силе этого тока и обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до проводника с током.

Следовательно, чем ближе к проводнику с током, тем больше магнитная индукция и тем гуще располагаются магнитные линии.

2) Магнитное поле кругового тока

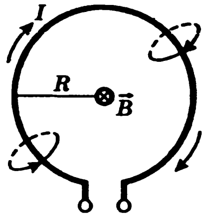


Рис. 9-5

Пусть ток силой I течет по круговому проводнику (т. е. проводник имеет форму окружности) радиусом R. При этом магнитные линии этого тока тоже будут иметь вид окружностей, охватывающих проводник и располагающихся в плоскостях, перпендикулярных проводнику. Если вращать головку правого винта по току (или согнуть полукругом пальцы правой руки в направлении тока I), то его поступательное движение (или большой палец правой руки) покажет направление вектора индукции поля кругового тока в его центре. На рис. 9-5 круговой ток течет по часовой стрелке и вектор индукции магнитного поля этого тока $\vec{B}$ направлен в центре кругового тока от нас за чертеж, т. е. мы видим крестик – оперение стрелки $\vec{B}$, улетающей от нас (убедитесь в этом самостоятельно с помощью своей правой руки).

Индукция B магнитного поля в центре кругового тока радиусом R с силой тока I определяется формулой $B = \mu_0\mu \dfrac{I}{2R}$. (9.4)

Индукция магнитного поля кругового тока прямо пропорциональна силе тока и обратно пропорциональна его радиусу.

3) Магнитное поле катушки с током (соленоида)

Свернем проводник, концы которого подключены к полюсам источника тока m и n, в длинную прямую катушку так, чтобы ее витки располагались вплотную друг к другу (но нарисовать так мы не сможем, потому что тогда внутри катушки не будут видны магнитные линии и вектор $\vec{B}$). Такую катушку с током называют соленоидом, а если она к тому же еще и свернута кольцом, то – тороидом. Если полюс m источника тока положительный, а n отрицательный, то по катушке потечет ток так, как это показано на рис. 9-6. При этом в левом торце катушки ток будет течь по часовой стрелке (на рис. 9-6 катушка слегка развернута к нам этим торцом). Если внутри катушки посыпать металлические опилки, то они расположатся по параллельным прямым. Это свидетельствует о том, что внутри длинной катушки с током магнитные линии имеют вид параллельных прямых, которые, выходя из катушки, загибаются и охватывают ее, замыкаясь сами на себя (незамкнутые просто не дорисованы).

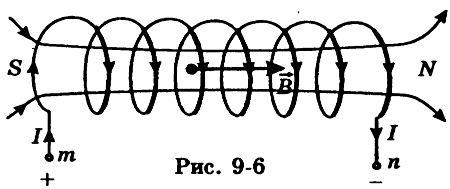


Рис. 9-6

Катушка с током является электромагнитом, подобным полосовому магниту (рис. 9-7). На ее концах имеются северный N и южный S полюса.

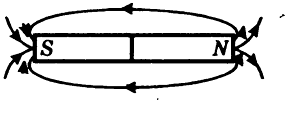


Рис. 9-7

Если ток в торце катушки течет по часовой стрелке, как бы повторяя букву S, то это южный полюс катушки. Если к нему поднести магнитную стрелку, то она повернется к катушке своим северным острием, поскольку притягиваются разноименные полюса магнитов, а одноименные – отталкиваются (как и электрические заряды). Если ток в торце катушки течет против часовой стрелки, как бы повторяя букву N, то это северный полюс катушки. Если к нему поднести магнитную стрелку, то она притянется к катушке своим южным острием.

Индукция магнитного поля $\vec{B}$ внутри бесконечно длинной катушки (соленоида) или внутри катушки, свернутой в кольцо (тороида), с током силой I определяется формулой

$$B = \mu_0 \mu \, nI. \qquad (9.5)$$

Здесь n – число витков катушки на единице ее длины. Если на длине l катушки содержится N витков, то число витков в единице длины $n = \dfrac{N}{l}$.

Задачи магнетизма можно разделить на несколько типов:

1) задачи на расчет магнитных полей, созданных в какой-либо точке пространства одним или несколькими проводниками с током;

2) задачи о действии силы Ампера на проводник с током, внесенным в магнитное поле;

3) задачи о действии силы Лоренца на заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле (сюда можно отнести и задачи на одновременное движение зарядов в электрическом и магнитном полях);

4) задачи на явление электромагнитной индукции;

5) задачи на явление самоиндукции.

Задачи двух последних типов мы рассмотрим позже. А в этом разделе рассмотрим задачи первых трех типов. При решении задач первого типа необходимо установить, какой формы проводник с током создал в данной точке пространства магнитное поле, и выбрать формулу индукции магнитного поля, соответствующую данной конфигурации проводника.

Направление магнитных линий связано с направлением тока, который они охватывают, правилом правого винта (буравчика):

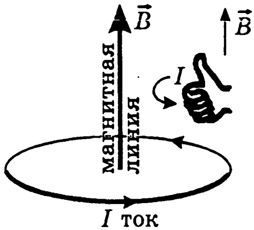
а) если поступательное движение буравчика сонаправят с током в проводнике, то направление вращения его головки покажет направление магнитной линии вокруг этого тока; при этом векторы $\vec{B}$ направлены по касательной к этим линиям;

б) если поступательное движение правого винта сонаправить с вектором $\vec{B}$ магнитного поля, созданного током в контуре, то направление вращения его головки покажет направление тока в контуре.

Примечание. Роль буравчика с успехом может играть ваша правая рука: если большой палец отставить на 90°, а четыре пальца свернуть кольцом и большой палец сонаправить с поступательным движением буравчика, то направление свернутых пальцев от их основания к ногтю станет сонаправленным с направлением вращения головки винта (рис. 9-8 – 9-9).

Если магнитное поле в данной точке пространства создано несколькими N проводниками с током, то по принципу суперпозиции магнитных полей вектор индукции $\vec{B}$ результирующего магнитного поля в этой точке равен векторной сумме индукций $\vec{B}_i$, магнитных полей, созданных в этой точке каждым i-м током в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i .$$



I ток

Рис. 9-8

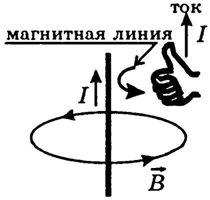


Рис. 9-9

При решении задач на принцип суперпозиции магнитных полей необходимо делать подробный чертеж. При этом следует учитывать, что если прямой проводник с током расположен в плоскости чертежа, как на рис. 9-9, то магнитные линии, охватывающие этот проводник, расположатся в плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа. Для удобства можно расположить прямой провод перпендикулярно плоскости чертежа, изобразив только его поперечное сечение в виде кружка с крестиком, когда ток уходит от нас (рис. 9-4), или с точкой в центре кружка, когда ток направлен от чертежа на нас (рис. 9-3).

Если требуется определить индукцию магнитного поля, созданного в данной точке пространства несколькими токами, то надо показать вектор индукции магнитного поля в этой точке, созданного одним током, затем – вторым и т. д., после чего определить вектор индукции результирующего магнитного поля, пользуясь принципом суперпозиции полей. Если при этом векторы индукции магнитных полей отдельных токов будут сонаправлены, то вектор индукции результирующего магнитного поля будет равен их сумме, а если они антинаправлены, – то их разности. Если векторы индукции магнитных полей отдельных токов будут направлены под углом друг к другу, то для определения вектора индукции результирующего поля надо их сложить по правилу векторного сложения (правилу параллелограмма). Диагональ этого параллелограмма и будет вектором индукции результирующего магнитного поля. Здесь могут пригодиться теоремы Пифагора и косинусов, а также формулы тригонометрических функций.

Рассмотрим **пример.** На рис. 9-10 ток I_1 уходит от нас за чертеж (он изображен кружком с крестиком), а ток I_2 направлен от чертежа к нам (кружок с точкой). Определим индукцию магнитного поля B_1, созданного этими токами в точке 1, расположенной слева от проводника с током I_1 на расстоянии r_1 от него, и в точке 2, расположенной на таком же расстоянии от тока I_1 справа, если расстояние между токами I_1 и I_2 (т. е. между проводниками, по которым эти токи текут) равно r.

Проведем вокруг проводника с током I_1 магнитную линию так, чтобы она проходила через точку 1. Она представляет собой окружность радиусом r_1 с центром на проводнике с током I_1. Воспользовавшись правилом буравчика, установим, что направлена эта магнитная линия по часовой стрелке. Теперь проведем магнитную линию поля тока I_2 так, чтобы она тоже проходила через точку 1. Эта магнитная линия тоже представляет собой окружность радиу-

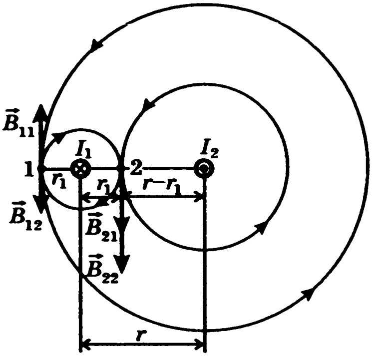


Рис. 9-10

сом $r_1 + r$ с центром на проводнике с током I_2, и направлена она против часовой стрелки.

С учетом направления магнитной линии тока I_1 в точке 1 вектор индукции магнитного поля тока I_1 в этой точке, который мы обозначили $\vec{B}_{11}$, направлен вверх по касательной к этой линии, а вектор индукции $\vec{B}_{12}$ магнитного поля тока I_2 – вниз.

Так как векторы $\vec{B}_{11}$ и $\vec{B}_{12}$ антинаправлены, модуль результирующего вектора индукции B_1 в точке 1 будет равен разности модулей векторов $\vec{B}_{11}$ и $\vec{B}_{12}$: $B_1 = B_{11} - B_{12}$, где согласно (9.2)

$$B_{11} = \mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi r_1} \text{ и } B_{12} = \mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi(r_1 + r)}.$$

В итоге $$B_1 = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} - \frac{I_2}{(r_1 + r)}\right).$$

Рассуждая аналогично, получим, что в точке 2 вектор индукции $\vec{B}_{21}$ магнитного поля тока I_1 направлен вниз по касательной к магнитной линии поля тока I_1, радиус которой r_1.

Проведем через точку 2 магнитную линию поля тока I_2. Она будет иметь вид окружности радиусом $r - r_1$, ведь точка 2 расположена на расстоянии $r - r_1$ от тока I_2. Вектор индукции $\vec{B}_{22}$ магнитного поля тока I_2 в точке 2 тоже будет направлен по касательной к этой линии вниз. Значит, в точке 2 векторы $\vec{B}_{21}$ и $\vec{B}_{22}$ будут сонаправлены, поэтому модуль индукции B_2 результирующего магнитного поля в точке 2 будет равен сумме модулей индукций B_{21} и B_{22}: $B_2 = B_{21} + B_{22}$, где $B_{21} = \mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi r_1}$, как и ранее,

а $$B_{22} = \mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi(r - r_1)}.$$

В итоге $$B_2 = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{(r - r_1)}\right).$$

Теперь определим модуль вектора индукции $\vec{B}$ результирующего магнитного поля, созданного в точке M теми же токами I_1 и I_2, если точка M находится на расстоянии r_1 от I_1 тока и на расстоянии r_2 от тока I_2 (рис. 9-11).

Опять, как и ранее, проведем через точку M окружности радиусом r_1 и r_2 с центрами на проводниках с точками I_1 и I_2. Касательные к этим окружностям в точке M – векторы индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ магнитных полей этих токов – располагаются под углом α друг к другу, поэтому вектор индукции $\vec{B}$ результирующего магнитного поля согласно принципу суперпозиции равен векторной сумме $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$:

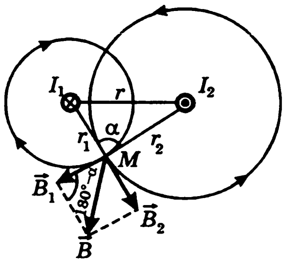


Рис. 9-11

$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, а его модуль можно определить по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}. \qquad (9.6)$$

Такой же угол α имеется в линейном треугольнике, образованном отрезками r_1, r_2 и r. Из этого треугольника следует, что $r^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1r_2}$.

Кроме того, $B_1 = \mu_0\mu\dfrac{I_1}{2\pi r_1}$ и $B_2 = \mu_0\mu\dfrac{I_2}{2\pi r_2}$.

Подставив правые части этих равенств под корень квадратный в формулу (9.6), мы решим поставленную задачу.

Если в процессе решения задачи требуется определить число витков на единице длины соленоида n (концентрацию витков) и известен диаметр проводника d, то можно поступить так:

$n = \dfrac{N}{l}$, где число витков N на длине l соленоида равно отношению этой длины l к диаметру провода d: $N = \dfrac{l}{d}$. С учетом этого $n = \dfrac{l}{dl} = \dfrac{1}{d}$, т. е. число витков на единице длины обратно диаметру сечения проводника.

Если в условии задачи говорится о том, что на проводник с током со стороны магнитного поля действует сила, то при решении такой задачи следует воспользоваться законом Ампера, согласно которому сила Ампера F_A, действующая в магнитном поле на проводник с током, определяется произведением индукции магнитного поля B, силы тока в проводнике I, длины проводника в этом поле l и синуса угла α между вектором индукции $\vec{B}$ и направлением тока в проводнике: $F_A = BIl\sin\alpha$.

Направление силы Ампера определяется правилом левой руки; если ладонь левой руки расположить так, чтобы линии вектора индукции магнитного поля входили в нее, а четыре вытянутых пальца направить по току в проводнике, то большой палец, отставленный на 90°, покажет направление вектора силы Ампера $\vec{F}_A$ (рис. 9-12). Если вектор индукции магнитного поля направлен под углом α к направлению тока в проводнике, то входить в ладонь

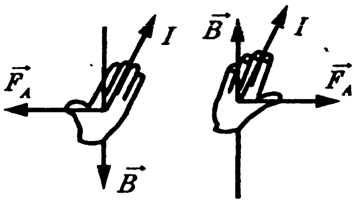


Рис. 9-12

должна его нормальная составляющая, т. е. составляющая, перпендикулярная направлению тока в проводнике.

Если на проводник с током, кроме силы Ампера, действуют еще какие-нибудь силы, например, сила тяжести, сила реакции опоры, сила натяжения и др., то, как правило, решение такой задачи можно начать с применения соответствующего закона Ньютона. Если сказано, что проводник покоится или движется равномерно и прямолинейно, то начинаем с первого закона Ньютона, согласно которому все силы, действующие на проводник, должны быть уравновешены, т. е. их векторная сумма должна быть равна нулю. А если говорится, что он движется с ускорением, то удобно начинать решение со второго закона Ньютона, согласно которому произведение массы проводника и его ускорения равно векторной сумме всех сил, действующих на проводник, включая и силу Ампера.

Рассмотрим примеры применения законов Ньютона к решению задач электромагнетизма.

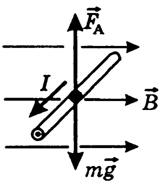


Рис. 9-13

Пример 1. Проводник массой m с током висит в магнитном поле индукцией $\vec{B}$, не падая. На него действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная, как всегда, вниз, и сила Ампера $\vec{F}_A$, которая в этом случае должна быть направлена вверх, чтобы уравновесить силу тяжести $m\vec{g}$ (рис. 9-13). По первому закону Ньютона справедливы будут следующие равенства: в векторной записи $m\vec{g} + \vec{F}_A = 0$, в скалярной записи $mg = F_A$.

Точно такие же равенства будут справедливы, если под действием этих же сил проводник будет двигаться равномерно и прямолинейно вверх или вниз (или влево, или вправо), все равно куда. Если же одна из них превзойдет другую по величине, то проводник станет двигаться с ускорением в сторону большей силы.

Если при этом сила тяжести превосходит силу Ампера, то проводник будет двигаться с ускорением $\vec{a}$ вниз (или с замедлением вверх) и второй закон Ньютона в скалярной записи примет вид:

$$ma = mg - F_A = mg - BIl,$$

а если сила Ампера превзойдет силу тяжести, то проводник будет двигаться с ускорением вверх (или с замедлением вниз), и в этом случае

$$ma = F_A - mg = BIl - mg.$$

При решении подобных задач часто приходится пользоваться формулами связи массы m с плотностью ρ и объемом V: $m = \rho V$, где $V = lS$, причем l – длина проводника, а S – площадь его поперечного сечения; плотности тока $j = \dfrac{I}{S}$; определять площадь поперечного сечения проводника, выраженной через радиус R или диаметр D: $S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$.

Если в условии задачи речь идет о работе силы Ампера, то она может быть найдена с помощью формулы работы, известной из динамики: $A = F_А S \cos \alpha$.

Здесь S – путь, пройденный проводником под действием силы Ампера $F_А$, направленной под углом α к перемещению проводника. Этот путь можно определить из формул кинематики, например, таких: $S = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, $v_2 - v_0^2 = 2aS$, $S = v_{ср}t$, где $a = \dfrac{v - v_0}{t}$,

$$v = v_0 + at,\ v_{ср} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Здесь t – время движения проводника, v_0 и v – его начальная и конечная скорости, a – ускорение, $v_{ср}$ – средняя скорость за время t.

На рамку или контур с током I в магнитном поле индукцией $\vec{B}$ действует вращающий момент сил $\vec{M}$, величину которого можно определить по формуле $M = BIS \sin \alpha$.

Здесь S – площадь рамки или контура, α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки или контура (рис. 9-14). Если рамка квадратная со стороной a, то $S = a^2$.

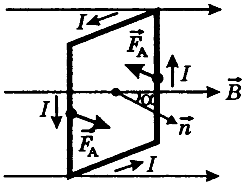


Рис. 9-14

Если контур круглый с радиусом R или диаметром D, то $S = \pi R^2$ или $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$.

На заряд q, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца, величина которой определяется произведением величины индукции магнитного поля $\vec{B}$, заряда q, величины скорости $\vec{v}$, с которой он движется, и синуса угла α между вектором скорости заряда и вектором индукции магнитного поля: $F_л = Bqv \sin\alpha$.

Если этот заряд – электрон, то вместо q пишем e: $F_л = Bev \sin \alpha$.

Направление силы Лоренца тоже определяется по правилу левой руки: если ладонь левой руки расположить так, чтобы магнитные линии входили в нее, а четыре вытянутых пальца направить по направлению вектора скорости $\vec{v}$ положительного заряда (против направления движения отрицательного заряда, например электрона), то большой палец, отставленный на 90°, покажет направление вектора силы Лоренца (рис. 9-15).

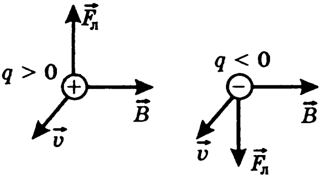


Рис. 9-15

Заряд, влетевший в однородное магнитное поле перпендикулярно его магнитным линиям, будет двигаться под действием силы Лоренца (которая всегда направлена перпендикулярно вектору

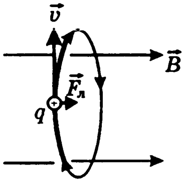


Рис. 9-16

линейной скорости заряда $\vec{v}$) по окружности, охватывающей магнитные линии поля (рис. 9-16), с центростремительным ускорением $\vec{a}_ц$. При этом по второму закону Ньютона $m\vec{a}_ц = \vec{F}_л$, где m – масса заряженной частицы, влетевшей в магнитное поле. С этой формулы удобно начинать многие задачи на движение заряженных частиц в магнитном поле. В таких задачах обычно приходится также применять формулы

$$a_ц = \frac{v^2}{R} \text{ или } a_ц = \omega^2 R, \text{ где } \omega = 2\pi\nu \text{ или } \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$F_л = Bqv \sin\alpha, \text{ где } \alpha = 90°, \text{ поэтому } F_л = Bqv.$$

Отсюда можно найти скорость $\vec{v}$, с которой частица влетела в магнитное поле.

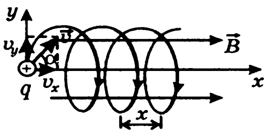


Рис. 9-17

Если частица влетает в магнитное поле под углом α к его магнитным линиям (рис. 9-17), то она будет двигаться вдоль магнитной линии равномерно и прямолинейно с тангенциальной скоростью $v_x = v\cos\alpha$ и одновременно двигаться по окружности, охватывающей магнитные линии, с линейной скоростью $v_y = v \sin\alpha$. В результате ее траекторией станет винтовая линия. Расстояние x, на которое сместится частица по силовой линии за время T, равное периоду (т. е. совершив один оборот), называется шагом винта. По формуле пути равномерного движения со скоростью $v\cos\alpha$ за время T шаг винта можно определить так: $x = v_x T = vT\cos\alpha$.

В таких задачах приходится часто применять следующие формулы: $ma_ц = F_л$, где $a_ц = \dfrac{v_y^2}{R} = \dfrac{(v\sin\alpha)^2}{R}$, $F_л = Bqv\sin\alpha$,

$v\sin\alpha = 2\pi\nu R$, $v\sin\alpha = \dfrac{2\pi R}{T}$, $v\sin\alpha = \omega R$.

Если частица влетает в область пространства, занятую одновременно и электрическим, и магнитным полями, то характер ее движения зависит от силовых свойств и направления этих полей и от скорости самой частицы.

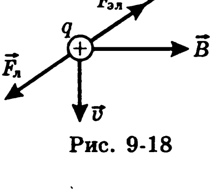


Рис. 9-18

Рассмотрим **пример**. Электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, а положительно заряженная частица влетает в направлении вектора $\vec{v}$, перпендикулярном силовым линиям этих полей (рис. 9-18). В этом случае на нее действуют две силы: со стороны электрического поля сила $\vec{F}_{эл}$, направленная, если частица положительная, по линии вектора напряженности $\vec{E}$ электрического поля, и сила Лоренца $\vec{F}_л$, направленная перпендикулярно векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$. В зависимости от направлений векторы $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ могут быть как антинаправлены, так и сонаправлены друг другу. Если они окажутся антинаправлены и по модулю равны друг другу, т. е. друг друга уравновесят, то частица будет согласно первому закону Ньютона двигаться равномерно и прямолинейно с той же скоростью $\vec{v}$, с которой она влетела в эти поля. В этом случае решение задачи начинаем с равенства сил $F_{эл}$ и $F_л$:

$$F_{эл} = F_л, \text{ где } F_{эл} = qE \quad \text{и} \quad F_л = Bqv \sin 90° = Bqv.$$

Если же эти силы окажутся неуравновешенными, то частица будет участвовать в сложном движении, двигаясь с ускорением вдоль линий вектора $\vec{E}$ и одновременно вращаясь вокруг линий вектора $\vec{B}$.

Если в зависимости от направлений векторов $\vec{v}$, $\vec{B}$ и $\vec{E}$ силы электрическая и Лоренца окажутся сонаправленными, то движение частицы также будет представлять собой суперпозицию двух движений: прямолинейного с ускорением вдоль линий вектора $\vec{E}$ и вращательного вокруг линий вектора $\vec{B}$.

Если частица влетела в эти поля параллельно линиям векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, то сила Лоренца на нее действовать не будет, так как синус угла α между этими векторами будет равен нулю. Но тогда и сила Лоренца $F_л = Bqv \sin \alpha = 0$.

Запомним: если заряженная частица движется вдоль линий вектора индукции магнитного поля, сила Лоренца на нее не действует.

На частицу в этом случае будет действовать только электрическая сила, под действием которой она будет двигаться прямолинейно и равноускоренно с ускорением $a = \frac{F_{эл}}{m} = \frac{qE}{m}$.

Решив в общем виде задачу, непременно проверьте единицу полученной величины. Как это делается, мы показали при решении некоторых задач.

Решение отдельных задач

Задача 1

Определить индукцию магнитного поля на расстоянии $r = 10$ см от бесконечно длинного прямолинейного проводника с током. Диаметр проводника $d = 0{,}5$ мм, плотность тока в проводнике $j = 1$ А/мм². Среда – воздух.

Дано:
$r = 10$ см
$d = 0{,}5$ мм
$j = 1\ \frac{\text{А}}{\text{мм}^2}$

Решение. Индукция магнитного поля, созданного бесконечно длинным прямолинейным проводником с током на расстоянии r от него (рис. 9-3 или 9-9), определяется выражением

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2\pi r}, \tag{1}$$

$\mu = 1$

$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$

B – ?

где μ_0 – магнитная постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость среды, I – сила тока в проводнике.

Силу тока I определим через плотность тока j и площадь поперечного сечения проводника S: $j = \frac{I}{S}$, где

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \text{ поэтому } j = \frac{4I}{\pi d^2}, \text{ откуда } I = \frac{\pi d^2}{4} j. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу:

$$B = \mu_0\mu \frac{\pi d^2 j}{2 \cdot 4\pi r}, \quad \boxed{B = \mu_0\mu \frac{jd^2}{8r}}$$

Переведем все единицы в СИ: 10 см = 0,1 м, 0,5 мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м, $1\ \frac{\text{А}}{\text{мм}^2} = 1 \cdot 10^6\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$.

Проверим единицу полученной величины:

$$[\text{B}]_{\text{си}} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м}} = \frac{\text{Гн} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{А}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Напомним, что Дж = В · А · с, Дж = Н · м, Гн = В · с/ А и

$$\text{Тл} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2}.$$

Произведем вычисления:

$$B = 12{,}6 \cdot 10^{-7} \frac{1 \cdot 10^6 \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 0{,}1} \text{Тл} = 4 \cdot 10^{-7} \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 4 \cdot 10^6$ Тл.

Задача 2

На рис. 9-19 изображено сечение двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами $I_1 = 10$ А и $I_2 = 4$ А, идущими к нам от чертежа. Расстояние между ними $r = 0{,}7$ м. В какой точке прямой, проходящей через эти проводники, индукция магнитного поля этих токов равна нулю? Среда – воздух.

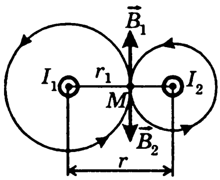


Рис. 9-19

Дано:
$I_1 = 10$ А
$I_2 = 4$ А
$r = 0{,}7$ м

Обозначим r_1 расстояние между точкой М, в которой индукция магнитного поля этих токов равна нулю, и проводником с током I_1.

$B = 0$
$\mu = 1$
$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$

r_1 – ?

Решение. Ток силой I_1 создает в точке М магнитное поле, вектор индукции которого $\vec{B}_1$ направлен вверх. Вектор индукции $\vec{B}_2$ магнитного поля тока I_2 в этой же точке М направлен вниз. Согласно условию задачи индукция результирующего магнитного поля в точке M равна нулю. Так может быть только тогда, когда модули этих антинаправленных в точке M векторов равны: $B_1 = B_2$, где

$$B_1 = \mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi r_1}\ (1) \quad \text{и} \quad B_2 = \mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi(r - r_1)}. \qquad (2)$$

Приравняем (1) и (2) и из полученного выражения найдем расстояние r_1:

$$\mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi r_1} = \mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi(r - r_1)}, \qquad \frac{I_1}{r_1} = \frac{I_2}{r - r_1},$$

$rI_1 - r_1I_1 = r_1I_2$, откуда $\boxed{r_1 = \dfrac{rI_1}{I_1 + I_2}}$

Произведем вычисления: $r_1 = \dfrac{0{,}7 \cdot 10}{10 + 4}$ м $= 0{,}5$ м.

Ответ: $r = 0{,}5$ м.

Задача 3

На рис. 9-20 изображено сечение двух проводников с токами $I_1 = 4$ А и $I_2 = 3$ А, расположенных в воздухе на расстоянии $r = 50$ см друг от друга. Определить индукцию B магнитного поля, созданного этими токами в точке М, расположенной на расстоянии $r_1 = 30$ см от проводника с током I_1 и на расстоянии $r_2 = 40$ см от проводника с током I_2.

Дано:
$I_1 = 4$ А
$I_2 = 3$ А
$\mu = 1$
$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$
$r = 50$ см
$r_1 = 30$ см
$r_2 = 40$ см

B – ?

Решение. Отрезки $r = 50$ см, $r_1 =$ $= 30$ см и $r_2 = 40$ см образуют прямоугольный треугольник с прямым углом при точке М. Вектор $\vec{B}_1$ направлен по касательной к силовой линии магнитного поля тока I_1, которая представляет собой окружность радиусом r_1 с центром на проводнике с током I_1. Согласно правилу правого винта эта магнитная силовая линия «крутится» вокруг тока I_1 по часовой стрелке. Маг-

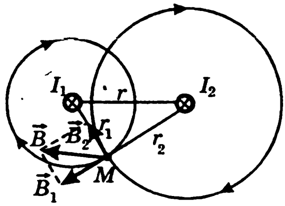


Рис. 9-20

нитная силовая линия вокруг тока I_2, который, как и ток I_1, «уходит» от нас за чертеж, тоже «крутится» по часовой стрелке, а вектор индукции $\vec{B}_2$ магнитного поля этого тока тоже направлен в точке М по касательной к этой линии. На рис. 9-20 видно, что векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ являются катетами в прямоугольном треугольнике, гипотенузой которого служит вектор $\vec{B}$. Согласно теореме Пифагора $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, где $B_1 = \mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi r_1}$, а $B_2 = \mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi r_2}$,

поэтому $B = \sqrt{\left(\mu_0\mu\frac{I_1}{2\pi r_1}\right)^2 + \left(\mu_0\mu\frac{I_2}{2\pi r_2}\right)^2}$,

$$\boxed{B = \frac{\mu_0\mu}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2}}$$

Переведем все единицы в СИ: 50 см = 0,5 м, 30 см = 0,3 м, 40 см = 0,4 м.
Произведем вычисления:

$$B = \frac{12{,}6\cdot10^{-7}}{2\cdot3{,}14}\sqrt{\left(\frac{4}{0{,}3}\right)^2 + \left(\frac{3}{0{,}4}\right)^2}\ \text{Тл} = 3{,}1\cdot10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Ответ: $B = 3{,}1\cdot10^{-6}$ Тл.

Задача 4

Чему равна индукция B магнитного поля внутри длинной катушки, изготовленной из медной проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм? Длина катушки $L = 40$ см, диаметр витка $D = 4$ см. На концах проводника, из которого изготовлена катушка, поддерживается разность потенциалов $U = 10$ В. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
$d = 0{,}5$ мм
$L = 40$ см
$D = 4$ см
$U = 10$ В

Решение. Индукция магнитного поля внутри длинной катушки с током (рис. 9-6) определяется по формуле

$$B = \mu_0\mu nI, \qquad (1)$$

$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м $\mu = 1$ $\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \frac{Гн}{м}$	
B – ?	

где $n = \dfrac{N}{L}$ – число витков на единице длины катушки, I – сила тока в ней, N – число витков на длине L.

Число витков N можно найти, если разделить длину катушки L на диаметр одного проводника d: $N = \dfrac{L}{d}$, поэтому

$$n = \frac{L}{Ld} = \frac{1}{d}. \qquad (2)$$

Силу тока найдем по закону Ома: $I = \dfrac{U}{R}$, (3)

где $R = \rho \dfrac{l}{S}$ – сопротивление проводника катушки, l – длина этого проводника, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь его поперечного сечения.

Длину проводника l, из которого изготовлена катушка, можно найти, умножив длину окружности одного витка πD на их число N: $l = \pi D N = \pi D \dfrac{L}{d}$. (4)

С учетом этого $R = \rho \dfrac{\pi DL \cdot 4}{d \cdot \pi d^2} = 4\rho \dfrac{DL}{d^3}$. (5)

Подставим (5) в (3): $I = \dfrac{Ud^3}{4\rho DL}$. (6)

Нам осталось подставить (6) и (2) в (1), и задача будет решена: $B = \mu_0\mu \dfrac{Ud^3}{d \cdot 4\rho DL}$, $\boxed{B = \dfrac{\mu_0\mu U d^2}{4\rho DL}}$

Переведем все единицы в СИ:
0,5 мм = $5 \cdot 10^{-4}$ м, 40 см = 0,4 м, 4 см = $4 \cdot 10^{-2}$ м.
Произведем вычисления :

$$B = \frac{12{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}4}\ \text{Тл} = 0{,}3\ \text{Тл}.$$

Ответ: B = 0,3 Тл.

Задача 5

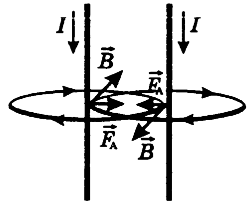


Рис. 9-21

По двум параллельным бесконечно длинным проводникам, расположенным на расстоянии r = 50 см друг от друга, текут токи с одинаковой плотностью тока j = 2 А/мм². Диаметр каждого проводника d = 0,4 мм. С какой силой, приходящейся на единицу длины каждого проводника, они притягиваются друг к другу (рис. 9-21)? Среда – воздух.

Дано:
$r = 50$ см
$j = 2\ \dfrac{\text{А}}{\text{мм}^2}$
$d = 0{,}4$ мм
$\mu = 1$
$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$

$\dfrac{F_A}{l}$ – ?

Решение. Индукция магнитного поля каждого прямого проводника с током на расстоянии r от него

$$B = \mu_0\mu \frac{I}{2\pi r}, \tag{1}$$

где $I = jS$ – сила тока в каждом из двух проводников, $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения каждого проводника.

С учетом этого

$$B = \frac{\mu_0\mu j\pi d^2}{8\pi r} = \mu_0\mu \frac{jd^2}{8r}. \tag{2}$$

В этом магнитном поле на второй проводник действует сила Ампера $F_A = BIl \sin\alpha$, где l – длина проводника, α – угол между направлением тока в проводнике и направлением вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля. Поскольку в нашем случае этот угол $\alpha = 90°$, то $\sin\alpha = 1$ и

$$F_A = BIl, \text{ откуда } \frac{F_A}{l} = BI. \tag{3}$$

Подставив (1) и (2) в (3), мы решим задачу:

$$\frac{F_A}{l} = \mu_0\mu \frac{jd^2}{8r} \cdot j\frac{\pi d^2}{4}, \qquad \boxed{\frac{F_A}{l} = \mu_0\mu \frac{\pi}{2r}\left(\frac{jd^2}{4}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ: 50 см = 0,5 м,

$$2\frac{\text{А}}{\text{мм}^2} = \frac{2}{10^{-6}}\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2} = 2\cdot 10^6\,\frac{\text{А}}{\text{м}^2},\ 0{,}4 \text{ мм} = 4\cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Проверим единицу полученной величины:

$$\left[\frac{F_A}{l}\right]_{\text{СИ}} = \frac{\text{Гн}\cdot\text{А}^2\cdot\text{м}^4}{\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}^4} = \frac{\text{В}\cdot\text{с}}{\text{А}}\cdot\frac{\text{А}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} =$$

$$= \frac{Н \cdot м}{м^2} = \frac{Н}{м}.$$

Произведем вычисления:

$$\left[\frac{F_A}{l}\right]_{СИ} = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\, \frac{3{,}14}{2 \cdot 0{,}5} \left(\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 16 \cdot 10^{-6}}{4}\right)^2 \frac{Н}{м} =$$

$$= 2{,}5 \cdot 10^{-4}\, \frac{Н}{м}.$$

Ответ: $F_А/l = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ Н/м.

Задача 6

На квадратную рамку со стороной a, расположенную в однородном магнитном поле индукцией B так, что между нормалью $\vec{n}$ к ее плоскости и линиям вектора $\vec{B}$ есть угол α, действует со стороны поля вращающий момент сил M (см. рис. 9-14), если по ней течет ток, плотность которого равна j. Определить площадь сечения $S_{сеч}$ проводника, из которого изготовлена рамка.

Дано:
a
B
α
M
j
$S_{сеч}$ – ?

Решение. Момент сил M, действующий на рамку с током в магнитном поле, определяется произведением индукции этого магнитного поля B, силы тока I в рамке, площади S рамки и синуса угла α между нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки и линиями вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля: $M = BIS \sin\alpha$.

Силу тока I в рамке можно связать с площадью поперечного сечения проводника рамки $S_{сеч}$, которую нам надо отыскать, и известной нам плотностью тока j соотношением $j = \dfrac{I}{S_{сеч}}$, откуда $I = jS_{сеч}$.

Площадь квадратной рамки S можно определить как квадрат ее стороны a: $S = a^2$.

Поэтому $M = BjS_{сеч}a^2 \sin\alpha$.

Отсюда найдем искомую площадь поперечного сечения:

$$\boxed{S_{сеч} = \frac{M}{Bja^2 \sin\alpha}}$$

Задача решена.

Ответ: $S_{сеч} = \dfrac{M}{Bja^2 \sin\alpha}$.

Задача 7

Стальной проводник диаметром $d = 0{,}1$ мм висит в однородном магнитном поле индукцией $B = 20$ мТл (см. рис. 9-13). Найти силу тока в проводнике. Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Дано:	
d = 0,1 мм	
B = 20 мТл	
$\rho = 7{,}8 \cdot 10^3\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	
I – ?	

Решение. Проводник не падает, поскольку сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешена силой Ампера $\vec{F}_A$, следовательно, модули этих сил $mg = F_A$. (1)

Здесь $m = \rho V$ – масса проводника, $V = lS$ – его объем, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения. С учетом этого

$$m = \rho l \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (2)$$

Согласно закону Ампера $F_A = BIl \sin\alpha$, (3)
где $\alpha = 90°$, поэтому $\sin\alpha = 1$ и $F_A = BIl$.

Подставим (2) и (3) в (1) и определим силу тока I:

$$\rho l \frac{\pi d^2}{4} g = BIl, \text{ откуда } \boxed{I = \frac{\pi d^2 \rho g}{4B}}$$

Не забудьте проверить единицу полученной величины.

Переведем в СИ все единицы: 0,1 мм = $1 \cdot 10^{-4}$ м, 20 мТл = 0,02 Тл.

Произведем вычисления:

$$I = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-8} \cdot 7{,}8 \cdot 10^3 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 0{,}02}\text{ А} = 0{,}03\text{ А}.$$

Ответ: I = 0,03 А.

Задача 8

На двух горизонтальных рельсах, между которыми расстояние l = 60 см, лежит стержень перпендикулярно им. Определить силу тока I, который надо пропустить по стержню, чтобы он двигался равномерно и прямолинейно по рельсам. Рельсы и стержень находятся в вертикальном магнитном поле индукцией B = 60 мТл. Масса стержня m = 0,5 кг, коэффициент трения стержня о рельсы k = 0,1. Найти работу A, которую совершит сила, перемещающая стержень на расстояние x = 25 см.

Дано:	
l = 60 см	
B = 60 мТл	
φ = 90°	
m = 0,5 кг	
k = 0,1	
x = 25 см	
I – ?	
A – ?	

Решение. Пусть стержень располагается перпендикулярно плоскости чертежа, а ток течет по нему от плоскости чертежа к нам, поэтому в сечении стержня мы поставили точку, обозначающую острие стрелы, летящей на нас (рис. 9-22). Пусть линии вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ направлены сверху вниз.

Тогда, применив правило левой руки, убедимся, что на этот стержень будет действовать сила Ампера, направленная тоже, как и в предыдущей задаче, вправо. Кроме нее, на стержень будут действовать сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции рельс $2\vec{F}_N$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Поскольку стержень будет двигаться равномерно и прямолинейно, то все эти силы будут уравновешены, т. е. их векторная сумма будет по первому закону Ньютона равна нулю:

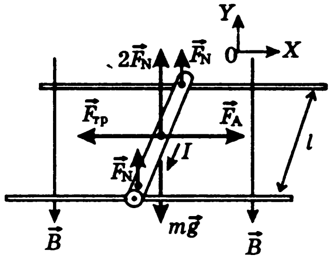


Рис. 9-22

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + 2\vec{F}_N + \vec{F}_{тр} = 0 .$$

При этом сила тяжести $m\vec{g}$ будет уравновешена двумя силами реакции рельсов $2\vec{F}_N$, а сила Ампера $\vec{F}_A$ – силой трения $\vec{F}_{тр}$. Поэтому в скалярной записи закон Ньютона примет вид $mg = 2F_N$ и $F_A = F_{тр}$. (1)

По формуле силы Ампера $F_A = BIl \sin \alpha$, где $\alpha = 90°$, поэтому $\sin \alpha = 1$ и тогда $F_A = BIl$. (2)

Теперь выразим силу трения через величины, данные в условии задачи. По определению сила трения равна произведению коэффициента трения на силу давления стержня на рельсы, которая по третьему закону Ньютона численно равна силе реакции рельсов, поэтому $F_{тр} = k \cdot 2F_N$.

Но поскольку $2F_N = mg$, то $F_{тр} = kmg$. (3)

Тогда, подставив (2) и (3) в (1), получим уравнение, из которого мы сможем найти искомую силу тока I, так как остальные величины в этом уравнении нам уже известны: $BIl = kmg$.

Отсюда $\boxed{I = \dfrac{kmg}{Bl}}$

Мы нашли одну из искомых величин в общем виде. Теперь определим работу перемещения стержня A на расстояние x. Из механики известно, что работа перемещения определяется произведением модуля силы, перемещающей тело (в нашем случае силы Ампера F_A), модуля перемещения x и косинуса угла между векторами силы и перемещения. Поскольку у нас вектор силы Ампера сонаправлен с вектором перемещения стержня (они оба направлены вправо), то этот угол равен нулю, а косинус нуля, как известно, равен единице. Поэтому в нашем случае $A = F_A x$ или $\boxed{A = BIlx}$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы СИ:

60 см = 0,6 м, 60 мТл = 0,06 Тл, 25 см = 0,25 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$I = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8}{0{,}06 \cdot 0{,}6}\ \text{А} = 13{,}6\ \text{А},$$

$A = 0{,}06 \cdot 13{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}25$ Дж $= 0{,}12$ Дж.

Ответ: $I = 13{,}6$ А, $A = 0{,}12$ Дж.

Задача 9

Какой путь S пройдет за время t прямой медный стержень с диаметром сечения d, двигаясь без начальной скорости равноускоренно в однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$ по горизонтальным рельсам (см. рис. 9-22). Коэффициент трения k, плотность меди ρ. Сила тока в проводнике I. Явлением электромагнитной индукции пренебречь.

Дано:	
t d $v_0 = 0$ B k ρ	*Решение.* На движущийся равноускоренно стержень действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, которую уравновешивает сила реакции опоры $\vec{F}_N$, сила Ампера $\vec{F}_A$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. По второму закону Ньютона
S – ?	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_A + \vec{F}_{тр}$, а в проекциях на оси OX и OY: $ma = F_A - F_{тр}$ (1) и $mg = F_N$, где

$F = kF_N$, поэтому $F_{тр} = kmg$. (2)

Согласно закону Ампера $F_A = BIl \sin \alpha$, где $\alpha = 90°$ и $\sin \alpha = 1$, поэтому $F_A = BIl$. (3)

Массу стержня определим через его плотность и размеры: $m = \rho V$, где $V = lS$ – объем стержня, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь его поперечного сечения.

Поэтому $$m = \rho l \frac{\pi d^2}{4}. \qquad (4)$$

Подставим (2), (3) и (4) в (1) и из полученного выражения определим ускорение стержня a, чтобы затем по

формуле $$S = \frac{at^2}{2} \text{ при } v_0 = 0 \qquad (5)$$

найти и искомый путь S: $\rho l\frac{\pi d^2}{4}a = BIl - k\rho l\frac{\pi d^2}{4}g$,

$$\pi d^2\rho a = 4BI - \pi d^2 k\rho g,$$

$$a = \frac{4BI}{\pi d^2\rho} - \frac{\pi d^2 k\rho g}{\pi d^2\rho} = \frac{4BI}{\pi d^2\rho} - kg.$$

Нам осталось подставить (6) в (5), и задача будет решена: $\boxed{S = \frac{t^2}{2}\left(\frac{4BI}{\pi d^2\rho} - kg\right)}$

Задача решена.

Ответ: $S = \frac{t^2}{2}\left(\frac{4BI}{\pi d^2\rho} - kg\right)$.

Задача 10

По двум вертикальным параллельным рельсам может двигаться стержень массой m, изготовленный из материала плотностью ρ. Площадь поперечного сечения стержня равна S. Рельсы расположены в горизонтальном магнитном поле индукцией B, вектор индукции которого направлен на рис. 9-23 за чертеж. При пропускании тока силой I проводник движется равноускоренно по рельсам вверх без начальной скорости ($v_0 = 0$). Определить работу перемещения проводника A за время t. Явлением электромагнитной индукции и трением о рельсы пренебречь.

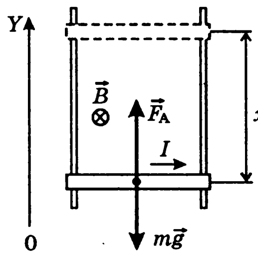


Рис. 9-23

Дано:
m
S
ρ
B
I
$v_0 = 0$
t
A – ?

Решение. Пусть за время t стержень переместится на расстояние x, двигаясь вверх под действием силы Ампера F_A, сонаправленной с его перемещением. Тогда совершенная силой Ампера работа $A = F_A x \cos\alpha_1$, где $\alpha_1 = 0°$ и $\cos\alpha_1 = 1$, поэтому $A = F_A x$. (1)

Здесь α_1 – угол между направлением силы Ампера и перемещением стержня.

По закону Ампера $F_A = BIl \sin\alpha_2$, где l – длина стержня, α_2 – угол между направлением тока в стержне и направлением вектора $\vec{B}$. На рис. 9-23 ток течет по стержню вправо, а вектор $\vec{B}$ направлен от нас за чертеж, поэтому $\alpha_2 = 90°$ и $\sin\alpha_2 = 1$. С учетом этого $F_A = BIl$. (2)

Модуль перемещения стержня x найдем из уравнения кинематики: при $v_0 = 0$ $x = \frac{at^2}{2}$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1): $A = BIl\frac{at^2}{2}$. (4)

Чтобы найти ускорение стержня a, применим второй закон Ньютона. На стержень действуют сила Ампера, направленная вверх, и сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз. В векторной записи $m\vec{a} = \vec{F}_A + m\vec{g}$, а в проекциях на оси OY $ma = F_A - mg = BIl - mg$. (5)

Длину стерня l определим через его массу m и плотность ρ: $V = \frac{m}{\rho}$ – объем стержня. С другой стороны, $V = lS$, поэтому $lS = \frac{m}{\rho}$, откуда $l = \frac{m}{\rho S}$. (6)

Подставим (6) в (5) и из полученного выражения определим ускорение a: $ma = BI\frac{m}{\rho S} - mg$, $a = \frac{BI}{\rho S} - g$. (7)

Нам осталось подставить (6) и (7) в формулу работы (4). Проделаем это действие: $\boxed{A = BI\frac{mt^2}{2\rho S}\left(\frac{BI}{\rho S} - g\right)}$

Задача решена.

Ответ: $A = BI\frac{mt^2}{2\rho S}\left(\frac{BI}{\rho S} - g\right)$.

Задача 11

По наклонным рельсам соскальзывает равномерно вниз стержень с площадью поперечного сечения S, изготовленный из материала с плотностью ρ. Рельсы расположены в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен рельсам (рис. 9-24). Угол между рельсами и горизонтом равен α_1, коэффициент трения

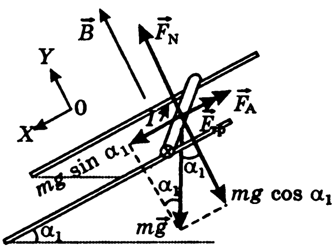


Рис. 9-24

о рельсы k. По стержню течет ток силой I. Чему равна индукция магнитного поля B?

Дано:
S
ρ
α_1
k
I
B – ?

Решение. Применим к решению этой задачи первый закон Ньютона, согласно которому стержень движется равномерно и прямолинейно, когда все приложенные к нему силы уравновешены или когда их векторная сумма равна нулю. На стержень действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции рельсов $\vec{F}_N$, сила Ампера $\vec{F}_A$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Применив правило левой руки, убедимся, что сила Ампера антинаправлена перемещению стержня. По первому закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_A + \vec{F}_{тр} = 0$, а в проекциях на оси координат OX и OY $mg\sin\alpha_1 = F_{тр} + F_A$ и $F_N = mg\cos\alpha_1$, где $F_{тр} = k F_N = k\,mg\cos\alpha_1$, поэтому

$$mg\sin\alpha_1 = k\,mg\cos\alpha_1 + F_A. \qquad (1)$$

По закону Ампера $F_A = BIl\sin\alpha_2$, где α_2 – угол между вектором $\vec{B}$ и перемещением стержня. Этот угол равен 90°, поэтому $\sin\alpha_2 = 1$ и $F_A = BIl$. (2)

Длину стержня l выразим через его массу m и плотность ρ: $V = \dfrac{m}{\rho}$ – объем стержня. Поскольку $V = lS$, то

$$lS = \frac{m}{\rho}, \text{ откуда } l = \frac{m}{\rho S}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2): $F_A = BI\dfrac{m}{\rho S}$. (4)

Нам осталось подставить (4) в (1) и из полученного выражения определить индукцию B:

$$mg\sin\alpha_1 = kmg\cos\alpha_1 + BI\frac{m}{\rho S},$$

$$g(\sin\alpha_1 - k\cos\alpha_1) = \frac{BI}{\rho S}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{B = \frac{g\rho S}{I}(\sin\alpha_1 - k\cos\alpha_1)}$$

Задача решена.

Ответ: $B = \dfrac{g\rho S}{I}(\sin\alpha_1 - k\cos\alpha_1)$.

Задача 12

В однородном магнитном поле на двух невесомых нитях подвешен горизонтально прямой проводник длиной $l = 0,2$ м с массой $m = 10$ г. Индукция этого магнитного поля $B = 49$ мТл, причем линии вектора индукции $\vec{B}$ направлены вверх перпендикулярно проводнику. На какой угол φ от вертикали отклонятся нити, на которых висит проводник, если по нему пропустить ток плотностью $j = 2$ А/мм^2 (рис. 9-25)? Диаметр поперечного сечения проводника $d = 1$ мм.

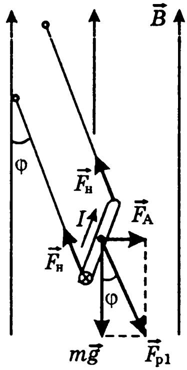


Рис. 9-25

Дано:
$l = 0,2$ м
$m = 10$ г
$B = 49$ мТл
$\alpha = 90°$
$j = 2\dfrac{А}{мм^2}$
$d = 1$ мм

φ – ?

Решение. Поскольку проводник после отклонения нитей находится в состоянии равновесия, значит, силы, приложенные к нему, согласно первому закону Ньютона, уравновешены, т. е. их равнодействующая равна нулю. На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера $\vec{F}_A$, направление которой можно определить по правилу левой руки. Применим это правило к нашей задаче. Расположим ладонь левой руки горизонтально над проводником так, чтобы линии вектора $\vec{B}$ входили в нее, а четыре вытянутых пальца направим по току в проводнике длиной l. Пусть ток уходит от нас за чертеж, тогда и эти четыре пальца мы направим тоже за чертеж. При этом большой палец левой руки, отставленный на 90°, будет направлен вправо и, значит, сила Ампера тоже направлена вправо, поэтому и проводник отклонится вправо от положения равновесия.

Отметим, что сам проводник на нашем рисунке расположен перпендикулярно плоскости чертежа, поэтому мы видим его сечение, обозначенное кружком. Поставим в этом сечении крестик, означающий, что вектор плотности тока $\vec{j}$ направлен от нас за чертеж.

Кроме силы Ампера, на проводник действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы натяжения $2\vec{F}_н$ со стороны двух нитей. По первому закону Ньютона векторная сумма этих сил должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_A + m\vec{g} + 2\vec{F}_н = 0.$$

Силы $\vec{F}_A$ и $m\vec{g}$ можно сложить, заменив их одной равнодействующей силой $\vec{F}_{p1}$, которая должна уравновесить силы натяжения $2\vec{F}_н$, поэтому в скалярной записи закон Ньютона примет вид $F_{p1} = 2F_н$.

Векторы сил $\vec{F}_A$, $\vec{F}_{p1}$ и $m\vec{g}$ образуют прямоугольный треугольник, в котором вектор $\vec{F}_{p1}$ является гипотенузой, а векторы $m\vec{g}$ и $\vec{F}_A$ – катетами (точнее одним из катетов является горизонтальная штриховая сторона этого треугольника, длина которой равна длине вектора $\vec{F}_A$). Из этого прямоугольного треугольника мы можем определить тангенс искомого угла φ (можно, конечно, найти и синус, и косинус, но проще все-таки тангенс, потому что в этом случае нам не надо иметь дела с силой $\vec{F}_{p1}$, о которой нам ничего фактически не известно, кроме того, что она численно равна $2\vec{F}_н$, но о силе натяжения мы тоже ничего не знаем). Итак, остановимся на тангенсе угла φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_A}{mg}.$$

Силу Ампера определим по соответствующей формуле: $F_A = BIl \sin\alpha$, где I – сила тока.

Здесь $\alpha = 90°$, поэтому $\sin\alpha = 1$ и $F_A = BIl$. Кроме того, $I = jS$, где $S = \frac{\pi d^2}{4}$, поэтому $I = \frac{\pi d^2}{4} j$.

С учетом этого $F_A = B\frac{\pi d^2}{4} jl$ и $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pi d^2 Bjl}{4mg}}$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: 10 г = 0,01 кг, 49 мТл = 0,049 Тл, $2\ \frac{\text{А}}{\text{мм}^2} = 2 \cdot 10^6\ \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$, 1 мм = $1 \cdot 10^{-3}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3{,}14 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}049 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0{,}2}{4 \cdot 0{,}01 \cdot 9{,}8} = 0{,}157,\ \varphi = 9°.$$

Ответ: φ = 9°.

Задача 13

Между двумя вертикальными электродами находится ртуть. Расстояние между электродами l во много раз больше их линейных размеров. К электродам приложено напряжение U, плотность ртути $\rho_п$, ее удельное сопротивление $\rho_с$. При помещении этой установки в вертикальное однородное магнитное поле поверхность ртути ab располагается под углом α к горизонту (рис. 9-26). Чему равна индукция B этого магнитного поля?

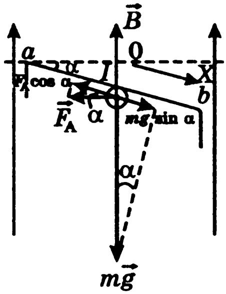


Рис. 9-26

Дано:
U
l
$\rho_п$
$\rho_с$
α
B – ?

Решение. Выделим мысленно у поверхности ртути ab малый элемент массой m, по которому ток силой I идет от чертежа к нам. Этот элемент будет в равновесии, когда проекции силы тяжести $mg\sin\alpha$ и силы Ампера $F_A\cos\alpha$ на ось OX будут по модулю равны друг другу: $mg\sin\alpha = F_A\cos\alpha$ (1), где согласно закону Ампера $F_A = BIl\sin\alpha_1$. Здесь $\alpha_1 = 90°$ – угол между направлением тока в выбранном элементе и направлением вектора индукции $\vec{B}$. Поэтому $F_A = BIl$. (2)

Подставим (2) в (1): $mg\sin\alpha = BIl\cos\alpha$, откуда

$$B = \frac{mg}{Il}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mg}{Il}\operatorname{tg}\alpha. \quad (3)$$

Массу элемента ртути m выразим через ее плотность $\rho_п$, а силу тока I определим по закону Ома для участка цепи. Поскольку $m = \rho_п V$, где объем элемента $V = lS$, то

$$m = \rho_п lS. \quad (4)$$

Здесь S – площадь поперечного сечения элемента ртути (нам ее не определить, но она должна в дальнейшем сократиться). По закону Ома $I = \frac{U}{R}$, где сопротивление элемента ртути $R = \rho_с\frac{l}{S}$, поэтому $I = \frac{US}{\rho_с l}$. (5)

Подставим (4) и (5) в (3):

$$B = \frac{\rho_п lSg\rho_с l}{USl}\operatorname{tg}\alpha, \qquad \boxed{B = \frac{\rho_п\rho_с gl}{U}\operatorname{tg}\alpha}$$

Задача решена.

Ответ: $B = \frac{\rho_п\rho_с gl}{U}\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 14

Стержень массой m = = 10 г и длиной l = 50 см лежит на горизонтальных рельсах в горизонтальном однородном магнитном поле индукцией B = 200 мТл. При пропускании по стержню тока I = 4 А в направлении от чертежа к наблюдателю (рис. 9-27) для того, чтобы сдвинуть стержень вправо, требуется приложить к нему силу F_1 = 0,4 Н. Какую силу F_2 требуется приложить к стержню, чтобы сдвинуть его из состояния покоя, если направление тока изменится на противоположное?

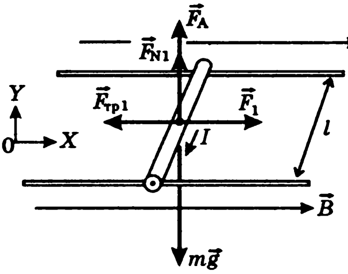


Рис. 9-27

Дано: m = 10 г l = 50 см B = 200 мТл I = 4 А F_1 = 0,4 Н $g = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}$ ——— F_2 – ?	*Решение.* На стержень, когда к нему приложат силу $\vec{F}_1$, будут действовать пять сил: сила тяжести $m\vec{g}$, сила Ампера $\vec{F}_A$, сила реакции рельсов $\vec{F}_{N1}$, сила $\vec{F}_1$ и сила трения покоя (максимальная при сдвиге стержня) $\vec{F}_{тр1}$. По первому закону Ньютона $\vec{F}_1 + m\vec{g} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_A + \vec{F}_{тр1} = 0$.

В проекциях на ось OX $F_1 = F_{тр1}$, где

$F_{тр1} = k\ F_{N1}$, поэтому $F_1 = k\ F_{N1}$. (1)

Здесь k – коэффициент трения стержня о рельсы.

Силу тяжести $m\vec{g}$ уравновешивает сила Ампера $\vec{F}_A$ и сила реакции опоры $\vec{F}_{N1}$, поэтому в проекциях на ось OY $mg = F_A + F_{N1}$, откуда $F_{N1} = mg - F_A$. (2)

Подставим (2) в (1): $F_1 = k\ (mg - F_A)$. (3)

Если направление тока изменить на противоположное, то и сила Ампера изменит свое направление тока на противоположное, т. е. теперь будет направлена вниз (убедитесь в этом, применив правило левой руки). Из-за этого сила реакции рельсов F_{N2} увеличится и станет равна по модулю сумме mg и F_A: $F_{N2} = mg + F_A$, поэтому и сила трения $F_{тр2} = k\ F_{N2}$ теперь будет равна $k\ (mg + F_A)$, следовательно, сила $F_2 = F_{тр2}$ будет равна $k\ (mg + F_A)$. (4)

Разделим (3) на (4): $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{k(mg - F_A)}{k(mg + F_A)} = \dfrac{mg - F_A}{mg + F_A}$, откуда

$$F_2 = F_1 \frac{mg + F_A}{mg - F_A}. \qquad (5)$$

Нам осталось воспользоваться законом Ампера:

$$F_A = BIl \sin \alpha = BIl, \qquad (6)$$

ведь $\alpha = 90°$ и $\sin \alpha = 1$.

Подставив (6) в (5), мы решим задачу:

$$\boxed{F_2 = F_1 \frac{mg + BIl}{mg - BIl}}$$

Переведем все единицы в СИ: 10 г = 0,01 кг, 50 см = 0,05 м, 200 мТл = 0,2 Тл.

Произведем вычисления:

$$F_2 = 0{,}4 \frac{0{,}1 \cdot 9{,}8 + 0{,}2 \cdot 4 \cdot 0{,}5}{0{,}1 \cdot 9{,}8 - 0{,}2 \cdot 4 \cdot 0{,}5} \text{ Н} = 0{,}95 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_2 = 0{,}95$ Н.

Задача 15

Горизонтальный стержень массой m = 20 г и длиной l = 50 см покоится на двух одинаковых вертикальных пружинах в горизонтальном однородном магнитном поле индукцией B = 0,1 Тл, перпендикулярном стержню (рис. 9-28). По стержню пропускают в течение короткого промежутка времени t = 10 мс ток силой I = 0,1 кА, из-за чего стержень смещается вверх. Определить максимальную деформацию сжатия x пружин при этом. Жесткость каждой пружины k = 10 Н/м.

Дано:
m = 20 г
l = 50 см
B = 0,1 Тл
t = 10 мс
I = 0,1 кА
$k = 10 \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$
$v_0 = 0$

x — ?

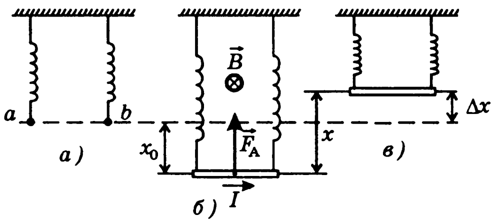


Рис. 9-28

Решение. Обратимся к рис. 9-28, *а*. Свободные концы пружин до того, как к ним прикрепили стержень, находились на уровне *ab*. Когда стержень подвесили, каждая пружина растянулась и при этом ее деформация стала равна x_0 (рис. 9-28, *б*). Когда по стержню пропустили ток вправо, то при направлении вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ за чертеж на стержень в течение времени t стала действовать сила Ампера $\vec{F}_A$, направленная вверх. Импульс этой силы $F_A t$ согласно основному уравнению динамики равен изменению импульса стержня $p - p_0$, где $p = mv$ – импульс стержня, приобретенный им в результате действия силы Ампера, а $p_0 = mv_0 = 0$ – начальный импульс стержня, равный нулю, так как вначале стержень покоился. Поэтому

$$F_A t = mv, \text{ где } F_A = BIl \sin\alpha = BIl,$$

так как $\alpha = 90°$ – угол между направлением тока в стержне и вектором $\vec{B}$, поэтому $\sin\alpha = 1$.

Следовательно, $BIlt = mv$, откуда $v = \dfrac{BIlt}{m}$ – скорость стержня сразу после пропускания по нему тока.

Полученная стержнем кинетическая энергия

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(BIlt)^2}{2m^2} = \frac{(BIlt)^2}{2m} \tag{1}$$

превращается в потенциальную энергию сжатой пружины. Вначале, когда еще ток не пропускали, пружины обладали потенциальной энергией $W_{п0} = 2\dfrac{kx_0^2}{2} = kx_0^2$.

Когда стержень поднялся на высоту x_m от нижнего положения, он приобрел потенциальную энергию $W_п = mgx$ и, кроме того, его потенциальная энергия увеличилась за счет сжатия двух пружин на величину

$$\Delta W_п = 2\frac{k\,\Delta x^2}{2} = k\,\Delta x^2.$$

По закону сохранения механической энергии кинетическая энергия стержня равна разности потенциальных энергий в верхнем и нижнем положениях стержня:

$$W_к = W_п + \Delta W_п - W_{п0} \text{ или } \frac{mv^2}{2} = mgx + k\Delta x^2 - kx_0^2.$$

С учетом (1) $$\frac{(BIlt)^2}{2m} = mgx + k\Delta x^2 - kx_0^2. \tag{2}$$

До пропускания тока сила тяжести стержня mg была уравновешена силами упругости двух пружин, равными по модулю $2kx_0$: $$mg = 2kx_0. \tag{3}$$

Из рис. 9-28 следует, что $x = x_0 + \Delta x$, откуда

$$\Delta x = x - x_0. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (2): $\dfrac{(BIlt)^2}{2m} = mgx + k(x - x_0)^2 - kx_0^2$

или с учетом (3)

$$\frac{(BIlt)^2}{2m} = 2kx_0x + kx^2 - 2kx_0x + kx_0^2 - kx_0^2,$$

$$\frac{(BIlt)^2}{2m} = kx^2, \text{ откуда } \boxed{x = \frac{BIlt}{\sqrt{2km}}}$$

Переведем все единицы в СИ: 20 г = 0,02 кг, 50 см = 0,5 м, 10 мс = 0,01 с, 0,1 кА = 100 А.

Произведем вычисления:

$$x = \frac{0{,}1 \cdot 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01}{\sqrt{2 \cdot 10 \cdot 0{,}02}} \text{ м} = 0{,}25 \text{ м}.$$

Ответ: $x = 0{,}25$ м.

Задача 16

По длинной катушке, изготовленной из проводника диаметром $d = 0{,}2$ мм, течет ток силой $I_1 = 10$ А. В магнитное поле этой катушки помещают квадратную рамку со стороной $a = 2$ см, плоскость которой параллельна магнитным линиям. По рамке пропускают ток силой $I_2 = 4$ А. Найти вращающий момент сил M, действующий на рамку в магнитном поле катушки.

Дано:
$d = 0{,}2$ мм
$I_1 = 10$ А
$a = 2$ см
$I_2 = 4$ А
$\mu = 1$
$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7} \ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$

M – ?

Решение. Момент сил, вращающий рамку с током I_2 в магнитном поле катушки $M = BI_2S \sin \alpha$, где $B = \mu\mu_0 nI_1$ – индукция магнитного поля катушки, $S = a^2$ – площадь рамки и $\alpha = 90°$ – угол между направлением вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля катушки и нормалью $\vec{n}$ к рамке. С учетом этого

$$\sin \alpha = 1 \text{ и } M = \mu\mu_0 nI_1I_2a^2. \qquad (1)$$

Число витков на единице длины катушки n можно определить отношением числа витков N на некоторой длине l катушки к этой длине: $n = \dfrac{N}{l}$, (2)

а число витков N на длине l в свою очередь можно найти, разделив эту длину l на диаметр проводника катушки d:

$$N = \frac{l}{d}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2): $$n = \frac{l}{dl} = \frac{1}{d}. \qquad (4)$$

Таким образом, число витков на единице длины n – это величина, обратная диаметру проводника d. Подставив (4) в (1), мы решим задачу: $\boxed{M = \mu_0\mu I_1 I_2 \frac{a^2}{d}}$

Переведем все единицы в СИ: 0,2 мм = $2 \cdot 10^{-4}$ м, 2 см = 0,02 м.

Произведем вычисления:

$M = 12,6 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 4$ Н · м = 0,01 Н · м.

Ответ: M = 0,01 Н · м.

Задача 17

Протон в магнитном поле индукцией B = 20 мТл описывает окружность радиусом R = 40 см (см. рис. 9-16). Найти импульс протона p и его кинетическую энергию. Заряд протона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано:
B = 20 мТл
R = 40 см
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг

p – ?
$W_к$ – ?

Решение. Импульс протона p равен произведению его массы m и линейной скорости v: $p = mv$. (1)

Так как масса протона нам известна, задача сводится к определению его линейной скорости v. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона, согласно которому сила Лоренца $F_л$, действующая на протон, движущийся в магнитном поле по окружности, равна произведению массы протона m на его центростремительное ускорение $a_ц$: $$F_л = ma_ц, \qquad (2)$$
где $$F_л = Bev \sin \alpha.$$

Здесь $\alpha = 90°$ – угол между вектором скорости протона $\vec{v}$ и вектором индукции магнитного поля $\vec{B}$.

Поэтому $\sin \alpha = 1$ и $F_л = Bev$. (3)

Из кинематики известна формула центростремительного ускорения $$a_ц = \frac{v^2}{R}. \qquad (4)$$

Подставим (3) и (4) в (2) и определим линейную скорость протона v: $Bev = m\frac{v^2}{R}$, $Be = m\frac{v}{R}$, откуда

$$v = \frac{BeR}{m}. \qquad (5)$$

Нам осталось подставить (5) в (1):

$$p = m\frac{BeR}{m}, \ \boxed{p = BeR}$$

Кинетическая энергия протона $W_к = \frac{mv^2}{2}$ или с учетом (5) $\boxed{W_к = \frac{(BeR)^2}{2m}}$

Переведем все единицы в СИ: 20 мТл = 0,02 Тл, 40 см = 0,4 м.

Проверим единицу импульса:

$$[p]_{СИ} = Тл \cdot Кл \cdot м = \frac{Н}{А \cdot м} \cdot А \cdot с \cdot м = Н \cdot с = кг\frac{м}{с^2}с =$$

$$= кг\frac{м}{с}.$$

Напомним, что $Тл = \frac{Н}{А \cdot м}$, $Кл = А \cdot с$ и $Н = кг\frac{м}{с^2}$.

Произведем вычисления:

$$p = 0{,}02 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}4\ кг\frac{м}{с} = 1{,}3 \cdot 10^{-21}\ кг\frac{м}{с}.$$

$$W_к = \frac{(0{,}02 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}4)^2}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} Дж = 5 \cdot 10^{-16} Дж.$$

Ответ: $p = 1{,}3 \cdot 10^{-21}$ кг · м/с, $W_к = 5 \cdot 10^{-16}$ Дж.

Задача 18

Электрон движется в однородном магнитном поле индукцией $B = 5$ мТл по окружности. Найти период T его обращения. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль его заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл (рис. 9-29).

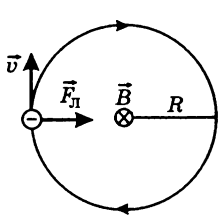


Рис. 9-29

Дано:
$B = 5$ мТл
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

T – ?

Решение. Для решения этой задачи опять воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$F_л = ma_ц,$$

где $a_ц = \dfrac{v^2}{R}$, поэтому $F_л = m_e \dfrac{v^2}{R}$. (1)

По формуле силы Лоренца $F_л = Bev \sin\alpha$, где $\alpha = 90°$ и $\sin\alpha = 1$, поэтому $F_л = Bev$. (2)

Приравняем (1) и (2): $m_e \dfrac{v^2}{R} = Bev$, $m_e \dfrac{v}{R} = Be$. (3)

Теперь выразим линейную скорость электрона v через его угловую скорость ω, а ее в свою очередь – через период T: $v = \omega R$, где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, поэтому $v = \dfrac{2\pi R}{T}$. (4)

Нам осталось подставить (4) в (3) и из полученного выражения определить T. Проделаем эти действия:

$$m_e \frac{2\pi R}{RT} = Be, \quad \frac{2\pi m_e}{T} = Be, \text{ откуда } \boxed{T = \frac{2\pi m_e}{Be}}$$

Переведем единицу индукции в СИ:
5 мТл = $5 \cdot 10^{-3}$ Тл.
Не забудьте проверить единицу полученной величины.
Произведем вычисления:

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ с} = 7 \cdot 10^{-9} \text{ с} = 7 \text{ нс}.$$

Ответ: $T = 7 \cdot 10^{-9}$ с = 7 нс.

Задача 19

Протон и альфа-частица влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно его магнитным линиям (см. рис. 9-16). Во сколько раз различаются радиусы окружностей, по которым движутся эти частицы, если у них одинаковы: а) скорость; б) кинетическая энергия? Заряд альфа-частицы q_1 в два раза больше заряда протона q_2, а масса альфа-частицы m_1 в четыре раза больше массы протона m_2.

Дано:
$q_1 = 2q_2$
$m_1 = 4m_2$

$\dfrac{R_2}{R_1} = ?$

Обозначим R_1 радиус окружности, описываемой альфа-частицей, R_2 – радиус окружности, описываемой протоном.

Решение. а) Линейные скорости частиц одинаковы, т. е. $v_1 = v_2 = v$.

По второму закону Ньютона $F_{л1} = m_1 a_{ц1}$, где $F_{л1} = Bq_1 v$ и $a_{ц1} = \dfrac{v^2}{R_1}$, поэтому $Bq_1 v = m_1 \dfrac{v^2}{R_1}$,

$$Bq_1 = m_1 \frac{v}{R_1}. \quad (1)$$

Здесь $F_{л1}$ – сила Лоренца, действующая на альфа-частицу, $a_{ц1}$ – ее центростремительное ускорение.

Аналогично применительно к протону

$$Bq_2 = m_2 \frac{v}{R_2}. \qquad (2)$$

Разделим (1) на (2):

$$\frac{Bq_1}{Bq_2} = \frac{m_1 v R_2}{R_1 m_2 v}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 R_2}{m_2 R_1}, \text{ откуда } \boxed{\frac{R_2}{R_1} = \frac{q_1 m_2}{q_2 m_1}}$$

Произведем вычисления:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2q_2 \cdot m_2}{q_2 \cdot 4m_2} = \frac{1}{2} \text{ или } \frac{R_1}{R_2} = 2.$$

Следовательно, при одинаковых линейных скоростях радиус окружности, описываемой альфа-частицей, вдвое больше радиуса окружности, по которой движется протон.

б) Кинетические энергии частиц одинаковы, т. е. $W_{к1} = W_{к2} = W_к$.

По формуле кинетической энергии

$$W_к = \frac{m_1 v_1^2}{2} \quad (3) \quad \text{и} \quad W_к = \frac{m_2 v_2^2}{2}, \qquad (4)$$

где v_1 – линейная скорость альфа-частицы, v_2 – линейная скорость протона (теперь они разные, ведь, если кинетические энергии частиц одинаковы, а их массы различны, то и скорости частиц тоже должны быть разными).

Приравняем (3) и (4):

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad \frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2, \text{ откуда } \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \qquad (5)$$

Теперь запишем выражения (1) и (2) с учетом, что скорости частиц разные:

$$Bq_1 = m_1 \frac{v_1}{R_1} \quad (6) \quad \text{и} \quad Bq_2 = m_2 \frac{v_2}{R_2}. \qquad (7)$$

Разделим (6) на (7) и из полученного выражения определим искомое отношение R_2/R_1:

$$\frac{Bq_1}{Bq_2} = \frac{m_1 v_1 R_2}{R_1 m_2 v_2}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 v_1 R_2}{m_2 v_2 R_1}, \text{ откуда } \frac{R_2}{R_1} = \frac{q_1 m_2 v_2}{q_2 m_1 v_1}$$

или с учетом (5)

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{q_1 m_2}{q_2 m_1}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{q_1}{q_2}\sqrt{\frac{m_2^2 m_1}{m_1^2 m_2}}, \quad \boxed{\frac{R_2}{R_1} = \frac{q_1}{q_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}}$$

Произведем вычисления: $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{2q_2}{q_2}\sqrt{\dfrac{m_2}{4m_2}} = 1.$

Значит, когда кинетические энергии этих частиц одинаковы, они движутся в магнитном поле по окружностям одинакового радиуса.

Ответ: а) $R_2/R_1 = 1/2$; б) $R_1 = R_2$.

Задача 20

Заряженная частица была разогнана из состояния покоя электрическим полем с ускоряющим напряжением U до некоторой скорости, после чего влетела в однородное магнитное поле индукцией B перпендикулярно его магнитным линиям и стала двигаться по окружности радиусом R (см. рис. 9-16). Найти удельный заряд частицы q/m.

Дано:
$v_0 = 0$
U
B
$\alpha = 90°$
R

$\dfrac{q}{m}$ – ?

Обозначим v_0 начальную скорость частицы в электрическом поле, α – угол между вектором скорости $\vec{v}$ частицы и вектором индукции магнитного поля $\vec{B}$, q – заряд частицы, m – ее массу.

Решение. Работа электрического поля A, разогнавшего частицу из состояния покоя, равна изменению ее кинетической энергии $W_к - W_{к0}$. Но поскольку начальная скорость частицы $v_0 = 0$, то и ее начальная кинетическая энергия в этом поле $W_{к0} = 0$, поэтому $A = W_к$, где $A = qU$ и

$$W_к = \frac{mv^2}{2}.$$

Следовательно, $qU = \dfrac{mv^2}{2}$, откуда $v = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$. (1)

Поскольку вектор скорости частицы $\vec{v}$ был перпендикулярен вектору индукции магнитного поля $\vec{B}$, частица, влетев в это поле, стала двигаться по окружности радиусом R под действием силы Лоренца

$$F_л = Bqv \sin\alpha = Bqv, \text{ так как } \sin\alpha = 1.$$

По второму закону Ньютона $F_л = ma_ц$, где $a_ц = \dfrac{v^2}{R}$,

поэтому $Bqv = m\dfrac{v^2}{R}$, $Bq = \dfrac{mv}{R}$. (2)

Подставим (1) в (2):

$$Bq = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{2qU}{m}}. \qquad (3)$$

Теперь возведем левую и правую части равенства (3) в квадрат и, выполнив сокращения, определим удельный заряд частицы q/m:

$$B^2q^2 = \frac{m^2}{R^2}\cdot\frac{2qU}{m},\ B^2q = \frac{2mU}{R^2}, \text{ откуда } \boxed{\frac{q}{m} = \frac{2U}{(BR)^2}}$$

Задача решена.

Ответ: $\frac{q}{m} = \frac{2U}{(BR)^2}$.

Задача 21

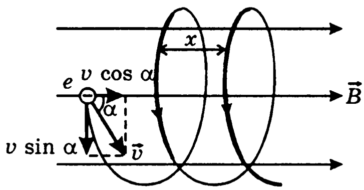


Рис. 9-30

Электрон, ускоренный разностью потенциалов U = = 250 В, влетает в однородное магнитное поле индукцией B = 0,51 Тл под углом $\alpha = 60°$. Найти шаг винтовой линии x, по которой будет двигаться электрон (рис. 9-30). Масса электрона m_e = = $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, модуль его заряда $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. Начальная скорость электрона v_0 в электрическом поле равна нулю.

Дано:
$v_0 = 0$
U = 250 В
B = 0,51 Тл
$\alpha = 60°$
$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл
x – ?

Решение. Чтобы решить эту задачу, нам надо знать скорость электрона v, которую ему сообщило электрическое поле перед тем, как он влетел в магнитное. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому работа электрического поля A пошла на сообщение электрону кинетической энергии $W_к$. Из электростатики мы знаем, что работа перемещения заряженной частицы между точками с разностью потенциалов U определяется выражением $A = qU$ или для электрона $A = eU$.

Это выражение мы можем приравнять кинетической энергии электрона и оттуда найти его скорость v:

$$A = W_к - W_{к0}, \text{ где } W_{к0} = 0, \text{ поэтому}$$

$$A = W_к, \text{ или } eU = \frac{m_e v^2}{2}.$$

Отсюда $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$. (1)

С этой скоростью электрон влетает в магнитное поле под углом α к его магнитным линиям. При этом он сразу начинает участвовать одновременно в двух движениях: он будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $v \cos \alpha$ вдоль магнитной линии и вместе с тем двигаться по окружности, охватывающей магнитные линии, со скоростью $v \sin \alpha$. В результате его траекторией будет винтовая линия с шагом x. Шагом винтовой линии x называется расстояние, которое электрон пролетит вдоль силовой линии магнитного поля за один период T его вращения, двигаясь равномерно и прямолинейно со скоростью $v \cos \alpha$. Из кинематики мы знаем, что при таком движении $x = vT \cos \alpha$. (2)

Таким образом, задача теперь сводится к нахождению периода электрона T, т. е. времени, за которое он сделает один полный оборот вокруг магнитных линий, двигаясь по окружности радиусом R с линейной скоростью $v \sin \alpha$.

Чтобы найти этот период T, опять воспользуемся вторым законом Ньютона, подобно тому, как мы это сделали в предыдущих задачах. По второму закону Ньютона сила Лоренца $F_л$, действующая на электрон в магнитном поле (она будет направлена от нас за чертеж, в чем нетрудно убедиться, применив правило левой руки), равна произведению массы электрона m_e и его центростремительного ускорения $a_ц$: $F_л = m_e a_ц$.

Здесь $a_ц = \dfrac{(v \sin \alpha)^2}{R}$, поскольку касательной к окружности, по которой движется электрон, является проекция скорости электрона на ось ОУ $v \sin \alpha$.

Поскольку $F_л = Bev \sin \alpha$, то $Bev \sin \alpha = m_e \dfrac{v^2 \sin^2 \alpha}{R}$

или $$Be = m_e \frac{v}{R} \sin \alpha. \quad (3)$$

Радиус окружности R мы можем связать с нужным нам периодом T, известным тоже из кинематики соотношением $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, где угловая скорость электрона ω связана с его линейной скоростью $v \sin \alpha$ формулой $v \sin \alpha = \omega R$ или $\omega = \dfrac{v}{R} \sin \alpha$.

Тогда $\frac{2\pi}{T} = \frac{v \sin\alpha}{R}$, $T = \frac{2\pi R}{v \sin\alpha}$. (4)

Из (3) выразим радиус R и подставим в (4):

$$R = \frac{m_e v}{Be} \sin\alpha, \quad T = \frac{2\pi m_e v \sin\alpha}{vBe \sin\alpha} = \frac{2\pi m_e}{Be}. \quad (5)$$

Теперь (5) подставим в (2): $x = \frac{2\pi m_e v}{Be} \cos\alpha$. (6)

Нам осталось подставить (1) в (6), и задача будет решена в общем виде:

$$x = \frac{2\pi m_e}{Be} \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} \cos\alpha = \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{m_e^2 \cdot 2eU}{m_e e^2}} \cos\alpha,$$

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{2m_e U}{e}} \cos\alpha}$$

Не забудьте проверить единицу полученной величины! Подставим числа и произведем вычисления:

$$x = \frac{2 \cdot 3{,}14}{0{,}51} \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 250}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}} \cos 60^\circ \text{ м} = 3{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Ответ: $x = 3{,}3 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 22

Перпендикулярно магнитному полю индукцией $B = 0{,}1$ Тл возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 1 \cdot 10^3$ В/см. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица (см. рис. 9-18). Найти скорость v этой частицы.

Дано:
$B = 0{,}1$ Тл
$E = 1 \cdot 10^3 \ \frac{\text{В}}{\text{см}}$
$\alpha = 90^\circ$

v – ?

Решение. Судя по условию задачи, частица движется с постоянной скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно (иначе бы об изменении скорости частицы хоть что-нибудь было бы сказано). Следовательно, согласно первому закону Ньютона силы, действующие на нее, уравновешены, т. е. их равнодействующая равна нулю.

Со стороны магнитного поля, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен вектору напряженности электрического поля E, на движущуюся частицу действует сила Лоренца $\vec{F}_л$. Поскольку эти силы согласно первому закону Ньютона должны быть уравновешены, значит, сила

Лоренца антинаправлена электрической силе и по модулю равна ей: $F_л = F_{эл}$.

Силу Лоренца определим по формуле $F_л = Bq\,v \sin \alpha$, а электрическую силу выразим через напряженность электрического поля E: $F_{эл} = qE$.

С учетом этих равенств $Bq\,v \sin \alpha = qE$, $Bv \sin \alpha = E$.

Здесь $\alpha = 90°$, поэтому $\sin \alpha = 1$ и поэтому $Bv = E$.

Отсюда $\boxed{v = \dfrac{E}{B}}$

Задача в общем виде решена. Переведем единицы напряженности в СИ: $1 \cdot 10^3 \dfrac{В}{см} = 1 \cdot 10^5 \dfrac{В}{м}$.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$v = \frac{1 \cdot 10^5}{0{,}1} \frac{м}{с} = 1 \cdot 10^6 \frac{м}{с}.$$

Ответ: $v = 1 \cdot 10^6$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. На расстоянии $r = 40$ см индукция магнитного поля прямого тока $B = 0{,}2$ мкТл. Определить площадь поперечного сечения проводника S, если плотность тока в нем $j = 0{,}5$ А/мм². Среда – воздух.

Ответ: $S = \dfrac{2\pi rB}{\mu_0 \mu j} = 8 \cdot 10^{-7}$ м².

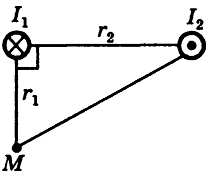


Рис. 9-31

Задача 2. По двум прямым параллельным проводникам текут токи силой $I_1 = 2$ А и $I_2 = 4$ А в противоположных направлениях. Определить индукцию магнитного поля B в точке M (рис. 9-31). Расстояния $r_1 = 5$ см и $r_2 = 8$ см. Среда – воздух.

Ответ:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \frac{I_2(I_2 - 2I_1)}{r_1^2 + r_2^2}} = 8 \cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

Задача 3. На рис. 9-32 изображено сечение двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами $I_1 = 5$ А и $I_2 = 8$ А, расположенных в воздухе на расстоянии $r = 1$ м друг от друга. Во

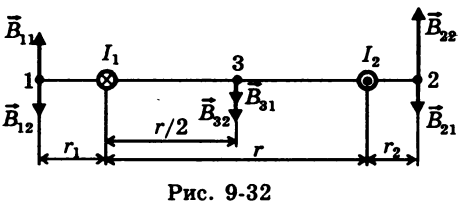


Рис. 9-32

сколько раз индукция магнитного поля этих токов B_1 в точке 1 на расстоянии r_1 = 20 см от проводника с током I_1 меньше индукции магнитного поля этих токов B_2 в точке 2, расположенной на расстоянии r_2 = 10 см от проводника с током I_2? Чему равна индукция B_3 магнитного поля этих токов в точке 3, расположенной посередине между ними?

Ответ: $$\frac{B_2}{B_1} = \frac{r_1\left(I_2(r + r_2) - I_1 r_2\right)(r_1 + r)}{r_2(r + r_2)\left(I_1(r_1 + r) - I_2 r_1\right)} = 4{,}6;$$

$$B_3 = \frac{\mu_0\mu}{\pi r}\left(I_1 + I_2\right) = 5{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{Тл}.$$

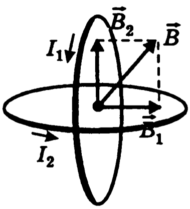


Рис. 9-33

Задача 4. Два кольцевых проводника с токами I_1 = 1 А и I_2 = 2 А расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 9-33). Радиусы колец R_1 = 4 см и R_2 = 4 см. Определить индукцию B результирующего магнитного поля в центре этих колец. Среда – воздух.

Ответ: $$B = 0{,}5\mu_0\mu\sqrt{\left(\frac{I_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{R_2}\right)^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

Задача 5. По круговому проводнику длиной l = 24 см течет ток. Плотность тока в проводнике j = 0,2 А/мм². индукция магнитного поля в центре круга B = 10 мкТл. Найти диаметр проводника d.

Ответ: $$d = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{lB}{\mu_0\mu j}} = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

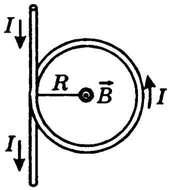


Рис. 9-34

Задача 6. Бесконечно длинный провод образует круговую петлю касательно к проводу. По проводу идет ток силой I = 5 А. Найти радиус петли R (рис. 9-34). Индукция магнитного поля в центре круга $B = 5{,}2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Среда – воздух.

Ответ: $$R = \frac{\mu_0\mu I}{2B}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right) = 0{,}08\ \text{м}.$$

Задача 7. Какую разность потенциалов U нужно приложить к концам медного проводника диаметром $d_{пр}$ = 0,5 мм, чтобы изготовить соленоид длиной $l_{сол}$ = 20 см и диаметром $D_{сол}$ = 5 см с магнитным полем внутри этого соленоида индукцией B = 0,05 мкТл? Поле соленоида считать однородным, среда – воздух. Найти число ампер-витков NI, которое будет иметь этот соленоид. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $$U = \frac{4\rho l_{сол} B D_{сол}}{\mu_0\mu d_{пр}^2} = 0{,}001\ В,$$

$$NI = \frac{B l_{сол}}{\mu_0\mu} = 7{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{А} \cdot \text{вит}.$$

Задача 8. На каждый $l = 1$ м длины воздушных проводов троллейбусной линии, расположенных на расстоянии $r = 0,5$ м друг от друга, действует сила $F = 1,5$ Н. Найти силу тока I в проводах.

Ответ: $I = \sqrt{\dfrac{2\pi rF}{\mu_0 \mu l}} = 2 \cdot 10^3$ А.

Задача 9. На квадратную рамку со стороной $a = 5$ см, плоскость которой параллельна магнитным линиям однородного магнитного поля индукцией $B = 0,02$ Тл, действует максимальный вращающий момент сил $M_m = 0,02$ Н · м. Найти напряжение U на концах медного проводника, из которого изготовлена рамка. Площадь поперечного сечения этого проводника $S_{сеч} = 0,05$ мм², удельное сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $U = \dfrac{4\rho M_m}{BaS_{сеч}} = 2,7$ В.

Задача 10. Внутри бесконечно длинного соленоида с током $I_1 = 4$ А расположен круговой контур радиусом $R = 0,5$ см с током $I_2 = 1$ А так, что его плоскость параллельна магнитным линиям соленоида. На длине соленоида $l = 10$ см имеется $N = 40$ витков. Определить момент сил M, вращающих круговой контур.

Ответ: $M = \mu_0 \mu \pi R^2 I_1 I_2 \dfrac{N}{l} = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Н · м.

Задача 11. Прямой проводник длиной $l = 0,2$ м и массой $m = 5$ г подвешен горизонтально на двух невесомых нитях в однородном магнитном поле (рис. 9-35) перпендикулярно линиям вектора $\vec{B}$. Индукция магнитного поля $B = 49$ мТл. Какой минимальной силы ток (I – ?) надо пропустить по проводнику, чтобы одна из нитей разорвалась, если нить разрывается при воздействии на нее силой $F = 39,2$ мН?

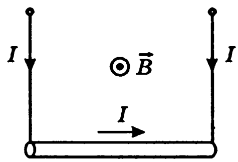


Рис. 9-35

Ответ: $I = \dfrac{2F - mg}{Bl} = 3$ А.

Задача 12. По горизонтальному проводнику длиной $l = 20$ см и массой $m = 2$ г течет ток силой $I = 5$ А. Определить индукцию магнитного поля B, в которое нужно поместить проводник, чтобы он висел не падая.

Ответ: $B = \dfrac{mg}{Il} = 0,02$ Тл.

Задача 13. На проволочный виток радиусом $R = 4$ см, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный вращающий момент сил $M_m = 6,5 \cdot 10^{-7}$ Н · м. При этом за каждые $t = 2$ с через поперечное сечение проводника витка проходит $N = 10^{19}$ электронов. Определить индукцию магнитного поля B, в которое помещен виток. Модуль заряда электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $B = \dfrac{M_m t}{\pi e R^2 N} = 1,6 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Задача 14. Рамка гальванометра длиной $a = 4$ см и шириной $b = 1{,}5$ см, содержащая $N = 200$ витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость рамки параллельна линиям вектора $\bar{B}$. Найти вращающий момент сил M, действующий на рамку, когда по ней течет ток плотностью $j = 1$ мА/мм². Площадь поперечного сечения проводника рамки $S_{сеч} = 1$ мм².

Ответ: $M = NBjS_{сеч}ab = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ Н · м.

Задача 15. Стержень длиной $l = 50$ см лежит перпендикулярно рельсам, расстояние между которыми равно его длине. Рельсы составляют с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Какой должна быть индукция B магнитного поля, перпендикулярного плоскости рельсов, чтобы стержень двигался по рельсам равномерно и прямолинейно: вверх; вниз, когда по ним пропустят ток силой $I = 40$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $k = 0{,}6$. Масса стержня $m = 1$ кг.

Ответ: вниз: $B_1 = \dfrac{mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)}{Il} = 9{,}6 \cdot 10^{-3}$Тл;

вверх: $B_2 = \dfrac{mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)}{Il} = 0{,}5$ Тл.

Задача 16. В однородном магнитном поле индукцией $B = 0{,}01$ Тл находится прямой проводник длиной $l = 8$ см, расположенный перпендикулярно линиям вектора $\bar{B}$. По проводнику течет ток $I = 2$ А. Под действием силы Ампера проводник переместился на расстояние $x = 5$ см. Найти работу A, совершенную при этом.

Ответ: $A = BIlx = 8 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 17. В однородном магнитном поле индукцией $B = 1{,}3 \cdot 10^{-8}$ Тл подвешен на двух проводящих нитях медный проводник длиной $l = 4$ см и диаметром $d = 1$ мм, на концах которого поддерживается разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 = U = 10$ В. Поле направлено от наблюдателя за чертеж. Чему равна сила натяжения $F_н$ каждой нити? Среда – воздух. Удельное сопротивление меди $\rho_c = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, ее плотность $\rho_п = 8900$ кг/м³.

Ответ: $F_н = \dfrac{\pi d^2}{8}\left(\rho_п g l - B\dfrac{U}{\rho_c}\right) = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ Н.

Задача 18. В однородном магнитном поле индукцией $B = 25$ мТл подвешен на двух проводящих нитях проводник длиной $l = 4$ см, расположенной перпендикулярно линиям вектора $\bar{B}$, а сами линии вектора $\bar{B}$ направлены вниз. При пропускании по проводнику тока, плотность которого $j = 10$ А/мм², он отклонился от положения равновесия на угол $\varphi = 30°$. Определить диаметр поперечного сечения проводника d, если масса проводника $m = 1$ г. Среда – воздух. Как направлен ток в проводнике?

Ответ: $d = 2\sqrt{\dfrac{mg\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\pi jBl}} = 8 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 19. На двух пружинах жесткостью k каждая подвешен проводник массой m и длиной l в однородном магнитном поле индукцией B. Найти максимальную деформацию каждой пружины x относительно их недеформированного состояния при пропускании по проводнику тока силой I в направлении, указанном на рис. 9-36.

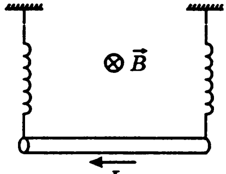


Рис. 9-36

Ответ: $x = \dfrac{2mg + BIl}{2k}$.

Задача 20. Электрон в однородном магнитном поле индукцией $B = 2$ мТл описывает окружность радиусом $R = 2$ см. Найти скорость электрона v.

Ответ: $v = \dfrac{BeR}{m_e} = 7 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 21. Найти кинетическую энергию электрона $W_к$, движущегося по дуге окружности радиусом $R = 60$ см в однородном магнитном поле индукцией $B = 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ Тл. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $W_к = \dfrac{(BeR)^2}{2m_e} = 7{,}3 \cdot 10^{-9}$ Дж.

Задача 22. В масс-спектрографе заряженная частица, пролетев без начальной скорости ускоряющую разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, влетает в однородное магнитное поле индукцией B перпендикулярно магнитным линиям. Удельный заряд частицы q/m. Определить диаметр окружности D, по которой стала двигаться частица.

Ответ: $D = \dfrac{2}{B}\sqrt{\dfrac{2(\varphi_1 - \varphi_2)}{\frac{q}{m}}}$.

Задача 23. Однозарядные ионы гелия и водорода, ускоренные без начальной скорости в электрическом поле напряжением $U = 2$ кВ, влетают вместе в магнитное поле индукцией $B = 100$ мТл перпендикулярно магнитным линиям. Описав полуокружность, они падают на фотопластинку (рис. 9-37). Найти расстояние S между следами этих ионов на фотопластинке. Масса иона гелия $m_1 = 6{,}68 \cdot 10^{-27}$ кг, масса иона водорода $m_2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

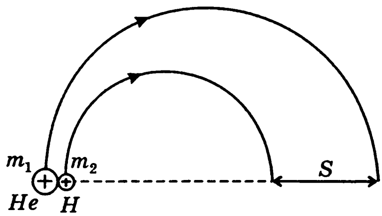


Рис. 9-37

Ответ: $S = \dfrac{2\sqrt{2U}\left(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}\right)}{B\sqrt{e}}$.

Задача 24. Заряженная частица массой m влетает со скоростью v в однородное магнитное поле индукцией B под углом α к магнитным линиям и движется по винтовой линии с шагом винта x. Найти заряд частицы q и радиус витка R.

Ответ: $q = \dfrac{2\pi m v}{xB}\cos\alpha$, $R = \dfrac{mv}{qB}\sin\alpha$.

Задача 25. Электрон движется по окружности диаметром D = = 20 см в однородном магнитном поле индукцией B = 100 мТл. В этой же области пространства создают однородное электрическое поле напряженностью E = 200 В/м, причем векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$ сонаправлены. Через какое время t кинетическая энергия электрона увеличится в 2 раза?

Ответ: $t = \dfrac{DB}{2E} = 5 \cdot 10^{-5}$ с.

Задача 26. Электрон движется в однородном магнитном поле индукцией B = 0,009 Тл по винтовой линии, радиус которой R = = 1 см и шаг x = 7,8 см. Определить скорость электрона v, если его масса $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг и модуль заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $v = \dfrac{eB}{2\pi m}\sqrt{x^2 + (2\pi R)^2} = 2{,}5 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 27. Электрон, имеющий кинетическую энергию $W_к$ = = 100 эВ, влетает во взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля в направлении, перпендикулярном векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ этих полей. Какова должна быть индукция магнитного поля B, чтобы электрон продолжал двигаться равномерно и прямолинейно, если напряженность электрического поля E = 100 В/см?

Ответ: $B = E\sqrt{\dfrac{m_e}{2W_к}} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Тл.

10. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Если проводящий контур пересекает магнитный поток Φ, то его величина определяется произведением индукции этого магнитного поля B, площади S, ограниченной этим контуром, косинуса угла α между линиями вектора $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости контура (рис. 10-1):

$\Phi = BS\cos\alpha$.

Если плоскость контура параллельна магнитным линиям, то угол α между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ равен 90° и $\cos\alpha = 0$, поэтому и магнитный поток сквозь этот контур тоже равен нулю.

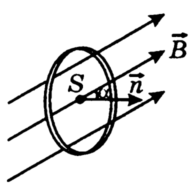


Рис. 10-1

Если магнитный поток сквозь контур равномерно изменяется, то в этом контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции, равная скорости изменения магнитного потока $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, взятой со знаком «минус»: $\mathcal{E}_i = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

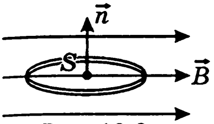


Рис. 10-2

Знак «минус» объясняется правилом Ленца: индукционный ток всегда направлен так, что своим магнитным полем он противодействует изменению магнитного потока, породившего этот ток.

Подчеркнем, что эта формула справедлива только тогда, когда магнитный поток сквозь контур изменяется монотонно, т.е. только увеличивается или только уменьшается, причем за каждую единицу времени на одну и ту же величину. Если магнитный поток изменяется неравномерно, но по этой формуле можно определить среднюю ЭДС индукции, а мгновенная ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$ равна первой производной магнитного потока по времени, взятой со знаком «минус»,

$$\mathcal{E}_i = -\,\Phi'.$$

Здесь Φ' – производная магнитного потока по времени.

Если контур, который пересекает переменный магнитный поток, содержит N витков, то ЭДС электромагнитной индукции возрастает в N раз по сравнению с ЭДС индукции в одном витке. В этом случае $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N$ или $\mathcal{E}_i = -\,N\Phi'$.

Магнитный поток через контур может измениться с изменением или индукции самого магнитного поля B, в которое помещен контур, или с изменением площади S контура, или с изменением угла α между векторами $\vec{n}$ и $\vec{B}$.

Если изменяется индукция магнитного поля, например, когда она была вначале равна B_1, а через время Δt стала равна B_2, то $\Delta\Phi = (B_2 - B_1)S = \Delta BS$. Тогда

$$\mathcal{E}_\mathrm{i} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{(B_2 - B_1)S}{\Delta t} = \frac{(B_1 - B_2)S}{\Delta t}.$$

Если равномерно изменяется за время Δt площадь S контура в магнитном поле, то

$$\mathcal{E}_\mathrm{i} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{BS_2 - BS_1}{\Delta t} = \frac{B(S_1 - S_2)}{\Delta t}.$$

Если контур, в котором возникла ЭДС индукции, замкнут, то в нем будет течь индукционный ток, равный по закону Ома

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}.$$

Здесь R – сопротивление проводника. Если в подобной задаче идет речь о длине проводника $l_{пр}$, материале или диаметре (радиусе r, площади поперечного сечения $S_{сеч}$) проводника, то приходится пользоваться формулой $R = \rho\frac{l_{пр}}{S_{сеч}}$, где ρ – удельное сопротивление проводника и $S_{сеч} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

Если в задаче идет речь о катушке (соленоиде) с диаметром витка D, то длину всего провода $l_{пр}$, из которого смотана катушка, можно представить как произведение длины окружности одного витка πD и числа витков в катушке N: $l_{пр} = \pi DN$.

Если по катушке длиной $l_{кат}$ с числом витков N идет ток силой I, то в ней возникает магнитное поле, которое вдали от ее концов можно считать однородным и определять его индукцию B

по формуле $B = \mu_0 \mu \dfrac{N}{l_{кат}} I$ или $B = \mu_0 \mu n I$.

Здесь $\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость вещества, которое находится

внутри катушки, $n = \dfrac{N}{l_{кат}}$ – число витков на единице длины катушки.

Если в условии задачи идет речь о заряде, который проходит через поперечное сечение проводника витка, когда в нем возникает индукционный ток I_i, величину этого заряда Δq можно определить по формуле $\Delta q = I_i \Delta t$.

Если в условии задачи речь идет о количестве теплоты Q, выделяющемся в катушке или контуре при прохождении индукционного тока, или о мощности P индукционного тока, то можно воспользоваться формулой закона Джоуля–Ленца:

$$Q = I_i^2 R \Delta t \quad \text{или} \quad Q = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R} \Delta t,$$

или формулой мощности тока

$$P = I_i^2 R \quad \text{и} \quad P = \frac{\mathcal{E}_i^2}{R}.$$

Здесь R – сопротивление проводника.

На концах проводника, движущегося в магнитном поле со скоростью $\vec{v}$, возникает разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Эта разность потенциалов обусловлена явлением электромагнитной индукции и равна ЭДС индукции, действующей при этом в проводнике. Ее можно определить по формуле ЭДС индукции в движущихся проводниках: $\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}_i = Bvl \sin \alpha$.

Здесь B – индукция магнитного поля, l – длина проводника в магнитном поле, α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Во вращающемся в магнитном поле контуре, проводящем ток, возникает ЭДС индукции, равная первой производной магнитного потока (поскольку магнитный поток сквозь контур изменяется не монотонно, а то увеличивается, то уменьшается с изменением угла α между нормалью $\vec{n}$ к плоскости контура и вектором $\vec{B}$):

$$\mathcal{E}_i = -\Phi'.$$

Поскольку $\Phi = BS \cos \alpha$, где $\alpha = \omega t$, то

$$\Phi = BS \cos \omega t \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_i = -(BS \cos \omega t)'.$$

Здесь $\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ – угловая скорость вращения проводника или контура, ν – частота вращения, T – период, t – время вращения.

Тогда, взяв производную последнего равенства, получим:

$$\mathcal{E}_i = BS\omega \sin \omega t \text{ или } \mathcal{E}_i = BS\omega \sin \alpha.$$

Таким образом, ЭДС индукции во вращающемся проводящем ток контуре, помещенном в магнитное поле, определяется произведением индукции этого магнитного поля, угловой скорости вращения проводника, площади, которую пересекает переменный магнитный поток, и синуса угла между вектором индукции $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости контура. Если контур содержит N витков, то $\mathcal{E}_i = B\omega NS \sin \omega t = B\omega NS \sin \alpha$.

Когда векторы $\vec{n}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, т.е. плоскость вращающегося контура параллельна линиям вектора $\vec{B}$, $\sin \alpha = 1$ и ЭДС индукции достигает максимальной величины. Таким образом, максимальное значение ЭДС индукции во вращающемся контуре $\mathcal{E}_{max} = B\omega S$,
а если он содержит N витков, то $\mathcal{E}_{max} = B\omega SN$.

Если по контуру течет равномерно изменяющийся ток (т. е. только возрастающий или только убывающий, причем за каждую единицу времени на одинаковую величину), то в этом контуре возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S$ прямо пропорционально скорости изменения тока $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ в этом контуре, взятой со знаком «минус»:

$$\mathcal{E}_S = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Здесь L – индуктивность контура.

Индуктивность длинной катушки (соленоида) можно определить по формуле $L = \mu_0\mu \frac{N^2}{l_{кат}} S$ или $L = \mu_0 \mu n^2 l_{кат} S$.

Здесь N – число витков на длине $l_{кат}$, S – площадь одного витка, $\frac{N}{l_{кат}} = n$ – число витков на единице длины катушки.

Магнитное поле обладает энергией. Величину энергии магнитного поля $W_м$ можно определить по формуле $W_м = \frac{LI^2}{2}$.

Здесь L – индуктивность контура, I – сила тока, текущего в нем.

Энергию магнитного поля, заключенную в единице объема пространства, занятого им, называют объемной плотностью энергии магнитного поля $\omega_м$. Ее можно определить отношением всей энергии магнитного поля $W_м$ к объему V пространства, занятого полем: $\omega_м = \frac{W_м}{V}$.

Если магнитное поле создано внутри соленоида длиной $l_{сол}$ и с площадью витка S, то объем V равен произведению длины $l_{сол}$ и площади S:

$$V = l_{сол}S.$$

Не забывайте, решив задачу в общем виде, проверить размерность полученной величины.

Решение отдельных задач

Задача 1

Найти площадь поперечного сечения S катушки, содержащей $N = 100$ витков, в которой при уменьшении индукции однородного магнитного поля от $B_1 = 0,5$ Тл до $B_2 = 0,1$ Тл в течение $\Delta t = 2$ мс возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = 8$ В. Магнитные линии параллельны оси катушки.

Дано:
$N = 100$
$B_1 = 0,5$ Тл
$B_2 = 0,1$ Тл
$\Delta t = 2$ мс
$\mathcal{E}_i = 8$ В

S – ?

Решение. При изменении магнитного потока от $\Phi_1 = B_1 S \cos\alpha$ до $\Phi_2 = B_2 S \cos\alpha$ в катушке, содержащей N витков, возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t}N$$

или

$$\mathcal{E}_i = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t}N = \frac{B_1 S\cos\alpha - B_2 S\cos\alpha}{\Delta t}N =$$

$$= \frac{NS}{\Delta t}(B_1 - B_2)\cos\alpha .$$

Здесь α – угол между нормалью и плоскости витка катушки и магнитной линией. Поскольку согласно условию этот угол равен нулю, то $\cos\alpha = 1$ и

$$\mathcal{E}_i = \frac{NS(B_1 - B_2)}{\Delta t}, \text{ откуда } \boxed{S = \frac{\mathcal{E}_i \Delta t}{N(B_1 - B_2)}}$$

Переведем единицу времени в СИ:
2 мс = $2 \cdot 10^{-3}$ с.

Проверим единицу полученной величины:

$$[S]_{СИ} = \frac{В \cdot с}{Тл - Тл} = \frac{В \cdot с}{Тл} = \frac{В \cdot с}{\frac{Н}{А \cdot м}} = \frac{В \cdot А \cdot с \cdot м}{Н} =$$

$$= \frac{Дж \cdot м}{Н} = \frac{Н \cdot м \cdot м}{Н} = м^2.$$

Напомним, что

$$Тл = \frac{Н}{А \cdot м}, \text{ Дж} = В \cdot А \cdot с \text{ и Дж} = Н \cdot м.$$

Произведем вычисления:

$$S = \frac{8 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{100(0,5 - 0,1)} м^2 = 4 \cdot 10^{-4} м^2.$$

Ответ: $S = 4 \cdot 10^{-4}$ м².

Задача 2

Круговой контур диаметром $D = 8$ см пересекает магнитный поток, создаваемый однородным магнитным полем. Магнитные линии перпендикулярны плоскости контура. Чему равна напряженность E вихревого электрического поля, возникающего в контуре при равномерном уменьшении магнитного потока с $\Phi_1 = 20$ мВб до $\Phi_2 = 2$ мВб за $\Delta t = 5$ мс?

Дано:
$D = 8$ см
$\Phi_1 = 20$ мВб
$\Phi_2 = 2$ мВб
$\Delta t = 5$ мс
$E = ?$

Решение. Напряженность электрического поля E определим отношением разности потенциалов $\Delta\varphi$, возникающей на концах контура, к его длине l:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l}. \qquad (1)$$

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ равна ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, которую определим по закону электромагнитной индукции

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = \mathcal{E}_i = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t}. \qquad (2)$$

Выразим длину окружности l через ее диаметр D:

$$l = \pi D. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1): $\boxed{E = \dfrac{\Phi_1 - \Phi_2}{\pi D \Delta t}}$

Переведем все единицы в СИ: 8 см = 0,08 м, 20 мВб = 0,02 Вб, 2 мВб = 0,002 Вб, 5 мс = 0,005 с.

Проверим единицу полученной величины:

$$[E]_{СИ} = \frac{Вб - Вб}{м \cdot с} = \frac{Вб}{м \cdot с} = \frac{В \cdot с}{м \cdot с} = \frac{В}{м}.$$

Напомним, что Вб = В · с.

Произведем вычисления:

$$E = \frac{0{,}02 - 0{,}002}{3{,}14 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}005}\,\frac{В}{м} = 14{,}3\,\frac{В}{м}.$$

Ответ: $E = 14{,}3$ В/м.

Задача 3

В однородном магнитном поле индукцией $B_1 = 200$ мТл находится круговой виток диаметром $D = 8$ см, изготовленный из медного проводника диаметром $d = 0{,}5$ мм. Плоскость витка перпендикулярна магнитным линиям. Какой заряд q пройдет через поперечное сечение проводника, если индукция магнитного поля равномерно уменьшится до $B_2 = 0$? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Дано:
$B_1 = 200$ мТл
$D = 8$ см
$d = 0{,}5$ мм
$B_2 = 0$
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

$q = ?$

Решение. При изменении магнитного потока сквозь площадь, ограниченную контуром, в нем возникнет индукционный ток силой I_i, по закону Ома

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}, \quad (1)$$

где $\mathcal{E}_i$ – ЭДС индукции и R – сопротивление проводника, из которого изготовлен контур.

При прохождении индукционного тока по контуру его поперечное сечение площадью $S_{сеч}$ пересекает в течение времени Δt заряд q.

Согласно определению силы тока $I_i = \dfrac{q}{\Delta t}$. (2)

Приравняв (1) и (2), определим заряд q:

$$\frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{q}{\Delta t}, \text{ откуда } q = \frac{\mathcal{E}_i \Delta t}{R}. \quad (3)$$

По закону Фарадея для электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t}.$$

Здесь $\Phi_1 = B_1 S \cos\alpha$ и $\Phi_2 = B_2 S \cos\alpha$ – магнитные потоки, пересекающие плоскость контура. Поскольку согласно условию $B_2 = 0$, то и $\Phi_2 = 0$. Угол α между нормалью к плоскости контура и магнитной линией согласно условию тоже равен нулю, поэтому $\cos\alpha = 1$.

С учетом этого $\mathcal{E}_i = \dfrac{B_1 S}{\Delta t}$. (4)

Здесь $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$ – площадь витка. Подставив ее в (4),

получим $\mathcal{E}_i = \dfrac{\pi D^2 B_1}{4\Delta t}$. (5)

Теперь определим сопротивление R медного провода:

$R = \rho \dfrac{l}{S_{сеч}}$, где $l = \pi D$ – его длина, $S_{сеч} = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения. С учетом этого

$$R = \rho \frac{4\pi D}{\pi d^2} = \frac{4\rho D}{d^2}. \quad (6)$$

Нам осталось подставить (5) и (6) в (3):

$$q = \frac{\pi D^2 B_1 \Delta t d^2}{4\Delta t \cdot 4\rho D}, \qquad \boxed{q = \frac{\pi D B_1 d^2}{16\rho}}$$

Переведем все единицы в СИ: 200 мТл = 0,2 Тл, 8 см = 0,08 м, 0,5 мм = $5 \cdot 10^{-4}$ м.

Проверим единицу полученной величины:

$$[q]_{СИ} = \frac{м \cdot Тл \cdot м^2}{Ом \cdot м} = \frac{Н \cdot м^2}{А \cdot м \cdot \frac{В}{А}} = \frac{Н \cdot м}{В} = \frac{Дж}{В} = \frac{Дж}{\frac{Дж}{Кл}} = Кл.$$

Напомним, что $Тл = \frac{Н}{А \cdot м}$, $Ом = \frac{В}{А}$,

$Дж = Н \cdot м$ и $В = \frac{Дж}{Кл}$.

Произведем вычисления:

$$q = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}2 \cdot 25 \cdot 10^{-8}}{16 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8}} \text{ Кл} = 0{,}046 \text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 0{,}046$ Кл.

Задача 4

Замкнутая катушка диаметром D с числом витков N расположена в однородном магнитном поле индукцией B так, что ее плоскость перпендикулярна линиям вектора $\vec{B}$. Какой заряд q протечет по катушке, если ее повернуть на угол $\Delta\alpha = 180°$? Проводник катушки изготовлен из материала с удельным сопротивлением ρ и имеет диаметр поперечного сечения d.

Дано:
D
N
B
$\alpha_1 = 0$
$\alpha_2 = \Delta\alpha = 180°$
ρ
d

Δq – ?

Обозначим α_1 угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости витка и линиями вектора $\vec{B}$ до поворота катушки, α_2 – угол между нормалью $\vec{n}$ к той же плоскости катушки и линиями вектора $\vec{B}$ после поворота.

Решение. При повороте катушки в магнитном поле изменяется величина магнитного потока, пересекающего ее витки, вследствие чего в ней возникает ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}N$. (1)

Возникновение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ в катушке сопровождается появлением в ней индукционного тока, сила которого по закону Ома $I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$, откуда $\mathcal{E}_i = I_i R$, (2)

где R – сопротивление проводника катушки.

Приравняв (1) и (2), получим $I_i R = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} N$. (3)

Силу индукционного тока I_i свяжем с зарядом Δq, который протечет по катушке в течение времени поворота Δt:
$$I_i = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{4}$$

Сопротивление проводника R, которое нам тоже не известно, определим по формуле сопротивления линейных металлических проводников: $R = \rho \dfrac{l}{S_{\text{сеч}}}$.

Здесь l – длина проводника, из которого изготовлена катушка, $S_{\text{сеч}} = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь его поперечного сечения.

Длина проводника l нам не известна тоже, но ее можно определить как произведение длины окружности одного витка, равной πD, и числа витков N в катушке, которое нам известно: $l = \pi DN$.

Тогда сопротивление проводника
$$R = \rho \frac{\pi DN}{\frac{\pi d^2}{4}} = 4\rho \frac{DN}{d^2}. \tag{5}$$

Подставив (4) и (5) в (3), мы введем в эту формулу искомый заряд Δq:
$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot 4\rho \frac{DN}{d^2} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} N \quad \text{или} \quad 4\Delta q \rho \frac{D}{d^2} = -\Delta\Phi. \tag{6}$$

Теперь определим изменение магнитного потока $\Delta\Phi$, пересекающего плоскость рамки. Очевидно, оно будет равно разности магнитного потока Φ_2, пересекающего плоскость рамки после поворота, и потока, пересекающего ее до поворота, Φ_1: $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$.

Магнитный поток Φ_2 равен произведению индукции магнитного поля B, площади S катушки, которую он пересекает, и косинуса угла α_2 между нормалью к плоскости рамки и линиями вектора $\vec{B}$: $\Phi_2 = B\,S\cos\alpha_2$.

Аналогично $\Phi_1 = B\,S\cos\alpha_1$.

Тогда изменение магнитного потока

$\Delta\Phi = B\,S\cos\alpha_2 - B\,S\cos\alpha_1 = B\,S\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$,
где по условию задачи $\alpha_2 = 180°$ и $\alpha_1 = 0°$,
поэтому $\cos\alpha_2 = \cos 180° = -1$, $\cos 0° = 1$.

Получим $\Delta\Phi = BS\,(-1 - 1) = -2BS$.

Площадь витка S выразим через известный диаметр витка D по формуле площади круга: $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$.

Тогда $\Delta\Phi = -2B\dfrac{\pi D^2}{4} = -\dfrac{\pi}{2}BD^2$. (7)

Теперь подставим (7) в (6):

$4\Delta q\rho\dfrac{D}{d^2} = -\left(-\dfrac{\pi}{2}BD^2\right)$ или по модулю $8\Delta q\dfrac{\rho}{d^2} = \pi BD$.

Отсюда найдем искомый заряд Δq, поскольку все остальные величины известны:

$$\boxed{\Delta q = \frac{\pi BDd^2}{8\rho}}$$

Задача решена.

Ответ: $\Delta q = \dfrac{\pi BDd^2}{8\rho}$.

Задача 5

Проволочный виток радиусом $r = 1$ см, имеющий сопротивление $R = 1$ мОм, пронизывается однородным магнитным полем, линии индукции которого перпендикулярны плоскости витка. Индукция магнитного поля плавно изменяется со скоростью $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = 0{,}01$ Тл/с. Какое количество теплоты Q выделится в витке за время $t = 1$ мин? Чему равна тепловая мощность $\omega_{тепл}$ в витке?

Дано:
$r = 1$ см
$R = 1$ мОм
$\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = 0{,}01\dfrac{Тл}{с}$
$\alpha = 0°$
$t = 1$ мин

Q – ?
$\omega_{тепл}$ – ?

Обозначим α угол между нормалью к плоскости витка и линиями вектора $\vec{B}$.

Решение. Количество теплоты Q, которое выделится в витке вследствие изменения индукции магнитного поля, в которое этот виток помещен, можно определить по закону Джоуля–Ленца:

$$Q = I_i^2Rt. \quad (1)$$

Силу индукционного тока I_i найдем по закону Ома: $I_i = \dfrac{\mathcal{E}_i}{R}$. (2)

ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, возникающую в витке при изменении магнитного потока, пересекающего его, определим по закону Фарадея для электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ связано с изменением индукции магнитного поля ΔB формулой $\Delta\Phi = \Delta BS\cos\alpha$, где $\alpha = 0°$, поэтому $\cos\alpha = 1$.

Кроме того, площадь витка $S = \pi r^2$.

С учетом этого $\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta B}{\Delta t}\pi r^2$. (3)

Подставим (3) в (2): $I_i = -\frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{\pi r^2}{R}$. (4)

Теперь подставим (4) в (1). Получим окончательно

$$Q = \left(-\frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot\frac{\pi r^2}{R}\right)^2 Rt \quad \text{или} \quad \boxed{Q = \frac{t}{R}\left(\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2}$$

Тепловой мощностью называют количество теплоты, выделяемое в проводнике за единицу времени:

$$\boxed{\omega_{\text{тепл}} = \frac{Q}{t}}$$

Переведем все единицы в СИ: 1 см = 0,01 м, 1 мОм = 10^{-3} Ом, 1 мин = 60 с.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$Q = \frac{60}{10^{-3}}\left(3{,}14\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}01\right)^2 \text{Дж} = 6\cdot 10^{-7}\,\text{Дж}.$$

$$\omega_{\text{тепл}} = \frac{6\cdot 10^{-7}}{60}\,\text{В} = 1\cdot 10^{-8}\,\text{Вт}.$$

Ответ: $Q = 6\cdot 10^{-7}$ Дж, $\omega_{\text{тепл}} = 1\cdot 10^{-8}$ Вт.

Задача 6

Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см помещена в магнитное поле, индукция которого изменяется с течением времени по закону $B = B_0\cos\omega t$, где $B_0 = 0{,}6$ Тл и $\omega = 314\,\frac{\text{рад}}{\text{мин}}$. Плоскость рамки перпендикулярна магнитным линиям. Определить мгновенное значение ЭДС индукции в рамке в момент времени.

Дано:
$a = 10$ см
$B = B_0\cos\omega t$
$B_0 = 0{,}6$ Тл

Решение. По закону Фарадея для электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_i = -\Phi',$$

где $\Phi = BS\cos\alpha$ и $\alpha = 0°$ – угол между нормалью к плоскости рамки и магнитной линией. Значит, $\cos\alpha = 1$ и $\Phi = BS =$

$\omega = 314\frac{\text{рад}}{\text{мин}}$
$t = 1$ с

$\mathcal{E}_i$ – ?

$= B_0 S \cos \omega t$ согласно условию задачи. Здесь площадь рамки $S = a^2$, поэтому

$\Phi = B_0 a^2 \cos \omega t$.

Нам остается взять первую производную по времени от этого выражения со знаком «минус»:

$$\mathcal{E}_i = -(B_0 a^2 \cos \omega t)' = -(-\omega B_0 a^2 \sin \omega t),$$

$$\boxed{\mathcal{E}_i = \omega B_0 a^2 \sin \omega t}$$

Переведем все единицы в СИ: 10 см = 0,1 м,

314 мин$^{-1}$ = $\frac{314}{60}$ с$^{-1}$.

Заметим, что $314 = 100\pi$, ведь $\pi = 3{,}14$.

Подставим числа и произведем вычисления (при подстановке вместо ω за синусом запишем не $\frac{314}{60}$, а $\frac{100\pi}{60}$, ведь выражение ωt есть угол, а его удобно выражать в долях числа π):

$$\mathcal{E}_i = \frac{314}{60} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}01 \sin \frac{100\pi}{60} \text{ В} = 0{,}157 \text{ В}.$$

Ответ: $E_i = 0{,}157$ В.

Задача 7

Кусок провода длиной $l = 1$ м складывается вдвое и концы его замыкаются. Затем провод растягивают в квадрат, плоскость которого перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Какой заряд q пройдет через поперечное сечение провода, если его сопротивление $R = 10$ Ом?

Дано:
$l = 1$ м
$B = 0{,}1$ Тл
$R = 10$ Ом

q – ?

Решение. При растягивании провода в рамку будет увеличиваться поверхность, пересекаемая магнитным полем, т. е. нарастать поток сквозь эту поверхность. При этом в рамке станет действовать ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

и возникнет индукционный ток, сила которого по закону Ома

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t\, R}.$$

Согласно определению силы тока $I_i = \frac{q}{\Delta t}$, откуда

$$q = I_i \Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t\, R}\Delta t =$$

$$= -\frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}. \qquad (1)$$

Когда провод был сложен вдвое, магнитный поток Φ_1 сквозь поверхность, ограниченную этим проводом, был равен нулю, так как была равна нулю площадь S_1 этой поверхности. Когда его растянули в рамку, магнитный поток

$$\Phi_2 = BS_2 \cos\alpha,$$

где $\alpha = 0°$, поэтому $\cos\alpha = 1$. Здесь S_2 – площадь рамки. Поскольку длина провода l, то сторона рамки, изготовленной из него, равна $\frac{l}{4}$ и площадь $S_2 = \frac{l^2}{16}$, поэтому

$$\Phi_2 = \frac{Bl^2}{16}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы найдем модуль заряда q:

$$\boxed{q = \frac{Bl^2}{16R}}$$

Произведем вычисления:

$$q = \frac{0{,}1 \cdot 1}{16 \cdot 10}\text{ Кл} = 6{,}25 \cdot 10^{-4}\text{ Кл}.$$

Ответ: $q = 6{,}25 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Задача 8

Какой ток $I_г$ идет через гальванометр, присоединенный к железнодорожным рельсам, при приближении к нему поезда со скоростью $v = 72$ км/ч? Вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля $B = 50$ мкТл. Сопротивление гальванометра $R = 100$ Ом. Расстояние между рельсами $l = 1{,}2$ м. Рельсы считать изолированными друг от друга и от земли. Поезд идет на юг.

Дано:

$v = 72\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$

$B = 50$ мкТл

$R = 100$ Ом

$l = 1{,}2$ м

I_i – ?

Решение. Как и в предыдущих задачах, найдем силу индукционного тока, текущего через гальванометр по закону Ома:

$$I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathcal{E}_i$ – ЭДС индукции, которая равна разности потенциалов, возникающей между колесами поезда, движущегося со скоростью v в магнитном поле Земли. В создании этой разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ «принимает участие» только вертикальная составляющая вектора индукции магнитного поля Земли, а горизонтальная составляющая этого вектора, касательная к земной поверхности, в создании этой разности потенциалов не участвует, поскольку вектор скорости поезда $\vec{v}$ параллелен этой горизонтальной составляющей.

ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, равная разности потенциалов на концах движущегося в магнитном поле проводника, определяется произведением индукции этого магнитного поля B, скорости движения проводника v (в нашем случае этот проводник – поезд), его длины l (в данном случае l – расстояние между рельсами, на которых колеса поезда замыкают цепь, образованную рельсами и гальванометром) и синуса угла α между направлениями вектора скорости движущегося проводника $\vec{v}$ и вектора индукции $\vec{B}$ магнитного поля, в котором он движется. Очевидно, что вектор скорости поезда направлен горизонтально, т. е. перпендикулярно вектору вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли, поэтому $\alpha = 90°$ и $\sin\alpha = 1$.

Тогда $\mathcal{E}_i = \varphi_1 - \varphi_2 = Bvl\sin\alpha = Bvl.$ (2)

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\boxed{I_i = \frac{Bvl}{R}}$$

Переведем все единицы в СИ:

72 км/ч = 72 · 1000/3600 м/с = 20 м/с,

50 мкТл = $50 \cdot 10^{-6}$ Тл = $5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$I_i = \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 1{,}2}{100}\ \text{А} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{А}.$$

Ответ: $I_i = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ А.

Задача 9

Металлическое кольцо диаметром D равномерно вращается с частотой ν в однородном магнитном поле индукцией B. При этом ось вращения кольца совпадает с его диаметром и перпендикулярна линиям вектора $\vec{B}$. К кольцу подсоединены контакты, замкнутые на реостат сопротивлением R. Определить максимальную ЭДС индукции $\mathcal{E}_m$, наводимую в кольце.

Дано:	
D ν B R	*Решение.* Для определения ЭДС индукции, действующей в этом кольце, возьмем первую производную магнитного потока по времени $\mathcal{E}_i = -\Phi'$. Теперь запишем формулу магнитного потока: $\Phi = BS\cos\alpha$,
$\mathcal{E}_m$ – ?	

где $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$ – площадь кольца, α – угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости кольца и вектором $\vec{B}$.

Этот угол α равен произведению угловой скорости кольца ω и времени его вращения t: $\alpha = \omega t$.

Угловая скорость ω связана с известной нам частотой его вращения ν соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

С учетом этого $\alpha = 2\pi\nu t$ и $\Phi = \dfrac{\pi D^2}{4} B \cos 2\pi\nu t$.

Здесь только время t – величина переменная, а все остальные – константы.

Поскольку, как мы уже сказали, ЭДС индукции равна производной магнитного потока Φ по времени t, взятой со знаком «минус», возьмем производную полученного выражения

$$\mathcal{E}_i = -\Phi' = -\left(\frac{\pi D^2}{4} B \cos 2\pi\nu t\right)' = -\left(-\frac{\pi D^2}{4} B\cdot 2\pi\nu \sin 2\pi\nu t\right),$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{(\pi D)^2}{4} B\nu \sin 2\pi\nu t.$$

Здесь $\mathcal{E}_i$ – мгновенное значение ЭДС, которая изменяется синусоидально от 0 до максимума. Максимум $\mathcal{E}_m$ будет достигнут при $\sin 2\pi\nu t = 1$.

Следовательно, $\boxed{\mathcal{E}_m = 0{,}5(\pi D)^2 B\nu}$

Задача решена.

Ответ: $\mathcal{E}_m = 0{,}5(\pi D)^2 B\nu$.

Задача 10

Проводящий стержень длиной $l = 1$ м равномерно вращается в горизонтальной плоскости с частотой $\nu = 10$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня (рис. 10-3). Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 50$ мкТл. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$, возникающую на концах стержня.

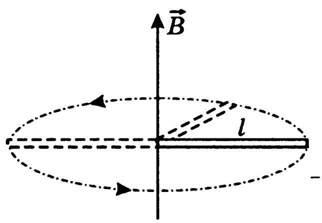


Рис. 10-3

Дано:
$l = 1$ м
$\nu = 10$ с$^{-1}$
$B = 50$ мкТл
$\Delta\varphi$ – ?

Решение. При вращении стержня увеличивается площадь кругового сектора, пересекаемого магнитными линиями, и поэтому растет магнитный поток сквозь эту площадь. В результате в стержне возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, равная разности потенциалов $\Delta\varphi$ на концах стержня. За один оборот стержня эта площадь увеличивается на $\Delta S = \pi l^2$. Время, за которое стержень совершит один оборот, есть период вращения стержня T,

который в свою очередь $\Delta t = T = \dfrac{1}{\nu}$. (1)

По закону электромагнитной индукции

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \qquad (2)$$

где при $\Delta t = T$ $\Delta\Phi = B\Delta S = B\pi l^2$. (3)

Подставим (1) и (3) в (2):

$$\Delta\varphi = -\frac{B\pi l^2}{\frac{1}{\nu}} \text{ или по модулю } \boxed{\Delta\varphi = \pi l^2 \nu B}$$

Переведем в СИ единицу индукции:
50 мкКл = $50 \cdot 10^{-6}$ Кл = $5 \cdot 10^{-5}$ Кл.
Произведем вычисления:
$\Delta\varphi = 3{,}14 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-5}$ *В* = $1{,}57 \cdot 10^{-3}$ *В*.
Ответ: $\Delta\varphi = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ *В*.

Задача 11

Круговой проводящий контур площадью S = 400 см^2 расположен в однородном магнитном поле индукцией B = 4 Тл так, что его плоскость перпендикулярна магнитным линиям. Сопротивление проводника, из которого изготовлен контур, R = 100 Ом. При повороте контура через поперечное сечение его проводника прошел заряд Δq = 0,8 мКл. На какой угол α повернули контур?

Дано:
S = 400 см^2
B = 4 Тл
R = 100 Ом
Δq = 0,8 мКл

φ – ?

Решение. Когда плоскость контура была перпендикулярна магнитным линиям, угол α между нормалью $\vec{n}$ к этой плоскости и магнитной линией был равен 0°. При повороте плоскости контура на угол α на такой же угол относительно магнитной линии повернулась и нормаль $\vec{n}$. При этом изменился магнитный поток, пересекающий плоскость контура, и в нем возникла ЭДС индукции, среднее значение которой согласно закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E}_{i\,\text{ср}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \qquad (1)$$

где изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = BS\cos\alpha - BS\cos\alpha_0 = BS(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Поскольку при $\alpha_1 = 0° \cos\alpha_1 = 1$,

$$\Delta\Phi = BS(\cos\alpha - 1). \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$\mathcal{E}_{i\ \text{ср}} = -\frac{BS(\cos\alpha - 1)}{\Delta t} = \frac{BS(1 - \cos\alpha)}{\Delta t}. \qquad (3)$$

С другой стороны, из закона Ома следует, что

$$\mathcal{E}_i = I_i R,$$

где сила индукционного тока по определению $I_i = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$,

откуда $$\Delta q = I_i \Delta t,$$

поэтому $$\mathcal{E}_i = \frac{\Delta q R}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Нам осталось подставить (4) в (3) и из полученного выражения определить угол α:

$$\frac{\Delta q R}{\Delta t} = \frac{BS(1 - \cos\alpha)}{\Delta t},\ 1 - \cos\alpha = \frac{\Delta q R}{BS},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\Delta q R}{BS} \text{ и } \boxed{\alpha = \arccos\left(1 - \frac{\Delta q R}{BS}\right)}$$

Переведем все единицы в СИ:
$400\ \text{см}^2 = 400 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 0{,}04\ \text{м}^2$, $0{,}8\ \text{мКл} = 8 \cdot 10^{-4}\ \text{Кл}$.
Произведем вычисления:

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{8 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{4 \cdot 0{,}04}\right) = 60°.$$

Ответ: $\alpha = 60°$.

Задача 12

По замкнутому проводящему контуру сопротивлением $R = 20$ мОм проходит ток. Сила тока сначала равномерно увеличивается за время $\Delta t_1 = 20$ мс от нуля до $I = 4$ А, а затем равномерно уменьшается до нуля за время $\Delta t_2 = 40$ мс. Найти изменение внутренней энергии ΔU контура. Индуктивность контура $L = 1$ мГн.

Дано:
$R = 20$ мОм
$\Delta t_1 = 20$ мс
$I_0 = 0$
$I = 4$ А
$\Delta t_2 = 40$ мс
$L = 1$ мГн

ΔU – ?

Решение. Изменение внутренней энергии контура складывается из увеличения внутренней энергии ΔU_1 при нарастании силы тока от 0 до I_1 за время Δt_1 и увеличения внутренней энергии ΔU_2 при убывании силы тока от I до 0 за время Δt_2:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2. \qquad (1)$$

Увеличение внутренней энергии равно количеству теплоты, которое в свою очередь при нарастании тока по закону Джоуля–Ленца составляет $\Delta U_1 = Q_1 = \frac{\mathcal{E}_{S1}^2}{R}\Delta t_1$.

ЭДС самоиндукции, действующая при этом в контуре, $\mathcal{E}_{S1} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t_1}$, поэтому

$$Q_1 = L^2\frac{\Delta I^2 \Delta t_1}{\Delta t_1{}^2 R} = \frac{(L\Delta I)^2}{R\Delta t_1}.$$

Здесь L – индуктивность контура.

Аналогично при убывании силы тока за время Δt_2

$$\Delta U_2 = Q_2 = \frac{(L\Delta I)^2}{R\Delta t_2}.$$

Изменение тока в обоих случаях по модулю

$$\Delta I = I - 0 = I,$$

а знак «минус» в случае убывания тока при возведении в квадрат «уйдет».

Поэтому $$\Delta U_1 = \frac{(LI)^2}{R\Delta t_1} \qquad (2)$$

и $$\Delta U_2 = \frac{(LI)^2}{R\Delta t_2}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу:

$$\Delta U = \frac{(LI)^2}{R\Delta t_1} + \frac{(LI)^2}{R\Delta t_2}, \qquad \boxed{\Delta U = \frac{(LI)^2}{R}\left(\frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2}\right)}$$

Переведем все единицы в СИ: 20 мОм = 0,02 Ом, 20 мс = 0,02 с, 40 мс = 0,04 с, 1 мГн = 0,001 Гн.

Произведем вычисления:

$$\Delta U = \frac{(0{,}001 \cdot 4)^2}{0{,}02}\left(\frac{1}{0{,}02} + \frac{1}{0{,}04}\right) \text{В} = 0{,}06 \text{ В}.$$

Ответ: $\Delta U = 0{,}06$ В.

Задача 13

Определить энергию магнитного поля соленоида $W_м$, в котором при силе тока $I = 4$ А возникает магнитный поток $\Phi = 0{,}5$ Вб.

Дано:
$I = 4$ А
$\Phi = 0{,}5$ Вб
$W_м$ – ?

Решение. Энергия магнитного поля определяется формулой $W_м = \frac{LI^2}{2}$. (1)

Здесь L – индуктивность соленоида. Она служит коэффициентом пропорциональности между магнитным потоком Φ, пронизывающим витки соленоида, и силой тока I, с которым связано магнитное поле этого соленоида:

$$\Phi = LI, \text{ откуда } L = \frac{\Phi}{I}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$W_м = \frac{\Phi I^2}{2I}, \qquad \boxed{W_м = \frac{\Phi I}{2}}$$

Произведем вычисления: $W_м = \frac{0{,}5 \cdot 4}{2}$ Дж $= 1$ Дж.

Ответ: $W_м = 1$ Дж.

Задача 14

По катушке с сердечником из ферромагнетика течет ток силой $I = 0{,}1$ кА. Число витков на единице длины катушки $n = 50$ см$^{-1}$, магнитная проницаемость сердечника $\mu = 600$. Найти объемную плотность энергии магнитного поля $\omega_м$ катушки.

Дано:
$I = 0{,}1$ кА
$n = 50$ см$^{-1}$
$\mu = 600$
$\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$

$\omega_м$ – ?

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля $\omega_м$ равна отношению энергии магнитного поля катушки $W_м$ к объему V сердечника, заполняющего пространство внутри нее:

$$\omega_м = \frac{W_м}{V}, \qquad (1)$$

где по формуле энергии магнитного поля

$$W_м = \frac{LI^2}{2}. \qquad (2)$$

Здесь

$$L = \mu_0 \mu n^2 l S \qquad (3)$$

– индуктивность катушки, l – ее длина и S – площадь витка.

Произведение длины l на площадь S есть объем пространства внутри катушки: $V = lS$. (4)

Подставим (4) в (3): $L = \mu_0 \mu n^2 V$. (5)

Теперь подставим (5) в (2):

$$W_м = \frac{\mu_0 \mu n^2 V I^2}{2}. \qquad (6)$$

Нам осталось подставить (6) в (1), и задача будет решена:

$$\omega_м = \frac{\mu_0 \mu n^2 V I^2}{2V}, \quad \boxed{\omega_м = \mu_0 \mu \frac{(nI)^2}{2}}$$

Переведем в СИ единицу плотности витков:

$50 \frac{вит}{см} = 5 \cdot 10^3 \frac{вит}{м}$.

Произведем вычисления:

$$\omega_м = 12{,}6 \cdot 10^{-7} \cdot 600 \frac{(5 \cdot 10^3 \cdot 10)^2}{2} \frac{Дж}{м^3} = 9{,}5 \cdot 10^5 \frac{Дж}{м^3}.$$

Ответ: $\omega_м = 9{,}5 \cdot 10^5$ Дж/м³.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти скорость изменения магнитного потока $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ через контур, в котором возбуждается индукционный ток силой $I_i = 2$А. Сопротивление контура $R = 0{,}2$ Ом, число витков в контуре $N = 10$.

Ответ: $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{I_i R}{N} = 0{,}04 \frac{Вб}{с}$.

Задача 2. Сколько витков N должна содержать катушка с диаметром витка $D = 5$ см, чтобы при равномерном уменьшении магнитной индукции от $B_1 = 0{,}4$ Тл до $B_2 = 0{,}1$ Тл в течение $\Delta t = 2$ мс в ней возбуждалась ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = 8$ В?

Ответ: $N = \frac{4 \Delta t \mathcal{E}_i}{\pi D^2 (B_1 - B_2)} \doteq 27$.

Задача 3. При изменении магнитного потока за $\Delta t = 6$ мс с $\Phi_1 = 10$ мВб до $\Phi_2 = 2$ мВб в проводнике соленоида возникло вихревое электрическое поле напряженностью $E = 8$ В/м. Найти радиус R витка соленоида.

Ответ: $R = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2\pi \Delta t E} = 2{,}7$ см.

Задача 4. При уменьшении магнитного потока с $\Phi_1 = 1$ мВб до $\Phi_2 = 0$ через поперечное сечение витка из меди диаметром $D = 10$ см прошел заряд $q = 200$ мКл. Найти площадь поперечного сечения $S_{сеч}$ проводника, из которого изготовлен виток. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Ответ: $S_{сеч} = \frac{\pi D \rho q}{\Phi_1} = 1{,}07 \cdot 10^{-6}$ м².

Задача 5. Проволочный виток диаметром $D = 8$ см и сопротивлением $R = 0{,}01$ Ом находится в однородном магнитном поле индукцией $B_1 = 0{,}04$ Тл. Плоскость рамки составляет угол $\alpha =$

= 30° с линиями вектора $\vec{B}$. Какой заряд q протечет по витку, если магнитное поле выключить?

Ответ: $q = \dfrac{\pi D^2 B_1}{4R} \sin\alpha = 0{,}01$ Кл.

Задача 6. За Δt = 5 мс в соленоиде, содержащем N = 500 витков провода, магнитный поток, пересекающий его, равномерно убывает с Φ_1 = 7 Вб до Φ_2 = 9 мВб. Найти силу индукционного тока I_i, возникающего при этом в соленоиде, если сопротивление его проводника R = 100 Ом.

Ответ: $I_i = \dfrac{\Phi_1 - \Phi_2}{R\Delta t} N = 7 \cdot 10^3$ А.

Задача 7. Сколько витков провода N должна содержать обмотка на стальном сердечнике с поперечным сечением S = 50 см^2, чтобы в ней при изменении магнитной индукции от B_1 = 1,1 Тл до B_2 = = 0,1 Тл в течение Δt = 5 мс возбуждалась ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ = 100 В?

Ответ: $N = \dfrac{\mathcal{E}_i \Delta t}{S(B_1 - B_2)} = 100$.

Задача 8. С какой скоростью v надо перемещать проводник из стали массой m = 10 г под углом α = 60° к линиям вектора магнитной индукции в однородном магнитном поле индукцией B = = 0,2 Тл, чтобы в нем возбуждалась ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ = 1 В? Диаметр поперечного сечения проводника d = 0,5 мм. Плотность стали ρ = 7,8 · 10^3 кг/м^3.

Ответ: $v = \dfrac{\pi d^2 \rho \mathcal{E}_i}{4mB\sin\alpha} = 8{,}8$ м/с.

Задача 9. Соленоид с N = 1 · 10^3 витков, изготовленный из медной проволоки сечением $S_{сеч}$ = 0,2 мм^2, расположен в однородном магнитном поле параллельно линиям вектора $\vec{B}$. Индукция магнитного поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t$ = 10 мТл/с. Диаметр соленоида D = 5 см. Определить тепловую мощность $\Delta Q/\Delta t$, выделяющуюся в соленоиде, концы которого замкнуты между собой. *Указание:* тепловая мощность $\Delta Q/\Delta t$ – это величина, равная количеству теплоты, выделяемому в соленоиде за единицу времени. Удельное сопротивление меди ρ = 1,7 · 10^{-8} Ом · м.

Ответ: $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\pi N D^3 S_{сеч}}{16\rho}\left(\dfrac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2 = 3 \cdot 10^{-5}$ Дж/с.

Задача 10. Круговой контур диаметром D = 4 см помещен в однородное магнитное поле индукцией B = 0,2 Тл. Плоскость контура перпендикулярна направлению магнитного поля, сопротивление контура R = 1 Ом. Какой заряд q протечет по контуру при повороте его на α_2 = 90°?

Ответ: $q = \dfrac{\pi D^2 B}{4R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ Кл, где α_1 = 0°.

Задача 11. По катушке длиной l с площадью витка S течет равномерно убывающий ток, в результате чего в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S$. Определить, за какой промежуток времени Δt сила тока в катушке уменьшится вдвое, если в начальный момент времени она была равна I_0. Магнитная проницаемость сердечника, на который намотана катушка, равна μ, число витков в катушке N.

Ответ: $\Delta t = \dfrac{\mu_0 \mu N^2 S I_0}{2l\mathcal{E}_S}$.

Задача 12. В проволочное кольцо вставили прямой магнит, и при этом по кольцу прошел заряд $\Delta q = 10^{-5}$ Кл. Определить магнитный поток Φ, пересекающий кольцо, если сопротивление кольца $R = 30$ Ом.

Ответ: $\Phi = \Delta q R = 3 \cdot 10^{-4}$ Вб.

Задача 13. В однородном магнитном поле индукцией $B = 1$ Тл находится прямой проводник длиной $l = 20$ см. Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $R = 0{,}1$ Ом. Какую силу F нужно приложить к проводнику, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 2{,}5$ м/с?

Ответ: $F = \dfrac{v}{R}(Bl)^2 = 1$ Н.

Задача 14. Рамка площадью $S = 200$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле индукцией $B = 0{,}2$ Тл с частотой $\nu = 480$ об/мин. Число витков в рамке $N = 150$. Ось вращения лежит в плоскости рамки перпендикулярно магнитным линиям. Определить максимальную силу тока I_m, возникающего в рамке, если ее сопротивление $R = 2$ Ом.

Ответ: $I_m = 2\pi\nu \dfrac{BS}{R} N = 15$ А.

Задача 15. Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см помещена в однородное магнитное поле так, что угол между нормалью $\vec{n}$ к плоскости рамки и линиями вектора индукции магнитного поля $\alpha = 60°$. Найти индукцию B_0 этого поля, если при уменьшении до нуля в течение времени $\Delta t = 0{,}01$ с в рамке индуцируется ЭДС индукцией $\mathcal{E}_i = 50$ мВ.

Ответ: $B_0 = \dfrac{\mathcal{E}_i \Delta t}{a^2 \cos\alpha} = 0{,}1$ Тл.

Задача 16. Найти индуктивность соленоида L, если за время $\Delta t = 0{,}5$ с ток в нем уменьшился от $I_1 = 10$ А до $I_2 = 0{,}5\,I_1$ и при этом в соленоиде возникла ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S = 25$ В.

Ответ: $L = \dfrac{2\mathcal{E}_S \Delta t}{I_1} = 2{,}5$ Гн.

Задача 17. Катушка с железным сердечником сечением $S = 20$ см^2 имеет индуктивность $L = 0{,}02$ Гн. Какой должна быть сила тока I в катушке, чтобы индукция магнитного поля в сердечнике была $B = 1$ мТл, если катушка содержит $N = 1000$ витков?

Ответ: $I = \dfrac{BNS}{L} = 0{,}1$ А.

Задача 18. Медный стержень массой m с диаметром поперечного сечения d равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальных магнитных линий однородного магнитного поля индукцией B, и при этом на его концах возникает разность потенциалов $\Delta\varphi$. Плотность меди ρ. Найти период T вращения стержня.

Ответ: $T = \dfrac{B}{\pi\Delta\varphi}\left(\dfrac{4m}{\rho d^2}\right)^2$.

Задача 19. Кусок провода длиной $l = 2$ м складывают вдвое, и концы его замыкаются. Затем этот провод растягивают за время $\Delta t = 2$с в круг, плоскость которого располагается перпендикулярно магнитным линиям однородного магнитного поля индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Найти силу индукционного тока I_i, возникшего при этом в контуре, если сопротивление контура $R = 8$ Ом.

Ответ: $I_i = \dfrac{Bl^2}{4\pi\Delta tR} = 2$ мА.

Задача 20. Какой магнитный поток Φ пересекает контур индуктивностью $L = 0{,}1$ мГн, если через его поперечное сечение за $t = 1$ мс проходит заряд $q = 10$ мКл?

Ответ: $\Phi = L\dfrac{\Delta q}{\Delta t} = 1$ мВб.

Задача 21. При уменьшении силы тока с $I_1 = 5$ А на 80% в течение $\Delta t = 20$ мс в контуре возбудилась ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S = 100$ В. Найти индуктивность L контура.

Ответ: $L = \dfrac{5\mathcal{E}_S\Delta t}{4I_1} = 0{,}5$ Гн.

Задача 22. Найти энергию магнитного поля соленоида $W_м$, в котором при плотности тока $j = 0{,}01$ А/см^2 возникает магнитный поток $\Phi = 0{,}8$ Вб. Диаметр поперечного сечения проводника соленоида $d = 1$ мм.

Ответ: $W_м = \dfrac{\pi d^2 j\Phi}{8} = 3 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 23. Соленоид с железным сердечником диаметром $D = 6$ см имеет индуктивность $L = 0{,}04$ Гн. Какой должна быть сила тока I в соленоиде, чтобы индукция однородного магнитного поля в сердечнике была $B = 2$ мТл, если соленоид содержит $N = 2000$ витков?

Ответ: $I = \dfrac{\pi D^2 BN}{4L} = 0{,}28$ А.

Задача 24. В однородном магнитном поле индукцией $B = 0{,}2$ Тл расположен плоский виток так, что нормаль к его плоскости составляет угол $\alpha = 60°$ с вектором $\vec{B}$. При повороте витка этот угол становится равен нулю и при этом через поперечное сечение проводника, из которого изготовлен виток, проходит заряд $q = 0{,}1$ Кл. Площадь витка $S = 1 \cdot 10^3$ см^2. Найти сопротивление витка R.

Ответ: $R = \dfrac{BS(1 - \cos\alpha)}{q} = 0{,}1$ Ом.

Задача 25. При уменьшении силы тока в соленоиде в n раз энергия магнитного поля в ней уменьшается на $\Delta W_м$. Индуктивность соленоида L. Найти начальную энергию магнитного поля в катушке $W_{м1}$ и начальную силу тока I_1 в ней.

Ответ: $W_{м1} = \dfrac{n^2\Delta W}{n^2 - 1}$, $I_1 = \sqrt{\dfrac{2W_{м1}}{L}}$.

Задача 26. Во сколько раз изменится энергия магнитного поля в катушке, если ее индуктивность увеличить на 40%, а силу тока увеличить в четыре раза?

Ответ: увеличится в 22,4 раза.

Задача 27. Определить ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_S$ в неподвижной катушке, в которой за $\Delta t = 0{,}1$ с энергия магнитного поля уменьшилась в 4 раза. Индуктивность катушки $L = 0{,}1$ Гн, а первоначальная сила тока в ней $I_1 = 10$ А.

Ответ: $\mathcal{E}_S = \dfrac{LI_1}{2\Delta t} = 5$ В.

Задача 28. Катушка без сердечника длиной $l_{кат} = 50$ см и диаметром витка $D = 2$ см содержит на каждом $l_1 = 1$ см длины $N_1 = 20$ витков. Определить силу тока I в катушке, если энергия магнитного поля в ней $W_м = 0{,}05$ Дж.

Ответ: $I = \dfrac{2l_1}{N_1 D}\sqrt{\dfrac{2W_м}{\mu_0 \mu l_{кат} \pi}} = 11{,}2$ А.

Задача 29. Соленоид длиной $l_{сол} = 50$ см и площадью витка $S = 2$ см^2 имеет индуктивность $L = 2 \cdot 10^{-7}$ Гн. При какой силе тока I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида $\omega_м = 10^{-3}$ Дж/м^3?

Ответ: $I = \sqrt{\omega_м \dfrac{2l_{сол}S}{L}} = 1$ А.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

11. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Механические колебания, при которых смещение маятника от положения равновесия изменяется по закону косинуса или синуса, называются гармоническими.

Если момент начала отсчета времени колебаний совпадает с моментом максимального отклонения маятника от положения равновесия (когда при $t = 0$ смещение x равно амплитуде A), уравнение колебаний будет

$$x = A\cos\alpha \text{ или } x = A\cos\omega t,$$

т. е. колебания будут косинусоидальными. Если же момент начала отсчета времени колебаний совпадает с моментом прохождения маятником положения равновесия (когда при $t = 0$ $x = 0$), то уравнение колебаний будет

$$x = A\sin\alpha \text{ или } x = A\sin\omega t,$$

т. е. колебания будут синусоидальными и происходящими без начальной фазы ($\alpha_0 = 0$). Здесь x – смещение маятника, т. е. отклонение его от положения равновесия, A – амплитуда колебаний – наибольшее смещение относительно положения равновесия, α – фаза колебаний, ω – циклическая (или круговая, или угловая) частота колебаний, t – текущее время колебаний, α_0 – начальная фаза.

Если момент начала отсчета времени колебаний не совпадает ни с моментом максимального отклонения маятника от положения равновесия, ни с моментом прохождения им положения равновесия, т. е. когда начало отсчета текущего времени колебания совпадает с моментом нахождения маятника в каком-либо промежуточном положении, то колебания происходят с начальной фазой α_0 и уравнение таких колебаний будет

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0) \quad (11.1) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega t + \alpha_0) \quad (11.2)$$

Фаза колебаний α или φ – это величина, которая позволяет определить, какая доля периода прошла с момента начала колебаний и наиболее полно характеризует колебательный процесс:

$$\alpha = \omega t + \alpha_0.$$

При $\alpha_0 = 0$ $\alpha = \omega t$.

Циклическая (угловая, круговая) частота ω – это величина, позволяющая определить, сколько полных колебаний N может совершить маятник за время t, равное 2π. Циклическая частота ω связана с периодом колебаний T и частотой ν соотношениями

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Период T, т. е. время одного полного колебания, можно определить, разделив время t всех N полных колебаний на число этих колебаний N:

$$T = \frac{t}{N}.$$

Частота колебаний ν, т. е. число полных колебаний в единицу времени, наоборот, равна отношению числа N полных колебаний, совершенных за время t, к этому времени t:

$$\nu = \frac{N}{t}.$$

Таким образом, период T и частота ν – обратные величины:

$$T = \frac{1}{\nu}, \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Собственная циклическая частота пружинного маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Период T и частота ν свободных колебаний пружинного маятника определяются выражениями

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Собственная циклическая частота свободных незатухающих колебаний математического маятника ω_0 зависит от его длины l и ускорения свободного падения g в соответствии с формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период и частота свободных незатухающих колебаний математического маятника определяются выражениями

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ \text{– формула Гюйгенса и} \ \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Задачи механических колебаний можно условно разделить на четыре группы: задачи на уравнения гармонических колебаний, задачи о колебаниях пружинного маятника, задачи о колебаниях математического маятника и задачи о колебаниях физического маятника – маятника произвольной формы, к колебаниям которого нельзя применять формулы, применимые к колебаниям пружинного или математического маятников.

Для решения задач первой группы часто требуется записать уравнение гармонических колебаний по известным параметрам колебаний: амплитуде A, частоте ν, циклической частоте ω, периоду T, фазе колебаний α или начальной фазе α_0 (часто фазу и начальную фазу обозначают φ и φ_0). Полезно знать, что при гармонических колебаниях амплитуда, период, частота, циклическая частота и начальная фаза – постоянные величины, а смещение x, время колебаний t и фаза α – переменные.

Если вам «попадется» такая задача, то знайте, что величина, стоящая между знаком равенства и cos или sin, есть амплитуда A; величины, стоящие справа от cos или sin (все вместе) есть фаза α. Величина между cos или sin и временем t есть циклическая частота ω, а та, что не стоит в произведении с t, есть начальная фаза α_0.

Рассмотрим **пример**. Нам дано уравнение $x = 0{,}1\,\pi^2 \cos 5\pi\,(2t + 1)$ м, из которого надо найти амплитуду A, циклическую частоту ω, период T, частоту ν и начальную фазу α_0. Вначале раскроем скобки, внеся в них выражение 5π, стоящее между косинусом и скобками. Получим

$$x = 0{,}1\ \pi^2 \cos(10\pi t + 5\pi)\ \text{м}.$$

Теперь запишем уравнение $x(t)$ в общем виде: $x = A\cos(\omega t + \alpha_0)$. Из сравнения этих уравнений следует, что выражение $0{,}1\ \pi^2$, стоящее между знаком равенства и обозначением cos, есть амплитуда А. Таким образом,

$$A = 3{,}14^2 \cdot 0{,}1\ \text{м} = 0{,}99\ \text{м}.$$

Выражение 10π, стоящее в скобках между скобкой и временем t, есть циклическая частота колебаний ω:

$$\omega = 10\pi\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Поскольку $10\pi t = \omega t$, то $\omega = 10\pi\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, а так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то $10\pi t = \frac{2\pi}{T}$ и период колебаний $T = \frac{2}{10}\ \text{с} = 0{,}2\ \text{с}$.

Поскольку частота ν – это величина, обратная периоду T, то

$$\nu = \frac{1}{T},\quad \nu = \frac{1}{0{,}2}\frac{1}{\text{с}} = 5\ \text{Гц}.$$

Выражение 5π в скобках, в которое не входит текущее время t, есть начальная фаза колебания α_0. Следовательно,

$\alpha_0 = 5\pi$ рад.

В этом примере мы по известному уравнению определили параметры, характеризующие колебательное движение. Рассмотрим обратный пример, когда по известным параметрам надо записать уравнение колебаний.

Написать уравнение колебаний – значит найти зависимость смещения колеблющегося тела x от времени t, т.е. найти функцию $x = x(t)$. Если в вашей задаче требуется написать уравнение колебаний, то сначала запишите уравнения (11.1) или (11.2) (все равно, так как они совершенно равноправны, хотя в учебниках и задачниках последних лет предпочитают уравнение (11.1), а в более ранней учебной литературе – (11.2). Затем подставьте в записанное уравнение или циклическую частоту ω, или на ее место выражения $\frac{2\pi}{T}$ или $2\pi\nu$ (в зависимости от данных в условии задачи величин). После этого замените амплитуду A, циклическую частоту ω, период T или частоту ν их численными значениями, известными из условия задачи, а начальную фазу α_0 выразите в долях π (например, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha_0 = \pi$ и т.п.). В буквенном обозначении оставьте только смещение x и текущее время t. В итоге, выполнив необходимые упрощения, вы получите уравнение колебаний, о котором идет речь в вашей задаче.

Например, маятник колеблется с амплитудой $A = 20$ см и периодом $T = 4$ с. Начальная фаза $\alpha_0 = 45°$. Написать уравнение колебаний этого маятника $x = x(t)$.

Запишем сначала уравнение колебаний маятника в общем виде:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0),\ \text{где}\ \omega = \frac{2\pi}{T},$$

поэтому $$x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_0\right).$$

Теперь подставим сюда численные значения амплитуды $A = 20$ см $= 0,2$ м, периода $T = 4$ с и начальной фазы $\alpha_0 = 45° = \frac{\pi}{4}$ рад. Получим $x = 0,2\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$ или

$$x = 0,2\cos 0,5\pi\,(t + 0,5).$$

Это и есть искомое уравнение колебаний. Если из условия задачи следует, что отсчет времени колебаний происходил с момента, когда смещение маятника от прежнего положения равновесия было наибольшим, то его колебания происходят по закону косинуса и их уравнение имеет вид $x = A\cos\alpha$ или $x = A\cos\omega t$.

А если из условия задачи следует, что отсчет времени колебаний происходит с момента, когда смещение маятника было равно нулю, то колебания происходят по закону синуса и их уравнение имеет вид $x = A\sin\alpha$ или $x = A\sin\omega t$.

В обоих случаях начальная фаза колебаний $\alpha_0 = 0$. Если же начало отсчета времени колебаний происходит, когда $x = A$ или $x \neq 0$, то в этом случае $\alpha_0 \neq 0$ и уравнения (11.1) или (11.2) надо записывать полностью.

Движение колеблющегося маятника является переменным (но не равнопеременным), поскольку в процессе колебаний на маятник действует переменная сила, обусловливающая переменное ускорение.

Максимальную скорость v_m и максимальное ускорение a_m любого маятника можно определить по формулам

$$v_m = \omega A \quad \text{и} \quad a_m = \omega^2 A.$$

Для определения мгновенной скорости v надо взять первую производную уравнения смещения $x(t)$.

Для определения мгновенного ускорения a надо взять первую производную уравнения $v(t)$.

Рассмотрим **пример**. Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x = 5\cos 0,2\,\pi t$. Взяв первую производную x по времени t, найдем зависимость скорости v от времени t:

$v = x' = -0,2\pi \cdot 5\sin 0,2\,\pi t = -3,14\sin 0,2\,\pi t$, ведь $\pi = 3,14$.

Здесь $v_m = 3,14$ м/с, если все величины измерены в единицах СИ.

Взяв первую производную скорости по времени, найдем зависимость ускорения a от времени t:

$a = v' = -0,2\pi \cdot 0,2\pi \cdot 5\cos 0,2\,\pi t = -1,97\cos 0,2\,\pi t$.

Здесь $a_m = 1,97$ м/с^2.

Умножив левую и правую части последнего равенства на массу маятника m, получим зависимость силы, действующей на него, от времени t (а если на маятник действуют несколько сил, то это будет зависимость их равнодействующей):

$F = ma$, $F = -1,97\,m\cos 0,2\,\pi t$.

Здесь F – мгновенная сила, действующая на маятник в момент времени t от начала колебания, а $F_m = 1,97\,m$ (Н) – амплитуда этой силы, т. е. ее максимальное значение.

Возведя в квадрат уравнение скорости и умножив его на $\frac{m}{2}$, найдем зависимость кинетической энергии $W_к$ от времени t:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} \text{ или } W_к = 3{,}14^2 \frac{m}{2} \sin^2 0{,}2\,\pi t.$$

Здесь $W_{кm} = \frac{m}{2} \cdot 3{,}14^2 = 4{,}9\,m$ (Дж) – максимальное значение кинетической энергии маятника. Согласно закону сохранения механической энергии в случае действия на маятник только консервативных сил (сил тяжести или сил упругости) эта максимальная кинетическая энергия $W_{кm}$ равна максимальной потенциальной энергии $W_{пm}$ и равна полной механической энергии маятника $W = W_{кm} = W_{пm}$. А поскольку полная механическая энергия маятника W равна сумме мгновенных кинетической $W_к$ и потенциальной $W_п$ энергии в любой момент времени:

$$W_{пm} = W_{кm} = W = W_п + W_к,$$

то зависимость потенциальной энергии маятника от времени $W_п(t)$ можно найти, отняв от максимальной кинетической энергии $W_{кm}$ мгновенную кинетическую энергию $W_к$ в данный момент времени:

$$W_п = W_{кm} - W_к.$$

В нашем примере

$$W_п = \frac{m}{2} \cdot 3{,}14^2 - \frac{m}{2} \cdot 3{,}14^2 \sin^2 0{,}2\,\pi t =$$

$$= \frac{m}{2} \cdot 3{,}14^2 (1 - \sin^2 0{,}2\,\pi t) = 4{,}9m \cos^2 0{,}2\,\pi t.$$

Кроме того, мгновенную потенциальную энергию пружинного маятника можно найти по формуле $W_п = \frac{kx^2}{2}$, где k – жесткость пружины, а x – смещение маятника.

Максимальную потенциальную энергию пружинного маятника можно определить по формуле

$$W_{пm} = \frac{kA^2}{2},$$

где A – амплитуда колебаний.

Поскольку $W_{пm} = W_{кm} = W_к + W_п$, то мгновенную кинетическую энергию пружинного маятника, кроме формулы $W_к = \frac{mv^2}{2}$, определяет выражение

$$W_к = W_{пm} - W_п = \frac{kA^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} (A^2 - x^2).$$

Максимальную F_m и мгновенную F силы, действующие на пружинный маятник при его гармонических колебаниях (в случае отсутствия других сил), можно определить по закону Гука:

$F_m = -F_{упр\,m}$ и $F_{упр\,m} = -kA$, поэтому $F_m = kA$. Аналогично $F = kx$.

Мгновенная потенциальная энергия математического маятника, поднявшегося в процессе колебаний на высоту h, определяется известной из механики формулой $W_п = mgh$.

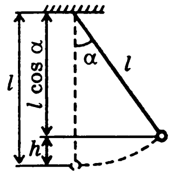


Рис. 11-1

Если известны длина маятника l и угол отклонения α, то высоту поднятия маятника h можно определить из рис. 11–1:

$h = l - l\cos\alpha = l\,(1 - \cos\alpha)$.

Здесь l – длина нити, α – угол ее отклонения от вертикали.

Если математический маятник покоится или движется горизонтально или вертикально равномерно и прямолинейно, то период T его свободных колебаний определяет формула Гюйгенса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где g – ускорение свободного падения.

Если математический маятник движется вниз с ускорением a (или вверх с замедлением a), его период свободных незатухающих колебаний определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}.$$

Если он движется вверх с ускорением a или вниз с замедлением a, то формула периода его свободных незатухающих колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}.$$

Если математический маятник движется с ускорением a в горизонтальном направлении, то период его свободных незатухающих колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}.$$

В невесомости, когда $a = g$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-g}} = \infty \text{ (бесконечность)}.$$

Это значит, что в невесомости маятник колебаться не будет. Если его отклонить, например, от вертикали, то он займет новое положение и останется в нем.

Если ему при этом сообщить скорость $\vec{v}$, вектор которой перпендикулярен нити (когда нить натянута), то маятник станет двигаться с этой линейной скоростью по окружности с радиусом, равным длине нити, и с центром в точке подвеса.

Если в условии задачи сказано, что период колебаний маятника увеличится, например, на 20% (или его длина, или что-нибудь еще), то можно записать так:

$$\frac{\Delta T}{T_1} = 0{,}2 \text{ (или } \frac{\Delta l}{l_1} = 0{,}2 \text{ и т. п.).}$$

А если сказано, что период T_2 составил 20% от первоначального периода T_1, то можно записать так:

$$T_2 = 0,2\ T_1.$$

Если математический маятник поднять на высоту H, сравнимую с радиусом Земли $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, то ускорение свободного падения g на этой высоте будет меньше ускорения свободного падения $g_0 = 9,8$ м/с^2 на Земле. Ускорение свободного падения g на высоте h определяется формулой

$$g = G\frac{M}{(R+H)^2}.$$

Здесь $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2 – гравитационная постоянная, M – масса Земли.

Вследствие уменьшения ускорения свободного падения на высоте H период свободных незатухающих колебаний математического маятника T станет больше, чем период T_0 на Земле, на величину

$$\Delta T = T - T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}.$$

В результате на высоте H маятник будет колебаться медленнее, чем на Земле, вследствие чего маятниковые часы за время t отстанут на Δt секунд. Это отставание Δt тем больше, чем больше разность $\Delta T = T - T_0$. При этом справедливо соотношение

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta T}{T_0}.$$

При повышении температуры нить математического маятника может удлиниться в соответствии с формулой линейной зависимости длины от температуры

$$l = l_0(1 + \alpha t^\circ).$$

Здесь l_0 – длина маятника при $t^\circ_0 = 0$°C, l – длина маятника при температуре t°, α – температурный коэффициент сопротивления нити. В результате период колебаний маятника T станет больше периода T_0 при 0°C на величину ΔT:

$$\Delta T = T - T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}},$$

поэтому такие маятниковые часы при нагревании будут идти медленнее и за время t отстанут на Δt от часов, идущих при $t^\circ_0 = 0$°C. В этом случае будет также справедливо соотношение

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta T}{T_0}.$$

Если математический маятник, несущий заряд q, поместить в однородное электрическое поле напряженностью E, то на него будет действовать еще и электрическая сила F, определяемая выражением

$$F = qE,$$

которая сообщит маятнику дополнительное ускорение a, определяемое вторым законом Ньютона:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Здесь m – масса маятника.

Если маятник представляет собой стержень, колеблющейся в однородном магнитном поле индукцией B со скоростью v, то в этом стержне будет действовать ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$, вследствие чего на концах стержня возникает разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$, равная ЭДС индукции в движущемся стержне:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{E}_i = Bvl\sin\alpha.$$

Здесь l – длина стержня, α – угол между вектором скорости стержня $\vec{v}$ и вектором индукции магнитного поля $\vec{B}$, в котором стержень колеблется.

Если маятник не является ни пружинным, ни математическим (физический маятник), то его циклическую частоту ω, период T и частоту ν по формулам, применимым к пружинному и математическому маятникам, определять нельзя. Поскольку других формул, позволяющих определить период свободных незатухающих колебаний физического маятника (например, через его момент инерции), вы не знаете, то обойти эту трудность можно, определив период T (или ω, или ν) из формулы силы F, действующей на маятник, или из формулы полной энергии $W = W_{\text{к m}} = W_{\text{п m}}$, или их мгновенных значений, если какие-нибудь из этих величин даны или могут быть определены в процессе решения задачи.

Если маятник движется вместе с каким-то телом (например, будучи укреплен на движущемся столе или помещен в движущийся вагон), то максимальная скорость его колебаний v_m, которую он приобретает, если это тело резко затормозит, будет, очевидно, равна скорости тела v, которую оно имело в момент начала торможения. Зная эту скорость и амплитуду A, можно определить циклическую частоту свободных незатухающих колебаний тела ω по формуле

$$v = v_{\max} = \omega A.$$

Если тело совершает вынужденные колебания под действием внешней вынуждающей силы, то амплитуда его колебаний будет максимальной, т.е. наступит резонанс, когда частота вынужденных колебаний $\omega_{\text{вын}}$ (равная частоте действия на тело внешней силы) станет равна резонансной частоте колеблющегося тела.

В среде с малым сопротивлением резонансная частота равна собственной частоте колебаний маятника ω_0.

Приведем **пример**. В вагоне поезда подвешен маятник, собственная частота колебаний которого равна ω_0. Этот маятник испытывает вместе с вагоном толчки на стыках рельсов. Если длина рельса l, а скорость поезда v, то время между толчками, равное периоду T действия внешней силы, $T = \frac{l}{v}$,

а частота толчков соответственно

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{l} \text{ и } \omega_{\text{вын}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi\nu}{l}.$$

При условии, что собственная частота ω_0 маятника, которая зависит исключительно от свойств самого маятника (т.е. от его массы, жесткости, длины, формы и т. д.), станет равна частоте толчков, т.е. частоте действия внешней силы (частоте вынужденных колебаний $\omega_{\text{вын}}$), наступит механический резонанс и маятник будет сильнее всего раскачиваться. Следовательно, здесь условие резонанса

$$\omega_{\text{вын}} = \omega_0 \quad \text{или} \quad \frac{2\pi\nu}{l} = \omega_0.$$

Не забывайте проверять единицы полученных величин, как мы это делаем в отдельных задачах.

Решение отдельных задач

Задача 1

Уравнение колебаний материальной точки имеет вид $x = 0{,}06 \cos 100\pi t$. Чему равна амплитуда A, период T и частота ν колебаний этой точки? Найти зависимость скорости и ускорения a точки от времени t. Найти максимальную скорость v, максимальное ускорение a_m, среднюю скорость $v_{ср}$ и среднее ускорение $a_{ср}$ точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия. Все величины выражены в едиимцах СИ.

Дано:
$x = 0{,}06 \cos 100\pi t$

A – ?
T – ?
ν – ?
$v = v(t)$ – ?
$a = a(t)$ – ?
v_m – ?
a_m – ?
$v_{ср}$ – ?
$a_{ср}$ – ?

Решение. Запишем уравнение гармонических колебаний в общем виде:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha_0). \qquad (1)$$

Здесь ω – циклическая частота колебаний, α_0 – их начальная фаза. Сопоставим это уравнение с уравнением, данным нам в условии задачи:

$$x = 0{,}06 \cos 100\pi t. \qquad (2)$$

Из сопоставления мы делаем вывод, что величина 0,06 м, стоящая в уравнении (2) между знаком равенства и косинусом, является амплитудой колебания. Таким образом, ответ на первый вопрос задачи мы уже имеем: $A = 0{,}06$ м.

Продолжая сравнивать уравнения (1) и (2), делаем вывод, что выражение, стоящее между cos и временем t, равное 100π, является циклической частотой колебаний ω. Значит, $\omega = 100\pi$ рад/с.

Циклическая частота колебаний ω связана с периодом колебаний T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ следовательно, } \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Вычислим T: $T = \dfrac{2\pi}{100\pi}$ с $= 0{,}02$ с.

Поскольку период T и частота колебаний ν – обратные величины, то $\boxed{\nu = \dfrac{1}{T}}$ $\nu = \dfrac{1}{0{,}02}$ Гц $= 50$ Гц.

Продолжая сравнивать уравнения (1) и (2), делаем вывод, что начальная фаза колебаний материальной точки равна 0: $\alpha_0 = 0$.

Чтобы найти зависимость скорости **колебаний** v **от** времени t, возьмем первую производную уравнения (2), поскольку скорость есть первая производная смещения точки x по времени t:

$$v = x' = (0{,}06 \cos 100\pi t)' = -100\pi \cdot 0{,}06 \sin 100\pi t,$$

$$v = -6\pi \sin 100\pi t \qquad (3)$$

Мы знаем, что синус любого угла, в том числе и $\sin 100\pi t$, может измениться от 0 до 1. Когда он станет равен 1, скорость достигнет своего максимального значения $\boxed{v_m = 6\pi}$ $v_{max} = 6 \cdot 3{,}14$ м/с $= 18{,}8$ м/с.

Чтобы найти зависимость ускорения точки от времени, нужно взять первую производную выражения (3), поскольку ускорение есть производная скорости по времени. Получим

$$a = v' = (-6\pi \sin 100\pi t)' = -100\pi \cdot 6\pi \cos 100\pi t,$$

$$\boxed{a = -600\,\pi^2 \cos 100\pi t}$$

Поскольку значение косинуса любого угла, в том числе и $\cos 100\pi t$, может измениться только от 0 до 1, то когда $\cos 100\pi t$ станет равен единице, ускорение точки станет максимальным и равным $600\pi^2$. Следовательно,

$$\boxed{a_m = 600\pi^2}$$

$a_m = 600 \cdot 3{,}14^2$ м/с^2 $= 5{,}9 \cdot 10^3$ м/с^2.

Средняя скорость точки $v_{ср}$ на пути S, пройденном за время t, определяется отношением этого пути ко времени:

$$v_{ср} = \frac{S}{t}.$$

При движении точки от крайнего положения к положению равновесия путь S равен амплитуде A, а время t составляет четверть периода $\frac{T}{4}$, поэтому

$$\boxed{v_{ср} = \frac{4A}{T}}, \qquad v_{ср} = \frac{4 \cdot 0{,}06}{0{,}02}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Среднее ускорение $a_{ср}$ определим отношением изменения скорости точки Δv ко времени t:

$$a_{ср} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{v - v_0}{t}.$$

При $t = \frac{T}{4}$ изменение скорости Δv точки, движущейся от крайнего положения, где ее начальная скорость $v_0 = 0$, к положению равновесия, где $v = v_m$, равно

$\Delta v = v_m - 0 = v_m$, поэтому $\boxed{a_{ср} = \dfrac{4v_m}{T}}$,

$$a_{ср} = \frac{4 \cdot 18{,}8}{0{,}02}\ \frac{м}{с^2} = 3{,}8 \cdot 10^3\ \frac{м}{с^2}.$$

Задача решена.

Ответ: $A = 0{,}06$ м, $T = 0{,}02$ с,
$\nu = 50$ Гц, $\upsilon = -6\pi \sin 100\pi t$, $a = -600\pi^2 \cos 100\pi t$,
$\upsilon_m = 18{,}8$ м/с, $a_m = 5{,}9 \cdot 10^3$ м/с^2, $\upsilon_{ср} = 12$ м/с,
$a_{ср} = 3{,}8 \cdot 10^3$ м/с^2.

Задача 2

Материальная точка совершает колебания по закону $x = 0{,}4 \sin \pi(t + 0{,}5)$. Определить период T и начальную фазу α_0 колебаний. Чему равна фаза колебаний α_1 и смещение точки x_1 в момент времени $t_1 = 0{,}5$ с от момента начала отсчета времени колебаний? Через какой минимальный промежуток времени t_2 после начала отсчета движения точки она пройдет через положение равновесия? Все величины измерены в единицах СИ.

Дано:
$x = 0{,}4 \sin \pi(t + 0{,}5)$
$t_1 = 0{,}5$ с

T – ?
α_0 – ?
α_1 – ?
x_1 – ?
t_2 – ?

Решение. Запишем уравнение колебаний точки в общем виде, а под ним запишем наше уравнение, раскрыв предварительно скобки:

$x = A \sin (\omega t + \alpha_0)$

и $x = 0{,}4 \sin (\pi t + 0{,}5\pi)$. (1)

Из сравнения этих уравнений следует, что начальная фаза $\alpha_0 = 0{,}5\pi$ рад.

Циклическая частота $\omega = \pi\ \frac{рад}{с}$.

Но $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому $\frac{2\pi}{T} = \pi$, откуда $T = 2$с.

Фаза колебаний α в момент времени t_1 в общем виде
$\alpha_1 = \omega t_1 + \alpha_0$ или согласно (1)
$\alpha_1 = \pi t_1 + 0{,}5\pi$, $\boxed{\alpha_1 = \pi(t_1 + 0{,}5)\ рад}$ (2)
Подставив в (2) величину t_1, получим:
$\alpha_1 = \pi(0{,}5 + 0{,}5)$ рад $= \pi$ рад.

Смещение x_1 в момент времени t_1, когда фаза стала равна α_1, определяет уравнение
$\boxed{x_1 = A \sin \alpha_1}$, где $A = 0{,}4$ м, поэтому
$x_1 = 0{,}4 \sin \pi = 0.$

Когда точка проходит через положение равновесия, ее смещение равно нулю. При этом уравнение (1) принимает вид

$0 = 0{,}4 \sin (\pi t + 0{,}5\ \pi)$, откуда

$\pi t + 0{,}5\ \pi = k\pi, \quad t + 0{,}5 = k,$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$ – целые числа.

Следовательно, промежутки времени, через которые материальная точка будет проходить через положение равновесия, определяет формула $\boxed{t = (k - 0{,}5)}$

Минимальным будет промежуток времени $t = t_2$ при $k = 1$, когда точка в первый раз пройдет через положение равновесия. Поэтому $t_2 = (1 - 0{,}5)$ с $= 0{,}5$ с.

Ответ: $T = 2$ с, $\alpha_0 = 0{,}5\ \pi$ рад, $\alpha_1 = \pi$ рад, $x_1 = 0$, $t_2 = 0{,}5$ с.

Задача 3

На рис. 11-2, *а* приведен график $x = x(t)$ гармонического колебания маятника. По графику определить амплитуду A, период T и частоту ν колебаний.

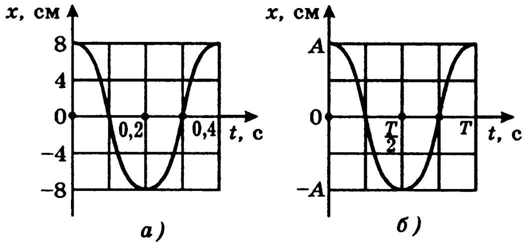


Рис. 11-2

Решение. Изобразим график гармонических (косинусоидальных) колебаний при $\alpha_0 = 0$ в общем случае (рис. 11-2, *б*), ведь судя по предложенному нам графику на рис. 11-2, *а* в момент времени $t = 0$ смещение маятника было наибольшим. Из сопоставления рис. 11–2, *а* и рис. 11–2, *б* можно сделать вывод, что амплитуда $A = 8$ см, а период $T = 0{,}4$ с. Поскольку частота $\nu = \dfrac{1}{T}$, то $\nu = \dfrac{1}{0{,}4}$ Гц $=$ $= 2{,}5$ Гц.

Ответ: $A = 8$ см, $T = 0{,}4$ с, $\nu = 2{,}5$ Гц.

Задача 4

Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = \cos \pi\ (0{,}5t + 1)$. Построить график ее колебаний за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 4$ с. Все величины измерены в единицах СИ.

Решение. Из сравнения уравнения гармонических колебаний, записанного в общем виде:

$$x = \mathrm{A} \cos (\omega t + \alpha_0),$$

и предложенного нам уравнения:

$$x = \cos \pi\,(0{,}5t + 1) = \cos\,(0{,}5\,\pi t + \pi) \qquad (1)$$

следует, что амплитуда колебаний точки A = 1 м, а циклическая частота $\omega = 0{,}5\,\pi\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Поскольку $\omega = \dfrac{2\pi}{T}t$, то $\dfrac{2\pi}{T} = 0{,}5\pi$, откуда

$$T = \frac{2}{0{,}5}\ \text{с} = 4\ \text{с}.$$

Таким образом, $t_2 = T$.

Чтобы построить требуемый график, будем придавать времени t значения $t = 0$; 1; 2; 3 и 4 с и эти числа подставлять в уравнение (1), после чего определять соответствующие им смещения точки:

$x_1 = \cos\,(0{,}5\,\pi \cdot 0 + \pi) = \cos \pi = -\,1$ м,

$x_2 = \cos\,(0{,}5\,\pi \cdot 1 + \pi) = -\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

(кто забыл формулу приведения, посмотрите в конец «Репетитора»),

$x_3 = \cos\,(0{,}5\,\pi \cdot 2 + \pi) = \cos 2\pi = 1$ м,
$x_4 = \cos\,(0{,}5\,\pi \cdot 3 + \pi) = -\cos 1{,}5\,\pi = 0$,
$x_5 = \cos\,(0{,}5\,\pi \cdot 4 + \pi) = \cos 3\pi = -\,1$ м.

Заполним таблицу:

t, с	0	1	2	3	4
x, м	–1	0	1	0	–1

Теперь проведем оси координат, выбрав следующий масштаб: пусть одна клетка на оси времени 0 t соответствует 1 с, а одна клетка на оси смещений Ox соответствует 0,5 м. Обозначим точки и построим график (рис. 11-3).

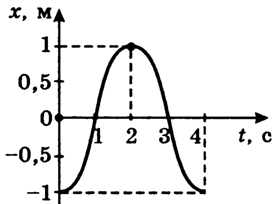


Рис. 11-3

Задача решена.

Задача 5

Математический маятник, подвешенный на нити длиной $l = 0{,}5$ м, совершает колебания с амплитудой $A = 2$ см. Написать уравнения, выражающие зависимость смещения x, скорости v и ускорения a этого маятника от времени колебаний. Чему равно ускорение a_1 маятника при смещении $x_1 = 1$ см? Начальную фазу α_0 принять равной нулю.

Дано:	
$l = 0{,}5$ м	
$A = 2$ см	
$g = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}$	
$x = x(t)$ – ?	
$v = v(t)$ – ?	
$a = a(t)$ – ?	
a_1 – ?	

Решение. При $\alpha_0 = 0$ зависимость смещения x маятника от времени t определяется уравнением $x = A\cos\omega t$.

Нам не известна циклическая частота колебаний ω. Ее мы определим, воспользовавшись формулой, устанавливающей связь циклической частоты колебаний математического маятника с периодом T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$ где по формуле Гюйгенса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Тогда $$x = A\cos\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}t.$$

Здесь не следует сокращать 2π, поскольку циклическую частоту ω удобно выражать в долях числа π.

Нам осталось подставить в эту формулу все численные значения величин, кроме одной переменной величины – времени t, которое мы оставим в буквенном обозначении. Выполнив вычисления, мы найдем зависимость смещения x от времени t, т.е. получим уравнение $x = x(t)$.

Переведем все единицы в СИ:

2 см = 0,02 м, 1 см = 0,01 м.

Выполним подстановку и вычисления:

$$x = 0{,}02\cos\frac{2\pi}{6{,}28\sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}8}}}t,\quad \boxed{x = 0{,}02\cos 1{,}4\pi t} \qquad (1)$$

Мы определили искомую зависимость смещения от времени. Взяв производную выражения (1), мы найдем зависимость скорости от времени $v = v(t)$:

$$v = x' = (0{,}02\cos 1{,}4\pi t)' = -1{,}4\pi\cdot 0{,}02\sin 1{,}4\pi t = -0{,}09\sin 1{,}4\pi t \qquad (2)$$

или $$\boxed{v = 0{,}09\cos\left(1{,}4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Взяв теперь производную выражения (2), мы найдем зависимость ускорения от времени, т.е. функцию $a = a(t)$:

$$a = v' = (-0{,}09\sin 1{,}4\pi t)' = -1{,}4\pi\cdot 0{,}09\cos 1{,}4\pi t = -0{,}4\cos 1{,}4\pi t \qquad (3)$$

или $$a = 0{,}4\cos\left(1{,}4\pi t + \pi\right).$$

Чтобы найти ускорение a_1 маятника, когда его смещение стало равно x_1, сопоставим формулы (1) и (3). Запишем их для удобства рядом:

$x = 0{,}02 \cos 1{,}4\pi t, \quad a = -0{,}4 \cos 1{,}4\pi t.$

Мы видим, что выражение $\cos 1{,}4\pi t$ в уравнении ускорения есть $\frac{x}{0{,}02}$. Следовательно,

$$a_1 = -0{,}4 \cdot \frac{x_1}{0{,}02} = -20\, x_1,$$

$$a_1 = -20 \cdot 0{,}01 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = -0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Знак «минус» означает, что колебания смещения x и ускорения a происходят в противофазе.

Ответ: $x = 0{,}02 \cos 1{,}4\pi t$ м,

$$\upsilon = 0{,}09\cos\left(1{,}4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{м/с}, \quad a_1 = -0{,}2\ \text{м/с}^2,$$

$$a = 0{,}4\cos\left(1{,}4\pi t + \pi\right)\ \text{м/с}^2.$$

Задача 6

Через какое минимальное время t, считая от начала колебаний, смещение колеблющейся материальной точки составит половину амплитуды? Период колебаний $T = 24$ с. Найти среднюю скорость точки $\upsilon_{ср}$ за это время. Амплитуда колебаний $A = 0{,}1$ м.

Дано:
$\alpha_0 = 0$
$x = \frac{A}{2}$
$T = 24$ с
$A = 0{,}1$ м

t – ?
$\upsilon_{ср}$ – ?

Обозначим α_0 начальную фазу колебаний, x – смещение колеблющейся точки.

Решение. Поскольку в условии задачи идет речь о смещении x и амплитуде А колеблющейся точки, запишем уравнение гармонических колебаний точки, в которое входят обе эти величины (с учетом, что $\alpha_0 = 0$):

$$x = A \cos \omega t.$$

Выразим неизвестную нам циклическую частоту ω через известный период T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Теперь подставим это выражение вместо ω в предыдущее уравнение и, кроме того, вместо смещения x в левую часть этого уравнения подставим $\frac{A}{2}$ в соответствии с условием задачи.

Получим $\frac{A}{2} = A \cos\frac{2\pi}{T}t$ или после сокращения амплитуды A

$$\cos\frac{2\pi}{\text{T}}t = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы получим, что косинус угла $\alpha = \frac{2\pi}{T}t$ равен $\frac{1}{2}$. Следовательно, сам угол $\alpha = \frac{2\pi}{T}t$ равен 60° или $\frac{\pi}{3}$ рад: $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}$, $\frac{2t}{T} = \frac{1}{3}$.

Отсюда $$\boxed{t = \frac{T}{6}}$$

Вычислим время t: $t = \frac{24}{6}\text{ с} = 4\text{ с}$.

Чтобы найти среднюю скорость переменного движения точки, надо разделить путь, пройденный ею, на это время. Поскольку путь, пройденный точкой от момента начала отсчета времени колебания, равен половине амплитуды (ведь этот путь есть смещение точки), а время t мы нашли, то средняя скорость точки за это время

$$\boxed{\upsilon_{\text{ср}} = \frac{A}{2t}}$$

Подставим численные значения А и t и произведем вычисления:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{0{,}1}{2\cdot 4}\text{ м/с} = 0{,}0125\text{ м/с}.$$

Ответ: $t = 4$ с, $\upsilon_{\text{ср}} = 0{,}0125$ м/с.

Задача 7

Частица совершает гармонические колебания вдоль оси OX около положения равновесия. Циклическая частота колебаний частицы $\omega = 4$ рад/с. В какой момент времени t после прохождения положения равновесия частица будет иметь координату $x = 25$ см и скорость $\upsilon = 100$ см/с?

Дано:

$\omega = 4\ \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$

$\alpha_0 = 0$

$x = 25$ см

$v = 100\ \dfrac{\text{см}}{\text{с}}$

---

t – ?

Обозначим α_0 начальную фазу колебаний (она равна нулю, поскольку начало отсчета времени колебаний совпадает с началом самих колебаний).

Решение. Обратим внимание на то, что начало отсчета времени колебаний здесь ведется от момента, когда смещение частицы от положения равновесия, т.е. ее координата x, равно нулю. В этом случае колебания частицы будут синусоидальные, т.е. будут происходить по закону синуса, и их уравнение будет

$$x = A \sin \omega t. \qquad (1)$$

Действительно, в этом случае при $t = 0$ и $x = 0$.

Поскольку нам дана еще и скорость частицы v в момент времени t, то возьмем первую производную уравнения (1):

$$v = x' = (A \sin \omega t)' = \omega A \cos \omega t. \qquad (2)$$

Из этих двух уравнений, содержащих две неизвестные величины: амплитуду А и время t, нам надо найти время t. Для этого исключим из этих уравнений амплитуду А, разделив (1) на (2). Получим

$$\frac{x}{v} = \frac{A \sin \omega t}{\omega A \cos \omega t} \text{ или } \frac{x}{v} = \frac{1}{\omega} \operatorname{tg} \omega t \text{, откуда } \operatorname{tg} \omega t = \frac{x\omega}{v},$$

$$t = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\omega}{v}\right).$$

Чтобы определить время t, можно вычислить значение тангенса:

$$\operatorname{tg} \omega t = \frac{25 \cdot 4}{100} = 1.$$

Тангенс угла равен 1, когда сам угол равен $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$.

Значит, $\omega t = \dfrac{\pi}{4}$, откуда $\boxed{t = \dfrac{\pi}{4\omega}}$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$t = \frac{3{,}14}{4 \cdot 4}\ \text{с} = 0{,}2\ \text{с}.$$

Ответ: $t = 0{,}2$ с.

Задача 8

Маленький тяжелый шарик на легкой нити совершает колебания с амплитудой, во много раз меньшей длины нити. Найти модуль ускорения шарика a_1 в момент времени, когда его смещение $x = 2$ см. Длина нити $l = 0{,}5$ м. Начальная фаза α_0 равна нулю.

Дано:
$x = 2$ см
$l = 0{,}5$ м
$\alpha_0 = 0$
$g = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}$

a_1 – ?

Решение. Словами «маленький тяжелый шарик на легкой нити» нам дают понять, что этот маятник можно считать математическим. Словами «с амплитудой, во много раз меньшей длины нити», дают понять, что угол отклонения маятника от положения равновесия мал, поэтому колебания маятника являются гармоническими.

Запишем уравнение гармонических колебаний маятника: $x = A \cos \omega t$ при $\alpha_0 = 0$. (1)

Нам требуется определить модуль ускорения маятника a_1. Значит, надо взять производную сначала координаты по времени, а затем еще раз взять производную уже теперь скорости по времени. Иными словами, надо взять вторую производную координаты по времени, которая даст нам уравнение ускорения.

Приступим: $v = x' = -\,\omega A \sin \omega t$,

$$a = v' = -\,\omega^2 A \cos \omega t. \qquad (2)$$

Если теперь разделить (1) на (2), то $\cos \omega t$ сократится и из полученной пропорции мы найдем модуль ускорения a_1, отбросив «минус». А циклическую (угловую) частоту ω найдем по формуле $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. (3)

Делим (1) на (2): $\frac{x}{a_1} = \frac{A \cos \omega t}{\omega^2 A \cos \omega t}$, $\frac{x}{a_1} = \frac{1}{\omega^2}$ или

$$\frac{x}{a_1} = \frac{l}{g}, \text{ откуда } \boxed{a_1 = x\frac{l}{g}}$$

Выразим смещение в единицах СИ: 2 см = 0,02 м.

Произведем вычисления: $a_1 = 0{,}02 \frac{9{,}8}{0{,}5} \frac{м}{с^2} = 0{,}4 \frac{м}{с^2}$.

Ответ: $a_1 = 0{,}4$ м/с^2.

Задача 9

На какое расстояние S надо оттянуть груз массой $m = 500$ г от положения равновесия, чтобы он, будучи прикреплен к пружине жесткостью $k = 0{,}2$ кН/м, проходил через положение равновесия со скоростью $v_m = 10$ м/с?

Дано:
$m = 500$ г

Обозначим $\alpha_0 = 0$ начальную фазу колебаний этого пружинного маятника.

$k = 0{,}2\ \frac{кН}{м}$ $\upsilon_m = 10\ \frac{м}{с}$ $\alpha_0 = 0$	
S – ?	

Решение. Расстояние S, на которое оттянули груз на пружине от положения равновесия, равно амплитуде его колебаний A.

Согласно формуле максимальной скорости $\upsilon_m = \omega_0 A$ или $\upsilon_m = \omega_0 S$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная циклическая частота маятника.

Поэтому $\upsilon_m = \sqrt{\frac{k}{m}} S$, откуда

$$S = \frac{\upsilon_m}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{или} \quad \boxed{S = \upsilon_m \sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Выразим все единицы в СИ: 500 г = 0,5 кг, 0,2 кН/м = 200 н/м.

Произведем вычисления: $S = 10\sqrt{\frac{0{,}5}{200}}$ м $=$ 0,5 м.

Ответ: $S = 0{,}5$ м.

Задача 10

Если к шарику массой m_1, колеблющемуся на пружине, подвесить снизу еще один шарик массой $m_2 = 300$ г, то частота колебаний уменьшится в $n = 2$ раза. Чему равна масса m_1 первого шарика?

Дано: $m_2 = 300$ г $\frac{\nu_1}{\nu_2} = n = 2$	
m_1 – ?	

Решение. Согласно условию $n = \frac{\nu_1}{\nu_2}$, где

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}} \qquad (1)$$

– частота колебаний первого шарика, k – жесткость пружины, $\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$ (2)

– частота колебаний обоих шариков. Разделим (1) на (2):

$$n = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}} = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 k}} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}.$$

Отсюда $n^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$ или $n^2 = 1 + \frac{m_2}{m_1}$,

$$\frac{m_2}{m_1} = n^2 - 1 \quad \text{и} \quad \boxed{m_1 = \frac{m_2}{n^2 - 1}}$$

Переведем в СИ единицу m_2: 300 г = 0,3 кг.

Произведем вычисления: $m_1 = \frac{0{,}3}{4-1}$ кг = 0,1 кг.

Ответ: m_1 = 0,1 кг.

Задача 11

Во сколько раз уменьшится период колебаний шарика на резиновом подвесе, если его укоротить, отрезав 75% его длины?

Дано:

$\frac{\Delta l}{l_1} = 0{,}75$

$\frac{T_1}{T_2}$ – ?

Обозначим $\Delta l = l_1 - l_2$ изменение длины подвеса, l_1 – первоначальную и l_2 – конечную длины, T_1 – период колебаний шарика при длине l_1, T_2 – период его колебаний после укорочения подвеса.

Решение. Период колебаний T_1 определим по формуле

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}, \quad (1)$$

где m – масса шарика, k_1 – жесткость резинового подвеса. Жесткость резины k_1 связана с длиной подвеса l_1 формулой

$$k_1 = \frac{ES}{l_1}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (модуль упругости) резины и S – площадь поперечного сечения подвеса. Подставим (2) в (1):

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ml_1}{ES}}. \quad (3)$$

Аналогично

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{ml_2}{ES}}. \quad (4)$$

Чтобы исключить из решения неизвестные параметры m, E и S и ответить на вопрос задачи, разделим (3) на (4):

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{ml_1}{ES}}}{2\pi\sqrt{\frac{ml_2}{ES}}} = \sqrt{\frac{ml_1ES}{ESml_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

Согласно условию $\Delta l = l_1 - l_2 = 0{,}75\, l_1$, откуда $l_2 = l_1 - \Delta l = l_1 - 0{,}75\, l_1 = 0{,}25\, l_1$, поэтому

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{0{,}25 l_1}} = 2.$$

Ответ: период уменьшится в 2 раза.

Задача 12

На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикрепленный к пружине с жесткостью k (рис. 11-4). В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость v, направленную вдоль оси пружины. Считая удар пули абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебания шара с пулей.

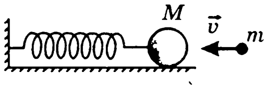


Рис. 11-4

Дано:
M
k
m
v
A – ?
T – ?

Решение. Поскольку удар неупругий, то шар с пулей сразу после удара станет двигаться со скоростью v_m, которую мы сможем определить, воспользовавшись законом сохранения импульса системы пуля – шар, которую будем считать замкнутой (вообще-то это не совсем так, поскольку на шар и пулю действуют силы тяжести, но они направлены перпендикулярно векторам импульсов шара и пули, поэтому проекции этих сил на траекторию движения шара и пули равны нулю и они не оказывают влияния на величины импульсов шара и пули). По закону сохранения импульса импульс пули до попадания в шар mv равен суммарному импульсу пули с шаром $(M + m)v_m$ после попадания (отметим, что импульс шара до попадания в него пули равен 0, так как шар покоился):

$$mv = (M + m)v_m.$$

Отсюда скорость шара с пулей сразу после удара vm (а это будет максимальная скорость колебаний шара с пулей)

$$v_m = \frac{mv}{M+m}. \tag{1}$$

Максимальная скорость колебаний тела v_m связана с циклической частотой ω и амплитудой A этих колебаний соотношением

$$v_m = \omega A. \tag{2}$$

Циклическая частота колебаний пружинного маятника определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}. \tag{3}$$

Подставляем (3) в (2):

$$v_m = A\sqrt{\frac{k}{M+m}}. \tag{4}$$

Теперь подставим (4) в (1):

$$\frac{mv}{M+m} = A\sqrt{\frac{k}{M+m}}. \tag{5}$$

Из (5) определим амплитуду A колебаний шара с пулей, поскольку остальные величины нам известны:

$$A = \frac{mv}{(M+m)\sqrt{\dfrac{k}{M+m}}} = \frac{mv}{\sqrt{(M+m)^2\,\dfrac{k}{M+m}}},$$

$$\boxed{A = \frac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}}$$

Одна из искомых величин найдена. Теперь найдем период колебаний шара с пулей T:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}}$$

Задача решена.

Ответ: $A = \dfrac{mv}{\sqrt{k(M+m)}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}}$.

Задача 13

Найти период T малых колебаний тела массой m, изображенного на рис. 11-5 *а* и *б*. Жесткости пружин k_1 и k_2. Трением пренебречь.

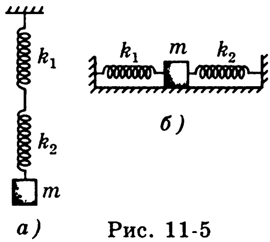


Рис. 11-5

Дано:
m
k_1
k_2

T – ?

Решение. Рассмотрим решение этой задачи применительно к случаям *а*) и *б*) в отдельности.

Случай *а*). Поскольку нам сказано, что трением в этой системе можно пренебречь, т. е. колебания тела являются идеальными, применим к его движению закон сохранения механической энергии. Будем рассуждать так. Когда мы оттягиваем тело от положения равновесия, например, вниз, мы сообщаем пружинам, а вместе с ними и самому телу запас потенциальной энергии. Потенциальная энергия упругой деформации первой пружины $W_{п_1}$, растянутой на величину амплитуды ее колебаний A_1, определяется равенством

$$W_{п_1} = \frac{k_1 A_1^2}{2}.$$

Аналогично потенциальная энергия второй пружины, растянутой на величину амплитуды ее колебания A_2,

$$W_{п_2} = \frac{k_2 A_2^2}{2}.$$

По закону сохранения механической энергии потенциальная энергия упругой деформации обеих пружин превратится в кинетическую энергию W_k колеблющегося тела, когда оно будет «проскакивать» через положение равновесия

$$W_к = \frac{mv_m^2}{2},$$

где v_m – максимальная скорость тела.

По закону сохранения механической энергии

$W_k = W_{п1} + W_{п2}$ или

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{k_1A_1^2}{2} + \frac{k_2A_2^2}{2}, \quad mv_m^2 = k_1A_1^2 + k_2A_2^2. \qquad (1)$$

Скорость v_m мы можем определить через циклическую частоту колебаний тела ω с помощью формулы $v_m = \omega A$. В свою очередь циклическая частота колебаний ω связана с периодом колебаний T соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ поэтому } v_m = \frac{2\pi}{T}A. \qquad (2)$$

Здесь A – амплитуда колебаний тела. Нетрудно догадаться, что она равна сумме амплитуд колебаний пружин, т. е. сумме их деформаций в момент, когда мы оттянули тело от положения равновесия. Тогда, подставив эту сумму $A = A_1 + A_2$ в (2), получим

$$v_m = \frac{2\pi}{T}(A_1 + A_2). \qquad (3)$$

Теперь подставим (3) в (1):

$$m\frac{4\pi^2}{T^2}(A_1 + A_2)^2 = k_1A_1^2 + k_2A_2^2. \qquad (4)$$

Мы могли бы решить это уравнение относительно искомого периода T, но нам не известны амплитуды колебаний пружин A_1 и A_2. Значит, надо записать еще какое-нибудь уравнение, куда вошли бы эти амплитуды. Здесь следует догадаться, что, когда мы действуем на тело с некоторой силой, оттягивая его вниз, то по третьему закону Ньютона с точно такой же силой мы действуем и на каждую пружину, поэтому в них возникают одинаковые силы упругости, которые по закону Гука соответственно равны: $F_{упр1} = -k_1A_1$ и $F_{упр2} = -k_2A_2$. Поскольку силы упругости равны, а жесткости пружин разные, значит, и деформации пружин, т. е. амплитуды их колебаний, будут разными. Но так как сами силы упругости одинаковы, мы можем записать равенство

$$F_{упр1} = F_{упр2} \quad \text{или} \quad -k_1A_1 = -k_2A_2,$$

откуда $$A_2 = A_1 \frac{k_1}{k_2}. \qquad (5)$$

Если теперь подставить (5) вместо A_2 в (4), то неизвестную нам амплитуду A_1 можно будет вынести за скобки и сократить. Тогда мы получим одно уравнение с одним искомым периодом T, который сможем уже однозначно определить. Проделаем эти действия:

$$m\frac{4\pi^2}{T^2}\left(A_1 + A_1\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = k_1A_1^2 + k_2A_1^2\frac{k_1^2}{k_2^2},$$

$$A_1^2 m\frac{4\pi^2}{T^2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = k_1A_1^2\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right),$$

$$m\frac{4\pi^2}{T^2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right) = k_1$$

или $$m\frac{4\pi^2}{T^2}\,\frac{k_1+k_2}{k_2} = k_1.$$

Отсюда $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{m\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}}}$$

Мы нашли период колебания тела применительно к случаю *а*) (рис. 11-5, *а*). Теперь рассмотрим второй случай, изображенный на рис. 11-5, *б*.

Здесь мы тоже применим закон сохранения механической энергии, но теперь амплитуда колебаний A обеих пружин и самого тела будет одна и та же. Ведь, на сколько мы сожмем одну пружину, на столько же растянется вторая и на такое же расстояние сместится само тело. С учетом этого положения запишем закон сохранения механической энергии следующим образом: $W_к = W_{п1} + W_{п2}$ или

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{k_1A^2}{2} + \frac{k_2A^2}{2}, \quad mv_m^2 = A^2(k_1 + k_2).$$

Здесь по-прежнему $v_m = \omega A = \frac{2\pi}{T}A$.

С учетом этого $m\frac{4\pi^2}{T^2}A^2 = A^2(k_1 + k_2)$, $m\frac{4\pi^2}{T^2} = k_1 + k_2$, откуда $$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}}$$

Задача решена.

Ответ: *а*) $T = 2\pi\sqrt{m\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2}}$; б) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$.

Задача 14

Два малых бруска массами m_1 и m_2 связаны пружиной с жесткостью k (рис. 11-6). Пружина сжата, а бруски удерживаются нитью. С каким периодом T будет колебаться каждый брусок, если нить пережечь? Трением пренебречь.

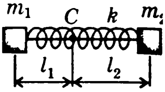


Рис. 11-6

Дано:
m_1
m_2
k
T – ?

Решение. Пусть, когда пружина еще не была сжата, расстояние от левого бруска до центра масс C этой системы было l_1 и расстояние от правого бруска до центра масс C было l_2 (размерами брусков мы пренебрегаем).

Согласно определению центра масс его положение должно удовлетворять условию
$$m_1l_1 = m_2l_2, \tag{1}$$
когда пружина еще не сжата.

Если же она сжата, то это же условие примет вид
$$m_1(l_1 - A_1) = m_2(l_2 - A_2), \tag{2}$$
где A_1 – наибольшее смещение левого бруска, т. е. его будущая амплитуда колебаний, а A_2 – амплитуда колебаний правого бруска.

Раскроем скобки в (2):
$$m_1l_1 - m_1A_1 = m_2l_2 - m_2A_2. \tag{3}$$
Заменим в (3) m_2l_2 на m_1l_1 согласно (1):
$m_1l_1 - m_1A_1 = m_1l_1 - m_2A_2$ или $m_1A_1 = m_2A_2$, откуда
$$A_2 = \frac{m_1}{m_2}A_1. \tag{4}$$

Вся деформация пружины x равна сумме амплитуд $A_1 + A_2$: $x = A_1 + A_2$ или с учетом (4)
$$x = A_1 + \frac{m_1}{m_2}A_1 = A_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right).$$

По закону Гука сила, с которой пружина действует на брусок массой m_1 $F_1 = kx = kA_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$. $\quad$ (5)

С другой стороны, по второму закону Ньютона $F_1 = m_1 a_{m1}$, где максимальное ускорение бруска массой m_1

$$a_{m1} = \omega^2 A_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} A_1, \text{ поэтому } F_1 = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} A_1. \qquad (6)$$

Приравняем (5) и (6) и из полученного равенства определим период колебаний бруска m_1 (он у обоих брусков одинаков):

$$kA_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = m_1 \frac{4\pi^2}{T^2} A_1, \text{ откуда } T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}} \text{ или}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}}$$

Задача решена.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$.

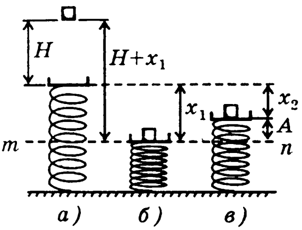


Рис. 11-7

Задача 15

Небольшое тело массой m упало с высоты H без начальной скорости на невесомую чашу пружинных весов (рис. 11-7) и стало совершать вдоль вертикали гармонические колебания. Чему равна амплитуда A и полная механическая энергия W этих колебаний? Жесткость пружины весов k.

Дано:
$v_0 = 0$
k
A – ?
W – ?

Решение. Здесь важно понять, что деформация пружины x_1, происшедшая вследствие падения тела на чашу весов (рис. 11-7), не равна амплитуде колебаний A. Амплитуда колебаний меньше этой деформации x_1 на величину деформации x_2 пружины, сжатой весом тела, положенного на чашу (а не упавшего на нее) (рис. 11-7, *в*):

$$A = x_1 - x_2. \qquad (1)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению деформаций x_1 и x_2. Для определения x_1 воспользуемся законом сохранения механической энергии, выбрав за нулевой уровень mn самое нижнее положение тела. Согласно этому закону потенциальная энергия тела $W_{п1} = mg(H + x_1)$, поднятого над уровнем mn на высоту $H + x_1$, превращается в потенциальную же энергию упругой деформации пружины

$$W_{п2} = \frac{kx_1^2}{2},$$

$$W_{п1} = W_{п2} \quad \text{или} \quad mg(H + x_1) = \frac{kx_1^2}{2}. \tag{2}$$

Определим из (2) деформацию x_1:

$$mgH + mgx_1 = \frac{kx_1^2}{2}, \qquad k\,x_1^2 - 2\,mgx_1 - 2\,mgH = 0,$$

$$x_1 = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 2mgHk}}{k} = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2\left(1 + \frac{2kH}{mg}\right)} =$$

$$= \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kH}{mg}}. \tag{3}$$

Знак «минус» перед корнем мы опустили, так как отрицательная деформация x_1 не имеет смысла.

Теперь определим x_2, воспользовавшись законом Гука, согласно которому сила упругости $F_{упр}$, возникшая в пружине, когда на чашу весов положили тело весом $P = mg$, пропорциональна деформации x_2, взятой со знаком «минус»:

$$F_{упр} = -kx_2.$$

По третьему закону Ньютона $F_{упр} = -mg$, поэтому $mg = kx_2$, откуда

$$x_2 = \frac{mg}{k}. \tag{4}$$

Нам осталось подставить (3) и (4) в (1), и на один вопрос задачи мы ответим:

$$A = \frac{mg}{k} + \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kH}{mg}} - \frac{mg}{k},$$

$$\boxed{A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kH}{mg}}}$$

Полная механическая энергия колебаний тела равна максимальной потенциальной энергии колебаний $W_{пm}$:

$$\boxed{W = W_{пm} = \frac{kA^2}{2}}$$

Задача решена.

Ответ: $A = \dfrac{mg}{k}\sqrt{1+\dfrac{2kH}{mg}}, \quad W = \dfrac{kA^2}{2}.$

Задача 16

Упругая пружина под действием подвешенного к ней груза растянулась на x_0. Если груз еще немного оттянуть вниз и отпустить, то он станет совершать вертикальные колебания. Определить период T этих колебаний.

Дано:
x_0
T – ?

Решение. Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (1)$$

По закону Гука $F_{упр} = -kx_0$, а по третьему закону Ньютона $F_{упр} = -mg$, поэтому $mg = kx_0$, откуда

$$\frac{m}{k} = \frac{x_0}{g}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1), и задача будет решена:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{x_0}{g}}}$$

Задача решена.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_0}{g}}.$

Задача 17

Когда груз, совершающий колебания на вертикальной пружине, имел массу m_1, период колебаний был равен $T_1 = 4$ с, а когда его масса стала равной m_2, период стал равен $T_2 = 5$ с. Каким будет период T, если масса груза будет равна сумме масс $m_1 + m_2$? Массы m_1 и m_2 неизвестны.

Дано:
$T_1 = 4$ с
$T_2 = 5$ с
$m = m_1 + m_2$
T – ?

Решение. По формуле периода колебаний пружинного маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \ (1) \qquad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}, \ (2)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}. \quad (3)$$

Выразим из (1) m_1, а из (2) m_2 и подставим в (3), (при этом жесткость k должна сократиться):

$$\sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{T_1}{2\pi}, \qquad m_1 = k\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2.$$

Аналогично $m_2 = k\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2$.

Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{k\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + k\left(\frac{T_2}{2\pi}\right)^2}{k}}$, $\boxed{T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}}$

Произведем вычисления.

$T = \sqrt{4^2 + 5^2}$ с $= 6{,}4$ с.

Ответ: $T = 6{,}4$ с.

Задача 18

От груза на пружине отделилась без начальной скорости его часть массой $\Delta m = 50$ г. На какую максимальную высоту h поднимется оставшаяся часть груза? Жесткость пружины $k = 2$ Н/м.

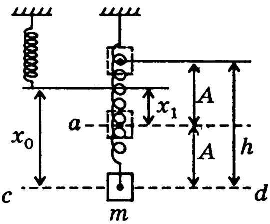


Рис. 11-8

Дано:
$\Delta m = 50$ г
$k = 2\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$
$g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

h – ?

Решение. Пусть под действием неподвижного груза массой m деформация пружины была x_0, а под действием уменьшенного груза массой $m - \Delta m$ она стала равной x_1 (рис. 11-8). По закону Гука

$mg = kx_0$ и $(m - \Delta m)g = kx_1$.

Отсюда

$$x_0 = \frac{mg}{k} \quad (1) \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{(m - \Delta m)g}{k}. \quad (2)$$

После отделения части Δm оставшийся груз станет совершать гармонические колебания относительно уровня ab с амплитудой $A = x_0 - x_1$.

Максимальная высота h, на которую при этом поднимется груз относительно уровня cd, равна удвоенной амплитуде колебаний:

$h = 2A = 2(x_0 - x_1)$ или с учетом (1) и (2)

$$h = 2\left(\frac{mg}{k} - \frac{(m - \Delta m)g}{k}\right) = 2\frac{g}{k}(m - m + \Delta m), \quad \boxed{h = 2\frac{g\Delta m}{k}}$$

Переведем единицу Δm в СИ: 50 г = 0,05 кг.

Произведем вычисления: $h = 2\ \dfrac{9{,}8 \cdot 0{,}05}{2}\ \text{м} = 0{,}49\ \text{м}$.

Ответ: $h = 0{,}49$ м.

Задача 19

Металлический стержень массой $m = 100$ г и длиной $l = 1$ м подвешен за середину к пружине с жесткостью $k = 9{,}8$ Н/м. Стержень совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см в однородном магнитном поле индукцией $B = 0{,}01$ Тл, направленном перпендикулярно плоскости колебаний (рис. 11-9). Найти максимальную разность потенциалов U_m, возникающую на концах стержня.

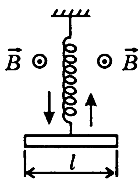


Рис. 11-9

Дано:
$m = 100$ г
$l = 1$ м
$k = 9{,}8\ \dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$
$A = 10$ см
$B = 0{,}01$ Тл
$\alpha = 90°$

U_m – ?

Обозначим α угол между вектором скорости стержня v и вектором индукции магнитного поля В, который на рис. 11-9 направлен от чертежа к наблюдателю, т. е. перпендикулярно вектору v.

Решение. Разность потенциалов U, возникшая на концах колеблющегося в магнитном поле стержня, равна ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i$, которая будет действовать в стержне в процессе его движения в магнитном поле. Из теории магнетизма мы знаем, что ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$, возникающая на концах проводника длиной l, движущегося в магнитном поле индукцией B со скоростью v, определяется произведением индукции магнитного поля В, скорости проводника v, его длины l и синуса угла α между направлением магнитного поля и направлением движения проводника. В нашем случае проводник движется перпендикулярно линиям вектора $\vec{B}$, поэтому синус угла $\alpha = 90°$ равен единице и

$$U = \mathcal{E}_i = Bvl \sin \alpha = Bvl.$$

Так как B и l – постоянные величины, то разность потенциалов $U = \mathcal{E}_i$ достигнет максимума, когда достигнет максимума скорость стержня: $U_m = Bv_m l$. (1)

Максимальная скорость стержня

$$v_m = \omega A.$$

Циклическая частота стержня ω связана с его массой m и жесткостью пружины k, на которой он подвешен, соотношением $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

С учетом этого $v_m = A\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Нам осталось подставить (2) в (1), и задача будет решена: $\boxed{U_m = BAl\sqrt{\frac{k}{m}}}$

Задача решена в общем виде. Переведем все единицы в СИ: 100 г = 0,1 кг, 10 см = 0,1 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U_m = 0{,}01 \cdot 0{,}1 \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}1}}\ В = 9{,}9 \cdot 10^{-3}\ В.$$

Ответ: $U_m = 9{,}9 \cdot 10^{-3}$ В.

Задача 20

Уравнение колебаний пружинного маятника весом $P = 0{,}102\ H$ имеет вид $x = 0{,}1 \sin\frac{\pi}{2}t$. Постройте график зависимости от времени t возвращающей силы F, кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий маятника. Найдите максимальные значения этих величин F_m, $W_{к\,m}$ и $W_{п\,m}$. Все величины измерены в единицах СИ.

Дано:
$P = 0{,}102\ H$
$x = 0{,}1 \sin\frac{\pi}{2}t$

$F = F(t)$ – ?
$W_к = W_к(t)$ – ?
$W_п = W_п(t)$ – ?
$W = W(t)$ – ?
F_m – ?
$W_{к\,m}$ – ?
$W_{п\,m}$ – ?

Решение. Прежде чем строить графики, о которых идет речь, запишем уравнения, выражающие зависимость силы, потенциальной, кинетической и полной энергией от времени колебаний. Найдем сначала зависимость силы F от времени колебаний t. По второму закону Ньютона сила F, возвращающая маятник к положению равновесия, определяется произведением массы маятника и его ускорения a:

$$F = ma. \qquad (1)$$

Поскольку нам дан вес маятника P, выразим массу m через этот вес:

$$m = \frac{P}{g}. \qquad (2)$$

Ускорение маятника найдем как вторую производную смещения x по времени t. Сначала найдем первую производную x по t, это будет скорость маятника v:

$$v = x' = \left(0{,}1 \sin\frac{\pi}{2}t\right)' = 0{,}1\frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2}t,$$

$$v = 0{,}05\ \pi \cos \frac{\pi}{2} t. \qquad (3)$$

Теперь найдем производную скорости, т. е. ускорение маятника:

$$a = v' = \left(0{,}05\ \pi \cos \frac{\pi}{2} t\right)' = -\frac{0{,}05}{2} \pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t. \qquad (4)$$

Подставим (2) и (4) в (1):

$$F = \frac{P}{g}\left(-\frac{0{,}05}{2}\pi^2 \sin\frac{\pi}{2} t\right) = 0{,}025 \frac{P}{g} \pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t. \qquad (5)$$

Подставим сюда числовые значения всех известных величин:

$$F = -0{,}025 \frac{0{,}102}{9{,}8} \cdot 3{,}14^2 \sin \frac{\pi}{2} t, \quad F = -2{,}6 \cdot 10^{-3} \sin \frac{\pi}{2} t. \qquad (6)$$

Здесь $F_{mx} = 2{,}6 \cdot 10^{-3}\ H$ – максимальное значение возвращающей силы, когда

$$\sin \frac{\pi}{2} t = 1.$$

Таким образом, одну из искомых величин мы уже нашли.

Теперь найдем зависимость кинетической энергии $W_к$ от времени колебаний t. Запишем формулу кинетической энергии:

$$W_к = \frac{mv^2}{2} \text{ или с учетом (2) } W_к = \frac{Pv^2}{2g}.$$

Подставим сюда уже найденную зависимость скорости от времени (3). Получим

$$W_к = \frac{P}{2g} 0{,}05^2\ \pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t = 12{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{P}{g} \pi^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t.$$

Подставим в это выражение числовые значения известных величин:

$$W_к = 12{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{0{,}102}{9{,}8} \cdot 3{,}14^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} t,$$

$$W_к = 1{,}3 \cdot 10^{-4} \cos^2 \frac{\pi}{2} t,$$

Здесь $W_{кm} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Мы нашли вторую искомую величину.

Перепишем последнее уравнение так, чтобы тригонометрическая функция была в первой степени.

Поскольку $\cos^2\frac{\pi}{2}t = \frac{1+\cos\pi t}{2}$, то

$$\boxed{W_к = 0{,}65\cdot10^{-4}(1+\cos\pi t)} \qquad (7)$$

Теперь запишем зависимость потенциальной энергии пружинного маятника $W_п$ от времени t: $W_п = \dfrac{kx^2}{2}$. (8)

Здесь k – жесткость пружины. Ее можно определить из формулы циклической частоты колебаний пружинного маятника $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Поскольку из данного нам в условии задачи уравнения зависимости смещения x от времени t следует, что циклическая частота этого колебания $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, то

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\pi^2}{4} = \frac{k}{m},$$

$$k = \frac{\pi^2}{4}m \quad \text{или} \quad k = \frac{\pi^2 P}{4g}.$$

Подставим полученное выражение в (8) и туда же подставим вместо x правую часть уравнения $x = 0{,}1\sin\dfrac{\pi}{2}t$, известного нам из условия. Получим:

$$W_п = \frac{\pi^2 P}{2\cdot4\cdot g}\cdot0{,}1^2\sin^2\frac{\pi}{2}t.$$

Подставим сюда все известные числовые значения:

$$W_п = \frac{3{,}14^2\cdot0{,}102}{2\cdot4\cdot9{,}8}0{,}1^2\sin^2\frac{\pi}{2}t, \quad W_п = 1{,}3\cdot10^{-4}\sin^2\frac{\pi}{2}t. \qquad (9)$$

При $\sin\dfrac{\pi}{2}t = 1$ $W_{пm} = 1{,}3\cdot10^{-4}$ Дж, как и $W_{кm}$. Так, собственно, и должно быть, поскольку при колебаниях идеализированного маятника, когда отсутствует сопротивление среды и трение в точке подвеса, максимальная потенциальная энергия маятника полностью переходит в его максимальную кинетическую энергию, и наоборот. При этом полная механическая энергия маятника в процессе колебаний сохраняется. Таким образом, мы нашли последнюю искомую величину.

Теперь построим графики зависимостей $F = F(t)$, $W_к = W_к(t)$, $W_п = W_п(t)$. Для этого сначала выразим зависимость потенциальной энергии от времени колебаний так, чтобы тригонометрическая функция в уравнении (9) стояла не в квадрате, а в первой степени. Известно, что

$$\sin\frac{\pi}{2}t = \frac{1-\cos\pi t}{2},$$

поэтому $W_п = 1{,}3\cdot10^{-4}\dfrac{1-\cos\pi t}{2} = 0{,}65\cdot10^{-4}(1-\cos\pi t)$.

Запишем для удобства все три уравнения, графики которых мы будем строить, рядом:

$$F = -2{,}6\cdot10^{-3}\sin\frac{\pi}{2}t,$$
$$W_к = 0{,}65\cdot10^{-4}(1+\cos\pi t),$$
$$W_п = 0{,}65\cdot10^{-4}(1-\cos\pi t).$$

Здесь время t – независимая переменная (аргумент), а сила F, кинетическая $W_к$ и потенциальная $W_п$ энергии – ее функции.

Чтобы построить соответствующие графики, будем придавать времени t произвольные значения от $t = 0$ до $t = T$, где Т – период. Но сначала вычислим величину периода Т. Из уравнения (1) следует, что циклическая частота колебаний ω, которая связана с периодом T соотношением $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, равна $\dfrac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $\dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$, откуда $T = 4$ с.

Поскольку через период колебания повторяются, построим точки, соответствующие значениям времени $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}5$, $t_3 = 1$, $t_4 = 1{,}5$, $t_5 = 2$, $t_6 = 2{,}5$, $t_7 = 3$, $t_8 = 3{,}5$, $t_9 = 4$ с. Подставляя эти числа в последние три уравнения вместо времени t, будем для каждого t вычислять значения F, $W_к$ и $W_п$, после чего заполним таблицу:

t, с	F, 10^{-3} Н	$W_к$, 10^{-4} Дж	$W_п$, 10^{-4} Дж
0	0	1,3	0
0,5	−1,8	0,65	0,65
1	−2,6	0	1,3
1,5	−1,8	0,65	0,65
2	0	1,3	0
2,5	1,8	0,65	0,65
3	2,6	0	1,3
3,5	1,8	0,65	0,65
4	0	1,3	0

Отметим, что, когда сопротивление колебаниям отсутствует, полная механическая энергия W сохраняется.

$W = W_{кmax} = W_{пmax} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Теперь построим графики $F = F(t)$, $W_к = W_к(t)$, $W_п = W_п(t)$, а также $W = W(t)$ (рис. 11-10).

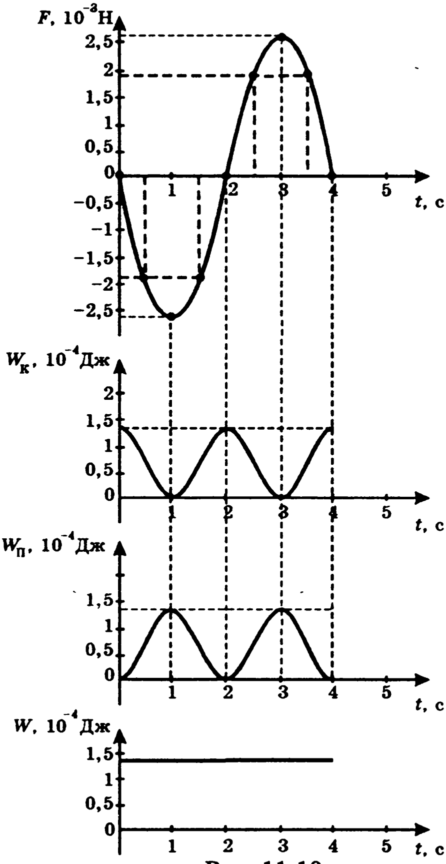


Рис. 11-10

Задача решена.

Ответ: $F_m = -2{,}6 \cdot 10^{-3}$ Н,

$W_{к\,m} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Дж,

$W_{п\,m} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 21

Пружинный маятник вывели из положения равновесия и отпустили. Через какое минимальное время t, считая от начала колебания, его потенциальная энергия станет равна кинетической, если масса маятника $m = 100$ г, а жесткость пружины $k = 10$ Н/м ?

Дано:
$W_п = W_к$
$\alpha_0 = 0$
$m = 100$ г
$k = 10\ \frac{Н}{м}$

---

t – ?

Обозначим $\alpha_0 = 0$ начальную фазу колебаний.

Решение. Мгновенные потенциальная $W_п$ и кинетическая $W_к$ энергии пружинного маятника определяются равенствами

$$W_п = \frac{kx^2}{2} \text{ и } W_к = \frac{mv^2}{2},$$

где x – смещение и v – мгновенная скорость маятника. Поскольку $W_п = W_к$ согласно условию, то

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \quad \text{и} \quad kx^2 = mv^2. \qquad (1)$$

Теперь запишем уравнения гармонических колебаний для смещения и скорости:

$$x = A\cos\omega t \text{ при } \alpha_0 = 0 \qquad (2)$$

и

$$v = x' = -\omega A\sin\omega t. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1) и учтем, что

$$\omega^2 = \frac{k}{m}:$$

$$kA^2\cos^2\omega t = m\omega^2A^2\sin^2\omega t,$$

$$k\cos^2\omega t = m\frac{k}{m}\sin^2\omega t,$$

$\cos^2\omega t = \sin^2\omega t$, поэтому $\cos\omega t = \sin\omega t$ или

$$\operatorname{tg}\omega t = 1 \text{ и, значит, } \omega t = \frac{\pi}{4},\ t = \frac{\pi}{4\omega}.$$

Поскольку $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, то $\boxed{t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}}$

Выразим массу в единицах СИ: 100 г = 0,1 кг.

Произведем вычисления: $t = \frac{3{,}14}{4}\sqrt{\frac{0{,}1}{10}}$ с = 0,08 с.

Ответ: $t = 0{,}08$ с.

Задача 22

Во сколько раз изменится частота гармонических колебаний математического маятника, если длину его нити уменьшить на 30%?

Дано:	
$\dfrac{\Delta l}{l_1} = 0{,}3$	Обозначим $\Delta l = l_1 - l_2$ изменение длины нити, l_1 – ее первоначальную длину, l_2 – длину после того, как нить укоротили, ν_1 – начальную и ν_2 – конечную частоты колебаний.
$\dfrac{\nu_2}{\nu_1}$ – ?	*Решение.* Частоты колебаний ν_1 и ν_2 математического маятника определяются выражениями

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_1}} \quad \text{и} \quad \nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_2}},$$

следовательно, $$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_2}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_1}}} = \sqrt{\frac{gl_1}{l_2 g}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

Поскольку $l_2 = l_1 - \Delta l$, то $\dfrac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\dfrac{l_1}{l_1 - \Delta l}}$, а так как согласно условию $\Delta l = 0{,}3\, l_1$, то

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_1 - 0{,}3 l_1}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}7}} = 1{,}2.$$

Ответ: частота увеличится в 1,2 раза.

Задача 23

За одинаковое время один математический маятник делает $N_1 = 50$ колебаний, а второй – $N_2 = 25$ колебаний. Найти их длины l_1 и l_2, если один из них короче второго на $\Delta l = 33$ см.

Дано:	
$N_1 = 50$ $N_2 = 25$ $\Delta l = 33$ см	*Решение.* Поскольку в задаче идет речь о длинах и времени колебаний двух математических маятников, то для ее решения воспользуемся формулой Гюйгенса. Сначала запишем ее для первого маятника:
l_1 – ? l_2 – ?	

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}. \qquad (1)$$

Здесь T_1 – период колебаний первого маятника, g – ускорение свободного падения.

Мы не знаем T_1, зато знаем число полных колебаний, которые маятник совершил за некоторое время t. Значит, период T_1 колебаний первого маятника мы можем выразить через число его полных колебаний N_1 по формуле

$$T_1 = \frac{t}{N_1}. \qquad (2)$$

Поскольку период колебаний маятника нам не известен и определять его не нужно, исключим эту величину из уравнений. Для этого приравняем друг другу правые части (1) и (2):

$$\frac{t}{N_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}. \qquad (3)$$

Здесь нам, правда, не известно время колебаний t, но зато мы знаем, что за такое же время второй маятник совершил N_2 колебаний. Поэтому запишем по аналогии подобное уравнение для второго маятника:

$$\frac{t}{N_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}. \qquad (4)$$

Теперь исключим из (3) и (4) неизвестное время t. Для этого разделим эти уравнения друг на друга:

$$\frac{tN_2}{N_1 t} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}}, \quad \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}. \qquad (5)$$

В полученное уравнение входят две искомые величины l_1 и l_2. Но решить одно уравнение с двумя неизвестными нельзя, поэтому нам надо бы составить еще одно уравнение, в которое вошли бы эти же неизвестные величины. Мы еще не воспользовались известной нам разностью длин маятников Δl. Подумаем, какой из них длиннее, первый или второй? Чтобы ответить, проанализируем уравнения (3) или (4). Из этого анализа можно сделать вывод, что длиннее тот маятник, который за одинаковое время сделает меньше колебаний. По условию задачи первый маятник за время t сделал 50 колебаний, а второй – только 25, значит, второй маятник длиннее. Тогда разность их длин

$$\Delta l = l_2 - l_1. \qquad (6)$$

Теперь мы имеем два уравнения (5) и (6) с двумя неизвестными l_1 и l_2, из которых мы их сможем определить, проделав несложные алгебраические преобразования. Найдем вначале из уравнения (5) длину l_2:

$$\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{l_1}{l_2}, \text{ откуда}$$

$$l_2 = \frac{l_1}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2} = l_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2. \quad (7)$$

Теперь подставим (7) в (6). При этом мы получим одно уравнение с одной неизвестной величиной – длиной l_1, из которого ее определим:

$$\Delta l = l_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 - l_1 = l_1\frac{N_1^2 - N_2^2}{N_2^2},\text{ откуда } \boxed{l_1 = \frac{\Delta l N_2^2}{N_1^2 - N_2^2}}$$

Согласно (4) $\boxed{l_2 = l_1 + \Delta l}$

Переведем в СИ единицу Δl: 33 см = 0,33 м.

Произведем вычисления: $l_1 = \frac{0{,}33 \cdot 50^2}{50^2 - 25^2}$ м = 0,11 м,

$l_2 = (0{,}11 + 0{,}33)$ м = 0,44 м.

Ответ: $l_1 = 0{,}11$ м, $l_2 = 0{,}44$ м.

Задача 24

На какую величину ΔN уменьшится число полных колебаний математического маятника за время $t = 1$ сут, если его длина увеличится на $\Delta l = 4$ см? Период колебаний маятника вначале был $T_1 = 2$ с. На какое время Δt маятник отстанет за сутки вследствие увеличения его длины?

Дано:
$t = 1$ сут
$\Delta l = 4$ см
$T_1 = 2$ с

ΔN – ?
Δt – ?

Решение. Изменение числа колебаний маятника ΔN равно разности между числом колебаний N_1 маятника за сутки до его удлинения и числом его колебаний N_2 после удлинения:

$$\Delta N = N_1 - N_2. \quad (1)$$

Число колебаний N_1 равно отношению времени t к периоду T_1:

$$N_1 = \frac{t}{T_1}. \quad (2)$$

Новое число колебаний N_2 равно отношению времени t к периоду колебаний T_2 удлиненного маятника:

$$N_2 = \frac{t}{T_2}. \quad 3)$$

По формуле Гюйгенса для периода свободных колебаний математического маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \tag{4}$$

и $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$, где $l_2 = l_1 + \Delta l$, поэтому

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + \Delta l}{g}}. \tag{5}$$

Выразим из (4) $\frac{l_1}{g}$ и подставим в (5):

$$\sqrt{\frac{l_1}{g}} = \frac{T_1}{2\pi}, \qquad \frac{l_1}{g} = \left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2,$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g} + \frac{\Delta l}{g}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}}. \tag{6}$$

Нам останется подставить (6) в (3), после чего полученное выражение и равенство (2) подставить в (1), и задача будет решена. Выполним эти действия:

$$N_2 = \frac{t}{2\pi\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}}}, \quad \Delta N = \frac{t}{T_1} - \frac{t}{2\pi\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}}}$$

$$\boxed{\Delta N = t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{\sqrt{T_1^2 + (2\pi)^2\frac{\Delta l}{g}}}\right)}$$

Отставание во времени Δt пропорционально изменению периода $T_2 - T_1$:

$\frac{\Delta t}{t} = \frac{T_2 - T_1}{T_1}, \frac{\Delta t}{t} = \frac{T_2}{T_1} - 1$, откуда $\Delta t = t\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$ или с учетом (6) $\boxed{\Delta t = t\left(\frac{2\pi}{T_1}\sqrt{\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 + \frac{\Delta l}{g}} - 1\right)}$

Переведем все единицы в СИ:

1 сут = 24·3600 с = 8,64·10^4 с, 4 см = 0,04 м.

Выполним вычисления:

$$\Delta N = 8{,}64\cdot10^4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{4+(2\cdot3{,}14)^2\,\dfrac{0{,}04}{9{,}8}}}\right)=864,$$

$$\Delta t = 8{,}64\cdot10^4\left(\frac{2\cdot3{,}14}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{2\cdot3{,}14}\right)^2+\frac{0{,}04}{9{,}8}}-1\right)\text{ с} = 1{,}7\cdot10^3\text{ с}.$$

Ответ: $\Delta N = 864$, $\Delta t = 1{,}7\cdot10^3$ с.

Задача 25

Математический маятник массой m = 200 г отклонили от положения равновесия на угол α = 5° и отпустили (рис. 11-11). При этом он стал совершать колебания с частотой ν = 0,5 Гц. Найти запас потенциальной энергии $W_{\text{п}\,m}$, которую ему сообщили при отклонении, и максимальную кинетическую энергию $W_{\text{к}\,m}$, с которой он проходит через положение равновесия. Сопротивление колебаниям не учитывать.

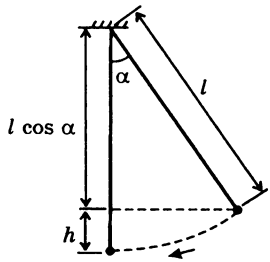


Рис. 11-11

Дано:
m = 200 г
α = 5°
ν = 0,5 Гц
$g = 9{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$W_{\text{п}\,m}$ – ?
$W_{\text{к}\,m}$ – ?

Решение. Максимальную потенциальную энергию маятника $W_{\text{п}\,m}$ выразим через высоту его максимального подъема h, воспользовавшись формулой потенциальной энергии тела, поднятого на высоту h:

$$W_{\text{п}\,m} = mgh.$$

Из рис. 11-11 следует, что высоту подъема маятника h можно определить через его длину l и угол отклонения α следующим образом:

$$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha).$$

С учетом этого $W_{\text{п}\,m} = mgl(1-\cos\alpha)$. (1)

Но здесь нам не известна длина маятника l. Зато известна частота колебаний ν и известно также, что его отклонили на малый угол α = 5° от положения равновесия. При малом α маятник будет совершать гармонические колебания, частота которых может быть определена по формуле

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Из (2) найдем длину маятника l и подставим ее в (1):

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi\nu, \quad l = \frac{g}{(2\pi\nu)^2}. \quad (3)$$

Теперь подставим (3) в (1):

$$W_{пm} = \frac{mg^2}{(2\pi\nu)^2}(1 - \cos\alpha) \text{ или } W_{пm} = m\left(\frac{g}{2\pi\nu}\right)^2(1 - \cos\alpha).$$

Поскольку согласно условию задачи сопротивление колебаниям отсутствует, то по закону сохранения механической энергии максимальная потенциальная энергия маятника, которой он обладал на высоте h, полностью превращается в его кинетическую энергию $W_{к\,m}$, когда он «проскакивает» положение равновесия. Следовательно,

$$\boxed{W_{к\,m} = W_{п\,m} = m\left(\frac{g}{2\pi\nu}\right)^2(1 - \cos\alpha)}$$

Заметим, что полная механическая энергия маятника $W = W_{п\,m} = W_{к\,m}$ по тому же закону сохранения механической энергии. Таким образом, определив максимальную потенциальную энергию маятника, мы одновременно определили и его максимальную кинетическую энергию, и его полную энергию.

Переведем единицу массы в СИ: 200 г = 0,2 кг.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$W_{к\,m} = W_{п\,m} = 0{,}2\left(\frac{9{,}8}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5}\right)^2 (1 - \cos 5°) \text{ Дж} =$$
$$= 7{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $W_{к\,m} = W_{п\,m} = 7{,}4 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 26

На какое время Δt отстанет за сутки секундный маятник, если его поднять на высоту H, равную радиусу Земли?

Дано:	
t = 1 сут	
T_0 = 1 с	
$H = R$	
Δt – ?	

Обозначим t время колебаний маятника, T_0 – его период на Земле, H – высоту, на которую подняли маятник, R – радиус Земли, Δt – время отставания маятника на высоте H.

Решение. Очевидно, что маятник на высоте H отстанет от маятника на поверхности Земли, потому что там ускорение свободного падения меньше, чем на Земле, поэтому период колебаний маятника там больше периода на Земле. Несложно догадаться, что это отставание Δt так относится ко всему времени колебаний маятника t, как разница между периодами на Земле и на высоте H $\Delta T = T - T_0$ к периоду на Земле T_0:

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta T}{T_0} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta t}{t} = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T}{T_0} - 1.$$

Отсюда
$$\Delta t = t\left(\frac{T}{T_0} - 1\right). \tag{1}$$

Период колебаний маятника на высоте H по формуле Гюйгенса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{2}$$

а на Земле
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}. \tag{3}$$

Здесь g – ускорение свободного падения на высоте H, g_0 – ускорение свободного падения на Земле, l – длина маятника.

Подставим (2) и (3) в (1):

$$\Delta t = t\left(\frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}} - 1\right) = t\left(\sqrt{\frac{lg_0}{gl}} - 1\right) = t\left(\sqrt{\frac{g_0}{g}} - 1\right). \tag{4}$$

Ускорения свободного падения g_0 и g можно выразить через расстояние от точки, в которой они определяются, до центра Земли по формулам:

$$g_0 = G\frac{M}{R^2} \quad (5) \quad \text{и} \quad g = G\frac{M}{(R + H)^2}. \tag{6}$$

Здесь G – гравитационная постоянная, M – масса Земли, R – ее радиус. Подставив (5) и (6) в (4), получим:

$$\Delta t = t\left(\sqrt{\frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M}{(R + H)^2}}} - 1\right) = t\left(\sqrt{\frac{(R + H)^2}{R^2}} - 1\right) =$$

$$= t\left(\frac{R+H}{R} - 1\right) = t\,\frac{R+H-R}{R} = t\,\frac{H}{R}.$$

Поскольку согласно условию задачи $H = R$, то окончательно получим:

$\Delta t = t\dfrac{R}{R} = t$ или $\Delta t = 1$ сут, т. е. часы на этой высоте отстанут на сутки.

Задача решена.

Ответ: $\Delta t = 1$ сут.

Задача 27

На сколько процентов надо уменьшить длину математического маятника, чтобы период его колебаний T_1 на высоте $H = 100$ км был равен периоду на Земле T_2? Радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

Дано:
$H = 100$ км
$T_1 = T_2$
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м

$\dfrac{\Delta l}{l_1}$ – ?

Обозначим $\Delta l = l_1 - l_2$ изменение длины маятника, l_1 – длину маятника на Земле, l_2 – длину маятника на высоте H.

Решение. Периоды гармонических колебаний математического маятника на Земле и на высоте H соответственно равны:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}}.$$

Согласно условию задачи $T_1 = T_2$, и поэтому

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}}, \quad \sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = \sqrt{\frac{l_2}{g_2}}$$

или $\dfrac{l_1}{g_1} = \dfrac{l_2}{g_2}$, откуда $l_2 = l_1\dfrac{g_2}{g_1}$ и

$$\Delta l = l_1 - l_2 = l_1 - l_1\frac{g_2}{g_1} = l_1\left(1 - \frac{g_2}{g_1}\right). \qquad (1)$$

Здесь g_1 – ускорение свободного падения на Земле, g_2 – оно же на высоте Н.

Для ответа на вопрос задачи разделим (1) на l_1:

$$\frac{\Delta l}{l_1} = 1 - \frac{g_2}{g_1}. \qquad (2)$$

Ускорения свободного падения на Земле и на высоте H соответственно равны:

$$g_1 = G\frac{M}{R^2} \quad (3) \qquad \text{и} \qquad g_2 = G\frac{M}{(R+H)^2}, \quad (4)$$

где G – гравитационная постоянная и M – масса земного шара.

Разделим (4) на (3), как этого требует равенство (2):

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{GMR^2}{(R+H)^2 GM} = \frac{R^2}{(R+H)^2} = \left(\frac{R}{R+H}\right)^2. \quad (5)$$

Теперь подставим (5) в (2): $\frac{\Delta l}{l_1} = 1 - \left(\frac{R}{R+H}\right)^2$. (6)

Выражение (6) можно существенно упростить, если учесть, что H^2 во много раз меньше R^2 и поэтому отношение $H^2/R^2 \approx 0$. Возведем в квадрат выражение в скобках и разделим его числитель и знаменатель на R^2:

$$\frac{\Delta l}{l_1} = 1 - \frac{R^2}{R^2 + 2RH + H^2} = 1 - \frac{\frac{R^2}{R^2}}{\frac{R^2}{R^2} + 2\frac{RH}{R^2} + \frac{H^2}{R^2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + 2\frac{H}{R}} = \frac{1 + 2\frac{H}{R} - 1}{1 + 2\frac{H}{R}} = \frac{2\frac{H}{R}}{1 + 2\frac{H}{R}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{2H}{R + 2H}}$$

Переведем в СИ единицу H: 100 км = $1 \cdot 10^5$ м.

Произведем вычисления:

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5}{64 \cdot 10^5 + 2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 0{,}03 = 3\%.$$

Ответ: $\Delta l / l_1 = 0{,}03 = 3\%$.

Задача 28

Математический маятник подвешен на нити и совершает гармонические колебания. Во сколько раз изменится период его колебаний, если температура в помещении, где он находится, повысится от t_1°C до t_2°C? Температурный коэффициент линейного расширения материала нити α известен.

Дано:
t_1°C
t_2°C
α

$\frac{T_2}{T_1}$ – ?

Решение. При повышении температуры увеличивается длина маятника, а вместе с ней и период.

Запишем формулы периода колебаний математического маятника при температурах t_1° и t_2°C:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad (1) \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}. \quad (2)$$

Здесь l_1 – длина маятника при температуре t_1°, а l_2 – его длина при температуре t_2°C.

Зависимости l_1 и l_2 от t_1° и t_2° определяют формулы

$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1°)$ (3) и $l_2 = l_0(1 + \alpha t_2°)$. (4)

Здесь l_0 – длина маятника при 0°C.

Подставим (3) в (1), а (4) в (2), после чего разделим второе выражение на первое:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_1^0)}{g}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_2^0)}{g}},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_2^0)}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_1^0)}{g}}} = \sqrt{\frac{l_0(1+\alpha t_2^0)}{l_0(1+\alpha t_1^0)}}, \quad \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1+\alpha t_2^0}{1+\alpha t_1^0}}}$$

Задача решена.

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{1+\alpha t_2^0}{1+\alpha t_1^0}}$.

Задача 29

Секундный маятник колеблется в движущемся с ускорением лифте, делая $N = 10$ колебаний за $t = 15$ с. Куда движется лифт и чему равно его ускорение a?

Дано:
$T_0 = 1$ с
$N = 10$
$t = 15$ с
$g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

a – ?

Обозначим T_0 период маятника в покоящемся лифте, g – ускорение свободного падения.

Решение. Словами «секундный маятник» нам дают понять, что период колебаний маятника в покоящейся системе отсчета $T_0 = 1$ с. Однако в движущемся лифте этот период

$$T = \frac{t}{N} = \frac{15}{10}\text{ с} = 1{,}5\text{ с},$$

т. е. больше периода $T_0 = 1$ с. Поскольку длина маятника l не меняется, значит, изменился знаменатель под корнем в формуле Гюйгенса

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (1)$$

Так как период T больше T_0, значит, знаменатель в формуле T меньше ускорения свободного падения g, причем он меньше на величину ускорения лифта. Следовательно, лифт движется с ускорением a вниз, и период колебаний маятника в этом случае будет

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}. \qquad (2)$$

Отсюда, зная уже период T, мы можем определить ускорение лифта a. Правда, нам здесь не известна длина маятника l, но ее мы можем исключить, поделив (1) на (2):

$$\frac{T_0}{T} = \frac{2\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\sqrt{\frac{l}{g-a}}} = \sqrt{\frac{l(g-a)}{gl}} = \sqrt{1-\frac{a}{g}}.$$

Отсюда найдем ускорение лифта a:

$$\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 = 1-\frac{a}{g}, \quad \frac{a}{g} = 1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2, \quad \boxed{a = g\left(1-\left(\frac{T_0}{T}\right)^2\right)}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$a = 9{,}8\left(1-\left(\frac{1}{1{,}5}\right)^2\right)\frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 5{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $a = 5{,}4$ м/с^2.

Задача 30

Два математических маятника одинаковой массы подвешены на двух нитях длиной $l_1 = 1$ м и $l_2 = 0{,}25$ м так, что их свободные концы находятся на одинаковом уровне (рис. 11-12). Найдем число столкновений N этих маятников, происшедших за время $t = 4$ с от начала движения маятника длиной l_2.

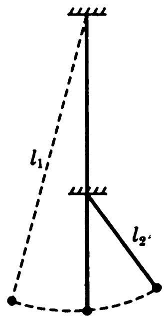


Рис. 11-12

Решение. Так как массы маятников одинаковы, то при ударе они обменяются импульсами, т. е. тот, который двигался, остановится, а тот, который покоился, придет в движение. Этот вывод следует из закона сохранения импульса и механической энергии.

Поскольку в условии задачи речь идет о длинах колеблющихся маятников, то для ее решения опять воспользуемся формулой Гюйгенса. Запишем ее для обоих маятников:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Здесь T_1 и T_2 – периоды колебаний маятников, т. е. времена, за которые каждый из них может сделать одно полное колебание. Но маятники, о которых идет речь в нашей задаче, сделают только половину колебания, после чего каждый из них остановится, передав свой импульс другому.

Вычислим, в течение какого времени каждый маятник будет двигаться от одного соударения до другого, т. е. найдем, чему равны половины периодов этих маятников:

$$\frac{T_1}{2} \text{ и } \frac{T_2}{2}: \ \frac{T_1}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{l_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad \frac{T_1}{2} = 3{,}14\sqrt{\frac{1}{9{,}8}}\ \text{с} = 1\ \text{с},$$

$$\frac{T_2}{2} = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{l_2}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}, \quad \frac{T_2}{2} = 3{,}14\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}8}}\ \text{с} = 0{,}5\ \text{с}.$$

Теперь будем рассуждать так. Через 0,5 с, после того как отвели второй маятник от положения равновесия, произойдет первое столкновение. Еще через 1 с произойдет второе. Таким образом, за 1,5 с произойдет два столкновения. После этого еще через 0,5 с произойдет третье столкновение, а еще через секунду – четвертое. Таким образом, за 3 с маятники столкнутся 4 раза, после чего еще через 0,5 с произойдет пятое столкновение, и при этом с момента начала отсчета времени колебаний маятников пройдет 3,5 с. Шестое столкновение произойдет еще через одну секунду, когда от начала колебаний пройдет 4,5 с. Но нас спрашивают, сколько столкновений произойдет за $t = 4$ с. Значит, за это время произойдет $N = 5$ столкновений маятников.

Ответ: $N = 5$.

Задача 31

Малый шарик массой m, подвешенный на длинной нити, совершает колебания. Во сколько раз изменится частота колебаний шарика, если ему сообщить положительный заряд q и поместить в однородное электрическое поле плоского конденсатора, обкладки которого расположены горизонтально (рис. 11-13)? Расстояние между обкладками d, на них подано напряжение U.

Дано:
m
q
d
U

$\dfrac{\nu_1}{\nu_2}$ – ?

Обозначим ν_1 частоту колебаний маятника до помещения его в электрическое поле, ν_2 – частоту колебаний маятника в электрическом поле.

Решение. Словами «малый шарик, подвешенный на длинной нити», нам дают понять, что этот маятник можно считать математическим и применить к его колебаниям законы колебаний математического маятника. Запишем формулу Гюйгенса, определяющую частоту свободных колебаний математического маятника ν_1, когда он был еще не заряжен и не находился в электрическом поле:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\,. \qquad (1)$$

Здесь l – длина нити, g – ускорение свободного падения. Когда шарик зарядили и поместили в электрическое поле, на него помимо силы тяжести $m\vec{g}$ стала действовать еще электрическая сила $\vec{F}$, сонаправленная с силой тяжести (поскольку нижняя обкладка, заряженная разноименно с зарядом шарика, стала его к себе притягивать, а верхняя отталкивать). Поэтому шарик, кроме ускорения свободного падения $\vec{g}$, приобрел еще и дополнительное ускорение $\vec{a}$, сонаправленное с ускорением $\vec{g}$. Это дополнительное ускорение $\vec{a}$ обусловлено силой F, действующей на заряженный шарик в электрическом поле конденсатора. Тогда формулу Гюйгенса для частоты ν_2 колебаний заряженного шарика в электрическом поле мы должны записать так:

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l}}\,. \qquad (2)$$

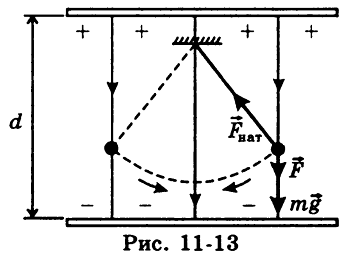


Рис. 11-13

По второму закону Ньютона ускорение a равно отношению силы F к массе шарика m:

$$a = \frac{F}{m}\,.$$

Силу F, действующую на шарик со стороны поля плоского конденсатора, определим как произведение заряда шарика q и напряженности E поля конденсатора:

$$F = qE.$$

Поскольку поле плоского конденсатора однородное, то его напряженность E связана с напряжением на обкладках U зависимостью

$$E = \frac{U}{d}.$$

С учетом этого $F = q\dfrac{U}{d}$ и $a = \dfrac{qU}{md}$. (3)

Подставим (3) в (2): $\nu_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{1}{l}\left(g + \dfrac{qU}{md}\right)}$. (4)

Теперь нам осталось разделить (4) на (1), и задача будет решена. Выполним это действие:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{1}{l}\left(g + \frac{qU}{md}\right)}}{2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}}, \qquad \boxed{\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 + \frac{qU}{mdg}}}$$

Задача решена.

Ответ: $\dfrac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{1 + \dfrac{qU}{mdg}}$.

Задача 32

При какой скорости поезда v маятник длиной $l = 11$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если расстояние между стыками рельсов $S = 12,5$ м?

Дано:
$l = 11$ см
$S = 12,5$ м
$g \approx 9,8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

v – ?

Решение. Явление резонанса, т. е. особенно сильное раскачивание маятника, при котором амплитуда его колебаний станет максимальной, наступит тогда, когда частота толчков, испытываемых поездом, а вместе с ним и маятником, станет равна собственной частоте колебаний этого маятника. А поскольку частота – это величина, обратная периоду колебаний, то справедливо будет и утверждение, что резонанс наступит тогда, когда промежуток времени от одного толчка на стыке рельсов до другого будет равен периоду собственных колебаний этого маятника.

Промежуток времени t от одного толчка до другого мы можем найти, считая движение поезда равномерным, по формуле $t = \frac{S}{v}$.

Период собственных колебаний математического маятника согласно формуле Гюйгенса

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поскольку, как мы уже отметили, при резонансе

$$t = T, \quad \text{тогда} \quad \frac{S}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Отсюда искомая скорость

$$\boxed{v = \frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}}$$

Задача в общем виде решена. Переведем единицу длины в СИ: 11 см = 0,11 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$v = \frac{12{,}5}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}11}}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 18{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: v = 18,8 м/с.

Задача 33

Математический маятник массой m = 0,01 кг колеблется согласно уравнению $x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Найти максимальную силу F_m, действующую на него, и его полную механическую энергию W. Чему равна длина маятника l? Все величины выражены в единицах СИ.

Дано:
m = 0,01 кг
$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$

F_m – ?
W – ?
l – ?

Решение. По второму закону Ньютона $F_m = ma_m$, где максимальное ускорение маятника $a_m = \omega^2 A$, поэтому $F_m = m\omega^2 A$.

Из уравнения в условии задачи следует, что A = 5 м и $\omega = \frac{\pi}{3}\frac{\text{рад}}{\text{с}}$,

поэтому $\boxed{F = \frac{5}{9}\pi^2 m}$

Одну величину мы нашли. Теперь найдем полную механическую энергию маятника W. По закону сохранения механической энергии она равна его максимальной кинетической энергии W_m:

$$W = W_m = \frac{mv_m^2}{2}, \text{ где максимальная скорость}$$

$$v_m = \omega A \text{ или } v_m = \frac{5}{3}\pi, \text{ поэтому } \boxed{W = \frac{m}{2}\left(\frac{5}{3}\pi\right)^2}$$

Поскольку $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$, то $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = \dfrac{g}{l}$, откуда $\boxed{l = \dfrac{9g}{\pi^2}}$

Произведем вычисления:

$$F_m = \frac{5}{9} \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}01 \text{ Н} = 0{,}055 \text{ Н},$$

$$W = \frac{0{,}01}{2}\left(\frac{5 \cdot 3{,}14}{3}\right)^2 \text{ Дж} = 0{,}14 \text{ Дж},$$

$$l = \frac{9 \cdot 9{,}8}{3{,}14^2} \text{ м} = 8{,}9 \text{ м}.$$

Ответ: $F_m = 0{,}055$ *Н*, $W = 0{,}14$ Дж, $l = 8{,}9$ м.

Задача 34

Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \cos \pi t$ м и $y = \cos\frac{\pi}{2}t$ м. Найти траекторию результирующего колебания точки (т. е. найти функцию $y = y(x)$).

Дано:
$x = \cos \pi t$ м
$y = \cos\frac{\pi}{2}t$ м
$y = y(x)$ – ?

Решение. Чтобы найти траекторию результирующего колебания, нам надо получить уравнение, которое устанавливает связь смещения x со смещением y для любого момента времени t. Для этого надо постараться исключить из этих уравнений время t, используя соответствующие формулы тригонометрии. В нашем случае можно поступить следующим образом. Поскольку смещение y равно косинусу половинного угла $\frac{\pi}{2}t$, то имеет смысл представить $\cos\frac{\pi t}{2}$ как функцию половинного аргумента

$$\cos\frac{\pi t}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \pi t}{2}}.$$

Теперь заменим $\cos\frac{\pi t}{2}$ на y, а $\cos \pi t$ на x (см. условие задачи): $y = \pm\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

Чтобы нам стало ясно, какую мы получим траекторию, возведем обе части этого равенства в квадрат: $y^2 = \frac{1+x}{2}$

или $$2y^2 = 1 + x.$$

Теперь мы видим, что траектория точки представляет собой параболу, поскольку в полученном уравнении координата x записана в первой степени, а y^2 – в квадрате.

Ответ: $2y^2 = 1 + x$, траектория результирующего колебания – парабола.

Задача 35

Материальная точка совершает гармонические колебания, двигаясь без трения в поле сил тяжести по внутренней поверхности полусферы объемом V_0 (рис. 11-14). Найти частоту ее колебаний ν.

Дано:
V_0
g

ν – ?

Решение. Находясь на краю полусферы, точка обладает максимальной потенциальной энергией $W_{\text{п}\,m} = mgR$. Если ее отпустить, то она станет двигаться вниз, и в точке O ее потенциальная энергия $W_{\text{п}\,m}$ полностью превратится в кинетическую

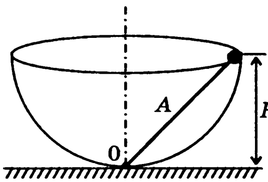


Рис. 11-14

энергию $$W_{\text{к}\,m} = \frac{mv_m^2}{2}.$$

По закону сохранения механической энергии

$$W_{\text{п}\,m} = W_{\text{к}\,m} \text{ или } mgR = \frac{mv_m^2}{2}, \text{ откуда } v_m^2 = 2gR. \quad (1)$$

Поскольку колебания гармонические, $v_m = \omega A$, где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая амплитуда колебаний, $A = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ – амплитуда колебаний.

С учетом этого $v_m = 2\pi\nu R\sqrt{2}$. (2)

Подставим (2) в (1): $(2\pi\nu)^2R^2 \cdot 2 = 2gR$,

откуда $$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (3)$$

Поскольку объем полусферы равен V_0, то объем целой сферы равен $2V_0$, где

$$2V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_0 = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда $R = \sqrt[3]{\frac{3V_0}{2\pi}}$. (4)

Подставив (4) в (3), получим окончательно

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{2\pi}{3V_0}}}}$$

Задача решена.

Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g\sqrt[3]{\frac{2\pi}{3V_0}}}$.

Задача 36

Ареометр массой m, имеющий площадь поперечного сечения S, плавает в электролите с плотностью жидкости ρ, находясь в равновесии. Его немного погружают в жидкость и отпускают. С какой частотой ν ареометр станет совершать вертикальные колебания?

Дано:	
m	
S	
ρ	
g	
ν – ?	

Решение. Ареометр – это прибор цилиндрической формы, применяемый для измерения плотности жидкости. Когда он плавает, силы тяжести и выталкивающая уравновешены. Когда его слегка погружают еще, выталкивающая сила увеличивается на величину $\Delta F_{выт}$, и за счет этой дополнительной силы маятник приобретает максимальное ускорение a_m. По второму закону Ньютона

$$\Delta F_{выт} = ma_m, \quad (1)$$

где по формуле выталкивающей силы $\Delta F_{выт} = \rho g \Delta V$. (2)

Здесь ΔV – изменение объема погруженной части ареометра:

$$\Delta V = \Delta h S, \quad (3)$$

где Δh – дополнительная глубина погружения, равная амплитуде колебания A.

Максимальное ускорение колебаний

$$a_m = \omega^2 A = \omega^2 \Delta h,$$

где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая частота колебаний. С учетом этого

$$a_m = (2\pi\nu)^2 \Delta h. \quad (4)$$

Подставим (3) в (2), а (4) в (1).

Получим $\Delta F_{выт} = \rho g \Delta h S$ и $\Delta F_{выт} = m(2\pi\nu)^2 \Delta h$, следовательно,

$\rho g \Delta h S = m(2\pi\nu)^2 \Delta h$, откуда $\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g S}{m}}}$

Задача решена.

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\rho g S}{m}}$.

Задача 37

В сообщающиеся сосуды U-образной формы налита ртуть. Ртуть вывели из состояния равновесия, и она стала совершать колебательное движение. Найти период T ее колебаний, если диаметр каждого сосуда d = 6 см, а масса ртути m = 200 г. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Дано:
d = 6 см
m = 200 г
$\rho = 13{,}6 \cdot 10^3 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$g = 9{,}8 \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

T – ?

Решение. Для решения этой задачи опять воспользуемся вторым законом Ньютона. Пусть уровень ртути в одном из колен сосудов сместился на расстояние A, например, повысился по сравнению с первоначальным положением (рис. 11-15). При этом уровень ртути в другом колене настолько же понизился. В результате под действием дополнительной силы тяжести Δmg в том колене, где уровень ртути выше, она станет совершать колебания с максимальным ускорением a_m. По второму закону Ньютона

$$\Delta mg = ma_m. \qquad (1)$$

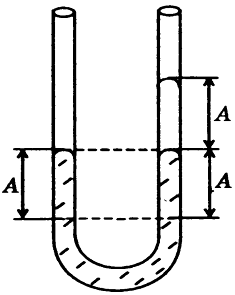


Рис. 11-15

Здесь $\Delta m = \rho\Delta V$ – разность масс ртути в обоих коленах в момент начала колебаний, $\Delta V = 2AS$ – разность объемов, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь поперечного сечения сосудов. С учетом этого

$$\Delta m = \rho \cdot 2A\,\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{2}\rho d^2 A. \qquad (2)$$

Максимальное ускорение a_m определим по формуле

$$a_m = \omega^2 A,$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – циклическая частота и A – амплитуда колебаний.

С учетом этого
$$a_m = \frac{4\pi^2}{T^2}A. \qquad (3)$$

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1) и из полученного выражения определить период T. Проделаем эти действия:

$$\frac{\pi}{2}\rho\, d^2 g A = m\frac{4\pi^2}{T^2}A, \quad \text{откуда} \quad \boxed{T = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{2\pi m}{\rho g}}}$$

Переведем все единицы в СИ: 6 см = 0,06 м, 200 г = 0,2 кг.

Произведем вычисления:

$$T = \frac{2}{0{,}06}\sqrt{\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}2}{13{,}6\cdot 10^3\cdot 9{,}8}}\ \text{с} = 0{,}1\ \text{с}.$$

Ответ: $T = 0{,}1$ с.

Задача 38

Представьте себе, что в земном шаре по хорде прорыт тоннель (рис. 11-16), в который брошено небольшое тело массой $m = 1$ кг. Какое время t будет двигаться тело от одного конца тоннеля до другого? Радиус земного шара $R = 6{,}4\cdot 10^6$ м. Изменением ускорения свободного падения можно пренебречь.

Дано:
$m = 1$ кг
$R = 6{,}4\cdot 10^6$ м
$g = 9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

t – ?

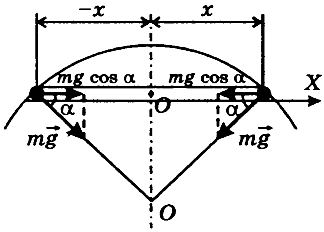


Рис. 11-16

Решение. Под действием нескомпенсированной составляющей силы тяжести, равной по модулю $mg\cos\alpha$ и направленной к точке O, тело будет двигаться с ускорением и в точке O достигнет максимальной скорости. После этого оно станет двигаться с замедлением до противоположного конца тоннеля под действием составляющей силы тяжести, направление которой теперь противоположно первоначальному. Остановившись в конце тоннеля, тело повернет назад и снова понесется с ускорением к точке O. Поэтому, достигнув противоположного конца тоннеля, тело станет двигаться обратно с нарастающей скоростью. Таким образом, оно будет совершать колебательное движение с периодом T, а искомое время t составит половину этого периода:

$$t = \frac{T}{2}. \tag{1}$$

По второму закону Ньютона

$$mg\cos\alpha = ma,\quad g\cos\alpha = a, \tag{2}$$

где a – мгновенное ускорение тела.

Уравнение гармонических колебаний тела будет иметь вид

$$x = A\cos\omega t. \tag{3}$$

Взяв вторую производную этого уравнения, найдем мгновенное ускорение тела a:

$$v = x' = -\omega A\sin\omega t,\quad a = v' = x'' = -\omega^2 A\cos\omega t. \tag{4}$$

Из сопоставления (3) и (4) следует, что

$$a = -\omega^2 x. \tag{5}$$

Из рис. 11-16 $\qquad \cos\alpha = \dfrac{-x}{R}$. $\qquad$ (6)

Подставим (5) и (6) в (2): $-g\dfrac{x}{R} = -\omega^2 x,\ \dfrac{g}{R} = \omega^2$.

Поскольку циклическая частота колебаний тела ω связана с периодом T выражением

$$\omega = \frac{2\pi}{T},\ \text{то}\ \frac{g}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,\ \text{откуда}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$t = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Мы видим, что время t от массы тела m не зависит.

Произведем вычисления:

$$t = 3{,}14\sqrt{\frac{6{,}4\cdot 10^6}{9{,}8}}\ \text{с} = 2{,}5\cdot 10^3\ \text{с} = 42\ \text{мин}.$$

Ответ: $t = 42$ мин (всего-то!).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Частота колебаний крыльев пчелы $\nu_1 = 400$ Гц, а период колебаний крыльев комара $T_ч = 2$ мс. На сколько больше взмахов крыльями сделает комар за время $t = 0{,}5$ мин, чем пчела?

Ответ: $\Delta N = t\left(\dfrac{1}{T_ч} - \nu_1\right) = 300$.

Задача 2. Когда пчела летит на клеверное поле, ее крылья колеблются с частотой $\nu_1 = 400$ Гц, а когда она летит обратно, то частота колебаний ее крыльев $\nu_2 = 300$ Гц. Скорость полета пчелы на поле $v_1 = 8$ м/с, а обратно $v_2 = 5$ м/с, расстояние от улья до поля $S = 200$ м. Найти разность ΔN между числом взмахов крыльев пчелы при полете на поле и обратно.

Ответ: $\Delta N = S\left(\dfrac{\nu_2}{v_2} - \dfrac{\nu_1}{v_1}\right) = 2$.

Задача 3. Колебательное движение точки описывается уравнением $x = 0{,}05 \cos 20\pi t$ см. Найти зависимость скорости и ускорения точки от времени, координату x_1, скорость v_1 и ускорение a_1 спустя $t = \dfrac{1}{60}$ с от начала колебания. Найти максимальную скорость v_m и максимальное ускорение точки a_m.

Ответ: $v = -3{,}14 \sin 20\pi t$ см/с, $a = -1{,}97 \cos 20\pi t$ м/с^2, $x_1 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ м, $v_1 = 0{,}027$ м/с, $a_1 = 0{,}99$ м/с^2, $v_m = 0{,}0314$ м/с, $a_m = 1{,}97$ м/с^2.

Задача 4. Уравнение колебаний точки имеет вид $x = 0{,}08 \cos \pi(t + 0{,}2)$ м. Определить амплитуду A, период T и начальную фазу α_0 колебаний точки.

Ответ: $A = 0{,}08$ м, $T = 2$ с, $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{5}$ рад.

Задача 5. Амплитуда гармонического колебания точки $A = 5$ см, период $T = 4$ с. Найти максимальную скорость точки v_m, а также ее скорость v через $t_1 = \dfrac{T}{8}$ от начала колебания. Найти максимальное ускорение a_m этой точки, а также ускорение a через $t_2 = \dfrac{T}{8}$ от момента времени, когда скорость точки стала равна v.

Ответ: $v_m = \dfrac{2\pi A}{T} = 0{,}078$ м/с, $v = -v_m \sin\dfrac{\pi}{4} = 0{,}055$ м/с,

$a_m = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 A = 0{,}12$ м/с^2, $a = a_m \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Задача 6. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 50$ мм и периодом $T = 2$ с. Начальная фаза колебаний $\alpha_0 = 90°$. Написать уравнение колебаний точки $x = x(t)$. Чему равно смещение точки x_1 в момент времени $t_1 = \dfrac{T}{4}$?

Ответ: $x = 0{,}05 \cos \pi(t + 0{,}5)$ м, $x_1 = -0{,}05$ м.

Задача 7. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 2$ с. Написать уравнение этих колебаний $x = x(t)$ и найти фазу колебаний α_1, когда смещение точки стало равно $x_1 = 5$ см.

Ответ: $x = 0{,}1 \cos \pi t$ м, $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}$ рад.

Задача 8. Материальная точка совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид $x = 2 \cos 5t$ см. Найти максимальные скорость v_m и ускорение a_m точки.

Ответ: $v_m = 0{,}1$ м/с, $a_m = 0{,}5$ м/с^2.

Задача 9. Составить уравнение гармонического колебания точки $x = x(t)$, если амплитуда колебаний $A = 5$ см, период колебания $T = 0{,}5$ с и начальная фаза колебания $\alpha_0 = 90°$. Построить график зависимости $x = x(t)$.

Ответ: $x = 0{,}05 \cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ м.

Задача 10. На идеально гладкой поверхности стола закреплена легкая пружина с жесткостью k, к концу которой прикреплен шарик массой m. Стол движется горизонтально со скоростью v_0 и в некоторый момент времени резко останавливается. С какой амплитудой A шарик начнет совершать колебания? Чему будут равны период колебаний T и максимальное ускорение шарика a_m?

Ответ: $A = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $a_m = \dfrac{k}{m}A$.

Задача 11. Уравнение движения материальной точки имеет вид $x = 0{,}2 \cos \pi t$. Чему равны средняя скорость $v_{ср}$ и среднее ускорение точки $a_{ср}$ за время $t = \dfrac{3T}{4}$? Все величины выражены в единицах СИ.

Ответ: $v_{ср} = 0{,}4$ м/с, $a_{ср} = 0{,}4$ м/с^2.

Задача 12. На рис. 11-17 приведен график зависимости скорости материальной точки от времени колебаний. Определить, пользуясь графиком, амплитуду A и циклическую (угловую) частоту ω колебаний. Записать уравнение колебаний $x = x(t)$.

Ответ: $A = 0{,}25$ м, $\omega = 0{,}25\,\pi$ рад/с, $x = 0{,}25 \cos 0{,}25\pi t$.

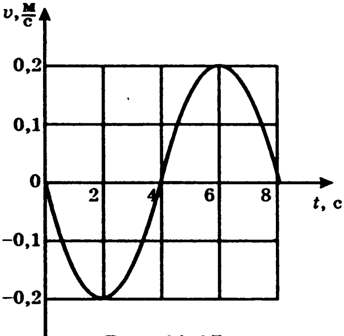


Рис. 11-17

Задача 13. На рис. 11-18 приведен график зависимости ускорения a колебаний материальной точки от времени t. Определить амплитуду A и циклическую частоту ω колебаний. Записать уравнение колебаний $x = x(t)$.

Ответ: $A = 0{,}016$ м,
$\omega = 0{,}5\,\pi$ рад/с,
$x = 0{,}016 \cos 0{,}5\pi t$.

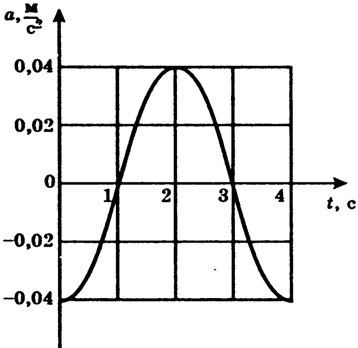


Рис. 11-18

Задача 14. Составить уравнение гармонического колебания точки $x = x(t)$, если амплитуда колебаний $A = 5$ см, период колебания $T = 0{,}5$ с и начальная фаза колебания $\alpha_0 = 90°$. Построить график зависимости $x = x(t)$.

Ответ:

$$x = 0{,}05 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ м.}$$

Задача 15. Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение, $W = 3\cdot10^{-5}$ Дж, максимальная сила, действующая на тело, $F_m = 1{,}5\cdot10^{-3}$ Н. Написать уравнение движения этого тела, если период колебаний $T = 2$ с и начальная фаза $\alpha_0 = 60°$.

Ответ: $x = 0{,}04 \cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ м.

Задача 16. Амплитуда гармонических колебаний материальной точки $A = 2$ см, полная энергия колебаний $W = 3\cdot10^{-7}$ Дж. При каком смещении x от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила $F = 2{,}25\cdot10^{-3}$ Н?

Ответ: $x = \dfrac{FA^2}{2W} = 1{,}5$ м.

Задача 17. К пружине подвешен груз. Зная, что максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{\text{км}} = 1$ Дж, найти жесткость пружины k. Амплитуда колебаний $A = 5$ см.

Ответ: $k = \dfrac{2W_{\text{км}}}{A^2} = 800$ Н/м.

Задача 18. К пружине подвешен груз массой $m = 10$ кг. Зная, что пружина под действием силы $F = 10$ Н растягивается на $x = 1$ см, определить период T вертикальных колебаний груза.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{mx}{F}} = 0{,}6$ с.

Задача 19. При фазе $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{3}$ рад смещение $x_1 = 1$ см. Найти амплитуду A и смещение x_2 при фазе $\alpha_2 = \dfrac{3}{4}\pi$ рад.

Ответ: $A = 0{,}02$ м, $x_2 = -0{,}014$ м.

Задача 20. Материальная точка массой m колеблется с частотой ν и амплитудой А. Найти зависимость от времени колебаний t потенциальной и кинетической энергий $W_{\text{п}}$ и $W_{\text{к}}$. Какова полная механическая энергия W этой точки?

Ответ: $W_{\text{п}} = 2m(\pi\nu A)^2 \cos^2(2\pi\nu t + \alpha_0)$,
$W_{\text{к}} = 2m(\pi\nu A)^2 \sin^2(2\pi\nu t + \alpha_0)$, $W = 2m(\pi\nu A)^2$.

Задача 21. Человек массой $m = 80$ кг качается на качелях. Амплитуда его колебаний $A = 1$ м. За $t_1 = 1$ мин он совершает $N = 15$ полных колебаний. Найти кинетическую $W_{\text{к}}$ и потенциальную энергию $W_{\text{п}}$ качающегося человека через $t = T/6$. Начальная фаза $\alpha_0 = 0$.

Ответ: $W_{\text{п}} = 2m\left(A\dfrac{\pi N}{t_1}\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 24{,}6$ Дж,

$$W_{\text{к}} = 2m\left(A\frac{\pi N}{t_1}\right)^2 - W_{\text{п}} = 74{,}0 \text{ Дж}.$$

Задача 22. Через какое время, считая от начала колебания, смещение гармонически колеблющейся точки составит $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ амплитуды? Период колебаний точки $T = 2$ с.

Ответ: $t = \dfrac{T}{12} = \dfrac{1}{6}$ с.

Задача 23. Через какое время t, считая от начала колебания, смещение x гармонически колеблющейся точки составит $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ амплитуды A? Частота колебаний точки $\nu = 0{,}2$ Гц.

Ответ: $t = \dfrac{1}{8\nu} = 0{,}6$ с.

Задача 24. Легкая пружина с жесткостью $k = 0{,}2$ Н/см подвешена к штативу. В некоторый момент к ее свободному концу подвесили гирю массой $m = 100$ г и осторожно отпустили. Запишите уравнение колебаний груза $x = x(t)$, приняв за начало отсчета колебаний и времени положение равновесия пружины с грузом.

Ответ: $x = \dfrac{mg}{k}\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t = 0{,}049 \cos 4{,}5\pi t$ м.

Задача 25. Между точками B и C шарик массой m совершает гармонические колебания с периодом T. Определить величину возвращающей силы F и кинетическую энергию $W_к$ шарика по прошествии времени t после прохождения им положения равновесия, если расстояние BC равно $2l$.

Ответ: $F = 4ml\left(\dfrac{\pi}{T}\right)^2 \sin\dfrac{2\pi}{T}t$, $W_к = 2m\left(\dfrac{\pi l}{T}\right)^2 \cos^2\dfrac{2\pi}{T}t$.

Задача 26. К резиновому шнуру длиной $l_0 = 40$ см с радиусом поперечного сечения $r = 1$ мм подвешена гиря массой $m = 0{,}5$ кг. Определить период Т вертикальных колебаний гири, если модуль Юнга для резины $E = 3$ Н/мм^2.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi}{r}\sqrt{\dfrac{ml_0}{\pi E}} = 0{,}9$ с.

Задача 27. Жесткость пружин рессоры вагона $k = 4{,}81\cdot10^5$ Н/м. Масса вагона с грузом $m = 6{,}4\cdot10^4$ кг. Вагон имеет $n = 4$ рессоры. При какой скорости v вагон начнет сильно раскачиваться вследствие толчков на стыках рельсов, если длина рельса $l = 12{,}8$ м?

Ответ: $v = \dfrac{l}{2\pi}\sqrt{\dfrac{nk}{m}} = 11{,}2$ м/с.

Задача 28. Во сколько раз изменится частота колебаний резиновой нити, если от нее отрезать четверть длины, а груз оставить тот же?

Ответ: $\nu_2/\nu_1 = 1{,}15$.

Задача 29. Во сколько раз изменится частота колебаний рессор автомобиля, если в него положить груз, масса которого составляет половину массы автомобиля?

Ответ: уменьшится в 1,2 раза.

Задача 30. В шар массой M (рис. 11-4) попадает летевшая со скоростью v пуля, масса которой в 10 раз меньше массы шара. С какой частотой ν станет колебаться шар с пулей? Чему равна будет амплитуда колебаний A? Жесткость пружины k.

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{1{,}1M}}$, $A = \dfrac{0{,}1Mv}{\sqrt{1{,}1kM}}$.

Задача 31. Во сколько раз частота колебаний груза массой m на рис. 11-5, *б* больше частоты колебаний этого же груза, изображенного на рис. 11-5, *а*? Жесткости пружин k_1 и k_2 известны.

Ответ: $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{k_1 k_2}$.

Задача 32. Два бруска массами по m каждый сжимают пружину, будучи связаны нитью (рис. 11-6). Когда нить пережигают, они начинают колебаться с частотой ν. Чему равна жесткость пружин k?

Ответ: $k = 2m(\pi\nu)^2$.

Задача 33. Математический маятник подвешен на нити и совершает гармонические колебания. Во сколько раз изменится частота его колебаний, если температура в помещении, где он находится, повысится от t_1°C до t_2°C? Температурный коэффициент линейного расширения материала нити α известен.

Ответ: $\dfrac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\dfrac{1+\alpha t_1^\circ}{1+\alpha t_2^\circ}}$.

Задача 34. Как относятся длины математических маятников, если за одно и то же время один из них совершает $N_1 = 10$, а второй $N_2 = 20$ колебаний?

Ответ: $\dfrac{l_2}{l_1} = \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

Задача 35. Маленький шарик подвесили на нити в вертикальном электрическом поле, направленном вниз. Период его свободных колебаний $T_0 = 0{,}626$ с. После помещения в электрическое поле период колебаний шарика стал $T = 0{,}314$ с. С какой силой F действовало электрическое поле на шарик, если масса шарика $m = 1$ г? Какова длина нити l, на которой подвешен шарик?

Ответ: $F = m\left(l\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 - g\right) = 0{,}029H,\ l = g\left(\dfrac{T_0}{2\pi}\right)^2 = 0{,}098$ м.

Задача 36. Для определения ускорения a, с которым поднимается ракета, в нее был помещен математический маятник длиной l, который при взлете совершил N полных колебаний за время t. Найти ускорение a ракеты.

Ответ: $a = l\left(\dfrac{2\pi N}{t}\right)^2 - g$.

Задача 37. Медный стержень с диаметром поперечного сечения d подвешен за середину к пружине и совершает гармонические колебания в однородном магнитном поле индукцией $\vec{B}$. Вектор $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости колебаний. Полная механическая энергия колебаний стержня равна W. Определить максимальное значение ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_m$, возбуждаемое в стержне в процессе его колебаний. Длина стержня l.

Ответ: $\mathcal{E}_m = \dfrac{B}{d}\sqrt{\dfrac{8Wl}{\pi\rho}}$.

Задача 38. Математический маятник массой m, подвешенный на нити длиной l, совершает гармонические колебания в однородном электрическом поле плоского воздушного конденсатора ($\varepsilon = 1$) с зарядом q на обкладках. Обкладки расположены вертикально, площадь обкладок S. Найти частоту колебаний ν этого маятника. Заряд маятника q_0.

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{l}\sqrt{g^2 + \left(\dfrac{qq_0}{\varepsilon_0 \varepsilon m S}\right)^2}}$.

Задача 39. Найти период колебаний математического маятника длиной l, подвешенного в вагоне, если поезд, двигаясь равноускоренно без начальной скорости ($v_0 = 0$), за время t прошел путь S.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{\left(\dfrac{2S}{t^2}\right)^2 + g^2}}}$.

Задача 40. Маятниковые часы, выверенные при комнатной температуре, «уходят» за $t = 1$ сут на $\Delta t = 2$ мин вследствие изменения длины маятника, вызванного понижением температуры. Во сколько раз нужно изменить длину маятника $\left(\dfrac{l_0}{l} - ?\right)$, чтобы часы шли верно?

Ответ: $\dfrac{l_0}{l} = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{\Delta t}{t}\right)^2} = 1{,}0028$.

Задача 41. Маятник укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Чему равен период T колебаний маятника во время движения тележки? Длина маятника l.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}}$.

Задача 42. Математический маятник длиной l при совершении гармонических колебаний сталкивается с упругой массивной стенкой в моменты, когда он принимает вертикальные положения. Найти частоту колебаний маятника ν. Длительностью столкновений пренебречь.

Ответ: $\nu = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

Задача 43. Период колебаний первого математического маятника T_1, а второго T_2. Чему равен период колебаний T маятника, длина которого равна сумме длин первого и второго маятников?

Ответ: $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

Задача 44. К пружине подвешена чаша весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний чаши равен $T_1 = 0{,}5$ с. После того, как на чашу положили добавочную гирю, период колебаний стал $T_2 = 0{,}6$ с. Насколько удлинилась пружина от прибавления добавочной гири?

Ответ: $\Delta l = \dfrac{g}{4\pi^2}\left(T_2^2 - T_1^2\right) = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ м.

Задача 45. Чему равно отношение потенциальной энергии точки $W_п$, совершающей гармоническое колебание, к ее кинетической энергии $W_к$ для момента времени $t = T/6$? Начальная фаза колебаний равна нулю.

Ответ: $W_п/W_к = 3$.

Задача 46. Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 4$ см. Определить полную энергию колебаний W гири, если под действием силы $F = 10$ H пружина удлиняется на $x = 0,5$ м.

Ответ: $W = \dfrac{FA^2}{2x} = 1,6 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Задача 47. Математический маятник колеблется с частотой ν. Амплитуда его колебаний A. Чему будет равна скорость v маятника в тот момент, когда его потенциальная энергия станет равна кинетической? Начальная фаза колебаний равна нулю.

Ответ: $v = \sqrt{2}\pi\nu A$.

Задача 48. Два математических маятника подвешены на нитях длиной $l_1 = 1$ м и $l_2 = 0,25$ м так, что их свободные концы находятся на одном уровне (рис. 11-12). Найти число столкновений N этих маятников за время $t = 2$ с от начала движения второго маятника.

Ответ: $N = 3$.

Задача 49. Найти амплитуду A и начальную фазу α_0 гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $x_1 = 4\cos \pi t$ см и $x_2 = 3\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ см. Написать уравнение результирующего колебания.

Ответ: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\dfrac{\pi}{2}} = 0,05$ м,

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{A_2\sin\dfrac{\pi}{2}}{A_1 + A_2\cos\dfrac{\pi}{2}} = 0,75,\ \alpha_0 = 37°,$$

$x = 0,05\cos(\pi t + 0,2\pi)$.

Задача 50. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность начальных фаз складываемых колебаний.

Ответ: $\Delta\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ рад.

Задача 51. Точка одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\cos\omega t$, $y = \sin\omega t$. Определить траекторию точки.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ – эллипс.

Задача 52. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin\pi t$ м и $y = 2\cos\pi t$ м. Найти траекторию результирующего колебания.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ – уравнение окружности с радиусом 2 м.

Задача 53. На горизонтальной поверхности лежит шарик массой m, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью k. Шарик оттянули от положения равновесия на расстояние x_0 и толкнули к положению равновесия, сообщив ему скорость v_0. Найти амплитуду A колебаний шарика.

Ответ: $A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{mv_0^2}{k}}$.

Задача 54. Материальная точка движется так, что ее координаты x и y совершают гармонические колебания по законам $x = A \sin \omega t$ и $y = A \cos 2\omega t$. Записать уравнение траектории точки.

Ответ: $y = A\left(1 - 2\dfrac{x^2}{A^2}\right)$ – уравнение параболы.

Задача 55. Математический маятник длиной $l = 10$ см имеет такую же частоту колебаний, что и пружинный маятник массой $m = 40$ г. Определить жесткость пружины k.

Ответ: $k = \dfrac{mg}{l} = 3{,}9$ Н/м.

12. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Механической волной называют процесс распространения механических колебаний частиц в упругой среде. В однородной среде волны распространяются с постоянной скоростью. Скоростью волны v (фазовой скоростью) называют скорость распространения возмущения в упругой среде – скорость перемещения гребня или впадины в поперечной волне и сгущения или разрежения в продольной.

Плоскость, перпендикулярная направлению распространения волны, называется волновой поверхностью. Все точки волновой поверхности колеблются в одинаковой фазе. Самая передняя волновая поверхность, отделяющая часть среды, вовлеченную в волновой процесс, от невозмущенной среды, называется фронтом волны. Фронт волны перемещается с фазовой скоростью, а волновая поверхность не перемещается.

Путь, пройденный фронтом волны за один период колебаний частиц среды, называется длиной волны. Длина волны λ равна произведению скорости волны v и периода T колебаний частиц среды, в которой волна распространяется:

$$\lambda = vT \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{v}{\nu},$$

где ν – частота колебаний частиц.

Длина волны равна расстоянию между соседними гребнями или впадинами в поперечной волне и между соседними сгущениями или разрежениями в продольной волне (рис. 12-1).

Также длина волны равна расстоянию между частицами, колеблющимися с разностью фаз 2π рад.

Если в условии задачи идет речь о частицах, колеблющихся в противофазе, т. е. разность фаз их колебаний $\Delta\alpha = \pi$, то расстояние между ними равно половине длины волны $\lambda/2$.

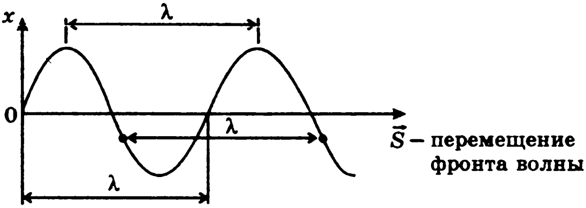


Рис. 12-1

Если на отрезке S укладывается N гребней, то длина волны

$$\lambda = \frac{S}{N}.$$

Если частицы среды совершают гармонические колебания, то в этой среде распространяется гармоническая волна. Уравнение бегущей гармонической волны

$$x = A\cos(\omega t - ky + \alpha_0) \text{ или } x = A\cos\alpha,$$

а отраженной

$$x = A\cos(\omega t + ky + \alpha_0) \text{ и тоже } x = A\cos\alpha.$$

Здесь x – смещение частиц среды, A – амплитуда их колебаний, ω – циклическая частота колебаний частиц, t – время колебаний частиц, равное времени распространения волнового процесса в среде, k – волновое число, y – координата фронта волны, α_0 – начальная фаза колебаний частиц, α – фаза колебаний.

Циклическую частоту ω и волновое число k можно определить так:

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{\omega}{v} \quad \text{или} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Не следует путать скорость колебаний частиц среды со скоростью волны. Напомним, что максимальная скорость колебаний частиц $v_{max} = \omega A$, а их максимальное ускорение $a_{max} = \omega^2 A$.

Скорость колебаний частиц изменяется от 0 до v_{max}, а скорость волны v в однородной среде постоянна. А вот период T, частота ν и циклическая частота ω частиц среды или волны – это одно и то же.

При переходе волны из одной среды в другую изменяются скорость v и длина волны λ, а циклическая частота ω, период T и частота ν при этом не изменяются.

Интерференцией волн называют наложение когерентных волн друг на друга, при котором энергия волны перераспределяется в пространстве так, что в одних местах наблюдается усиление волнового процесса (максимум), а в других – его ослабление (минимум).

Когерентными называют монохроматические волны с одинаковой фазой или постоянной разностью фаз.

Волна, все частицы которой колеблются с одинаковой частотой, называется монохроматической.

Условие максимума при интерференции: если разность хода волн Δr от их источников до места наложения содержит целое число длин волн или четное число длин полуволн, то в месте интерференции будет максимум.

Условие максимума: $\Delta r = k\lambda$ или $\Delta r = 2k\dfrac{\lambda}{2}$.

Условие минимума при интерференции: если разность хода волн Δr содержит нечетное число полуволн, то в месте интерференции будет минимум.

Условие минимума: $\Delta r = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$.

Здесь $k = 0; 1; 2; 3; ...$ – целое число.

Вследствие наложения бегущей и отраженной волн образуется стоячая волна. В такой волне наблюдаются узлы, в которых частицы не колеблются, и пучности, в которых частицы колеблются с наибольшей амплитудой. Расстояние между пучностями, или узлами, в стоячей волне равно половине длины бегущей волны.

Звуковыми волнами называют продольные волны звуковой частоты. Звуковой является частота от 16 до 20 000 Гц. Звуки с частотой ниже 16 Гц называют инфразвуками, а свыше 20 000 Гц – ультразвуками. И те, и другие человеческое ухо не слышит.

Скорость звука в воздухе при комнатной температуре и влажности 50–60% примерно $v_{зв} = 340$ м/с. В задачах о распространении звука в воздухе его скорость, как правило, можно считать известной и равной 340 м/с. Скорость звука в газах можно определить по формуле

$$v_{зв} = \sqrt{\gamma\frac{RT}{M}},$$

где $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$ – коэффициент Пуассона, i – число степеней свободы молекул газа, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная газовая постоянная, T – абсолютная температура газа, M – его молярная масса. У одноатомного газа $i = 3$, у двухатомного $i = 5$, у многоатомного $i = 6$.

При приближении источника звука (вибратора) к неподвижному приемнику (например, уху), частота звука, принимаемого приемником, увеличивается и высота тона повышается, а при удалении частота уменьшается и высота тона понижается. Это явление называется эффектом Доплера.

При приближении источника со скоростью v к неподвижному приемнику воспринимаемая частота ν определяется формулой

$$\nu = \nu_0\frac{v_{зв}}{v_{зв} - v},$$

а при удалении

$$\nu = \nu_0\frac{v_{зв}}{v_{зв} + v}.$$

Здесь ν_0 – частота звука, воспринимаемая приемником, когда источник неподвижен относительно него.

Наименьшая частота звука, испускаемого вибратором, называется основной частотой, а соответствующий ей тон – основным тоном. Все остальные тоны, издаваемые этим телом, называются обертонами.

Отношение энергии W, переносимой волной через некоторую площадку, перпендикулярную вектору скорости волны, ко времени t, за которое эта энергия перенесена, называется **потоком энергии волны** Φ:

$$\Phi = \frac{W}{t}.$$

Отношение потока энергии Φ к величине площадки S, перпендикулярной вектору скорости волны, называется плотностью потока, или интенсивностью волны I:

$$I = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{St}.$$

Громкостью звука L называют величину, выраженную в децибелах и определяемую выражением

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0},$$

где I – интенсивность звука, I_0 – интенсивность, ниже которой звук не слышен, называемая порогом слышимости.

Интенсивность звука (сила звука) и его громкость зависят от амплитуды колебаний звучащего тела и возрастают с увеличением амплитуды. А высота тона зависит от частоты колебаний вибратора и возрастает с увеличением частоты. Тон писка комара выше, чем тон жужжания мухи, так как комар машет крыльями чаще, чем муха.

Следует знать, что частота ν, циклическая частота ω, период T, интенсивность звука I, звуковое давление $p_{зв}$ – это его объективные характеристики, они зависят от приемника звука. А высота тона, тембр, громкость звука – это субъективные характеристики, они для разных приемников (разных ушей) могут быть разными.

Если вас спрашивают, что будет: максимум или минимум в месте наложения интерферирующих волн, то следует определить разность хода этих волн Δr и длину волны λ, а затем разделить разность хода на половину длины волны $\lambda/2$. И если в результате вы получите четное число, то будет максимум, а если это число будет нечетным, то минимум.

Решение отдельных задач

Задача 1

Поплавок на волнах за t = 20 с совершил N_1 = 30 колебаний, а на расстоянии S = 20 м наблюдатель насчитал N_2 = 10 гребней. Чему равна скорость волны υ?

Дано:	
t = 20 с N_1 = 30 S = 20 м N_2 = 10	*Решение.* Скорость волны равна отношению длины волны к периоду колебания частиц в ней:
υ – ?	$$\upsilon = \frac{\lambda}{T}. \quad (1)$$

Период T, т. е. время одного колебания, определим, разделив все время t, за которое насчитали N_1 гребней, на их число:

$$T = \frac{t}{N_1}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $v = \frac{\lambda N_1}{t}$. (3)

Длину волны λ найдем, разделив S на N_2:

$$\lambda = \frac{S}{N_2}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), решим задачу: $\boxed{v = \frac{SN_1}{tN_2}}$

Произведем вычисления: $v = \frac{20 \cdot 30}{20 \cdot 10} \frac{м}{с} = 3 \frac{м}{с}$.

Ответ: $v = 3$ м/с.

Задача 2

С лодки в спокойную воду бросили якорь, и по водной глади от места бросания пошли волны. Наблюдатель на берегу заметил, что за время $t_1 = 10$ с произошло $N = 25$ всплесков волны о берег. Найти расстояние S от лодки до берега, если расстояние между гребнями волн $\lambda = 1$ м, а волна добежала до берега за $t_2 = 40$ с.

Дано:
$t_1 = 10$ с
$N = 25$
$\lambda = 1$ м
$t_2 = 40$ с

S – ?

Решение. Волны в однородной среде распространяются равномерно и прямолинейно (кроме случая дифракции), поэтому для определения расстояния S запишем уравнение равномерного движения:

$$S = vt_1. \qquad (1)$$

Здесь v – скорость волны. Определим ее по формуле $v = \frac{\lambda}{T}$, а период T, как и в предыдущей задаче, найдем, разделив время t_2, за которое произошло N всплесков, на их число:

$$T = \frac{t_2}{N}, \quad \text{поэтому} \quad v = \frac{\lambda N}{t_2}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), решим задачу: $\boxed{S = \lambda N \frac{t_1}{t_2}}$

Произведем вычисления: $S = 1 \cdot 25 \frac{10}{40}$ м $= 6{,}25$ м.

Ответ: $S = 6{,}25$ м.

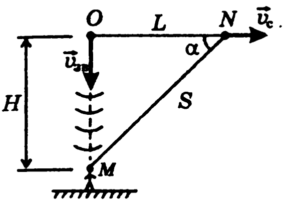


Рис. 12-2

Задача 3

Когда наблюдатель воспринял по звуку, что самолет находится у него над головой, он увидел его под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. С какой скоростью $v_с$ летел самолет? На каком расстоянии S от наблюдателя он находился в этот момент, если звук дошел до него за $t = 2$ с?

Дано:
$\alpha = 60°$
$v_{зв} = 340\ \frac{м}{с}$
$t = 2$ с
$v_с$ – ?
S – ?

Решение. Здесь главное – понять, что за какое время t самолет пролетел из точки O над головой наблюдателя расстояние L, за такое же время звук прошел из той же точки расстояние H (рис. 12-2). Поскольку и самолет, и звук двигались равномерно, то согласно уравнению равномерного движения

$L = v_с t$ и $H = v_{зв} t$, откуда

$$\frac{H}{L} = \frac{v_{зв} t}{v_с t} \quad \text{или} \quad \frac{H}{L} = \frac{v_{зв}}{v_с}.$$

Но из прямоугольного треугольника MON на рис. 12-2 следует, что $\frac{H}{L} = \operatorname{tg}\alpha$, поэтому $\frac{v_{зв}}{v_c} = \operatorname{tg}\alpha$, откуда

$$\boxed{v_c = \frac{v_{зв}}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

Расстояние S, которое является гипотенузой в этом треугольнике, можно определить так: $\sin\alpha = \frac{H}{S}$, откуда

$S = \frac{H}{\sin\alpha}$, где $H = v_{зв} t$, поэтому $\boxed{S = \frac{v_{зв} t}{\sin\alpha}}$

Произведем вычисления:

$$v_с = \frac{340}{\operatorname{tg} 60°}\ \frac{м}{с} = 200\ \frac{м}{с},\quad S = \frac{340 \cdot 2}{\sin 60°}\ м = 800\ м.$$

Ответ: $v_с = 200$ м/с, $S = 800$ м.

Задача 4

Из орудия произведен выстрел под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Через какое время t после выстрела артиллерист услышит звук разрыва, если снаряд вылетел из ствола орудия со скоростью $v_0 = 600$ м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь. Скорость звука $v_{зв} = 340$ м/с.

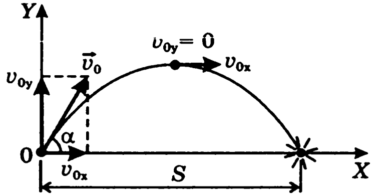


Рис. 12-3

Дано:
$\alpha = 45°$
$v_0 = 600\ \frac{м}{с}$
$v_{зв} = 340\ \frac{м}{с}$

t – ?

Решение. В направлении оси OX снаряд движется равномерно со скоростью $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ и пролетает расстояние S за время t_1 (рис. 12-3). Согласно уравнению равномерного движения

$$S = v_{0x}t_1 \text{ или } S = v_0 t_1 \cos\alpha. \qquad (1)$$

После взрыва звук проходит это же расстояние S со скоростью $v_{зв}$ за время t_2, тоже равномерно, поэтому

$$S = v_{зв}t_2. \qquad (2)$$

Время t, через которое артиллерист услышит взрыв, складывается из времени полета снаряда t_1 и времени распространения звука обратно к артиллеристу:

$$t = t_1 + t_2. \qquad (3)$$

Выразим из (1) время t_1, а из (2) – время t_2 и подставим их в (3):

$$t_1 = \frac{S}{v_0 \cos\alpha},\ t_2 = \frac{S}{v_{зв}},\ t = \frac{S}{v_0\cos\alpha} + \frac{S}{v_{зв}}$$

или

$$t = S\left(\frac{1}{v_0\cos\alpha} + \frac{1}{v_{зв}}\right). \qquad (4)$$

Но здесь нам не известно расстояние S. Зато мы знаем, что время полета снаряда по горизонтали t_1 на расстояние S равно удвоенному времени его взлета на максимальную высоту с начальной скоростью $v_{оy} = v_о \sin\alpha$, где проекция его скорости v_y на ось OY равна нулю.

Из кинематики известно, что $v_y = v_{оy} - g\frac{t_1}{2}$, где $v_{оy} = v_о \sin\alpha$, поэтому $v_y = v_о \sin\alpha - 0{,}5gt_1$. Здесь $g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Поскольку $v_y = 0$, то

$v_0 \sin\alpha = 0{,}5gt_1$, откуда $t_1 = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.

С учетом этого согласно (1)

$$S = v_0 \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \cos\alpha = 2\frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4), мы «уйдем» от неизвестного расстояния S и решим задачу в общем виде:

$$t = \frac{v_0^2}{g}\left(\frac{1}{v_0 \cos\alpha} + \frac{1}{v_{зв}}\right)\sin 2\alpha$$ или окончательно

$$\boxed{t = \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{v_0}{v_{зв}}\right)\sin 2\alpha}$$

Произведем вычисления:

$$t = \frac{600}{9{,}8}\left(\frac{1}{\cos 45^\circ} + \frac{600}{340}\right)\sin 90^\circ \text{ с} = 194 \text{ с}.$$

Ответ: $t = 194$ с.

Задача 5

На расстоянии $S = 1068$ м от наблюдателя ударяют молотком по железнодорожному рельсу. Наблюдатель, приложив ухо к рельсу, услышал звук на время $\Delta t = 3$ с раньше, чем он дошел до него по воздуху. Найти скорость звука v_1 в стали. Скорость звука в воздухе принять равной $v_2 = 340$ м/с.

Дано:
$S = 1068$ м
$\Delta t = 3$ с
$v_2 = 340 \dfrac{м}{с}$

v_1 – ?

Решение. Очевидно, что в стали звук будет распространяться быстрее, чем в воздухе. Пусть время распространения звука в воздухе t_2, а в стали – t_1. Тогда промежуток времени

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

Звук в однородной среде распространяется прямолинейно и равномерно. Поэтому определим времена t_1 и t_2 из уравнения равномерного движения:

$$t_1 = \frac{S}{v_1} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{S}{v_2}.$$

Подставив эти равенства в предыдущую формулу, получим

$$\Delta t = \frac{S}{v_2} - \frac{S}{v_1}.$$

Отсюда определим искомую скорость звука в стали v_1:

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} - \Delta t \text{, откуда } \boxed{v_1 = \frac{S}{\frac{S}{v_2} - \Delta t}}$$

Произведем вычисления:

$$v_1 = \frac{1068}{\frac{1068}{340} - 3} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 7{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v_1 = 7{,}6 \cdot 10^3$ м/с.

Задача 6

Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты H = 680 м. Выстрел производится вертикально вверх. Какова начальная скорость пули v_0? Скорость звука в воздухе $v_{зв}$ = 340 м/с. Сопротивлением движению пули пренебречь.

Дано:
$H = 680$ м
$v_{зв} = 340 \frac{\text{м}}{\text{с}}$
$g = 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

v_0 – ?

Решение. Запишем уравнения движения звука и пули. Звук распространяется равномерно и прямолинейно во всех направлениях, в том числе и вверх. Поэтому уравнение движения звука $H = v_{зв}t$. (1)

Движение пули вверх будет равнозамедленным с ускорением свободного падения. Поэтому уравнение движения пули

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Здесь t – время распространения звука на высоту H и одновременного со звуком взлета пули на эту высоту. Поскольку нам это время не известно, исключим его из этих уравнений. Для этого выразим из уравнения (1) время t и подставим его в уравнение (2):

$$t = \frac{H}{v_{зв}}\text{, тогда}$$

$$H = v_0 \frac{H}{v_{зв}} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{v_{зв}}\right)^2 \text{ или } 1 = \frac{v_0}{v_{зв}} - \frac{gH}{2v_{зв}^2}.$$

Теперь отсюда найдем искомую скорость v_0, поскольку все остальные величины нам известны:

$$\frac{v_0}{v_{зв}} = 1 + \frac{gH}{2v_{зв}^2}, \quad v_0 = v_{зв} + \frac{gH}{2v_{зв}}.$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$v_0 = \left(340 + \frac{9{,}8 \cdot 680}{2 \cdot 340}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}} = 350\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v_0 = 350$ м/с.

Задача 7

Звуковые колебания имеют в первой среде длину волны вдвое больше, чем во второй. Во сколько раз изменится скорость распространения звуковой волны при переходе из первой среды во вторую?

Дано:
$\lambda_1 = 2\lambda_2$

$\dfrac{v_1}{v_2}$ – ?

Обозначим λ_1 длину волны в первой среде, λ_2 – длину волны во второй среде, v_1 – скорость волны в первой среде, v_2 – скорость волны во второй среде.

Решение. Следует помнить, что при переходе звуковой волны из одной среды в другую ни период, ни частота колебаний частиц в волне не изменяются, а изменяются скорость и длина волны. Поэтому длина волны в первой среде определяется формулой

$$\lambda_1 = v_1 T,$$

а из второй

$$\lambda_2 = v_2 T.$$

Разделив эти уравнения друг на друга, мы исключим не известный нам период T и сразу определим искомое отношение $\dfrac{v_1}{v_2}$:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1 T}{v_2 T} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Поскольку согласно условию задачи $\lambda_1 = 2\lambda_2$, то

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = 2}$$

Ответ: $v_1/v_2 = 2$.

Задача 8

Одна точка волны отстоит от вибратора (источника колебаний) на расстоянии $S_1 = 10$ м, а вторая – на расстоянии $S_2 = 16$ м (рис. 12-4), причем обе точки лежат на одном луче (т. е. на прямой, вдоль которой от вибратора распространяется энергия, переносимая волной). Найти разность фаз колебаний этих

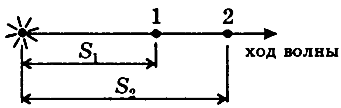


Рис. 12-4

точек $\Delta\alpha$, если скорость волны $v = 300$ м/с. Частота колебаний $\nu = 100$ Гц.

Дано:	
$S_1 = 10$ м	
$S_2 = 16$ м	
$v = 300\ \frac{м}{с}$	
$\nu = 100$ Гц	
$\Delta\alpha$ – ?	

Решение. Пусть фаза колебаний первой точки α_1, а второй – α_2, тогда разность фаз колебаний этих точек

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Фаза колебаний определяется произведением циклической частоты ω, одинаковой для всех точек на луче, и времени t, за которое волна добежала от вибратора до данной точки. Поэтому

$$\alpha_1 = \omega t_1 + \alpha_0 \text{ и } \alpha_2 = \omega t_2 + \alpha_0,$$

где $\omega = 2\pi\nu$, поэтому $\alpha_1 = 2\pi\nu t_1 + \alpha_0$, $\alpha_2 = 2\pi\nu t_2 + \alpha_0$.

Здесь t_1 – время, за которое волна распространилась от вибратора до точки 2, двигаясь равномерно и прямолинейно со скоростью v и проходя при этом пути S_1 и S_2. Из уравнения равномерного и прямолинейного движения следует, что

$$t_1 = \frac{S_1}{v} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{S_2}{v}.$$

Подставив эти выражения в формулы фаз α_1 и α_2, получим:

$$\alpha_1 = 2\pi\nu\frac{S_1}{v} + \alpha_0 \quad \text{и} \quad \alpha_2 = 2\pi\nu\frac{S_2}{v} + \alpha_0.$$

Теперь подставим полученные выражения в формулу разности фаз $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = 2\pi\nu\frac{S_2}{v} + \alpha_0 - 2\pi\nu\frac{S_1}{v} - \alpha_0, \quad \boxed{\Delta\alpha = \frac{2\pi\nu}{v}(S_2 - S_1)}$$

Подставим числа и произведем вычисления. При этом учтем, что, поскольку разность фаз, как и фаза, измеряется в радианах, то заменять π на 3,14 при подстановке численных значений в полученную формулу не нужно. Тогда мы получим ответ в долях π (так всегда следует поступать, когда вы вычисляете величину угла или фазы):

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi\cdot 100}{300}(16 - 10) \text{ рад} = 4\pi \text{ рад}.$$

Ответ: $\Delta\alpha = 4\pi$ рад.

Задача 9

Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0{,}25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти скорость распространения колебаний (т. е. скорость волны) $v_в$ и максимальную скорость колебаний частиц воздуха v_m.

Дано:	Решение.
$\nu = 500$ Гц	
$A = 0,25$ мм	
$\lambda = 70$ см	
$v_в$ – ?	
v_m – ?	

Решение. Скорость волны $v_в$ мы можем определить сразу, воспользовавшись формулой, устанавливающей связь длины волны λ с частотой колебаний ν частиц в ней:

$$\lambda = \frac{v_в}{\nu}.$$

Отсюда $\boxed{v_в = \lambda\nu}$

Чтобы найти максимальную скорость частиц в волне v_{max}, надо взять первую производную смещения x по времени. Согласно уравнению колебаний частиц в волне смещение

$$x = A\cos(\omega t + \alpha_0).$$

Скорость частиц v изменяется с течением времени по закону $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha_0)$.

Когда $\sin(\omega t + \alpha_0) = 1$, $v = v_{max}$, значит, $v_m = \omega A$.

Циклическая частота колебаний ω связана с частотой ν соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Тогда $\boxed{v_m = 2\pi\nu A}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 0,25 мм = $25\cdot10^{-5}$ м, 70 см = 0,7 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$v_в = 0,7\cdot500\,\frac{м}{с} = 350\,\frac{м}{с},$$

$$v_m = 2\cdot3,14\cdot500\cdot25\cdot10^{-5}\,\frac{м}{с} = 0,8\,\frac{м}{с}.$$

Ответ: $v_в = 350$ м/с, $v_m = 0,8$ м/с.

Задача 10

Смещение x от положения равновесия точки в момент времени $t = \frac{T}{3}$ равно половине амплитуды A. Найти длину бегущей волны λ. Расстояние от точки до источника колебаний $r = 4$ см.

Дано:
$\alpha_0 = 0$
$t = \frac{T}{3}$
$x = \frac{A}{2}$
$r = 4$ см

λ – ?

Решение. Поскольку в условии задачи говорится о смещении и амплитуде точки (дано соотношение между этими величинами) и, кроме того, речь идет о расстоянии между источником и точкой и о длине бегущей волны, то для решения задачи воспользуемся уравнением бегущей волны, в которое входят все эти величины:

$$x = A\cos(\omega t - kr + \alpha_0).$$

Поскольку отсчет времени идет от положения равновесия, т. е. начальная фаза $\alpha_0 = 0$, то

$$x = A\cos(\omega t - kr).$$

Здесь k – волновое число, которое можно выразить через длину волны с помощью соотношения

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Тогда с учетом, что $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, получим

$$x = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}r\right).$$

Теперь подставим в это уравнение вместо x половину амплитуды A согласно условию задачи, а вместо t подставим $\dfrac{T}{3}$ и сократим неизвестные амплитуду A и период T:

$$\frac{A}{2} = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{3} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right), \text{ откуда } \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi r}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}.$$

Если косинус аргумента $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\pi r}{\lambda}$ равен $1/2$, то сам аргумент равен $\dfrac{\pi}{3}$: $\quad \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{2\pi r}{\lambda} = \dfrac{\pi}{3}$.

Отсюда $\dfrac{2\pi r}{\lambda} = \dfrac{\pi}{3}$ и $\boxed{\lambda = 6r}$

Задача в общем виде решена. Подставим численное значение r и вычислим λ:

$\lambda = 6 \cdot 4$ см $= 24$ см.

Ответ: $\lambda = 24$ см.

Задача 11

Найти смещение x от положения равновесия точки, расположенной на расстоянии $r = \dfrac{\lambda}{6}$ от источника колебаний, для момента времени $t = \dfrac{T}{4}$. Амплитуда колебаний $A = 2$ см.

Дано:	
$r = \frac{\lambda}{6}$	
$t = \frac{T}{4}$	
$A = 2$ см	
$\alpha_0 = 0$	
x – ?	

Решение. Запишем уравнение бегущей волны: $x = A\sin(\omega t - kr + \alpha_0)$.

Здесь $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число и $\alpha_0 = 0$ – начальная фаза колебаний точки.

Поскольку отсчет времени идет от положения равновесия, мы записали уравнение синусоидальной волны и приняли начальную фазу равной нулю.

С учетом всего этого, а также условия задачи, запишем:

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4} - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{6}\right) = A\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = A\sin\frac{\pi}{6}.$$

Поскольку $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\boxed{x = \frac{A}{2}}$

Произведем вычисления: $x = \frac{2}{2}$ см $= 1$ см.

Ответ: $x = 1$ см.

Задача 12

От одного источника до точки М звуковая волна доходит за время $t_1 = 0{,}67$ с, а от второго источника до этой же точки волна доходит за $t_2 = 0{,}7$ с. Что будет наблюдаться в точке М: усиление или ослабление звука, если волны когерентные с длиной волны $\lambda = 6{,}8$ м.

Дано:	
$t_1 = 0{,}67$ с	
$t_2 = 0{,}7$ с	
$\lambda = 6{,}8$ м	
$v = 340\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$	
Усиление или ослабление?	

Решение. Усиление волн при интерференции будет наблюдаться, если в разности хода волн $\Delta r = r_2 - r_1$ будет укладываться целое число длин волн или четное число полуволн, а ослабление будет, если в разности хода Δr будет укладываться нечетное число длин полуволн. Следовательно, для решения задачи нам надо найти разность хода волн Δr и разделить ее на $\frac{\lambda}{2}$. И если получится четное число k, значит, результатом интерференции будет максимум, а если нечетное, то минимум.

Для нахождения разности хода Δr определим расстояния r_1 и r_2 от первого и второго источников до точки М:

$r_1 = vt_1$ и $r_2 = vt_2$, поэтому $\Delta r = vt_2 - vt_1 = v(t_2 - t_1)$.

Теперь разделим Δr на $\lambda/2$:

$$\boxed{k = \frac{2v(t_2 - t_1)}{\lambda}}$$

Подставим числа и вычислим число полуволн k:

$$k = \frac{2 \cdot 340(0{,}7 - 0{,}67)}{6{,}8} = 3.$$

Число полуволн нечетное, значит, в точке M будет ослабление волн.

Ответ: ослабление.

Задача 13

Средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа $\bar{v}_{кв} = 500$ м/с. Чему равна скорость звука $v_{зв}$ в этом газе?

Дано:	
$i = 5$	
$\bar{v}_{кв} = 500\ \frac{м}{с}$	
$v_{зв}$ – ?	

Решение. Запишем формулу скорости звука в газе:

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \qquad (1)$$

где

$$\gamma = \frac{i+2}{i} \qquad (2)$$

– коэффициент Пуассона, i – число степеней свободы молекул газа, $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – молярная (универсальная) газовая постоянная, М – молярная масса газа и Т – его абсолютная температура.

Среднюю квадратичную скорость молекул определяет формула

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Значит,

$$\sqrt{\frac{RT}{M}} = \frac{v_{кв}}{\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{v_{зв} = \bar{v}_{кв}\sqrt{\frac{i+2}{3i}}}$$

Произведем вычисления: $v_{зв} = 500\sqrt{\frac{5+2}{3 \cdot 5}}\ \frac{м}{с} = 342\ \frac{м}{с}$.

Ответ: $v_{зв} = 342$ м/с.

Задача 14

Найти основную частоту колебаний ν_0 стальной струны, излучающей звуковую волну, если длина струны l = 60 см, диаметр ее поперечного сечения d =0,5 мм, а сила натяжения $F_н$ = 0,3 кН. Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³.

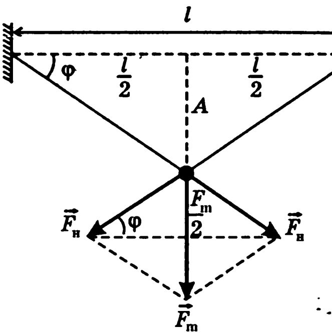


Рис. 12-5

Дано:
l = 60 см
d = 0,5 мм
$F_н$ = 0,3 кН
$\rho = 7{,}8 \cdot 10^3 \dfrac{кг}{м^3}$

ν_0 – ?

Решение. Пусть струну натягивают, прикасаясь к ее середине (рис. 12-5). Угол φ между ненатянутой и натянутой струной обычно мал, поэтому

$$\sin\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2A}{l}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\sin\varphi = \frac{F_m}{2F_н}. \qquad (2)$$

Приравниваем (1) и (2):

$$\frac{2A}{l} = \frac{F_m}{2F_н}, \text{ откуда } F_m = \frac{4AF_н}{l}. \qquad (3)$$

Здесь F_m – равнодействующая сил натяжения обеих половин струны, А – амплитуда ее будущих колебаний.

По второму закону Ньютона $F_m = ma_m$, (4)

где $m = \rho V$ – масса струны, $V = \dfrac{\pi d^2}{4} l$ – ее объем, поэтому

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} l. \qquad (5)$$

Максимальное ускорение струны a_m связано с основной частотой ее колебаний ν_0 формулой

$$a_m = \omega^2 A = (2\pi\nu_0)^2 A, \qquad (6)$$

где $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ – циклическая частота колебаний струны.

Подставим (5) и (6) в (4):

$$F_m = \rho \frac{\pi d^2}{4} l (2\pi\nu_0)^2 A. \qquad (7)$$

Нам осталось приравнять (3) и (7) и, сократив амплитуду А, найти основную частоту колебаний струны ν_0, равную частоте излучаемой волны. Проделаем эти действия: $\frac{4AF_н}{l} = \rho\frac{\pi d^2}{4}l\cdot 4(\pi\nu_0)^2 A$, $4F_н = \pi\rho(\pi dl\nu_0)^2$, откуда

$$\boxed{\nu_0 = \frac{2}{\pi dl}\sqrt{\frac{F_н}{\pi\rho}}}$$

Переведем все единицы в СИ: 60 см = 0,6 м, 0,5 мм = $5\cdot10^{-3}$ м, 0,3 кН = 300 Н,
Произведем вычисления:

$$\nu_0 = \frac{2}{3{,}14\cdot5\cdot10^{-3}\cdot0{,}6}\sqrt{\frac{300}{3{,}14\cdot7{,}8\cdot10^3}}\ \text{Гц} = 117\ \text{Гц}.$$

Ответ: $\nu_о$ = 117 Гц.

Задача 15

Ружейная пуля летит со скоростью v = 200 м/с. Найти, во сколько раз изменится высота тона свиста пули для неподвижного наблюдателя, мимо которого пролетает пуля. Скорость звука принять равной $v_{зв}$ = 335 м/с.

Дано:

$v = 200\ \frac{м}{с}$

$v_{зв} = 335\ \frac{м}{с}$

$\frac{\nu_{пр}}{\nu_{уд}}$ – ?

Решение. Согласно эффекту Доплера при приближении источника звука (пули) к неподвижному приемнику (наблюдателю) частота излучаемых им волн возрастает, а при удалении, наоборот, убывает. При этом частота $\nu_{пр}$, воспринимаемая неподвижным наблюдателем при приближении к нему пули, определяется формулой

$$\nu_{пр} = \nu_0\frac{v_{зв}}{v_{зв} - v}.$$

Здесь $\nu_о$ – частота звука, испускаемого неподвижным источником.

При удалении источника звука – пули – от неподвижного наблюдателя частота звука $\nu_{уд}$, воспринимаемого им, определяется формулой

$$\nu_{уд} = \nu_0\frac{v_{зв}}{v_{зв} + v}.$$

Разделив (1) на (2), мы ответим на вопрос задачи:

$$\frac{\nu_{пр}}{\nu_{уд}} = \frac{\nu_0\nu_{зв}(\nu_{зв} + v)}{(\nu_{зв} - v)\nu_0\nu_{зв}},\quad \boxed{\frac{\nu_{пр}}{\nu_{уд}} = \frac{\nu_{зв} + v}{\nu_{зв} - v}}$$

Произведем вычисления: $\frac{\nu_{пр}}{\nu_{уд}} = \frac{335 + 200}{335 - 200} = 4$.

Ответ: $\nu_{пр}/\nu_{уд}$ = 4.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Расстояние между соседними гребнем и впадиной $S = 1,5$ м. Сколько полных колебаний N сделает поплавок за время $t = 30$ с, упав на спокойную воду пруда, если скорость волны $v = 2$ м/с?

Ответ: $N = \dfrac{vt}{2S} = 20$.

Задача 2. На спокойную поверхность озера с лодки бросили якорь. По водной поверхности от места бросания пошли волны. Наблюдатель на берегу заметил, что волна дошла до него через время $t_1 = 40$ *с* с момента бросания, а за время $t_2 = 8$ *с* было насчитано $N_1 = 15$ всплесков о берег. Человек в лодке на расстоянии $S = 2$ м насчитал $N_2 = 4$ гребня. Чему равно расстояние S_0 от лодки до берега? С какой скоростью v двигалась волна?

Ответ: $S_0 = \dfrac{SN_1t_1}{N_2t_2} = 37{,}5$ м, $v = \dfrac{S_0}{t_1} = 0{,}94$ м/с.

Задача 3. Когда наблюдатель воспринял по звуку, что самолет находится у него над головой, он увидел его под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. На какой высоте H над землей летел самолет? Скорость звука $v_{зв} = 340$ м/с. Расстояние S от наблюдателя до самолета в тот момент, когда он его заметил, равнялось 1 км. Сколько времени t шел звук до наблюдателя?

Ответ: $H = S\sin\alpha = 700$ м, $t = \dfrac{H}{v_{зв}} = 2$ с.

Задача 4. Из орудия произведен выстрел под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Артиллерист услышал звук взрыва через $t = 2$ мин после выстрела. На каком расстоянии S от орудия разорвался снаряд, упав на землю?

Ответ: $S = v_{зв}\left(t + \dfrac{v_{зв}}{g}\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{\dfrac{v_{зв}}{g}\left(2t + \dfrac{v_{зв}}{g}\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}\right) = 19{,}5$ км.

Задача 5. Мотоциклист, движущийся по прямолинейному участку дороги, увидел, как человек, стоящий у дороги, ударил стержнем по висящему рельсу, а через $\Delta t = 2$ с услышал звук. С какой скоростью v двигался мотоциклист, если он проехал мимо человека через $t = 36$ с после начала наблюдения? Скорость звука в воздухе принять равной $v_{зв} = 340$ м/с.

Ответ: $v = \dfrac{v_{зв}\Delta t}{t - \Delta t} = 20$ м/с.

Задача 6. Длина волны в воздухе для самого низкого мужского голоса $\lambda_1 = 4$ м, а для самого высокого женского голоса $\lambda_2 = 0{,}25$ м. Найти разность частот $\Delta\nu$ колебаний, приняв скорость звука $v_{зв} = 340$ м/с. Найти разность периодов ΔT колебаний.

Ответ: $\Delta\nu = v_{зв}\left(\dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{1}{\lambda_1}\right) = 1275$ Гц, $\Delta T = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{v_{зв}} = 0{,}01$ с.

Задача 7. Длина звуковой волны $\lambda_1 = 3$ м, ее скорость в воздухе $v_{зв1} = 340$ м/с. Чему равна длина звуковой волны λ_2 в воде, если там ее скорость $v_{зв2} = 1400$ м/с?

Ответ: $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{v_2}{v_1} = 12$ м.

Задача 8. Найти длину волны λ, если период колебаний частиц $T = 0{,}2$ с и волна за $t = 10$ с пробегает $r = 3$ км.

Ответ: $\lambda = r\dfrac{T}{t} = 60$ м.

Задача 9. Определить скорость v распространения волн в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды $\Delta\alpha = 60°$, а точки отстоят от вибратора на расстояниях $r_1 = 20$ см и $r_2 = 30$ см и находятся на одном луче. Частота колебаний $\nu = 25$ Гц.

Ответ: $v = 2\pi\nu\dfrac{r_2 - r_1}{\Delta\alpha} = 15$ м/с.

Задача 10. Волны распространяются в упругой среде со скоростью $v = 100$ м/с. Наименьшее расстояние между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно $r = 1$ м. Определить частоту колебаний ν частиц в волне.

Ответ: $\nu = \Delta\alpha\dfrac{v}{2\pi r} = 50$ Гц.

Задача 11. Скорость звука в воде $v = 1500$ м/с. На каком расстоянии S находятся ближайшие точки, колеблющиеся в противофазе, если период колебаний частиц $T = 0{,}04$ с?

Ответ: $S = \Delta\alpha\dfrac{vT}{2\pi} = 29$ м.

Задача 12. Найти период колебаний точек волны T, лежащих на луче, вдоль которого волна распространяется, на расстоянии $r = 0{,}1$ м друг от друга, если эти точки колеблются в противофазе. Скорость волны $v = 2{,}4$ м/с.

Ответ: $T = \dfrac{2\pi r}{\Delta\alpha\, v} = 0{,}5$ с.

Задача 13. Человеческое ухо может воспринимать звуки частотой от $\nu_1 = 20$ Гц до $\nu_2 = 20\,000$ Гц. Между какими длинами волн λ_1 и λ_2 лежит интервал слышимости звуковых колебаний? С какими амплитудами колеблются частицы воздуха при распространении в нем звуковой волны? Скорость звука в воздухе $v_{зв} = 340$ м/с. Максимальная скорость частиц воздуха $v_{max} = 0{,}8$ м/с.

Ответ: $\lambda_1 = \dfrac{v_{зв}}{\nu_1} = 17$ м, $\lambda_2 = \dfrac{v_{зв}}{\nu_2} = 0{,}0017$ м,

$A_1 = \dfrac{v_{max}}{2\pi\nu_1} = 6{,}4\cdot 10^{-3}$ м, $A_2 = \dfrac{v_{max}}{2\pi\nu_2} = 6{,}4\cdot 10^{-6}$ м.

Задача 14. Движение некоторой точки незатухающей волны описывается уравнением $x = 0{,}05\cos 2\pi t$ м. Написать уравнение движения точки, лежащей на луче на расстоянии $r = 30$ см от первой точки, если скорость распространения гребней $v = 0{,}6$ м/с.

Ответ: $x = 0{,}05\cos \pi(2t - 1)$ м.

Задача 15. Уравнение незатухающих колебаний $x_1 = 4\cos 100\pi t$ см. Найти смещение x от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии $r = 75$ см от источника колебаний, через $t = 0{,}01$ с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний $v = 300$ м/с.

Ответ: $x = 0{,}04 \cos\frac{3\pi}{4} = -0{,}028$ м.

Задача 16. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 15$ м/с. Период колебаний точек шнура $T = 1{,}2$ с. Найти волновое число k и максимальное ускорение точек шнура a_m. Амплитуда колебаний точек $A = 0{,}02$ мм.

Ответ: $k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\pi}{9}$ рад/м, $a_m = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = 5{,}5 \cdot 10^{-3}$ м/с^2.

Задача 17. Найти смещение x от положения равновесия точки в бегущей волне, которая отстоит от источника колебаний на расстоянии $r = \frac{\lambda}{12}$, для момента времени $t = \frac{T}{6}$, считая от начала колебаний точки. Амплитуда колебаний $A = 0{,}05$ м.

Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{2} A = 0{,}04$ м.

Задача 18. Найти координаты узлов и пучностей в стоячей волне для двух случаев: а) волна отражается от более плотной среды; б) волна отражается от менее плотной среды. Длина бегущей волны $\lambda = 12$ см.

Указание: при отражении от более плотной среды в месте отражения наблюдается узел, а при отражении от менее плотной – пучность.

Ответ: а) координаты узлов $x = 0{,}6$; 12; 18; ... см, координаты пучностей $x = 3$; 9; 15; ... см; б) наоборот.

Задача 19. Смещение от положения равновесия точки, отстоящей на $r = 4$ см от источника колебаний, в момент времени $t = \frac{\pi}{6}$ равно половине амплитуды. Найти длину бегущей волны. Начальная фаза равна нулю.

Ответ: $\lambda = 12$ $r = 48$ см.

Задача 20. Во сколько раз скорость распространения звука в воздухе v_1 летом, когда температура $t_1° = 27$ °С, больше скорости распространения v_2 его зимой, когда температура воздуха $t_2° = -23$ °С?

Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 1{,}1$.

Задача 21. Найти скорость распространения v звука в двухатомном газе, где плотность $\rho = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ г/см^3 при нормальном атмосферном давлении $p = 1 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: $v = \sqrt{\frac{(i+2)p}{i\rho}} = 328$ м/с.

13. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Колебательным контуром называют цепь, состоящую из последовательно соединенных конденсатора и катушки индуктивности (рис. 13-1).

Если сопротивлением колебательного контура R можно пренебречь, то такой контур называют идеальным (идеализированным). Собственные циклическую частоту ω_0, период T и частоту ν идеального контура определяют по формулам

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad T = 2\pi\sqrt{LC} \text{ – формула Томсона,} \quad \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

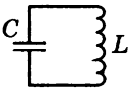


Рис. 13-1

Идеальный колебательный контур является источником высокочастотных электромагнитных колебаний – взаимных превращений электрического поля конденсатора в магнитное поле катушки, и наоборот.

Электромагнитные колебания в идеальном колебательном контуре являются гармоническими и незатухающими. Уравнение колебаний заряда q на обкладках конденсатора имеет вид

$$q = q_m \cos \alpha \text{ или } q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где q – мгновенный заряд в момент времени t, q_m – амплитуда заряда, α – фаза и α_0 – начальная фаза колебаний.

Уравнение колебаний напряжения на конденсаторе имеет вид

$$u = U_m \cos \alpha \text{ или } u = U_m \cos(\omega t + \alpha_0),$$

где u – мгновенное напряжение, U_m – амплитуда напряжения. Из электростатики мы знаем, что

$$u = \frac{q}{C} \quad \text{и} \quad U_m = \frac{q_m}{C},$$

где C – емкость конденсатора.

Поскольку сила тока есть производная заряда по времени, то уравнение колебаний тока в катушке имеет вид

$$i = q' \text{ или } i = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

где i – мгновенная сила тока в момент времени t, $I_m = \omega_0 q_m$ – амплитуда силы тока.

Напомним, что $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ или $\omega_0 = 2\pi\nu$,

где T и ν – период и частота колебаний.

Если сопротивлением контура R пренебречь нельзя, то свободные колебания в нем являются затухающими. Быстрота их затухания характеризуется добротностью колебательного контура. Добротность контура Q определяется выражением

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

где L – индуктивность катушки, C – емкость конденсатора.

Приступая к решению задач на электромагнитные колебания в колебательном контуре, уясните прежде всего, можно ли применять к этому контуру законы и формулы, описывающие процессы в идеальном контуре, в котором затуханием колебаний из-за наличия активного сопротивления R можно пренебречь, или нет. Как правило, в большинстве подобных задач или сказано, что контур идеальный, т. е. что его активное сопротивление пренебрежимо мало, или подразумевается, что это так. Напоминаем, что применять уравнения гармонических электромагнитных колебаний можно, если выполняется условие

$$R \ll \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

или что добротность контура Q во много раз больше единицы:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1 .$$

Если из условия задачи не ясно, идеальный контур или нет, уточните этот момент у вашего преподавателя или экзаменатора. Дело в том, что в реальном контуре с большим активным сопротивлением и малой добротностью колебания не являются ни гармоническими, ни периодическими, поэтому применять для их описания формулу Томсона и уравнения гармонических колебаний нельзя.

Многие задачи этой темы быстро решаются, если применить закон сохранения энергии, согласно которому в идеальном колебательном контуре максимальная энергия электрического поля конденсатора

$$W_{\text{эл}\,m} = \frac{CU_m^2}{2}, \quad W_{\text{эл}\,m} = \frac{q_m^2}{2C} \quad \text{или} \quad W_{\text{эл}\,m} = \frac{q_m U_m}{2}$$

полностью превращается в максимальную энергию магнитного поля катушки

$$W_{\text{м}\,m} = \frac{LI_m^2}{2} .$$

В этом случае можно правую часть последней формулы приравнять правой части из одной из трех предыдущих формул:

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}, \quad \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{q_m U_m}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$$

в зависимости от условия задачи, после чего часто искомую величину уже несложно найти, особенно если речь идет о максимальной силе тока I_m, максимальном напряжении U_m или максимальном заряде q_m. Если же речь идет о мгновенных значениях этих величин в промежуточные моменты времени, то можно определить мгновенную энергию, например, магнитного поля $W_{\text{м}} = \dfrac{Li^2}{2}$ как разность максимальной электрической энергии конденсатора и мгновенной электрической энергии в данный момент. Какую из трех формул электрической энергии следует применить, зависит от условия задачи. Например, вам надо найти мгновенную силу тока i в некоторый момент времени, а известны, например, максимальный заряд на обкладках конденсатора q_m и мгновенный заряд q в этот момент, а также емкость конденсатора C и индуктивность катушки L. В этом случае можно действовать так:

$$W_м = W_{эл\,m} - W_{эл} \text{ или } \frac{Li^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C} - \frac{q^2}{2C}.$$

Если известна максимальная сила тока в катушке I_m, то можно решать так:

$$\frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} - \frac{q^2}{2C}.$$

Если, например, известны максимальное напряжение на конденсаторе U_m и мгновенное напряжение U на нем в некоторый момент времени, а нужно найти мгновенную силу тока i в катушке в этот момент, то можно записать так:

$$\frac{Li^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} - \frac{Cu^2}{2},$$

а затем искать нужную величину.

Подобных примеров можно привести очень много. Но во всех случаях надо знать, что сумма мгновенных энергий электрического поля конденсатора $W_{эл}$ и магнитного поля катушки $W_М$ равна или максимальной энергии электрического поля конденсатора $W_{элm}$, или максимальной энергии магнитного поля катушки $W_{Мm}$:

$$W_{эл} + W_М = W_{эл\,m} \text{ или } W_{эл} + W_М = W_{М\,m}.$$

Если вам дано уравнение колебаний, например, заряда в виде

$$q = 2 \cdot 10^{-3} \cos 10^4\pi(t + 5 \cdot 10^{-5}) \text{ мкКл}$$

и просят определить амплитуду заряда q_m, циклическую частоту ω, частоту ν, период T, фазу α и начальную фазу α_0, то раскройте вначале скобки и запишите рядом уравнение колебаний заряда в общем виде:

$$q = 2 \cdot 10^{-3} \cos (10^4\pi t + 0{,}5\pi) \text{ мкКл}$$

$$\text{и } q = q_m \cos (\omega t + \alpha_0) \text{ или } q = q_m \cos \alpha.$$

Из сопоставления величин, входящих в эти уравнения, следует, что

$q_m = 2 \cdot 10^{-3}$ мкКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, $\omega = 10^4\pi$ рад/с, $\alpha_0 = 0{,}5\pi$ рад, $\alpha = 10^4\pi t + 0{,}5\,\pi = \pi(10^4 t + 0{,}5)$ рад.

Поскольку $\omega = 2\pi\nu$ и $\omega = 10^4\pi$, то

$2\pi\nu = 10^4\pi$, откуда $\nu = \dfrac{10^4}{2}\text{ Гц} = 5 \cdot 10^3$ Гц.

Так как $T = \dfrac{1}{\nu}$, то $T = \dfrac{1}{5 \cdot 10^3}\text{ с} = 2 \cdot 10^{-4}$ с.

Подобным образом можно определить величины, характеризующие колебания из уравнений напряжения и силы тока.

Встречаются задачи, в которых требуется выполнить обратное действие, т. е. по данным параметрам записать уравнение колебаний. Например, известны максимальный заряд на обкладках $q_m =$ = 2мкКл, емкость конденсатора $C = 1$ нФ, индуктивность катушки $L = 10$ Гн и начальная фаза $\alpha_0 = 0{,}25\,\pi$, а требуется записать уравнение колебаний напряжения на обкладках конденсатора $u = u(t)$. Запишите сначала это уравнение в общем виде:

$$u = U_m \cos (\omega t + \alpha_0).$$

Здесь $U_m = \frac{q_m}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-9}}$ В = $2 \cdot 10^3$ В – максимальное напряжение на конденсаторе, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-9}}} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – циклическая частота колебаний. Подставив эти величины, а также $\alpha_0 = 0{,}25\pi$ в уравнение колебаний напряжения, получим

$$u = 2 \cdot 10^3 \cos\,(1 \cdot 10^4 t + 0{,}25\pi) \text{ В}.$$

Полезно помнить, что $U_m = \frac{q_m}{C}$, а $I_m = \omega q_m$.

В задачах на колебания в контуре часто приходится применять формулы емкости конденсатора $C = \frac{q}{U}$ и $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика между обкладками (если конденсатор воздушный, то $\varepsilon = 1$), S – площадь обкладок и d – расстояние между ними.

Кроме того, может пригодиться и формула индуктивности соленоида $L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} S$ или $L = \mu_0 \mu n^2 l S$, где $\mu_0 = 12{,}6 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость сердечника (у большинства веществ, кроме железа, $\mu = 1$), N – число витков на длине l, S – площадь витка, $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единице длины соленоида.

Если к конденсатору емкостью C_1 подключают параллельно конденсатор емкостью C_2, то их обшая емкость станет $C_{\text{общ}} = C_1 + C_2$, а если конденсатор C_2 подключают к C_1 последовательно, то $C_{\text{общ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, и именно эту общую емкость теперь следует подставлять в формулу Томсона, т. е. следует записать так:

$$T = 2\pi\sqrt{LC_{\text{общ}}}, \text{ или } \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\text{общ}}}},$$

$$\text{или } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_{\text{общ}}}}.$$

В случае потерь энергии на джоулево тепло $Q_т$ за некоторый промежуток времени t закон сохранения энергии примет вид

$$Q_т = W_2 - W_1,$$

где по закону Джоуля–Ленца $Q_т = I^2_{ср} Rt$, $W_2 = W_{эл\, m2} = W_{М\, m2}$ – энергия контура в конце процесса, $W_1 = W_{эл\, m1} = W_{М\, m1}$ – энергия в начале процесса.

Если $t = T$, где T – период колебаний, то $I_{ср} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ – средняя сила тока за период. Если колебания затухли, то по модулю $Q_т = W_{эл\, m1} = W_{М\, m1}$.

Решение отдельных задач

Задача 1

Начальный заряд, сообщенный конденсатору идеального колебательного контура, увеличили в 3 раза. Во сколько раз изменились амплитуда силы тока, амплитуда напряжения, максимальная энергия электрического поля конденсатора и максимальная энергия магнитного поля катушки?

Дано:	
$\dfrac{q_{m2}}{q_{m1}} = 3$	
$\dfrac{I_{m2}}{I_{m1}}$ – ?	
$\dfrac{U_{m2}}{U_{m1}}$ – ?	
$\dfrac{W_{эл\ m2}}{W_{эл\ m1}}$ – ?	
$\dfrac{W_{М\ m2}}{W_{М\ m1}}$ – ?	

Обозначим q_{m1}, I_{m1}, U_{m1}, $W_{эл\ m1}$ и $W_{М\ m1}$ максимальные заряд, силу тока, напряжение, энергию электрического и энергию магнитного полей соответственно до увеличения заряда; q_{m2}, I_{m2}, U_{m2}, $W_{эл\ m2}$ и $W_{М\ m2}$ – их же после его увеличения.

Решение. Амплитуды силы токов I_{m1} и I_{m2} связаны с амплитудами заряда q_{m1} и q_{m2} соотношениями $I_{m1} = \omega_0 q_{m1}$ (1) и $I_{m2} = \omega_0 q_{m2}$, (2) где ω_0 – собственная циклическая частота колебательного контура, которая зависит только от его емкости и индуктивности, а эти величины при изменении заряда остаются постоянными.

Разделив (2) на (1), мы ответим на первый вопрос задачи:

$$\frac{I_{m2}}{I_{m1}} = \frac{\omega_0 q_{m2}}{\omega_0 q_{m1}}, \quad \boxed{\frac{I_{m2}}{I_{m1}} = \frac{q_{m2}}{q_{m1}} = 3}$$

Следовательно, амплитуда силы тока изменяется прямо пропорционально амплитуде заряда, т. е. она тоже увеличится в 3 раза.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, вспомним определение емкости конденсатора C:

$$C = \frac{q_{m1}}{U_{m1}} \quad (3) \qquad и \qquad C = \frac{q_{m2}}{U_{m2}}. \quad (4)$$

Приравняем (3) и (4) и из полученного равенства найдем отношение U_{m2}/U_{m1}:

$$\frac{q_{m1}}{U_{m1}} = \frac{q_{m2}}{U_{m2}} \quad или \quad \boxed{\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{q_{m2}}{q_{m1}} = 3}$$

Следовательно, амплитудное напряжение на конденсаторе тоже прямо пропорционально амплитуде заряда, т. е. оно тоже увеличится в 3 раза.

Согласно закону сохранения энергии в идеальном колебательном контуре максимальная энергия электрического поля кондерсатора равна максимальной энергии магнитного поля катушки, поэтому

$$W_{\text{эл}\,m1} = W_{\text{М}\,m1} = \frac{q_{m1}^2}{2C} \quad (5) \quad \text{и} \quad W_{\text{эл}\,m2} = W_{\text{М}\,m2} = \frac{q_{m2}^2}{2C}. \quad (6)$$

Разделив (6) на (5), мы ответим на последние вопросы задачи:

$$\frac{W_{\text{эл}\,m2}}{W_{\text{эл}\,m1}} = \frac{W_{\text{М}\,m2}}{W_{\text{М}\,m1}} = \frac{q_{m2}^2 2C}{2Cq_{m1}^2} \quad \text{или}$$

$$\frac{W_{\text{эл}\,m2}}{W_{\text{эл}\,m1}} = \frac{W_{\text{М}\,m2}}{W_{\text{М}\,m1}} = \left(\frac{q_{m2}}{q_{m1}}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Следовательно, как максимальная энергия электрического поля, так и максимальная энергия магнитного поля увеличатся в 9 раз.

Задача решена.

Ответ: $\frac{I_{m2}}{I_{m1}} = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} = 3$, $\frac{W_{\text{эл}\,m2}}{W_{\text{эл}\,m1}} = \frac{W_{\text{М}\,m2}}{W_{\text{М}\,m1}} = 9$.

Задача 2

При увеличении амплитудного напряжения на конденсаторе идеального колебательного контура на $\Delta U_m = 40$ В амплитуда силы тока увеличилась в 3 раза. Найти амплитуду напряжения U_{m1} до увеличения и амплитуду напряжения U_{m2} после него.

Дано:
$\Delta U_m = 40$ В
$\frac{I_{m2}}{I_{m1}} = 3$

U_{m1} – ?
U_{m2} – ?

Обозначим I_{m1} и I_{m2} амплитуды силы тока в катушке до и после увеличения напряжения соответственно.

Решение. Поскольку ни емкость конденсатора, ни индуктивность катушки не изменялись, мы можем записать закон сохранения энергии в этом контуре так:

$$W_{\text{эл}\,m1} = W_{\text{М}\,m1} \text{ и } W_{\text{эл}\,m2} = W_{\text{М}\,m2}$$

$$\text{или} \quad \frac{CU_{m1}^2}{2} = \frac{LI_{m1}^2}{2} \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{CU_{m2}^2}{2} = \frac{LI_{m2}^2}{2}. \quad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим

$$\frac{CU_{m2}^2 2}{2CU_{m1}^2} = \frac{LI_{m2}^2 2}{2LI_{m1}^2}, \quad \left(\frac{U_{m2}}{U_{m1}}\right)^2 = \left(\frac{I_{m2}}{I_{m1}}\right)^2$$

или $$\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{I_{m2}}{I_{m1}}. \quad (3)$$

Следовательно, в идеальном колебательном контуре амплитуда напряжения на конденсаторе прямо пропорциональна амплитуде силы тока в катушке. Этот факт мы доказали в предыдущей задаче несколько иначе.

Из (3) следует, что $U_{m2} = U_{m1} \frac{I_{m2}}{I_{m1}}$. (4)

Поскольку $\Delta U_m = U_{m2} - U_{m1}$ (5), то с учетом (4)

$$\Delta U_m = U_{m1} \frac{I_{m2}}{I_{m1}} - U_{m1} = U_{m1}\left(\frac{I_{m2}}{I_{m1}} - 1\right),$$

откуда $$\boxed{U_{m1} = \frac{\Delta U_m}{\frac{I_{m2}}{I_{m1}} - 1}}$$

Из (5) $$\boxed{U_{m2} = U_{m1} + \Delta U_m}$$

Произведем вычисления:

$$U_{m1} = \frac{40}{3-1} B = 20B,\ U_{m2} = (20 + 40)\text{ В} = 60\text{ В}.$$

Ответ: $U_{m1} = 20$ В, $U_{m2} = 60$ В.

Задача 3

Амплитуда напряжения на конденсаторе колебательного контура $U_m = 220$ *В*, а амплитуда силы тока в катушке $I_m = 2$ мА. Чему равны сила тока i и напряжение u в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора $W_{эл}$ равна энергии магнитного поля катушки $W_М$?

Дано:
$U_m = 220$ В
$I_m = 2$ мА
$W_{эл} = W_М$
i – ?
u – ?

Решение. По закону сохранения энергии максимальная электрическая энергия $W_{эл\ m} = W_{эл} + W_М = 2W_{эл}$, поскольку $W_М = W_{эл}$ согласно условию задачи.

Здесь $W_{эл\ m} = \frac{CU_m^2}{2}$ и $W_{эл} = \frac{Cu^2}{2}$,

поэтому $\frac{CU_m^2}{2} = 2\frac{Cu^2}{2}$, $U_m^2 = 2u^2$, откуда

$$\boxed{u = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

Кроме того, по тому же закону сохранения энергии $W_{М\ m} = W_{эл} + W_М = 2W_М$, ведь $W_{эл} = W_М$.

Но $W_{\text{м}\,m} = \dfrac{LI_m^2}{2}$, а $W_\text{м} = \dfrac{Li^2}{2}$, поэтому

$\dfrac{LI_m^2}{2} = 2\dfrac{Li^2}{2}$, $I_m^2 = 2i^2$, откуда $\boxed{i = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}}$

Переведем в СИ единицу силы тока: 2 мА = $2 \cdot 10^{-3}$ А.
Произведем вычисления:

$$i = \frac{220}{\sqrt{2}} B = 156 \text{ В}, \; i = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{2}} \text{ А} = 1{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Ответ: u = 156 В, $i = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ А.

Задача 4

Через какое время t, считая от начала колебания, энергия электрического поля конденсатора $W_\text{эл}$ станет равна энергии магнитного поля катушки $W_\text{м}$? Период колебаний в контуре T = 2 мкс.

Дано:	
$W_\text{эл} = W_\text{м}$ $\alpha_0 = 0$ T = 2 мкс	
t – ?	

Решение. По закону сохранения энергии $W_{\text{эл}\,m} = W_\text{эл} + W_\text{м} = 2W_\text{эл}$, где $W_{\text{эл}\,m}$ – максимальная электрическая энергия конденсатора, $W_\text{эл}$ – мгновенная энергия электрического поля и $W_\text{м}$ – мгновенная энергия магнитного поля, равные друг другу согласно условию задачи.

Поскольку $W_{\text{эл}\,m} = \dfrac{CU_m^2}{2}$ и $W_\text{эл} = \dfrac{Cu^2}{2}$, то

$$\frac{CU_m^2}{2} = 2\frac{Cu^2}{2}, \text{ откуда } u = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Теперь запишем уравнения колебаний напряжения при условии, что начальная фаза $\alpha_0 = 0$, ведь отсчет времени ведется от начала колебаний:

$$u = U_m \cos \omega t, \text{ где } \omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ поэтому } u = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t. \qquad (2)$$

Приравняем (1) и (2):

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t, \; \cos \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

следовательно, $\dfrac{2\pi}{T} t = \dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{2t}{T} = \dfrac{1}{4}$, откуда $\boxed{t = \dfrac{T}{8}}$

Произведем вычисления:

$$t = \frac{2}{8}\text{ мкс} = 0{,}25\text{ мкс}.$$

Ответ: $t = 0{,}25$ мкс.

Задача 5

Через какое время t, считая от начала колебаний, заряд на обкладках конденсатора q станет равен половине амплитудного заряда q_m? Частота колебаний в контуре $\nu = 10$ МГц.

Дано:	
$q = \dfrac{q_m}{2}$ $\alpha_0 = 0$ $\nu = 10$ МГц	*Решение.* Запишем уравнение колебаний заряда, когда начальная фаза $\alpha_0 = 0$:
t – ?	

$$q = q_m \cos \omega t,\text{ где } \omega = 2\pi\nu,$$

поэтому $\quad q = q_m \cos 2\pi\nu t.$

Согласно условию задачи $q = \dfrac{q_m}{2}$, поэтому $\dfrac{q_m}{2} = q_m \cos 2\pi\nu t$, откуда $\cos 2\pi\nu t = \dfrac{1}{2}$,

и, значит, $2\pi\nu t = \dfrac{\pi}{3}$, откуда $\boxed{t = \dfrac{1}{6\nu}}$

Переведем в СИ единицу частоты: 10 МГц $= 1 \cdot 10^7$ Гц.
Произведем вычисления:

$$t = \frac{1}{6 \cdot 10^7} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\text{ с}.$$

Ответ: $t = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ с.

Задача 6

Во сколько раз изменятся частота и период колебаний в колебательном контуре, если емкость конденсатора увеличить в 36 раз, а индуктивность катушки уменьшить в 9 раз?

Дано:	
$C_2 = 36C_1$ $L_1 = 9L_2$	Обозначим C_1, L_1, ν_1 и T_1 емкость конденсатора, индуктивность катушки, частоту колебаний и период до их изменения, C_2, L_2, ν_2 и T_2 – после.
$\dfrac{\nu}{\nu_1}$ – ? $\dfrac{T_2}{T_1}$ – ?	*Решение.* Запишем формулу Томсона применительно к первому и второму состояниям контура:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{L_1C_1} \quad (1) \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{L_2C_2}. \quad (2)$$

Разделим (2) на (1):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{L_2C_2}}{2\pi\sqrt{L_1C_1}} = \frac{\sqrt{L_2C_2}}{\sqrt{L_1C_1}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2C_2}{L_1C_1}}}$$

Поскольку частота и период – обратные величины,

$$\boxed{\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{T_1}{T_2}}$$

Произведем вычисления: $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2 \cdot 36C_1}{9L_2 \cdot C_1}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$,

т. е. период увеличится в 2 раза, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2}$, следовательно, частота уменьшится в 2 раза.

Ответ: $\frac{T_2}{T_1} = 2$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2}$.

Задача 7

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 1$ мкф и катушки индуктивностью $L = 4$ Гн. Амплитуда колебаний заряда на конденсаторе $q_m = 100$ мкКл. Написать уравнение колебаний заряда $q = q(t)$, напряжения $u = u(t)$ и силы тока $i = i(t)$. Начальная фаза $\alpha_0 = 0$.

Дано:
С = 1 мкФ
$L = 4$ Гн
$q_m = 100$ мкКл
$\alpha_0 = 0$

$q = q(t)$ – ?
$u = u(t)$ – ?
$i = i(t)$ – ?

Здесь q – мгновенный заряд, t – время колебания, u – мгновенное напряжение, i – мгновенная сила тока в контуре.

Решение. Зависимость заряда q от времени t устанавливает уравнение, которое в общем виде при $\alpha_0 = 0$ выглядит так:

$$q = q_m \cos \omega_0 t. \qquad (1)$$

Здесь $q_m = 100$ мкКл $= 100 \cdot 10^{-6}$ Кл $= 1 \cdot 10^{-4}$ Кл – максимальная величина заряда. Она нам известна, а неизвестна собственная циклическая частота колебательного контура ω_0. Но эту величину мы можем определить по формуле

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Подставим сюда численные значения $C = 1$ мкФ $= 1 \cdot 10^{-6}$ Ф и $L = 4$ Гн и вычислим ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{10^{-6} \cdot 4}} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 500 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Теперь подставим численные значения q_m и ω_0 в формулу (1) и получим искомое уравнение $q = q(t)$:

$$\boxed{q = 1 \cdot 10^{-4} \cos 500\ t}$$

Чтобы определить зависимость напряжения от времени $u = u(t)$, разделим левую и правую части уравнения (1) на C, поскольку согласно определению емкости конденсатора $C = \frac{q}{u}$ и, значит, $u = \frac{q}{C}$.

Получим $$u = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos \omega_0 t. \qquad (2)$$

или $$u = U_m \cos \omega_0 t.$$

Здесь $U_m = \frac{q_m}{C}$ – максимальное значение напряжения в данном контуре.

Теперь подставим в (2) численные значения q_m, C и ω_0:

$$u = \frac{1 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-6}} \cos 500t, \quad \boxed{u = 100 \cos 500t}$$

Мы получили уравнение, выражающее зависимость напряжения в контуре от времени колебаний.

Нам осталось определить зависимость силы тока от времени колебаний в этом контуре. Поскольку в контуре течет переменный ток, определим мгновенную силу тока i как производную заряда q по времени t:

$$i = q' = (q_m \cos \omega_0 t)' = -\omega_0 q_m \sin \omega_0 t \qquad (3)$$

или $i = -I_m \sin \omega_0 t$.

Здесь $I_m = \omega_0 q_m$ – максимальная сила тока в контуре. Знак «минус» свидетельствует о том, что колебания заряда и силы тока происходят со сдвигом фаз $\frac{\pi}{2}$.

Нам осталось подставить в уравнение (3) численные значения ω_0 и q_m, и задача будет решена:

$i = -500 \cdot 10^{-4} \sin 500\ t$, $\boxed{i = -0{,}05 \sin 500\ t}$

Задача решена.

Ответ: $q = 10^{-4} \cos 500\ t$, $u = 100 \cos 500\ t$, $i = -0{,}05 \sin 500\ t$.

Задача 8

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 100$ пФ и катушки индуктивности. Уравнение колебаний заряда на его обкладках имеет вид $q = 2 \cdot 10^{-9} \cos 10^6 \pi t$. Записать уравнение колебаний силы тока $i = i(t)$ и напряжения $u = u(t)$. Найти амплитуды колебаний заряда q_m, силы тока I_m и напряжения U_m, а также индуктивность катушки L. Все остальные величины измерены в единицах СИ.

Дано:
$C = 100$ пФ
$q = 2 \cdot 10^{-9} \cos 10^6\pi t$

$i = i(t)$ – ?
$u = u(t)$ – ?
q_m – ?
I_m – ?
U_m – ?
L – ?

Решение. Зависимость $i = i(t)$ определим, взяв первую производную уравнения колебаний заряда по времени, известного нам из условия задачи:

$$i = q' = (2 \cdot 10^{-9} \cos 10^6\pi t)' = -2 \cdot 10^{-9} \cos 10^6\pi \sin 10^6\pi t,$$

$$\boxed{i = -6{,}28 \cdot 10^{-3} \sin 10^6\pi t} \qquad (1)$$

Уравнение колебаний напряжения $u = u(t)$ найдем, разделив левую и правую части уравнения колебаний заряда на емкость конденсатора С. Но сначала переведем единицу емкости в СИ: 100 пФ = $100 \cdot 10^{-12} = 1 \cdot 10^{-10}$ Ф.

$$u = \frac{q}{C} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot 10^{-10}} \cos 10^6\pi t, \quad \boxed{u = 20 \cos 10^6\pi t} \qquad (2)$$

Согласно уравнению $q = q(t)$ амплитуда заряда $q_m = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл. Из (1) амплитуда силы тока $I_m = 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ А.

Из (2) амплитуда напряжения $U_m = 20$ *В*.

В уравнении колебаний заряда выражение $10^6\pi$, стоящее между символом cos и временем t, есть циклическая частота ω: $\omega = 10^6\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Зная ω, найдем индуктивность L из формулы

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ откуда } LC = \frac{1}{\omega^2} \text{ и } \boxed{L = \frac{1}{\omega^2 C}}$$

Проверим единицу L:

$$[L]_{\text{СИ}} = \frac{1}{\text{с}^{-2} \cdot \text{Ф}} = \frac{\text{с}^2}{\frac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}^2}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} = \text{Гн}.$$

Напомним, что $\text{Ф} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$ и Кл = А·с.

Произведем вычисления:

$$L = \frac{1}{10^{12} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-10}} \text{Гн} = 3{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Ответ: $i = -6{,}28 \cdot 10^{-3} \sin 10^6\pi t$ А, $u = 20 \cos 10^6\pi t$ В, $q_m = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, $I_m = 6{,}28 \cdot 10^{-3}$ А, $U_m = 20$ В, $L = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$ Гн.

Задача 9

Какой процент амплитудного напряжения, считая от начала колебаний, составит напряжение u на обкладках конденсатора идеального колебательного контура в тот момент, когда энергия электрического поля $W_{эл}$ будет в $n = 3$ раза больше энергии магнитного поля $W_М$? Через какую долю периода это произойдет?

Дано:
$W_{эл} = nW_М$
$n = 3$

$\dfrac{u}{U_m}\% - ?$

$\dfrac{t}{T} - ?$

Обозначим U_m амплитуду напряжения, t – время, прошедшее от начала колебания до того момента, когда энергия $W_{эл}$ стала в n раз больше энергии $W_М$.

Решение. Запишем формулы мгновенных значений энергий электрического и магнитного полей через время t от начала колебаний, когда энергия электрического поля $W_{эл}$ была в n раз больше энергии магнитного поля, а также формулу максимальной энергии электрического поля $W_{эл\,m}$:

$$W_{эл} = \frac{Cu^2}{2}, \quad W_М = \frac{W_{эл}}{n} = \frac{Cu^2}{2n} \quad \text{и} \quad W_{эл\,m} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии $W_{эл} + W_М = W_{эл\,m}$

или $\dfrac{Cu^2}{2} + \dfrac{Cu^2}{2n} = \dfrac{CU_m^2}{2}$, $u^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = U_m^2$,

$u^2\dfrac{n+1}{n} = U_m^2$, откуда $\boxed{\dfrac{u}{U_m} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}}$

Произведем вычисления: $\dfrac{u}{U_m} = \sqrt{\dfrac{3}{3+1}} = 0{,}866 = 86{,}6\%$.

Теперь запишем уравнение колебаний напряжения:

$u = U_m \cos \omega t = U_m \cos \dfrac{2\pi}{T} t$, ведь циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Поскольку $\dfrac{u}{U_m} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $\cos\dfrac{2\pi}{T}t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и, значит, $\dfrac{2\pi}{T}t = \dfrac{\pi}{6}$, откуда $\dfrac{t}{T} = \dfrac{1}{12}$.

Ответ: $u/U_m = 86{,}6\%$, $t/T = 1/12$.

Задача 10

При увеличении емкости колебательного контура на ΔC = 0,1 мкФ частота колебаний в нем уменьшилась вдвое. Найти емкость конденсатора C_1 до увеличения и емкость C_2 после него.

Дано:	
ΔC = 0,1 мкФ $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = 2$	
C_1 – ? C_2 – ?	

Обозначим ν_1 частоту колебаний в контуре до увеличения емкости конденсатора, ν_2 – ее же после увеличения.

Решение. Запишем формулы частоты колебаний:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} \ (1) \text{ и } \nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}. \ (2)$$

Поскольку нам известно отношение ν_1/ν_2, то разделим (1) на (2):

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2\pi\sqrt{LC_2}}{2\pi\sqrt{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}, \text{ откуда } \frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2. \quad (3)$$

Еще нам известна разность емкостей: $\Delta C = C_2 - C_1$.

Из (3) $C_2 = C_1\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2$, поэтому

$$\Delta C = C_1\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - C_1 = C_1\left(\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1\right),$$

откуда $\boxed{C_1 = \dfrac{\Delta C}{\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1}}$ и $\boxed{C_2 = C_1 + \Delta C}$

Произведем вычисления:

$$C_1 = \frac{0{,}1}{2^2 - 1} \text{ мкФ} = 0{,}03 \text{ мкФ},$$

$C_2 = (0{,}03 + 0{,}1)$ мкФ = 0,13 мкФ.

Ответ: C_1 = 0,03 мкФ, C_2 = 0,13 мкФ.

Задача 11

Конденсатору колебательного контура был сообщен заряд q_m = 0,2 мКл, после чего в контуре возникли свободные затухающие колебания. Какое количество теплоты выделится на активном сопротивлении контура к тому моменту, когда колебания полностью прекратятся? Конденсатор плоский, его обкладки имеют квадратную форму со стороной a = 5 мм. Расстояние между обкладками

d = 1,5 мм, диэлектрик – слюда с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 6$.

Дано:
$q_m = 0{,}2$ мКл
$a = 5$ мм
$d = 1{,}5$ мм
$\varepsilon = 6$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
Q – ?

Здесь ε_0 – электрическая постоянная.

Решение. По закону сохранения энергии вся энергия электрического поля конденсатора $W_{эл\ m}$, сообщенная ему в момент передачи заряда q_m, полностью превратится в тепловую энергию Q:

$$W_{эл\ m} = Q, \text{ где } W_{эл\ m} = \frac{q_m^2}{2C},$$

поэтому
$$Q = \frac{q_m^2}{2C}.$$

Здесь $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ – емкость плоского конденсатора, $S = a^2$ – площадь каждой его обкладки. С учетом этого

$$Q = \frac{q_m^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon a^2} \quad \text{или} \quad \boxed{Q = \frac{d}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{q}{a}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ: 0,2 мкКл = $2 \cdot 10^{-7}$ Кл, 5 мм = $5 \cdot 10^{-3}$ м, 1,5 мм = $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

Проверим единицу полученной величины:

$$[Q]_{СИ} = \frac{\text{м}}{\dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}}\left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}}\right)^2 = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{Кл}^2}{\text{Ф} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2}{\dfrac{\text{Кл}}{\text{В}}} = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Кл}\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{Дж}.$$

Напомним, что $\text{Ф} = \dfrac{\text{Кл}}{\text{В}}$ и $\text{В} = \dfrac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$.

Произведем вычисления:

$$Q = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6}\left(\frac{2 \cdot 10^{-7}}{5 \cdot 10^{-3}}\right)^2 \text{Дж} = 5{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = 5{,}6 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Задача 12

Колебательный контур состоит из катушки длиной l с диаметром витка D и с числом витков на единице длины n и конденсатора в виде двух параллельных дисков радиусом R, расположенных на расстоянии d друг от друга. Диэлектрик между обкладками имеет диэлектрической проницаемостью ε. Сердечник катушки имеет магнитную проницаемость μ. Найти число полных колебаний N в этом контуре за время t. Потерями энергии в контуре пренебречь.

Дано:
t
l
D
n
R
d
ε
μ
ε_0
μ_0
N – ?

Здесь ε_0 – электрическая постоянная, μ_0 – магнитная постоянная.

Решение. Число полных колебаний N, совершенных за время t, можно определить, разделив это время t на время одного полного колебания, т. е. на период T:

$$N = \frac{t}{T}. \quad (1)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению периода полных электромагнитных колебаний в этом контуре. Так как контур идеальный, т. е. он не обладает электрическим сопротивлением, то свободные электромагнитные колебания в нем будут незатухающими и их период можно определить по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2)$$

Здесь L – индуктивность катушки, C – емкость конденсатора в этом контуре.

Индуктивность катушки L найдем по формуле индуктивности бесконечно длинного соленоида (катушка в колебательном контуре имеет конечные размеры, но если диаметр ее витка во много раз меньше ее длины, то эту формулу применить к ней можно. Будем считать, что это условие соблюдено):

$$L = \mu_0\mu n^2 lS. \quad (3)$$

Здесь $S = \pi\frac{D^2}{4}$ – площадь витка катушки. Емкость плоского конденсатора определим по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S_к}{d}. \quad (4)$$

Здесь $S_к = \pi R^2$ – площадь обкладок конденсатора (т. е. площадь каждой обкладки).

Подставив (3) и (4) с учетом формул площадей S и $S_к$, в (2), получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\mu_0\mu n^2 l\pi\frac{D^2}{4}\cdot\frac{\varepsilon_0\varepsilon\pi R^2}{d}} = \pi^2 nDR\sqrt{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon\frac{l}{d}}.$$

Нам осталось подставить (5) в (1), и задача будет решена:

$$\boxed{N = \frac{t}{\pi^2 nDR}\sqrt{\frac{d}{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon l}}}$$

Задача решена.

Ответ: $N = \frac{t}{\pi^2 nDR}\sqrt{\frac{1}{\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon l}}$.

Задача 13

Резонанс в колебательном контуре, содержащем конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ, наступает при частоте $\nu_1 = 400$ Гц. Когда же параллельно конденсатору C_1 подключают еще один емкостью C_2, резонансная частота становится $\nu_2 = 100$ Гц. Найти емкость конденсатора C_2.

Дано:
$C_1 = 1$ мкФ
$\nu_1 = 400$ Гц
$\nu_2 = 100$ Гц

C_2 – ?

Решение. Резонанс в приемном колебательном контуре наступает, когда собственная частота колебаний становится равной частоте вынужденных колебаний, возбуждаемых внешним передатчиком. При этом амплитуда электромагнитных колебаний в контуре становится максимальной. Частота вынужденных колебаний, равная собственной частоте колебательного контура, называется резонансной частотой.

Резонансная частота ν_1 в колебательном контуре, содержащем только один конденсатор C_1, определяется формулой

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}. \quad (1)$$

Здесь L – индуктивность катушки в этом контуре.

Когда к конденсатору C_1 подключают параллельно второй конденсатор C_2, емкость образованной батареи конденсаторов становится равной $C_1 + C_2$, и при этом новая резонансная частота

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}. \quad (2)$$

Обе частоты ν_1 и ν_2, а также емкость C_1 нам известны, а неизвестны индуктивность катушки L и искомая емкость C_2. Значит, нам надо исключить из этих двух уравнений индуктивность L, получив одно уравнение с одной неизвестной емкостью C_2. Для этого удобно разделить левые и правые части (1) и (2) соответственно друг на друга. Тогда равенство не нарушится, а неизвестная и ненужная нам индуктивность L сократится и мы сможем определить C_2. Выполним эти действия:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}}{2\pi\sqrt{LC_1}}, \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}{\sqrt{LC_1}} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1}}.$$

Отсюда $\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 = 1 + \frac{C_2}{C_1}$, $\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1$

и
$$C_2 = C_1\left(\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^2 - 1\right)$$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы с СИ: 1 мкФ = 10^{-6} Ф.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$C_2 = 10^{-6}\left(\left(\frac{400}{100}\right)^2 - 1\right)\text{Ф} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \text{Ф}.$$

Ответ: $C_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ф.

Задача 14

Конденсатор емкостью C и две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 образуют колебательный контур (рис. 13-2). Определить максимальную силу тока I_m в этом контуре. Известно, что максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора равна U_m. Активным сопротивлением пренебречь.

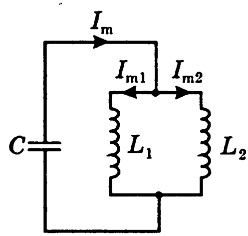


Рис. 13-2

Дано:	
C	
L_1	
L_2	
U_m	
I_m – ?	

Решение. Применим закон сохранения энергии, согласно которому полная энергия колебаний в контуре сохраняется в процессе колебаний и равна максимальной энергии электрического поля конденсатора или максимальной энергии магнитного поля катушек. Соответственно равны друг другу максимальная энергия электрического поля $W_{\text{эл}\,m}$ конденсатора и максимальная энергия магнитного поля катушек $W_{M\,m}$:

$$W_{\text{эл}\,m} = W_{M\,m}.$$

Максимальная энергия магнитного поля обеих катушек W_m равна сумме максимальных энергий $W_{\text{М}\, m1}$ и $W_{\text{М}\, m2}$ каждой из них: $W_m = W_{\text{М}\, m1} + W_{\text{М}\, m2}$.

Тогда $$W_{\text{эл}\, m} = W_{\text{М}\, m1} + W_{\text{М}\, m2}. \qquad (1)$$

Поскольку согласно формулам энергии электрического и магнитного полей

$$W_{\text{эл}\, m} = \frac{CU_m^2}{2},\ W_{m1} = \frac{L_1 I_{m1}^2}{2},\ W_{m2} = \frac{L_2 I_{m2}^2}{2},$$

то согласно (1)

$$\frac{CU_m^2}{2} = \frac{L_1 I_{m1}^2}{2} + \frac{L_2 I_{m2}^2}{2} \text{ или } CU_m^2 = L_1 I_{m1}^2 + L_2 I_{m2}^2. \qquad (2)$$

Теперь учтем, что обе катушки в процессе электромагнитных колебаний пересекает один и тот же магнитный поток Ф, который, как известно из теории, прямо пропорционален силе тока в катушке, а коэффициентом пропорциональности здесь служит индуктивность катушки L. Поэтому $\Phi = L_1 I_{m1}$, $\Phi = L_2 I_{m2}$, откуда $L_1 I_{m1} = L_2 I_{m2}$. (3)

Нам необходимо найти максимальную силу тока I_m в неразветвленной части контура, которая по первому правилу Кирхгофа равна сумме сил токов I_{m1} и I_{m2} в отдельных катушках: $I_m = I_{m1} + I_{m2}$. (4)

Теперь, пользуясь уравнениями (3) и (4), выразим неизвестные нам токи I_{m1} и I_{m2} через искомый ток I_m, чтобы потом, подставив их значения в уравнение (2), получить новое уравнение с одним неизвестным I_m, откуда мы его уже сумеем найти. Для этого найдем из выражения (3), например, I_{m2} и подставим его значение в (4):

$$I_{m2} = I_{m1} \frac{L_1}{L_2}.$$

Тогда $$I_m = I_{m1} + I_{m1} \frac{L_1}{L_2}.$$

Теперь найдем отсюда I_{m1}: $I_m = I_{m1}\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right)$, откуда

$$I_{m1} = \frac{I_m}{1 + \frac{L_1}{L_2}} = \frac{I_m L_2}{L_1 + L_2}. \qquad (5)$$

С учетом этого $$I_{m2} = \frac{I_m L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{L_1}{L_2} = \frac{I_m L_1}{L_1 + L_2}. \qquad (6)$$

Теперь подставим (5) и (6) в (2). Получим

$$CU_m^2 = L_1 \frac{I_m^2 L_2^2}{(L_1 + L_2)^2} + L_2 \frac{I_m^2 L_1^2}{(L_1 + L_2)^2},$$

откуда $$\boxed{I_m = U_m \sqrt{\frac{C(L_1 + L_2)}{L_1 L_2}}}.$$

Задача решена.

Ответ: $I_m = U_m \sqrt{\dfrac{C(L_1 + L_2)}{L_1 L_2}}$.

Задача 15

Частота колебаний в колебательном контуре $\nu = 1$ МГц, а индуктивность катушки $L = 2$ Гн. Проводник, из которого изготовлена катушка, медный, катушка содержит $N = 1000$ витков. Диаметр витка $D = 4$ см, диаметр поперечного сечения проводника $d = 0{,}2$ мм. Определить добротность этого колебательного контура Q, считая колебания медленно затухающими. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано:
$\nu = 1$ МГц
$L = 2$ Гн
$N = 1000$
$D = 4$ см
$d = 0{,}2$ мм
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

Q – ?

Решение. Добротность контура определяется по формуле $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Здесь $R = \rho \dfrac{l}{S}$ – активное сопротивление контура, l – длина проводника и S – площадь поперечного сечения провода.

Длину проводника можно определить, умножив число витков N на длину окружности витка πD: $l = N\pi D$.

Площадь его поперечного сечения $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

С учетом этого $R = \rho \dfrac{4\pi DN}{\pi d^2} = 4\rho \dfrac{DN}{d^2}$. (2)

Емкость конденсатора C определим из формулы частоты собственных колебаний в этом контуре: $\nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$,

откуда $\sqrt{LC} = \dfrac{1}{2\pi\nu}$, $LC = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2}$ и $C = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2 L}$. (3)

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу в общем виде: $Q = \frac{d^2}{4\rho DN}\sqrt{L(2\pi\nu)^2 L}$, $\boxed{Q = \frac{\pi\nu L d^2}{2\rho DN}}$

Переведем все единицы в СИ: 1 МГц = $1 \cdot 10^6$ Гц, 4 см = 0,04 м, 0,2 мм = $2 \cdot 10^{-4}$ м.

Произведем вычисления:

$$Q = \frac{3{,}14 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 2}{2 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}04 \cdot 1000} = 1{,}8 \cdot 10^3.$$

Ответ: $Q = 1{,}8 \cdot 10^3$.

Задача 16

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,04 мкФ и катушки индуктивностью L = 1 Гн. Конденсатору сообщили заряд q_m = 2 мкКл. Построить графики колебаний заряда $q = q(t)$, силы тока $i = i(t)$ и напряжения $u = u(t)$ в этом контуре за время $t = T$.

Дано:
C = 0,04 мкФ
L = 1 Гн
q_m = 2 мкКл

$q = q(t)$ – ?
$i = i(t)$ – ?
$u = u(t)$ – ?

Решение. Переведем единицы емкости и заряда в СИ: 0,04 мкФ = $4 \cdot 10^{-8}$ Ф, 2 мкКл = $2 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Теперь запишем уравнение колебаний заряда в общем виде:

$q = q_m \cos \omega_0 t$ (1) при $\alpha_0 = 0$.

Здесь $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, где $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Вычислим период T:

$T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{1 \cdot 4 \cdot 10^{-8}}$ с = $1{,}26 \cdot 10^{-3}$ с.

Теперь вычислим собственную циклическую частоту колебаний в контуре ω_0: $\omega_0 \frac{2\pi}{1{,}26 \cdot 10^{-3}} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 1{,}6\,\pi \cdot 10^3\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Подставим в уравнение (1) численные значения q_m и ω_0:

$$q = 2 \cdot 10^{-6}\cos 1{,}6 \cdot 10^3 \pi t = 2 \cdot 10^{-6} \cos\frac{2\pi}{T}t. \quad (2)$$

Будем придавать времени t значения $t = 0$; $\frac{T}{4}$; $\frac{T}{2}$; $\frac{3T}{4}$ и T и подставлять их последовательно в (2), вычисляя каждый раз заряд q:

$$q = 2 \cdot 10^{-6} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot 0 \text{ Кл} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл},$$

$$q = 2 \cdot 10^{-6} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = 0,$$

$$q = 2 \cdot 10^{-6} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} \text{ Кл} = -2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл},$$

$$q = 2 \cdot 10^{-6} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4} \text{ Кл} = 0,$$

и $q = 2 \cdot 10^{-6} \cos\frac{2\pi}{T} \cdot T \text{ Кл} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$

Заполним таблицу:

t, доли T	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
q, Кл	$2 \cdot 10^{-6}$	0	$-2 \cdot 10^{-6}$	0	$2 \cdot 10^{-6}$

Построим график $q = q(t)$ (рис. 13-3).

Мы учли, что $T = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ с.

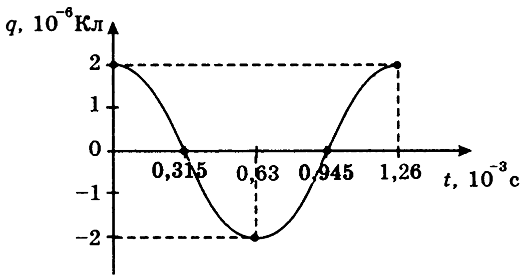


Рис. 13-3

Чтобы построить график напряжения $u = u(t)$, запишем уравнение напряжения, разделив левую и правую части уравнения (2) на C:

$$\frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos\frac{2\pi}{T} t \quad \text{или} \quad u = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-8}} \cos\frac{2\pi}{T} t,$$

$$u = 50 \cos\frac{2\pi}{T} t.$$

Придавая t те же значения в долях периода T, произведем аналогичные вычисления и заполним таблицу:

t, доли T	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
U, В	50	0	−50	0	50

Построим график $u = u(t)$ (рис. 13-4).

Для построения графика силы тока $i = i(t)$ запишем уравнение колебаний силы тока, для чего возьмем первую производную уравнения (2):

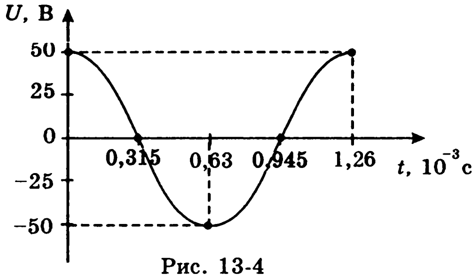


Рис. 13-4

$$i = q' = -1{,}6 \cdot 10^3\pi \cdot 2 \cdot 10^{-6} \sin 1{,}6 \cdot 10^3 \pi t$$

или $i = -0{,}01 \sin \dfrac{2\pi}{T} t$.

Теперь опять будем придавать времени t те же значения в долях периода и вычислять соответствующую им мгновенную силу тока i. Заполним таблицу:

t, доли T	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
i, А	0	−0,01	0	0,01	0

Построим график (рис. 13-5):

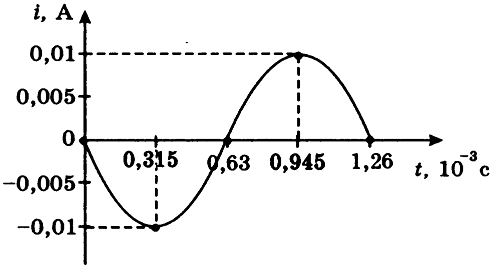


Рис. 13-5

Задача решена.

Задача 17

Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 2 \cdot 10^{-7}$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 5$ Гн. Амплитудное напряжение на обкладках конденсатора $U_m = 20$ В. Построить графики колебаний энергии электрического и магнитного полей для моментов времени $t = 0;\ \frac{T}{4};\ \frac{T}{2};\ \frac{3T}{4};\ T$.

Дано:
$C = 2 \cdot 10^{-7}$ мкФ
$L = 5$ Гн
$U_m = 20$ В

$W_{эл} = W_{эл}(t)$ – ?
$W_M = W_M(t)$ – ?

Решение. Запишем уравнения изменения со временем энергии электрического и магнитного полей сначала в общем виде, приняв начальную фазу $\alpha_0 = 0$:

$$W_{эл} = \frac{Cu^2}{2},$$

где $u = U_m \cos \omega t$ и $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

поэтому
$$W_{эл} = \frac{CU_m^2}{2}\cos^2 \frac{2\pi}{T} t. \qquad (1)$$

Теперь подставим численные значения
$C = 2 \cdot 10^{-7}$ мкФ $= 2 \cdot 10^{-13}$ Ф, $U_m = 20$ В:

$$W_{эл} = \frac{2 \cdot 10^{-13} \cdot 400}{2}\cos^2 \frac{2\pi}{T} t = 4 \cdot 10^{-11} \cos^2 \frac{2\pi}{T} t.$$

Как и в предыдущей задаче, будем придавать времени t значения $t = 0;\ \frac{T}{4};\ \frac{T}{2};\ \frac{3T}{4};\ T$ и вычислять последовательно соответствующие значения энергии электрического поля $W_{эл}$. Заполним таблицу:

t, доли T	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$W_{эл}$, 10^{-11} Дж	4	0	4	0	4

Вычислим период T, воспользовавшись формулой Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$. $T = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{2 \cdot 10^{-13} \cdot 5}$ с $= 6{,}28 \cdot 10^{-6}$ с.

Построим график $W_{эл} = W_{эл}(t)$ (рис. 13-6):

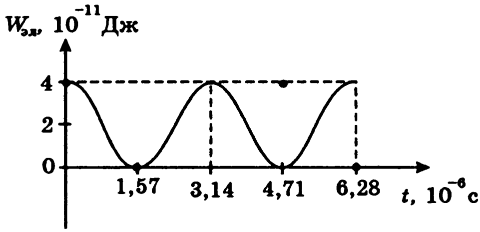


Рис. 13-6

Чтобы построить график колебаний энергии магнитного поля $W_M = W_M(t)$, запишем соответствующее уравнение: $W_м = \dfrac{Li^2}{2}$, где $i = -\omega q_m \sin \omega t$,

поэтому $W_м = \dfrac{L(\omega q_m)^2}{2} \sin^2 \omega t$.

Поскольку $q_m = CU_m$ и $\omega^2 = \dfrac{1}{LC} = \dfrac{2\pi}{T}$, то

$$W_м = \frac{LC^2U_m^2}{2LC} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2 \frac{2\pi}{T} t. \qquad (2)$$

Подставим в (2) числовые значения C и U_m и вычислим W_M для моментов времени $t = 0$; $\dfrac{T}{4}$; $\dfrac{T}{2}$; $\dfrac{3T}{4}$; T. Заполним таблицу:

t, доли T	0	$\dfrac{T}{4}$	$\dfrac{T}{2}$	$\dfrac{3T}{4}$	T
W_M, 10^{-11} Дж	0	4	0	4	0

Построим график $W_M = W_M(t)$ (рис. 13-7).

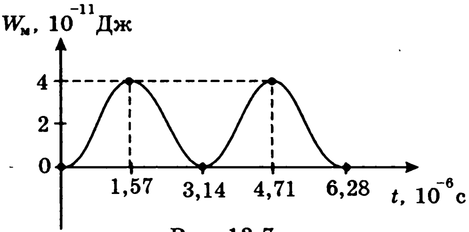


Рис. 13-7

Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. При увеличении максимальной силы тока в катушке колебательного контура на $\Delta I_m = 10$ A амплитуда напряжения увеличилась втрое. Найти первоначальную амплитуду силы тока I_{m1}. Контур идеальный.

Ответ: $I_{m1} = 0{,}5\Delta I_m = 5$ A.

Задача 2. Начальное напряжение на конденсаторе идеального колебательного контура увеличили втрое. Во сколько раз изменилась максимальная энергия магнитного поля катушки?

Ответ: увеличилась в 9 раз.

Задача 3. Амплитуда заряда на обкладках конденсатора идеального колебательного контура $q_m = 2$ нКл, а амплитуда силы тока $I_m = 3$ мА. Чему равна мгновенная сила тока i в катушке в тот момент, когда энергия электрического поля конденсатора вдвое больше энергии магнитного поля катушки? Чему равна собственная циклическая частота ω_0 колебаний в этом контуре?

Ответ: $i = \dfrac{I_m}{\sqrt{3}} = 1{,}7$ А , $\omega_0 = \dfrac{I_m}{q_m} = 1{,}5 \cdot 10^6 \dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Задача 4. Через какую часть периода Т, считая от начала колебаний в идеальном колебательном контуре, энергия электрического поля конденсатора будет в 3 раза больше энергии магнитного поля катушки?

Ответ: $t = \dfrac{T}{12}$.

Задача 5. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 200$ пФ и катушки индуктивности. Частота собственных колебаний в нем $\nu = 5$ МГц. Найти амплитуду напряжения U_m на обкладках конденсатора, если амплитуда силы тока в катушке $I_m = 2$ мА.

Ответ: $U_m = \dfrac{I_m}{2\pi\nu C} = 3 \cdot 10^{-4}$ В.

Задача 6. Частота электромагнитных колебаний в колебательном контуре $\nu_1 = 30$ кГц. Какой будет частота колебаний ν_2 в этом контуре, если расстояние между обкладками плоского конденсатора контура увеличить в $n = 5$ раз?

Ответ: $\nu_2 = \nu_1\sqrt{n} = 6{,}7 \cdot 10^4$ Гц.

Задача 7. Колебательный контур состоит из двух одинаковых конденсаторов, соединенных друг с другом параллельно, и катушки индуктивности. Период собственных электромагнитных колебаний в этом контуре $T_1 = 20$ мкс. Во сколько раз изменится период колебаний, если конденсаторы включить последовательно друг другу?

Ответ: уменьшится в два раза.

Задача 8. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 400$ пФ и катушки индуктивностью $L = 10$ мГн. Найти амплитуду силы тока I_m в этом контуре, если амплитуда напряжения в нем $U_m = 500$ В.

Ответ: $I_m = U_m\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 0{,}1$ А.

Задача 9. Конденсатор емкостью $C = 50$ пФ сначала подключили к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E} = 3$ В, а затем к катушке индуктивностью $L = 5{,}1$ мкГн. Найти максимальное значение силы тока I_m в этом контуре.

Ответ: $I_m = \mathcal{E}\sqrt{\dfrac{C}{L}} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ А.

Задача 10. При одном конденсаторе собственная частота в идеальном колебательном контуре была $\nu_1 = 30$ кГц, а при другом она стала $\nu_2 = 40$ кГц. Какой будет эта частота ν, если конденсаторы соединить: а) последовательно; б) параллельно?

Ответ: а) $\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = 50$ кГц, б) $\nu = \dfrac{\nu_1\nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}} = 24$ кГц.

Задача 11. В колебательный контур включен конденсатор емкостью C = 0,2 мкФ. Какую индуктивность L нужно включить в контур, чтобы получить в нем электромагнитные колебания звуковой частоты ν = 400 Гц?

Ответ: $L = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2 C} = 0{,}79$ Гн.

Задача 12. Определить резонансную частоту колебательного контура $\nu_{рез}$, если отношение максимального заряда на конденсаторе к максимальной силе тока в контуре равно n.

Ответ: $\nu_{рез} = \dfrac{1}{2\pi n}$.

Задача 13. Будут ли колебательные контуры настроены в резонанс, если параметры одного из них C_1 = 160 пФ и L_1 = 5 мГн, второго – C_2 = 100 пФ и L_2 = 4 мГн? Как нужно изменить емкость второго колебательного контура, чтобы эти контуры были настроены в резонанс?

Ответ: не будут, так как $\nu_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}} \neq \nu_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}}$; увеличить C_2 вдвое.

Задача 14. Изменение силы тока в зависимости от времени задано уравнением $i = 5 \sin 200\pi t$ А. Найти частоту ν и период Т колебаний, амплитуду силы тока I_m, а также значение силы тока i_1 при фазе $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ рад.

Ответ: I_m = 5 А, ν = 100 Гц, T = 0,01 с, i_1 = 2,5 А.

Задача 15. В колебательном контуре индуктивность катушки L = 0,2 Гн, а амплитуда силы тока I_m = 40 мА. Найти энергию электрического поля конденсатора $W_{эл}$ и магнитного поля катушки $W_{магн}$ в тот момент, когда мгновенное значение силы тока i будет меньше амплитудного значения силы тока I_m вдвое.

Ответ: $W_{эл} = \dfrac{LI_m^2}{2}\cos^2\dfrac{\pi}{6} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Дж,

$W_{магн} = \dfrac{LI_m^2}{2}\sin^2\dfrac{\pi}{6} = 4 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 16. Собственные колебания в колебательном контуре протекают согласно уравнению $i = 2 \sin 100\pi t$ мА. Найти индуктивность L катушки, если емкость конденсатора C = 10 мкФ.

Ответ: $L = \dfrac{1 \cdot 10^{-4}}{\pi^2 C} = 1$ Гн.

Задача 17. В колебательном контуре с высокой добротностью происходят затухающие колебания. Во сколько раз уменьшится амплитуда напряжения через время t, равное двум периодам, считая от начала колебаний, если емкость конденсатора C, индуктивность катушки L и активное сопротивление контура R известны?

Ответ: $\dfrac{U_{0m}}{U_m} = \sqrt{\dfrac{R\sqrt{C}}{R\sqrt{C} - 4\pi\sqrt{L}}}$.

Задача 18. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C = 2 пФ и катушки индуктивностью L = 2 мГн. Максимальное напряжение на обкладках конденсатора U_m = 10 *В*. Постройте графики колебаний заряда $q = q(t)$, силы тока $i = i(t)$ и напряжения $u = u(t)$ за время t, равное одному периоду колебаний Т. Постройте графики колебаний энергий электрического поля $W_{эл} = W_{эл}(t)$, магнитного поля $W_м = W_м(t)$ и полной энергии $W = W(t)$ в этом контуре в течение одного периода колебаний.

14. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Методические указания к решению задач

Если замкнутый проводящий контур (виток, рамку) пересекает переменный магнитный поток, то в этом контуре возникает переменный ток. Если магнитный поток Ф изменяется по гармоническому закону вследствие вращения контура в магнитном поле, то его уравнение

$\Phi = \Phi_m \cos\alpha$, или $\Phi = \Phi_m \cos\omega t$, или $\Phi = BS_m \cos\omega t$,

где $\Phi_m = BS$ – амплитуда магнитного потока, B – индукция магнитного поля, S – площадь контура, ω – угловая скорость вращения контура в магнитном поле, равная циклической частоте колебаний переменного тока в контуре.

Во вращающемся в магнитном поле контуре возникает ЭДС электромагнитной индукции. Мгновенная ЭДС e равна первой производной магнитного потока, пересекающего контур, по времени, взятой со знаком «минус»: $e = -\Phi'$.

Модуль мгновенной ЭДС $e = \mathcal{E}_m \sin\omega t$,

где $\mathcal{E}_m = \omega BS$ – амплитуда ЭДС.

Если контур имеет N витков, то $\mathcal{E}_m = \omega BSN$.

Согласно закону Ома мгновенная сила тока i в проводящем контуре с активным сопротивлением R равна (в случае отсутствия катушки индуктивности и конденсатора):

$$i = \frac{u}{R} \text{ или } i = I_m \cos\omega t,$$

где u – мгновенное напряжение, I_m – амплитуда силы тока, равная по закону Ома: $I_m = \dfrac{U_m}{R}$, U_m – амплитуда напряжения.

Уравнение переменого напряжения имеет вид $u = U_m \cos\omega t$ при $\alpha_0 = 0$. Здесь α_0 – начальная фаза.

Если в цепи переменного тока имеется только активное сопротивление (нет конденсатора и катушки индуктивности), то колебания силы тока и напряжения совпадают по фазе.

При одинаковой фазе колебаний силы тока и напряжения в цепи переменного тока мгновенная мощность переменного тока

$$p = ui \text{ или } p = U_m I_m \cos^2 \omega t.$$

Среднюю мощность P переменного тока за период (при $t = T$) можно определить по формуле $P = \frac{I_m U_m}{2}$.

Частота промышленного переменного тока (стандартная частота) в нашей стране ν = 50 Гц и, значит, его период $T = \frac{1}{50}$ с = = 0,02 с, а циклическая (или угловая) частота $\omega = 2\pi\nu = 100\ \pi$ рад/с. Поэтому, если в задаче идет речь о переменном токе стандартной частоты, значит, его частота ν = 50 Гц вам известна.

Если в задачах о постоянном токе идет речь о силе тока, то имеют в виду только одну величину I (то же самое можно сказать о напряжении или ЭДС). А когда в задачах переменного тока идет речь о силе тока, то это может быть мгновенная сила тока i (т. е. сила тока в данный момент времени), амплитудная (максимальная) сила тока I_m или действующая сила тока I, и для каждой из них имеется своя формула.

Действующим значением переменного тока называют значение такого постоянного тока, который, проходя по цепи, выделяет в ней за единицу времени столько же теплоты, что и данный переменный ток.

Действующие значения силы тока I, напряжения U и ЭДС $\mathcal{E}$ связаны с их амплитудными значениями формулами

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, если вы решаете задачу о переменном токе, то прежде всего должны определить, о каких значениях силы тока, напряжения или ЭДС идет речь: мгновенных i, u или e, действующих I, U или $\mathcal{E}$, или амплитудных I_m, U_m или $\mathcal{E}_m$, и постараться их не перепутать.

Электроизмерительные приборы, включенные в цепь переменного тока, показывают его действующее значение. Поэтому, если в условии задачи сказано, например, что амперметр, включенный в цепь переменного тока, показал силу тока, равную 10 А, то это не мгновенное i и не амплитудное I_m, а именно действующее I его значение, и вы должны записать в условии задачи: I = 10 А. Используемое нами в быту напряжение U = 220 *В* – это тоже действующее значение напряжения, а на самом деле оно изменяется по гармоническому закону $u = U_m \cos \alpha$ от нуля до $U_m = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2}$ = 311 В. Поэтому, если вас спросят, можно ли в цепь переменного тока с напряжением 220 В включить конденсатор, который будет пробит при 300 В, то несмотря на то, что напряжение 220 В меньше пробивного, конденсатор все же будет пробит, так как максимальное напряжение в этой цепи достигает 311 В, т. е. превосходит 300 В. Поэтому такой конденсатор в цепь включать нельзя.

Для решения задач переменного тока можно использовать закон Ома в виде $I = \frac{U}{R}$, но только применительно к его действующему или амплитудному значениям. И при этом следует помнить, что в знаменателе закона Ома должно находиться полное сопротивление Z цепи, в которую входят активное сопротивление R,

индуктивное сопротивление (сопротивление катушки индуктивности) X_L и емкостное сопротивление (сопротивление конденсатора) X_C. В этом случае $I = \frac{U}{Z}$ и $I_m = \frac{U_m}{Z}$,

где $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$.

Напоминаем, что сопротивление R называется активным, сопротивление $X_L - X_C$ – реактивным, а сопротивление Z – полным сопротивлением цепи переменного тока.

Если в цепи нет активного сопротивления R, то полное сопротивление $Z = X_L - X_C$. Если в ней нет катушки индуктивности, то $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$, а если в цепи нет конденсатора, то $Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$.

В цепях переменного тока джоулево тепло выделяется только на активном сопротивлении R, поэтому здесь можно применять закон Джоуля–Ленца $Q = I^2Rt$, $Q = \frac{U^2}{R}t$ и $Q = UIt$, но при этом надо помнить, что здесь I и U – действующие значения силы и напряжения переменного тока, а амплитудные сила тока I_m и напряжение U_m связаны с ними формулами

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Внимание! Законы последовательного и параллельного соединений проводников к цепям переменного тока применимы не всегда. Их можно применять только к мгновенным значениям силы i, напряжения u и ЭДС e, а к их действующим и амплитудным значениям применять нельзя.

На рис. 14-1 сила переменного тока, как мгновенная i, так и действующая I, и амплитудная I_m во всех участках последовательной цепи, состоящей из резистора R, катушки L и емкости C, одинакова. Кроме того, мгновенное напряжение на полюсах источника тока u равно сумме мгновенных напряжений u_R, u_C и u_L:

$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Но амплитудное напряжение U_m не равно сумме U_{mR}, U_{mL} и U_{mC}, как и не равно сумме действующих напряжений U_R, U_L и U_C на разных участках этой цепи действующее напряжение U на полюсах источника. Чтобы найти, например, амплитудное напряжение U_m, зная U_{mR}, U_{mL} и U_{mC}, надо строить векторную диаграмму, учитывая, что напряжение U_{mR} совпадает по фазе с током I_m, напря-

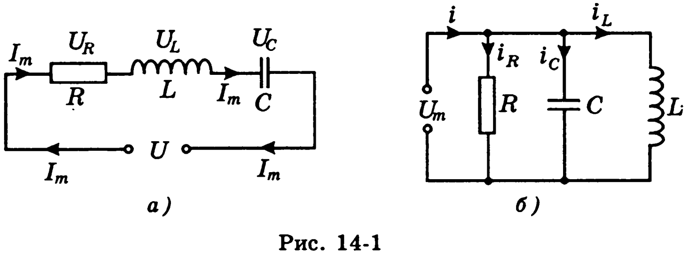


Рис. 14-1

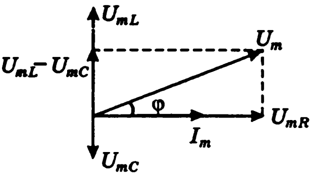


Рис. 14-2

жение U_{mL} опережает по фазе ток I_m, а значит, и напряжение U_{mR}, на $\frac{\pi}{2}$, а напряжение U_{mC} отстает по фазе от U_{mR} на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 14-2).

Поэтому U_m можно найти по теореме Пифагора

$$U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2}.$$

При параллельном соединении участков цепи, как на рис. 14-1, б, $i = i_R + i_L + i_C$, но $I_m \neq I_{mR} + I_{mC} + I_{mL}$, а вот напряжение u, U_m и U на таких участках одинаковы. Чтобы найти I_m, зная I_{mR}, I_{mL} и I_{mC}, тоже приходится строить векторную диаграмму.

Сдвиг фаз φ между током I и напряжением U определяют по формуле $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$

или по формуле $\cos \varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$.

Активная мощность тока определяется по формуле

$$P = UI \cos \varphi,$$

где U и I – действующие напряжение и сила тока.

При решении задач на трансформаторы в формулах $\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$ и $k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$, а также $\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}$ записаны действующие значения напряжений и сил токов.

Эти формулы справедливы, если ни первичная, ни вторичная обмотки трансформатора не содержат активного сопротивления R. Сопротивлением первичной обмотки, если о нем ничего не сказано, можно пренебречь, а вторичная обмотка может его содержать. Если она все же не содержит сопротивления или им тоже можно пренебречь, то напряжение на выходе такой обмотки (напряжение на ее зажимах или на потребителе, которым может быть радиолампа, трубка телевизора и др., напряжение на нагрузке, – это все одно и то же) равно напряжению U_2. Если же в условии задачи что-либо сказано о сопротивлении R_2 вторичной обмотки (оно дано, или спрашивается, или что-либо говорится о длине проводников, из которых обмотка изготовлена, или о материале проводника, или о его сечении, или диаметре), то на выходе вторичной обмотки на нагрузке напряжение $U_н$ будет меньше расчетного напряжения U_2 на величину падения напряжения $\Delta U = I_2R_2$ на этом сопротивлении R_2. Таким образом, напряжение на зажимах вторичной обмотки (на нагрузке) в этом случае будет

$$U_н = U_2 - \Delta U \text{ или } U_н = U_2 - I_2R_2.$$

Подчеркнем еще раз, что трансформатор может повышать или понижать напряжение только переменного тока, потому что во вторичной обмотке может возникнуть ЭДС электромагнитной индукции только тогда, когда ее пересекает переменный магнитный поток. Если же ее будет пересекать постоянный магнитный поток, то никакой ЭДС в ней не возникнет и изменения напряжения происходить не будет. На каверзный вопрос, что будет, если первичную обмотку трансформатора подключить к источнику постоянного тока, надо ответить, что в этом случае трансформатор сгорит, так как первичная обмотка обычно имеет ничтожно малое сопротивление, и поэтому произойдет короткое замыкание. Если же сопротивление первичной обмотки току, вырабатываемому данным источником постоянного тока, будет достаточно велико, то все равно никакого изменения напряжения этот трансформатор дать не сможет из-за отсутствия явления электромагнитной индукции. Если такой трансформатор подключить к источнику постоянного тока, то ток пойдет по первичной обмотке и вокруг нее возникнет магнитное поле, которое будет пронизывать вторичную обмотку, т. е. магнитный поток вторичную обмотку пересекать будет, но он будет постоянным и, значит, скорость его изменения Φ' будет равна нулю, поэтому и ЭДС индукции во вторичной обмотке $\mathcal{E}_i = -\Phi'$ тоже будет равна нулю.

Используя аналогию между механическими и электрическими колебаниями, можно убедиться, что последовательное соединение пружин соответствует параллельному соединению конденсаторов, и наоборот, параллельное соединение пружин – последовательному соединению конденсаторов.

Принцип действия генератора переменного тока так же, как и трансформатора, основан на явлении электромагнитной индукции. Неподвижные проводники, в которых наводится ЭДС электромагнитной индукции, уложены в пазах (углублениях) статора, а электромагнит (ротор) вращается вокруг своей оси, благодаря чему проводник пересекает переменный магнитный поток, возбуждая в них ЭДС электромагнитной индукции и наводя индукционный ток. Если при этом ротор генератора имеет только одну пару полюсов, то для наведения в проводах переменного тока с промышленной частотой $\nu_1 = 50$ Гц он должен вращаться, делая 50 оборотов в секунду, т. е. с частотой $\nu_2 = 50$ об/с. Это очень большая частота вращения, требующая больших затрат энергии. Если же сделать ротор с двумя парами полюсных наконечников $N = 2$, то, чтобы частота вырабатываемого переменного тока осталась прежней, т. е. равной $\nu_1 = 50$ Гц, достаточно вращать ротор с частотой $\nu_2 = 25$ об/с, т. е. в два раза медленнее. Таким образом, чтобы получить переменный ток с частотой N_1 посредством ротора, имеющего N пар полюсов, его достаточно вращать с частотой

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{N}.$$

При решении задач на работу электрических генераторов или двигателей удобно использовать закон сохранения и превращения энергии для каждого режима работы этих устройств. Кроме этого, иногда здесь следует применять формулы механики

$$P = Fv \quad \text{или} \quad P = M\omega,$$

где P – мощность, F – сила, приложенная к вращающемуся валу механизма, v – линейная скорость точек поверхности вала, M – момент силы F, ω – угловая скорость вращения вала.

Решение отдельных задач

Задача 1

Квадратная рамка со стороной a = 10 см равномерно вращается в однородном магнитном поле индукцией B = = 0,2 Тл с частотой ν = 50 c^{-1}. Написать уравнения колебаний магнитного потока $\Phi = \Phi(t)$ и ЭДС $e = e(t)$, если при $t = 0$ нормаль к плоскости рамки перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Найти амплитуду ЭДС $\mathcal{E}_m$.

Дано:
a = 10 см
B = 0,2 Тл
ν = 50 c^{-1}

$\Phi = \Phi(t)$ – ?
$e = e(t)$ – ?
$\mathcal{E}_m$ – ?

Решение. Если нормаль $\vec{n}$ к плоскости рамки при $t = 0$ перпендикулярна вектору $\vec{B}$, значит, в этот момент плоскость рамки параллельна линиям вектора $\vec{B}$ и магнитный поток сквозь рамку равен нулю. Через время $t = \frac{T}{4}$, где T – период вращения, поток станет максимален, затем через время $t = \frac{T}{2}$ он снова равен нулю и т. д. Значит, можно считать, что изменение магнитного потока в этом случае происходит по закону синуса:

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t, \quad (1)$$

ведь если $t = 0$, то и $\Phi = 0$, а если $t = \frac{T}{2}$, то

$$\Phi = \Phi_m \sin \omega t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \Phi_m.$$

Угловая скорость вращения рамки $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. (2)

В равенстве (1) $\Phi_m = BS$, где $S = a^2$ – площадь квадратной рамки. С учетом этого $\Phi_m = Ba^2$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1): $\Phi = Ba^2 \sin 2\pi\nu t$.

Переведем в СИ единицу a: 10 см = 0,1 м.

Теперь заменим все постоянные величины B, a и ν их числовыми значениями:

$\Phi = 0{,}2 \cdot 0{,}01 \sin 20\pi \cdot 50\pi t$, $\Phi = 2 \cdot 10^{-3} \sin 100\pi t$.

Согласно закону электромагнитной индукции мгновенная ЭДС e равна первой производной магнитного потока по времени, взятой со знаком «минус»:

$e = -\Phi'$, $e = -2 \cdot 10^{-3} \cdot 100\, \pi \cos 100\, \pi t$,

$$\boxed{e = -0{,}628 \cos 100\, \pi t} \quad (4)$$

Из (4) следует, что $\mathcal{E}_m = 0{,}628$ В.

Ответ: $\Phi = 2 \cdot 10^{-3} \sin 100\pi t$, $e = -0{,}628 \cos 100\pi t$, $\mathcal{E}_m = 0{,}628$ В.

Задача 2

Чему равно число витков N в круглом проводящем контуре радиусом $R = 10$ см, вращающемся в однородном магнитном поле индукцией $B = 0{,}2$ Тл с частотой $\nu = 20\ \text{с}^{-1}$, если амплитудное значение ЭДС $\mathcal{E}_m = 50$ В?

Дано:
$R = 10$ см
$B = 0{,}2$ Тл
$\nu = 20\ \text{с}^{-1}$
$\mathcal{E}_m = 50$ В
N – ?

Решение. При вращении контура в магнитном поле в нем возникает ЭДС электромагнитной индукции, мгновенная величина которой e равна первой производной магнитного потока, пересекающего этот контур, по времени, повторенной N раз и взятой со знаком «минус»:

$e = -\Phi' N$, где $\Phi' = (BS \cos \omega t)' = -\omega BS \sin \omega t$, поэтому $e = \omega BSN \sin \omega t$.

Здесь $\mathcal{E}_m = \omega BSN$ – амплитуда ЭДС, которая нам известна. Следовательно, $N = \dfrac{\mathcal{E}_m}{\omega BS}$, где $\omega = 2\pi\nu$, и $S = \pi R^2$,

поэтому $$\boxed{N = \frac{\mathcal{E}_m}{2(\pi R)^2 \nu B}}$$

Переведем в СИ единицу R: 10 см = 0,1 м.

Произведем вычисления: $N = \dfrac{50}{2(3{,}14 \cdot 0{,}1)^2 20 \cdot 0{,}2} = 63$.

Ответ: $N = 63$.

Задача 3

Написать уравнения, выражающие зависимость напряжения $u = u(t)$ и силы тока $i = i(t)$ от времени t в электроплитке сопротивлением $R = 60$ Ом, включенной в цепь переменного тока напряжением $U = 220$ B, если его частота $\nu = 50$ Гц.

Дано:
$R = 60$ Ом
$U = 220$ B
$\nu = 50$ Гц
$u = u(t)$ – ?
$i = i(t)$ – ?

Решение. В цепи переменного тока, где имеется только активное сопротивление R, колебания напряжения совпадают по фазе с колебаниями силы тока. Пусть напряжение изменяется по закону косинуса и начальная фаза $\alpha_0 = 0$. Тогда уравнение колебаний напряжения будет иметь вид

$u = U_m \cos \omega t$,

где U_m – максимальное напряжение на плитке. Но напряжение $U = 220$ *В*, известное нам из условия задачи, – это действующее напряжение. Оно связано с U_m формулой $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, откуда $U_m = U\sqrt{2}$. (2)

Кроме того, $\omega = 2\pi\nu$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1): $u = U\sqrt{2}\cos 2\pi\nu t$. (4)

Теперь заменим постоянные U и ν их числовыми значениями: $u = 220\sqrt{2}\cos 2\pi\cdot 50t$, $\boxed{u = 311\cos 100\pi t}$ – уравнение $u = u(t)$.

Для нахождения зависимости $i = i(t)$ разделим уравнение (4) на R, ведь по закону Ома $i = \frac{u}{R}$ и $I_m = \frac{U_m}{R} = \frac{U\sqrt{2}}{R}$,

поэтому $\frac{u}{R} = \frac{U\sqrt{2}}{R}\cos 2\pi\nu t$ или $i = \frac{U\sqrt{2}}{R}\cos 2\pi\nu t$. (5)

Теперь опять заменим в (5) постоянные величины U, R и ν их числовыми значениями: $i = \frac{220\sqrt{2}}{60}\cos 2\pi\cdot 50t$,

$\boxed{i = 5{,}2\cos 100\pi t}$ – уравнение $i = i(t)$.

Задача решена.

Ответ: $u = 311\cos 100\pi t$, $i = 5{,}2\cos 100\pi t$.

Задача 4

При каких фазах α в пределах одного периода мгновенное значение напряжения u равно по модулю половине максимального напряжения U_m?

Дано:
$u = \frac{U_m}{2}$

α – ?

Решение. Запишем уравнение колебаний напряжения $u = U_m\cos\alpha$.

Согласно условию $u = \frac{U_m}{2}$, поэтому

$\frac{U_m}{2} = U_m\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

В пределах периода, т. е. когда $t = T$, $|\cos\alpha| = 1/2$, если $\alpha_1 = 60° = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = 120° = \frac{2\pi}{3}$,

$$\alpha_3 = 240° = \frac{4\pi}{3}, \quad \alpha_4 = 300° = \frac{5\pi}{3}.$$

Ответ: $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$, $\alpha_4 = \frac{5\pi}{3}$.

Задача 5

В какой момент времени t, считая от начала колебания, мгновенное значение силы переменного тока i будет равно его действующему значению I? Период колебаний тока T считать известным.

Дано:
$\alpha_0 = 0$
$i = I$
T
t – ?

Здесь α_0 – начальная фаза.

Решение. Для решения этой задачи запишем уравнение, в которое входит мгновенное значение силы тока i, текущее время t и период T, т. е. максимальное количество величин, о которых говорится в условиях задачи. Таким уравнением без сомнения является уравнение гармонических колебаний силы тока при $\alpha_0 = 0$:

$i = I_m \cos \omega t$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому

$$i = I_m \cos \frac{2\pi}{T} t. \qquad (1)$$

Здесь I_m – максимальная сила тока. Эта величина нам не известна, но мы знаем, что она связана с действующим значением силы тока I соотношением $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Но поскольку согласно условию $i = I$, то $i = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. $\qquad (2)$

Подставим (2) в (1): $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I_m \cos \frac{2\pi}{T} t$

или после сокращения $\cos \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Если $\cos \frac{2\pi}{T} t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, сам аргумент $\frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{4}$.

Сократив π, получим $\frac{2t}{T} = \frac{1}{4}$, откуда $t = \frac{T}{8}$.

Задача решена.

Ответ: $t = T/8$.

Задача 6

Неоновая лампа, включенная в цепь переменного тока, светится, когда напряжение на ней $U_л$ становится равным действующему напряжению переменного тока U, а гаснет, когда напряжение на ней равно напряжению зажигания. Какое время t_1 в долях периода Т светится лампа? Какое время t_2 в долях периода она не светится? Чему равно время Δt между вспышками?

Дано:
$U_л = U$
$\alpha_0 = 0$
t_1 – ?
t_2 – ?
Δt – ?

Решение. Определим, через какую долю периода, считая от начала колебания (т. е. когда $\alpha_0 = 0$), мгновенное напряжение u становится равным действующему U. Для этого в уравнение колебаний напряжения

$$u = U_m \cos \omega t = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t$$

подставим вместо мгновенного напряжения u действующее напряжение $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$: $\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U_m \cos \frac{2\pi}{T} t$, откуда $\cos \frac{2\pi}{T} t = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{4}$ и $t = \frac{T}{8}$.

Теперь обратимся к рис. 14-3. На нем изображен график колебаний напряжения $u = u(t)$ в цепи, в которую

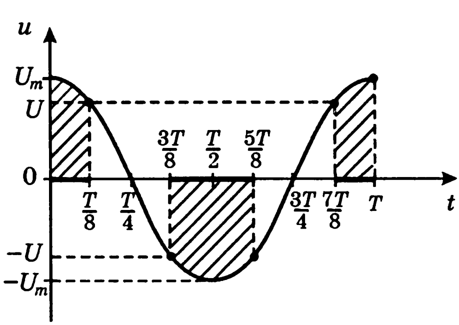


Рис. 14-3

включена неоновая лампа. Считая от момента $t = 0$, когда напряжение максимально ($u = U_m$), и до момента $t = T/8$, когда оно упадет до $u = U$, лампа горит, ведь на ней напряжение больше ее напряжения зажигания $U_л = U = 220$ В. Затем от момента $t = T/8$ до момента $t = 3T/8$ напряжение на лампе меньше $U_л = 220$ В, и она не горит. Затем в момент времени $t = 3T/8$ она вновь зажигается и горит в течение времени $\frac{5T}{8} - \frac{3T}{8} = \frac{T}{4}$ до момента времени $t = \frac{5T}{8}$, после чего она снова гаснет и не светится до момента $t = \frac{7T}{8}$. Затем она вновь зажигается и горит от момента $t = \frac{7T}{8}$ до момента $t = T$.

Таким образом, время горения лампы в течение периода складывается из четырех промежутков времени, каждый из которых равен $T/8$, следовательно,

$$t_1 = 4\frac{T}{8} = \frac{T}{2}.$$

И ровно столько же времени, т. е. вторую половину периода, лампа не светит:

$$t_2 = \frac{T}{2}.$$

На рис. 14-3 видно, что время между двумя последовательными вспышками

$$\Delta t = \frac{T}{8} + \frac{T}{8} = \frac{T}{4}.$$

Ответ: $t_1 = t_2 = \frac{T}{2}$, $\Delta t = \frac{T}{4}$.

Задача 7

Конденсатор включен в цепь переменного тока промышленной частоты ($\nu = 50$ Гц). Напряжение в сети $U = 220$ В, максимальная сила тока в цепи $I_m = 4$ А. Найти емкость конденсатора C.

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$U = 220$ В
$I_m = 4$ А
C – ?

Решение. Если по закону Ома для цепи переменного тока с емкостным сопротивлением определить это самое сопротивление X_c, а затем, уже зная его, записать формулу

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \text{откуда } C = \frac{1}{\omega X_C}, \qquad (1)$$

то задача будет решена.

Запишем закон Ома применительно к действующим значениям силы I и напряжения U переменного тока:

$$I = \frac{U}{X_C}, \qquad (2)$$

ведь об активном и индуктивном сопротивлениях нам ничего не сказано, значит, их в этой цепи нет.

Из (2) $X_C = \frac{U}{I}$, где $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, поэтому $X_C = \frac{U\sqrt{2}}{I_m}$. (3)

Кроме того, $\omega = 2\pi\nu$. (4)

Подставив (3) и (4) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{C = \frac{I_m}{2\sqrt{2}\pi\nu U}}$$

Проверим единицу полученной величины:

$$[C]_{СИ} = \frac{А}{Гц \cdot В} = \frac{А}{с^{-1} \cdot В} = \frac{А \cdot с}{В} = \frac{Кл}{В} = Ф.$$

Произведем вычисления:

$$C = \frac{4}{2\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 220} Ф = 4{,}1 \cdot 10^{-5}\ Ф.$$

Ответ: $C = 4{,}1 \cdot 10^{-5}$ Ф.

Задача 8

Катушка индуктивности, активным сопротивлением которой можно пренебречь, включена в цепь переменного тока стандартной частоты ($\nu = 50$ Гц). При напряжении $U = 220$ В сила тока в ней $I = 2$ А. Найти индуктивность катушки L.

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$U = 220$ В
$I = 2$ А

L – ?

Решение. Для нахождения индуктивности воспользуемся формулой индуктивного сопротивления

$X_L = \omega L$, где $\omega = 2\pi\nu$, поэтому $X_L = 2\pi\nu L$,

откуда $L = \frac{X_L}{2\pi\nu}$. (1)

Теперь опять применим закон Ома, но уже для цепи переменного тока, в которой имеется только индуктивное сопротивление:

$$I = \frac{U}{X_L},\ \text{откуда}\ X_L = \frac{U}{I}. \qquad (2)$$

Здесь I и U – действующие значения переменного тока.

Подставив (2) в (1), решим задачу: $\boxed{L = \frac{U}{2\pi\nu I}}$

Произведем вычисление: $L = \frac{220}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 2}$ Гн = 0,35 Гн.

Ответ: L = 0,35 Гн.

Задача 9

Найти сдвиг фаз φ между напряжением и током в цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивления R = 1 кОм, катушки индуктивности L = 50 Гн и конденсатора емкостью C = 1 мкФ. Найти среднюю мощность тока P в этой цепи, если амплитуда напряжения U_m = 100 B, а частота колебаний тока ν = 50 Гц.

Дано:
R = 1 кОм
L = 50 Гн
C = 1 мкФ
U_m = 100 В
ν = 50 Гц

φ – ?
P – ?

Решение. Сдвиг фаз между током и напряжением в цепи переменного тока, содержащей емкость и индуктивность, определяет формула $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$.

Здесь ω – циклическая частота колебаний тока в цепи. Поскольку $\omega = 2\pi\nu$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}}{R}. \qquad (1)$$

Зная tg φ, несложно определить и сам сдвиг фаз φ:

$$\boxed{\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}}{R}\right)}$$

Итак, одну искомую величину мы нашли. Теперь найдем среднюю мощность переменного тока P:

$$P = UI\cos\varphi. \qquad (2)$$

Здесь U и I – эффективные напряжение и сила тока в этой цепи.

Из условия задачи нам известно максимальное напряжение U_m в этой цепи, поэтому воспользуемся формулой

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Сложнее найти действующее значение силы тока I. Его мы могли бы найти по аналогичной формуле, если бы нам было известно максимальное значение силы тока в этой цепи: $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$.

Но I_m нам тоже не известно. Правда, его можно определить по закону Ома для полной цепи переменного тока:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Тогда с учетом, что $\omega = 2\pi\nu$,

$$I = \frac{U_m}{\sqrt{2\left(R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2\right)}}. \qquad (4)$$

Подставив (3) и (4) в (2), мы определим вторую искомую величину – мощность P:

$$\boxed{P = \frac{U_m^2 \cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 1 кОм = $1 \cdot 10^3$ Ом, 1 мкФ = $1 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 50 - \dfrac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}}{1 \cdot 10^3}\right) = 12{,}5^\circ.$$

$$P = \frac{10^4 \cdot \cos 12{,}5^\circ}{2\sqrt{10^6 + \left(2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 50 - \dfrac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}\right)^2}}\ \text{Вт} =$$

$= 0{,}4$ Вт.

Ответ: $\varphi = 12{,}5^\circ$; $P = 0{,}4$ Вт.

Задача 10

Участок цепи переменного тока стандартной частоты состоит из резистора и катушки индуктивностью $L = 10$ мГн. Найти амплитуду напряжения U_m на зажимах этого участка, если амперметр показывает силу тока $I = 2$ А, вольтметр показывает $U_R = 50$ В (рис. 14-4).

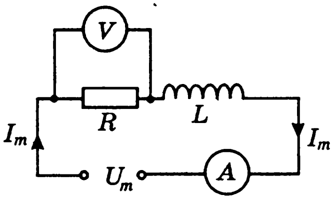


Рис. 14-4

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$L = 10$ мГн
$I = 2$ А
$U_R = 50$ В

U_m – ?

Решение. Для нахождения U_m построим векторную диаграмму напряжений (рис. 14-5). По горизонтали направим вектор, соответствующий амплитудному напряжению U_{mR} на резисторе, а по вертикали – вектор, соответствующий амплитудному напряжению U_{mL} на катушке, ведь колебания напряжения на ней опережают колебания тока в резисторе по фазе на $\pi/2$, а колебания напряжения на резисторе совпадают по фазе с колебаниями тока в нем. Тогда по теореме Пифагора

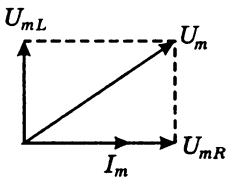


Рис. 14-5

$$U_m = \sqrt{U_{mR}^2 + U_{mL}^2}\,. \quad (1)$$

Вольтметр, подключенный к резистору, показывает действующее напряжение U_R на нем. Оно связано с амплитудным напряжением U_{mR} формулой

$$U_R = \frac{U_{mR}}{\sqrt{2}}, \text{ откуда}$$

$$U_{mR} = U_R\sqrt{2}\,. \quad (2)$$

Амплитудное напряжение U_{mL} на катушке найдем по закону Ома, умножив амплитуду силы тока I_m на индуктивное сопротивление катушки X_L:

$U_{mL} = I_m X_L$, где $I_m = I\sqrt{2}$ и $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$, поэтому

$$U_{mL} = 2\sqrt{2}\,\pi\nu IL. \qquad (3)$$

Напомним, что амперметр и вольтметр в цепи переменного тока показывают его действующие значения. Кроме того, сила тока здесь везде одинакова.

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1):

$$U_m = \sqrt{\left(U_R\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\pi\nu IL\right)^2} \text{ или}$$

$$U_m = \sqrt{2\left(U_R^2 + \left(2\pi\nu IL\right)^2\right)}$$

Переведем в СИ единицу индуктивности:
10 мГн = 0,01 Гн.

Произведем вычисления:

$$U_m = \sqrt{2(2500 + (2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 0{,}01)^2)} \text{ В} = 71 \text{ В}.$$

Ответ: $U_m = 71$ В.

Задача 11

Конденсатор емкостью $C = 200$ мкФ, резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и катушка индуктивностью $L = 50$ мГн соединены параллельно и подключены к источнику с действующим напряжением $U = 220$ $В$. Найти амплитуды сил токов I_{mC}, I_{mR} и I_{mL} в параллельных ветвях и амплитуду силы тока I_m в неразветвленной части цепи (рис. 14-6). Частота переменного тока стандартная. Найти полное сопротивление цепи Z.

Дано:
$C = 200$ мкФ
$R = 100$ Ом
$L = 50$ мГн
$U = 220$ В
$\nu = 50$ Гц

I_{mC} – ?
I_{mR} – ?
I_{mL} – ?
I_m – ?
Z – ?

Решение. Поскольку амплитудное напряжение $U_m = U\sqrt{2}$ на всех параллельных участках этой цепи одинаково, то амплитуды сил токов в отдельных параллельных ветвях найти достаточно просто. Для этого воспользуемся законом Ома:

$$I_{mC} = \frac{U_m}{X_C} = \frac{U\sqrt{2}}{X_C}, \qquad (1)$$

где емкостное сопротивление $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{2\pi\nu C}$. (2)

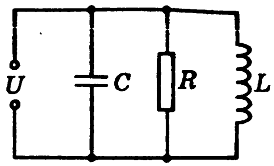


Рис. 14-6

Подставив (2) в (1), найдем одну из искомых величин:

$$\boxed{I_{mC} = 2\sqrt{2}\,\pi\nu CU} \qquad (3)$$

Аналогичным образом найдем I_{mR}:

$$I_{mR} = \frac{U_m}{R} \quad \text{или} \quad \boxed{I_{mR} = \frac{U\sqrt{2}}{R}} \qquad (4)$$

Теперь таким же образом найдем и I_{mL}:

$I_{mL} = \dfrac{U_m}{X_L} = \dfrac{U\sqrt{2}}{X_L}$, где индуктивное сопротивление

$X_L = \omega L = 2\pi\nu L$, поэтому $\boxed{I_{mL} = \dfrac{U\sqrt{2}}{2\pi\nu L}}$ (5)

Подчеркнем еще раз, что амплитуда силы тока I_m в общей части цепи не равна сумме амплитуд сил токов в ее параллельных участках, ведь сила тока в них достигает максимума в разные моменты времени. Для нахождения I_m построим векторную диаграмму (рис. 14-7). Отложим по горизонтали вектор, соответствующий амплитуде силы тока в активном сопротивлении I_{mR}. Именно с этим вектором совпадает вектор U_m, соответствующий амплитуде напряжения. Колебания напряжения на конденсаторе отстают от колебаний силы тока на $\pi/2$. Иными словами, колебания силы тока на нем опережают колебания напряжения тоже на $\pi/2$, значит, они опережают и колебания силы тока в резисторе на $\pi/2$. Поэтому мы отложим вектор, соответствующий амплитуде силы тока I_{mC}, верти-

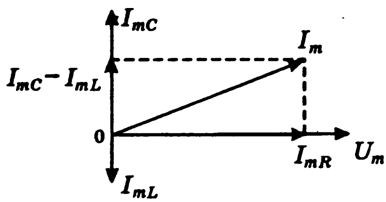


Рис. 14-7

кально вверх. В катушке колебания силы тока отстают по фазе на $\pi/2$ от колебаний напряжения, поэтому вектор, соответствующий I_{mL}, отложим вертикально вниз. Затем произведем векторное сложение векторов, соответствующих I_{mR} и $I_{mC} - I_{mL}$, после чего найдем I_m, воспользовавшись теоремой Пифагора:

$$\boxed{I_m = \sqrt{I_{mR}^2 + (I_{mC} - I_{mL})^2}} \qquad (6)$$

Чтобы найти полное сопротивление Z такой цепи, подставим (3), (4) и (5) в (6) и учтем, что по закону Ома

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U\sqrt{2}}{Z}, \text{ поэтому}$$

$$\frac{U\sqrt{2}}{Z} = \sqrt{\left(\frac{U\sqrt{2}}{R}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\pi\nu CU - \frac{U\sqrt{2}}{2\pi\nu L}\right)^2}. \qquad (7)$$

Вынесем из (7) $U\sqrt{2}$ и сократим:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(2\pi\nu C - \frac{1}{2\pi\nu L}\right)^2}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(2\pi\nu C - \frac{1}{2\pi\nu L}\right)^2}}}$$

Переведем все единицы в СИ:
200 мкФ = $2 \cdot 10^{-4}$ Ф, 50 мГн = 0,05 Гн.
Произведем вычисления:

$$I_{mC} = 2\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 220 \text{ А} = 0{,}09 \text{ А},$$

$$I_{mR} \frac{220\sqrt{2}}{100} A = 3{,}1 \text{ А},$$

$$I_{mL} = \frac{220\sqrt{2}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}05} = 19{,}8 \text{ А},$$

$$I_m = \sqrt{3{,}11^2 + (0{,}09 - 19{,}82)^2} \text{ А} = 20 \text{ А},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{220^2} + \left(2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-4} - \frac{1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}05}\right)^2}} \text{ Ом} =$$
$= 0{,}03$ Ом.

Ответ: $I_{mC} = 0{,}09$ А, $I_{mR} = 3{,}1$ А, $I_{mL} = 19{,}8$ А, $I_m = 20$ А, $Z = 0{,}03$ Ом.

Задача 12

В цепь переменного тока стандартной частоты включены последовательно резистор сопротивлением $R = 500$ Ом и катушка индуктивности. При этом между колебаниями напряжения и силы тока наблюдался сдвиг по фазе $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$. Найти индуктивность катушки L. Какую емкость C надо включить в цепь последовательно, чтобы сдвиг по фазе φ_2 стал равен нулю?

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$R = 500$ Ом
$\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$
$\varphi_2 = 0$

L – ?
C – ?

Решение. Запишем формулу разности фаз для случая, когда в цепи нет конденсатора, т. е. $C_1 = 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi\nu L}{R}.$$

Отсюда $\boxed{L = \dfrac{R}{2\pi\nu}\operatorname{tg}\varphi_1}$

Если φ_2 равен нулю, то $\operatorname{tg}\varphi_2$ тоже равен нулю. В этом случае

$$0 = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} \quad \text{и} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C},$$

или $2\pi\nu L = \dfrac{1}{2\pi\nu C}$, откуда $\boxed{C = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2 L}}$

Произведем вычисления:

$$L = \frac{500}{2\cdot 3{,}14\cdot 50}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\ \text{Гн} = 1{,}6\ \text{Гн},$$

$$C = \frac{1}{(2\cdot 3{,}14\cdot 50)^2\cdot 1{,}6}\ \text{Ф} = 6{,}3\cdot 10^{-6}\ \text{Ф}.$$

Ответ: $L = 1{,}6$ Гн, $C = 6{,}3\cdot 10^{-6}$ Ф.

Задача 13

Заряженный конденсатор емкостью C подключен к двум параллельным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2. После замыкания ключа К (рис. 14-8) максимальный ток в катушке L_1 стал равен I_{m1}. Найти максимальный заряд q_m на обкладках конденсатора в момент замыкания. Активным сопротивлением пренебречь.

Дано:
C
L_1
L_2
I_{m1}
q_{m1} – ?

Решение. По закону сохранения энергии полная энергия W_C электрического поля конденсатора равна сумме максимальных энергий на катушках W_{L1} и W_{L2}:

$$W_C = W_{L1} + W_{L2},$$

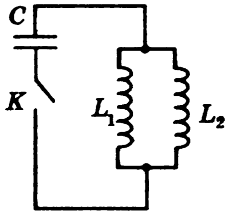


Рис. 14-8

где $W_C = \dfrac{q_m^2}{2C}$, $W_{L1} = \dfrac{L_1 I_{m1}^2}{2}$ и $W_{L2} = \dfrac{L_2 I_{m2}^2}{2}$,

поэтому $\dfrac{q_m^2}{2C} = \dfrac{L_1 I_{m1}^2}{2} + \dfrac{L_2 I_{m2}^2}{2}$, откуда

$$q_m = \sqrt{C(L_1 I_{m1}^2 + L_2 I_{m2}^2)}. \quad (1)$$

Поскольку катушки расположены параллельно, их пересекает один и тот же магнитный поток Ф, поэтому Ф $= L_1 I_{m1}$ и Ф $= L_2 I_{m2}$, значит, $L_1 I_{m1} = L_2 I_{m2}$, откуда

$$I_{m2} = I_{m1} \frac{L_1}{L_2}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и выполним упрощения:

$$q_m = \sqrt{C\left(L_1 I_{m1}^2 + L_2 I_{m1}^2 \frac{L_1^2}{L_2^2}\right)} \text{ или } \boxed{q_m = I_{m1}\sqrt{CL_1\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right)}}$$

Задача решена.

Ответ: $q_m = I_{m1}\sqrt{CL_1\left(1 + \dfrac{L_1}{L_2}\right)}$.

Задача 14

В цепь переменного тока с напряжением $U = 220$ В стандартной частоты включены последовательно конденсатор, резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и катушка с индуктивностью $L = 1$ Гн. При какой емкости конденсатора C в этой цепи наступит резонанс напряжений? Какова максимальная сила тока I_m при резонансе? Чему равны добротность цепи Q и ее волновое сопротивление ρ?

Дано:
$U = 220$ В
$R = 100$ Ом
$L = 1$ Гн
$\nu = 50$ Гц

C – ?
I_m – ?
Q – ?
ρ – ?

Решение. При резонансе напряжений индуктивное сопротивление X_L равно емкостному X_C: $X_L = X_C$, где $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ и

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}, \text{ поэтому } 2\pi\nu L = \frac{1}{2\pi\nu C},$$

откуда $\boxed{C = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2 L}}$

Амплитуда силы тока I_m при резонансе напряжений, когда реактивное сопротивление $X_L - X_C = 0$, определяется по закону Ома равенством

$$I_m = \frac{U_m}{R}, \text{ где } U_m = U\sqrt{2}, \text{ поэтому } \boxed{I_m = \frac{U\sqrt{2}}{R}}$$

Добротность цепи определяет формула $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$, а

волновое сопротивление $\boxed{\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

Произведем вычисления: $C = \dfrac{1}{(2 \cdot 3{,}14 \cdot 50)^2 \cdot 1}$ Ф $=$

$= 1 \cdot 10^{-5}$ Ф,

$$I_m = \frac{220\sqrt{2}}{100} \text{ А} = 3{,}1 \text{ А}, \quad Q = \frac{1}{100}\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-5}}} = 3{,}2,$$

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot 10^{-5}}} \text{ Ом} = 320 \text{ Ом}.$$

Ответ: $C = 1 \cdot 10^{-5}$ Ф, $I_m = 3{,}1$ А, $Q = 3{,}2$, $\rho = 320$ Ом.

Задача 15

Изобразите механические системы пружинных маятников, аналогичные электрическим цепям, изображенным на рис. 14-9 *а*, *б*, *в* и *г*.

Решение. 1) Обратимся к рис. 4-9, *а*. Здесь к двум параллельным конденсаторам подключена катушка ин-

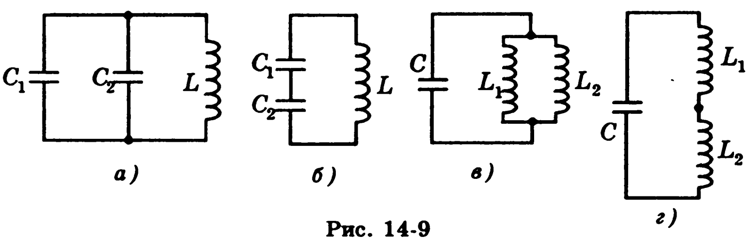


Рис. 14-9

дуктивности. Аналогом емкостям C_1 и C_2 служат величины, обратные жесткостям двух пружин $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$, а аналогом индуктивности L является масса m. Таким образом, двум параллельным конденсаторам соответствуют две последовательно соединенные пружины с жесткостями k_1 и k_2 и одна гирька массой m (рис. 14-10, *а*).

2) Теперь обратимся к рис. 14-9, б. Здесь два конденсатора соединены последовательно и имеется одна катушка. Такая схема аналогична двум пружинкам, соединенным параллельно и присоединенным к одной гирьке, масса которой является аналогом индуктивности катушки, т. е. мерой ее инертности (рис. 4-10, б).

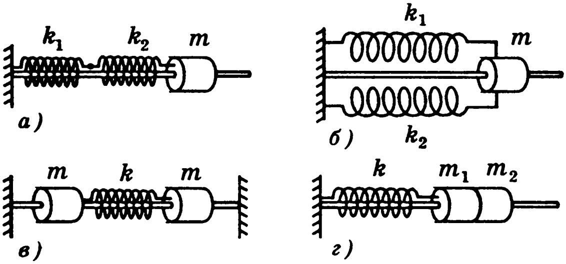


Рис. 14-10

3) На рис. 14-9, *в* изображена цепь с одним конденсатором и двумя параллельными катушками. Здесь в аналогичной механической системе должна иметься одна пружинка, к которой присоединены две гирьки, соединенные так, как показано на рис. 14-10, *в*.

4) В схеме на рис. 14-9, *г* имеется тоже один конденсатор, соединенный с двумя последовательными катушками. Аналогом такой цепи является механическая система с одной пружинкой, к которой присоединены две гирьки (ведь аналогом массы m является индуктивность L, а не величина, обратная ей, как у жесткости). Эта система изображена на рис. 14-10, *г*.

Задача решена.

Задача 16

Чему равна частота ν собственных колебаний в электрической цепи, изображенной на рис. 14-9, *в*. Используйте при решении задачи – механическую аналогию. Емкость конденсатора C и индуктивности катушек L_1 и L_2 известны.

Дано:	
C	
L_1	
L_2	
ν – ?	

Решение. Механическая система, аналогичная схеме на рис. 14-9, *в*, изображена на рис. 14-10, *в*. Аналогом индуктивности L_1 и L_2 являются массы гирек m_1 и m_2, а аналогом емкости C служит величина, обратная жесткости $\frac{1}{k}$. Найдя частоту колебаний гирек, а затем заменив механические величины аналогичными им электрическими, мы найдем и собственную частоту ν колебаний в электрической цепи.

Подобную задачу под номером 14 мы решили в теме «Механические колебания». Там мы нашли период колебаний T в такой же механической системе. Он оказался равным
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$

Следовательно, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$.

Теперь, используя аналогию $k \sim \frac{1}{C}$, $m_1 \sim L_1$ и $m_2 \sim L_2$, ответим на вопрос задачи: $\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}}$

Задача решена.

Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1L_2}}$.

Задача 17

Рассчитайте максимальную силу тока I_m в схеме на рис. 14-9, *а*. Максимальные заряды на обкладках конденсаторов q_{m1} и q_{m2}, емкости конденсаторов C_1 и C_2, индуктивность катушки L. При решении используйте аналогичную механическую систему (рис. 14-10, *а*).

Дано:	
q_{m1}	
q_{m2}	
C_1	
C_2	
L	
I_m – ?	

Решение. Аналогом зарядов q_{m1} и q_{m2} являются амплитуды колебаний пружин A_1 и A_2, аналогами емкостей C_1 и C_2 – величины $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$, обратные жесткостям пружин, аналогом индуктивности L – масса гирьки m и аналогом максимальной силы тока I_m – максимальная скорость гирьки v_m.

При решении задачи на механическую систему пружин и гирьки воспользуемся законом сохранения механической энергии, согласно которому сумма потенциальных энергий пружин $W_{п1} = \frac{k_1 A_1^2}{2}$ и $W_{п2} = \frac{k_2 A_2^2}{2}$ равна максимальной кинетической энергии гирьки $W_к = \frac{mv_m^2}{2}$:

$$W_{п1} + W_{п2} = W_К \text{ или } \frac{k_1 A_1^2}{2} + \frac{k_2 A_2^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2},$$

$$k_1 A_1^2 + k_2 A_2^2 = mv_m^2, \text{ откуда } v_m = \sqrt{\frac{k_1 A_1^2 + k_2 A_2^2}{m}}.$$

Теперь заменим механические величины аналогичными им электрическими, и задача будет решена:

$$I_m = \sqrt{\frac{\frac{q_{m1}^2}{C_1} + \frac{qm_{m2}^2}{C_2}}{L}} \quad \text{или} \quad \boxed{I_m = \sqrt{\frac{q_{m1}^2 C_2 + q_{m2}^2 C_1}{LC_1 C_2}}}$$

Задача решена.

Ответ: $I_m = \sqrt{\frac{q_{m1}^2 C_2 + q_{m2}^2 C_1}{LC_1 C_2}}$.

Задача 18

Ротор генератора имеет $N = 50$ пар полюсов и вращается с частотой $\nu_1 = 2400$ об/мин. Найти частоту ЭДС ν_2.

Дано:
$N = 50$
$\nu_1 = 2400 \ \frac{об}{мин}$

ν_2 – ?

Решение. Количество полюсов у ротора генератора увеличивают для того, чтобы уменьшить частоту его вращения, не изменяя при этом частоту переменного тока. При этом период ЭДС переменного тока, вырабатываемого генератором, будет во столько раз меньше периода ротора, т. е. времени его полного оборота, во сколько раз число пар полюсов ротора больше, чем у ротора с двумя полюсами. Если ротор содержит N пар полюсов, а его период T_1, то период ЭДС T_2 в N раз меньше периода ротора T_1: $T_2 = \frac{T_1}{N}$.

Поскольку $T_2 = \frac{1}{\nu_2}$ и $T_1 = \frac{1}{\nu_1}$, то $\frac{1}{\nu_2} = \frac{1}{N\nu_1}$.

Следовательно, $\boxed{\nu_2 = N\nu_1}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: $2400\ \dfrac{\text{об}}{\text{мин}} = \dfrac{2400}{60}\ \text{с}^{-1} = 40\ \text{с}^{-1}$.

Подставим числа и произведем вычисления:
$\nu_2 = 50 \cdot 40$ Гц $= 2 \cdot 10^3$ Гц.
Ответ: $\nu_2 = 2 \cdot 10^3$ Гц.

Задача 19

В трехфазную сеть с линейным напряжением $U_л = 220$ В включены звездой три активные нагрузки сопротивлением по $R = 200$ Ом каждая.

Чему равны фазная $I_ф$ и линейная $I_л$ силы токов?

Дано:
$U_л = 220$ В
$R = 200$ Ом

$I_ф$ – ?
$I_л$ – ?

Решение. Обратимся к рис. 14-11.

При симметричном сопротивлении нагрузки фазный ток равен линейному, а фазное напряжение в $\sqrt{3}$ раз меньше линейного. По закону Ома

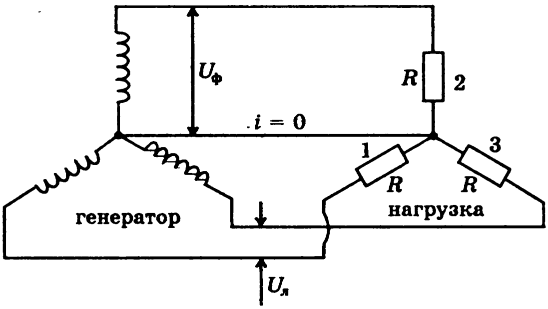


Рис. 14-11

$$I_ф = I_л = \frac{U_ф}{R}, \text{ где } U_ф = \frac{U_л}{\sqrt{3}}, \text{ поэтому } \boxed{I_ф = I_л = \frac{U_л}{R\sqrt{3}}}$$

Произведем вычисления:

$$I_ф = I_л = \frac{220}{200\sqrt{3}}\ \text{А} = 0{,}6\ \text{А}.$$

Ответ: $I_ф = I_л = 0{,}6$ А.

Задача 20

В трехфазную сеть с линейным напряжением $U_л = 220$ В включены треугольником три резистора с сопротивлениями $R_1 = 80$ Ом, $R_2 = 40$ Ом и $R_3 = 20$ Ом. Найти силы токов $I_{ф1}$, $I_{ф2}$ и $I_{ф3}$ в фазах нагрузки. Чему будут равны силы токов I_2 и I_3 при обрыве линейного провода ab (рис. 14-12)?

Дано:
$U_л = 220$ В
$R_1 = 80$ Ом
$R_2 = 40$ Ом
$R_3 = 20$ Ом

$I_{ф1}$ – ?
$I_{ф2}$ – ?
$I_{ф3}$ – ?
I_2 – ?
I_3 – ?

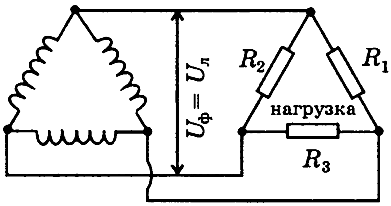


Рис. 14-12

Решение. При включении треугольником фазное напряжение $U_ф$ равно линейному $U_л$: $U_ф = U_л$.

При этом на каждую фазу нагрузки падает одинаковое напряжение, поэтому согласно закону Ома

$$\boxed{I_{ф1} = \frac{U_л}{R_1}},\quad \boxed{I_{ф2} = \frac{U_л}{R_2}},\quad \boxed{I_{ф3} = \frac{U_л}{R_3}}$$

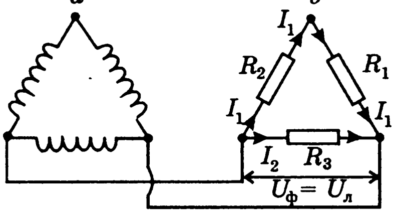


Рис. 14-13

При обрыве верхнего провода (рис. 14-13) мы получили нагрузку, состоящую из двух параллельных ветвей с сопротивлениями $R_1 + R_2$ и R_3, поэтому в таком случае

$$\boxed{I_1 = \frac{U_л}{R_1 + R_2}} \text{ и } \boxed{I_2 = \frac{U_л}{R_3}}$$

Произведем вычисления:

$$I_{ф1} = \frac{220}{80} \text{ А} = 2{,}75 \text{ А},\ I_{ф2} = \frac{220}{40} \text{ А} = 5{,}5 \text{ А},$$

$$I_{ф3} = I_2 = \frac{220}{20} \text{ А} = 11 \text{ А},\ I_1 = \frac{220}{80+40} \text{ А} = 1{,}83 \text{ А}.$$

Ответ: $I_{ф1} = 2{,}75$ А, $I_{ф2} = 5{,}5$ А, $I_{ф3} = I_2 = 11$ А, $I_1 = 1{,}83$ А.

Задача 21

Генератор тока, ротор которого вращается с частотой ν_1, вырабатывает ЭДС $\mathcal{E}_1$. Генератор преобразуют в электродвигатель, якорь которого вращается с частотой ν_2. На обмотку якоря подается напряжение U от источника постоянного тока, сопротивление цепи двигателя R. Магнитное поле постоянно. Найти мощность N, развиваемую электродвигателем.

Дано:
ν_1
$\mathcal{E}_1$
ν_2
U
R
N – ?

Решение. Генератор тока можно преобразовать в электродвигатель, если подать в обмотку ротора, который в электродвигателе постоянного тока называют якорем, ток силой I от постороннего источника. В этом случае работа тока А расходуется частично на полезную работу A_1 вращающегося якоря и частично на нагревание проводов цепи, т. е. на выделение на них некоторого количества теплоты Q: $A = A_1 + Q$, (1)

где $A = UIt$, $Q = I^2Rt$, $A = Nt$, и при этом согласно закону Ома для неоднородного участка цепи

$$U = IR + \mathcal{E}_2, \text{ откуда } I = \frac{U - \mathcal{E}_2}{R}.$$

Здесь $\mathcal{E}_2$ – ЭДС, действующая в цепи электродвигателя. Подставив эти выражения в (1), получим

$$U\frac{U-\mathcal{E}_2}{R}t = \left(\frac{U-\mathcal{E}_2}{R}\right)^2 Rt + Nt,$$

откуда $N = U\dfrac{U-\mathcal{E}_2}{R} - \dfrac{(U-\mathcal{E}_2)^2}{R} = \mathcal{E}_2\dfrac{U-\mathcal{E}_2}{R}$. (2)

ЭДС как генератора, так и электродвигателя пропорциональна частоте его вращения согласно формулам $\mathcal{E}_m = B\omega S = B \cdot 2\pi\nu S$ и $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$, поэтому $\mathcal{E} \sim \nu$, и, значит, мы можем записать применительно к одному и тому же механизму $\dfrac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, откуда $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\dfrac{\nu_2}{\nu_1}$. (3)

Подставив (3) в (2), мы решим задачу:

$$\boxed{N = \mathcal{E}_1\frac{\nu_2(U-\mathcal{E}_1)}{\nu_1 R}}$$

Задача решена.

Ответ: $N = \mathcal{E}_1\dfrac{\nu_2(U-\mathcal{E}_1)}{\nu_1 R}$.

Задача 22

В цепи переменного тока стандартной частоты сила тока изменяется со временем по закону $i = 2 \sin \omega t$.

Какое количество теплоты Q выделится в этой цепи за один период, если она изготовлена из медной проволоки длиной $l = 1$ м с площадью поперечного сечения $S = 1$ мм²? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано:
$\nu = 50$ Гц
$l = 1$ м
$S = 1$ мм²
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м

Q – ?

Решение. По закону Джоуля–Ленца

$$Q = I^2RT, \tag{1}$$

где I – действующая сила переменного тока:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Здесь I_m – амплитуда силы тока. Из уравнения колебаний тока, данного в условии задачи, следует, что $I_m = 2$ А.

Активное сопротивление цепи R найдем по формуле

$$R = \rho\frac{l}{S}. \tag{3}$$

Период T найдем, зная частоту ν: $T = \dfrac{1}{\nu}$. (4)

Подставив (2), (3) и (4) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\boxed{Q = \frac{\rho l I_m^2}{2S\nu}}$$

Переведем единицу S в СИ: 1 мм² $= 1 \cdot 10^{-6}$ м².
Произведем вычисления:

$$Q = \frac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 4}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot 50} \text{ Дж} = 6{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Ответ: $Q = 6{,}8 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Задача 23

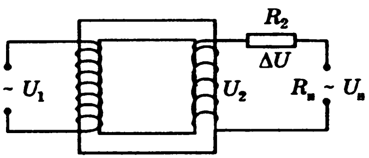


Рис. 14-14

Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$ включена в сеть переменного тока с напряжением $U_1 = 120$ В. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1{,}2$ Ом, ток в ней $I_2 = 5$ А. Найти напряжение на нагрузке трансформатора $U_н$ и сопротивление нагрузки $R_н$. Найти число витков во вторичной обмотке N_2, если первичная обмотка содержит $N_1 = 10\,000$ витков. Чему равен КПД η этого трансформатора?

Дано:	
$k = 10$	
$U_1 = 120$ В	
$R_2 = 1{,}2$ Ом	
$I_2 = 5$ А	
$N_1 = 10\,000$	
$U_н$ – ?	
N_2 – ?	
$R_н$ – ?	
η – ?	

Решение. Зная коэффициент трансформации трансформатора k, мы легко найдем число витков во вторичной обмотке N_2. Для этого учтем, что коэффициент трансформации трансформатора k показывает, во сколько раз наш понижающий трансформатор уменьшает напряжение, т. е. во сколько раз напряжение в первичной обмотке U_1 больше напряжения во вторичной U_2: $k = \dfrac{U_1}{U_2}$.

Но напряжения в обмотках прямо пропорциональны числу витков в них: $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{N_1}{N_2}$.

Поэтому $k = \dfrac{N_1}{N_2}$, откуда $\boxed{N_2 = \dfrac{N_1}{k}}$

Мы нашли одну искомую величину. Теперь отыщем напряжение на нагрузке $R_н$ (нагрузкой может служить какая-нибудь лампа радиоприемника или другое устройство, требующее пониженное напряжение). Для этого обратимся к рис. 14-14 и учтем следующее важное обстоятельство: такое напряжение $U_2 = \dfrac{U_1}{k}$ было бы на выходе трансформатора (т. е. на нагрузке $R_н$), если бы вторичная обмотка трансформатора не имела сопротивления R_2 (т. е. если бы оно было столь малым, что им можно было бы пренебречь). Но из-за наличия у вторичной обмотки сопротивления R_2 на нагрузку «пойдет» меньшее напряжение $U_н$, поскольку на сопротивлении R_2 будут иметь место потери напряжения ΔU из-за потерь энергии на джоулево тепло. Поэтому на нагрузке $R_н$ напряжение $U_н$ будет меньше напряжения U_2 на величину этих потерь ΔU:

$$U_н = U_2 - \Delta U. \tag{1}$$

Потерю напряжения ΔU на сопротивлении R_2 найдем, воспользовавшись законом Ома для участка цепи сопротивлением R_2, по которому течет ток I_2 (заметим, что такой же ток течет и в нагрузке $R_н$):

$$I_2 = \frac{\Delta U}{R_2}, \text{ откуда } \Delta U = I_2 R_2. \tag{2}$$

Подставив (2) в (1), мы найдем вторую искомую величину $U_н$: $U_н = U_2 - I_2R_2$, где $U_2 = \frac{U_1}{k}$, поэтому

$$\boxed{U_н = \frac{U_1}{k} - I_2R_2}$$

Сопротивление нагрузки $R_н$ определим, также воспользовавшись законом Ома, но уже применительно к нагрузке $I_2 = \frac{U_н}{R_н}$, откуда $\boxed{R_н = \frac{U_н}{I_2}}$

Мы отыскали еще одну искомую величину. Нам осталось найти КПД этого трансформатора η. Для его определения вспомним, что КПД η – это отношение полезной работы $A_п$ ко всей затраченной $A_з$. В нашем случае полезной работой будет работа тока в нагрузке, а затраченной – работа тока в первичной обмотке:

$$\eta = \frac{A_п}{A_з} 100\%. \qquad (3)$$

Работу тока $A_п$ на зажимах вторичной обмотки определим по известной формуле работы тока:

$$A_п = U_н I_2 t. \qquad (4)$$

Все величины в правой части равенства (4) нам известны, кроме времени прохождения тока t. Но оно такое же, как и время прохождения тока по первичной обмотке, поэтому будем надеяться, что оно сократится при подстановке значений $A_п$ и $A_з$ в формулу КПД (3). Теперь определим работу тока в первичной обмотке $A_з$. По аналогичной формуле $A_з = U_1 I_1 t$.

Здесь I_1 – сила тока в первичной обмотке. Она нам не известна, но мы знаем, что напряжения на обмотках обратно пропорциональны силам тока в них:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}, \text{ где } \frac{U_1}{U_2} = k, \text{ поэтому } k = \frac{I_2}{I_1}.$$

Отсюда $$I_1 = \frac{I_2}{k}.$$

Тогда $$A_з = U_1 \frac{I_2}{k} t. \qquad (5)$$

Подставив (4) и (5) в (3), мы найдем последнюю искомую величину – КПД этого трансформатора:

$$\eta = \frac{U_н I_2 t}{U_1 \frac{I_2}{k} t} 100\%, \qquad \boxed{\eta = \frac{U_н k}{U_1} 100\%}$$

Произведем вычисления:

$$N_2 = \frac{10\,000}{10} = 100, \quad U_н = \left(\frac{120}{10} - 5 \cdot 1{,}2\right) В = 6 \text{ В},$$

$$R_н = \frac{6}{5} \text{ Ом} = 1{,}2 \text{ Ом}, \quad \eta = \frac{6 \cdot 10}{120} \cdot 100\% = 50\%.$$

Ответ: $N_2 = 100$, $U_н = 6$ В, $R_н = 1{,}2$ Ом, $\eta = 50\%$.

Задача 24

Коэффициент трансформации повышающего трансформатора $k = 0{,}1$, активное сопротивление его первичной обмотки $R_1 = 10$ Ом, а ее индуктивное сопротивление $X_{L1} = 20$ Ом. От источника тока на первичную обмотку подано напряжение $U_1 = 20$ В. Найти напряжение на вторичной обмотке U_2 в режиме холостого хода.

Дано:
$k = 0{,}1$
$R_1 = 10$ Ом
$X_{L1} = 20$ Ом
$U_1 = 20$ В

U_2 – ?

Решение. Напряжение U_{L1} на первичной обмотке меньше подаваемого от источника тока напряжения U_1 на величину тепловых потерь напряжения из-за нагревания первичной обмотки. Оно определяется произведением силы тока в первичной обмотке I_1, на ее индуктивное сопротивление X_L:

$$U_{L1} = I_1 X_L. \tag{1}$$

Силу тока I_1 в первичной обмотке можно найти по закону Ома: $I_1 = \dfrac{U_1}{Z_1}$, где полное сопротивление первичной обмотки $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2}$.

С учетом этого $$I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2}}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1): $$U_{L1} = \frac{U_1 X_{L1}}{\sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2}}. \tag{3}$$

Искомое напряжение U_2 в режиме холостого хода трансформатора, т. е. в отсутствие нагрузки, найдем, зная коэффициент трансформации трансформатора k:

$k = \dfrac{U_{L1}}{U_2}$, откуда $U_2 = \dfrac{U_{L1}}{k}$ или с учетом (3)

$$\boxed{U_2 = \frac{U_1 X_{L1}}{k\sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2}}}$$

Произведем вычисления:

$$U_2 = \frac{20 \cdot 20}{0{,}1\sqrt{100+400}}\ \text{В} = 180\ \text{В}.$$

Ответ: $U_2 = 180$ *В.*

Задача 25

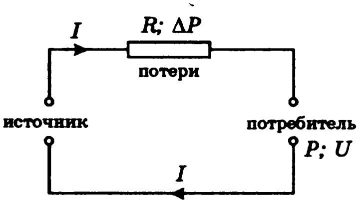


Рис. 14-16

Найти диаметр d медного провода для линии электропередачи длиной $l = 10$ км при напряжении $U = 220$ *В*, если потребителю нужно передать мощность $P = 0{,}1$ кВт (рис. 14-16). Потери мощности на нагревание проводов составляют 5% от передаваемой мощности P. Коэффициент мощности $\cos\varphi = 0{,}8$. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Дано:
$l = 10$ км
$U = 220$ *В*
$P = 0{,}1$ кВт
$\Delta P = 5\% P = 0{,}05P$
$\cos\varphi = 0{,}8$
$\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

d – ?

Решение. Диаметр провода d найдем из формулы

$$R = \rho\frac{2l}{S},$$

где R – активное сопротивление линии электропередачи, $2l$ – длина проводов, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ – площадь их поперечного сечения. С учетом этого

$$R = \rho\frac{8l}{\pi d^2}, \quad \text{откуда} \quad d = \sqrt{\frac{8\rho l}{\pi R}}. \qquad (1)$$

Теперь задача сводится к определению сопротивления линии R. По формуле мощности тока потери мощности на этом сопротивлении составят

$$\Delta P = I^2 R, \text{ откуда } R = \frac{\Delta P}{I^2} = \frac{0{,}05P}{I^2}.$$

Сила тока I во всей последовательной линии электропередачи (см. рис. 14-16) одинакова. Значит, ее можно найти, зная мощность тока и напряжение на потребителе, из формулы $P = UI\cos\varphi$, откуда $I = \dfrac{P}{U\cos\varphi}$.

С учетом этого $R = \dfrac{0{,}05P(U\cos\varphi)^2}{P^2} = 0{,}05\dfrac{(U\cos\varphi)^2}{P}$. (2)

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$d = \sqrt{\frac{8\rho l P}{\pi \cdot 0{,}05(U\cos\varphi)^2}}, \quad \boxed{d = \frac{12{,}6}{U\cos\varphi}\sqrt{\frac{\rho l P}{\pi}}}$$

Переведем все единицы в СИ: 10 км = $1 \cdot 10^4$ м, 0,1 кВт = $1 \cdot 10^2$ Вт.

Произведем вычисления:

$$d = \frac{12{,}6}{220 \cdot 0{,}8}\sqrt{\frac{1{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-4} \cdot 10^2}{3{,}14}} \text{ м} = 5{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Ответ: $d = 5{,}3 \cdot 10^{-3}$ м.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. ЭДС индукции, возникающая в рамке, вращающейся в однородном магнитном поле, изменяется по закону $e = 340 \sin \pi t$. Определить действующую ЭДС $\mathcal{E}$ в рамке и мгновенную ЭДС e_1 в момент времени $t = 0{,}25$ с. Все величины даны в единицах СИ.

Ответ: $\mathcal{E} = 243$ В, $e_1 = 238$ В.

Задача 2. В магнитном поле индукцией $B = 0{,}2$ Тл вращается с частотой $\nu = 4$ с$^{-1}$ квадратная рамка со стороной $a = 2$ см. Найти действующую ЭДС $\mathcal{E}$, возникающую в ней.

Ответ: $\mathcal{E} = 1{,}4\pi\nu B a^2 = 1{,}4$ мВ.

Задача 3. Круглый виток диаметром $D = 4$ см равномерно вращается с частотой $\nu = 10$ с$^{-1}$ в однородном магнитном поле индукцией В = 1 Тл. Написать уравнения колебаний магнитного потока $\Phi = \Phi(t)$ и ЭДС $e = e(t)$, найти действующую ЭДС $\mathcal{E}$ и амплитуду магнитного потока Φ_m. В момент времени $t = 0$ нормаль к плоскости контура сонаправлена с вектором магнитной индукции.

Ответ: $\Phi = 1{,}26 \cdot 10^{-3} \cos 20\pi t$, $e = -0{,}08 \sin 20\pi t$, $\mathcal{E} = 0{,}06$ В, $\Phi_m = 1{,}26 \cdot 10^{-3}$ Вб.

Задача 4. Рамка из $N = 10$ витков в форме круга вращается с периодом Т = 0,04 с в однородном магнитном поле индукцией $B = 20$ Тл. В момент времени $t = 0{,}01$ с, считая от начала вращения, когда ее плоскость была перпендикулярна магнитным линиям, мгновенная ЭДС в рамке $e = 2$ *В*. Найти радиус R одного витка.

Ответ: $R = \sqrt{\dfrac{e}{\pi B N \sin \dfrac{2\pi}{T} t}} = 5{,}6$ см.

Задача 5. Изменение силы тока в зависимости от времени задано уравнением $i = 5 \sin 200\pi t$. Найти частоту ν и период Т колебаний, амплитуду силы тока I_m, а также мгновенную силу тока i при фазе $\alpha = \pi/6$ рад. Все величины выражены в единицах СИ.

Ответ: $I_m = 5$ *А*, $\nu = 100$ Гц, $T = 0{,}01$ *с*, $i_1 = 2{,}5$ *А*.

Задача 6. Амперметр, включенный в цепь переменного тока, показывает $I = 10$ А. Найти мгновенную силу тока i через 1/12 долю периода от начала колебания.

Ответ: $i = I\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = 7$ А.

Задача 7. При каких фазах в пределах периода мгновенное напряжение переменного тока u равно по модулю $U_m/\sqrt{2}$?

Ответ: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.

Задача 8. Неоновая лампа загорается, когда напряжение на ней достигает действующего напряжения в цепи переменного синусоидального тока. Сколько раз в течение периода загорится лампа, если напряжение гашения равно напряжению зажигания?

Ответ: $N = 4$.

Задача 9. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока стандартной частоты с действующим напряжением $U = 71$ *В*. Определить время Δt между вспышками лампы, продолжительностью горения t_0, и число вспышек n в единицу времени. Напряжение зажигания лампы $U_з = 86{,}7$ В и равно напряжению гашения.

Ответ: $\Delta t = 3{,}3$ мс, $t_0 = 6{,}6$ мс, $n = 100$ с$^{-1}$.

Задача 10. Катушка индуктивностью $L = 6$ мГн с активным сопротивлением $R = 8$ Ом подключена к источнику переменного тока с циклической частотой $\omega = 10^3$ рад/с. Найти сдвиг фаз φ между колебаниями тока и напряжения.

Ответ: $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) = 37°$.

Задача 11. Конденсатор включен в цепь переменного тока стандартной частоты. Вольтметр, подключенный к этой цепи, показывает напряжение $U = 220$ В, а амперметр, включенный в нее, показывает силу тока $I = 2{,}5$ А. Какова емкость C конденсатора?

Ответ: $C = \dfrac{I}{2\pi\nu U} = 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ Ф.

Задача 12. В цепь переменного тока стандартной частоты с напряжением $U = 220$ В последовательно включены активное сопротивление $R = 150$ Ом и конденсатор емкостью $C = 16$ мкФ. Найти максимальное значение силы тока I_m в этой цепи.

Ответ: $I_m = \dfrac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(2\pi\nu C)^2}}} = 12{,}5$ А.

Задача 13. Катушка с ничтожно малым активным сопротивлением включена в цепь переменного тока стандартной частоты. При напряжении $U = 120$ В сила тока в этой цепи $I = 2{,}5$ А. Найти индуктивность катушки L.

Ответ: $L = \dfrac{U}{2\pi\nu I} = 0{,}15$ Гн.

Задача 14. Написать уравнения, выражающие зависимость напряжения $u = u(t)$ и силы тока $i = i(t)$ от времени t в резисторе сопротивлением $R = 100$ Ом, включенном в сеть переменного тока с напряжением $U = 220$ *В* стандартной частоты.

Ответ: $u = 311 \cos 100\pi t$, $i = 3{,}11 \cos 100\pi t$.

Задача 15. В цепь переменного тока с частотой $\nu = 100$ Гц включена катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн. Конденсатор какой емкости C надо включить в эту цепь, чтобы наступил резонанс напряжений?

Ответ: $C = \dfrac{1}{(2\pi\nu)^2 L} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ Ф.

Задача 16. В сеть переменного тока стандартной частоты включены последовательно резистор, катушка с индуктивностью L и воздушный конденсатор в виде двух круглых пластин диаметром D с расстоянием между обкладками d. Амперметр, включенный в эту сеть, показал ток силой I, амплитуда напряжения в сети U_m. Найти сопротивление резистора R.

Ответ: $R = \sqrt{\left(\dfrac{U_m}{4I}\right)^2 - 4\left(\pi\nu L - \dfrac{d}{(\pi D)^2 \varepsilon_0 \varepsilon \nu}\right)^2}$.

Задача 17. Участок цепи переменного тока состоит из резистора сопротивлением 10 Ом и катушки индуктивности. Вольтметр, подключенный параллельно к катушке, показал напряжение $U_L =$ $= 4$ В, а амперметр, включенный в цепь последовательно, показал силу тока $I = 2$ A. Найти максимальное напряжение U_m на концах этого участка.

Ответ: $U_m = \sqrt{2((IR)^2 + U_L^2)} = 29$ В.

Задача 18. Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ, катушка индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и резистор включены последовательно в цепь переменного тока стандартной частоты. Найти амплитуду напряжения на резисторе U_{mR}, если амплитуда силы тока в цепи $I_m = 3$ А, а вольтметр, подключенный к концам цепи, показал напряжение $U =$ $= 300$ В.

Ответ: $U_{mR} = \sqrt{2U^2 - I_m^2\left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = 385$ В.

Задача 19. Резистор сопротивлением $R = 5$ Ом, катушка с индуктивностью $L = 0{,}05$ Гн и конденсатор емкостью $C = 0{,}2$ мФ соединены параллельно и подключены к источнику переменного тока стандартной частоты с действующим напряжением $U = 220$ В. Найти максимальную силу тока I_m в неразветвленном участке этой цепи.

Ответ: $I_m = U\sqrt{2\left(\dfrac{1}{R^2} + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2\right)} = 73$ А.

Задача 20. К катушке индуктивности подведено напряжение, изменяющееся по закону $u = 100 \cos 100\pi t$ B. Амплитуда силы тока в катушке $I_m = 8$ A, ее активное сопротивление $R = 2$ Ом. Определить индуктивность катушки L, активную мощность тока в ней P и коэффициент мощности $\cos\varphi$.

Ответ: $L = \dfrac{1}{100\pi}\sqrt{\left(\dfrac{U_m}{I_m}\right)^2 - R^2} = 9{,}3$ мГн,

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = 0{,}565, \quad P = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = 226 \text{ Вт}.$$

Задача 21. Конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ и катушка индуктивностью $L = 3$ Гн соединены параллельно и подключены к источнику переменного напряжения с частотой $\nu = 20$ Гц. Найти мгновенную силу тока i_L в катушке при резонансе токов, если мгновенная сила тока на участке с конденсатором $i_C = 0{,}2$ А.

Ответ: $i_L = \dfrac{i_C}{(2\pi\nu)^2 LC} = 2{,}1$ А.

Задача 22. Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно и подключены к конденсатору емкостью C. Найти силы токов I_1 и I_2 в каждой катушке. Амплитуда напряжений на конденсаторе U_m.

Ответ: $I_1 = U_m\sqrt{\dfrac{CL_2}{2L_1(L_1 + L_2)}}$, $I_2 = I_1\dfrac{L_1}{L_2}$.

Задача 23. В цепь с добротностью $Q = 40$ включен источник переменного тока с амплитудой напряжения на выходе $U_m = 10$ В. Найти амплитуды напряжений на конденсаторе U_{mC} и на катушке U_{mL}, включенных в эту цепь последовательно, если в ней наблюдается резонанс напряжений. Период колебаний напряжения на выходе $T = 0{,}02$ с, активное сопротивление цепи $R = 5$ Ом. Чему равны амплитуда силы тока I_m, волновое сопротивление цепи ρ, индуктивность катушки L и емкость конденсатора C?

Ответ: $L = \dfrac{QRT}{2\pi} = 0{,}6$ Гн, $C = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 = 1{,}7\cdot10^{-5}$ Ф,

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = 188 \text{ Ом}, \quad I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{2\pi}{T}L - \dfrac{T}{2\pi C}\right)^2}} = 2 \text{ А},$$

$$U_{mC} = \frac{I_m T}{2\pi C} = 374 \text{ В}, \quad U_L = \frac{2\pi}{T}L = 188 \text{ В}.$$

Задача 24. Какое количество теплоты Q выделяется в процессе разрядки конденсатора электроемкостью $C = 2$ мкФ при уменьшении заряда на нем от $q_1 = 8$ мкКл до $q_2 = 2$ мкКл? При решении использовать механическую аналогию.

Ответ: $Q = \dfrac{1}{2C}\left(q_1^2 - q_2^2\right)$.

Задача 25. Рассчитайте массу m груза на двух последовательно соединенных пружинах жесткостью k каждая, если одна из них сжата на величину x_m, а максимальная скорость колебаний груза v_m. При решении используйте электрическую аналогию.

Ответ: $m = \dfrac{k}{2}\left(\dfrac{x_m}{v_m}\right)^2$.

Задача 26. Найдите период T колебаний, возникающих в цепи, изображенной на рис. 14-10, *в*. При решении используйте механическую аналогию.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_1L_2C}{L_1 + L_2}}$.

Задача 27. Сколько оборотов N_2 за t_2 = 10 мин должен сделать ротор генератора, чтобы дать ЭДС $\mathcal{E}_2$ = 120 *В*, если при частоте вращения ν_1 = 900 об/мин он дает ЭДС $\mathcal{E}_1$ = 100 *В*?

Ответ: $N_2 = \nu_1 t_2 \dfrac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = 1 \cdot 10^4$.

Задача 28. Обмотка якоря генератора была изменена так, что вместо N_1 = 900 витков в пазы уложено N_2 = 600 витков, а частота вращения ротора осталась прежней. Насколько изменилась ЭДС, даваемая генератором, если до этого она была $\mathcal{E}_1$ = 120 В?

Ответ: $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \dfrac{N_1 - N_2}{N_1} = 40$ В.

Задача 29. В настоящее время часто используют трехфазный ток с напряжением 380/220 В. Насколько линейное напряжение больше фазного?

Ответ: ΔU = 160 *В*.

Задача 30. В трехфазную сеть включены треугольником три активные нагрузки $R_1 = 2\ R_2$ и $R_2 = 1{,}5\ R_3$. Сила фазного тока в нагрузке R_1 $I_{ф1}$ = 2 А. Найти силы фазных токов $I_{ф2}$ и $I_{ф3}$ во второй и третьей фазах нагрузки.

Ответ: $I_{ф2}$ = 4 А, $I_{ф3}$ = 6 А.

Задача 31. В трехфазную сеть с линейным напряжением $U_л$ = 380 В включены звездой три активные нагрузки сопротивлением по R = 150 Ом каждая. Насколько фазные напряжения меньше линейного? Найдите силу линейного $I_л$ и фазного $I_ф$ токов.

Ответ: ΔU = 157 В, $I_л = I_ф$ = 1,5 А.

Задача 32. Генератор переменного тока вырабатывает ЭДС $\mathcal{E}_1$. Его преобразуют в электродвигатель, на обмотку которого подают напряжение U от источника постоянного тока. Сопротивление цепи электродвигателя R, развиваемая им мощность N. Найти отношение частоты вращения ротора генератора ν_1 к частоте вращения якоря электродвигателя ν_2.

Ответ: $\dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{\mathcal{E}_1(U - \mathcal{E}_1)}{NR}$.

Задача 33. Первичная обмотка трансформатора для питания радиоприемника имеет N_1 = 12 000 витков и включена в сеть переменного тока с напряжением U_1 = 120 *В*. Какое число витков N_2 должна иметь вторичная обмотка, если ее сопротивление R_2 = 0,5 Ом? Напряжение на нагрузке $U_н$ = 3,5 В, сила тока во вторичной обмотке I_2 = 1 *А*.

Ответ: $N_2 = N_1 \dfrac{U_н + I_2R_2}{U_1} = 400$.

Задача 34. Первичная обмотка трансформатора имеет N_1 = 2,4 · 10³ витков. Сколько витков N_2 должна иметь вторичная обмотка, чтобы при напряжении на нагрузке $U_н$ = 11 В передавать во внешнюю цепь мощность $P = 22$ Вт? Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0{,}2$ Ом. Напряжение в сети $U_1 = 380$ В.

$$Ответ: N_2 = N_1 \frac{U_н + \frac{P}{U_н} R_2}{U_1} = 72.$$

Задача 35. Трансформатор повышает напряжение с $U_1 = 100\ В$ до $U_2 = 5{,}6$ к$В$. На одну из обмоток надели виток провода, концы которого подсоединили к вольтметру. При этом вольтметр показал напряжение $U = 0{,}4\ В$. Сколько витков N_1 и N_2 имеют обмотки трансформатора?

Указание: напряжение U, показанное вольтметром, равно напряжению на одном витке, которое у обеих обмоток одинаково.

$$Ответ: N_1 = \frac{U_1}{U} = 250,\ N_2 = \frac{U_2}{U} = 1{,}4 \cdot 10^4.$$

Задача 36. Понижающий трансформатор с коэффициентом трансформации $k = 5$ включен в сеть с напряжением $U_1 = 220\ В$. Определить КПД трансформатора η, если потерь энергии в первичной обмотке не происходит, а напряжение на выходе вторичной обмотки $U_н = 42$ В.

$$Ответ: \eta = k \frac{U_н}{U_1} 100\% = 95\%.$$

Задача 37. На какую силу тока I_1 должен быть рассчитан провод первичной обмотки трансформатора, если при напряжении в первичной обмотке $U_1 = 220$ В сила тока во вторичной обмотке $I_2 = 2$ А? Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 10$ Ом, напряжение на нагрузке $U_н = 40$ В.

$$Ответ: I_1 = \frac{I_2(U_н + I_2 R)}{U_1} = 0{,}54\ А.$$

15. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Электромагнитные волны – это процесс распространения в пространстве переменных электрических и магнитных полей. Согласно гипотезе Максвелла переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве переменное электрическое поле, которое в свою очередь порождает переменное магнитное поле и т. д., в результате чего от источника волн в пространстве распространяется электромагнитная волна.

Источником электромагнитных волн являются ускоренно движущиеся электрические заряды. Макроисточником электромагнитных волн служит открытый колебательный контур. Простейшим излучателем электромагнитных волн является вибратор Герца – прямой проводящий стержень. Длина волны λ, излучаемая таким стержнем, равна его удвоенной длине l: $\lambda = 2\,l$.

В вакууме (воздухе) электромагнитные волны распространяются со скоростью $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а в прозрачной среде с показателем преломления n их скорость v в n раз меньше, чем в вакууме:

$$v = \frac{c}{n}, \text{ где } n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Здесь ε – диэлектрическая проницаемость среды. Длина электромагнитной волны в вакууме (воздухе) определяется формулами

$\lambda = cT$ и $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость электромагнитной волны в вакууме.

Плотностью энергии электромагнитной волны $w_{\text{эл-м}}$ называется отношение ее энергии W к объему пространства, в котором волна распространяется:

$$w_{\text{эл-м}} = \frac{W}{V}.$$

Объемная плотность энергии электромагнитной волны $w_{\text{эл-м}}$ равна удвоенной плотности энергии электрического поля $w_{\text{эл}}$ (или магнитного):

$$w_{\text{эл-м}} = 2\,w_{\text{эл}}, \text{ где } w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E_m^2}{2}, \text{ поэтому } w_{\text{эл-м}} = \varepsilon_0 \varepsilon\, E_m^2.$$

Здесь $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, ε – диэлектрическая проницаемость среды (ε вакуума = 1), E_m – амплитуда напряженности электрического поля.

Интенсивность или плотность потока электромагнитной волны I связана с объемной плотностью ее энергии $w_{\text{эл-м}}$ и скоростью с формулой $I = w_{\text{эл-м}}\, c$.

Напряженность E электрического поля в электромагнитной волне на расстоянии r от источника – заряда q, движущегося с ускорением a, определяется выражением

$E = \dfrac{qa}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$, т. е. обратно пропорциональна расстоянию r:

$$E \sim \frac{1}{r}.$$

Если в условии задачи речь идет о распространении радиоволн, то время прохождения радиоволной расстояния S от радиолокатора до цели равно половине общего времени $t_{общ}$ (туда и обратно):

$$t = \frac{t_{общ}}{2} \quad \text{и} \quad S = ct \quad \text{или} \quad S = 0{,}5ct_{общ}.$$

После того как волна, отразившись от цели, возвратится обратно к радиолокатору, излучается новый импульс. Время между двумя последовательными импульсами равно времени $t_{общ}$, за которое волна проходит расстояние до цели и обратно. Время между двумя последовательными импульсами t_0 можно найти, разделив время t, за которое было излучено $N_{имп}$ импульсов, на это количество импульсов $t_0 = \dfrac{t}{N_{имп}}$ или $t_0 = \dfrac{1}{\dfrac{N_{имп}}{t}}$.

Здесь $\dfrac{N_{имп}}{t} = \nu_{имп}$ – частота излучения импульсов, т. е. число импульсов, излученных в единицу времени. Следовательно,

$$t_0 = \frac{1}{\nu_{имп}}.$$

Число колебаний $N_{кол}$ векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в одном излученном импульсе можно определить, разделив длительность импульса τ на период колебаний $T_{кол}$ векторов $\vec{E}$ или $\vec{B}$ в волне

$$N_{кол} = \frac{\tau}{T_{кол}}.$$

При настройке радиоприемника на некоторую радиостанцию (а одновременно в мире излучают радиоволны множество радиопередатчиков), мы вращаем ручку конденсатора приемного контура нашего радиоприемника, изменяя емкость этого конденсатора и соответственно собственную частоту нашего приемника. Если собственная частота нашего радиоприемника станет равна частоте радиопередающей станции, наступит электрический резонанс, и громкость звука радиопередачи, которую ведет «пойманная» нами радиостанция, будет максимальной.

Решение отдельных задач

Задача 1

Сила тока в открытом колебательном контуре изменяется по закону $i = 0{,}2 \cos 5 \cdot 10^5 \pi t$. Найти длину излучаемой электромагнитной волны λ в воздухе. Все величины измерены в единицах СИ.

Дано:
$i = 0{,}2\cos 5 \cdot 10^5 \pi t$
$c = 3 \cdot 10^8$ м/с

$\lambda - ?$

Решение. Длина электромагнитной волны в воздухе определяется формулой

$$\lambda = cT,$$

где T – период колебаний вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ (или вектора магнитной индукции $\vec{B}$). Период T определим, зная циклическую частоту колебаний ω, которая согласно данному нам в условии задачи уравнению равна:

$$\omega = 5 \cdot 10^5 \pi \ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Поскольку $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, то $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, поэтому $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{\omega} c}$

Произведем вычисления:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14} 3 \cdot 10^8 \text{ м} = 1200 \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 1200$ м.

Задача 2

Найти число колебаний N, происходящих в электромагнитной волне с длиной волны $\lambda_1 = 400$ м, за время, равное периоду звуковых колебаний с частотой $\nu_2 = 1$ кГц. Скорость электромагнитной волны в воздухе $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, скорость звука $v = 340$ м/с.

Дано:
$\lambda = 400$ м
$\nu_2 = 1$ кГц
$v = 340 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
$c = 3 \cdot 10^8 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

$N - ?$

Решение. Число колебаний N, происходящих в электромагнитной волне за время, равное периоду колебаний T_2 в звуковой волне, мы найдем, разделив этот период T_2 на время одного колебания в электромагнитной волне, т. е. на период T_1:

$$N = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

Период колебаний в звуковой волне T_2 есть величина, обратная частоте ν_2:

$$T_2 = \frac{1}{\nu_2}. \qquad (2)$$

Период колебаний в электромагнитной волне T_1 найдем, разделив ее длину волны λ_1 на скорость волны c:

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{c}. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{N = \frac{c}{\lambda_1 \nu_2}}$$

Переведем в СИ единицу частоты: 1 кГц = $1 \cdot 10^3$ Гц.

Произведем вычисления:

$$N = \frac{3 \cdot 10^8}{400 \cdot 10^3} = 750.$$

Ответ: $N = 750$.

Задача 3

На расстоянии $r_1 = 300$ м от Останкинской башни плотность потока электромагнитного излучения (интенсивность) максимальна: $I_1 = 40$ мВт/м^2. Найти плотность потока излучения I_2 на расстоянии уверенного приема $r_2 = 120$ км.

Дано:
$r_1 = 300$ м
$I_1 = 40\ \frac{\text{мВт}}{\text{м}^2}$
$r_2 = 120$ км

I_2 – ?

Решение. На расстоянии r_1 от излучающей антенны плотность потока излучения I_1 определяется произведением объемной плотности энергии волны w_1 в этом месте и ее скорости c:

$$I_1 = w_1 c,$$

где объемная плотность энергии электромагнитной волны w_1 на расстоянии r_1 от передатчика связана с напряженностью электрического поля в этом месте формулой

$$\omega_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_{1m}^2,$$

а напряженность E_{m1} обратно пропорциональна расстоянию r_1 до излучателя:

$$E_{m1} \sim \frac{1}{r_1},$$

поэтому плотность потока w_1 обратно пропорциональна квадрату расстояния r_1:

$$w_1 \sim \frac{1}{r_1^2}.$$

Следовательно, и плотность потока энергии I_1 тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния r_1:

$$I_1 \sim \frac{1}{r_1^2}.$$

Аналогично на расстоянии r_2 $I_2 \sim \frac{1}{r_2^2}$.

Следовательно, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$ или $\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$, откуда

$$\boxed{I_2 = I_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ:

$400\,\frac{мВт}{м^2} = 0{,}4\,\frac{Вт}{м^2}$, 120 км $= 1{,}2\cdot10^5$ м.

Произведем вычисления:

$$I_2 = 0{,}4\left(\frac{300}{1{,}2\cdot10^5}\right)^2\frac{Вт}{м^2} = 2{,}5\cdot10^{-7}\,\frac{Вт}{м^2}.$$

Ответ: $I_2 = 2{,}5\cdot10^{-7}$ Вт/м^2.

Задача 4

Максимальная напряженность электрического поля радиоволны не должна быть более $E_m = 5$ В/м. Чему равна в этом случае интенсивность электромагнитного излучения I?

Дано:

$E_m = 5\ \frac{В}{м}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$

$\varepsilon = 1$

$c = 3\cdot10^8\ \frac{м}{с}$

I – ?

Решение. Выразим интенсивность электромагнитной волны I через объемную плотность энергии волны $w_{эл\text{-}м}$:

$$I = w_{эл\text{-}м}c.$$

Плотность энергии электромагнитного поля $w_{эл\text{-}м}$ равна удвоенной плотности энергии электрического поля:

$$w_{эл\text{-}м} = 2w_{эл},\ где\ \omega_{эл} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E_m^2}{2},$$

поэтому $w_{эл\text{-}м} = \varepsilon_0\varepsilon E_m^2$,

где ε_0 – электрическая постоянная и ε – диэлектрическая проницаемость среды (в нашем случае воздуха).

С учетом этого $\boxed{I = \varepsilon_0\varepsilon E_m^2 c}$

Проверим единицу полученной величины:

$$[I]_{СИ} = \frac{Ф}{м}\cdot\frac{В^2}{м^2}\cdot\frac{м}{с} = \frac{Кл\cdot В^2}{В\cdot м^2\cdot с} = \frac{Кл\cdot Дж}{м^2\cdot с\cdot Кл} = \frac{Дж}{м^2\cdot с} = \frac{Вт}{м^2}.$$

Здесь Ф = Кл/В, Кл·В = Дж, Вт = Дж/с.

Произведем вычисления:

$$I = 8{,}85\cdot10^{-12}\cdot25\cdot3\cdot10^8\ \frac{Вт}{м^2} = 0{,}066\ \frac{Вт}{м^2}.$$

Ответ: $I = 0{,}066$ Вт/м^2.

Задача 5

Мощность импульса радиолокационной станции P = = 100 кВт. Найти максимальную напряженность электрического поля волны E_m в точке, где площадь поперечного сечения конуса излучения S = 2,3 км^2.

Дано:
P = 100 кВт
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$\varepsilon = 1$
S = 2,3 км^2

E_m – ?

Решение. Мощность импульса P связана с энергией волны W соотношением
$$P = \frac{W}{t}, \qquad (1)$$
где t – время излучения.

С другой стороны, интенсивность, т. е. плотность потока излучения,
$$I = \frac{W}{St} \text{ или с учетом (1) } I = \frac{P}{S}. \qquad (2)$$

Теперь выразим интенсивность I через объемную плотность энергии волны $w_{\text{эл-м}}$, а ту в свою очередь через напряженность электрического поля E_m:
$$I = w_{\text{эл-м}}c, \text{ где } w_{\text{эл-м}} = \varepsilon_0\varepsilon E_m^2,$$
поэтому
$$I = \varepsilon_0\varepsilon E_m^2 c. \qquad (3)$$

Нам осталось приравнять (2) и (3) и из полученного равенства определить напряженность E_m:
$$\frac{P}{S} = \varepsilon_0\varepsilon E_m^2 c, \text{ откуда } \boxed{E_m = \sqrt{\frac{P}{\varepsilon_0\varepsilon c S}}}$$

Не забудьте проверить единицу полученной величины.
Переведем все единицы в СИ:
100 кВт = $1 \cdot 10^5$ Вт, 2,3 км^2 = $2{,}3 \cdot 10^6$ м^2.
Произведем вычисления:
$$E_m = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^5}{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}3 \cdot 10^6}\,\frac{\text{В}}{\text{м}}} = 4\,\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Ответ: E_m = 4 В/м.

Задача 6

Если в катушке индуктивности сила тока изменится на ΔI = 2 А за время Δt = 1,2 с, то в ней возникнет ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s$ = 0,4 мВ. На какую длину волны λ будет настроен колебательный контур с этой катушкой, если емкость его конденсатора C = 25 нФ? Скорость электромагнитной волны в воздухе $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Дано:
$\Delta I = 2$ А
$\Delta t = 1{,}2$ с
$\mathcal{E}_s = 0{,}4$ мВ
$C = 25$ нФ
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

λ – ?

Решение. Длину радиоволны определим по формуле $\lambda = cT$, где согласно формуле Томсона период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\text{, поэтому } \lambda = 2\pi c\sqrt{LC}. \qquad (1)$$

Индуктивность катушки L определим из формулы ЭДС самоиндукции. Ее модуль

$$\mathcal{E}_s = L\frac{\Delta I}{\Delta t}\text{, откуда } L = \frac{\mathcal{E}_s \Delta t}{\Delta I}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу:

$$\boxed{\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s \Delta t}{\Delta I}C}}$$

Переведем все единицы в СИ: 0,4 мВ $= 4 \cdot 10^{-4}$ В, 25 нФ $= 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ф.

Произведем вычисления:

$$\lambda = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^8\sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2}{2}2{,}5 \cdot 10^{-8}}\ \text{м} = 4600\ \text{м} =$$

$= 4{,}6$ км.

Ответ: $\lambda = 4{,}6$ км.

Задача 7

Высота излучающей антенны телецентра над уровнем Земли $H = 300$ м, а высота приемной антенны $h = 10$ м. На каком предельном расстоянии от передатчика S можно вести прием?

Дано:
$H = 300$ м
$h = 10$ м
$R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м

S – ?

Решение. Зададимся вопросом: по какой причине радиоволны, излученные антенной передающей радиостанции А, могут не достичь приемной антенны С? Очевидно, что, двигаясь по прямой, они могут распространяться на любые расстояния, если только между передатчиком и приемником нет преграды. Значит, задавая вопрос о предельном расстоянии, составители задачи имели в виду, что между приемником и передатчиком может возникнуть какая-то преграда. Такой преградой может служить естественная кривизна земного шара (рис. 15-1). Радиолуч, распространяясь прямолинейно от вершины передающей антенны А, достигает вершины приемной антенны С, расположенной на расстоянии $S = S_1 + S_2$. При этом он касается земной поверхности в точке В. Если вершина приемной антенны окажется расположенной на расстоянии, большем $S = S_1 + S_2$ от вершины передающей антенны, то радиолуч, продолжая распространяться прямолинейно, не коснется вершины приемной антенны и ве-

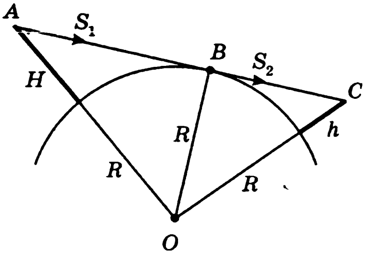


Рис. 15-1

сти прием станет невозможно. Таким образом, для решения задачи нам необходимо найти расстояние S_1 от вершины передающей антенны А до точки В, в которой луч касается земли, и расстояние S_2 от этой точки до вершины приемной антенны С.

Проведем из центра земного шара О радиус ОВ в точку касания луча В (масштабы на рис. не соблюдены и все размеры условны). Поскольку радиус всегда перпендикулярен к касательной, то мы получим два прямоугольных треугольника АВО и ВСО, у которых катет ОВ общий, а катеты АВ = S_1 и ВС = S_2 нам требуется найти. Гипотенузой АО в треугольнике АВО служит сумма радиуса Земли R и высоты передающей антенны Н, гипотенузой СО в треугольнике ВСО является сумма радиуса Земли R и высоты приемной антенны h. Тогда по теореме Пифагора

$$S_1 = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} \text{ и } S_2 = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}, \text{ поэтому}$$

$$S = \sqrt{(R+H)^2 - R^2} + \sqrt{(R+h)^2 - R^2}.$$

Выполним несложные преобразования с целью упрощения полученного выражения:

$$S = \sqrt{R^2 + 2RH + H^2 - R^2} + \sqrt{R^2 + 2Rh + h^2 - R^2} =$$

$$= \sqrt{2RH + H^2} + \sqrt{2Rh + h^2},$$

$$\boxed{S = \sqrt{H(2R+H)} + \sqrt{h(2R+h)}}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$S = (\sqrt{300(2\cdot 6{,}4\cdot 10^6 + 300)} + \sqrt{10(2\cdot 6{,}4\cdot 10^6 + 10)}\ \text{м} =$$
$$= 7{,}3\cdot 10^4 \text{ м}.$$

Ответ: $S = 7{,}3\cdot 10^4$ м.

Задача 8

Радиолокатор работает на волне $\lambda = 15$ см и испускает импульсы с частотой $\nu_{имп} = 4$ кГц. Длительность каждого импульса $\tau = 2$ мкс. Какова наибольшая дальность обнаружения цели $S_п$? Сколько колебаний $N_{кол}$ содержится в одном импульсе? Какова частота электромагнитных колебаний $\nu_{кол}$ в радиоволне?

Дано:
$\lambda = 15$ см
$\nu_{имп} = 4$ кГц

Решение. Поскольку электромагнитные волны распространяются в однородной среде равномерно, то наибольшую даль-

$\tau = 2$ мкс

$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

S_m – ?

$N_{кол}$ – ?

$\nu_{кол}$ – ?

ность обнаружения цели S_m определим, воспользовавшись уравнением равномерного движения

$$S_m = c \cdot t,$$

где t – время прохождения радиоволной расстояния S_m от радиолокатора до цели.

Поскольку для прохождения обратного пути от цели до радиолокатора электромагнитной волне потребуется столько же времени, то общее время на прохождение двойного расстояния $2S_m$ туда и обратно $t_{общ}$ равно удвоенному времени t:

$$t_{общ} = 2t, \text{ откуда } t = \frac{t_{общ}}{2} \text{ и } S_m = c\frac{t_{общ}}{2}.$$

Радиолокатор работает в импульсном режиме. Это означает, что он испускает в течение времени τ радиоволну, которая распространяется в течение времени $t_{общ}$ до цели и обратно, после чего испускается следующий импульс.

Время между двумя последовательными импульсами $t_{общ}$ равно частному от деления времени t испускания $N_{имп}$ импульсов на их количество:

$$t_{общ} = \frac{t}{N_{имп}} = \frac{1}{\frac{N_{имп}}{t}} = \frac{1}{\nu_{имп}}.$$

Тогда $$\boxed{S_m = \frac{c}{2\nu_{имп}}}$$

Мы нашли одну искомую величину. Теперь найдем число колебаний $N_{кол}$ в одном импульсе. Очевидно, что оно равно частному от деления длительности всего импульса τ на длительность одного электромагнитного колебания, т. е. на его период $T_{кол}$:

$$N_{кол} = \frac{\tau}{T_{кол}}.$$

Период одного электромагнитного колебания $T_{кол}$ можно найти, разделив длину электромагнитной волны λ на скорость ее распространения c: $T_{кол} = \frac{\lambda}{c}$.

Тогда $$\boxed{N_{кол} = \frac{\tau c}{\lambda}}$$

Вторая искомая величина найдена. Осталось определить частоту электромагнитных колебаний $\nu_{кол}$. Эта величина обратна периоду электромагнитных колебаний $T_{кол}$:

$$\nu_{кол} = \frac{1}{T_{кол}}.$$

Поскольку $T_{кол} = \frac{\lambda}{c}$, то $\boxed{\nu_{кол} = \frac{c}{\lambda}}$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 15 см = 0,15 м, 4 кГц = $4 \cdot 10^3$ Гц, 2 мкс = $2 \cdot 10^{-6}$ с.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$S_м = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 4 \cdot 10^3} \text{ м} = 3{,}7 \cdot 10^4 \text{ м},$$

$$N_{кол} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8}{0{,}15} = 4 \cdot 10^3, \; \nu_{кол} = \frac{3 \cdot 10^8}{0{,}15} \text{ Гц} =$$
$$= 2 \cdot 10^9 \text{ Гц}.$$

Ответ: $S_м = 3{,}7 \cdot 10^4$ м, $N = 4 \cdot 10^3$, $\nu_{кол} = 2 \cdot 10^9$ Гц.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Сила тока в открытом колебательном контуре в виде стержня изменяется по закону $i = 400 \cos 2 \cdot 10^6 \pi t$ мА. Найти длину l этого стержня. *Указание:* напомним, что $\lambda = 2\,l$.

Ответ: $l = 1{,}5$ м.

Задача 2. В звуковой волне, достигающей микрофона передающей радиостанции, период колебаний $T_{зв} = 2 \cdot 10^{-3}$ с. Найти длину электромагнитной волны $\lambda_{эл\text{-}м}$, излучаемой этой радиостанцией, если в течение одного периода звуковой волны в электромагнитной волне происходит $N = 2 \cdot 10^3$ колебаний.

Ответ: $\lambda_{эл\text{-}м} = \frac{cT_{зв}}{N} = 300$ м.

Задача 3. Сколько N колебаний происходит в электромагнитной волне с длиной волны $\lambda_1 = 30$ м в течение одного периода звуковых колебаний длиной $\lambda_2 = 1{,}7$ м? Скорость звука $\upsilon_{зв} = 340$ м/с, скорость электромагнитной волны $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $N = \frac{c\lambda_2}{\upsilon_{зв}\lambda_1} = 5 \cdot 10^4$.

Задача 4. Колебательный контур радиоприемника настроен на радиостанцию, частота которой $\nu_1 = 9$ МГц. Во сколько раз нужно изменить емкость конденсатора приемного контура, чтобы контур был настроен на длину волны $\lambda_2 = 50$ м?

Ответ: $\frac{C_2}{C_1} = \left(\frac{\nu_1\lambda_2}{c}\right)^2 = 2{,}25$.

Задача 5. На какую длину волны λ настроен колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью $L = 2$ мГн и плоского конденсатора с площадью обкладок $S = 800$ см², расстоянием между обкладками $d = 1$ см и диэлектриком, заключенным между обкладками, с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 11$?

Ответ: $\lambda = 2\pi c \sqrt{L \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}} = 2{,}35 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 6. На каком расстоянии S от антенны радиолокатора находится самолет, если отраженный от него радиосигнал возвратился через $t = 100$ мкс с момента его испускания?

Ответ: $S = 15$ км.

Задача 7. Объемная плотность энергии электромагнитной волны $w_{эл\text{-}м} = 2 \cdot 10^{-16}$ Дж/см^3. Найти плотность потока излучения (интенсивность волны) I.

Ответ: $I = 0{,}06$ Вт/м^2.

Задача 8. Через $S = 1$ см^2 в течение $t = 10$ с электромагнитная волна переносит энергию с интенсивностью $I = 2$ мВт/м^2. Найти эту энергию W.

Ответ: $W = ISt = 0{,}2$ мкДж.

Задача 9. Допустимая объемная плотность энергии электромагнитной волны $w_{эл\text{-}м} = 2{,}2 \cdot 10^{-10}$ Дж/м^3. Найти максимальную напряженность E_m электрического поля волны в воздухе и ее интенсивность I.

Ответ: $E_m = \sqrt{\dfrac{w_{эл-м}}{\varepsilon_0\varepsilon}} = 5$ В/м, $I = 6{,}6 \cdot 10^{-2}$ Вт/м^2.

Задача 10. Максимальная напряженность электрического поля волны $E_m = 6$ В/м в точке, где площадь поперечного сечения конуса электромагнитного излучения S. Найти эту площадь S, если в течение $t = 2$ с радиолокационная станция излучила импульс с энергией $2 \cdot 10^5$ Дж.

Ответ: $S = \dfrac{w}{\varepsilon_0\varepsilon c t E_m^2} = 1{,}046 \cdot 10^6$ м^2.

Задача 11. Колебательный контур в воздухе излучает электромагнитные волны с длиной волны $\lambda = 200$ м. Определить индуктивность L колебательного контура, если его емкость $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф.

Ответ: $L = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 = 2 \cdot 10^8$ Гн.

Задача 12. Электромагнитные волны распространяются в некоторой среде со скоростью $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. Найти разность длин волн $\Delta\lambda$ в этой среде и в вакууме, если частота колебаний в вакууме $\nu = 1$ МГц?

Ответ: $\Delta\lambda = \dfrac{c - v}{\nu} = 100$ м.

Задача 13. Амплитуда напряженности электрического поля в радиоволне $E = 30$ мкВ/м. Высота приемной антенны $h = 3$ м. Найти амплитуду наводимой в этой антенне ЭДС $\mathcal{E}_m$, считая электрическое поле в ней в момент достижения $\mathcal{E}_m$ однородным.

Ответ: $\mathcal{E}_m = Eh = 9 \cdot 10^{-5}$ В.

Задача 14. Каким должно быть максимальное число импульсов $N_{имп}$, испускаемых радиолокатором за $t = 1$ с, при разведывании цели, находящейся на расстоянии $S = 30$ км от него?

Ответ: $N_{имп} = \dfrac{ct}{2S} = 5 \cdot 10^3$.

Задача 15. На каком предельном расстоянии S_m может быть обнаружена на поверхности моря цель корабельным радиолокатором, расположенным на высоте $H = 8$ м над уровнем моря (рис. 15-2)? Каким должен быть минимальный промежуток времени τ

между соседними импульсами такого локатора? Радиус Земли принять равным $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

Ответ:

$$S_m = \sqrt{H(2R + H)} = $$
$$= 1{,}01 \cdot 10^4 \text{ м},$$

$$\tau = \frac{2S_m}{c} = 6{,}7 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

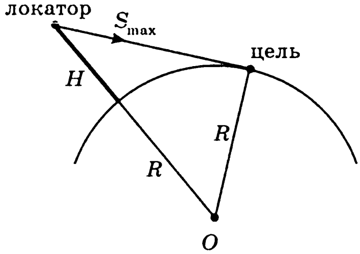


Рис. 15-2

Задача 16. Радиолокатор излучает N_1 импульсов за время t с частотой ν. Мощность одного импульса P_1, а продолжительность его испускания τ. Найти энергию одного импульса W_1, среднюю полезную мощность локатора $P_{ср}$, расстояние S_1 по лучу, занимаемое одним импульсом, число длин волн N_2 в одном импульсе, интенсивность излучения I на расстоянии, где площадь поперечного сечения конуса излучения S_1.

Ответ: $W_1 = P_1\tau$; $P_{ср} = \frac{W_1 N_1}{t}$; $S_1 = c\tau$; $N_2 = \frac{S_1 \nu}{c}$; $I = \frac{W_1}{S\tau}$.

Задача 17. Время горизонтальной развертки на экране локатора $t = 3$ мс. Найти максимальную глубину разведки S_m.

Ответ: $S_m = 0{,}5\ ct = 450$ км.

16. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Явлениями, подтверждающими волновую природу света, являются интерференция, дифракция, дисперсия и поляризация. Интерференция состоит в перераспределении энергии световых волн в пространстве при их наложении, в результате чего в разных точках пространства наблюдается усиление или ослабление интенсивности результирующей световой волны. При этом налагающиеся друг на друга волны должны быть когерентными, т. е. иметь одинаковую частоту или постоянную разность фаз.

Задачи на интерференцию света можно условно разделить на две группы. К первой группе можно отнести задачи на интерференцию света от двух точечных когерентных источников. В этом случае для решения задачи часто приходится определять разность хода двух световых волн от источников S_1 и S_2 до места интерференции (рис. 16-1).

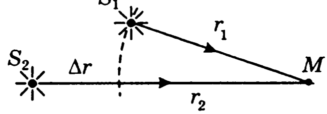


Рис. 16-1

Если разность хода Δr содержит целое число k (или m) длин волн (или четное число длин полуволн), то в месте их наложения друг на друга наблюдается усиление света – максимум. Условие максимума

$$\Delta r = k\lambda \text{ или } \Delta r = 2k\frac{\lambda}{2}. \qquad (16.1)$$

Здесь $k = 0; 1; 2; 3; \ldots$ – целое число, λ – длина световой волны.

Если же в разности хода Δr содержится нечетное число длин полуволн, то в месте интерференции будет наблюдаться минимум – ослабление света. Условие минимума

$$\Delta r = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \text{ или } \Delta r = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda. \qquad (16.2)$$

Отрезок $\Delta r = r_2 - r_1$ при распространении световых волн в вакууме (или в воздухе) называют разностью хода волн. Точнее это геометрическая разность хода волн. Если свет распространяется в некоторой прозрачной среде с абсолютным показателем преломления n, то применяют понятие оптической разности хода волн Δ. Оптическая разность хода Δ – это произведение абсолютного показателя преломления среды n и геометрической разности хода волн Δr:

$$\Delta = n\Delta r. \qquad (16.3)$$

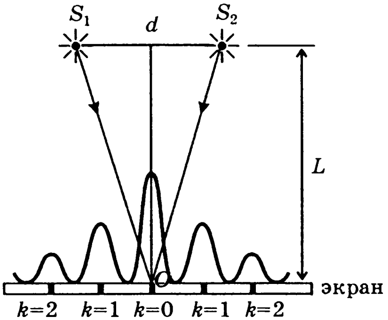


Рис. 16-2

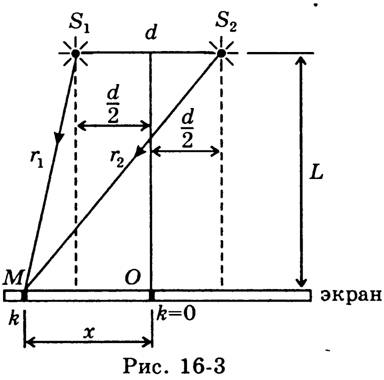


Рис. 16-3

Обратимся к рис. 16-2. Пусть два когерентных источника света S_1 и S_2 расположены на расстоянии d друг от друга. Пусть это расстояние d во много раз меньше расстояния L от каждого источника до экрана. При этом на экране в точке О, расположенной напротив середины отрезка S_1S_2, всегда будет наблюдаться светлая полоса – нулевой максимум ($k = 0$), ведь свет от источника S_1 и S_2 сюда будет приходить в одной фазе, так как расстояния от источников света до точки О одинаковы.

Слева и справа от нулевого максимума будут располагаться максимумы первого порядка ($k = 1$), затем – второго порядка ($k = 2$) и т. д. Все максимумы будут разделены темными промежутками – минимумами.

Разность хода Δr световых волн от источников S_1 и S_2 до точки М, где наблюдается максимум под номером k, можно найти, отняв от расстояния r_2 между источником S_2 и точкой М расстояние r_1

между источником S_1 и той же точкой: $\Delta r = r_2 - r_1$.

Расстояние x от нулевого максимума ($k = 0$) до k-го можно найти по теореме Пифагора, если известны расстояние L от каждого источника до экрана и расстояние d между источниками. Например, из рис. 16-3 следует:

$$\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 = r_2^2 - L^2 \quad \text{и} \quad \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 = r_1^2 - L^2.$$

Решая совместно эти уравнения, можно найти x, если известны r_1, r_2, d и L. При этом следует учесть, что поскольку L во много раз больше d, то можно принять $r_1 + r_2 = 2L$. Это упрощение может очень пригодиться при выполнении алгебраических действий в процессе решения задачи.

Ко второй группе задач волновой оптики относят задачи об интерференции света в тонких пленках и на расчеты, связанные с кольцами Ньютона. При решении таких задач следует учитывать, в каком свете наблюдается интерференционная картина – чередование темных и светлых полос или колец: в отраженном или в проходящем.

Расчеты показывают, что радиус светлого кольца Ньютона в отраженном свете

$$r = \sqrt{(2k - 1)R\frac{\lambda}{2}}, \tag{16.4}$$

где R – радиус кривизны линзы, k – номер кольца, считая от центра интерференционной картины.

Радиус темного кольца Ньютона в отраженном свете

$$r = \sqrt{k\lambda R}. \tag{16.5}$$

В проходящем свете, наоборот, радиус светлого кольца определяет формула (16.5), а темного – формула (16.4).

При прохождении монохроматического света сквозь тонкую пленку толщиной h из вещества с показателем преломления n максимум освещенности ее поверхности в отраженном свете определяется формулой

$$2hn\cos\gamma = \Delta + \frac{\lambda}{2} \quad \text{или} \quad 2hn\cos\gamma = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{16.6}$$

Здесь $\Delta = 2k\dfrac{\lambda}{2}$ – оптическая разность хода световых волн при их отражении от верхней и нижней поверхностей пленки, $k = 1$; 2; 3; ... – целое число длин полуволн, укладывающихся в этой разности хода, γ – угол преломления.

Минимум освещенности поверхности пленки в отраженном свете определяется формулой

$$2hn\cos\gamma = \Delta \quad \text{или} \quad 2hn\cos\gamma = 2k\frac{\lambda}{2}. \tag{16.7}$$

В проходящем свете условие максимума освещенности поверхности пленки определяется условием (16.7), а минимума – условием (16.6).

Дифракцией света называют отклонение направления световых волн от прямолинейного у края щели или отверстия, сквозь которое проходит волна. Наилучшее условие для наблюдения дифракции создается, когда размер отверстия или щели порядка нескольких длин волн.

При дифракции от одной щели на экране наблюдаются светлые и темные полосы. При падении света перпендикулярно (нормально) на щель положение минимумов освещенности экрана (темных полос) определяется условием $a \sin \varphi = k\lambda$. (16.8)

Здесь a – ширина щели, φ – угол дифракции, k – 0; 1; 2; 3 и т. д. – порядок минимума, т. е. номер темной полосы, считая от места на экране, расположенного напротив щели, λ – длина волны.

Для наблюдения дифракции света используют дифракционную решетку – пластинку, на которую нанесено множество непрозрачных штрихов, между которыми имеются прозрачные промежутки. Сумма ширины прозрачной и непрозрачной полос называется периодом решетки d.

При дифракции на решетке условие максимума на экране определяется формулой $d \sin \varphi = k\lambda$, (16.9) где d – период решетки (постоянная решетки), φ – угол дифракции, k – 0; 1; 2; 3 – порядок максимума, считая от центрального, соответствующего $k = 0$ и расположенного напротив центра решетки, λ – длина волны, падающей на решетку нормально к ней.

Если известны ширина прозрачной полосы решетки a и непрозрачной b, то период решетки $d = a + b$.

Если решетка регулярная, т. е. ее прозрачные и непрозрачные полосы имеют одинаковую ширину, то период решетки d можно определить, разделив ее длину l на число штрихов N:

$$d = \frac{l}{N}.$$

Если дифракционная решетка освещается светом сложного состава, например, белым, то, как видно из условия главных максимумов (16.9), при $k \neq 0$ разным длинам волн λ будут соответствовать и разные углы дифракции φ. Следовательно, положение главных максимумов ненулевого порядка для разных длин волн будет различным. Поэтому все главные максимумы (кроме центрального $k = 0$) имеют вид радужных полос, называемых дифракционными спектрами первого порядка $k = \pm 1$, второго порядка ($k = \pm 2$) и т. д. Ближе к центральному максимуму находится фиолетовый край спектра, дальше всего от него – красный (так как $\lambda_{фиол} < \lambda_{кр}$, то и $\varphi_{фиол} < \varphi_{кр}$). Центральный максимум остается белым, так как при $k = 0$ для всех длин волн $\varphi = 0$, т. е. положение главного максимума нулевого порядка для всех длин волн одинаково.

При решении задач на дифракцию света затруднение часто возникает, когда нужно определить предельное число главных максимумов, $k_{пред}$, даваемых решеткой. Для правильного ответа надо учесть, что чем больше порядок главного максимума, тем больше угол дифракции волн, участвующих в его образовании. Очевидно, что предельное значение угла дифракции $\varphi_{пред} = 90°$. Из условия главных максимумов можно найти соответствующее ему значение $k_{пред} = \dfrac{d}{\lambda}\sin\varphi_{пред} = \dfrac{d}{\lambda}$ (так как $\sin 90° = 1$). Если значение $k_{пред}$ получилось не целым, например, 3,8, то надо в качестве k взять целую часть полученного числа, т. е. $k = 3$. Округлять по правилам округления здесь ни в коем случае нельзя, так как в противном случае из последнего уравнения будет следовать $\sin \varphi_{пред} > 1$, что не имеет смысла. Запись $k = 3$ означает, что порядок последнего максимума, даваемого решеткой, равен трем. Всего же можно будет наблюдать $2k + 1 = 7$ максимумов: один центральный, три слева от него и три справа от него.

Если в задаче речь идет о наложении некоторой линии, соответствующей световой волне с длиной волны λ_1 в спектре k_1 порядка, на линию, которая соответствует длине волны λ_2 в спектре k_2 порядка, и требуется найти, например, величину λ_2 при известных λ_1, k_1, k_2, то необходимо записать условия наблюдения главных максимумов k_1-го и k_2-го порядков, а именно: $d \sin \varphi = k_1\lambda_1$ и $d = \sin \varphi = k_2\lambda_2$. Левые части этих соотношений одинаковы, так как решетка одна и та же, и направления на накладывающиеся линии совпадают ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$), поэтому $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$, откуда $\lambda_2 = \dfrac{k_1\lambda_1}{k_2}$.

Разрешающая способность дифракционной решетки R (или A) определяется отношением $R = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \dfrac{\lambda_1}{\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ – разность длин волн, которые можно наблюдать с помощью дифракционной решетки раздельно. Если разность длин волн, падающих на решетку, меньше $\Delta\lambda$ при данных R и λ_1 то решетка не может их разрешить (т. е. они не будут видны раздельно, а будут сливаться), а если больше, то может.

Если угол дифракции φ мал, то $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \varphi$, выраженному в радианах.

Из условия максимума на дифракционной решетке

$$d \sin \varphi = k\lambda$$

следует, что при данной длине световой волны λ и данном порядке максимума k большему углу дифракции φ соответствует меньший период d или большее число штрихов N на длине решетки L.

Спектр, даваемый дифракционной решеткой при падении на нее белого (немонохроматического) света, отличается от спектра, даваемого стеклянной призмой, тем, что призма отклоняет лучи фиолетового цвета сильнее, а красного – слабее. А дифракционная решетка, наоборот, сильнее отклоняет лучи с наибольшей длиной волны, т. е. красного, ведь согласно формуле

$$d \sin \varphi = k\lambda$$

при одинаковых d и k большей длине волны λ соответствует и больший угол дифракции φ. А длина волны красных лучей в видимом свете наибольшая, а фиолетовых – наименьшая.

Полезно знать, что цвет тела в отраженном от него свете зависит от того, какие лучи попадают в глаз наблюдателя. Красная гвоздика потому и красная, что только красные лучи из всех лучей белого света, падающих на нее, отражаются и доходят до глаза, а остальные поглощаются ее веществом. Поэтому, если на красную гвоздику смотреть сквозь зеленое стекло, которое пропускает только зеленые лучи, а остальные поглощает, то гвоздика будет выглядеть черной, ведь она зеленые лучи не отражает, а стекло отраженные ею красные лучи поглощает.

Цвет неба днем голубой потому, что солнечные лучи равномерно рассеиваются на частицах воздуха в верхних слоях атмосферы, причем голубые и синие лучи рассеиваются сильнее всего, «окрашивая» равномерно небо в голубой или синий цвет. Вечером же, когда Солнце садится, его лучи проходят через бóльшую толщу воздуха, поглощающего все длины волн, кроме красного, поэтому заря окрашивается в красные цвета (примерно то же самое наблюдается и утром).

Если в условии задачи не сказано, о какой среде идет речь, то, как правило, это воздух или вакуум с $n = 1$.

Решение отдельных задач

Задача 1

В 1875 г. французский физик Корню повторил опыт Физо по определению скорости света, увеличив частоту вращения зубчатого колеса. Измеренная им скорость света оказалась $c = 300\,400$ км/с. Расстояние от колеса до зеркала было равным $L = 23$ км и за $t_1 = 10$ с зубчатое колесо совершило $N_1 = 9143$ оборота. Найти число зубцов на колесе.

Дано:

$c = 300\,400\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$

$L = 23$ км

$t_1 = 10$ с

$N_1 = 9143$

N – ?

Здесь и далее c – скорость света в вакууме.

Решение. Число зубцов N можно найти, разделив время полного оборота колеса, т. е. его период T, на время поворота колеса на ширину одного зубца $t_0 = 2t$, где t – время поворота колеса на половину ширины зубца, равное времени прохождения светом двойного расстояния L (от колеса до зеркала и обратно):

$$N = \frac{T}{t_0} = \frac{T}{2t},\ \text{где}\ T = \frac{t_1}{N_1},\ \text{а}\ t = \frac{2L}{c}.$$

С учетом этого $\boxed{N = \dfrac{ct_1}{4N_1L}}$

Переведем все единицы в СИ:

$300\,400$ км/с $= 3{,}004 \cdot 10^8$ м/с, 23 км $= 2{,}3 \cdot 10^4$ м.

Произведем вычисления:

$$N = \frac{3{,}004 \cdot 10^8 \cdot 10}{4 \cdot 9143 \cdot 2{,}3 \cdot 10^4} = 200.$$

Ответ: $N = 200$.

Задача 2

Найти число длин волн N монохроматического света, укладывающихся на отрезке $l = 2$ м, если частота излучения $\nu = 600$ ТГц (терагерц).

Дано:	*Решение.* Число длин волн N можно найти, разделив длину отрезка l на длину волны λ: $N = \dfrac{l}{\lambda}$.
$l = 2$ м $\nu = 600$ ТГц $c = 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$	Поскольку $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, то $\boxed{N = \dfrac{l\nu}{c}}$
N – ?	

Переведем в СИ единицу частоты:
600 ТГц = $600 \cdot 10^{12}$ Гц = $6 \cdot 10^{14}$ Гц.

Произведем вычисления: $N = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} = 4 \cdot 10^6$.

Ответ: $N = 4 \cdot 10^6$.

Задача 3

Свет от источника S_2 (рис. 16-1) приходит в точку М на $\Delta t = 2{,}5T$ позже света от источника S_1. Усиление или ослабление света будет в точке М? Источники испускают когерентные световые волны.

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо определить, четное или нечетное число полуволн «укладывается» в разности хода волн Δr от источников S_1 и S_2 до точки М. Эта разность хода равна произведению скорости света c на время $\Delta t = 2{,}5\ T$:

$$\Delta r = c\Delta t = c \cdot 2{,}5\ T.$$

Длина волны $\lambda = cT$, поэтому

$$\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda} = \frac{2{,}5cT}{0{,}5cT} = 5.$$

Число полуволн в разности хода волн Δr равно 5, т. е. оно нечетное, значит, в точке М будет минимум освещенности.

Ответ: минимум.

Задача 4

Расстояние $r_1 = 1$ м, а расстояние $r_2 = 1{,}0009$ м (рис. 16-1). Что будет наблюдаться в точке М: минимум или максимум освещенности, если частота световых волн, излучаемых источниками S_1 и S_2, $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц ?

Дано:	*Решение.* Разность хода волн
$r_1 = 1$ м $r_2 = 1{,}0009$ м	$\Delta r = r_2 - r_1$.

$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{м}{с}$

$\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц

$\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda}$ – ?

Длина световой волны $\lambda = \frac{c}{\nu}$,

поэтому $0{,}5\lambda = \frac{c}{2\nu}$.

Разделим Δr на $0{,}5\ \lambda$:

$$\boxed{\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda} = \frac{2\nu(r_2 - r_1)}{c}}$$

Если при вычислении $\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda}$ получим четное число, то в точке М будет максимум, а если нечетное, то минимум:

$$\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{14}(1{,}0009 - 1)}{3 \cdot 10^8} = 3 \cdot 10^3 \text{ – четное число.}$$

Значит, в точке M будет максимум.

Ответ: максимум.

Задача 5

Два когерентных источника S_1 и S_2 испускают свет с длиной волны λ = 500 нм. На каком расстоянии x от точки О на экране располагается первый максимум освещенности (k = 1), если расстояние между источниками d = 0,5 мм, а расстояние от каждого источника до экрана L = 2 м (рис. 16-4).

Дано:

λ = 500 нм

$k = 1$

d = 0,5 мм

L = 2 м

x – ?

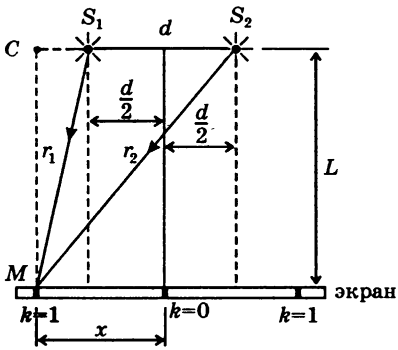


Рис. 16-4

Решение. Для решения задачи «свяжем» отрезки x, d и L с ходом лучей r_1 и r_2 до экрана.

Пути лучей r_1 и r_2 определим с помощью теоремы Пифагора как гипотенузы в прямоугольных треугольниках S_1MC и S_2MC:

$$r_1^2 = L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2, \qquad (1)$$

$$r_2^2 = L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Вычитая почленно из (2) (1), получим

$r_2^2 - r_1^2 = 2xd$ или $(r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2xd$.

Интерференционная картина будет четкой, если расстояние $S_1S_2 = d$ между источниками невелико по сравнению с расстоянием их до экрана МС $= L$, т. е. когда $d \ll L$. В этом случае $r_1 + r_2 \approx 2L$ и $r_2 - r_1 = \dfrac{2xd}{2L}$ или

$$\Delta r = \frac{xd}{L}, \text{ откуда } x = \frac{\Delta rL}{d}.$$

Согласно условию максимума освещенности при интерференции $\Delta r = k\lambda$.

С учетом этого $\boxed{x = \dfrac{k\lambda L}{d}}$.

Переведем все единицы в СИ:
500 нм $= 500 \cdot 10^{-9}$ м $= 5 \cdot 10^{-7}$ м, 0,5 мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м.
Произведем вычисления:

$$x = \frac{1 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2}{5 \cdot 10^{-4}} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Примечание: если в задачах требуется найти расстояние между симметричными максимумами (или минимумами) одного порядка, то можно подобным образом определить расстояние x от нулевого максимума до максимума этого порядка, а затем его удвоить.

Ответ: $x = 2 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 6

Как изменяется расстояние Δx между соседними максимумами освещенности на экране, если:

1) не изменяя расстояния d между когерентными источниками S_1 и S_2 света, удалять их от экрана;

2) не изменяя расстояния до экрана L, сближать источники света;

3) уменьшать длину волны света λ, испускаемого источниками?

Дано:
d
L
λ

Δx – ?

Решение. Максимум освещенности в некоторой точке М экрана будет наблюдаться, если волны от когерентных источников S_1 и S_2 приходят в эту точку в одной фазе, что возможно при $r_2 - r_1 = k\lambda$, где $k = 0;\ 1;\ 2;\ 3$ и т. д. (рис. 16-4).

Пусть в точке М наблюдается максимум k-го порядка, тогда x_k – расстояние от этого максимума от центральной светлой полосы нулевого порядка ($ck = 0$).

Определение расстояния x_k через d, L, λ проделано в задаче 4. Там показано, что если $d \ll L$, то

$$x_к = \frac{k\lambda L}{d}.$$

По аналогии можно записать, что расстояние $(k + 1)$-й светлой полосы от центра экрана $x_{k+1} = \dfrac{(k+1)L\lambda}{d}$.

Тогда расстояние между соседними полосами

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1)L\lambda}{d} - \frac{k\lambda L}{d},$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda L}{d}}$$

Из этого выражения следует, что:

1) если $L_2 > L_1$ при $d = \text{const}$, то $\Delta x_2 > \Delta x_1$, т. е. расстояние между соседними светлыми полосами увеличивается;

2) если $d_2 < d_1$ при $L = \text{const}$, то $\Delta x_2 < \Delta x_1$, т. е. расстояние между соседними максимумами освещенности увеличивается;

3) если $\lambda_2 < \lambda_1$, то $\Delta x_2 < \Delta x_1$, , т. е. расстояние между соседними светлыми полосами уменьшается.

Ответ: 1) увеличивается; 2) увеличивается; 3) уменьшается.

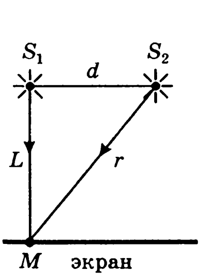


Рис. 16-5

Задача 7

Два когерентных источника S_1 и S_2 с длиной световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м находятся на расстоянии $d = 30$ мм друг от друга. Экран расположен на расстоянии $L = 4$ см от каждого источника. Что будет наблюдаться на экране в точке М, расположенной напротив источника S_1 (рис. 16-5)?

Дано:	
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м	
$d = 30$ мм	
$L = 4$ см	
$\dfrac{\Delta r}{0{,}5\lambda}$ – ?	

Решение. В этом случае разность хода волн $\Delta r = r - L$,
где r – расстояние от источника S_2 до точки М. По теореме Пифагора

$$r = \sqrt{L^2 + d^2}.$$

С учетом этого $\Delta r = \sqrt{L^2 + d^2} - L$.

Разделим Δr на $0{,}5\lambda$ и посмотрим, четное или нечетное число длин полуволн содержится в разности хода волн Δr:

$$\boxed{\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda} = \frac{2\left(\sqrt{L^2 + d^2} - L\right)}{\lambda}}$$

Переведем все единицы в СИ: 30 мм = 0,03 м,
4 см = 0,04 м.

Произведем вычисления:

$$\frac{\Delta r}{0{,}5\lambda} = \frac{2\left(\sqrt{0{,}0016 + 0{,}0009} - 0{,}04\right)}{5 \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot 10^4$$ – четное число. Значит, в точке М будет максимум.

Ответ: максимум.

Задача 8

На мыльную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$ падает белый свет под углом $\alpha = 30°$. При какой наименьшей толщине h поверхность пленки, наблюдаемая в отраженном свете, будет окрашена в желтый цвет? Длина волны желтого света $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.

Дано:	
$n = 1{,}33$	
$\alpha = 30°$	
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м	
h – ?	

Решение. Максимум освещенности, наблюдаемый на поверхности тонкой пленки в отраженном свете, соответствует условию: $2hn\cos\gamma = (2k + 1)\dfrac{\lambda}{2}$. (1)

Здесь γ – угол преломления. А нам известен угол падения лучей α. По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n, \quad \text{откуда} \quad \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

Поскольку $\cos\gamma = \sqrt{1 - \sin^2\gamma}$, то

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и из полученного соотношения определим искомую наименьшую толщину пленки, соответствующую $k = 1$: $2hn\dfrac{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n} = (2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$.

При $k = 1$ $\quad 2h\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = \dfrac{3}{2}\lambda$, откуда

$$\boxed{h = \frac{3\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}}$$

Произведем вычисления:

$$h = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{4\sqrt{1{,}33^2 - \sin^2 30^\circ}}\text{ м} = 3{,}7 \cdot 10^{-7}\text{ м}.$$

Ответ: $h = 3{,}7 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 9

Белый свет падает нормально на мыльную пленку с показателем преломления n. Найти толщину пленки, если в проходящем свете интерференционный максимум наблюдается на волне λ_1, а ближайший к нему минимум на волне λ_2.

Дано:
n
λ_1
λ_2
$k = 1$
h — ?

Решение. Согласно условию интерференции максимум интерференции в проходящем свете наблюдается при условии

$2hn\cos\gamma = k\lambda_1$,

а минимум при условии

$2hn\cos\gamma = (2k + 1)\dfrac{\lambda_2}{2}$.

Поскольку при нормальном падении лучей на пленку $\alpha = \gamma = 0^\circ$, а $\cos\gamma = 1$, то эти условия примут вид

$$2hn = k\lambda_1 \quad (1) \qquad \text{и} \qquad 2hn = (2k + 1)\frac{\lambda_2}{2}. \qquad (2)$$

Выразим из (1) k и подставим в (2), после чего из полученного выражения определим толщину пленки h:

$$k = \frac{2hn}{\lambda_1}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2):

$$2hn = \left(2\frac{2hn}{\lambda_1} + 1\right)\frac{\lambda_2}{2}, \quad 2hn = \frac{2hn\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{2},$$

$$2hn - 2hn\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{2}, \text{ откуда } \boxed{h = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)}}$$

Задача решена.

Ответ: $h = \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{4n(\lambda_1 - \lambda_2)}$.

Задача 10

Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м. Найти разность Δr между радиусами светлых колец с порядковыми номерами $k_1 = 3$ и $k_2 = 4$. Радиус кривизны линзы $R = 8$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Дано:
$\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м
$k_1 = 3$
$k_2 = 4$
$R = 8$ м

Δr – ?

Решение. Радиусы светлых колец с порядковыми номерами k_1 и k_2 в отраженном свете определяются условием

$$r_1 = \sqrt{(2k_1 - 1)R\frac{\lambda}{2}} \text{ и } r_2 = \sqrt{(2k_2 - 1)R\frac{\lambda}{2}}.$$

Согласно этому их разность

$$\Delta r = \sqrt{(2k_2 - 1)R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{(2k_1 - 1)R\frac{\lambda}{2}}$$

или $\boxed{\Delta r = \sqrt{R\frac{\lambda}{2}}\left(\sqrt{2k_2 - 1} - \sqrt{2k_1 - 1}\right)}$

Произведем вычисления:

$$\Delta r = \sqrt{8\frac{6 \cdot 10^{-7}}{2}}\left(\sqrt{2 \cdot 4 - 1} - \sqrt{2 \cdot 3 - 1}\right) \text{ м} = 6{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta r = 6{,}2 \cdot 10^{-4}$ м.

Задача 11

На круглое отверстие диаметром $D = 8$ мм падает нормально плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Найти число зон Френеля N, укладывающихся в этом отверстии, если расстояние от отверстия до экрана $r_0 = 2$ м.

Дано:
$D = 8$ мм
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$r_0 = 2$ м

N – ?

Решение. Число зон Френеля, укладывающихся в отверстии радиусом R, определяет формула

$$N = \frac{R^2}{r_0\lambda}.$$

Поскольку нам дан диаметр отверстия D, то его радиус $R = 0{,}5D$, поэтому

$$\boxed{N = \frac{0{,}25D^2}{r_0\lambda}}$$

Переведем в СИ единицу D: 8 мм = $8 \cdot 10^{-3}$ м.

Произведем вычисления: $N = \dfrac{0{,}25 \cdot 64 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 16.$

Ответ: $N = 16$.

Задача 12

Каков период решетки d, если при нормальном падении на нее лучей с длиной волны $\lambda = 0{,}75$ мкм на экране, отстоящем от решетки на расстоянии $L = 1$ м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на $x = 30{,}3$ см (рис. 16-6)? Каково число штрихов N на $l = 1$ см решетки? Какое количество m максимумов дает эта дифракционная решетка? Каков максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму?

Дано:
$\lambda = 0{,}75$ мкм
$L = 1$ м
$k = 1$
$x = 30{,}3$ см
$l = 1$ см

d – ?
$\dfrac{N}{l}$ – ?
m – ?
φ_{max} – ?

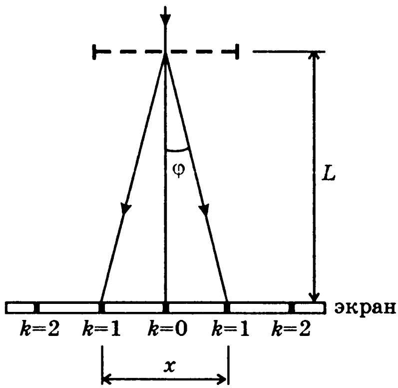


Рис. 16-6

Решение. Условие максимума на дифракционной решетке
$$d \sin \varphi = k\lambda,$$
где $k = 1$, так как в условии говорится о максимумах первого порядка, φ – угол дифракции лучей, образующих максимум первого порядка.

Так как по условию $\dfrac{x}{2}$ во много раз меньше L, то

$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$. Из рис. 16-6 следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{x}{2L}$.

Тогда $d = \dfrac{k\lambda}{\sin\varphi} = \dfrac{k\lambda}{\operatorname{tg}\varphi}$ или $\boxed{d = \dfrac{2\lambda L}{x}}$, $k = 1$.

Зная d, можно найти, сколько периодов (а значит, и сколько штрихов) укладывается на единице длины решетки. Поскольку $N = \dfrac{l}{d}$, то $\boxed{\dfrac{N}{l} = \dfrac{1}{d}}$

Для определения порядка последнего максимума надо учесть, что максимальный угол отклонения лучей после прохождения через дифракционную решетку не может превышать 90°. Тогда из условия главных максимумов

$$k_{max} = \frac{d\sin 90^0}{\lambda} \quad \text{или} \quad k_{max} = \frac{d}{\lambda}.$$

Общее число максимумов, даваемых дифракционной решеткой, $m = 2k_{max} + 1$, $\boxed{m = 2\dfrac{d}{\lambda} + 1}$

(такой результат получается, если учесть центральный максимум и то, что слева и справа от него расположены по k_{max} максимумов).

Максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму, определяется из соотношения

$$\sin\varphi_{max} = \frac{k_{max}\lambda}{d}, \quad \boxed{\varphi_{max} = \arcsin\left(\frac{k_{max}\lambda}{d}\right)}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 0,75 мкм = $7{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, 30,3 см = 0,303 м, 1 см = 0,01 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$d = \frac{2 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{0{,}303}\ \text{м} = 4{,}95 \cdot 10^{-6}\ \text{м},$$

$$\frac{N}{l} = \frac{1}{4{,}95 \cdot 10^{-6}}\ \text{м}^{-1} = 2{,}02 \cdot 10^5\ \text{м}^{-1}.$$

Поскольку на 1 м содержится $2{,}02 \cdot 10^5$ штрихов, то на 1 см их будет $2{,}02 \cdot 10^3$: $\dfrac{N}{l} = 2{,}02 \cdot 10^3\ \text{см}^{-1}$.

$$k_{max} = \frac{4{,}95 \cdot 10^{-6}}{7{,}5 \cdot 10^{-7}} = 6{,}6 = 6.$$

Напоминаем, что k_{max} нельзя округлять до 7, так как при этом получится, что $\sin\varphi_{max} = \dfrac{\lambda k_{max}}{d} > 1$, а это не имеет смысла.

$$m = 2 \cdot 6 + 1 = 13, \ \varphi_{max} = \arcsin\left(\frac{6 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-7}}{4{,}95 \cdot 10^{-6}}\right) = 65°.$$

Ответ: $d = 4{,}95 \cdot 10^{-6}$ м, $\frac{N}{l} = 2{,}02 \cdot 10^{3}$ см$^{-1}$, $m = 13$, $\varphi_{max} = 65°$.

Задача 13

При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков частично перекрывают друг друга. На линию какого цвета в спектре второго порядка накладывается синяя линия ($\lambda = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м) спектра третьего порядка?

Дано:
$k_1 = 2$
$k_2 = 3$
$\lambda_2 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м

λ_1 – ?

Обозначим k_1 и k_2 порядок спектров, накладывающихся друг на друга на экране, λ_2 – длину световой волны, соответствующей спектру третьего порядка, λ_1 – длину световой волны, соответствующей спектру второго порядка.

Решение. Проанализируем условие задачи.

При падении на решетку белого света центральный максимум, образуемый лучами с углом дифракции $\varphi = 0$, остается белым, так как из условия $d \sin \varphi = k\lambda$ видно, что при $\varphi = 0$ разность хода лучей разного цвета равна нулю, т. е. при образовании центрального максимума лучи всех цветов накладываются друг на друга. В случае же образования бокового максимума разности хода лучей разного цвета и, соответственно, углы дифракции для лучей разных длин волн различны. Поэтому на экране лучи разного цвета, образующие данный боковой максимум, собираются линзой в разных точках, причем фиолетовая полоса оказывается самой близкой к центру, а красная – наиболее удаленной (напомним, что длина волны фиолетового света наименьшая из всех волн видимого спектра, а красного – наибольшая).

Спектры разных порядков будут частично накладываться друг на друга, если в них есть линии, которым соответствует одинаковый угол дифракции.

Запишем условие образования линии, соответствующей световой волне с длиной волны λ_1 в спектре порядка k_1:

$$d \sin \varphi_1 = k_1\lambda_1.$$

Аналогичный вид имеет условие образования линии, соответствующей световой волне с длиной волны λ_2 в спектре порядка k_2:

$$d \sin \varphi_2 = k_2\lambda_2.$$

Если $\varphi_1 = \varphi_2$, то эти линии будут накладываться друг на друга. При этом $k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$ и $\boxed{\lambda_1 = \frac{k_2\lambda_2}{k_1}}$

Задача в общем виде решена. Произведем вычисления:

$$\lambda_1 = \frac{3 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-7}}{2} \text{м} = 6{,}75 \cdot 10^{-7} \text{ м} - \text{красная линия спектра.}$$

Ответ: $\lambda_1 = 6{,}75 \cdot 10^{-7}$ м – на красную линию спектра.

Задача 14

На дифракционную решетку длиной l с количеством штрихов N падает нормально свет с длинами волн λ_1 и λ_2. Определить расстояние Δx между дифракционными максимумами второго порядка, соответствующими этим волнам. Расстояние между решеткой и экраном L, углы дифракции малы.

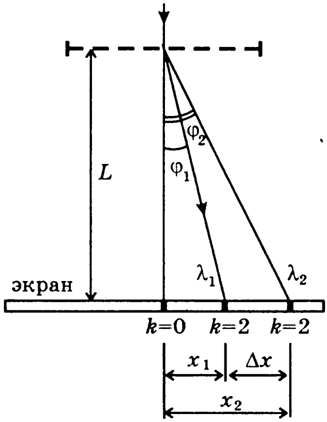


Рис. 16-7

Дано:
l
N
λ_1
λ_2
$k = 2$
L
Δx – ?

Решение. Из рис. 16-7 следует, что расстояние Δx равно разности расстояний x_1 и x_2 между центральным максимумом $k = 0$ и максимумами второго порядка, соответствующими длинам волн λ_1 и λ_2:

$\Delta x = x_2 - x_1$.

Из рис. 16-7 следует, что

$x_1 = L \operatorname{tg} \varphi_1 = L \sin \varphi_1$ и $x_2 = L \operatorname{tg} \varphi_2 = L \sin \varphi_2$, ведь при малых φ_1 и φ_2 $\sin \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ и $\sin \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$. С учетом этого $\Delta x = L(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$. (1)

Согласно условию максимума на дифракционной решетке $d \sin \varphi_1 = k\lambda_1$ и $d \sin \varphi_2 = k\lambda_2$, откуда

$$\sin \varphi_1 = \frac{k\lambda_1}{d} \quad \text{и} \quad \sin \varphi_2 = \frac{k\lambda_2}{d}.$$

Период решетки d найдем, разделив ее длину l на число штрихов N: $d = \dfrac{l}{N}$.

С учетом этого $\sin\varphi_1 = \dfrac{k\lambda_1 N}{l}$ (2) и $\sin \varphi_2 = \dfrac{k\lambda_2 N}{l}$. (3)

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1), и задача будет решена:

$$\Delta x = L\left(\frac{k\lambda_2 N}{l} - \frac{k\lambda_1 N}{l}\right), \quad \boxed{\Delta x = \frac{kNL}{l}(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Задача решена.

Ответ: $\Delta x = \dfrac{kNL}{l}(\lambda_2 - \lambda_1)$.

Задача 15

Дифракционная решетка имеет $N_1 = 1500$ штрихов. Можно ли с помощью этой решетки в спектре первого порядка разрешить две линии спектра с длинами волн $\lambda_1 = 600$ нм и $\lambda_2 = 600{,}5$ нм? Будет ли разрешать эти линии решетка такой же длины с числом штрихов $N_2 = 500$?

Дано:
$k = 1$
$N_1 = 1500$
$\lambda_1 = 600$ нм
$\lambda_2 = 600{,}5$ нм
$N_2 = 500$

R_1 – ?

Решение. Разрешающая способность решетки R_1 с числом штрихов N_1 определяется выражением $\boxed{R_1 = kN_1}$

Вычислим ее:

$R_1 = 1 \cdot 1500 = 1500.$

Чтобы разрешить линии, соответствующие длинам волн λ_1 и λ_2, разрешающая способность решетки R_0 должна быть равна:

$$\boxed{R_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}}$$

Вычислим и ее:

$$R_0 = \frac{600}{600{,}5 - 600} = 1200.$$

Поскольку $R_1 > R_0$, решетка разрешит эти линии, т. е. в спектре первого порядка они будут видны раздельно. А вот если число штрихов будет N_2, то и разрешающая способность такой решетки тоже будет $R_2 = 500$, и такая решетка не разрешит эти линии.

Ответ: разрешит; не разрешит.

Задача 16

Какой должна быть длина l дифракционной решетки, имеющей $N_1 = 800$ штрихов на длине $l_1 = 2$ мм, чтобы с ее помощью можно было разрешить в спектре второго порядка две линии спектра с длинами волн $\lambda_1 = 500$ нм и $\lambda_2 = 500{,}02$ нм?

Дано:
$N_1 = 800$
$l_1 = 2$ мм
$k = 2$

Решение. Запишем обе формулы разрешающей способности дифракционной решетки и приравняем их правые части:

$\lambda_1 = 500$ нм $\lambda_2 = 500{,}02$ нм	$R = kN$ и $R = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$,
l – ?	

следовательно, $kN = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$. (1)

Число штрихов N на длине решетки l найдем, разделив эту длину на период решетки d: $N = \dfrac{l}{d}$.

Период решетки d найдем, разделив длину l_1 на число штрихов на ней N_1: $d = \dfrac{l_1}{N_1}$.

С учетом этого $$N = \frac{lN_1}{l_1}. \qquad (2)$$

Нам осталось подставить (2) в (1) и из полученного выражения найти длину решетки l:

$$k\frac{lN_1}{l_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \text{ откуда } \boxed{l = \frac{\lambda_1 l_1}{kN_1(\lambda_2 - \lambda_1)}}$$

Переведем все единицы в СИ: 2 мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м, 500 нм $= 500 \cdot 10^{-9}$ м, 500,02 нм $= 500{,}02 \cdot 10^{-9}$ м.

Произведем вычисления:

$$l = \frac{500 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 800(500{,}02 \cdot 10^{-9} - 500 \cdot 10^{-9})} \text{ м} = 0{,}03 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 0{,}03$ м.

Задача 17

Дифракционная решетка имеет $N = 400$ штрихов на длине $l = 2$ мм. Она расположена на расстоянии $L = 1$ м от экрана. На решетку падает белый свет с длиной волны красного цвета $\lambda_1 = 720$ нм и длиной волны фиолетового цвета $\lambda_2 = 430$ нм. Найти длину x спектра первого порядка на экране.

Дано: $N = 400$ $l = 2$ мм $L = 1$ м $\lambda_1 = 720$ нм $\lambda_2 = 430$ нм $k = 1$	*Решение.* Длину спектра x найдем, отняв от расстояния x_2 между красной линией спектра первого порядка и центральным максимумом (белой полосой, соответствующей $k = 0$) расстояние x_1 между фиолетовой полосой спектра того же порядка и центральным максимумом (рис. 16-8): $x = x_2 - x_1$. (1)
x – ?	

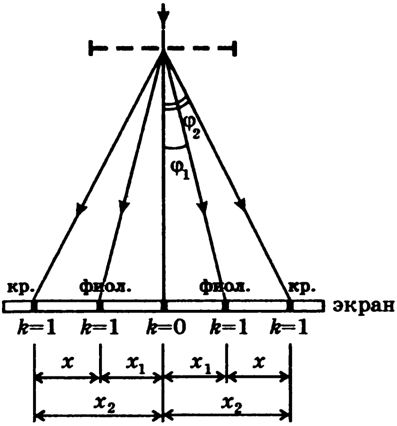


Рис. 16-8

Длины отрезков x_1 и x_2 найдем по формулам $x_1 = L\ \mathrm{tg}\ \varphi_1 = L \sin \varphi_1$ (2) и

$x_2 = L\ \mathrm{tg}\ \varphi_2 = L \sin \varphi_2$, (3) так как дифракционные углы φ_1 и φ_2, соответствующие спектру первого порядка, обычно малы.

Из условия максимума на дифракционной решетке

$$d \sin \varphi_1 = k\lambda_1 \text{ и}$$
$$d \sin \varphi_2 = k\lambda_2,$$

где период решетки

$d = \dfrac{l}{N}$, поэтому

$$\frac{l}{N}\sin \varphi_1 = k\lambda_1 \quad \text{и} \quad \frac{l}{N}\sin \varphi_2 = k\lambda_2,$$

откуда $\quad \sin\varphi_1 = \dfrac{k\lambda_1 N}{l} \quad (4) \quad$ и $\quad \sin\varphi_2 = \dfrac{k\lambda_2 N}{l}. \quad (5)$

Подставим (4) и (5) в (2) и (3):

$$x_1 = L\frac{k\lambda_1 N}{l} \quad (6) \quad \text{и} \quad x_2 = L\frac{k\lambda_2 N}{l}. \quad (7)$$

Нам осталось подставить (6) и (7) в (1), и задача будет решена: $x = L\dfrac{k\lambda_2 N}{l} - L\dfrac{k\lambda_1 N}{l}$, $\boxed{x = L\dfrac{kN}{l}(\lambda_2 - \lambda_1)}$

Переведем все единицы в СИ:
2 мм = $2 \cdot 10^{-3}$ м, 720 нм = $7{,}2 \cdot 10^{-7}$ м,
430 нм = $4{,}3 \cdot 10^{-7}$ м.
Проведем вычисления:

$$x = 1 \cdot \frac{1 \cdot 400}{2 \cdot 10^{-3}}(7{,}2 \cdot 10^{-7} - 4{,}3 \cdot 10^{-7})\text{ м} = 5{,}8 \cdot 10^{-2}\text{ м} =$$
$= 5{,}8$ см.

Ответ: $x = 5{,}8$ см.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В опыте Физо число зубцов вращающегося колеса $N = 720$, а расстояние между ним и зеркалом $L = 8633$ м. Каким должен быть период вращения колеса Т, чтобы скорость света стала $c = 3 \cdot 10^8$ м/с?

Ответ: $T = \dfrac{4LN}{c} = 0{,}08$ с.

Задача 2. Период колебаний светового вектора $T = 2 \cdot 10^{-15}$ с. На какой длине l уложится $N = 5 \cdot 10^8$ длин волн соответствующего света?

Ответ: $l = cNt = 300$ м.

Задача 3. Вода освещена светом, для которого длина волны в воздухе $\lambda_1 = 0{,}6$ мкм. Чему равна длина волны λ_2 этого света в стекле с показателем преломления $n = 1{,}5$?

Ответ: $\lambda_2 = 0{,}4$ мкм.

Задача 4. Показатель преломления воды $n_1 = 1{,}33$, стекла – $n_2 = 1{,}5$. Как соотносятся толщины слоев воды и стекла h_1/h_2, если время распространения в них света, падающего нормально к их поверхностям, одинаково?

Ответ: $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{n_2}{n_1} = 1{,}13.$

Задача 5. На какое расстояние S распространится в воде световая волна с длиной волны в воздухе $\lambda = 0{,}5$ мкм за время, равное $N = 100$ периодов колебаний светового вектора? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: $S = \dfrac{N\lambda}{n} = 3{,}8 \cdot 10^{-5}$ м.

Задача 6. Скорость желтого света в воде $v_1 = 2{,}25 \cdot 10^5$ км/с, а его скорость в стекле $v_2 = 1{,}98$ км/с. Чему равен показатель преломления $n_{отн1}$ стекла относительно воды? Чему равен показатель преломления $n_{отн2}$ воды относительно стекла?

Ответ: $n_{отн1} = 1{,}14$, $n_{отн2} = 0{,}88$.

Задача 7. Два когерентных источника света расположены на расстоянии $r_1 = 7000$ мкм и $r_2 = 7002{,}25$ мкм от некоторой точки пространства. Каков будет результат интерференции световых волн в этой точке, если длина световой волны $\lambda = 500$ нм?

Ответ: минимум (ослабление света).

Задача 8. В некоторую точку пространства свет от двух когерентных источников приходит с разностью фаз $\Delta\alpha = 3\pi$ рад. Что будет наблюдаться в этой точке: усиление света или его ослабление?

Ответ: ослабление.

Задача 9. Два когерентных источника испускают монохроматический свет с частотой $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Расстояние от каждого источника света до экрана, $L = 1{,}5$ м, расстояние между источниками $d = 1$ мм. Найти расстояние x на экране между симметричными максимумами второго порядка ($k = 2$).

Ответ: $x = 2\dfrac{kcL}{\nu d} = 3$ мм.

Задача 10. На мыльную пленку, в которой скорость света $v = 2{,}25 \cdot 10^8$ м/с, падает белый свет под углом $\alpha = 60°$. При какой наименьшей толщине пленки h ее поверхность, рассматриваемая в проходящем свете, будет окрашена в зеленый цвет с длиной волны $\lambda = 500$ нм?

Ответ: $h = \dfrac{v\lambda}{2\sqrt{c^2 - v^2 \sin^2\alpha}} = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 11. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим на нее нормально. Диаметр третьего темного кольца (считая от нулевого центрального темного кольца) d = 9 мм. Найти длину волны λ падающего света. Радиус кривизны линзы R = 8,6 м. Наблюдение ведется в отраженном свете.

Ответ: $\lambda = \dfrac{d^2}{4kR} = 7{,}8 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 12. Чему равны площадь S третьей зоны Френеля (k = 3) и ее радиус R, если расстояние от отверстия, до которого дошел фронт световой волны, и до экрана r_0 = 2 м, а длина световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$м? Сколько зон Френеля N укладывается в этом отверстии, если его площадь $S_0 = 6{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^2?

Ответ: $S = 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ м^2, $R = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м, $N = \dfrac{S_0}{\pi r_0 \lambda} = 20$.

Задача 13. Расстояние на экране между двумя максимумами освещенности первого порядка x = 1,2 мм. Определить длину волны λ света, испускаемого когерентными источниками S_1 и S_2, если расстояние от источников до экрана L = 2 м, а расстояние между источниками d = 1 мм.

Ответ: $\lambda = \dfrac{xd}{2L} = 3 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 14. Определить угол дифракции φ лучей зеленого света (λ = 0,55 мкм), образующих максимум 2-го порядка (k = 2), если период решетки d = 0,002 мм. Найти угол дифракции φ_{max} лучей, образующих последний максимум.

Ответ: $\varphi = \arcsin\dfrac{k\lambda}{d} = 33°$, $\varphi_{max} = \arcsin\dfrac{3\lambda}{d} = 36°$.

Задача 15. Перпендикулярно поверхности дифракционной решетки падают параллельные лучи света от некоторого источника. Линия с $\lambda_1 = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м видна в спектре второго порядка (k_1 = 2) под некоторым углом φ. Какие еще спектральные линии будут видны под этим же углом (принять диапазон видимого света от $4 \cdot 10^{-7}$ м до $7 \cdot 10^{-7}$ м)?

Ответ: $\lambda_2 = \dfrac{k_1\lambda_1}{k_2} = 4{,}4 \cdot 10^{-7}$ м в спектре третьего порядка.

Задача 16. Дифракционная решетка содержит N = 120 штрихов на l = 1 мм ее длины. Найти длину волны λ монохроматического света, падающего на решетку, если угол между направлениями на максимумы первого порядка, расположенные по обе стороны от центрального, φ = 8°. Каково общее число m дифракционных максимумов, даваемых этой решеткой, при освещении ее светом с $\lambda_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-7}$ м?

Ответ: $\lambda = \dfrac{l\sin\frac{\varphi}{2}}{kN} = 5{,}8 \cdot 10^{-7}$ м, $m = \dfrac{2l}{N\lambda_1} + 1 = 23$.

Задача 17. На дифракционную решетку перпендикулярно ее плоскости падает свет. Угол дифракции в спектре 1-го порядка для линии с длиной волны $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-7}$ м составляет φ_1 = 30°. Некоторая линия наблюдается в спектре второго порядка (k_2 = 2) под углом дифракции $\varphi_2 = 45°$. Найти длину волны λ_2 для этой линии и число штрихов на единице длины решетки.

Ответ: $\lambda_2 = \dfrac{k_1 \sin\varphi_2}{k_2 \sin\varphi_1}\lambda_1 = 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ м, $\dfrac{N}{l} = \dfrac{\sin\varphi_1}{k_1\lambda_1} = 8{,}3 \cdot 10^{5}$ м$^{-1}$.

Задача 18. Дифракционная решетка содержит $N = 500$ штрихов на $l = 1$ мм ее длины. Максимум какого наибольшего порядка k_{max} дает эта решетка при перпендикулярном падении на нее монохроматического света с $\lambda = 5{,}2 \cdot 10^{-7}$ м?

Ответ: $k_{max} = \dfrac{l}{N\lambda} = 3$.

Задача 19. Сколько штрихов на длине $l = 4$ см имеет дифракционная решетка, для которой зеленая линия спектра ($\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц) в спектре первого порядка наблюдается под углом $\varphi = 20°$?

Ответ: $N = \dfrac{\nu l}{kc}\sin\varphi = 2{,}7 \cdot 10^{4}$.

Задача 20. Чему равен период дифракционной решетки d, если в спектре первого порядка она может разрешить линии с длинами волн $\lambda_1 = 4044$ Å и $\lambda_2 = 4046$ Å? Длина стороны решетки $l = 3$ см.

Ответ: $d = kl\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right) = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ м.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Геометрической, или лучевой, оптикой называют раздел оптики, в котором используют представления о световых лучах. Световым лучом называют воображаемую линию, вдоль которой распространяется энергия, переносимая световой волной.

В основе геометрической оптики лежат четыре закона: закон прямолинейности световых лучей, закон их независимости, закон отражения света и закон преломления света.

Закон прямолинейности световых лучей: в однородной и изотропной среде свет распространяется прямолинейно.

Закон независимости световых лучей: пересекаясь, световые лучи не возмущают друг друга, а продолжают распространяться в прежнем направлении.

Об остальных двух законах поговорим подробнее.

17. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Законы отражения:

1) луч падающий и луч отраженный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, проведенным в точку падения луча к отражающей поверхности (при этом лучи располагаются по разные стороны от перпендикуляра);

2) угол отражения β равен углу падения α (рис. 17-1).

Углом падения α называют угол между падающим лучом и перпендикуляром к отражающей поверхности, а углом отражения β – между отраженным лучом и этим перпендикуляром.

В задачах геометрической оптики почти всегда необходим чертеж. Действительные лучи изобразите прямой линией со стрелкой, указывающей ход луча (его направление), мнимые лучи и мнимые изображения предметов изображайте штриховой линией, а перпендикуляр к поверхности – точкой с тире.

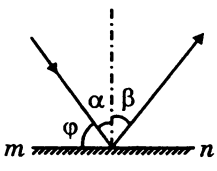


Рис. 17-1

Когда говорят: «луч падает на поверхность» или «падающий на поверхность под таким-то углом луч», то, как правило, имеют в виду угол падения α между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности, а не угол φ между падающим лучом и самой поверхностью (рис. 17-1). Если сказано, что луч отразился от поверхности под углом таким-то, то это угол отражения β, а не угол между отраженным лучом и поверхностью. И только если сказано «угол между лучом и поверхностью», то это угол φ на рис. 17-1. Если луч падает нормально к поверхности, т. е. перпендикулярно к ней, то угол падения α равен нулю, поэтому и угол отражения β равен нулю, т. е. луч отразится сам по себе в обратном направлении.

Иногда в условиях задач встречается термин «высота Солнца над горизонтом». Запомните: высота Солнца – это не высота его над землей (там 150 млн км), а угол φ между солнечным лучом и горизонтом (рис. 17-1).

Если на поверхность падает пучок параллельных лучей, испущенных точечным источником света, то это означает, что сам источник находится в бесконечности, только в этом случае его лучи будут параллельны друг другу. Если такие лучи падают на зеркало или линзу, то расстояние d между источником света и зеркалом или линзой равно бесконечности ($d = \infty$ и $\frac{1}{d} = 0$).

При решении задач на сферические зеркала изобразите дугой зеркальную поверхность и прикиньте, где расположен центр окружности, частью которой является эта дуга (рис. 17-2, *в*). Этот центр является главным оптическим центром зеркала O, а фокус

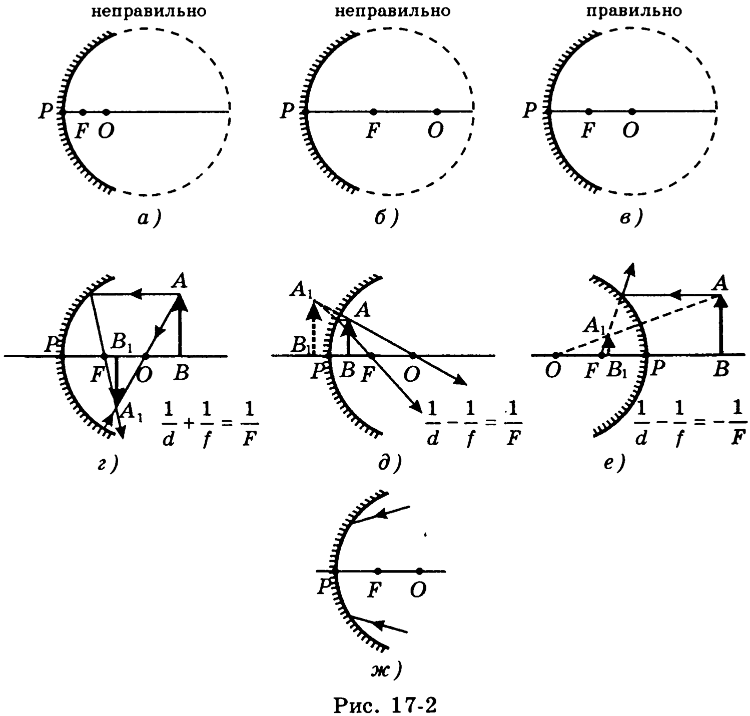


Рис. 17-2

зеркала F делит пополам расстояние между центром O и полюсом зеркала P. Луч, падающий на зеркало через его главный оптический центр, отражается сам по себе в обратном направлении, а луч, падающий на зеркало через фокус, отражается параллельно его главной оптической оси PO. Световые лучи обратимы, поэтому луч, падающий на зеркало параллельно главной оптической оси, после отражения пойдет через его фокус F.

Если вы неверно расположите центр дуги, изображающей зеркало (слишком близко к нему или слишком далеко, как на рис. 17-2, *а* и *б*, то вы не сможете правильно построить изображение предмета.

Непременно надо помнить, какое и где получается изображение, когда оно увеличенное, а когда уменьшенное. Не надо надеяться, что вы это определите построением. Стоит слегка изменить ход луча, неправильно указать положение оптического центра O или фокуса зеркала F, и вместо увеличенного изображения вы получите уменьшенное, или наоборот.

Следует знать, что если предмет AB находится за главным оптическим центром O, то изображение A_1B_1, даваемое вогнутым зеркалом, будет действительным, уменьшенным и обратным (рис. 17-2, г) и будет располагаться между фокусом F и оптическим центром зеркала O.

Если предмет AB поместить в оптический центр O, то его изображение A_1B_1 тоже окажется там же и будет действительным, обратным (перевернутым) и равным по размеру самому предмету.

Если предмет AB поместить между фокусом F и оптическим центром O, то изображение A_1B_1 в силу обратимости лучей будет действительным, обратным, увеличенным и расположится за оптическим центром.

Если предмет AB поместить в фокус зеркала, то изображение A_1B_1 уйдет в бесконечность.

Если предмет AB поместить между зеркалом и фокусом, то изображение A_1B_1 будет мнимым, уменьшенным и прямым (рис. 17-2, *д*).

Во всех этих случаях зеркало было вогнутым. Вогнутое зеркало называют собирающим, так как оно собирает падающие на него параллельные лучи после отражения в одной точке.

Если в задаче не сказано, каким является сферическое зеркало, значит, оно собирающее.

Формула сферического зеркала

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{2}{R} \quad \text{или} \quad \pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F}.$$

Здесь – d – расстояние от предмета до зеркала, f – расстояние от зеркала до изображения, $R = 2F$ – радиус зеркала, F – фокусное расстояние зеркала.

Если изображение действительное, перед $\frac{1}{f}$ ставят «плюс», а если мнимое, то – «минус». Если зеркало вогнутое, то перед $\frac{1}{F}\left(\text{или}\,\frac{2}{R}\right)$ ставят «плюс», а если выпуклое, то – «минус», так как его фокус мнимый. Перед $\frac{1}{d}$ тоже может стоять «минус». Его ставят, когда лучи падают на зеркало сходящимся пучком (рис. 17-2, *ж*). Увеличение (уменьшение) изображения $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d}$, где H – размер изображения, h – размер предмета.

Решение отдельных задач

Задача 1

Под каким углом α должен упасть луч на плоское зеркало, чтобы угол между отраженным лучом и поверхностью зеркала был $\varphi = 30°$ (рис. 17-3).

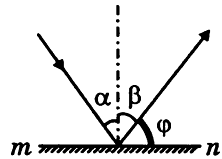


Рис. 17-3

Дано:
$\varphi = 30°$

α – ?

Решение. Из рис. 17-3 следует, что угол отражения
$\beta = 90° - \varphi$.
По закону отражения $\alpha = \beta$, значит,
$\alpha = 90° - \varphi$.
Вычислим α: $\alpha = 90° - 30° = 60°$.
Ответ: $\alpha = 60°$.

Задача 2

На плоское горизонтально расположенное зеркало ab падает луч mn. Перпендикулярно зеркалу ab расположено зеркало ac (рис. 17-4). Луч mn отражается от зеркала ab и падает на зеркало ac (луч np), после чего еще раз отражается уже от зеркала ac. Доказать, что отраженный луч pq параллелен падающему лучу mn.

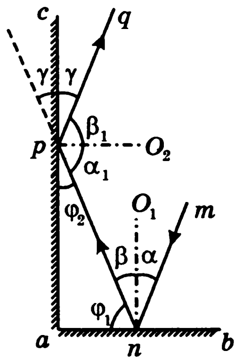


Рис. 17-4

Решение. Если нам удастся доказать, что сумма углов $\alpha + \beta + \alpha_1 + \beta_1 = 180°$ или, поскольку $\alpha = \beta$ и $\alpha_1 = \beta_1$, что $\alpha + \alpha_1 = 90°$, то задача будет решена. Ведь сумма односторонних углов $2\alpha + 2\alpha_1 = 180°$ (см. рис. 17-4), если mn и pq – параллельные прямые.

Из рис. 17-4 следует, что $\alpha_1 = \varphi_1$ как накрест лежащие углы при параллельных pO_2 и ab и секущей np. По этой же причине $\varphi_2 = \beta = \alpha$, так как это тоже накрест лежащие углы при параллельных O_1n и ap и секущей np. Но $\varphi_1 = 90° - \beta$ или $\varphi_1 = 90° - \alpha$, ведь $\alpha = \beta$. Кроме того, $\varphi_2 =$

$= 90° - \alpha_1$. В прямоугольном треугольнике *pan* сумма острых углов $\varphi_1 + \varphi_2 = 90°$. Значит, с учетом предыдущих равенств $90° - \alpha + 90° - \alpha_1 = 90°$, откуда $\alpha + \alpha_1 = 90°$, следовательно, лучи *mn* и *pq* параллельны.

Задача решена.

Задача 3

Угловая высота Солнца над горизонтом $\varphi_1 = 40°$. Под каким углом φ_2 к горизонту надо расположить плоское зеркало, чтобы отраженный луч направить вертикально вверх?

Дано:
$\varphi_1 = 40°$

φ_2 – ?

Решение. Выполним чертеж (рис. 17-5). Для этого проведем горизонтальную линию *mn* и построим под углом φ_1 к ней падающий луч, ведь высота Солнца над горизонтом φ_1 – это угол между солнечным лучом и горизонтальной линией. Затем из точки падения луча направим вертикально вверх отраженный луч. Поскольку угол падения и угол отражения равны, разделим угол между падающим и отраженным лучами биссектрисой *cd* пополам. Эта биссектриса должна стать перпендикуляром к зеркалу *ab*, отразившему солнечный луч, поэтому дорисуем зеркало *ab* под углом 90° к перпендикуляру *cd*.

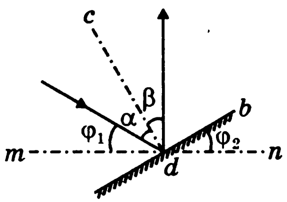


Рис. 17-5

Нам требуется найти угол φ_2 между зеркалом и горизонтальной линией. Обратим внимание на то, что угол φ_2 равен углу отражения β как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. А сумма углов $\varphi_1 + \alpha + \beta = 90°$ или, поскольку $\beta = \alpha = \varphi_2$, $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_2 = 90°$, откуда

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{90° - \varphi_1}{2}}$$

Произведем вычисления: $\varphi_2 = \dfrac{90° - 40°}{2} = 25°$.

Ответ: $\varphi_2 = 25°$.

Задача 4

Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$. Наблюдатель, стоя на берегу, видит изображение Солнца в воде. Наклонившись, он понижает уровень глаз на $h = 10$ см. На какое расстояние S приблизится при этом изображение Солнца к берегу?

Дано:	
$\varphi = 30°$	
$h = 10$ см	
S – ?	

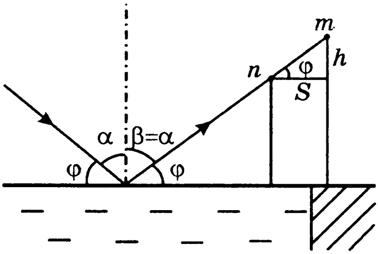


Рис. 17-6

Решение. Обратимся к рис. 17-6. Пусть солнечный луч, отразившись от воды, попадает в глаз наблюдателя в точке m. Когда он наклоняется и понижает уровень глаз на h, изображение Солнца становится к нему ближе на S, что равносильно приближению самого наблюдателя на S к изображению Солнца при неизменной угловой высоте Солнца φ. Из рис. 17-6 следует, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{S}$, откуда

$$\boxed{S = \frac{h}{\operatorname{tg}\varphi}}$$

Произведем вычисления:

$$S = \frac{10}{\operatorname{tg} 30°}\ \text{см} = 17{,}3\ \text{см}.$$

Ответ: $S = 17{,}3$ см.

Задача 5

Матовый светильник диаметром $D = 40$ см расположен на расстоянии $H = 2$ м от его центра до пола (рис. 17-7). Под светильником находится мяч диаметром $d = 10$ см. Расстояние между центром мяча и полом $h = 20$ см. Найти радиус R тени с полутенью на полу и радиус полной тени r.

Дано:
$D = 40$ см
$H = 2$ м
$d = 10$ см
$h = 20$ см
R – ?
r – ?

Решение. Полная тень на полу будет иметь форму круга радиусом r, а полутень – форму кольца радиусом $R - r$ (см. рис. 17-7). Радиус тени с полутенью R – это отрезок cp, который является катетом в прямоугольном треугольнике Ocp. Другим катетом в этом треугольнике служит отрезок $Op = x_1 + h$, где $x_1 = OO_2$.

Треугольник aOO_2 подобен треугольнику O_1nO как прямоугольные треугольники с равными вер-

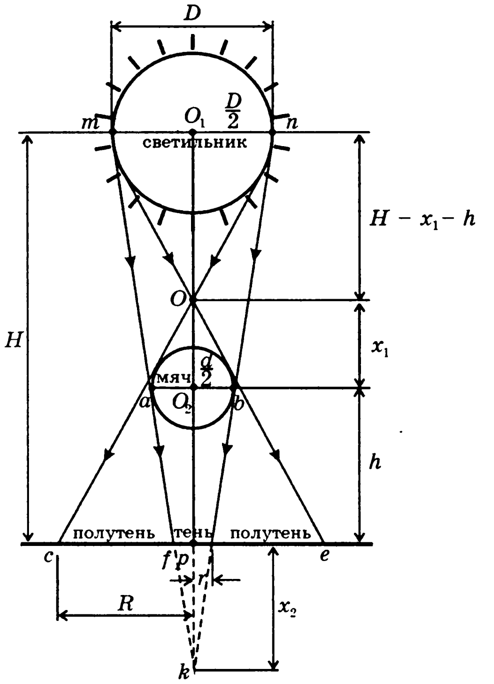


Рис. 17-7

тикальными углами при точке O. Из их подобия следует пропорциональность сторон:

$$\frac{D \cdot 2}{2 \cdot d} = \frac{H - x_1 - h}{x_1},$$

$$\frac{D}{d} = \frac{H - x_1 - h}{x_1}. \quad (1)$$

Теперь рассмотрим еще два подобных треугольника OaO_2 и Ocp. Они подобны потому, что являются прямоугольными и имеют общий угол при точке O. Из их подобия следует пропорциональность сторон:

$$\frac{d}{2R} = \frac{x_1}{x_1 + h}. \quad (2)$$

Мы получили два уравнений (1) и (2) с двумя неизвестными x_1 и R. Выразим из (1) отрезок x_1 через известные D, d, H и h, а затем подставим его значение в (2), после чего из полученного уравнения определим искомый радиус тени с полутенью R:

$$x_1 D = dH - x_1 d - dh, \text{ откуда } x_1 = \frac{d(H - h)}{d + D}. \quad (3)$$

Подставляем (3) в (2): $$\frac{d}{2R} = \frac{d(H - h)}{(d + D)\left(\frac{d(H - h)}{d + D} + h\right)},$$

$$\frac{1}{2R} = \frac{H - h}{d(H - h) + h(d + D)},$$

откуда $$R = \frac{dH - dh + dh + Dh}{2(H - h)}, \quad \boxed{R = \frac{dH + Dh}{2(H - h)}}$$

Для определения радиуса полной тени r рассмотрим два подобных треугольника aO_2k и fpk (для этого мы сделали дополнительное построения, проведя вспомогательные штриховые линии). Из их подобия следует:

$$\frac{d}{2r} = \frac{h + x_2}{x_2}. \qquad (4)$$

Поскольку в выражении (4) имеются две неизвестные величины r и x_2, то запишем еще одно уравнение, в которое они войдут. Для этого рассмотрим еще два подобных треугольника: mO_1k и fpk. Из их подобия следует, что

$$\frac{D}{2r} = \frac{H + x_2}{x_2}. \qquad (5)$$

Выразим из (4) неизвестный и ненужный нам для решения отрезок x_2 и подставим его в (5):

$$dx_2 = 2rh + 2rx_2, \quad \text{откуда} \quad x_2 = \frac{2rh}{d - 2r}. \qquad (6)$$

Теперь подставим (6) в (5), откуда найдем радиус полной тени r:

$$\frac{D}{2r} = \frac{\left(H + \dfrac{2rh}{d - 2h}\right)(d - 2r)}{2rh}, \quad Dh = H(d - 2r) + 2rh,$$

$$Dh = dH - 2rH + 2rh, \quad \text{откуда} \quad \boxed{r = \frac{dH - Dh}{2(H - h)}}$$

Переведем все единицы в СИ:

40 см = 0,4 м, 10 см = 0,1 м, 20 см = 0,2 м.

Произведем вычисления:

$$R = \frac{0{,}1 \cdot 2 + 0{,}4 \cdot 0{,}2}{2(2 - 0{,}2)} \text{ м} = 0{,}08 \text{ м},$$

$$r = \frac{0{,}1 \cdot 2 - 0{,}4 \cdot 0{,}2}{2(2 - 0{,}2)} \text{ м} = 0{,}03 \text{ м}.$$

Примечание: если потребуется определить ширину Δx кольцевой полутени cf, то надо вычесть из радиуса R радиус полной тени r:

$\Delta x = R - r = 0{,}05$ м.

Ответ: $R = 0{,}08$ м, $r = 0{,}03$ м.

Задача 6

Наблюдатель ростом $h = 1{,}8$ м идет к уличному фонарю со скоростью $v = 0{,}8$ м/с. В некоторый момент времени длина его тени $l_1 = 1{,}5$ м, а через $t = 3$ с она стала $l_2 = 1$ м. На какой высоте H над тротуаром подвешен фонарь?

Дано:
$h = 1{,}8$ м
$v = 0{,}8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
$l_1 = 1{,}5$ м
$t = 3$ с
$l_2 = 1$ м

H – ?

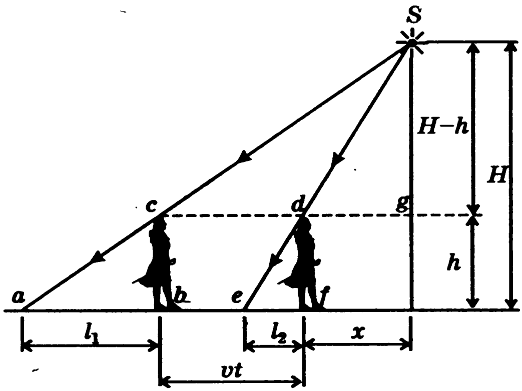


Рис. 17-8

Решение. Выполним чертеж (рис. 17-8), на котором обозначим высоту человека h, высоту H фонаря S над тротуаром, длины теней l_1 и l_2, путь, пройденный наблюдателем за время t, равный vt, и расстояние от второго положения наблюдателя до точки под фонарем x.

Из подобия треугольников abc и cgS следует:

$$\frac{H-h}{h} = \frac{vt + x}{l_1}. \tag{1}$$

Из подобия треугольников efd и dgS следует:

$$\frac{H-h}{h} = \frac{x}{l_2}, \text{ откуда } x = \frac{l_2(H-h)}{h}. \tag{2}$$

Подставим (2) в (1) и из полученного выражения найдем H:

$$\frac{H-h}{h} = \frac{vt + \dfrac{l_2(H-h)}{h}}{l_1}, \quad \frac{H-h}{h} = \frac{vt}{l_1} + \frac{l_2(H-h)}{l_1 h},$$

$$\frac{H-h}{h} - \frac{l_2(H-h)}{l_1 h} = \frac{vt}{l_1}, \quad \frac{H-h}{h}\left(1 - \frac{l_2}{l_1}\right) = \frac{vt}{l_1},$$

$$\frac{H-h}{h} \cdot \frac{l_1 - l_2}{l_1} = \frac{vt}{l_1}, \text{ откуда}$$

$$H = \frac{hvt}{l_1 - l_2} + h \quad \text{или} \quad \boxed{H = h\left(\frac{vt}{l_1 - l_2} + 1\right)}$$

Произведем вычисления:

$$H = 1{,}8\left(\frac{0{,}8 \cdot 3}{1{,}5 - 1} + 1\right) \text{ м} = 10{,}4 \text{ м}.$$

Ответ: H = 10,4 м.

Задача 7

Над озером на высоте H = 80 м завис вертолет (рис. 17-9). С башни высотой h он виден под углом φ_1 = 30°, а его изображение в озере видно под углом φ_2 = 60° к горизонту. Какова высота башни h?

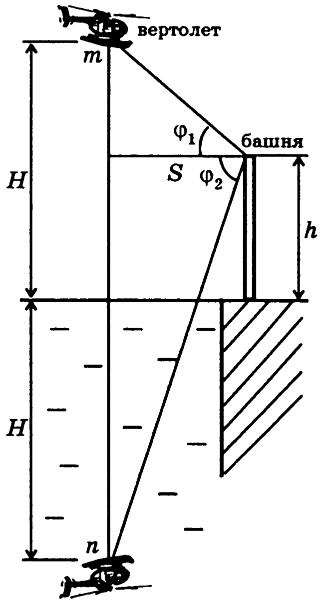


Рис. 17-9

Дано:	
H = 80 м	
φ_1 = 30°	
φ_2 = 60°	
h – ?	

Решение. Изображение вертолета расположено на таком же расстоянии H от поверхности воды, которая здесь служит плоским зеркалом, как и сам вертолет. Из рис. 17-9 следует, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{H-h}{S}$ и $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{H+h}{S}$, где S – расстояние от вершины башни до прямой mn. Чтобы исключить это неизвестное расстояние, разделим эти равенства друг на друга:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{(H-h)S}{S(H+h)}, \quad \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{H-h}{H+h}.$$

Отсюда найдем искомое расстояние h:

$H \operatorname{tg}\varphi_1 + h \operatorname{tg}\varphi_1 = H \operatorname{tg}\varphi_2 - h \operatorname{tg}\varphi_2$, откуда

$$h = \frac{H(\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1)}{\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

Упростим полученное выражение. Поскольку

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} \text{ и } \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}, \text{ то } h = H\,\frac{\dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} - \dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}{\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} + \dfrac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}}$$

или $$\boxed{h = H\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

Произведем вычисления:

$$h = 80\frac{\sin(60° - 30°)}{\sin(60° + 30°)}\ \text{м} = 40\ \text{м}.$$

Ответ: h = 40 м.

Задача 8

Плоское зеркало ab вращается с угловой скоростью ω вокруг точки a (рис. 17-10). С какой скоростью v движется изображение точки S, отстоящей от точки b на расстояние l?

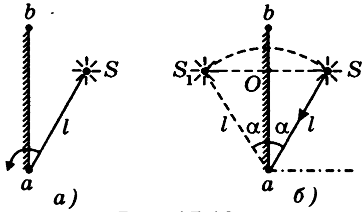


Рис. 17-10

Дано:
ω
l
v – ?

Решение. При вращении зеркала вокруг точки a изображение S_1 точки S будет двигаться по окружности радиусом l. Поскольку треугольники aSO и aOS_1 (рис. 7-10, б) равны как прямоугольные треугольники с равными катетами SO и OS_1 и общим катетом aO, то их острые углы при точке a равны α. Значит, если угол SaS_1 вдвое больше угла SaO и если зеркало повернется за время t на некоторый угол $\varphi = \omega t$, то радиус aS_1 за это же время повернется на вдвое больший угол $\varphi_1 = 2\omega t$. Линейная скорость v изображения S_1 источника света S связана с его угловой скоростью 2ω формулой

$$\boxed{v = 2\omega l}$$

Задача решена.

Ответ: $v = 2\omega l$.

Задача 9

Луч света падает на горизонтальную поверхность стола ab под углом α (рис. 17-11). Под каким углом φ к поверхности стола нужно расположить плоское зеркало, чтобы отраженный от него луч стал параллельным поверхности стола?

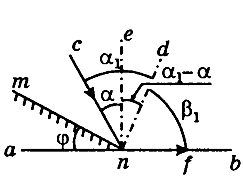


Рис. 17-11

Дано:
α
φ – ?

Решение. Понятно, что без чертежа эту задачу тоже не решить, как, впрочем, и любую другую задачу геометрической оптики (за редким исключением, которое только подтверждает это правило). Выполняя чертеж, здесь надо сообразить две вещи: а) что направление падающего луча не изменится оттого, что мы поднесем к столу зеркало; б) что отраженный от зеркала луч может пойти параллельно поверхности стола влево и вправо в зависимости от того, как мы поднесем к столу зеркало, и при этом углы между зеркалом и столом будут разными, поэтому задача имеет два решения.

Итак, выполним сначала чертеж (рис. 17-11).

Здесь на чертеже ab – поверхность стола, mn – плоское зеркало, поднесенное к нему под искомым углом φ, cn – падающий луч (понятно, что это только часть падающего луча, а сам он исходит из некоторого источника, который на рисунке не обозначен), en – перпендикуляр, опущенный в точку падения n луча cn к поверхности стола, dn – перпендикуляр, опущенный к поверхности зеркала mn в точке n, nf – отраженный луч (точнее его часть), α_1 – угол падения луча cn на зеркало mn, β_1 – угол отражения луча nf от зеркала, α – угол падения луча cn на поверхность стола ab, φ – угол между зеркалом mn и поверхностью стола. Теперь, после того как чертеж выполнен, решить эту задачу уже несложно. Анализируя рис. 17-11, можно заметить, что сторона mn угла φ перпендикулярна стороне dn угла end, а сторона an угла φ перпендикулярна стороне en угла end. Значит, угол φ равен углу end как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Далее. Из чертежа следует, что угол end равен $\alpha_1 - \alpha$. Значит, и $\varphi = \alpha_1 - \alpha$. Но угол

$$\alpha_1 - \alpha = 90° - \beta_1,$$

где угол отражения β_1 по закону отражения равен углу падения α_1, поэтому

$$\alpha_1 - \alpha = 90° - \alpha_1,$$

откуда $2\alpha_1 = 90° + \alpha$ и $\alpha_1 = 45° + 0{,}5\alpha$,
тогда $\varphi = \alpha_1 - \alpha = 45° + 0{,}5\alpha - \alpha$, $\boxed{\varphi = 45° - 0{,}5\alpha}$

Задача решена.

Ответ: $\varphi = 45° - 0{,}5\alpha$.

Задача 10

Какой должна быть наименьшая высота h вертикального зеркала mn, чтобы человек мог видеть свое изображение во весь свой рост H, не меняя положения головы?

Дано:
H

h – ?

Решение. Пусть верхний край зеркала расположен на уровне глаз человека (рис. 17-12, расстоянием между его макушкой и глазами можно пренебречь). Чтобы он мог увидеть свой ботинок, надо, чтобы луч света, отраженный от носка бо-

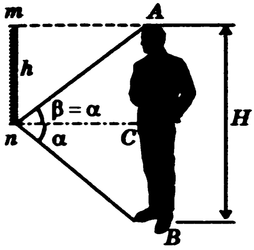


Рис. 17-12

тинка, упал на нижний край зеркала n и, отразившись от него, пошел в глаз человека. Если зеркало будет меньше mn, то на нижний край зеркала попадут лучи от точек выше ботинка и он не будет виден.

По закону отражения $\alpha = \beta$. Мы имеем два прямоугольных треугольника AnC и CnB с равными острыми углами при точке n и общим катетом nC. Значит, эти треугольники равны, поэтому сторона $AC = h$ равна CB. А поскольку $H = AC + CB$, то $H = 2h$, откуда $h = 0{,}5H$.

Ответ: $h = 0{,}5H$.

Задача 11

В комнате длиной L и высотой H висит на стене плоское зеркало. Человек смотрит в зеркало, находясь на расстоянии l от стены, на которой оно висит. Какой должна быть минимальная высота h зеркала, чтобы он мог увидеть в нем изображение стены, которая находится у него за спиной, во всю ее высоту?

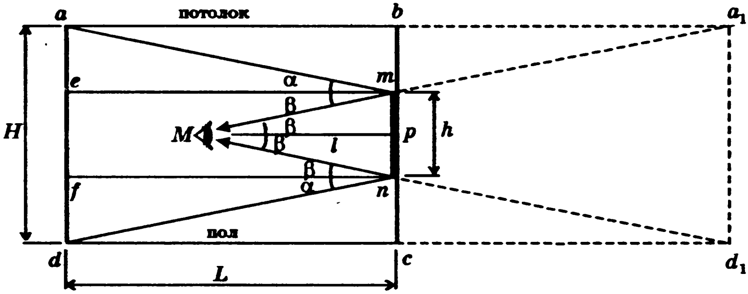


Рис. 17-13

Дано:
L
H
l

h – ?

Решение. Чтобы решить эту задачу, необходимо выполнить чертеж, без него ничего не выйдет. Изобразим комнату $abcd$ и зеркало mn на стенке (рис. 17-13). Будем считать, что зеркало висит посередине стены, т. е. на одинаковом расстоянии от пола и потолка. Правда, нам об этом ничего не сказано, но такое допущение вполне правомерно. Если же мы его не сделаем, то значительно усложним решение, хотя ответ будет тот же.

Пусть глаз наблюдателя находится в точке M. Чтобы наблюдатель мог видеть изображение a_1d_1 стены ad во всю ее высоту, нужно, чтобы луч, идущий из точки a, отразившись от верхнего края m зеркала mn, попал в глаз наблюдателя, а также, чтобы луч, идущий от точки d, после отражения от нижнего края n зеркала mn, тоже попал в глаз наблюдателя, расположенный в точке M. При этом нужно помнить, что угол падения луча на зеркало α равен углу его отражения β. Если зеркало расположено симметрично относительно пола и потолка, то эти углы для лучей am и dn одинаковы. Отрезки em и fn на рисунке – это перпендикуляры, проведенные к зеркалу в точки падения лучей am и dn на него.

В результате построения мы получим подобные треугольники ame и mMp (они подобны потому, что у них углы при точках e и p прямые, а углы emM и mMp равны как накрест лежащие при параллельных em и Mp и секущей Mm). Из подобия треугольников ame и mMp вытекает пропорциональность сторон, лежащих против равных углов: $\dfrac{ae}{em} = \dfrac{mp}{Mp}$, где $ae = \dfrac{H-h}{2}$, $em = L$, $mp = \dfrac{h}{2}$ и $Mp = l$.

С учетом этого $\dfrac{H-h}{2L} = \dfrac{h}{2l}$ или $\dfrac{H-h}{L} = \dfrac{h}{l}$.

Отсюда несложно отыскать искомую высоту зеркала h. Выполним простые алгебраические преобразования и найдем ее: $Hl - hl = hL$, откуда $\boxed{h = \dfrac{Hl}{l+L}}$

Задача решена.

Ответ: $h = \dfrac{Hl}{l+L}$.

Задача 12

Из какой области пространства глаз наблюдателя сможет одновременно увидеть изображения точек M и N (рис. 17-14) в плоском зеркале mn?

Решение. Чтобы увидеть изображение точки в плоском зеркале, нужно, чтобы два луча, испущенные этой светящейся точкой, после отражения от разных точек зеркала попали в глаз наблюдателя. Точка, в которой пересекутся мнимые продолжения этих лучей, и будет мнимым изображением светящейся точки.

Построим вначале изображение точки M. Для этого проведем из точки M луч Mm на крайнюю верхнюю точку m зеркала mn. Опустив в эту точку к зеркалу перпендикуляр ma, покажем угол падения этого луча α_1. Затем

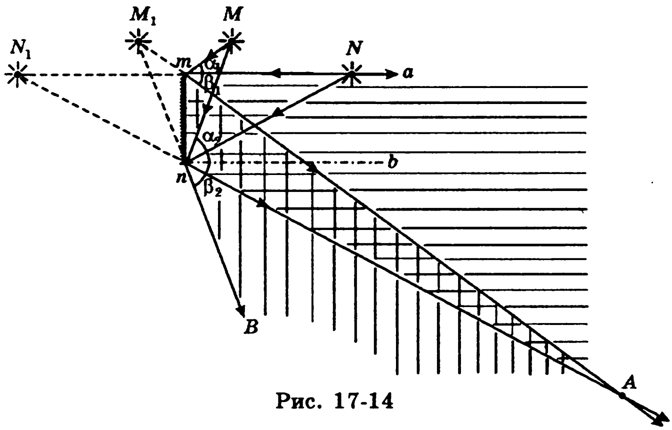


Рис. 17-14

построим под таким же углом $\beta_1 = \alpha_1$ отраженный луч mA и проведем его мнимое продолжение (штриховой линией) M_1m. После этого опустим из точки M второй луч Mn на нижний край n зеркала mn под углом α_2 и точно так же построим его мнимое продолжение M_1n. Точка M_1, в которой пересекутся эти мнимые продолжения, и будет мнимым изображением точки M. Это изображение можно будет увидеть, расположив глаз наблюдателя в заштрихованной вертикальными линиями области пространства между расходящимися отраженными лучами mA и nB.

Аналогичным образом построим изображение N_1 точки N. Оно так же, как и точка N, будет лежать на перпендикуляре ma к зеркалу mn. Заштрихуем область пространства между отраженными лучами ma и nA, которые были испущены светящейся точкой N, горизонтальными линиями. Из этой области пространства глаз наблюдателя будет видеть изображение N_1 точки N. А одновременно оба изображения M_1 и N_1 глаз наблюдателя сможет увидеть из области mAn, заштрихованной одновременно и горизонтально, и вертикально.

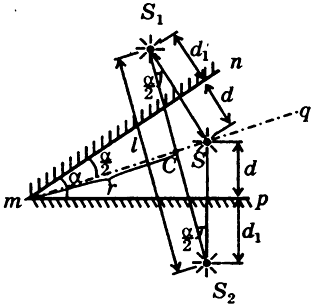


Рис. 17-15

Задача 13

Светящаяся точка S расположена на расстоянии $r = 12$ см от линии пересечения двух плоских зеркал mn и mp, расположенных под углом $\alpha = 30°$ друг к другу, на биссектрисе mq этого угла (рис. 17-15). На каком расстоянии l находятся друг от друга два первых изображения S_1 и S_2 этой точки?

Дано:
$r = 12$ см
$\alpha = 30°$
l – ?

Решение. Чтобы решить эту задачу, нужно знать, что плоское зеркало дает мнимое изображение, расположенное от зеркала на таком же расстоянии, что и сам предмет. Поэтому расстояние d от источника света S до зеркала mn равно расстоянию d_1, от мнимого изображения S_1 этого источника до этого же зеркала:

$$d = d_1.$$

То же самое можно сказать об изображении S_2 источника S в зеркале mp. Кроме того, расстояния d от источника S до зеркал mn и mp одинаковы, так как источник света S лежит на биссектрисе угла nmp. Одинаковы также и расстояния от мнимых изображений S_1 и S_2 источника S до биссектрисы mq. Отметим также, что в силу симметрии изображений S_1 и S_2 относительно биссектрисы mq отрезок S_1S_2 будет перпендикулярен биссектрисе mq. Поэтому угол nmq и угол при точке S_1 равны друг другу как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. А так как биссектриса mq делит угол $nmp = \alpha$ пополам, значит, углы при точках S_1 и S_2 , равные углу nmq, равны $\frac{\alpha}{2}$. Тогда отрезок S_1C как катет в прямоугольном треугольнике SS_1C с гипотенузой $d_1 + d = 2d$ составит

$$S_1C = 2d \cos \frac{\alpha}{2}.$$

В свою очередь отрезок d как катет в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $mS = r$ и противолежащим ему углом $\frac{\alpha}{2}$ составит

$$d = r \sin\frac{\alpha}{2}.$$

С учетом этого $S_1C = 2\ r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = r \sin \alpha$, так как $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$.

Поскольку искомое расстояние $l = S_1S_2$ равно удвоенной длине отрезка S_1C, то $\boxed{l = 2\ r \sin \alpha}$

Произведем вычисления:

$l = 2 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 12$ см.

Ответ: $l = 12$ см.

Задача 14

Угол между двумя плоскими зеркалами можно изменять, вращая одно из зеркал вокруг ребра угла (рис. 17-16, *а*) с постоянной угловой скоростью ω. Точечный источник света S расположен на перпендикуляре SA к неподвижному зеркалу mA на расстоянии h от него. Через какое время t расстояние между изображениями S_1 и S_2 источника света S в зеркалах mA и An будет равно l?

Дано:
ω
h
l

t – ?

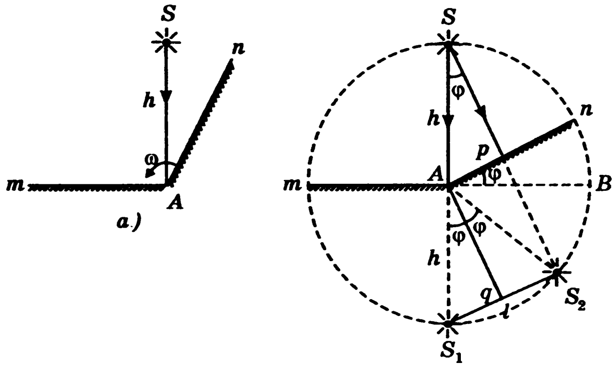


Рис. 17-16

Решение. При решении подобных задач на вращающиеся зеркала следует знать, что все изображения источника S в подвижном зеркале An при его вращении будут все время располагаться на таком же расстоянии от точки A, что и изображение S_1 в зеркале mA, а также на таком же расстоянии от этой точки, что и сам источник S. Иными словами, все эти изображения будут располагаться на окружности радиусом h с центром в точке A (рис. 7-16, б).

При выполнении чертежа необходимо также учесть, что расстояние Sp от источника света S до зеркала An будет все время равно расстоянию pS_2 от мнимого изображения S_2 этого источника в этом же зеркале до самого зеркала An.

Пусть до начала вращения угол между зеркалами mA и An был развернутым, т. е. равным 180°, а за время t от начала вращения зеркало An повернулось на угол φ, вращаясь равномерно с угловой скоростью ω.

По определению эта угловая скорость ω равна отношению угла поворота зеркала φ ко времени поворота t:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \text{ откуда } \varphi = \omega t.$$

Теперь заметим, что углы pSA и nAB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (действительно, отрезок Sp перпендикулярен зеркалу An по построению, ведь это кратчайшее расстояние от источника S до зеркала An, а отрезок SA перпендикулярен зеркалу mA по той же причине). Значит, угол при точке S тоже равен φ.

Теперь обратим внимание на то, что в равнобедренном треугольнике S_1AS_2 с равными сторонами $S_1A = S_2A = h$ отрезок Aq является одновременно биссектрисой, медианой и высотой, и значит, известное нам расстояние $S_1S_2 = l$ вдвое больше катета S_1q в прямоугольном треугольнике AS_1q, т. е.

$$S_1q = \frac{l}{2}.$$

Очевидно, что угол S_1Aq в этом прямоугольном треугольнике тоже равен φ, так как треугольник S_1Aq равен треугольнику ASp, поскольку эти прямоугольные треугольники имеют равные гипотенузы $SA = S_1A = h$. Тогда из треугольника S_1Aq следует, что

$$S_1q = \frac{l}{2} = h \sin \varphi, \text{ где } \varphi = \omega t, \text{ поэтому } \frac{l}{2} = h \sin \omega t.$$

Отсюда $\sin \omega t = \dfrac{l}{2h}$ и $\omega t = \arcsin\left(\dfrac{l}{2h}\right)$, откуда

$$\boxed{t = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{l}{2h}\right)}$$

Задача решена.

Ответ: $t = \dfrac{1}{\omega} \arcsin\left(\dfrac{l}{2h}\right)$.

Задача 15

Два плоских зеркала расположены под углом друг к другу. Точечный источник света поместили между ними и в результате получили $N = 11$ изображений этого источника в зеркалах. Чему равен угол φ между зеркалами?

Дано:
$N = 11$
φ – ?

Решение. Если построить все изображения, то чертеж получится чрезмерно усложненным, поэтому мы не станем здесь его вычерчивать, а ограничимся напоминанием основных правил построения изображения в таких зеркалах:

а) изображение точечного источника света в плоском зеркале мнимое;

б) оно располагается на таком же расстоянии от зеркала, что и сам предмет;

в) изображение предмета является прямым и равным по размерам самому предмету;

г) изображение, даваемое одним из зеркал, расположенных под углом друг к другу, является предметом для второго зеркала, а изображение, даваемое вторым зеркалом, – предметом для первого зеркала, и т. д.

Если два плоских зеркала расположены под углом φ друг к другу, то число изображений N предмета, помещенного между ними, определяет формула

$$N = \frac{360°}{\varphi} - 1.$$

Из этой формулы несложно отыскать искомый угол φ между зеркалами, поскольку число изображений N нам известно из условия задачи:

$$\frac{360°}{\varphi} = N + 1, \text{ откуда } \boxed{\varphi = \frac{360°}{N+1}}$$

Задача решена. Произведем вычисления:

$$\varphi = \frac{360°}{11+1} = 30°.$$

Ответ: $\varphi = 30°$.

Задача 16

Предмет расположен на расстоянии $d = 15$ см от вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 20$ см. Чему равно увеличение зеркала Г?

Дано:	
$d = 15$ см	
$R = 20$ см	
Г – ?	

Решение. Согласно условию задачи предмет AB помещен между фокусом зеркала и его оптическим центром, ведь фокусное расстояние зеркала $F = \frac{R}{2} = 10$ см, а его оптический центр O располагается на расстоянии $R = 20$ см от полюса P (рис. 17-17).

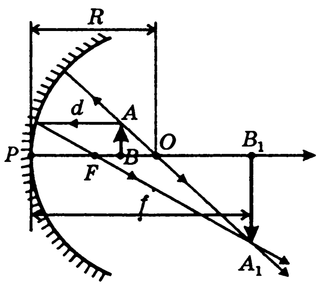


Рис. 17-17

Следовательно, изображение предмета A_1B_1 «уйдет» за оптический центр и будет действительным, обратным и увеличенным.

Увеличение Г сферического зеркала определим по формуле

$$\Gamma = \frac{f}{d}, \qquad (1)$$

где f – расстояние от зеркала до изображения A_1B_1. Его мы определим из формулы сферического зеркала

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}, \text{ откуда } \frac{1}{f} = \frac{2}{R} - \frac{1}{d} = \frac{2d - R}{dR} \text{ и}$$

$$f = \frac{dR}{2d - R}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $\Gamma = \dfrac{dR}{d(2d - R)}$, $\boxed{\Gamma = \dfrac{R}{2d - R}}$

Произведем вычисления: $\Gamma = \dfrac{20}{2 \cdot 15 - 20} = 2.$

Ответ: $\Gamma = 2$.

Задача 17

Расстояние между предметом и его изображением в выпуклом зеркале $l = 20$ см, а уменьшение изображения $\Gamma = 0,5$. Чему равны фокусное расстояние F и радиус кривизны R?

Дано:	
$l = 20$ см	
$\Gamma = 0,5$	
F – ?	
R – ?	

Решение. Построим изображение A_1B_1 предмета AB в выпуклом зеркале (рис. 17-18). Оно будет мнимым, прямым и уменьшенным. Его уменьшение

$$\Gamma = \frac{f}{d}, \qquad (1)$$

где d – расстояние от предмета до зеркала, а f – от зеркала до изображения. Из рис. 17-18 следует, что $f + d = l$, откуда $f = l - d$.

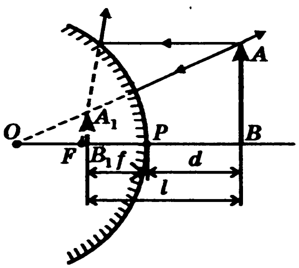


Рис. 17-18

Согласно формуле выпуклого зеркала

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F} \quad \text{или} \quad \frac{1}{d} - \frac{1}{l - d} = -\frac{1}{F}.$$

Определим отсюда F:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{l - d} - \frac{1}{d} = \frac{d - l + d}{d(l - d)} = \frac{2d - l}{d(l - d)},$$

$$F = \frac{d(l-d)}{2d-l}. \qquad (2)$$

Для определения d подставим $l - d$ в (1) вместо f:

$$\Gamma = \frac{l-d}{d}. \qquad (3)$$

Нам осталось определить из (3) расстояние d и подставить его в (2). Выполним эти действия: $d\Gamma = l - d$, откуда

$$d = \frac{l}{\Gamma+1}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (2):

$$F = \frac{l\left(l - \frac{l}{\Gamma+1}\right)}{(\Gamma+1)\left(2\frac{l}{\Gamma+1} - l\right)} = \frac{l^2\left(1 - \frac{1}{\Gamma+1}\right)}{l(2-\Gamma-1)} = \frac{l(\Gamma+1-1)}{(1-\Gamma)(1+\Gamma)},$$

$$\boxed{F = \frac{l\Gamma}{1-\Gamma^2}}, \quad \boxed{R = 2F}$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{20 \cdot 0{,}5}{1-0{,}25} \text{ см} = 13{,}3 \text{ см}, \ R = 2 \cdot 13{,}3 \text{ см} = 26{,}6 \text{ см}.$$

Ответ: $F = 13{,}3$ см; $R = 26{,}6$ см.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Чему равен угол φ_1 между падающим лучом и отражающей поверхностью, если угол между падающим и отраженным лучами $\varphi_2 = 70°$?

Ответ: $\varphi_1 = 55°$.

Задача 2. Высота Солнца над горизонтом $\varphi_1 = 20°$. Под каким углом φ_2 к горизонту надо расположить плоское зеркало, чтобы отраженный луч направить вертикально вниз?

Ответ: $\varphi_2 = 55°$.

Задача 3. Плоское зеркало mn поворачивают на угол $\varphi = 27°$. На какой угол Θ повернется отраженный от зеркала луч (рис. 17-19)?

Ответ: $\Theta = 2\varphi = 54°$.

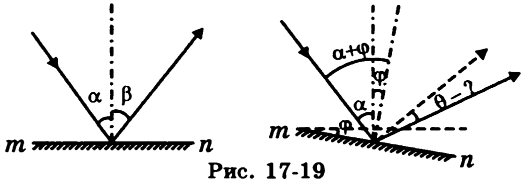


Рис. 17-19

Задача 4. Круглый бассейн радиусом $R = 5$ м залит до краев водой. Над центром бассейна на высоте $H = 3$ м от поверхности воды висит лампа. На какое расстояние l от края бассейна может отойти человек, рост которого $h = 1{,}8$ м, чтобы все еще видеть отражение лампы в воде (рис. 17-20)?

Ответ: $l = \dfrac{Rh}{H} = 3$ м.

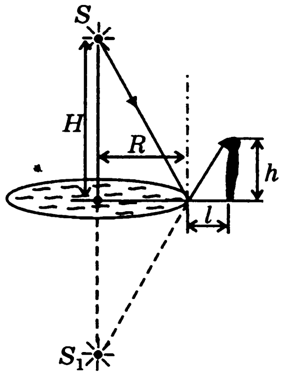


Рис. 17-20

Задача 5. Два плоских зеркала расположены под углом друг к другу. Между ними помещен точечный источник света S (рис. 17-21). Изображение источника S в первом зеркале находится на расстоянии $d_1 = 6$ см, а во втором зеркале – $d_2 = 8$ см от источника S. Найти угол φ между зеркалами. Расстояние между изображениями $l = 10$ см.

Ответ: $\varphi = \arccos\left(\dfrac{l^2 - d_1^2 - d_2^2}{2d_1d_2}\right) = 90°$.

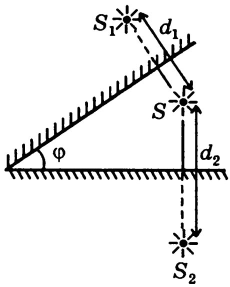


Рис. 17-21

Задача 6. Плоское зеркало движется со скоростью $v_1 = 1{,}5$ см/с. С какой по величине и направлению скоростью v_2 должен двигаться точечный источник света, чтобы его отражение в плоском зеркале оставалось неподвижным?

Ответ: $v_2 = 2v_1$ от зеркала.

Задача 7. Предмет AB и зеркало mn расположены, как показано на рис. 17-22. Показать область пространства, глядя из которой, можно видеть изображение предмета целиком.

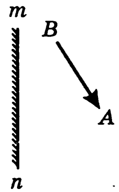


Рис. 17-22

Задача 8. Ребенок удаляется от фонаря, подвешенного на высоте $H = 3$ м над землей, со скоростью $v = 1$ м/с. В некоторый момент времени длина его тени $l_1 = 80$ см, а через $t = 3$ с она стала $l_2 = 2$ м. Чему равен рост ребенка h?

Ответ: $h = H\dfrac{l_2 - l_1}{l_2 - l_1 + vt} = 1{,}1$ м.

Задача 9. Расстояние между источником света S и плоским зеркалом mn $d = 5$ см, а угол падения луча на его нижний край $\alpha = 60°$ (рис. 17-23). Плоское зеркало вращают с частотой $\nu = 25$ Гц вокруг оси, проходящей через его нижний край. С какой линейной скоростью v движется изображение источника?

Ответ: $v = \dfrac{4\pi\nu d}{\cos\alpha} = 2{,}5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

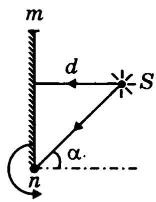


Рис. 17-23

Задача 10. Луч света падает на горизонтальную поверхность стола ab под углом α (рис. 17-

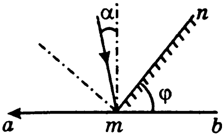


Рис. 17-24

24). Под каким углом φ к поверхности стола нужно расположить плоское зеркало mn, чтобы отраженный луч стал параллелен поверхности стола?

Ответ: $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$.

Задача 11. Наименьшая высота вертикального зеркала, при которой человек видит себя во весь рост, равна h, расстояние от человека до зеркала L. Глаз человека расположен на уровне верхнего края зеркала. Чему равен рост человека H? Чему равно расстояние l от глаза человека до нижнего края зеркала? Чему равен угол падения луча α на нижний край зеркала (рис. 17-12)?

Задача 12. В комнате длиной L и высотой H висит на стене плоское зеркало высотой h. На каком предельном расстоянии l от зеркала должен находиться наблюдатель, чтобы видеть в зеркале изображение стены, которая находится у него за спиной, во всю ее высоту (рис. 17-13)?

Ответ: $l = \frac{hL}{H - h}$; если же он отойдет еще дальше от зеркала, то будет видеть только часть стены.

Задача 13. Два плоских зеркала расположены под углом $\varphi = 90°$ между их поверхностями. Сколько изображений источника света можно наблюдать в этих зеркалах? Выполните чертеж.

Ответ: $N = 3$.

Задача 14. Вогнутое сферическое зеркало дает увеличение изображения $\Gamma = 3$. На каком расстоянии l от фокуса зеркала находится предмет, если его изображение находится на расстоянии $f = 30$ см от зеркала?

Ответ: $l = \frac{f}{\Gamma + 1} = 7{,}5$ см.

Задача 15. Выпуклое сферическое зеркало дает уменьшение в 4 раза (т. е. $\Gamma = 0{,}25$). Чему равен радиус кривизны R этого зеркала, если предмет располагается на расстоянии $d = 30$ см от него?

Ответ: $R = \frac{2d\Gamma}{1 - \Gamma} = 20$ см.

18. ЗАКОНЫ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Законы преломления:

1) луч падающий и луч преломленный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, проведенным к преломляющей поверхности, по разные стороны от него;

2) отношение синуса угла падения α (рис. 18-1) к синусу угла преломления γ есть величина постоянная для сред, где находятся падающий и преломленный лучи. Эта постоянная называется показателем преломления второй среды относительно первой n_{21}:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21}.$$

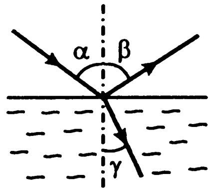


Рис. 18-1

Показатель преломления среды относительно вакуума называется ее абсолютным показателем преломления n. Он показывает, во сколько раз скорость света в вакууме c больше, чем в данной среде v:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Показатели преломления n разных сред даются в справочниках.

Относительный показатель преломления n_{21} равен отношению абсолютного показателя преломления второй среды n_2 к абсолютному показателю преломления первой среды n_1:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Здесь v_1 – скорость света в первой среде (где падающий луч), v_2 – скорость света во второй среде (где преломленный луч).

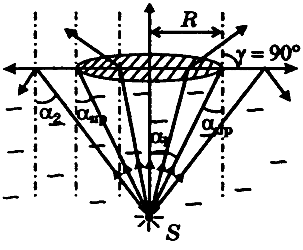
Угол падения $\alpha_{пр}$, при котором угол преломления $\gamma = 90°$, называется предельным углом полного отражения.

Его можно определить по формуле

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Если $n_2 = 1$ (вакуум или воздух), то $\sin\alpha_{пр} = \dfrac{1}{n}$.

Когда вы решаете задачу, в условии которой идет речь о переходе луча из оптически более плотной среды в оптически менее плотную (например, из стекла в воздух или воду), то прежде всего выясните, выйдет ли луч из более плотной среды в менее плотную, или, может, преломленный луч полностью отразится, или, наконец, он может скользить вдоль границы раздела этих сред и угол преломления $\gamma = 90°$. Луч выйдет, когда $\alpha < \alpha_{пр}$, луч не выйдет, когда $\alpha > \alpha_{пр}$. Во всех этих случаях решение задачи, естественно, будет разным. Поэтому, чтобы не ошибиться, определите, если вам позволяет условие задачи, предельный угол полного отражения данной среды (если вторая среда вакуум или воздух)



$\alpha_1 < \alpha_{пр}$

$\alpha_2 > \alpha_{пр}$

Рис. 18-2

или данных двух сред по формулам, приведенным выше, а затем сравните этот предельный угол с известным вам из условия задачи углом падения α (если он известен) и сделайте соответствующие выводы. Иногда по условию задачи сразу можно понять, о чем идет речь. Например, сказано, что источник света находится под водой и нужно определить радиус круга, в пределах которого лучи света выйдут из-под воды. Очевидно, что если смотреть сверху на поверхность воды, то в глаз попадут только те лучи, которые упадут на поверхность воды под углом α_1 меньше предельного (рис. 18-2). А те, которые упадут под углом α_2 больше предельного, из воды не выйдут. Те же, которые упадут под предельным углом, будут скользить по касательной к поверхности воды, расходясь радиально во все стороны так, что на поверхности будет виден светлый круг, ограниченный лучами, скользящими по поверхности воды, у которых угол преломления $\gamma = 90°$.

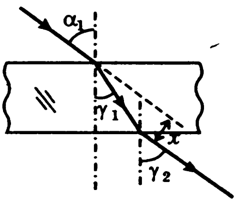


Рис. 18-3

При решении задач на прохождение света сквозь плоскопараллельную пластинку нужно помнить, что направление луча, вышедшего из пластинки, такое же, как и у падающего на нее луча, т. е. эти лучи параллельны.

Смещением луча x называют кратчайшее расстояние между продолжением падающего луча и лучом, вышедшим из пластинки.

При решении задач на прохождение света сквозь треугольную призму (сечение которой представляет собой треугольник), изготовленную из материала, оптически более плотного, чем окружающая среда, прежде всего сделайте крупный и четкий чертеж. При этом, если не сказано, что призма равнобедренная или равносторонняя, нарисуйте разносторонний треугольник. После этого направьте падающий луч на боковую грань призмы ab и в точке падения m луча проведите перпендикуляр O_1O_2 к этой грани (а не к основанию призмы). Постарайтесь, чтобы это был на самом деле перпендикуляр, а не некая косая линия (вы ведь умеете проводить перпендикуляр к линии, даже если она наклонная). Покажите угол падения луча α_1 (не надо «крутить» букву α, пусть «рыбка» плывет влево, а не вниз или вбок, иначе вы можете перепутать α с γ и допустить ошибку). Затем проведите луч mn в толще вещества призмы от точки падения m на первую грань ab к точке падения n на ее вторую грань bc. Не рисуйте этот луч параллельным основанию ac призмы, если в условии задачи ничего об этом не сказано, пусть он падает на вторую грань произвольно. Иначе вы рискуете посчитать равными углы, которые на самом деле не равны, и тогда ваше решение будет неверным. Помните, что если показатель преломления вещества призмы больше, чем показатель преломления окружающей среды, то угол преломления

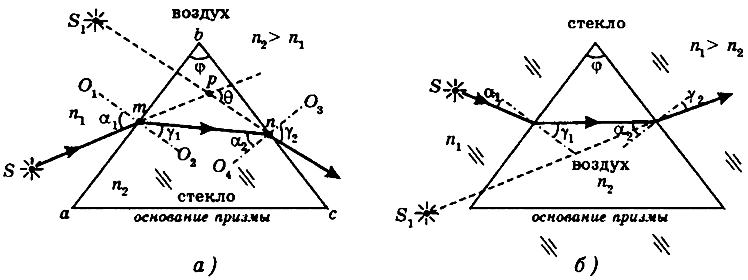


Рис. 18-4

γ_1 будет меньше угла падения α_1 и луч отклонится к основанию призмы (рис. 18-4, *а*), а если наоборот – то к вершине (рис. 18-4, б).

Показав луч в толще призмы, проведите в точку его падения на вторую грань *bc* перпендикуляр O_3O_4 к этой грани и покажите новый угол падения α_2. Поскольку луч переходит теперь из оптически более плотной в оптически менее плотную среду, то новый угол преломления γ_2 будет больше угла падения α_2 и луч опять отклонится к основанию призмы. Таким образом, такая призма дважды преломляет лучи, падающие на ее боковую грань, и отклоняет их к своему основанию. При этом изображение S_1 источника света S, испустившего эти лучи, окажется смещенным к вершине призмы. Если же призма изготовлена из вещества с показателем преломления меньше, чем у окружающей среды, то она отклоняет лучи к своей вершине, а изображение источника света смещается к ее основанию.

Постарайтесь не путать термины: «угол преломления луча», «преломляющий угол призмы» и «угол отклонения луча», это все разные углы. Угол преломления луча γ_2 – это угол между преломленным лучом, вышедшим из призмы, и перпендикуляром к преломляющей поверхности (рис. 18-4, *а*). Преломляющий угол φ – это угол при вершине призмы. И наконец, угол отклонения луча Θ – это угол между направлениями падающего на призму луча и луча, вышедшего из нее (между их мнимыми продолжениями (рис. 18-4, *а*).

При решении подобных задач часто приходится учитывать, что угол отклонения луча Θ как внешний угол треугольника *mpn* равен сумме двух внутренних углов $\alpha_1 - \gamma_1$ и $\gamma_2 - \alpha_2$, несмежных с ним. Кроме того, можно доказать, что, поскольку в треугольнике *mbn* сумма углов $90° - \gamma_1$, $90° - \alpha_2$ и φ равна 180°, т. е. $90° - \gamma_1 + 90° - \alpha_2 + \varphi = 180°$, то $\varphi = \gamma_1 + \alpha_2$.

Все эти рассуждения могут вам пригодиться при решении задач на прохождение луча сквозь треугольную призму.

В условиях задач часто пишут не «абсолютный показатель преломления», а просто «показатель преломления», имея в виду одно и то же. А вот относительный показатель преломления n_{21} так и называют «относительный, или показатель преломления такой-то среды относительно такой-то».

Решение отдельных задач

Задача 1

Луч переходит из стекла в воздух, падая на стеклянную поверхность под углами $\alpha_1 = 15°$; $\alpha_2 = 42°$ и $\alpha_3 = 60°$. Найти углы φ_1, φ_2, φ_3, на которые отклонится луч от первоначального направления после преломления в стекле. Абсолютный показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Дано:
$\alpha_1 = 15°$
$\alpha_2 = 42°$
$\alpha_3 = 60°$
$n = 1{,}5$
φ_1 – ?
φ_2 – ?
φ_3 – ?

Решение. Отметим сразу, что стекло – среда, оптически более плотная, чем воздух, поскольку абсолютный показатель преломления стекла $n = 1{,}5$ больше, чем абсолютный показатель преломления воздуха $n_{возд} = 1$. А если луч переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную, то угол падения α меньше угла преломления γ, и может так случиться, что луч упадет на поверхность стекла под углом α, большим, чем предельный угол $\alpha_{пред}$ для сред стекло–воздух. В этом случае падающий луч полностью отразится обратно в стекло, т. е. не выйдет из стекла в воздух, и решение нашей задачи будет одним. А может случиться, что, наоборот, он упадет под углом α, меньшим предельного угла $\alpha_{пр}$, и тогда он выйдет из стекла в воздух, и решение будет другим. Поэтому, чтобы решить задачу, надо сначала определить предельный угол полного отражения $\alpha_{пр}$ для стекла с абсолютным показателем преломления $n = 1{,}5$. Его можно найти, воспользовавшись формулой

$$\sin \alpha_{пр} = \frac{1}{n}.$$

Подставим численное значение $n = 1{,}5$ и определим величину предельного угла $\alpha_{пр}$. И если данный нам в условии угол падения α окажется меньше предельного, то луч выйдет из стекла, а если больше, то луч отразится обратно в стекле полностью, т. е. преломленного луча не будет. Итак, вычислим угол $\alpha_{пр}$:

$$\sin \alpha_{пр} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}6667, \quad \alpha_{пр} = 42°.$$

Таким образом, мы получили, что угол падения $\alpha_1 = 15°$ меньше предельного угла полного отражения $\alpha_{пр} = 42°$. Значит, в первом случае луч выйдет из стекла в воздух, и решение будет одним. Во втором случае угол падения $\alpha_2 = 42°$ равен предельному углу $\alpha_{пр}$, поэтому преломлен-

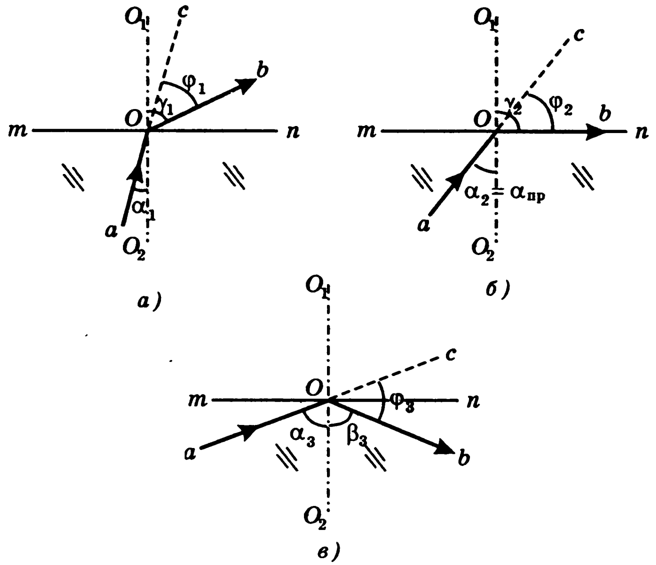


Рис. 18-5

ный луч будет скользить вдоль границы раздела двух сред стекло – воздух, и решение будет другим. В третьем же случае угол падения $\alpha_3 = 60°$ больше предельного угла $\alpha_{пр} = 42°$, поэтому луч будет претерпевать полное отражение и не выйдет из стекла, в результате чего решение будет третьим. Рассмотрим эти три случая в отдельности.

1. Луч падает на стеклянную поверхность mn под углом α_1 и выходит из стекла под углом γ_1 (рис. 18-5, *а*). Угол отклонения луча φ_1 – это угол между преломленным лучом Ob и мнимым продолжением Oc падающего луча aO. Из чертежа следует, что угол φ_1 равен разности между углом преломления $O_1Ob = \gamma_1$ и углом O_1Oc. Но угол O_1Oc равен углу падения α_1 как вертикальные, поэтому $\varphi_1 = \gamma_1 - \alpha_1.$

Угол преломления γ_1 определим из закона преломления, согласно которому $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = \dfrac{1}{n}$, откуда $\sin\gamma_1 = n\sin\alpha_1$ и

$$\gamma_1 = \arcsin(n\sin\alpha_1).$$

С учетом этого $\boxed{\varphi_1 = \arcsin(n\sin\alpha_1) - \alpha_1}$

Один искомый угол отклонения найден в общем виде. Вычислим его:

$$\varphi_1 = \arcsin(1{,}5 \sin 15°) - 15° = 8°.$$

2. Теперь луч падает на границу раздела *mn* сред стекло — воздух под предельным углом $\alpha_2 = \alpha_{пр}$, поэтому преломленный луч скользит по этой границе и угол преломления γ_2 прямой ($\gamma_2 = 90°$, рис. 18-5, *б*). Тогда искомый угол между мнимым продолжением *Oc* падающего луча *aO* и преломленным лучом *On* $\varphi_2 = \gamma_2 - \angle O_1OC$. $\angle O_1OC = \alpha_2$ как вертикальные.

Поэтому $\boxed{\varphi_2 = \gamma_2 - \alpha_2}$

Подставим численные значения α_2, γ_2 и вычислим величину φ_2: $\varphi_2 = 90° - 42° = 48°$.

3. Теперь, когда угол преломления $\alpha_3 = 60°$ больше предельного $\alpha_{пр} = 42°$, луч не выйдет в воздух, а полностью отразится обратно в стекло (рис. 18-5, *в*). При этом, как следует из чертежа, $\varphi_3 = 180° - \alpha_3 - \beta_3$.

Здесь угол β_3 — это угол отражения, а по закону отражения угол отражения β_3 равен углу падения α_3, поэтому $\boxed{\varphi_3 = 180° - 2\alpha_3}$

Нам осталось подставить численное значение угла α_3 и вычислить третью искомую величину φ_3:

$$\varphi_3 = 180° - 2 \cdot 60° = 60°.$$

Задача решена.

Ответ: $\varphi_1 = 8°$, $\varphi_2 = 48°$, $\varphi_3 = 60°$.

Задача 2

Водолазу, находящемуся под водой, кажется, что лучи падают под углом $\varphi_1 = 60°$ к поверхности воды. Какова угловая высота φ_2 Солнца над горизонтом? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

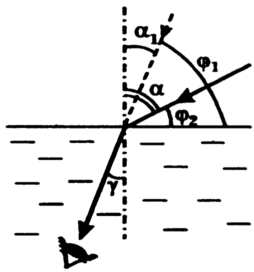


Рис. 18-6

Дано:
$\varphi_1 = 60°$
$n = 1{,}33$
φ_2 — ?

Решение. Обратимся к рис. 18-6. В глаз водолазу попадает преломленный луч. Водолазу кажется, что луч в воздухе падает на воду в направлении, показанном штриховой линией. В условиях задачи сказано, что водолазу кажется, что луч падает под углом 60° к поверхности воды. Вообще-то так говорят об угле падения α_1, который равен углу преломления γ как вертикальные углы. Но, если бы угол α_1 был равен 60°, то и угол γ тоже был бы равен 60°, а синус угла падения в этом случае был бы равен согласно закону преломления $n \sin\gamma = 1{,}33 \cdot \sin 60° = 1{,}33 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$, чего быть не может. Значит, в условии задачи, когда говорят, «ему кажется, что лучи падают под углом 60° к поверхности воды», имеют в виду не кажущийся угол падения α_1, а угол между кажущимся падающим лучом и поверхностью воды $\varphi_1 = 60°$. Подобная задача встречается в школьных задачниках, и мы специально уточнили этот момент, чтобы вы в процессе ее решения не перепутали, о каком угле здесь идет речь. Хотя следовало бы угол φ назвать не углом, под которым луч падает на поверхность, а углом между лучом и поверхностью воды.

Из рис. 18-6 следует, что угол падения луча $\alpha = 90° - \varphi_2$, откуда искомый угол $\varphi_2 = 90° - \alpha$.

По закону преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n$, где $\gamma = \alpha_1 = 90° - \varphi_1$,

поэтому $\frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \varphi_1)} = n$, откуда $\sin\alpha = n\cos\varphi_1$ и $\alpha = \arcsin(n\cos\varphi_1)$.

С учетом этого $\boxed{\varphi_2 = 90° - \arcsin(n\cos\varphi_1)}$

Произведем вычисления:

$\varphi_2 = 90° - \arcsin(1{,}33\cos 60°) = 48°$.

Ответ: $\varphi_2 = 48°$.

Задача 3

Луч падает на поверхность стекла под углом $\alpha_1 = 60°$. Под каким углом α_2 он должен упасть на поверхность воды, чтобы угол преломления в стекле γ_1 был равен углу преломления в воде γ_2? Показатель преломления стекла $n_1 = 1{,}5$, показатель преломления воды $n_2 = 1{,}33$.

Дано:
$\alpha_1 = 60°$
$n_1 = 1{,}5$
$n_2 = 1{,}33$

α_2 — ?

Решение. Запишем закон преломления применительно к воде и стеклу:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = n_1 \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2} = n_2, \text{ откуда}$$

$$\sin\gamma_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \sin\gamma_2 = \frac{\sin\alpha_2}{n_2}.$$

Так как $\gamma_1 = \gamma_2$, то и $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$ или $\frac{\sin\alpha_1}{n_1} = \frac{\sin\alpha_2}{n_2}$,

откуда $\sin\alpha_2 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_1$ и $\boxed{\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_1\right)}$

Произведем вычисления:

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{1{,}33}{1{,}5}\sin 60°\right) = 49°.$$

Ответ: $\alpha_2 = 49°$.

Задача 4

Под каким углом должен упасть луч на поверхность стекла, чтобы угол преломления γ был в 2 раза меньше угла падения? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Дано:

$\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$

$n = 1{,}5$

$\alpha - ?$

Решение. По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n. \qquad (1)$$

Поскольку $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$, значит, $\alpha = 2\gamma$, и поэтому

$\dfrac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} = n$. Но $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$.

С учетом этого $\dfrac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\gamma} = n$, откуда $\cos\gamma = \dfrac{n}{2}$.

Но $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}$, поэтому

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\frac{n^2}{4}} = \frac{\sqrt{4-n^2}}{2}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $\dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{4-n^2}} = n$, откуда $\sin\alpha = \dfrac{n\sqrt{4-n^2}}{2}$

и

$$\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{n\sqrt{4-n^2}}{2}\right)}$$

Произведем вычисления:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1{,}5\sqrt{4-2{,}25}}{2}\right) = 83°.$$

Ответ: $\alpha = 83°$.

Задача 5

Чему равен угол падения α при падении света на стекло с показателем преломления $n = 1{,}5$, если отраженный луч оказался перпендикулярен преломленному?

Дано:
$n = 1{,}5$
$\varphi = 90°$

α – ?

Здесь φ – угол между отраженным и преломленным лучами (рис. 18-7).

Решение. Из рис. 18-7 следует, что $\beta + \varphi + \gamma = 180°$, откуда $\beta + \gamma = 180° - \varphi = 90°$, ведь $\varphi = 90°$.

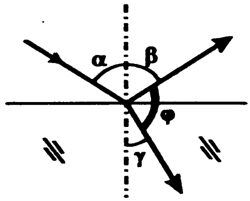


Рис. 18-7

Значит, $\gamma = 90° - \beta$. Но $\beta = \alpha$, поэтому $\gamma = 90° - \alpha$. (1)

По закону преломления

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n \quad \text{или с учетом (1)}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = n, \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = n \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = n,$$

откуда $\boxed{\alpha = \operatorname{arc\,tg} n}$

Произведем вычисления: $\alpha = \operatorname{arc\,tg} 1{,}5 = 57°$.

Ответ: $\alpha = 57°$.

Задача 6

Чему равен угол падения α луча на поверхность алмаза, если он больше угла преломления γ на $\varphi = 30°$? Абсолютный показатель преломления алмаза $n = 2{,}42$.

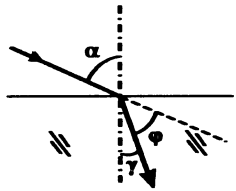


Рис. 18-8

Дано:
$\varphi = 30°$
$n = 2{,}42$

α – ?

Решение. Обратимся к рис. 18-8. Из него следует, что $\alpha = \gamma + \varphi$, поскольку падающий луч с его мнимым продолжением и перпендикуляр к поверхности стекла образуют при точке их пересечения вертикальные углы.

По закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n$. Но $\gamma = \alpha - \varphi$, поэтому $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} = n$ или $\dfrac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{n}$. (1)

Из математики мы знаем, что

$\sin(\alpha - \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi$. (2)

Подставим (2) в (1): $\dfrac{\sin\alpha\cos\varphi - \cos\alpha\sin\varphi}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{n}$,

$$\cos\varphi - \operatorname{ctg}\alpha\sin\varphi = \frac{1}{n}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\varphi - \dfrac{1}{n}}{\sin\varphi}$$

или $$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{n\cos\varphi - 1}{n\sin\varphi}, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi - \frac{1}{n\sin\varphi}, \text{ откуда}$$

$$\boxed{\alpha = \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\varphi - \frac{1}{n\sin\varphi}\right)}$$

Произведем вычисления

$$\alpha = \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}30^\circ - \frac{1}{2{,}42\sin 30^\circ}\right) = 48^\circ.$$

Ответ: $\alpha = 48^\circ$.

Задача 7

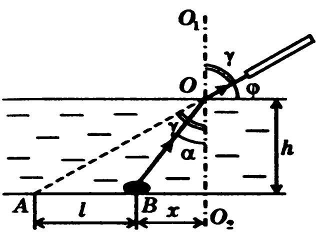


Рис. 18-9

На дне пруда недалеко от берега лежит камень. Ребенок на берегу, прицелившись и стараясь попасть в камень палкой, двигает ее под углом $\varphi = 30^\circ$ к поверхности воды. Палка падает на дно пруда на расстоянии $l = 10$ см от камня. Чему равна глубина пруда h в этом месте? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Сопротивлением воды движению палки пренебречь.

Дано:
$\varphi = 30^\circ$
$l = 10$ см
$n = 1{,}33$
h – ?

Решение. Обратимся к рис. 18-9. Луч света, отраженный от камня, падает на поверхность воды под углом α в точке O и, преломившись, выходит из воды. Вдоль этого преломленного луча и двигает свою палку ребенок, стараясь попасть в камень. Продолжая двигаться в воде вдоль прямой, обозначенной штриховой линией, палка падает на расстоянии l от камня.

Обозначим отрезок на дне пруда от камня до перпендикуляра O_1O_2 буквой x. Из прямоугольного треугольника AOO_2 следует:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{l + x}{h}, \tag{1}$$

а из прямоугольного треугольника BOO_2: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{h}$. (2)

Из (2) $$x = h\operatorname{tg}\alpha. \tag{3}$$

Подставим (3) в (1). Так мы «уйдем» от неизвестного расстояния x и останемся с одним искомым h в одном уравнении:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{l + h\operatorname{tg}\alpha}{h}. \tag{4}$$

Из (4) $h\operatorname{tg}\gamma = l + h\operatorname{tg}\alpha$, $\quad h = \dfrac{l}{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha}$. (5)

По закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{1}{n}$, (6)

ведь здесь свет выходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную.

Из (6) $\sin\alpha = \dfrac{\sin\gamma}{n}$, где $\gamma = 90° - \varphi$ согласно рис. 18-9,

поэтому $\sin\alpha = \dfrac{\sin(90° - \varphi)}{n} = \dfrac{\cos\varphi}{n}$. (7)

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, то с учетом (7)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\varphi}{n\sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\varphi}{n^2}}} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}. \tag{8}$$

Нам осталось подставить (8) в (5), и задача будет решена:

$$h = \frac{l}{\operatorname{tg}(90° - \varphi) - \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}} = \frac{l}{\operatorname{ctg}\varphi - \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}} =$$

$$= \frac{l}{\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}}$$

или окончательно $\boxed{h = \dfrac{l\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi} - \sin\varphi}\operatorname{tg}\varphi}$

Произведем вычисления:

$$h = \frac{10\sqrt{1{,}33^2 - \cos^2 30°}}{\sqrt{1{,}33^2 - \cos^2 30°} - \sin 30°}\operatorname{tg}30° \text{ см} = 12 \text{ см}.$$

Ответ: $h = 12$ см.

Задача 8

Какова истинная глубина H водоема, если его кажущаяся глубина $h = 1{,}5$ м? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

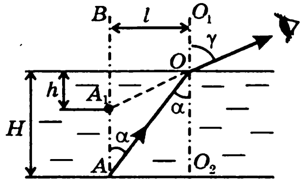


Рис. 18-10

Дано:
$h = 1{,}5$ м
$n = 1{,}33$

H – ?

Решение. Выполним чертеж (рис. 18-10). Луч света, отраженный от дна в точке А, падает на поверхность в точке O и, преломившись, выходит из воды в воздух, направляясь в глаз наблюдателя. Если преломленный луч продлить штриховой линией A_1O, то мы получим кажущийся нам ход луча в воде. В точке A_1, где пересекается этот кажущийся луч с перпендикуляром AB, наблюдатель увидит кажущееся ему изображение дна, расположенное на кажущейся глубине h, меньшей, чем истинная глубина водоема H.

Пусть угол α мал, т. е. глаз наблюдателя расположен недалеко от перпендикуляра O_1O_2. Тогда и угол γ тоже мал, а тангенс таких углов равен их синусу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha \quad (1)$$

и

$$\operatorname{tg} \gamma = \sin \gamma. \quad (2)$$

Обозначим l расстояние между перпендикулярами AB и O_1O_2. Из рис. 18-10 следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{H} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{l}{h}.$$

Разделим эти равенства друг на друга, чтобы «убрать» l:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{lh}{Hl} = \frac{h}{H}$$

или с учетом (1) и (2) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{h}{H}$. (3)

По закону преломления $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{1}{n}$, (4)

ведь луч выходит из воды в воздух.

Нам осталось приравнять (3) и (4) и из полученного равенства определить глубину водоема H: $\dfrac{h}{H} = \dfrac{1}{n}$, откуда

$$\boxed{H = nh}$$

Произведем вычисления:
$H = 1{,}5 \cdot 1{,}33$ м $= 2$ м.

Да, тут и утонуть можно! Так что учитывайте эту разницу между истинной и кажущейся глубиной, прыгая в воду.

Ответ: $H = 2$ м.

Задача 9

Столб вбит в дно реки так, что $h = 1$ м возвышается над поверхностью воды (рис. 18-11). Глубина реки $H = 3$ м. Найти длину тени от столба на поверхности воды l_1 и на дне реки l_2. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$, абсолютный показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

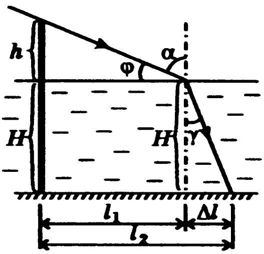


Рис. 18-11

Дано:
$h = 1$ м
$H = 2$ м
$\varphi = 30°$
$n = 1{,}33$

l_1 – ?
l_2 – ?

Решение. Анализируя рис. 18-11, обратим внимание на то, что отрезки h и l_1 являются катетами прямоугольного треугольника, в котором известен угол φ. Значит, длину отрезка l_1 мы можем определить сразу из этого треугольника:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{h}{l_1}, \text{ откуда } l_1 = \frac{h}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Итак, одну искомую, длину тени l_1, мы нашли. Теперь найдем длину тени l_2 на дне реки. Ее можно представить как сумму длин l_1 и некоторого отрезка Δl, являющегося катетом прямоугольного треугольника с известным другим катетом – глубиной реки H и углом преломления γ.

Из этого треугольника $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\Delta l}{H}$, откуда $\Delta l = H \operatorname{tg}\gamma$.

Тогда $l_2 = l_1 + H \operatorname{tg}\gamma$.

Правда, здесь нам не известен угол γ, но мы его можем определить из закона преломления:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n, \text{ откуда } \sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n}.$$

Угол падения луча α на поверхность воды нам тоже не известен, но зато известна высота Солнца над горизонтом φ, поэтому угол падения α мы легко определим из равенства $\varphi + \alpha = 90°$, откуда $\alpha = 90° - \varphi$ и

$$\sin\alpha = \sin(90° - \varphi) = \cos\varphi.$$

Тогда $\sin\gamma = \dfrac{\cos\varphi}{n}$.

Нам осталось выразить $\operatorname{tg}\gamma$ через $\sin\gamma$. Известно, что

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}$$

или $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\cos\varphi}{n\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\varphi}{n^2}}} = \dfrac{\cos\varphi}{n\sqrt{\dfrac{n^2-\cos^2\varphi}{n^2}}} = \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}$.

Тогда $\boxed{l_2 = l_1 + H\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}}$

Задача в общем виде решена. Произведем вычисления:

$$l_1 = \frac{1}{\operatorname{tg}30^\circ}\text{ м} = 1{,}73\text{ м},$$

$$l_2 = \left(1{,}7 + 2\frac{\cos 30^\circ}{\sqrt{1{,}33^2-\cos^2 30^\circ}}\right)\text{м} = 3{,}14\text{ м}.$$

Ответ: $l_1 = 1{,}73$ м, $l_2 = 3{,}44$.

Задача 10

Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 20^\circ$. Под каким углом Θ к поверхности воды в озере нужно расположить плоское зеркало *mn*, чтобы угол преломления солнечного луча в воде составлял $\gamma = 30^\circ$? Абсолютный показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Дано:
$\varphi = 20^\circ$
$\gamma = 30^\circ$
$n = 1{,}33$

Θ – ?

Решение. Для решения этой задачи обратимся к рис. 18-12. Солнечный луч падает на поверхность зеркала *mn* под углом α_1 и отражается от него под углом β_1, равным по закону отражения угла падения α_1. Поверхность плоского зеркала *mn* ориентирована к поверхности воды *ab* под углом Θ. После отражения солнечный луч падает на поверхность воды под углом α_2 и преломляется в воде под углом γ.

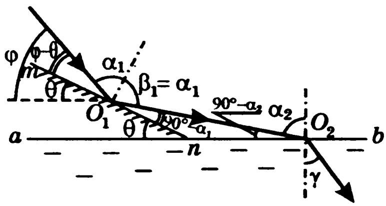


Рис. 18-12

Из рис. 18-12 следует, что Θ – внешний угол к треугольнику O_1nO_2, и поэтому он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним:

$\Theta = 90^\circ - \alpha_1 + 90^\circ - \alpha_2 =$
$= 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2.$ (1)

По закону преломления

$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma} = n$, откуда $\sin\alpha_2 = n\sin\gamma$

и $\alpha_2 = \arcsin(n\sin\gamma)$. (2)

С углом α_2 разобрались, теперь будем искать угол α_1. Если внимательно рассмотреть рис. 18-12, то можно заметить, что

$\alpha_1 = 90° - (\varphi - \Theta) = 90° - \varphi + \Theta$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1) и отыщем искомый угол Θ:

$\Theta = 180° - 90° + \varphi - \Theta - \arcsin(n\sin\gamma)$,

$2\Theta = 90° + \varphi - \arcsin(n\sin\gamma)$,

откуда $\Theta = 45° + 0{,}5(\varphi - \arcsin(n\sin\gamma))$.

Произведем вычисления:

$\Theta = 45° + 0{,}5(20° - \arcsin(1{,}33\sin 30°)) = 34°$.

Ответ: $\Theta = 34°$.

Задача 11

Водолаз ростом $h = 1{,}7$ м стоит на горизонтальном дне водоема глубиной $H = 15$ м. На каком расстоянии l от ступней водолаза находится камень на дне реки, изображение которого он может увидеть отраженным от поверхности воды? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

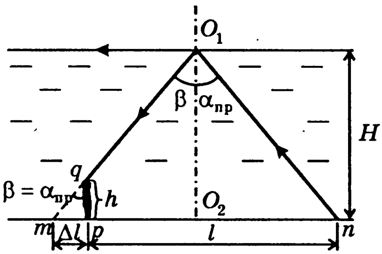


Рис. 18-13

Дано:
$h = 1{,}7$ м
$H = 15$ м
$n = 1{,}33$

l – ?

Решение. Водолаз видит камень на дне реки в отраженном свете. Это значит, что солнечные лучи, проникнув сквозь воду, падают на камень, отражаются от него, затем, пройдя сквозь толщу воды, отражаются от ее поверхности и попадают в глаз водолазу (рис. 18-13). Луч, отраженный от камня, расположенного на расстоянии, меньше искомого расстояния l, упав на поверхность воды, разделяется на отраженный и преломленный. Преломленный луч, выйдя из воды в воздух, уносит с собой большую часть световой энергии падающего луча (ведь яркость падающего луча делится между отраженным и преломленным), поэтому яркость отраженного от поверхности воды луча будет невелика, и такие камни не будут видны. Камень, находящийся на расстоянии l от ступней водолаза, будет видно лучше потому, что луч, идущий от него, упадет на поверхность воды под предельным углом $\alpha_{пр}$. Он тоже разделится на отраженный и преломленный лучи, но теперь преломленный луч не выйдет из воды в воздух, а будет скользить вдоль поверхности воды, и теперь яркость отраженного луча будет больше, чем когда лучи выходили из воды. Таким образом, расстояние l является наименьшим расстоянием, на котором камень будет виден достаточно хорошо в лучах, отраженных от поверхности воды.

Чтобы определить это расстояние, рассмотрим внимательно чертеж (рис. 18-13). Из него следует, что искомое расстояние l можно представить в виде разности двух отрезков: mn и mp. Отрезок mn является основанием равнобедренного треугольника высотой H, образованного падающим и отраженным лучами nO_1 и O_1m. Поскольку высота в равнобедренном треугольнике является одновременно и медианой, то она делит основание mn на два равных отрезка: mO_2 и O_2n. Длину отрезка O_2n можно найти из прямоугольного треугольника O_1O_2n, в котором отрезок O_2n является катетом, противолежащим углу $\alpha_{пр}$, а другой катет H в этом треугольнике нам известен. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \dfrac{O_2n}{H}$, откуда $O_2n = H \operatorname{tg}\alpha_{пр}$.

Тогда длина отрезка mn равна $2H \operatorname{tg}\alpha_{пр}$.

Обозначим длину отрезка mp Δl.

Тогда $$l = 2H \operatorname{tg}\alpha_{пр} - \Delta l.$$

Длину Δl определим из прямоугольного треугольника mqp, в котором отрезок Δl является катетом, противолежащим углу mqp, который равен углу отражения луча β как соответственные углы при параллельных qp и O_1O_2 и секущей mO_1. По закону отражения угол β равен углу $\alpha_{пр}$, поэтому и $\angle mqp$ тоже равен $\alpha_{пр}$. Другим катетом в треугольнике mqp является высота водолаза h. Из этого треугольника следует, что $\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \dfrac{\Delta l}{h}$, откуда $\Delta l = h \operatorname{tg}\alpha_{пр}$.

Тогда $l = 2H \operatorname{tg}\alpha_{пр} - h \operatorname{tg}\alpha_{пр} = (2H - h)\operatorname{tg}\alpha_{пр}$.

Нам осталось определить тангенс предельного угла $\alpha_{пр}$. Для этого воспользуемся формулой для определения предельного угла полного отражения, когда вторая среда, в которую выходит преломленный луч, – вакуум или воздух:

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \dfrac{\sin\alpha_{пр}}{\cos\alpha_{пр}} = \dfrac{\sin\alpha_{пр}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_{пр}}}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \frac{1}{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n\sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Тогда $$\boxed{l = \frac{2H-h}{\sqrt{n^2-1}}}$$

Задача в общем виде решена. Произведем вычисления:

$$l = \frac{2\cdot 15 - 1{,}7}{\sqrt{1{,}33^2-1}}\text{ м} = 32\text{ м}.$$

Ответ: $l = 32$ м.

Задача 12

Человек смотрит на свое изображение в зеркале, лежащем на дне сосуда, заполненного водой. На какое расстояние x аккомодирован глаз человека, если он находится на высоте $H = 10$ см над поверхностью воды в сосуде, а глубина сосуда $h = 8$ см? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

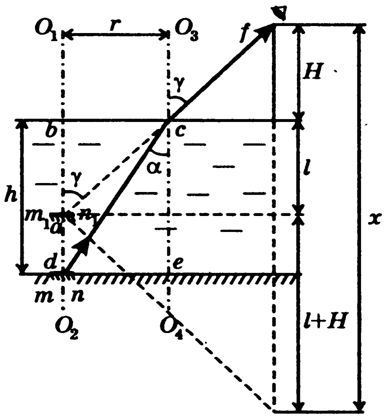


Рис. 18-14

Дано:
$H = 10$ см
$h = 8$ см
$n = 1{,}33$
x – ?

Решение. Рассмотрим внимательно рис. 18-14. Зеркало mn лежит в воде на глубине h. Луч света, отраженный от поверхности зеркала, падает на поверхность воды, преломляется (подчеркнем, что при этом угол преломления γ больше угла падения α, так как луч идет из оптически более плотной среды – воды – в оптически менее плотную среду – воздух) и попадает в глаз наблюдателя. Но человеческий глаз не обладает свойством видеть, как преломляется в пространстве световой луч. Человеку кажется, что луч идет прямолинейно по направлению af. Поэтому он видит зеркало mn не там, где оно есть на самом деле, а в положении m_1n_1, т. е. на меньшей глубине, которую мы обозначили l (вот почему опасно прыгать в воду в незнакомом месте. В прозрачной воде дно кажется значительно ближе, чем на самом деле, т. е. там, где кажется, что мелко, может быть достаточно глубоко).

Итак, человеку кажется, что зеркало находится на глубине l, поэтому он аккомодирует (настраивает) свой глаз на изображение, которое должно находиться на такой глубине относительно кажущегося плоского зеркала m_1n_1, на какой высоте находится и сам глаз, т. е. на расстоянии $l + H$ (будем считать, что глаз находится почти над зеркалом, т. е., что угол γ чрезвычайно мал). Поэтому искомое расстояние x между глазом человека и его кажущимся изображением равно удвоенному расстоянию $l + H$: $$x = 2(l + H).$$

Чтобы решить эту задачу, нам нужно отыскать глубину l, на которой располагается кажущееся изображение m_1n_1 зеркала mn. Отметим, что эта глубина l является катетом в прямоугольном треугольнике abc, а другим катетом в этом треугольнике является некоторый отрезок $bc = r$. Этот же отрезок является катетом в другом прямоугольном треугольнике – dce, а вторым катетом в этом же треугольнике является известная нам глубина воды h. Кроме того, в треугольнике abc имеется угол bac, равный углу преломления γ как соответственные углы при параллельных перпендикулярах O_1O_2 и O_3O_4 и секущей af. А в треугольнике dce имеется угол падения луча α. Правда, ни угол падения α, ни угол преломления γ нам не известны, но зато мы знаем закон преломления, согласно которому

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{1}{n}.$$

Теперь отметим следующее обстоятельство. Как правило, мы смотрим в воду сверху, вертикально вниз, т. е. под малым по отношению к перпендикуляру O_3O_4 углом. То есть угол γ мы можем считать малым, а угол α и того меньше. Но синусы малых углов (как и их тангенсы) численно равны самим углам, выраженным в радианах. Поэтому вместо отношения синусов α и γ мы можем записать отношение самих углов:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{n}.$$

Из треугольника abc следует, что

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{l} \text{ или } \gamma = \frac{r}{l}, \qquad (1)$$

а из треугольника dce следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{h} \text{ или } \alpha = \frac{r}{h}. \qquad (2)$$

Разделив равенства (1) и (2) друг на друга и сократив r, получим:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{h}{l}.$$

Поскольку $$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{n},$$

то $$\frac{l}{h} = \frac{1}{n}, \text{ откуда } l = \frac{h}{n}.$$

С учетом этого $$\boxed{x = 2\left(\frac{h}{n} + H\right)}$$

Произведем вычисления:

$$x = 2\left(\frac{8}{1{,}33} + 10\right) \text{см} = 32 \text{ см}.$$

Ответ: $x = 32$ см.

Задача 13

Тонкая стеклянная сфера радиусом $R = 25$ см с показателем преломления стекла $n_{ср} = 1{,}5$ заполнена водой с показателем преломления $n_в = 1{,}33$ (рис. 18-15). На сферу падает пучок параллельных лучей. Определить площадь поверхности S, в пределах которой лучи проникнут в воду.

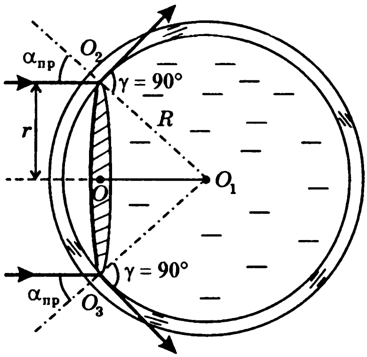


Рис. 18-15

Решение.

Дано:
$R = 25$ см
$n_0 = 1{,}5$
$n_в = 1{,}33$
S – ?

Из стеклянной оболочки в воду проникнут только те лучи, которые упадут на границу стекло – вода под углом, меньшим предельного угла полного отражения для этих двух сред. Те лучи, которые упадут на эту границу под предельным углом $\alpha_{пр}$, преломятся под углом $\gamma = 90°$ (отметим, что перпендикуляром O_1O_2, проведенным в точку падения луча к границе стекло – вода, здесь будет радиус сферы R и его продолжение, поскольку радиус всегда перпендикулярен к сферической поверхности. Обратим внимание также на то, что слова «тонкая стеклянная сфера» означают, что толщиной стеклянной оболочки можно пренебречь и не рассматривать ход луча в самом стекле).

Лучи, упавшие на границу стекло – вода, после преломления, скользя вдоль этой границы по касательной к поверхности стекло – вода, разойдутся коническим пучком. Геометрическим местом точек падения этих лучей на границу стекло – вода будет окружность радиусом r (на рис. 18-15 плоскость этой окружности заштрихована и лежит перпендикулярно плоскости чертежа). Радиус этой окружности r образует с радиусом сферы R и отрезком OO_1, соединяющим центры окружности и сферы, прямоугольный треугольник, в котором радиус сферы R является гипотенузой, а радиус окружности r – катетом, лежащим против угла O_2O_1O. Но угол O_2O_1O равен предельному углу падения $\alpha_{пр}$ как соответственные углы при параллельных лучах, падающих на сферу, и секущей O_1O_2. Поэтому $r = R \sin \alpha_{пр}$.

Тогда искомая площадь S, радиус которой равен r, определяется выражением $S = \pi r^2$ или $S = \pi(R \sin \alpha_{пр})^2$.

Синус предельного угла $\alpha_{пр}$ для сред вода – стекло определим по формуле предельного угла полного отражения, когда вторая среда – вода, а первая – стекло:

$$\sin \alpha_{пр} = \frac{n_в}{n_{ст}}.$$

Тогда получим окончательно $\boxed{S = \pi\left(R\frac{n_в}{n_{ст}}\right)^2}$.

Произведем вычисления:

$$S = 3{,}14\left(25\frac{1{,}33}{1{,}5}\right)^2 \text{ см}^2 = 1{,}5\cdot10^3 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S = 1{,}5\cdot10^3$ см².

Задача 14

В воде с показателем преломления $n = 1{,}33$ находится точечный источник света S. На каком расстоянии h от источника следует поместить тонкий диск диаметром $d = 4$ см, чтобы луч света не вышел из воды в воздух (рис. 18-16)?

Дано:
$n = 1{,}33$
$d = 3$ см

h – ?

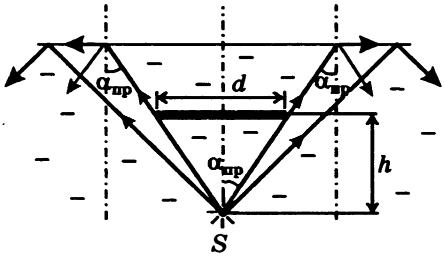


Рис. 18-16

Решение. Те лучи, которые, коснувшись края диска, упадут на поверхность воды под предельным углом $\alpha_{пр}$, после преломления будут скользить вдоль границы раздела сред вода – воздух, а те, которые упадут под большим, чем $\alpha_{пр}$, углом, полностью отразятся от поверхности обратно в воду.

Запишем формулу, определяющую предельный угол полного отражения $\alpha_{пр}$:

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Из рис. 18-16 следует, что острый угол при точке S в прямоугольном треугольнике с катетами h и $\frac{d}{2}$ равен углу $\alpha_{пр}$ как накрест лежащие углы при параллельных и секущей. Из этого следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \frac{d}{2h}, \text{ откуда } h = \frac{d}{2tg\alpha_{np}}. \qquad (2)$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \dfrac{\sin\alpha_{пр}}{\cos\alpha_{пр}} = \dfrac{\sin\alpha_{пр}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_{пр}}}$,

то с учетом (1) $\operatorname{tg}\alpha_{пр} = \dfrac{1}{n\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$. (3)

Подставив (3) в (2), решим задачу в общем виде:

$$\boxed{h = \frac{d}{2}\sqrt{n^2-1}}$$

Произведем вычисления:

$$h = \frac{3}{2}\sqrt{1{,}33^2-1}\text{ см} = 1{,}3\text{ см}.$$

Ответ: $h = 1{,}3$ см.

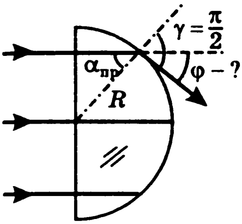


Рис. 18-17

Задача 15

Параллельные лучи падают на стеклянный полушар перпендикулярно его основанию (рис. 18-17). Чему равен максимальный угол отклонения лучей φ при выходе их из полушара от их первоначального направления? Абсолютный показатель преломления $n = 1{,}5$.

Дано:
$n = 1{,}5$
$\varphi - ?$

Решение. Из рис. 18-17 следует, что

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha_{пр}$, где $\alpha_{пр}$ – предельный угол падения луча на выпуклую поверхность полусферы при переходе его из стекла в воздух. Поскольку $\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n}$,

то $\alpha_{пр} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$, поэтому $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}$

Произведем вычисления:

$$\varphi = 48° - \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\right) = 48°.$$

Ответ: $\varphi = 48°$.

Задача 16

Луч падает на плоскопараллельную пластинку под углом α_1 и претерпевает смещение по выходе из нее, равное x. Определить толщину пластинки h. Абсолютный показатель преломления стекла n, окружающая среда – воздух.

Дано:
α_1
x
n
$h - ?$

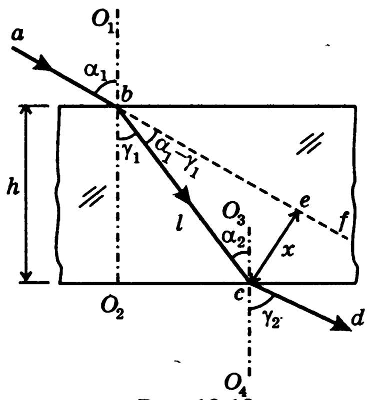


Рис. 18-18

Решение. Смещением луча x плоскопараллельной пластинкой называют кратчайшее расстояние между лучом cd, вышедшим из пластинки, и мнимым продолжением bf падающего на пластинку луча ab (рис. 18-18).

Искомую толщину пластинки h можно определить из прямоугольного треугольника bO_2c, образованного отрезком h, лучом bc, идущим в толще стекла, длину которого мы обозначили l, и отрезком O_2c между перпендикулярами O_1O_2 и O_3O_4. В этом треугольнике отрезок l является гипотенузой, а отрезок h – катетом, прилежащим к углу преломления луча γ_1. Отметим, что под таким же углом упадет луч bc на границу стекло – воздух, пройдя толщу стекла, т. е. угол преломления γ_1 равен углу падения α_2 как углы, накрест лежащие при параллельных O_1O_2 и O_3O_4 и секущей bc. Подчеркнем также, что луч cd выйдет из пластинки параллельно падающему лучу ab, т. е. что угол α_1, под которым луч упал на пластинку, равен углу γ_2, под которым он вышел из нее. Следовательно, плоскопараллельная пластинка не изменяет направления падающих на нее лучей, а только смещает их относительно первоначального хода.

Из треугольника bO_2c найдем искомую толщину пластинки h: $$h = l\cos\gamma_1.$$

Здесь нам не известны ни длина l, ни угол преломления γ_1, но отыскать эти величины несложно, особенно если чертеж правильный и достаточно крупный. Из чертежа следует, что отрезок длиной l является также гипотенузой в прямоугольном треугольнике bce, в котором x лежит против угла ebc, а этот угол можно определить как разность угла ebO_2 и угла γ_1. Но угол ebO_2 равен углу падения α_1 как вертикальные. Поэтому

$$\sin(\alpha_1 - \gamma_1) = \frac{x}{l}, \quad \text{откуда } l = \frac{x}{\sin(\alpha_1 - \gamma_1)}.$$

Тогда $h = x\dfrac{\cos\gamma_1}{\sin(\alpha_1 - \gamma_1)}$.

Здесь $\sin(\alpha - \gamma_1) = \sin\alpha_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\sin\gamma_1$.

Тогда

$$h = x\frac{\cos\gamma_1}{\sin\alpha_1\cos\gamma_1 - \cos\alpha_1\sin\gamma_1} = \frac{x}{\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1\dfrac{\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1}}$$

(мы разделили числитель и знаменатель правой части равенства на $\cos\gamma_1$),

$$h = \frac{x}{\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1 \dfrac{\sin\gamma_1}{\sqrt{1-\sin^2\gamma_1}}}.$$

Найдем $\sin\gamma_1$ из закона преломления для границы стекло – воздух: $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = n$, откуда $\sin\gamma_1 = \dfrac{\sin\alpha_1}{n}$.

Тогда $h = \dfrac{x}{\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1 \dfrac{\sin\alpha_1}{n\sqrt{1-\dfrac{\sin^2\alpha_1}{n^2}}}} =$

$$= \frac{x}{\sin\alpha_1\left(1 - \dfrac{\cos\alpha_1}{n\sqrt{\dfrac{n^2-\sin^2\alpha_1}{n^2}}}\right)}.$$

или $$\boxed{h = \frac{x}{\sin\alpha_1\left(1 - \dfrac{\cos\ \alpha_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}\right)}}$$

Задача решена.

Ответ: $h = \dfrac{x}{\sin\alpha_1\left(1 - \dfrac{\cos\ \alpha_1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}\right)}$.

Задача 17

На поверхности водоема глубиной H = 5,3 м плавает фанерный круг радиусом r = 1 м, над центром которого на некоторой высоте расположен точечный источник света S (рис. 18-19). Какой должна быть эта высота h, чтобы радиус тени R от круга на дне водоема был максимальным? Найти этот радиус. Показатель преломления воды n = 1,33.

Дано:
$H = 5{,}3$ м
$r = 1$ м
$n = 1{,}33$

R_{max} – ?

Решение. Для ответа на вопрос задачи нам надо установить, как зависит радиус тени R от высоты h, т. е. найти формулу, выражающую эту зависимость при неизменных H, r и n. И записать эту формулу так, чтобы можно было сообразить, как будет меняться радиус R при изменении h. Правда, глядя на рис. 18-19, можно сразу сказать, что при уменьшении h будет увеличиваться угол падения луча на край круга, а вместе с ним будет увеличиваться и угол преломления луча γ. С увеличением γ будет расти и отрезок x на дне водоема, а вместе с ним и радиус тени R. Значит, радиус R будет максимален при $h = 0$. Но надо же найти формулу, устанавливающую связь R с H, r, n и h, а затем, приняв в ней $h = 0$, найти R_{max}.

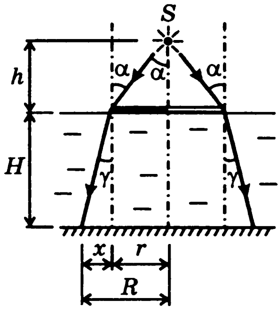


Рис. 18-19

Чтобы установить нужную нам зависимость, обратимся к рис. 18-19. Из него следует, что $R = r + x$, где $x = H\,\mathrm{tg}\,\gamma$, поэтому

$$R = r + H\,\mathrm{tg}\,\gamma. \qquad (1)$$

Давайте сразу перейдем от $\mathrm{tg}\,\gamma$ к $\sin\gamma$, ведь в закон преломления, которым нам неизбежно придется воспользоваться, «входит» $\sin\gamma$:

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1-\sin^2\gamma}}.$$

По закону преломления $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n$, откуда $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n}$.

С учетом этого

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\sin\alpha}{n\sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} = \frac{\sin\alpha}{n\sqrt{\frac{n^2-\sin^2\alpha}{n^2}}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1): $$R = r + H\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}. \qquad (3)$$

Из прямоугольного треугольника с вершиной в точке S и катетами h и r следует, что

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}}. \qquad (4)$$

Как мы уже отметили, радиус R максимален при $h = 0$. Но из (4) следует, что при $h = 0$ $\sin\alpha = 1$. Подставив $\sin\alpha = 1$ в (3), мы ответим на вопрос задачи:

$$\boxed{R_{max} = r + \frac{H}{\sqrt{n^2-1}}}$$

Задача решена.

Ответ: $R_{max} = r + \dfrac{H}{\sqrt{n^2-1}}$.

Задача 18

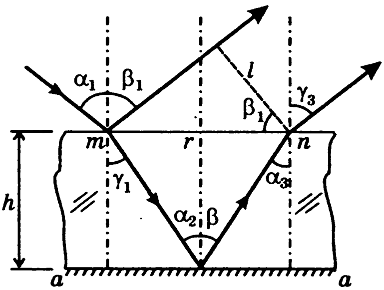


Рис. 18-20

У плоскопараллельной пластинки толщиной h = = 5 см нижняя поверхность ab посеребрена. Луч света, падающий на пластинку под углом α_1 = = 30°, частично отражается от поверхности, частично проходит в пластинку, отражается от нижней поверхности и, преломляясь вторично, выходит в воздух параллельно первому отраженному лучу (рис. 18-20). Найти показатель преломления материала пластинки n, если кратчайшее расстояние между выходящими лучами l = 2,5 см.

Дано:
h = 5 см
$\alpha_1 = 30°$
l = 2,5 см
n – ?

Решение. Запишем закон преломления, в который входит искомый показатель преломления n:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = n. \qquad (1)$$

Теперь попытаемся выразить угол преломления γ_1 через известные величины h и l. Из рис. 18-20 следует, что отрезок $mn = r$, являющийся гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетом l, равен $r = \dfrac{l}{\cos\beta_1}$, ведь острый угол при точке n в этом треугольнике и угол отражения β_1 равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. А $\beta_1 = \alpha_1$ по закону отражения, поэтому $r = \dfrac{l}{\cos\alpha_1}$, а $\dfrac{r}{2} = \dfrac{l}{2\cos\alpha_1}$.

Из прямоугольного треугольника с катетами h и $\dfrac{r}{2}$ и острым углом γ_1 следует, что $\operatorname{tg}\gamma_1 = \dfrac{r}{2h} = \dfrac{l}{2h\cos\alpha_1}$. (2)

Теперь перейдем от тангенса γ_1 к его синусу, ведь для нахождения n по формуле (1) нам нужен $\sin\gamma_1$:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\cos\gamma_1} = \frac{\sin\gamma_1}{\sqrt{1-\sin\gamma_1}}, \quad \operatorname{tg}^2\gamma_1 = \frac{\sin^2\gamma_1}{1-\sin^2\gamma_1},$$

$$\operatorname{tg}^2\gamma_1 - \sin^2\gamma_1 \cdot \operatorname{tg}^2\gamma_1 = \sin^2\gamma_1, \text{ откуда } \sin\gamma_1 = \frac{\operatorname{tg}\gamma_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma_1}}. \quad (3)$$

Теперь подставим (2) в (3):

$$\sin\gamma_1 = \frac{l}{2h\cos\alpha_1\sqrt{1+\dfrac{l^2}{4h^2\cos^2\alpha_1}}} = \frac{l}{\sqrt{(2h\cos\alpha_1)^2+l^2}}. \quad (4)$$

Нам осталось подставить (4) в (1):

$$n = \frac{\sqrt{(2h\cos\alpha_1)^2+l^2}}{l}\sin\alpha_1 \text{ или}$$

$$\boxed{n = \sqrt{\left(2\frac{h}{l}\cos\alpha_1\right)^2+1}\,\sin\alpha_1}$$

Произведем вычисления:

$$n = \sqrt{\left(2\frac{5}{2,5}\cos 30^\circ\right)^2+1}\,\sin 30^\circ = 1,8.$$

Ответ: $n = 1,8$.

Задача 19

На боковую грань треугольной стеклянной призмы с показателем преломления n падает луч под углом α_1. Преломляющий угол призмы φ. Определить угол преломления γ_2 луча и угол отклонения Θ луча призмой. Окружающая призму среда – воздух.

Дано:
n
α_1
φ

γ_2 – ?
Θ – ?

Решение. Отметим, что преломляющий угол призмы φ – это угол, лежащий против основания mp призмы mnp (разумеется, эти понятия условны, поскольку за основание призмы можно принять ее любую грань), угол преломления луча γ_2 – это угол между лучом cd, вышедшим из призмы, и перпендикуляром O_2O_3 ко второй грани np призмы, угол отклонения луча Θ – это угол между мнимым продолжением bf падающего на боковую грань луча ab и мнимым продолжением ее преломленного луча cd, вышедшего из призмы (рис. 18-21).

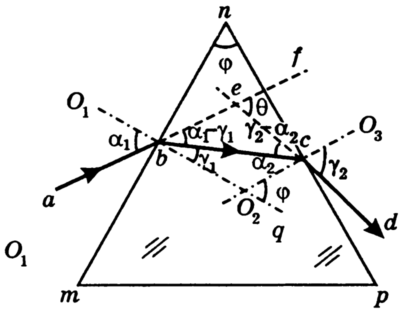


Рис. 18-21

Чтобы решить эту задачу, необходим крупный и четкий чертеж. Перпендикуляры O_1O_2 и O_3O_2 действительно должны быть перпендикулярны к граням mn и np, отрезок луча bc в толще стекла не должен быть параллельным основанию призмы mp, поскольку об этом ничего не сказано, и все разные углы на чертеже должны быть действительно разными, иначе в ваше решение легко может вкрасться ошибка.

Эта задача представляет собой симбиоз (сочетание) физики и геометрии. В ней особенно наглядно подтверждается мысль о том, что без математики физики нет.

Угол преломления γ_2 луча bc можно определить, воспользовавшись законом преломления луча на грани np. Здесь луч переходит из оптически более плотной среды в оптически менее плотную (из стекла в воздух), поэтому

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2} = \frac{1}{n}, \text{ откуда } \quad \sin\gamma_2 = n\sin\alpha_2 .$$

Здесь α_2 – угол паления луча bc на грань np. Он нам не известен, но его можно определить, пользуясь законами геометрии. Обратим внимание на то, что стороны углов φ и cO_2q взаимно перпендикулярны по построению. Следовательно, угол cO_2q равен преломляющему углу призмы φ, который нам известен. Кроме того, угол $cO_2q = \varphi$ является внешним углом треугольника bcO_2. А всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с этим внешним. Такими внутренними углами в треугольнике bcO_2 являются углы γ_1 и α_2. Следовательно, $\varphi = \gamma_1 + \alpha_2$, откуда $\alpha_2 = \varphi - \gamma_1$.

Здесь γ_1 – угол преломления луча на грани *mn*. Он нам тоже не известен, но мы его можем определить из закона преломления луча на грани *mn*. Здесь луч переходит из оптически менее плотной среды в оптически более плотную (из воздуха в стекло), поэтому

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1} = n, \text{ откуда } \sin\gamma_1 = \frac{\sin\alpha_1}{n}.$$

Тогда

$$\sin\gamma_2 = n\sin(\varphi - \gamma_1) = n(\sin\varphi\cos\gamma_1 - \cos\varphi\sin\gamma_1) =$$

$$= n\left(\sin\varphi\sqrt{1-\sin^2\gamma_1} - \cos\varphi\sin\gamma_1\right) =$$

$$= n\left(\sin\varphi\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right)^2} - \cos\varphi\frac{\sin\alpha_1}{n}\right).$$

Отсюда

$$\gamma_2 = \arcsin\left(n\left(\sin\varphi\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}}{n} - \frac{\sin\alpha_1\cos\varphi}{n}\right)\right)$$

или $\boxed{\gamma_2 = \arcsin\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}\cdot\sin\varphi - \sin\alpha_1\cos\varphi\right)}$

Теперь отыщем угол отклонения луча Θ. Из чертежа следует, что этот угол тоже является внешним углом в треугольнике *bec*, поэтому он равен сумме двух внутренних углов этого треугольника *ebc* и *ecb*, не смежных с углом Θ:

$$\angle\Theta = \angle ebc + \angle ecb.$$

Поскольку $\angle ebc = \alpha_1 - \gamma_1$ и $\angle ecb = \gamma_2 - \alpha_2$, то

$\Theta = \alpha_1 - \gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_2$, где $\alpha_2 = \varphi - \gamma_1$, поэтому

$\Theta = \alpha_1 - \gamma_1 + \gamma_2 - \varphi + \gamma_1 = \alpha_1 + \gamma_2 - \varphi$.

$$\boxed{\Theta = \alpha_1 + \gamma_2 - \varphi}$$

Задача решена.

Ответ: $\Theta = \alpha_1 + \gamma_2 - \varphi$,

$$\gamma_2 = \arcsin\left(\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1}\cdot\sin\varphi - \sin\alpha_1\cos\varphi\right).$$

Задача 20

Одна из граней равнобедренной стеклянной треугольной призмы является зеркальной, а на другую грань этой призмы падает перпендикулярно этой грани луч (это значит, что угол падения луча $\alpha_1 = 0°$, ведь угол падения – это угол между лучом и перпендикуляром к грани, а здесь они совпадают). После двух отражений от граней призмы луч выходит из нее перпендикулярно основанию mp (рис. 18-22), т. е. $\gamma_2 = 0°$. Найти преломляющий угол призмы φ. Окружающая среда – воздух.

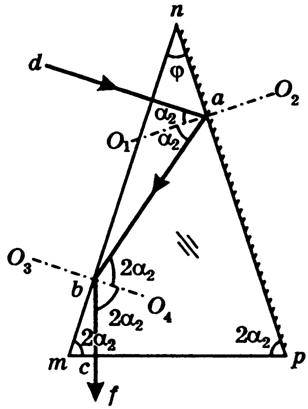


Рис. 18-22

Дано:
$\alpha_1 = 0°$
$\gamma_2 = 0°$

φ – ?

Решение. Отметим, что если луч падает перпендикулярно поверхности, то углы падения, отражения и преломления луча на этой поверхности равны нулю, т. е. луч проходит во вторую среду, не преломляясь. По условию задачи вторая грань призмы зеркальна. Попав на нее, луч отражается под таким же углом α_2, под каким упал согласно закону отражения. Тогда угол dab между падающим и отраженным лучами равен $2\alpha_2$. Но угол α_2 и угол φ равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому

$$\angle dab = 2\alpha_2 = 2\varphi .$$

Далее. Луч da параллелен перпендикуляру O_3O_4 к грани mn (ведь согласно условию задачи луч da тоже перпендикулярен к этой грани). Поэтому угол падения луча ab на грань mn тоже равен $2\alpha_2 = 2\varphi$ и угол отражения луча от этой грани тоже равен $2\alpha_2 = 2\varphi$. Но угол отражения $O_4bf = 2\alpha_2 = 2\varphi$ и угол mnp при основании призмы тоже равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (ведь согласно условию задачи луч bf выходит из призмы перпендикулярно основанию mp), а прямая O_3O_4 перпендикулярна стороне mn угла nmp по построению. Следовательно, угол nmp тоже равен 2φ. Но поскольку наш треугольник по условию задачи равнобедренный, то его углы при основании равны, значит, и второй угол при основании призмы nmp тоже равен 2φ. А так как сумма углов в треугольнике mnp, представляющем собой сечение призмы плоскостью чертежа, всегда равна 180°, то

$$2\varphi + 2\varphi + \varphi = 180°,\ 5\varphi = 180°, \text{ откуда } \varphi = \frac{180°}{5} = 36°.$$

Задача решена.
Ответ: $\varphi = 36°$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Луч переходит из воды в стекло. Угол падения на границу между этими средами $\alpha = 30°$. Найти угол преломления γ. Насколько скорость света в воде больше, чем в стекле? Показатели преломления воды $n_1 = 1{,}33$, стекла $n_2 = 1{,}6$.

Ответ: $\gamma = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right) = 24°$, $\Delta v = c\dfrac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} = 3{,}8 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 2. Найти показатель преломления стекла, если на пути $l = 8$ мкм в стекле укладывается $N = 30$ длин волн монохроматического света, у которого длина волны в вакууме $\lambda_1 = 0{,}5$ мкм.

Ответ: $n = \dfrac{\lambda_1 N}{l} = 1{,}9$.

Задача 3. Показатель преломления стекла относительно воздуха $n_1 = 1{,}5$, показатель преломления воды относительно воздуха $n_2 = 1{,}33$. Найти показатель преломления воды относительно стекла $n_{\text{отн}1}$ и показатель преломления стекла относительно воды $n_{\text{отн}2}$.

Ответ: $n_{\text{отн}1} = 1{,}13$; $n_{\text{отн}2} = 0{,}89$.

Задача 4. Найти скорость света v в скипидаре, если при угле падения $\alpha = 45°$ угол преломления $\gamma = 30°$. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ: $v = \dfrac{c \sin\gamma}{\sin\alpha} = 2 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 5. На границу алмаз–спирт падает луч света под углом α. Определить угол φ между отраженным и преломленным лучами. Абсолютный показатель преломления алмаза n_1, спирта – n_2.

Ответ: $\varphi = 180° - \alpha - \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)$.

Задача 6. При переходе из стекла в воздух луч отклоняется от первоначального направления на угол $\varphi = 10°$. Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$. Найти угол падения луча α.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sin\varphi}{n - \cos\varphi} = 16°$.

Задача 7. Высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$, показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Чему равен угол преломления γ лучей в воде?

Ответ: $\gamma = \arcsin\left(\dfrac{\cos\varphi}{n}\right) = 41°$.

Задача 8. Угол преломления луча в воде $\gamma_1 = 30°$. Чему равен угол преломления γ_2 луча в стекле? Показатель преломления воды $n_1 = 1{,}33$, стекла $n_2 = 1{,}5$. Угол падения α луча на воду и стекло одинаков.

Ответ: $\gamma_2 = \arcsin\left(\dfrac{n_1}{n_2}\sin\gamma_1\right) = 26°18'$.

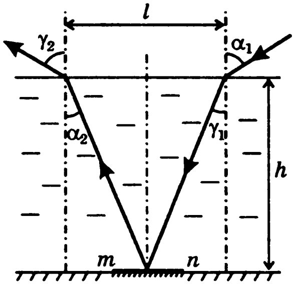


Рис. 18-23

Задача 9. Чему равен угол преломления луча в воде, если он меньше угла падения на $\varphi = 30°$? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: $\gamma = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{n - \cos\varphi}{\sin\varphi}\right) = 14°.$

Задача 10. На горизонтальном дне бассейна, имеющего глубину $h = 2$ м, лежит плоское зеркало mn. Луч света, преломившись на поверхности воды, отражается от зеркала и выходит в воздух. Расстояние от места вхождения луча в воду до места выхода отраженного луча из воды $l = 1{,}5$ м. Найти угол падения луча α (рис. 18-23). Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: $\alpha = \arcsin \dfrac{nl}{\sqrt{4h^2 + l^2}} = 28°.$

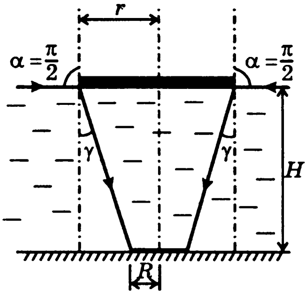


Рис. 18-24

Задача 11. На поверхности озера глубиной $H = 2$ м находится круглый плот радиусом $r = 8$ м. Найти радиус R полной тени от плота на дне озера при освещении воды рассеянным светом (т. е. касательными к поверхности лучами, рис. 18-24). Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Ответ: $R = r - \dfrac{H}{\sqrt{n^2 - 1}} = 5{,}7$ м.

Задача 12. Глубина водоема $H = 2{,}5$ м, показатель преломления воды $n = 1{,}33$. Насколько истинная глубина водоема больше кажущейся?

Ответ: $\Delta h = H\dfrac{n - 1}{n} = 0{,}62$ м.

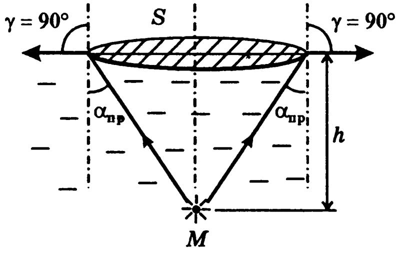


Рис. 18-25

Задача 13. В цистерне с сероуглеродом на глубине $h = 26$ см под поверхностью находится точечный источник света M. Найти площадь круга S на поверхности жидкости, в пределах которой возможен выход лучей в воздух (рис. 18-25). Абсолютный показатель преломления сероуглерода $n = 1{,}64$.

Ответ: $S = \dfrac{\pi h^2}{n^2 - 1} = 0{,}13$ м.

Задача 14. Стеклянная палочка длиной l наполовину погружена в жидкость. Угол между палочкой и поверхностью жидкости φ_1

(рис. 18-26). Какова кажущаяся длина l_1 палочки под водой, если угол между палочкой под водой и ее кажущимся (мнимым) изображением для наблюдателя над водой равен φ_2?

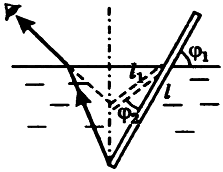


Рис. 18-26

Ответ: $l_1 = \dfrac{l\cos\varphi_1}{2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Задача 15. Столб вбит в дно реки глубиной H так, что часть его возвышается над водой (рис. 18-11). Насколько длина тени на дне реки короче длины тени на ее поверхности? Угол падения лучей на воду α.

Ответ: $\Delta l = H\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$.

Задача 16. На стеклянную сферу падают параллельные лучи. Сфера заполнена водой. Проникшие в воду лучи образуют площадь диаметром d (рис. 18-15). Чему равен объем сферы V (толщиной стекла можно пренебречь). Показатели преломления воды $n_в$, стекла $n_{ст}$.

Ответ: $V = \dfrac{\pi}{6}\left(d\dfrac{n_{cm}}{n_в}\right)^3$.

Задача 17. Луч света падает на плоскопараллельную пластину под углом $\alpha_1 = 60°$. Толщина пластинки $h = 3$ см, показатель преломления вещества пластинки $n = 1{,}5$. Определить длину l луча в пластинке (рис. 18-27). Под каким углом γ_2 луч выйдет из пластинки?

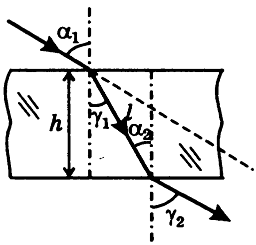


Рис. 18-27

Ответ: $l = \dfrac{nh}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha_1}} = 3{,}7$ см,

$\gamma_2 = \alpha_1 = 60°$.

Задача 18. На какое расстояние x сместится луч света, распространяющийся в стеклянной среде с показателем преломления n, если на его пути имеется плоскопараллельная щель шириной h, заполненная воздухом (рис. 18-28)? Угол падения луча на щель равен α_1. Полного отражения не происходит.

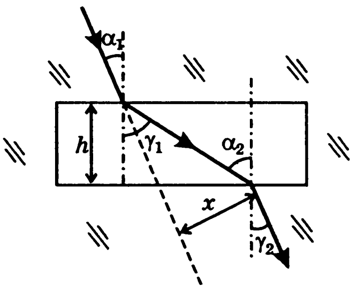


Рис. 18-28

Ответ:

$$x = \left(\frac{n\cos\alpha_1}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha_1}} - 1\right)\cdot h\cdot\sin\alpha_1$$

Задача 19. Луч света выходит из треугольной призмы под тем же углом, под каким входит в призму ($\alpha_1 = \gamma_2$), причем отклоняется от первоначального направления на угол Θ (рис. 18-29). Преломляющий угол призмы $\varphi = 45°$. Найти показатели преломления вещества призмы n.

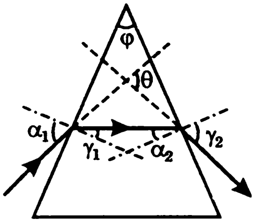


Рис. 18-29

Ответ: $n = \dfrac{\sin 0{,}5(\Theta + \varphi)}{\sin 0{,}5\varphi} = 1{,}3.$

Задача 20. Призма с преломляющим углом $\varphi = 60°$ сделана из стекла с показателем преломления $n = 1{,}75$. При каком угле падения α_1 луч света не выйдет из второй грани?

Указание: так будет, когда на вторую грань луч упадет под предельным углом ($\alpha_2 = \alpha_{пред}$, рис. 18-30).

Ответ:

$$\sin\alpha \leqslant \sqrt{n^2 - 1}\cdot\sin\varphi - \cos\varphi, \alpha \leqslant 48°.$$

Задача 21. Сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника (рис. 18-31). Луч падает на одну из граней перпендикулярно к ней. Найти угол Θ между направлениями падающего луча и луча, вышедшего из призмы. Показатель преломления вещества призмы $n = 1{,}5$. *Указание:* обратить внимание на то, что $\alpha_2 < \alpha_{пред}$.

Ответ: $\Theta = 60°$.

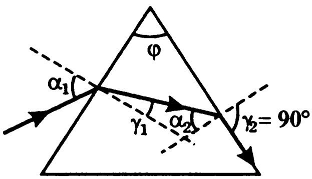


Рис. 18-30

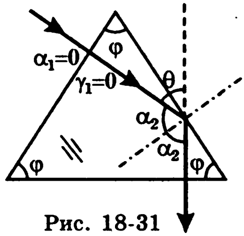


Рис. 18-31

19. ЛИНЗЫ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Линзы – это прозрачные для света тела, ограниченные сферическими поверхностями, одна из которых может быть плоской.

Прямая mn, проходящая через центры O_1 и O_2 сфер, из которых образована линза, называется ее главной оптической осью (рис. 19-1). Точка F, в которой пересекаются после преломления лучи, падающие на собирающую двояковыпуклую линзу параллельно ее главной оптической оси, называется действительным фокусом линзы (рис. 19-1, *а*). Рассояние F от главного оптического центра линзы О до ее фокуса называется фокусным расстоянием.

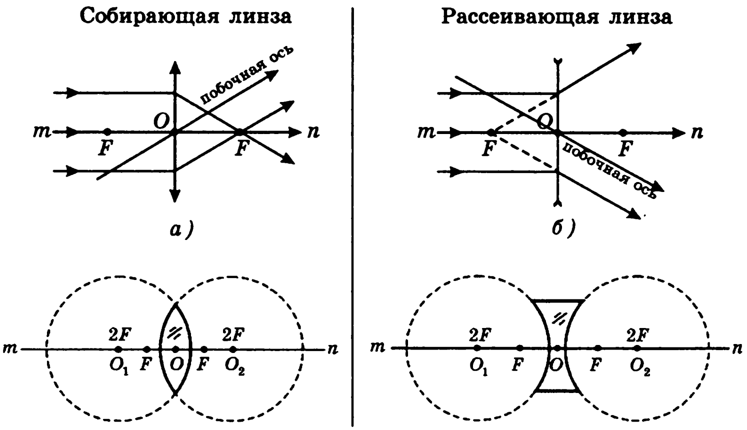


Рис. 19-1

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F}=(n-1)\left(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right).$$

Здесь F – фокусное расстояние линзы, n – показатель преломления, R_1 и R_2 – радиусы кривизны ее поверхностей, d – расстояние от предмета до линзы, f – расстояние от линзы до изображения.

Если линза плоско-выпуклая, то ее плоская поверхность имеет бесконечно большой радиус кривизны, т. е. $R_1 = \infty$ и $\frac{1}{R_1} = 0$. При этом формула линзы принимает вид

$$\pm\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\pm\frac{1}{F}=(n-1)\left(\pm\frac{1}{R}\right),\ R_2 = R.$$

Если поверхность вогнутая, то ее радиус кривизны отрицателен, а если выпуклая – положителен. Соответственно, если линза двояковыпуклая, то $R_1 > 0$ и $R_2 > 0$, если выпукло-вогнутая, то $R_1 > 0$ и $R_2 < 0$, если двояковогнутая, то $R_1 < 0$ и $R_2 < 0$. При этом ее фокус мнимый и $F < 0$.

У рассеивающей (двояковогнутой) линзы фокус F мнимый, поскольку в нем пересекаются мнимые продолжения рассеянных лучей, которые упали на линзу параллельно ее главной оптической оси (рис. 19-1, *б*).

Любой луч, идущий через главный оптический центр тонкой линзы O, не преломляется. Если такой луч падает на линзу под углом к главной оптической оси, то он называется побочной осью. Каждая линза имеет одну главную оптическую ось и бесконечно большое число побочных осей.

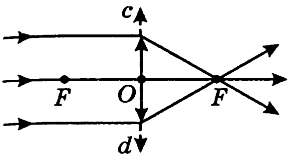


Рис. 19-2

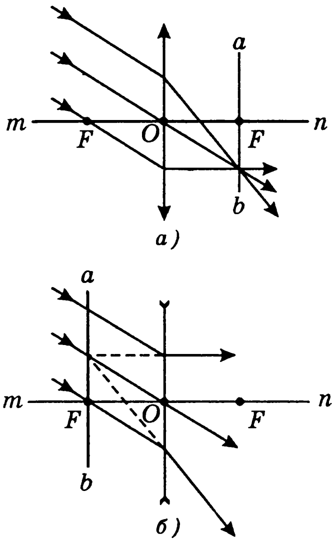


Рис. 19-3

Плоскость cd, проходящая через главный оптический центр линзы O перпендикулярно ее главной оптической оси, называется главной плоскостью линзы. Если размеры линзы меньше диаметра светового пучка, падающего на нее, то главную плоскость линзы можно продолжить до размеров светового пучка и более (рис. 19-2), строить изображение, как если бы сама линза была такого же размера.

Плоскость ab, проходящая через фокус линзы F перпендикулярно ее главной оптической оси mn, называется главной фокальной плоскостью линзы. Главная фокальная плоскость ab собирающей линзы является геометрическим местом точек, в которых пересекаются параллельные лучи, падающие на линзу под углом к главной оптической оси (рис. 19-3, a). Главной фокальной плоскостью ab рассеивающей линзы является геометрическое место точек, в которых пересекаются мнимые продолжения рассеянных лучей, падающих на рассеивающую линзу под углом к ее главной оптической оси параллельным пучком (рис. 19-3, $б$).

На рис. 19-4 возле каждого построения изображения A_1B_1 предмета AB мы записали формулу линзы применительно к данному случаю. В общем случае формула тонкой линзы имеет следующий вид:

$$\pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm\frac{1}{F}.$$

Здесь d – расстояние от предмета до линзы, f – расстояние от линзы до изображения, F – фокусное расстояние линзы.

Знак «плюс» ставится перед $\frac{1}{d}$, когда предмет действительный, перед $\frac{1}{f}$, когда изображение действительное, перед $\frac{1}{F}$, когда фокус действительный. Знак «минус» ставится перед $\frac{1}{d}$, когда предмет мнимый, перед $\frac{1}{f}$, когда изображение мнимое, и перед $\frac{1}{F}$, когда фокус мнимый. Мнимые продолжения лучей и мнимые изображения предметов принято изображать штриховой линией. На

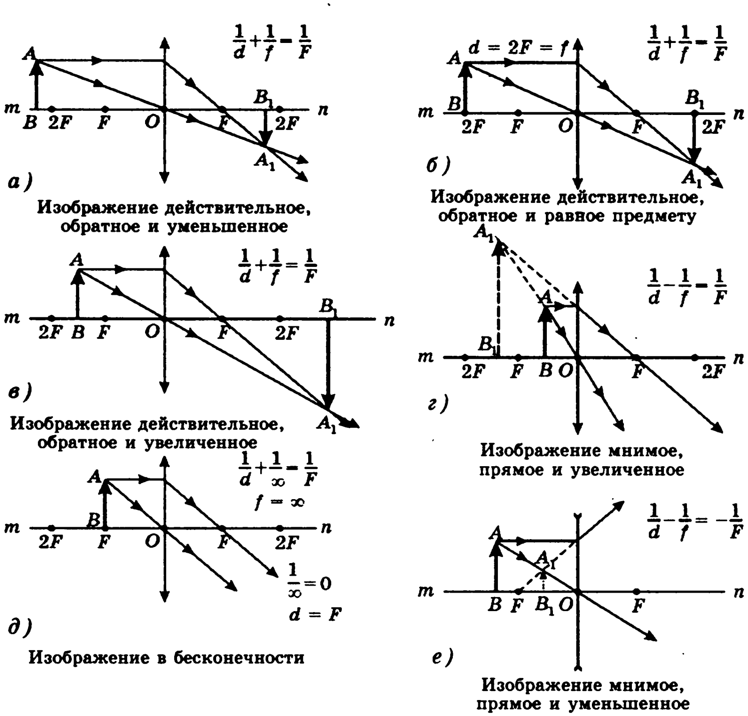
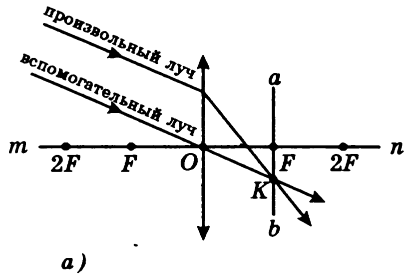


Рис. 19-4

рис. 19-4 показано построение изображения A_1B_1 предмета AB в собирающей и рассеивающей линзах.

При решении задач на прохождение световых лучей сквозь линзы и получение изображений в них прежде всего выясните, о какой линзе идет речь: собирающей или рассеивающей (если в условии задачи написано просто «линза», значит, она собирающая). Непременно сделайте чертеж, на котором соответствующими буквами обозначьте все основные размеры: расстояние от предмета до линзы d, расстояние от линзы до изображения f и фокусное расстояние линзы F (в разных пособиях эти расстояния обозначают разными буквами, но мы надеемся, что вы не запутаетесь, если фокусное расстояние будет обозначено не F, а f или как-нибудь еще, ведь главное – понимать, о чем идет речь). На чертеже обозначьте также оптический центр линзы O и оба фокуса по разные стороны линзы на ее главной оптической оси. При построении изображения следует заранее выучить, каким оно должно быть при соответствующем расположении предмета относительно линзы и где находиться (мнимым или действительным, прямым или обратным и т. д.). В противном случае при неверном построении, когда вы чуть-чуть искривите луч или он пойдет не совсем через фокус или центр, изображение может оказаться не там, где надо, или вместо увеличенного уменьшенным, и тогда в решении появится ошибка.

В большинстве задач на тонкие линзы имеется в виду, что кривизна их поверхностей одинакова, значит, и фокусные расстояния с обеих сторон линзы одинаковы тоже, поэтому отрезки OF на вашем чертеже между фокусами и оптическим центром линзы с обеих сторон от линзы тоже должны быть одинаковыми, в противном случае нужного изображения вы не получите.



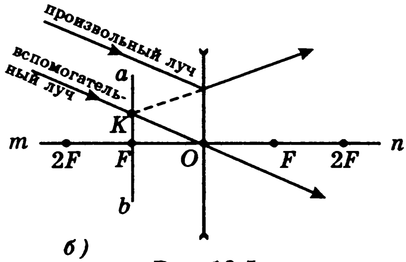


Рис. 19-5

Знание свойств фокальной плоскости позволяет построить после преломления в линзе ход любого луча, падающего на нее под произвольным углом к главной оптической оси (помним, что через фокус собирающей линзы пойдет после преломления только тот луч, который упал на линзу параллельно ее главной оптической оси, а через фокус рассеивающей линзы пойдет мнимое продолжение только параллельного главной оптической оси луча). Пусть на собирающую линзу падает произвольный луч (рис. 19-5). Как указать направление его хода после преломления? Для этого постройте с другой стороны линзы фокальную плоскость ab и проведите через главный оптический центр линзы O вспомогательный луч, параллельный вашему произвольному. Пусть вспомогательный луч пересечет фокальную плоскость ab в некоторой точке K. Тогда, поскольку произвольный и вспомогательный лучи параллельны, через эту точку K пойдет произвольный луч после преломления в линзе (рис. 19-5, *а*).

Если линза рассеивающая, то постройте фокальную плоскость с той же стороны линзы, где проходит падающий луч, а затем опять проведите вспомогательный луч параллельно падающему (через точку O). Поскольку вспомогательный луч идет через главный оптический центр, т. е. вдоль побочной оси, он не преломляется. Пусть он пересечет фокальную плоскость ab в точке K. Поскольку произвольный и вспомогательный лучи параллельны, значит, в точке K должны пересечься мнимые продолжения этих лучей, поэтому мнимое продолжение произвольного луча пойдет в точку К, а сам луч после преломления пойдет в противоположном мнимому продолжению направлении (рис. 19-5, б).

Предмет или источник света является мнимым в том случае, когда на линзу падает пучок сходящихся лучей (рис. 19-6). В этом случае точка S, являющаяся вершиной светового конуса, служит мнимым источником света. Интересно, что при этом изображение S_1 этого мнимого источника является действительным, так как образовано действительными лучами, пересекшимися в точке S_1 после преломления в собирающей линзе.

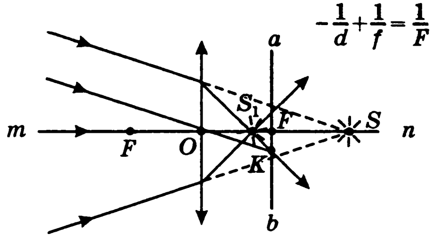


Рис. 19-6

Таким образом, если в условии задачи сказано, что на линзу падает пучок сходящихся лучей, то в формуле линзы перед $\frac{1}{d}$ вы должны поставить знак «минус», причем неважно, какая это линза, собирающая или рассеивающая.

Величина, обратная фокусному расстоянию линзы, называется ее оптической силой D. Соответственно формула линзы может быть записана так:

$$D = \frac{1}{F} \quad \text{и} \quad \pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm D.$$

Единица оптической силы в СИ – диоптрия (дптр). Одна диоптрия – оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м. Если F = 25 см, то $D = \left(\frac{1}{0{,}25}\right)$ дптр = 4 дптр.

У рассеивающей линзы оптическая сила отрицательна, а у собирающей – положительна. Знак «минус» можно поставить сразу в общей формуле, тогда при записи численных значений его еще раз ставить не нужно. Если же в формуле рассеивающей линзы при записи в буквенных обозначениях вы поставили перед $D = \frac{1}{F}$ «плюс», то при записи численных величин знак «минус» ставить надо обязательно, иначе ответ будет неверным.

Увеличением линзы Г называется отношение линейного размера изображения H к линейному размеру предмета h (так же будет, если изображение уменьшенное). Линейное увеличение линзы $Г$ равно отношению расстояния f от изображения до линзы к расстоянию d от предмета до линзы:

$$Г = \frac{H}{h} \quad \text{и} \quad Г = \frac{f}{d}.$$

Если на линзу падает пучок параллельных лучей, то их точечный источник удален в бесконечность и $d = \infty$, поэтому $\frac{1}{d} = 0$. Тогда эти лучи пересекутся в фокусе или в точке, лежащей на фокальной плоскости, поэтому расстояние от изображения до линзы f будет равно фокусному расстоянию линзы F. Таким образом, при $d = \infty$, $\frac{1}{d} = 0$ и $f = F$.

Если после преломления в линзе лучи пошли параллельным пучком, значит, изображение точечного источника ушло в бесконечность, т. е. $f = \infty$ и $\frac{1}{f} = 0$. Так может быть, если источник света находился в фокусе или на фокальной плоскости, т. е. расстояние d от источника света до линзы было равно фокусному расстоянию. Таким образом, если $f = \infty$, то $\frac{1}{f} = 0$ и $d = F$.

Если линза расколота на несколько частей, то изображение источника света или предмета в каждой части строится точно так же, как если бы это была целая линза. При этом к любому осколку можно достроить недостающую часть линзы и дальше строить так, как если бы она была целой, сохранив положение ее главного оптического центра, оси и фокусов.

В условиях задач часто осью линзы называют ее главную оптическую ось, а не побочную.

В задачах на систему линзы и плоского зеркала постройте сначала изображение S_1 источника света S, даваемое линзой (или изображение предмета, если о нем идет речь). Это изображение S_1 будет являться источником по отношению к плоскому зеркалу ab. При этом расстояние d_1 от источника света S_1 до плоского зеркала ab будет равно расстоянию d_2, от второго изображения источника света S_2, полученного в зеркале, до зеркала (рис. 19-7).

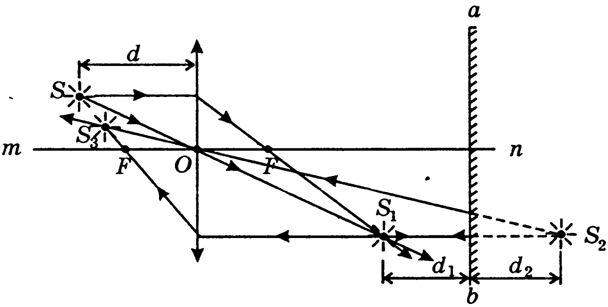


Рис. 19-7

Это вторичное изображение S_2 будет еще одним источником света для линзы, которая «даст» еще одно, третье изображение S_3. Это третье изображение S_3 и будет изображением, даваемым системой. Таким образом, в системе линза – плоское зеркало получаются три изображения. Какими они будут, действительными или мнимыми и где будут располагаться, зависит от того, какая это линза: собирающая или рассеивающая и где располагаются источник света и плоское зеркало по отношению к фокусам линзы.

В задачах на систему линз изображение A_1B_1 предмета AB в первой линзе является предметом для второй линзы (рис. 19-8), изображение, даваемое второй линзой, – предметом для третьей, и т. д. При этом опять же нужно обращать внимание на расположение источника и линз относительно их фокусных расстояний, помня, что если источник находится за фокусом собирающей линзы, то его действительное изображение будет по другую сторону линзы, а если он между фокусом и линзой, то его мнимое изоб-

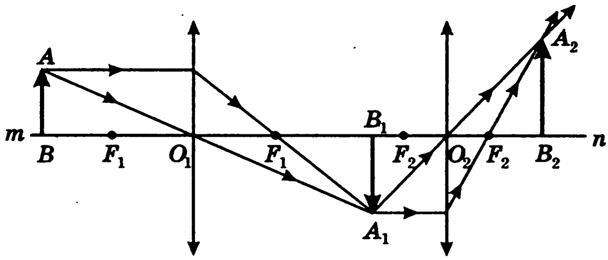


Рис. 19-8

ражение будет по ту же сторону линзы, что и сам источник. Поэтому обязательно обращайте внимание на численные значения расстояния от предмета до линзы, расстояния между линзами и фокусных расстояний линз, а также на то, какие это линзы: собирающие или рассеивающие.

Как рассеивающая, так и собирающая линзы могут давать мнимое изображение, но только у собирающей линзы оно увеличенное, а у рассеивающей уменьшенное.

Если в условии задачи сказано, что линзы сложены вплотную, то такую систему линз следует рассматривать как линзу, оптическая сила которой $D_{общ}$ равна алгебраической сумме (т. е. с учетом всех плюсов и минусов) оптических сил каждой линзы в отдельности:

$$D_{общ} = \sum_{i=1}^{N} D_i .$$

Общее фокусное расстояние такой системы линз обратно общей оптической силе этой системы:

$$F_{общ} = \frac{1}{D_{общ}}; \; D_{общ} = \frac{1}{F_{общ}} .$$

Если линзы расположены на расстоянии друг от друга, то общим фокусом $F_{общ}$ системы этих линз называется точка, в которой пересекутся по выходе из последней линзы лучи, упавшие на первую линзу параллельным пучком (рис. 19-9). При этом фокусным расстоянием такой системы называют расстояние от этой точки $F_{общ}$ до главного оптического центра последней линзы $F_{общ}\,O_2$.

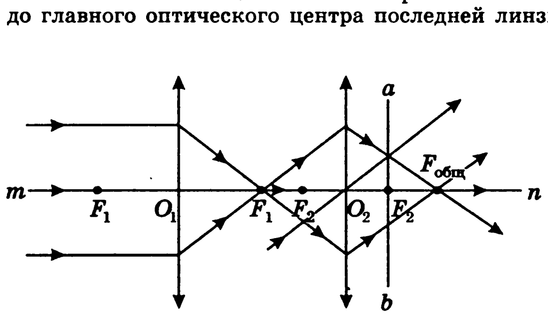


Рис. 19-9

Линейное увеличение лупы Г определяют отношением расстояния наилучшего зрения $d_0 = 0{,}25$ м к фокусному расстоянию лупы F:

$$\Gamma = \frac{d_0}{F}.$$

Расстоянием наилучшего зрения d_0 называется расстояние между глазом и рассматриваемым предметом, когда нормальный глаз видит предмет не напрягаясь. У близорукого глаза параллельные лучи, падающие на хрусталик, играющий роль двояковыпуклой собирающей линзы, пересекаются не на сетчатке, а ближе, между сетчаткой и хрусталиком, из-за того, что хрусталик толще нормального.

Чтобы исправить зрение, т. е. «перенести» точку пересечения параллельных лучей на сетчатку, надевают очки с отрицательной оптической силой, которые «ведут себя», как рассеивающая линза. У дальнозоркого глаза, наоборот, параллельные лучи, пройдя хрусталик, который тоньше нормального, пересекаются позади сетчатки (точнее там пересекаются их продолжения). Чтобы исправить зрение, в этом случае надевают очки с положительной оптической силой, которые подобны собирающей линзе. Для глаза без очков формула линзы может быть записана так:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_{\text{глаза}},$$

а для глаза в очках так:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_{\text{глаза}} \pm D_{\text{очков}}.$$

Здесь $D_{\text{глаза}}$ – оптическая сила глаза, $D_{\text{очков}}$ – оптическая сила очков, d – расстояние от предмета до глаза (хрусталика), f – расстояние от хрусталика до сетчатки.

Решение отдельных задач

Задача 1

Линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см дает уменьшенное в 4 раза мнимое изображение. Чему равно расстояние d от предмета до линзы и расстояние f от линзы до изображения?

Дано:
$F = 20$ см
$\Gamma = \frac{1}{4} = 0{,}25$

d – ?
f – ?

Решение. Мнимое и уменьшенное изображение дает рассеивающая (двояковыгнутая) линза (см. рис. 19-4, е). Запишем формулу рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F} \qquad (1)$$

и формулу ее линейного уменьшения:

$$\Gamma = \frac{f}{d}, \text{ откуда } f = \Gamma d. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1) и отыщем расстояние d:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{\Gamma d}=-\frac{1}{F} \text{ или } \frac{1-\Gamma}{\Gamma d}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } \boxed{d=F\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}$$

Согласно (2) $\boxed{f=\Gamma d}$

Произведем вычисления:

$$d=20\frac{1-0{,}25}{0{,}25}\text{ см}=60\text{ см},$$

$f=0{,}25\cdot 60$ см $=15$ см.

Ответ: $d=60$ см, $f=15$ см.

Задача 2

Расстояние от предмета до одной линзы $d_1=20$ см, ее фокусное расстояние $F_1=6$ см. Чему равно фокусное расстояние F_2 другой линзы, если при расстоянии между ней и предметом $d_2=15$ см расстояние f от нее до изображения такое же, как и у первой линзы?

Дано:
$d_1=20$ см
$F_1=6$ см
$d_2=15$ см

F_2 – ?

Решение. Запишем формулу линзы применительно к ним обеим (раз нам не сказали, значит, будем считать, что они собирающие):

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{d_2}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F_2}.$$

Вычтем из первой формулы вторую. Так мы исключим неизвестное расстояние f от линзы до изображения и получим одно уравнение с одним неизвестным фокусным расстоянием F_2:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f}-\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{F_2},$$

$$\frac{1}{F_2}=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{d_1d_2-d_2F_1+d_1F_1}{d_1d_2F_1}=\frac{d_1d_2+F_1(d_1-d_2)}{d_1d_2F_1},$$

откуда $$\boxed{F_2=\frac{d_1d_2F_1}{d_1d_2+F_1(d_1-d_2)}}$$

Произведем вычисления:

$$F_2=\frac{20\cdot 15\cdot 6}{20\cdot 15+6(20-15)}\text{ см}=5{,}45\text{ см}.$$

Ответ: $F_2=5{,}45$ см.

Задача 3

Расстояние от предмета до переднего фокуса собирающей линзы l_1, а расстояние от ее заднего фокуса до изображения l_2. Чему равно фокусное расстояние линзы F и ее линейное увеличение $Г$?

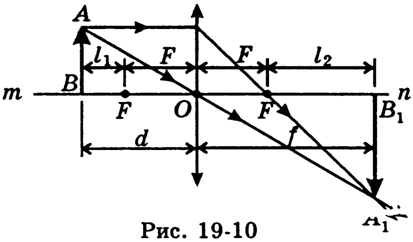


Рис. 19-10

Дано:
l_1
l_2
F – ?
$Г$ – ?

Решение. Выполним чертеж (рис. 19-10). Из него следует, что расстояние от предмета AB до линзы $d = l_1 + F$, а расстояние от линзы до изображения $f = F + l_2$. Тогда формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

можно записать так:

$$\frac{1}{l_1 + F} + \frac{1}{F + l_2} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда, выполнив несложные алгебраические преобразования, отыщем фокусное расстояние F:

$$F(F + l_2) + F(l_1 + F) = (l_1 + F)(F + l_2),$$

$$F^2 + Fl_2 + Fl_1 + F^2 = Fl_1 + F^2 + l_1 l_2 + Fl_2,$$

$$F^2 = l_1 l_2, \text{ откуда } \boxed{F = \sqrt{l_1 l_2}} \qquad (1)$$

Выражение (1) называется формулой Ньютона для тонкой линзы.

Увеличение линзы Г определим по формуле

$$Г = \frac{f}{d} \text{ или } Г = \frac{l_2 + F}{l_1 + F}. \qquad (2)$$

Можно задачу считать уже решенной, ведь фокусное расстояние F мы нашли. Но давайте подставим (1) в (2) и выведем еще одно красивое выражение уже для увеличения $Г$:

$$Г = \frac{l_2 + \sqrt{l_1 l_2}}{l_1 + \sqrt{l_1 l_2}} = \frac{\sqrt{l_2^2} + \sqrt{l_1}\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1^2} + \sqrt{l_1}\sqrt{l_2}} = \frac{\sqrt{l_2}(\sqrt{l_2} + \sqrt{l_1})}{\sqrt{l_1}(\sqrt{l_1} + \sqrt{l_2})},$$

$$\boxed{Г = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}}$$

Задача решена.

Ответ: $F = \sqrt{l_1 l_2}$, $Г = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$.

Задача 4

Вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см расположен предмет AB, конец которого находится на расстоянии $d_1 = 17{,}9$ см от линзы, а начало – на расстоянии $d_2 = 18{,}1$ см. Найти линейное увеличение Γ изображения A_1B_1 этого предмета (рис. 19-11).

Дано:
$F = 12$ см
$d_1 = 17{,}9$ см
$d_2 = 18{,}1$ см

Γ – ?

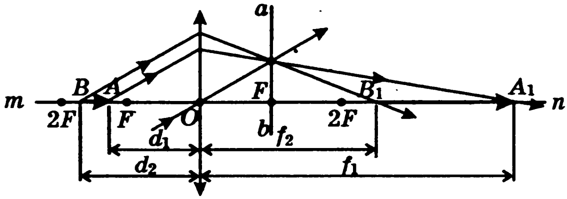


Рис. 19-11

Решение. Обратим внимание на то, что и начало, и конец предмета AB, судя по численным значениям d_1, d_2 и F, находятся между фокусом F и двойным $2F$ собирающей линзы, следовательно, изображение A_1B_1 этого предмета будет располагаться за двойным фокусом линзы и будет действительным и увеличенным. Обозначим f_1 расстояние от конца изображения A_1 до линзы, а f_2 – расстояние от начала изображения B_1 до нее. Тогда линейный размер изображения A_1B_1 равен $f_1 - f_2$, а линейный размер предмета AB равен $d_2 - d_1$.

Линейное увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{f_1 - f_2}{d_2 - d_1}. \qquad (1)$$

Расстояния f_1 и f_2 определим из формулы линзы:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}, \text{ и } \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}, \text{ откуда}$$

$$f_1 = \frac{d_1 F}{d_1 - F} \quad (2) \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{d_2 F}{d_2 - F}. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\Gamma = \frac{\dfrac{d_1 F}{d_1 - F_1} - \dfrac{d_2 F}{d_2 - F}}{d_2 - d_1} = \frac{F(d_1 d_2 - d_1 F - d_1 d_2 + d_2 F)}{(d_1 - F)(d_2 - F)(d_2 - d_1)} =$$

$$= \frac{F^2(d_2 - d_1)}{(d_1 - F)(d_2 - F)(d_2 - d_1)},$$

$$\boxed{\Gamma = \frac{F^2}{(d_1 - F)(d_2 - F)}}$$

Произведем вычисления:

$$\Gamma = \frac{12^2}{(17{,}9 - 12)(18{,}1 - 12)} = 4.$$

Ответ: $\Gamma = 4$.

Задача 5

Кинооператору требуется снять автомобиль, движущийся со скоростью $v = 72$ км/ч на расстоянии $d = 26$ м от киноаппарата. Фокусное расстояние объектива кинокамеры $F = 13$ мм. Каким должно быть время экспозиции (экспозиция), чтобы размытость изображения автомобиля на кинопленке не превышала величины $l = 0{,}05$ мм?

Дано:

$v = 72\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$

$d = 26$ м

$F = 13$ мм

$l = 0{,}05$ мм

---

t – ?

Решение. Сначала дадим некоторые пояснения. Время экспозиции t – это время, в течение которого затвор киноаппарата открыт и свет свободно проникает внутрь кинокамеры на киноленту. В течение этого времени автомобиль движется и проходит некоторое расстояние S. Изображение этого расстояния на кинопленке и есть размытость изображения автомобиля l.

Поскольку автомобиль AB находится далеко за двойным фокусным расстоянием объектива кинокамеры, который представляет собой собирающую линзу, то изображение автомобиля A_1B_1 на кинопленке будет действительным, обратным и сильно уменьшенным. Линейным увеличением изображения Г (точнее его уменьшением) в данном случае будет отношение размытости изображения l к пути S, проходимому автомобилем за время экспозиции t. Поскольку, судя по условию задачи, автомобиль движется равномерно, то этот путь согласно уравнению равномерного движения

$$S = vt, \text{ и тогда } \Gamma = \frac{l}{S} = \frac{l}{vt}.$$

С другой стороны, $\Gamma = \frac{f}{d}$, где f – расстояние между объективом и изображением автомобиля на ленте.

Его можно опять определить из формулы линзы, как и в предыдущей задаче:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } f=\frac{dF}{d-F}.$$

Тогда $Г=\dfrac{f}{d}=\dfrac{dF}{d(d-F)}=\dfrac{F}{d-F}$ и $\dfrac{l}{vt}=\dfrac{F}{d-F}$,

откуда $$\boxed{t=\frac{l(d-F)}{vF}}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: 72 км/ч = 72·1000/3600 м/с = 20 м/с, 13 мм = = 0,013 м, 0,05 мм = $5\cdot10^{-5}$ м.

$$t=\frac{5\cdot10^{-5}(26-0{,}013)}{20\cdot0{,}013}\text{ с} = 5\cdot10^{-3}\text{ с} = 5\text{ мс}.$$

Ответ: t = 5 мс.

Задача 6

Расстояние от предмета до экрана L = 0,8 м. Линза дает на экране четкое изображение предмета при двух ее положениях, расстояние между которыми l = 0,2 м. Найти оптическую силу линзы D.

Дано:
L = 0,8 м
l = 0,2 м

D – ?

Решение. Согласно условию задачи, положение предмета AB и экрана не меняется, а передвигают линзу. Пусть при ее первом положении (рис. 19-12, *а*) предмет находился между фокусом F и двойным фокусом $2F$ линзы и при этом его изображение A_1B_1 на экране оказалось за $2F$ с другой стороны линзы. Затем линзу передвинули так, что предмет оказался за ее двойным фокусом, а изображение на экране – между F и $2F$ (рис. 19-12, б). В первом случае расстояние между предметом и линзой было d, а между линзой и изображениями – f. Когда линзу отодвинули от предмета на расстояние l и приблизили на столько же к экрану, расстояние между предметом и линзой стало $d + l$, а между линзой и изображением оно

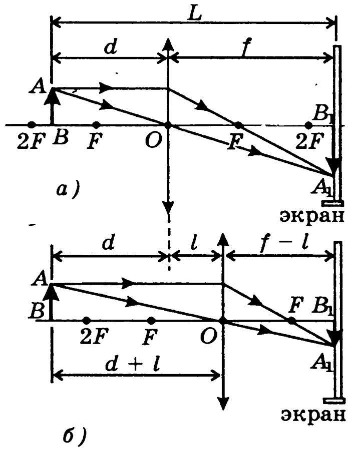


Рис. 19-12

стало $f - l$. Запишем формулу линзы применительно к первому и второму ее положениям:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D \quad (1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{d+l} + \frac{1}{f-l} = D. \qquad (2)$$

Теперь учтем, что согласно условию задачи и рис. 19-12, *а*

$$L = d + f. \qquad (3)$$

Мы имеем три уравнения с тремя неизвестными: «ненужными» d и f и «нужной» D. Выразим из (3) f и подставим его в (1) и (2):

$$f = L - d, \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = D, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{d+l} + \frac{1}{L-d-l} = D. \qquad (6)$$

Если приравнять левые части равенств (5) и (6), мы сможем отыскать расстояние d. Нам его, правда, определять не требуется, но зная d, мы легко найдем и D, например, по формуле (5). Приступим:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{L-d} = \frac{1}{d+l} + \frac{1}{L-d-l},$$

$$\frac{L-d+d}{d(L-d)} = \frac{L-d-l+d+l}{(d+l)(L-d-l)},$$

$$\frac{L}{d(L-d)} = \frac{L}{(d+l)(L-d-l)},$$

$$dL - d^2 = dL + lL - d^2 - dl - dl - l^2,$$

$$2dl = l(L - l), \text{ откуда } d = \frac{L-l}{2}. \qquad (7)$$

Нам осталось подставить (7) в (5) и отыскать D. Проделаем эти действия:

$$\frac{2}{L-l} + \frac{1}{L - \frac{L-l}{2}} = D, \quad \frac{2}{L-l} + \frac{2}{2L-L+l} = D,$$

$$D = 2\left(\frac{1}{L-l} + \frac{1}{L+l}\right) = 2\frac{L+l+L-l}{L^2-l^2},$$

$$\boxed{D = \frac{4L}{L^2 - l^2}}$$

Произведем вычисления:

$$D = \frac{4 \cdot 0{,}8}{0{,}64 - 0{,}04} \text{ дптр} = 5{,}3 \text{ дптр.}$$

Ответ: $D = 5{,}3$ дптр.

Задача 7

Точечный предмет движется по окружности со скоростью $v_1 = 3$ см/с вокруг главной оптической оси собирающей линзы в плоскости, перпендикулярной оси и отстоящей от линзы на расстояние $d = 1{,}5F$, где F – фокусное расстояние линзы. В каком направлении и с какой скоростью v_2 движется изображение предмета?

Дано:
$v_1 = 3\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$
$d = 1{,}5\ F$
v_2 – ?

Решение. Очевидно, что время полного оборота точечного предмета M вокруг оси, т. е. период обращения, равно времени полного оборота изображения M_1 вокруг оси (рис. 19-13). Линейная скорость v_1 предмета M связана с периодом вращения T и радиусом окружности R_1 известной из кинематики формулой

$$v_1 = \omega R_1 = \frac{2\pi}{T} R_1.$$

Здесь ω – угловая скорость предмета.

Аналогично $v_2 = \omega R_2 = \frac{2\pi}{T} R_2$, где R_2 – радиус окружности, по которой вращается изображение предмета M_1. Разделив эти равенства друг на друга, мы исключим неизвестный нам период вращения T и сможем выразить искомую скорость v_2 через известную скорость v_1:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\pi R_1 \cdot T}{T \cdot 2\pi R_2} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ откуда } v_2 = v_1 \frac{R_2}{R_1}.$$

Правда, здесь нам не известны радиусы окружностей, по которым вращаются предмет и его изображение. Однако нетрудно сообразить, что отношение радиусов $\frac{R_2}{R_1}$ представляет собой линейное увеличение линзы $Г$, которое, с другой стороны, равно отношению расстояния f от изображения до линзы к расстоянию d от предмета до линзы: $Г = \frac{R_2}{R_1}$ и $Г = \frac{f}{d}$, поэтому $\frac{R_2}{R_1} = \frac{f}{d}$.

Значит,
$$v_2 = v_1 \frac{f}{d}. \qquad (1)$$

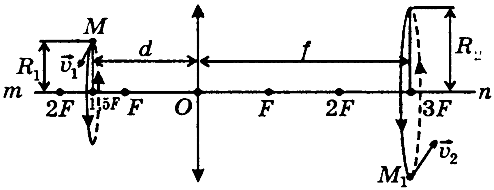


Рис. 19-13

Для определения расстояния l воспользуемся формулой линзы. Обратим внимание на то, что предмет по условию задачи находится на расстоянии $d = 1{,}5F$ от линзы, т. е. посередине между фокусом F и двойным фокусом $2F$ линзы. В этом случае изображение M_1, даваемое собирающей линзой, будет действительным и будет находиться под осью, двигаясь за чертеж от наблюдателя, если сам предмет будет двигаться от чертежа к наблюдателю (рис. 19-13). Значит, предмет M и его изображение M_1 будут двигаться в противоположных направлениях. Поскольку изображение действительное, то формула собирающей линзы будет иметь вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ откуда } \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{d-F}{dF} \text{ или } f = \frac{dF}{d-F}. \quad (2)$$

Подставим в выражение (2) значение $d = 1{,}5F$. Получим

$$f = \frac{1{,}5F \cdot F}{1{,}5F - F} = \frac{1{,}5F^2}{0{,}5F} = 3F. \quad (3)$$

Теперь подставим (3), а также $d = 1{,}5F$ в (1):

$$v_2 = v_1 \frac{3F}{1{,}5F}, \quad \boxed{v_2 = 2v_1}$$

Задача в общем виде решена. Подставим числа и произведем вычисления:

$$v_2 = 2 \cdot 3 \ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 6 \ \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v_2 = 6$ см/с.

Задача 8

На каком расстоянии d от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние L между ним и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см.

Дано:	*Решение.* Расстояние между предметом и изображением
$F = 10$ см	$L = d + f$, откуда $f = L - d$. (1)
$L - min$	
$d - ?$	По формуле линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ или с уче-

том (1)
$$\frac{1}{d}+\frac{1}{L-d}=\frac{1}{F}. \qquad (2)$$

Из (2) определим d, а затем попробуем понять, при каком d расстояние L будет минимальным:

$F(L - d) + dF = d(L - d)$, $\quad FL - dF + dF = dL - d^2$,

$d^2 - dL + FL = 0$, откуда $d = 0{,}5L \pm \sqrt{0{,}25L^2 - FL}$. (3)

Выражение под корнем $0{,}25L^2 - FL \geqslant 0$, ведь d, L и F – действительные величины. Так как изображение согласно условию действительное, $F > 0$ и $L > 0$. При минимальном L выражение под корнем

$0{,}25L^2 - FL = 0$, $0{,}25L = F$, откуда $L = 4F$. (4)

Подставим (4) в (3):

$$d = 0{,}5\cdot 4\,F \pm \sqrt{0{,}25\cdot 16F^2 - F\cdot 4F},$$

$$\boxed{d = 2F}$$

Произведем вычисления:

$d = 2\cdot 10$ см $= 20$ см.

Ответ: $d = 20$ см.

Задача 9

Лупа дает увеличение $Г_1 = 5$, когда предмет находится непосредственно вблизи ее фокальной плоскости между фокусом и лупой. Эту лупу используют в качестве объектива проекционного аппарата, в результате чего на экране получают увеличение $Г_2 = 10$. На каком расстоянии d от лупы следует при этом расположить диапозитив? Расстояние наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

Дано:	*Решение.* Лупой называют короткофокусную двояковыпуклую линзу, позволяющую наблюдать прямое и увеличенное изображения предмета. Для этого предмет помещают между фокусом и лупой в непосредственной близости от ее фокуса (рис. 19-14). Увели-
$Г_1 = 5$	
$Г_2 = 10$	
$d_0 = 25$ см	
$d - ?$	

чение лупы $Г_1$ определяется отношением расстояния наилучшего зрения $d_0 = 25$ см к фокусному расстоянию лупы F:

$$Г_1 = \frac{d_0}{F}.$$

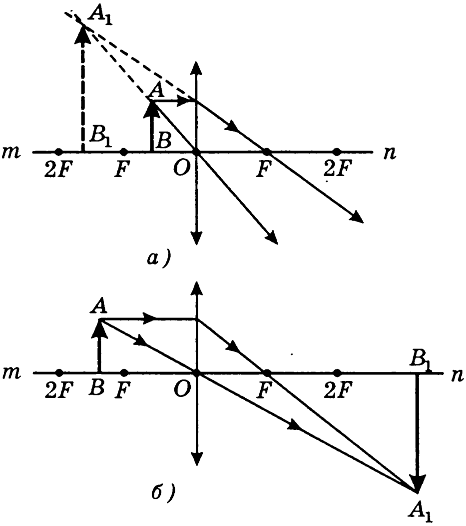


Рис. 19-14

Поскольку Γ_1 и d_0 нам известны, мы можем определить фокусное расстояние лупы, которая затем стала играть роль объектива проекционного аппарата (естественно, что от этого ее фокусное расстояние не изменилось):

$$F = \frac{d_0}{\Gamma_1}. \tag{1}$$

Назначение проекционного аппарата – получение на экране сильно увеличенного и действительного изображения предмета, которое при этом всегда будет обратным диапозитиву. При этом предмет, т. е. диапозитив, помещают между фокусом и двойным фокусом объектива тоже, как и у лупы, очень близко к фокусу, только с другой от него стороны (рис. 19-14, б). В этом случае по формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{2}$$

где f – расстояние от объектива до экрана. Увеличение объектива проекционного аппарата

$$\Gamma_2 = \frac{f}{d}, \text{ откуда } f = d\Gamma_2. \tag{3}$$

Подставим выражения (1) и (3) в формулу (2). Получим

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d\Gamma_2} = \frac{\Gamma_1}{d_0}.$$

Отсюда найдем искомое расстояние d от диапозитива до объектива:

$$\frac{1}{d}\left(1 + \frac{1}{\Gamma_2}\right) = \frac{\Gamma_1}{d_0}, \quad \boxed{d = \frac{d_0}{\Gamma_1}\left(1 + \frac{1}{\Gamma_2}\right)}$$

Задача в общем виде решена. Подставим числа и произведем вычисления:

$$d = \frac{25}{5}\left(1 + \frac{1}{10}\right) \text{см} = 5{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $d = 5{,}5$ см.

Задача 10

На пути сходящегося пучка лучей поставили собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 7$ см. В результате лучи сошлись в точке A_1 (рис. 19-15) на расстоянии $f = 5$ см от линзы. На каком расстоянии l от точки A_1 сойдутся лучи, если линзу убрать?

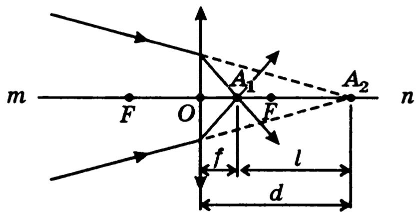


Рис. 19-15

Дано:
$F = 7$ см
$f = 5$ см
l – ?

Решение. Точка A_2, в которой пересеклись бы сходящиеся лучи, если бы линзы не было, является как бы мнимым точечным источником по отношению к линзе, а точка A_1, в которой действительно пересекутся лучи после преломления в линзе, представляет собой действительное изображение этого мнимого источника. Поэтому формула линзы применительно к этому случаю будет иметь вид

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

Здесь d – расстояние от точки A_2, т. е. от мнимого источника, до линзы, а f – расстояние от действительного изображения A_1 до линзы. Расстояние f и фокусное расстояние F нам известны, поэтому из данной формулы мы можем найти расстояние d, которое уже совсем просто «связать» с искомым расстоянием l. Итак, определим d:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{F} = \frac{F - d}{fF}, \text{ откуда } d = \frac{fF}{F - f}.$$

Из рис. 19-15 следует, что искомое расстояние

$l = d - f$ или

$$l = \frac{fF}{F - f} - f = f\left(\frac{F}{F - f} - 1\right) = f\frac{F - F + f}{F - f} = \frac{f^2}{F - f},$$

$$\boxed{l = \frac{f^2}{F - f}}$$

Задача в общем виде решена. Подставим числа и произведем вычисления:

$$l = \frac{25}{7 - 5}\text{ см} = 12{,}5\text{ см}.$$

Ответ: l = 12,5 см.

Задача 11

Цилиндрический пучок света радиусом R = 4 см направляется на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси. Пройдя линзу, пучок дает на экране пятно радиусом R_1 = 2 см (рис. 19-16, а).

Каков будет радиус пятна R_2, если собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же по величине фокусным расстоянием.

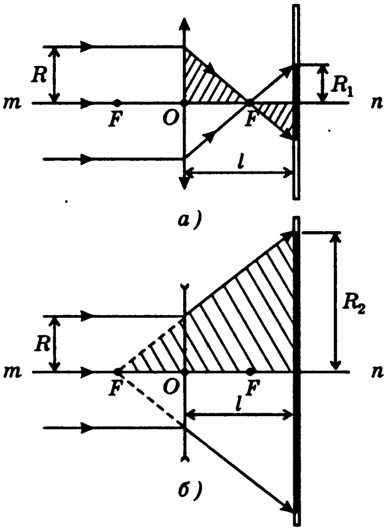


Рис. 19-16

Дано:
R = 4 см
R_1 = 2 см

R_2 – ?

Решение. Поскольку согласно условию задачи лучи падают на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси mn, то после преломления в линзе они должны пересечься в ее фокусе (рис. 19-16, *а*), после чего упасть на экран расходящимся пучком, образуя на нем светлый круг радиусом R_1 (заметим, что так будет, если экран расположится за фокусом линзы. Если же он окажется перед ее фокусом, т. е. между линзой и фокусом, то лучи после преломления упадут на экран сходящимся пучком. Предлагаем вам этот вариант рассмотреть самостоятельно). Анализируя рис. 19-16, *а*, нетрудно заметить два подобных прямоугольных треугольника с равными вертикальными углами при фокусе F (мы их для наглядности заштриховали). Обозначим расстояние между линзой и экраном l, тогда расстояние от правого фокуса линзы F до экрана будет $l - F$. Из подобия заштрихованных треугольников следует пропорциональность сторон этих треугольников, лежащих против равных вертикальных углов при точке F:

$$\frac{R}{R_1}=\frac{F}{l-F}. \qquad (1)$$

Здесь F – фокусное расстояние линзы.

Теперь обратимся к рис. 19-16, *б*. Поскольку лучи, параллельные главной оптической оси mn, падают теперь на рассеивающую линзу, то после преломления они разойдутся так, что после преломления в ее фокусе пересекутся мнимые продолжения рассеянных лучей (они изображены штриховыми линиями), а сами эти лучи упадут на экран расходящимся пучком, образуя на нем светлый круг радиусом R_2. При этом ни фокусное расстояние линзы, ни расстояние между нею и экраном согласно условию задачи не меняются.

Анализируя рис. 19-16, *б*, также нетрудно заметить два подобных прямоугольных треугольника с вершинами при левом фокусе линзы F и параллельными основаниями R и R_2. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{R}{R_2}=\frac{F}{F+l}. \qquad (2)$$

Полученные нами уравнения (1) и (2) содержат по две неизвестных величины l и F, которые нам не требуется определять, и третью искомую величину R_2. Казалось бы, решить два уравнения с тремя неизвестными нельзя, однако эта система уравнений все же решается, поскольку по ходу ее решения лишние неизвестные сокращаются. Решать можно разными способами. Можно, например, найти из уравнения (1) неизвестную величину l и подставить полученное выражение в уравнение (2), а затем отыскать искомый радиус R_2. При этом неизвестное нам фокусное расстояние F сократится и мы получим одно уравнение с одним неизвестным – искомым радиусом R_2. Проделаем эти действия:

$$l-F=F\frac{R_1}{R},\quad l=F+F\frac{R_1}{R}=F\left(1+\frac{R_1}{R}\right)=F\frac{R_1+R}{R},$$

$$\frac{R}{R_2}=\frac{F}{F+F\dfrac{R_1+R}{R}},\quad \frac{R}{R_2}=\frac{1}{1+\dfrac{R_1+R}{R}}\quad \text{или}\quad \frac{R}{R_2}=\frac{R}{2R+R_1}.$$

Отсюда $\boxed{R_2=2R+R_1}$

Задача в общем виде решена. Подставим числа и произведем вычисления: $R_2=(2\cdot 4+2)$ см $=10$ см.

Ответ: $R_2=10$ см.

Задача 12

Точечный источник света S находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $d = 25$ см от нее. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, ее радиус $r = 5$ см. По другую сторону линзы ставят экран так, что на нем получается четкое изображение источника. Затем экран перемещают вдоль главной оптической оси линзы на расстояние $l = 5$ см. Найти радиус R светлого круга на экране.

Дано:
$d = 25$ см
$F = 10$ см
$r = 5$ см
$l = 5$ см

$R - ?$

Решение. В условии нашей задачи не сказано, какая это линза. Значит, она собирающая, такой уговор. Рассеивающую линзу непременно в условии задачи обозначили бы. Фокусное расстояние линзы $F = 10$ см, а расстояние от источника S до линзы $d = 25$ см, значит, он находится за двойным фокусом линзы. Поэтому его изображение окажется между фокусом F и двойным фокусом $2F$ по другую сторону линзы. Оно тоже будет точечным и будет располагаться на главной оптической оси, как и сам источник. Словами «на экране получается четкое изображение источника» нам дают понять, что экран располагается именно в той точке, где получилось изображение S_1 источника света S (рис. 19-17, *а*). Обозначим расстояние от изображения S_1, а значит, и экрана, до линзы буквой f.

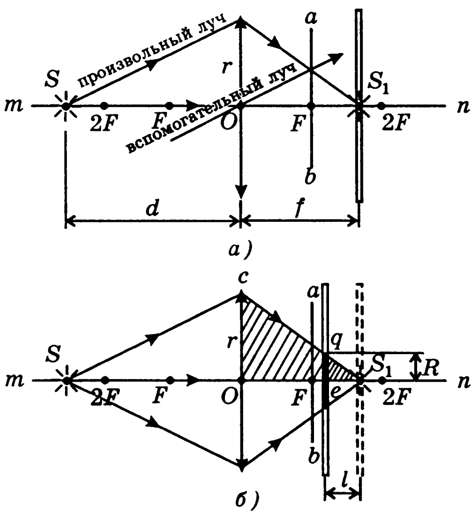


Рис. 19-17

Обратим внимание на то, что при построении мы пустили произвольный луч на самый край линзы. Это мы сделали потому, что в условии задачи говорится о радиусе линзы r, и значит, этот линейный размер нужно будет как-то учитывать. Может быть, придется рассматривать какой-нибудь треугольник, куда входит отрезок r. Вот поэтому мы направили произвольный луч на самый край линзы, а не на какую-нибудь промежуточную точку линзы между ее краем и центром.

Когда экран передвинули на расстояние l вдоль оптической оси, расстояния d от источника S до линзы и f от линзы до изображения относительно линзы не изменились. Ход лучей остался прежним, но теперь экран оказался расположенным к линзе ближе, чем изображение источника S, поэтому лучи уже не собрались на экране в одну точку, а образовали светлый круг радиусом R (рис. 19-17, *б*).

Итак, с ходом лучей и получением изображений мы разобрались. Теперь приступим к самому решению. Анализируя рис. 19-17, *б*, можно заметить, что при построении изображения круга на экране (мы видим сбоку проекцию этого круга) мы получили два подобных прямоугольных треугольника cOS_1 и qeS_1, образованных действительным преломленным лучом, его мнимым продолжением за экраном (оно показано штрихами), радиусами r и R и главной оптической осью линзы mn.

Эти треугольники подобны потому, что у них прямые углы при точках O и e и общий угол при вершине S_1. Из подобия треугольников следует пропорциональность их сторон:

$$\frac{R}{r} = \frac{l}{f}, \text{ откуда } R = \frac{rl}{f}. \qquad (1)$$

Расстояние f от изображения S_1 до линзы определим из формулы линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{d-F}{dF},$$

откуда

$$f = \frac{dF}{d-F}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\boxed{R = \frac{rl(d-F)}{dF}}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$R = \frac{5 \cdot 5(25-10)}{25 \cdot 10} \text{ см} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: R = 1,5 см.

Задача 13

Тонкая собирающая линза с оптической силой D_1 = = 3 дптр сложена вплотную с тонкой рассеивающей линзой с оптической силой $D_2 = -1$ дптр так, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние от предмета до системы этих линз d = 80 см. Найти высоту изображения H, если высота предмета h = 10 см.

Дано:
$D_1 = 3$ дптр
$D_2 = -1$ дптр
$d = 80$ см
$h = 10$ см

H – ?

Решение. Оптическая сила D системы тонких линз, сложенных вплотную, равна алгебраической сумме оптических систем этих линз в отдельности. Поскольку вторая линза рассеивающая и ее оптическая сила D_2 отрицательна, то

$$D = D_1 - D_2. \qquad (1)$$

При вычислениях надо подставить только модуль числа $|D_2| = 1$ дптр, поскольку знак «минус» мы уже учли в формуле (1).

Теперь систему этих двух линз мы будем рассматривать как одну линзу с оптической силой D. По формуле этой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D \text{ или с учетом (1) } \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_1 - D_2. \qquad (2).$$

Линейное увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{H}{h} \text{ и } \Gamma = \frac{f}{d}, \text{ поэтому } \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \text{ откуда } H = h\frac{f}{d}. \qquad (3)$$

Нам осталось определить из (2) расстояние f от изображения до линзы и подставить его в (3). Проделаем эти действия. Из (2)

$$\frac{1}{f} = D_1 - D_2 - \frac{1}{d} = \frac{d(D_1 - D_2) - 1}{d},$$

$$f = \frac{d}{d(D_1 - D_2) - 1}. \qquad (4)$$

Теперь подставим (4) в (3):

$$H = h\frac{d}{(d(D_1 - D_2) - 1)d}, \quad \boxed{H = \frac{h}{d(D_1 - D_2) - 1}}$$

Переведем все единицы в СИ: 80 см = 0,8 м, 10 см = 0,1 м.

Произведем вычисления: $H = \dfrac{0{,}1}{0{,}8(3-1) - 1}$ м = 0,17 м.

Ответ: H = 0,17 м.

Задача 14

Фотоаппаратом с фокусным расстоянием объектива $F_1 = 13{,}5$ см фотографируют предмет, находящийся на расстоянии $d = 18$ см от объектива. Расстояние от объектива до фотопластинки $f = 27$ см. Найти фокусное расстояние F_2 линзы, которую надо приставить вплотную к объективу, чтобы изображение на пластинке стало резким.

Дано:
$F_1 = 13{,}5$ см
$D = 18$ см
$f = 27$ см

F_2 – ?

Решение. Из условия задачи можно сделать вывод, что без этой второй линзы изображение фотографируемого предмета на фотопластинке будет нерезким, т. е. четкое изображение не попадет на фотопластинку (окажется или перед ней, или позади нее в зависимости от расположения предмета относительно фокуса объектива). Чтобы изображение попало на фотопластинку, нужно изменить фокусное расстояние, для чего к объективу приставляют еще одну линзу. При этом общая оптическая сила $D_{общ}$ системы этих двух линз становится равной сумме оптических сил D_1 и D_2 каждой линзы в отдельности:

$$D_{общ} = D_1 + D_2.$$

Оптическая сила линзы – это величина, обратная ее фокусному расстоянию, поэтому

$$D_1 = \frac{1}{F_1} \quad \text{и} \quad D_2 = \frac{1}{F_2},$$

и тогда
$$D_{общ} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Таким образом, когда оптическая сила системы этих двух линз станет равна $D_{общ}$, четкое изображение предмета попадет на фотопластинку, и на фотографии оно будет резким, т. е. расстояние от объектива с дополнительной линзой до фотопластинки станет равным расстоянию от этой системы линз до изображения. Тогда по формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_{общ} \quad \text{или} \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Отсюда найдем фокусное расстояние F_2 приставленной к объективу линзы:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} - \frac{1}{F_1} = \frac{fF_1 + dF_1 - df}{dfF_1},$$ откуда

$$\boxed{F_2 = \frac{dfF_1}{F_1(f+d) - df}}$$

Задача в общем виде решена. Подставим числа и произведем вычисления:

$$F_2 = \frac{18 \cdot 2{,}7 \cdot 13{,}5}{13{,}5(27+18) - 18 \cdot 27} \text{ см} = 54 \text{ см}.$$

Ответ: $F_2 = 54$ см.

Задача 15

Найти фокусное расстояние $F_{общ}$ системы двух собирающих линз, отстоящих на расстоянии l друг от друга, если фокусное расстояние одной из них F_1, а второй F_2 (рис. 19-18). Расстояние l между линзами больше суммы их фокусных расстояний $F_1 + F_2$, оптические оси обеих линз совпадают.

Дано:
l
F_1
F_2
$F_{общ}$ – ?

Решение. Общим фокусом этой системы линз называют точку $F_{общ}$, в которой пересекутся по выходу из правой линзы лучи, падающие на левую линзу параллельно ее главной оптической оси, а фокусным расстоянием $F_{общ}$ этой системы является расстояние от этой точки до главного оптического центра O_2 правой линзы (иногда общим фокусным расстоянием называют расстояние от общего фокуса $F_{общ}$ до главного оптического центра той линзы, на которую упал пучок параллельных оси лучей, т. е. до центра O_1 левой линзы. Ход решения задачи от этого не изменится, хотя ответ, естественно, будет другим).

Пусть лучи падают на левую линзу параллельно ее главной оптической оси (это значит, что их точечный источник света удален в бесконечность: $d_1 = \infty$, $\frac{1}{d_1} = 0$

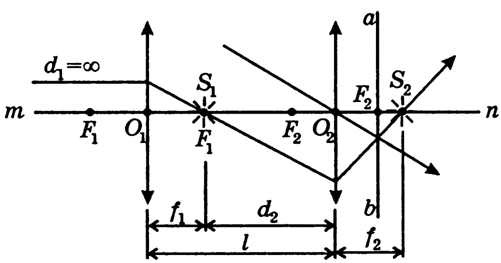


Рис. 19-18

и $f_1 = F_1$). Поэтому они пересекутся после преломления в фокусе F_1 этой линзы, т. е. в фокус F_1 этой линзы попадет первое изображение S_1 источника света, удаленного в бесконечность.

Из рис. 19-18 следует, что расстояние от изображения S_1, которое стало источником для правой линзы, до этой линзы

$$d_2 = l - f_1 \quad \text{или} \quad d_2 = l - F_1.$$

Теперь запишем формулу линзы применительно к правой линзе:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2}, \quad \text{откуда} \quad f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2}$$

или

$$\boxed{f_2 = F_{\text{общ}} = \frac{F_2(l - F_1)}{l - F_1 - F_2}}$$

Отметим, что в точку $F_{\text{общ}}$ попадет второе действительное изображение S_2 точечного источника света S, удаленного от левой линзы в бесконечность.

Задача решена.

Ответ: $F_{\text{общ}} = \dfrac{F_2(l - F_1)}{l - F_1 - F_2}$.

Задача 16

На каком расстоянии l друг от друга можно расположить собирающую и рассеивающую линзы с фокусными расстояниями F_1 = 10 см и F_2 = 6 см, чтобы параллельный пучок лучей, пройдя сквозь них, остался параллельным?

Примечание. Поскольку лучи падают на собирающую линзу параллельным пучком, то это значит, что их точечный источник находится в бесконечности, т. е. что расстояние d_1 между этим источником и собирающей линзой равно ∞. Поскольку лучи выходят из рассеивающей линзы тоже параллельным пучком, значит, изображение, даваемое рассеивающей линзой, тоже удалено в бесконечность, т. е. что расстояние между рассеивающей линзой и этим изображением $f_2 = \infty$.

Дано:
F_1 = 10 см
F_2 = 6 см
$d_1 = \infty$
$f_2 = \infty$

l – ?

Решение. Подобные задачи имеет смысл решить сначала с помощью формул, а потом уже выполнить чертеж, поскольку сразу очень трудно догадаться, как располагаются эти линзы относительно друг друга. Пусть лучи падают на собирающую линзу параллельно ее главной оптической оси.

Тогда после преломления в линзе они пересекутся в ее фокусе F_1, поэтому расстояние между первым изображением, даваемым собирающей линзой, и этой линзой будет равно ее фокусному расстоянию:

$$f_1 = F_1.$$

Но мы не знаем, где будет располагаться фокус первой линзы F_1 и изображение S_1 в нем по отношению к рассеивающей линзе: между этими линзами, перед рассеивающей линзой или позади нее. Допустим, что оно окажется между линзами. Тогда расстояние d_2 от первого изображения S_1 до рассеивающей линзы будет равно разности расстояния l между линзами и расстояния f от изображения S_1 до собирающей линзы:

$$d_2 = l - f_1 \text{ или } d_2 = l - F_1, \text{ так как } f_1 = F_1.$$

По формуле рассеивающей линзы (фокус которой мнимый и которая дает мнимое изображение)

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F_2}.$$

Но по условию задачи второе изображение, которое дает рассеивающая линза, уходит в бесконечность, т. е. $f_2 = \infty$, поэтому

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Тогда $\frac{1}{d_2} = -\frac{1}{F_2}$ и $d_2 = -F_2$ или $l - f_1 = -F_2$,

откуда $l = f_1 - F_2$ или $\boxed{l = F_1 - F_2.}$

Таким образом, согласно $d_2 = -F_2$ расстояние d_2 от первого изображения S_1 до рассеивающей линзы численно равно фокусному расстоянию этой линзы F_2. Это значит, что первое изображение, находящееся в фокусе F_1 собирающей линзы, одновременно находится и в фокусе рассеивающей линзы, т. е. что эти фокусы совпадают. Знак «минус» в равенстве $d_2 = -F_2$ свидетельствует о том, что изображение S_1 окажется не между линзами, а позади них, справа от рассеивающей линзы. Исходя из этих соображений, построим ход лучей в этой системе линз, как показано на рис. 19-19.

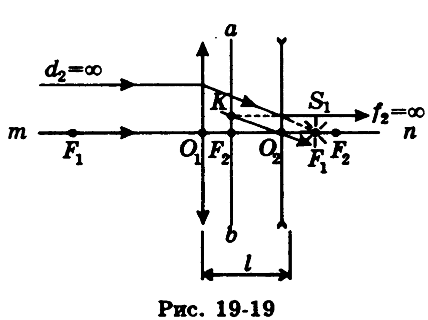


Рис. 19-19

Задача в общем виде решена. Произведем вычисления: $l = (10 - 6)$ см $= 4$ см.

Ответ: $l = 4$ см.

Задача 17

Рассеивающая и собирающая линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 15$ см расположены на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. На каком расстоянии r от источника света S находится изображение, даваемое этой системой линз, если расстояние от источника света S до рассеивающей линзы $d_1 = 12$ см?

Дано:
$F_1 = 10$ см
$F_2 = 15$ см
$l = 30$ см
$d_1 = 12$ см

r – ?

Решение. Выполняя чертеж (рис. 19-20), сначала постройте изображение S_1 источника света S, даваемое рассеивающей линзой. Оно будет мнимым и расположенным относительно этой линзы с той же стороны, что и источник S. Это изображение S_1 станет мнимым источником по отношению к собирающей линзе, расположенным за ее двойным фокусным расстоянием (судя по численным значениям, данным в условии задачи, двойное фокусное расстояние собирающей линзы равно 30 см, т. е. ее двойной фокус попадает в главный оптический центр O_1 рассеивающей линзы, так как l тоже равно 30 см). Следовательно, второе изображение S_2 источника света S будет действительным и расположенным по другую сторону собирающей линзы между ее фокусом и двойным фокусом.

Тогда искомое расстояние между источником света S и изображением S_2, судя по чертежу,

$$r = d_1 + l + f_2.$$

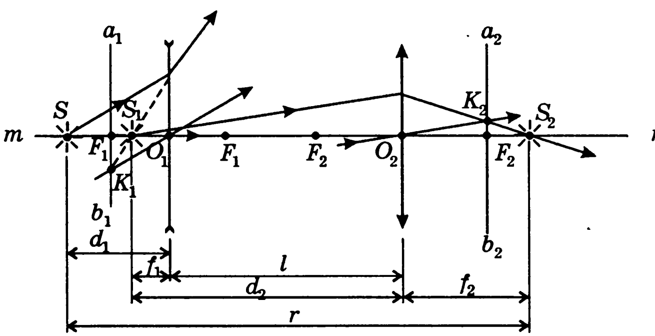


Рис. 19-20

Здесь f_2 – расстояние от изображения S_2 до собирающей линзы. Его можно найти из формулы собирающей линзы $\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_2}$, откуда $f_2=\frac{d_2F_2}{d_2-F_2}$,

и тогда $$r=d_1+l+\frac{d_2F_2}{d_2-F_2},$$

где d_2 – расстояние от первого изображения S_1 до собирающей линзы. Как следует из чертежа,

$$d_2=f_1+l,$$

где f_1 – расстояние от первого изображения S_1 до рассеивающей линзы. С учетом этого

$$r=d_1+l+\frac{F_2(f_1+l)}{f_1+l-F_2}=$$

$$=d_1+\frac{lf_1+l^2-lF_2+f_1F_2+lF_2}{f_1+l-F_2}=$$

$$=d_1+\frac{f_1(l+F_2)+l^2}{f_1+l-F_2}.$$

Нам осталось определить расстояние f_1, и задача будет решена. Определим это расстояние из формулы рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=-\frac{1}{F_1}, \text{ откуда } f_1=\frac{d_1F_1}{d_1+F_1}.$$

С учетом этого

$$r=d_1+\frac{\frac{d_1F_1}{d_1+F_1}(l+F_2)+l^2}{\frac{d_1F_1}{d_1+F_1}+l-F_2} \text{ или}$$

$$\boxed{r=d_1+\frac{d_1F_1(l+F_2)+l^2(d_1+F_1)}{d_1F_1+(d_1+F_1)(l-F_2)}}$$

Задача в общем виде решена (можно, конечно, еще немного упростить полученное выражение, приведя его к общему знаменателю и произведя приведение подобных членов, но преобразования будут достаточно длинными, а результат ненамного проще, так что мы решили этого не делать).

Подставим числа и произведем вычисления:

$$r = \left(12 + \frac{12 \cdot 10(30+15) + 900(12+10)}{12 \cdot 10 + (12+10)(30-15)}\right) \text{см} = 68 \text{ см}.$$

Ответ: $r = 68$ см.

Задача 18

Ближний и дальний пределы аккомодации глаза близорукого человека $d_1 = 10$ см и $d_2 = 12{,}5$ см. Каковы будут пределы аккомодации d_1' и d_2', если этот человек наденет очки с оптической силой $D_{очк} = -7$ дптр?

Дано:
$d_1 = 10$ см
$d_2 = 12{,}5$ см
$D_{очк} = -7$ дптр
d_1' – ?
d_2' – ?

Решение. Ближним пределом аккомодации глаза d_1 называют наименьшее расстояние, на котором глаз человека видит предмет. Благодаря особым мышцам, изменяющим толщину хрусталика, который представляет собой двояковыпуклую линзу, глаз может видеть предметы, находящиеся на разных расстояниях от него. Наибольшее расстояние d_2, на котором глаз еще может видеть предмет, называют дальним пределом аккомодации глаза.

По формуле линзы

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_{глаз} \quad (1) \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = D_{глаз}. \quad (2)$$

Здесь f_1 и f_2 – глубина глаза, т. е. расстояние от хрусталика до сетчатки, на которой располагается изображение рассматриваемого предмета (очевидно, что это расстояние при аккомодации, т. е. изменении толщины хрусталика, тоже изменяется), $D_{глаз}$ – оптическая сила глаза.

Когда человек надевает очки, к оптической силе его глаза прибавляется оптическая сила очков (поскольку оптическая сила системы линз равна сумме оптических сил каждой линзы в отдельности). При этом оптическая сила очков, предназначенных для дальнозоркого глаза, положительна, т. е. такие очки подобны собирающей линзе, а оптическая сила очков, предназначенных для близорукого глаза, отрицательна, т. е. линзы таких очков подобны рассеивающим линзам.

Тогда формула линзы, записанная применительно к глазу в очках:

$$\frac{1}{d_1'} + \frac{1}{f_1} = D_{глаз} + D_{очк} \quad (3) \quad \text{и} \quad \frac{1}{d_2'} + \frac{1}{f_2} = D_{глаз} + D_{очк}. \quad (4)$$

Здесь «штрих» – просто индекс, а не знак производной.

Отметим, что в этой формуле знак «минус» можно поставить перед $D_{очк}$, тогда при подстановке численных значений величин его учитывать не нужно, достаточно подставить только численное значение $D_{очк}$. Если же в формуле линзы, записанной в буквенных обозначениях, перед $D_{очк}$ вы поставите «плюс» (как это сделали мы), то при подстановке численных значений нужно учитывать знак «минус», т. е. подставить – 7 дптр.

Уравнения (1) и (3) представляют собой систему двух уравнений с тремя неизвестными f_1, $D_{глаз}$ и d_1'. Исключим из этих уравнений неизвестные f_1 и $D_{глаз}$. Для этого можно вычесть из уравнения (3) уравнение (1):

$$\frac{1}{d_1'}+\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}=D_{глаз}+D_{очк}-D_{глаз},\quad \frac{1}{d_2'}-\frac{1}{d_1}=D_{очк}.$$

Отсюда найдем искомый предел аккомодации d_1':

$$\frac{1}{d_1'}=\frac{1}{d_1}+D_{очк}=\frac{1+d_1D_{очк}}{d_1},\quad \boxed{d_1'=\frac{d_1}{1+d_1D_{очк}}}$$

Для d_2' можно сразу записать аналогичное выражение:

$$\boxed{d_2'=\frac{d_2}{1+d_2D_{очк}}}$$

Переведем все единицы в СИ:
10 см = 0,1 м, 12,5 см = 0,125 м.
Произведем вычисления:

$$d_1'=\frac{0{,}1}{1+0{,}1(-7)}\text{ м}=0{,}33\text{ м},$$

$$d_2'=\frac{0{,}125}{1+0{,}125(-7)}\text{ м}=1\text{ м}.$$

Ответ: d_1'= 0,33 м, d_2'= 1 м.

Задача 19

Ученик привык читать книгу, держа ее на расстоянии d = 20 см от глаза. Какой должна быть оптическая сила очков $D_{очк}$, которые должен носить ученик, чтобы читать книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения d_0 = 25 см?

Дано:
d = 20 см
d_0 = 25 см

$D_{очк}$ – ?

Решение. Расстояние наилучшего зрения – это расстояние от предмета до глаза, на котором глаз видит предмет без напряжения. Ученик, о котором идет речь, страдает близоркостью, поскольку он хорошо видит буквы на расстоянии d, меньшем, чем расстояние наилучшего зрения d_0. Для того чтобы он держал книгу на расстоянии наилучшего зрения d_0, ему нужно надеть очки с отрицательной оптической силой $D_{\text{очк}}$.

Для случая, когда ученик читает без очков, формула линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_{\text{глаз}}.$$

Здесь f – расстояние от хрусталика глаза до сетчатки, на которой формируется изображение предмета, $D_{\text{глаз}}$ – оптическая сила глаза.

Когда ученик наденет очки, к оптической силе глаза добавится оптическая сила очков. Формула линзы применительно к этому случаю

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = D_{\text{глаз}} + D_{\text{очк}}.$$

Теперь опять, как и в предыдущей задаче, чтобы исключить из этих уравнений неизвестные нам f и $D_{\text{глаз}}$, вычтем из второго уравнения первое. Получим

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} - \frac{1}{d} - \frac{1}{f} = D_{\text{глаз}} + D_{\text{очк}} - D_{\text{глаз}}.$$

Отсюда найдем искомую оптическую силу очков:

$$\boxed{D_{\text{очк}} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d}}$$

Переведем все единицы в СИ: 20 см = 0,2 м, 25 см = 0,25 м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$D_{\text{очк}} = \left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}2}\right) \text{ дптр} = -1 \text{ дптр}.$$

Ответ: $D_{\text{очк}} = -1$ дптр.

Задача 20

Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 5$ см. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $d = 6$ см от нее. Линзу разрезали по диаметру на две равные части, которые раздвинули на расстояние $l = 1$ см симметрично относительно главной оптической оси линзы (рис. 19-21). Найти расстояние r между двумя изображениями S_1 и S_2 точки S, которые образовались при этом.

Дано:
$F = 5$ см
$d = 6$ см
$l = 1$ см

r – ?

Решение. Следует знать, что любая часть линзы, любой ее осколок, даже самый маленький, «ведет себя» как целая линза. От того, что ее разрезали на две части, у линзы ничего не изменилось, ни положение главной оптической оси, ни ее главного оптического центра, ни фокусов. Просто мы получили как бы две линзы с главными оптическими осями m_1n_1 и m_2n_2, главными оптическими центрами O_1 и O_2 и фокусами F_1 и F_2. Построим изображение источника света S, который теперь, после того как линзу разрезали на две половинки и раздвинули их, не лежит на главной оптической оси этих половинок, поэтому одни лучи от источника S пустим через фокусы половинок F_1 и F_2, а вторые – через их оптические центры O_1 и O_2. Пересечение этих лучей даст нам изображения S_1 и S_2 источника света S, расстояние r между которыми нам требуется найти.

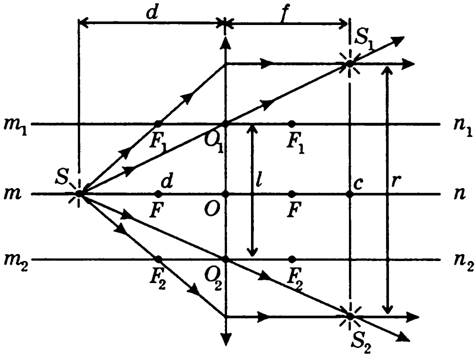


Рис. 19-21

Если внимательно проанализировать чертеж, то можно обнаружить два подобных прямоугольных треугольника SO_1O и SS_1C, причем в треугольнике SO_1O катетами служат известные нам отрезки d и $\frac{l}{2}$, а в треугольнике SS_1C катетами являются отрезки $d + f$ и $\frac{r}{2}$, где f – расстояние от изображений до линзы. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{d}{\frac{l}{2}} = \frac{d+f}{\frac{r}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{d}{l} = \frac{d+f}{r},$$

откуда $$r = l\frac{d+f}{d} = l\left(1+\frac{f}{d}\right). \qquad (1)$$

Нам осталось отыскать расстояние f от изображения до линзы. Поскольку линза собирающая и источник располагаются между фокусом и двойным фокусом линзы, то изображение действительное и в формуле линзы везде стоят плюсы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \text{ откуда } f=\frac{dF}{d-F}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$r = l\left(1+\frac{dF}{d(d-F)}\right) \text{ или } \boxed{r = l\left(1+\frac{F}{d-F}\right)}$$

Произведем вычисления:

$$r = 1\left(1+\frac{5}{6-5}\right) \text{см} = 6 \text{ см}.$$

Ответ: $r = 6$ см.

Задача 21

Плосковыпуклая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 10$ см погружена плоской поверхностью в воду так, что ее сферическая поверхность находится в воздухе. Перпендикулярно поверхности воды падают параллельные лучи света. На каком расстоянии F_2 от плоской поверхности линзы сфокусируются эти лучи? Показатель преломления воды $n_в = 1,33$.

Дано:
$n_в = 1,33$
$F_1 = 10$ см

F_2 – ?

Решение. Отметим, что фокусное расстояние плосковыпуклой линзы F_1 – это расстояние между ее плоской поверхностью и точкой, в которой пересекутся после выхода из линзы в воздух лучи, упавшие на линзу параллельно ее главной оптической оси *mn* (рис. 19-22). По закону преломления при переходе лучей из стекла в воздух

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_1}=\frac{1}{n_{ст}}. \qquad (1)$$

Здесь α_1 – угол падения лучей на плоскую поверхность линзы, γ_1 – угол их преломления (напомним, что он больше угла падения, так как на плоской поверхности лучи переходят из стекла, т. е. из оптически более плотной сре-

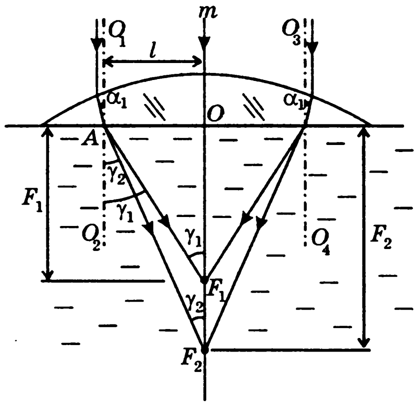


Рис. 19-22

ды, в воздух, т. е. в оптически менее плотную среду), $n_{сг}$ – абсолютный показатель преломления стекла.

Когда линзу положили плоской поверхностью на воду, угол падения лучей α_1 на плоскую поверхность линзы, конечно, не изменился. А вот угол преломления изменился, так как теперь лучи выходят не в воздух, как в первом случае, а в воду. Поэтому по закону преломления

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_2} = n_{отн},$$

где $n_{отн}$ – относительный показатель преломления этих сред, т. е. показатель преломления второй среды – воды относительно первой – стекла.

Из теории мы знаем, что он равен отношению абсолютного показателя преломления второй среды к абсолютному показателю преломления первой среды:

$$n_{отн} = \frac{n_в}{n_{ст}}, \quad \text{поэтому} \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_2} = \frac{n_в}{n_{ст}}. \qquad (2)$$

Обратим внимание на то, что угол γ_1 равен углу, прилежащему к катету OF_1 в прямоугольном треугольнике AOF_1, как накрест лежащие углы при параллельных и секущей, и по этой же причине угол γ_2 равен углу, прилежащему к катету OF_2 в прямоугольном треугольнике AOF_2. Так что эти углы нам еще пригодятся. А вот угол падения α_1 нам «не пригодится» никак, так как не входит ни в какой треугольник с искомыми или известными величинами, и кроме того, об угле падения ничего не сказано в условии задачи, поэтому угол падения α_1 надо бы из решения исключить. Для этого можно разделить уравнения (1) и (2) друг на друга. Получим

$$\frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\gamma_2}{\sin\gamma_1 \cdot \sin\alpha_1} = \frac{n_{ст}}{n_{ст}n_в} \quad \text{или} \quad \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{1}{n_в}. \qquad (3)$$

Правда, углы преломления γ_1 и γ_2 нам тоже не известны и определить их пока вроде бы неоткуда. Посмотрим еще раз внимательно на чертеж. Очевидно, что расстояние между параллельными лучами, падающими на линзу, не изменится оттого, что лучи перейдут из стекла не в воздух, а в воду. Значит, в прямоугольных треугольниках, о которых мы говорили ранее, катет l одинаков. Используем этот факт. Найдем тангенсы углов γ_1 и γ_2, поскольку отрезки l_1, F_1 и F_2 в этих треугольниках являются катетами:

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{l}{F_1} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{l}{F_2}.$$

Теперь аналогичным образом исключим отрезок l из этих равенств, разделив их друг на друга, поскольку об этом отрезке нам тоже ничего не известно и определять его не требуется:

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma_2}{\operatorname{tg}\gamma_1} = \frac{l \cdot F_1}{F_2 \cdot l}, \qquad \frac{\operatorname{tg}\gamma_2}{\operatorname{tg}\gamma_1} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Теперь отметим следующий факт. Поскольку наша линза тонкая, т. е. ее толщиной мы пренебрегаем (она значительно меньше диаметра линзы), то лучи, падающие на линзу параллельно ее главной оптической оси, упадут на плоскую поверхность линзы под малым углом α_1. А так как абсолютный показатель преломления воды тоже невелик, то и углы преломления γ_1 и γ_2 тоже будут малы. А из математики нам известно, что синусы малых углов приблизительно равны их тангенсам (или самим углам, выраженным в радианах). Поэтому в последнем равенстве мы можем тангенсы углов заменить их синусами. Тогда получим

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{F_1}{F_2}. \tag{4}$$

Теперь уже несложно догадаться, как исключить и эти углы из решения: достаточно приравнять правые части равенств (3) и (4), поскольку левые их части друг другу равны. Получим

$$\frac{1}{n_в} = \frac{F_1}{F_2}, \quad \text{откуда} \quad \boxed{F_2 = n_в F_1}$$

Задача в общем виде решена.

Произведем вычисления:

$F_2 = 1{,}33 \cdot 10$ см $= 13{,}3$ см.

Ответ: $F_2 = 13{,}3$ см.

Задача 22

Освещенный шарик на пружине колеблется вдоль вертикали с частотой $\nu = 2$ Гц. После преломления в линзе его изображение проецируется на вертикальный экран, расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы. Максимальная скорость шарика $v_m = 0{,}1$ м/с, расстояние от шарика до экрана $L = 1$ м. Амплитуда колебаний изображения на экране $A = 10$ см. Чему равно фокусное расстояние линзы F?

Дано:
$\nu = 2$ Гц
$v_m = 0{,}1\ \frac{м}{с}$
$L = 1$ м
$A = 10$ см

F – ?

Решение. Для определения фокусного расстояния воспользуемся формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ откуда } F = \frac{df}{d+f}. \quad (1)$$

Обозначим амплитуду колебаний шарика A_0 (рис. 19-23). Тогда согласно формуле линейного увеличения

$$Г = \frac{A}{A_0} \text{ и } Г = \frac{f}{d}, \text{ поэтому } \frac{A}{A_0} = \frac{f}{d}, \quad (2)$$

причем
$$d + f = L. \quad (3)$$

Здесь d – расстояние от шарика до линзы, а f – расстояние от нее до изображения.

Теперь выразим d и f через A, A_0 и L. Правда, амплитуда A_0 нам не известна, но мы ее найдем, зная скорость v_m и частоту ν. Приступим:

из (3) $f = L - d$. С учетом этого $\frac{A}{A_0} = \frac{L-d}{d}$,

$$Ad = A_0L - A_0d, \quad \text{откуда} \quad d = \frac{A_0L}{A + A_0} \quad (4)$$

$$\text{и } f = L - \frac{A_0L}{A + A_0} = \frac{AL + A_0L - A_0L}{A + A_0} = \frac{AL}{A + A_0}. \quad (5)$$

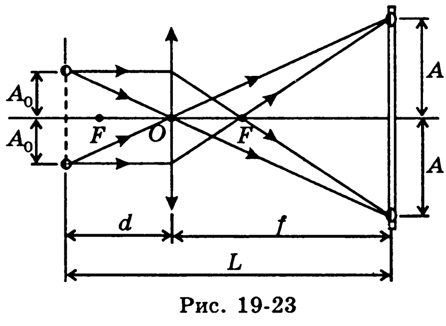


Рис. 19-23

Подставим (4) и (5) в (1):

$$F = \frac{A_0L \cdot AL}{(A + A_0)(A + A_0)\left(\dfrac{A_0L}{A + A_0} + \dfrac{AL}{A + A_0}\right)} =$$

$$= \frac{A_0AL^2}{(A + A_0)^2 L \dfrac{A_0 + A}{A + A_0}} = \frac{A_0AL}{(A + A_0)^2}. \qquad (6)$$

Из теории колебаний известно, что $\upsilon_m = \omega A_0$, где $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая (угловая) частота. С учетом этого

$$\upsilon_m = 2\pi\nu A_0, \quad \text{откуда} \quad A_0 = \frac{\upsilon_m}{2\pi\nu}. \qquad (7)$$

Нам осталось подставить (7) в (6):

$$F = \frac{\upsilon_m AL}{2\pi\nu\left(A + \dfrac{\upsilon_m}{2\pi\nu}\right)}, \qquad \boxed{F = \frac{\upsilon_m AL}{2\pi\nu A + \upsilon_m}}$$

Произведем вычисления:

$$F = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 1}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0{,}1}\ \text{м} = 7 \cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Ответ: $F = 7 \cdot 10^{-3}$ м.

Задача 23

Точечный источник света S расположен на главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 1$ см на расстоянии $d = 1{,}8$ см от линзы. Между ним и линзой помещают перпендикулярно ее главной оптической оси плоско-параллельную стеклянную пластину толщиной $h = 2$ см с показателем преломления $n = 1{,}5$. Найти смещение x изображения S_1 источника света (рис. 19-24).

Дано:
$F = 1$ см
$d = 1{,}8$ см
$h = 2$ см
$n = 1{,}5$

x – ?

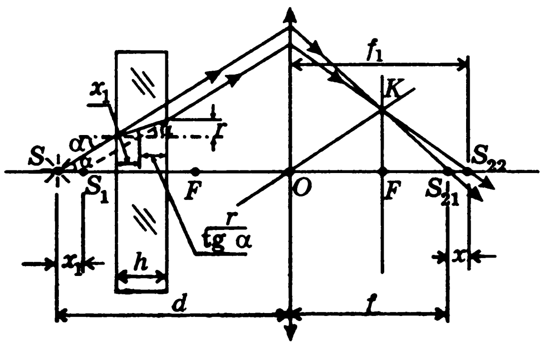


Рис. 19-24

Решение. Искомое смещение x равно разности f_1 и f, где f_1 – новое расстояние между изображением S_{22} и линзой, когда поместили пластинку, а f – это расстояние между изображением S_{21} и линзой без пластинки:

$$x = f_1 - f. \tag{1}$$

Согласно формуле линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d}=\frac{d-F}{Fd}$$

и

$$f=\frac{Fd}{d-f}. \tag{2}$$

Луч, вышедший из пластинки, будет смещен относительно луча, падающего на нее. Продолжение вышедшего луча даст на главной оптической оси мнимое изображение S_1 источника света. Оно будет расположено на расстоянии $d - x_1$ от линзы. По формуле линзы

$$\frac{1}{d-x_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d-x_1}=\frac{d-x_1-F}{F(d-x_1)}$$

и

$$f_1=\frac{F(d-x_1)}{d-x_1-F}. \tag{3}$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$x=\frac{F(d-x_1)}{d-x_1-F}-\frac{Fd}{d-F}=$$

$$=F\frac{d^2-x_1d-dF+x_1F-d^2+x_1d+dF}{(d-x_1-F)(d-F)}=$$

$$=\frac{x_1F^2}{(d-x_1-F)(d-F)}. \tag{4}$$

Теперь задача сводится к нахождению отрезка x_1 между источником света S и его изображением S_1, даваемым пластинкой. Луч, падающий на пластинку, мы можем выбрать произвольно. Пусть его угол падения α мал, значит, и угол преломления γ тоже мал, и тогда закон преломления можно записать так:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}=n, \quad \text{откуда} \quad \gamma=\frac{\alpha}{n}.$$

Из рис. 19-24 следует, что $x_1=h-\dfrac{r}{\operatorname{tg}\alpha}=h-\dfrac{r}{\alpha}$, а отрезок $r=h\operatorname{tg}\gamma=h\gamma=h\dfrac{\alpha}{n}$, поэтому

$$x_1 = h - \frac{h\alpha}{n\alpha} = h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = h\frac{n-1}{n}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4), мы решим задачу:

$$x = \frac{h(n-1)F^2}{n\left(d - h\dfrac{n-1}{n} - F\right)(d-F)}$$

или

$$\boxed{x = \frac{hF^2(n-1)}{n(d-F) - h(n-1)(d-F)}}$$

Произведем вычисления:

$$x = \frac{8 \cdot 1(1{,}5-1)}{1{,}5(1{,}8-1) - 2(1{,}5-1)(1{,}8-1)}\ \text{см} = 10\ \text{см}.$$

Ответ: x = 10 см.

Задача 24

Предмет AB находится на расстоянии d_1 = 15 см перед собирающей линзой с фокусным расстоянием F = 30 см. Плоское зеркало ab расположено на расстоянии l = 15 см за линзой. На каком расстоянии f_2 от линзы получится изображение, даваемое этой системой?

Дано:	
d_1 = 15 см F = 30 см l = 15 см f_2 — ?	*Решение.* Для решения этой задачи крайне необходим крупный и четкий чертеж, на котором следует учесть соотношение всех размеров, о которых идет речь в условии задачи. Сначала построим изображение A_1B_1 предмета AB, даваемое собирающей линзой.

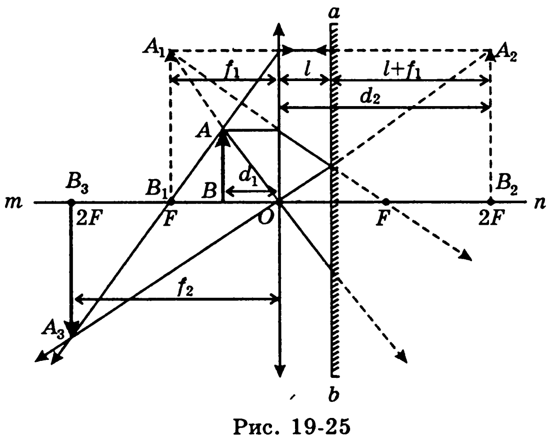


Рис. 19-25

При построении следует обратить внимание на то, что расстояние между предметом AB и линзой $d_1 = 15$ см, а фокусное расстояние линзы $F = 30$ см, т. е., что предмет расположен между фокальной плоскостью и линзой. А в этом случае изображение A_1B_1, даваемое линзой, будет мнимым, прямым, увеличенным и будет располагаться относительно линзы с той же стороны, что и сам предмет AB (рис. 19-25).

Изображение A_1B_1 является по отношению к плоскому зеркалу ab предметом. Как известно, плоское зеркало дает мнимое и прямое изображение A_2B_2, равное по размерам предмету и расположенное по отношению к зеркалу с другой стороны от него на таком же расстоянии, что и сам предмет A_1B_1.

Обозначим расстояние от изображения A_1B_1 до линзы f_1. Тогда, поскольку расстояние от линзы до зеркала равно l, расстояние от изображения A_1B_1 до зеркала равно $l + f_1$. Но тогда и расстояние от изображения A_2B_2, даваемого плоским зеркалом, до этого зеркала тоже равно $l + f_1$, поскольку эти расстояния равны друг другу. Тогда расстояние от изображения A_2B_2 до линзы, как следует из рис. 19-25,

$$d_2 = l + l + f_1 = 2l + f_1. \quad (1)$$

Теперь определим расстояние f_1 от линзы до первого изображения A_1B_1, даваемого этой собирающей линзой. Поскольку это изображение мнимое, то формула линзы в этом случае будет иметь вид

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F},$$

откуда $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{F} = \frac{F - d_1}{d_1 F}$ и $f_1 = \frac{d_1 F}{F - d_1}$. (2)

Подставив (2) в (1), мы найдем расстояние d_2:

$$d_2 = 2l + \frac{d_1 F}{F - d_1}. \quad (3)$$

Изображение A_2B_2 по отношению к линзе является предметом. Его изображение A_3B_3 и является окончательным изображением предмета AB, даваемым линзой и зеркалом вместе. Расстояние f_2 от линзы до этого окончательного изображения A_3B_3 найдем по формуле линзы

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F},$$

откуда $\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_2}$ и $f_2=\frac{d_2F}{d_2-F}$.

Подставив сюда (3), получим окончательно

$$f_2=\frac{F\left(2l+\frac{d_1F}{F-d_1}\right)}{2l+\frac{d_1F}{F-d_1}-F} \quad \text{или} \quad \boxed{f_2=\frac{F(2l(F-d_1)+d_1F)}{2l(F-d_1)-F(F-2d_1)}}$$

Задача в общем виде решена. Произведем вычисления:

$$f_2=\frac{30(2\cdot 15(30-15)+15\cdot 30)}{2\cdot 15(30-15)-30(30-30)}\text{ см} = 60 \text{ см}.$$

Ответ: $f_2 = 60$ см.

Задача 25

На собирающую линзу падают лучи параллельно ее главной оптической оси. Позади линзы на расстоянии l от нее расположено вогнутое зеркало радиусом R (рис. 19-26). Их главные оптические оси совпадают. После отражения от зеркала лучи пересеклись в точке, удаленной от зеркала на расстояние f. Чему равно фокусное расстояние линзы $F_л$?

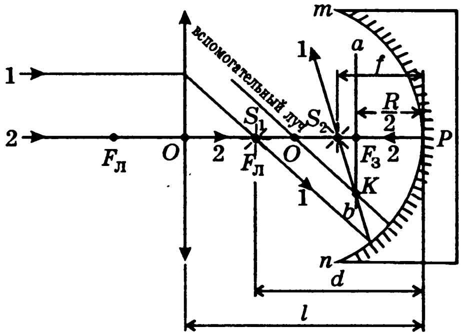


Рис. 19-26

Дано:
$d_1 = \infty$
l
R
f
$F_л$ – ?

Решение. Поскольку лучи упали на линзу параллельным пучком, значит, их точечный источник находится в бесконечности. После преломления в линзе они пересеклись в ее фокусе $F_л$. Здесь будет первое изображение источника S_1. Затем луч 1 упал на зеркало под произвольным углом, а луч 2 – перпендикулярно зеркалу и отразился в обратном направлении, ведь он шел по главной оптической оси. Луч 1 после отражения пойдет в точку K на фокальной плоскости ab зеркала. Эта точка образована пересечением вспомогательного луча, пущенного через оптический центр зеркала O параллельно преломленному лучу 1, с фокальной плоскостью. После отражения луч 1 пересечется с отраженным лучом 2 в точке, где появится второе изображение S_2 источника.

Согласно формуле сферического зеркала

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}, \quad \text{где} \quad d = l - F_л,$$

поскольку в фокусе линзы $F_л$ будет первое изображение S_1 удаленного источника, и оно является предметом для зеркала, а d – это расстояние от этого предмета до зеркала. С учетом этого

$$\frac{1}{l-F_л}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}, \quad \frac{1}{l-F_л}=\frac{2}{R}-\frac{1}{f} \quad \text{и} \quad l-F_л=\frac{Rf}{2f-R},$$

откуда

$$\boxed{F_л = l-\frac{Rf}{2f-R}}$$

Задача решена.

Ответ: $F_л = l-\dfrac{Rf}{2f-R}$.

Задача 26

В вогнутое зеркало налили воду с показателем преломления n = 1,33 (рис. 19-27). Радиус кривизны зеркала R = = 40 см. Найти оптическую силу D этой системы.

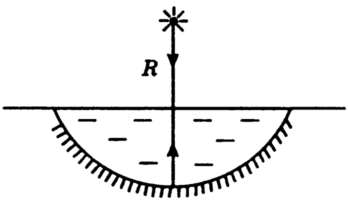


Рис. 19-27

Дано:
n = 1,33
R = 40 см
D – ?

Р е ш е н и е. Слой воды в зеркале образует плосковыпуклую линзу, у которой радиус кривизны выпуклой поверхности R_1 равен радиусу кривизны зеркала R, а радиус кривизны плоской поверхности $R_2 = \infty$. Из формулы, связывающей фокусное расстояние линзы F_1 с показателем преломления ее стекла n, определим оптическую силу водяной линзы D_1:

$$D_1 = \frac{1}{F_1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1}\right) \text{ или с учетом, что } R_1 = R,$$

а $\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{\infty}=0$, $\qquad D_1 = \dfrac{n-1}{R}$. (1)

Оптическая сила зеркала $D_2 = \frac{1}{F_2}$, где фокусное расстояние зеркала $F_2 = \frac{R}{2}$, поэтому $D_2 = \frac{2}{R}$. (2)

Оптическая сила системы водяная линза – зеркало равна сумме их оптических сил в отдельности, если они сложены вплотную. Но здесь необходимо учесть, что свет через водяную линзу проходит два раза: когда он падает на нее и когда отражается от зеркала (запомните этот момент для случая, когда линзы и зеркало сложены вместе). Поэтому

$$D = 2D_1 + D_2$$

или с учетом (1) и (2)

$$D = 2\frac{n-1}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2}{R}(n - 1 + 1), \qquad \boxed{D = \frac{2n}{R}}$$

Переведем в СИ единицу радиуса: 40 см = 0,4 м.

Произведем вычисления:

$$D = \frac{2 \cdot 1{,}33}{0{,}4} \text{ дптр} = 6{,}7 \text{ дптр}.$$

Ответ: $D = 6{,}7$ дптр.

Задача 27

Фокусное расстояние линзы $F = 8$ см. Построить график зависимости расстояния f между линзой и изображением от расстояния d между предметом и линзой.

Решение. Запишем формулу линзы так, чтобы показать зависимость f от d: $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, откуда $f \frac{dF}{d - F}$

или

$$f = \frac{F}{1 - \frac{F}{d}}.$$

Полученное уравнение не является уравнением прямой линии типа $y = b + kx$, поэтому для его получения недостаточно двух точек, их должно быть не менее пяти.

Теперь подставим числовое значение $F = 8$ см:

$$f = \frac{8}{1 - \frac{8}{d}}.$$

Будем придавать d числовые значения, например, d = 10; 20; 30; 40; 50 см, и вычислим соответствующие им значения f. Заполним таблицу:

d, см	10	20	30	40	50
f, см	40,0	13,3	10,9	10,0	9,5

Построим график $f = f(d)$ (рис. 19-28).

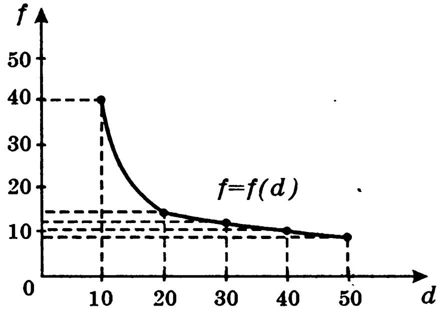


Рис. 19-28

Задача решена.

Задача 28

На рис. 19-29, *а* *mn* – главная оптическая ось линзы, S – точечный источник света, S_1 – его изображение. Какая это линза – собирающая или рассеивающая? Найти

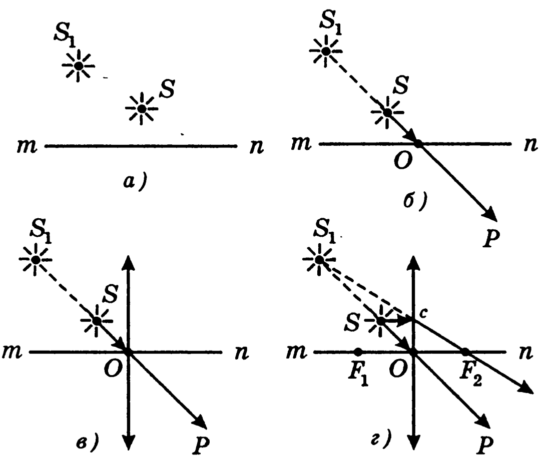


Рис. 19-29

построением положение ее главного оптического центра O и фокусов F_1 и F_2.

Решение. Поскольку и источник S, и его изображение S_1 находятся по одну и ту же сторону от главной оптической оси mn, т. е. оба над ней, значит, изображение S_1 – мнимое (действительным оно бывает только тогда, когда источник и изображение располагаются по разные стороны относительно главной оптической оси). Далее, поскольку источник располагается ближе к главной оптической оси mn, чем его изображение, значит, эта линза собирающая (у рассеивающей изображение располагается к оси ближе, чем источник). Мнимым у собирающей линзы изображение бывает только тогда, когда источник располагается между линзой и ее главной фокальной плоскостью (а у рассеивающей оно всегда мнимое).

Чтобы было ясно, как определить положение искомых точек O, F_1 и F_2, обратимся к рис. 19-29, *г*. Глядя на этот чертеж, нетрудно сообразить, как выполнять необходимое нам построение.

Вначале соединим штриховой линией источник S и его изображение S_1 и продолжим эту прямую до пересечения с главной оптической осью mn. Точка пересечения прямой SP, представляющей собой действительный луч, идущий по побочной оси линзы, с главной оптической осью mn – это и есть главный оптический центр линзы O (рис. 19-29, *б*). После этого построим символическое изображение собирающей линзы (рис. 19-29, *в*). Затем из источника S проведем луч SC, параллельный главной оптической оси mn, который после преломления должен пройти через фокус F_2 линзы (рис. 19-29, *г*). И наконец, соединив штриховой прямой S_1c точку падения c этого луча на линзу с мнимым изображением S_1 источника S и продолжив эту прямую до пересечения с главной оптической осью, получим в точке пересечения положение одного из фокусов линзы F_2. Отложив расстояние OF_1, равное OF_2, от главного оптического центра линзы по другую сторону от линзы, мы найдем положение ее второго фокуса F_1 (рис. 19-29, *г*).

Задача 29

Построить изображение стрелки AB, даваемое рассеивающей линзой (рис. 19-30). Будет ли это изображение параллельным главной оптической оси линзы, если стрелка AB ей параллельна?

Решение. Сначала построим изображение точки A. Для этого проведем из точки A луч, параллельный главной оптической оси линзы mn. После преломления этот луч должен пойти так, чтобы его мнимое продолжение прошло через фокус линзы F_1 (рис. 19-30). Затем «выпустим» из точки A еще один луч и направим его в главный оптический центр линзы O. Такой луч, как известно из теории, не преломляется линзой, так как он идет по ее побочной оси. Точка пересечения мнимого луча и действительного луча дает нам положение мнимого изображения A_1 точки A (если хотя бы один из двух лучей мнимый, то и изображение будет мнимым).

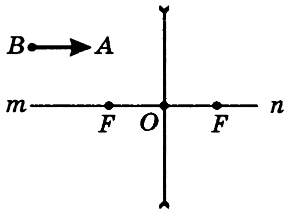


Рис. 19-30

Следуя этим рассуждениям, построим таким же образом изображение точки B. Соединив эти мнимые изображения A_1 и B_1 штриховой прямой (обязательно штриховой, чтобы показать, что изображение мнимое) и направив стрелку к точке A_1, мы получим мнимое изображение A_1B_1 предмета AB, даваемое этой линзой. Как следует из полученного чертежа (рис. 19-31), оно не будет параллельным главной оптической оси mn.

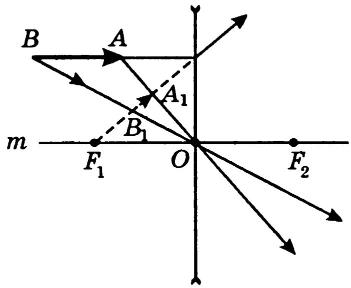


Рис. 19-31

Задача 30

Построить изображение стрелки AB, даваемое собирающей линзой (рис. 19-32).

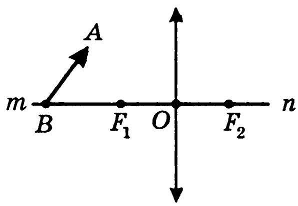


Рис. 19-32

Решение. Вначале построим изображение точки A. Проделаем это в той же последовательности, что и в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что теперь через фокус F_2 пойдет сам преломленный луч (а не его мнимое продолжение, ведь эта линза собирающая, а не рассеивающая). Итак, сначала «выпустим» из точки A луч, параллельный главной оптической оси mn, который после преломления пойдет через фокус F_2 линзы. Затем «выпустим» из этой же точки луч AP, идущий через главный оптический центр O линзы, который не преломляется. Пересечение этих лучей после про-

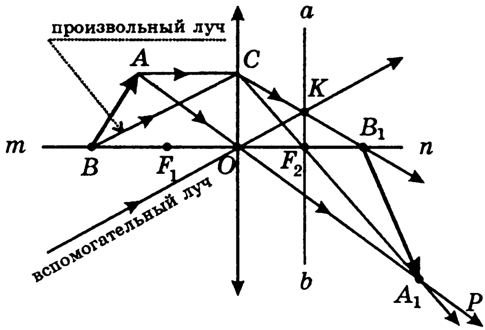


Рис. 19-33

хождения линзы даст нам действительное изображение A_1 точки A (рис. 19-33).

Теперь построим изображение точки B. Сделать это будет труднее, поскольку точка B лежит на главной оптической оси линзы, поэтому предыдущие действия здесь не дадут результата. Чтобы построить это изображение, придется воспользоваться свойством главной фокальной плоскости линзы, согласно которому у собирающей линзы параллельные лучи после преломления пересекутся в одной точке, лежащей обязательно на главной фокальной плоскости (а у рассеивающей линзы в точке на фокальной плоскости пересекаются мнимые продолжения параллельных лучей).

«Выпустим» из точки B любой произвольный луч BC. Затем проведем через главный оптический центр O линзы вспомогательный луч, параллельный произвольному. Этот луч не преломляется линзой. Построим по другую сторону линзы главную фокальную плоскость линзы ab (на нашем чертеже линия ab есть пересечение главной фокальной плоскости плоскостью нашего чертежа, а сама главная фокальная плоскость проходит через фокус линзы перпендикулярно главной оптической оси, лежащей в плоскости чертежа). Продолжим вспомогательный луч до пересечения его с главной фокальной плоскостью ab в точке K. Поскольку наш произвольный луч и вспомогательный параллельны, то после преломления они должны пересечься в точке, лежащей на главной фокальной плоскости ab. Раз вспомогательный луч пересек главную фокальную плоскость ab в точке K, значит, и произвольный луч после преломления тоже пойдет через точку K.

Итак, ход одного луча, «испущенного» точкой B, мы знаем. Теперь «выпустим» из точки B еще один луч, который направим вдоль главной оптической оси mn.

Этот луч проходит через главный оптический центр линзы O, поэтому он тоже не преломляется. Луч, прошедший после преломления через точку K, и луч, идущий по главной оптической оси, испущенные до преломления точкой B, пересекутся в точке B_1, лежащей на главной оптической оси линзы. Эта точка и есть изображение точки B.

Нам осталось соединить точки A_1 и B_1 стрелкой, направленной к точке A_1. Эта стрелка A_1B_1 и есть действительное изображение стрелки AB.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Предмет высотой $h = 0{,}03$ м расположен на расстоянии $d = 0{,}15$ м от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}3$ м. Найти высоту H изображения этого предмета.

Ответ: $H = \dfrac{hF}{d+F} = 0{,}02$ м.

Задача 2. Расстояние от предмета до экрана $l = 5$ м. Какой оптической силы D нужно взять линзу и где ее следует поместить, чтобы увеличение предмета в линзе было $Г = 5$?

Ответ: $D = \dfrac{(1+Г)^2}{lГ} = 3{,}6$ дптр, $d = \dfrac{l}{1+Г} = 1$ м.

Задача 3. Собирающая линза дает на экране изображение предмета с увеличением $Г = 2$. Расстояние d от предмета до линзы превышает ее фокусное расстояние F на $\Delta r = 6$ см. Найти расстояние f от линзы до экрана.

Ответ: $f = Г\cdot\Delta r\,(Г + 1) = 36$ см.

Задача 4. Оптическая сила линзы $D = 5$ дптр, расстояние от предмета до линзы $d = 80$ см. Во сколько раз изменится линейное увеличение линзы, если расстояние от предмета до линзы уменьшить на 80%.

Указание: проверьте, не окажется ли при этом предмет между фокусом и линзой.

Ответ: $\dfrac{Г_2}{Г_1} = \dfrac{Dd_1 - 1}{1 - 0{,}2Dd_1} = 15.$

Задача 5. С помощью фотоаппарата, размеры кадров которого $l_1 \times l_2 = 20 \times 40$ мм^2, а фокусное расстояние объектива $F = 8$ см, фотографируют человека, рост которого $h = 1{,}6$ м. На каком минимальном расстоянии d от фотоаппарата надо поставить человека, чтобы сфотографировать его во весь рост?

Ответ: $d = F\left(\dfrac{h}{l_2} + 1\right) = 3{,}28$ м.

Задача 6. Мнимое изображение светящейся точки находится в фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 4$ см. На каком расстоянии d от линзы находится сама точка?

Ответ: $d = 0{,}5\ F = 2$ см.

Задача 7. Предмет рассматривают в лупу. Его изображение наиболее отчетливо видно, когда предмет находится на расстоянии $d = 0{,}1$ м от нее. Чему равны оптическая сила лупы D и увеличение Г?

Указание: предмет наиболее отчетливо виден через лупу, когда $d \approx F$.

Ответ: D = 10 дптр, $Г$ = 2,5.

Задача 8. Фотограф фотографирует спортсмена в тот момент, когда он находится на расстоянии d = 8 м от него. Выдержка, сделанная фотографом в момент съемки, t = 10 мс, а размытость изображения на фотопленке H = 0,2 мм. Фокусное расстояние объектива F = 6 см. С какой скоростью v бежит спортсмен?

Ответ: $v = \dfrac{H(d-F)}{tF} = 2{,}6$ м/с.

Задача 9. Чему равна оптическая сила линзы D, если изображение предмета, помещенного на расстоянии d = 40 см от линзы, получилось в натуральную величину?

Ответ: D = 5 дптр.

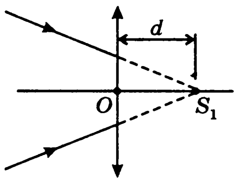


Рис. 19-34

Задача 10. На линзу падает пучок сходящихся лучей с вершиной в точке S_1 (рис. 19-34). Расстояние OS_1 d = 20 см, оптическая сила линзы D = 10 дптр. На каком расстоянии l от точки S_1 пересекутся лучи после преломления?

Ответ: $l = d\left(1 + \dfrac{1}{dD+1}\right) = 0{,}27$ м.

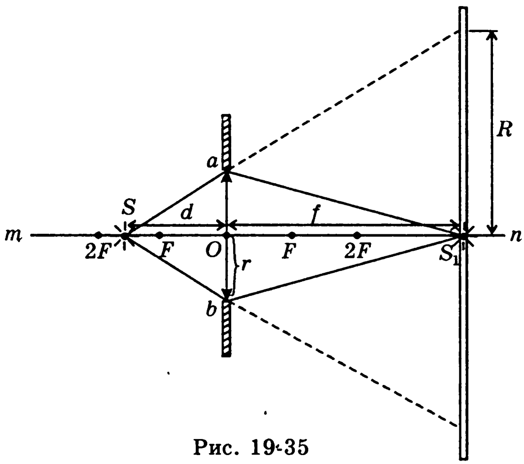


Рис. 19-35

Задача 11. Собирающая линза с фокусным расстоянием F = 0,06 м вставлена в отверстие ab радиусом r = 0,03 м в непрозрачной ширме (рис. 19-35). На экране, находящемся на расстоянии f = 0,16 м от ширмы, получено четкое изображение S_1 точечного источника света S. Каков будет радиус R светлого круга на экране, если вынуть линзу из отверстия?

Ответ:

$$R = \frac{fr}{F} = 0{,}08 \text{ м.}$$

Задача 12. Высота изображения, даваемого линзой на экране, равна H_1. Оставляя неподвижными предмет и экран, линзу передвигают к экрану и получают новое четкое изображение высотой H_2. Чему равна высота предмета h?

Ответ: $h = \sqrt{H_1 H_2}$.

Задача 13. При одном положении линзы между неподвижными предметом и экраном изображение получается увеличенным в 2 раза ($\Gamma_1 = 2$), а при другом положении линзы оно получается уменьшенным в 2 раза $\left(\Gamma_2 = \frac{1}{2}\right)$. Расстояние между предметом и экраном $L = 80$ см. На какое расстояние l передвинули линзу относительно ее первого положения?

Ответ: $l = L\dfrac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{(\Gamma_1 + 1)(\Gamma_2 + 1)} = 0{,}44$ м.

Задача 14. Предмет расположен на расстоянии L от экрана. Передвигая между ними линзу с фокусным расстоянием F, получаем на экране два четких изображения предмета, одно увеличенное, другое уменьшенное. Найти отношение линейных размеров этих изображений H_1/H_2.

Ответ: $\dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{L + \sqrt{L(L - 4F)}}{L - \sqrt{L(L - 4F)}}$.

Задача 15. Точечный источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы. За линзой находится непрозрачная диафрагма с отверстием диаметром $d_1 = 1{,}5$ см. За диафрагмой находится экран на расстоянии $l = 8$ см от нее. На экране лучи, прошедшие сквозь отверстие в диафрагме, образуют световое пятно диаметром $d_2 = 0{,}4$ см. В отверстие вставляют рассеивающую линзу, и при этом пятно на экране превращается в световую точку. Чему равно фокусное расстояние рассеивающей линзы F?

Ответ: $F = -\dfrac{ld_1}{d_2} = -30$ см.

Задача 16. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 8$ см сложена вплотную с рассеивающей линзой с фокусным расстоянием $F_2 = 20$ см так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет находится на расстоянии $d = 20$ см от них. Найти увеличение Г этой системы линз.

Ответ: $\Gamma = \dfrac{F_1 F_2}{F_2(d - F_1) - dF_1} = 2$.

Задача 17. Близорукий человек может четко видеть предмет, если он находится на расстоянии не более $d_1 = 20$ см от глаза. Какова должна быть оптическая сила очков $D_{очк}$, которые должен носить этот человек, чтобы четко видеть удаленные предметы ($d_2 = \infty$)?

Ответ: $D_{очк} = -\dfrac{1}{d_1} = -5$ дптр.

Задача 18. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 15$ см расположены на расстоянии $l = 30$ см друг от друга. Найти расстояние F_1, если лучи по выходе из второй линзы пошли параллельно ее главной оптической оси, а оси обеих линз совпадают.

Ответ: $d_1 = \dfrac{F_1(l - F_2)}{l - F_1 - F_2} = 30$ см.

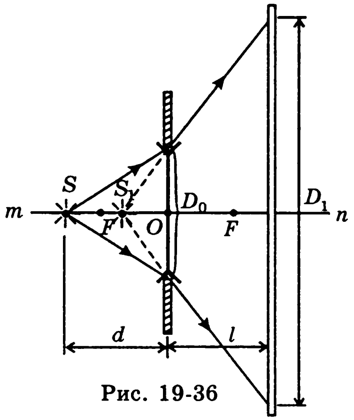


Рис. 19-36

Задача 19. Если точечный источник света S поместить на расстоянии $d > F$ от рассеивающей линзы диаметром D_0, вставленной в непрозрачную ширму, то на экране, находящемся на расстоянии l за линзой, получится светлый круг диаметром D_1 (рис. 19-36). Каков будет диаметр D_2 светлого круга на экране, если источник поместить в фокусе линзы?

Ответ: $D_2 = 2D_1 - D_0\left(1 + \dfrac{l}{d}\right)$.

Задача 20. Точечный источник света помещен в фокусе рассеивающей линзы. Собирающая линза, приставленная вплотную к рассеивающей, превращает падающий на нее из рассеивающей линзы расходящийся пучок в параллельный. Найти отношение фокусных расстояний этих линз $F_{соб}/F_{рас}$.

Ответ: $\dfrac{F_{соб}}{F_{рас}} = 0{,}5$.

Задача 21. На каком расстоянии l нужно расположить две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 5$ см и $F_2 = 3$ см, чтобы параллельный пучок лучей, пройдя сквозь них, остался параллельным?

Ответ: $l = F_1 + F_2 = 8$ см.

Задача 22. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 2$ см и $F_2 = 20$ см расположены на расстоянии $l = 24$ см друг от друга. Предмет находится на расстоянии $d_1 = 3$ см от первой линзы. Найти увеличение Г, даваемое этой системой линз.

Ответ: $\Gamma = \dfrac{F_1F_2}{F_1d_1 + (d_1 - F_1)(F_2 - l)} = 20$.

Задача 23. Точечный источник света S находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 6$ см на расстоянии $d = 4$ см от нее. На каком расстоянии l от линзы по ту же сторону от нее, что и источник, необходимо поставить плоское зеркало ab, чтобы по другую сторону линзы существовало действительное изображение источника S_1 на расстоянии $f = 12$ см от нее?

Ответ: $l = 0{,}5\left(\dfrac{fF}{f - F} + d\right) = 8$ см.

Задача 24. Двояковыпуклая линза, изготовленная из стекла с показателем преломления n_1, помещена в воду с показателем преломления $n_2 = 1{,}33$. Чему равна оптическая сила D линзы в воде? Радиусы кривизны поверхностей линзы одинаковы: $R = 10$ см.

Указание: здесь $n = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Ответ: $D = \dfrac{2(n_1 - n_2)}{n_2 R} = 2{,}6$ дптр.

Задача 25. Ученик переводит взгляд с неба на раскрытую тетрадь. Насколько изменится оптическая сила хрусталика? Тетрадь расположена от глаз на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см.

Указание: при взгляде на небо $d_1 = \infty$, при взгляде на тетрадь $d_2 = d_0$. Расстояние f от хрусталика до сетчатки в обоих случаях одинаково. Запишите формулу линзы для обоих случаев и вычтите из одного уравнения другое.

Ответ: $\Delta D = 4$ дптр.

Задача 26. Расстояние до Луны $d = 384\,400$ км, ее радиус $R = 1738$ км. Чему равна площадь S изображения полной Луны на сетчатке? Оптическая сила глаза $D = 58{,}5$ дптр.

Ответ: $S = \pi\left(\dfrac{R}{dD}\right)^2 = 0{,}19$ мм^2.

Задача 27. Фокусное расстояние окуляра микроскопа $F_{ок} = 2$ см, длина его тубуса (расстояние между окуляром и объективом) $l = 20$ см, оптическая сила объектива $D_{об} = 250$ дптр. Чему равно увеличение микроскопа?

Ответ: $Г = \dfrac{D_{об} d_0 l}{F_{ок}} = 625$.

Задача 28. Фокусное расстояние объектива телескопа $F_{об} = 4$ м, его угловое увеличение $Г = 40$. Чему равна оптическая сила $D_{ок}$ окуляра?

Ответ: $D_{ок} = \dfrac{Г}{F_{об}} = 10$ дптр.

Задача 29. Постройте график зависимости расстояния f от изображения до линзы от ее фокусного расстояния F при неизменном расстоянии от предмета до линзы $d = 40$ см.

Задача 30. Постройте график зависимости линейного увеличения линзы Г от ее оптической силы D при неизменном расстоянии между линзой и предметом $d = 40$ см.

Задача 31. Построением определить положение главного оптического центра O и фокусов линзы, если S – источник света, S_1 – изображение этого источника, даваемого этой линзой, mn – главная оптическая ось линзы (рис. 19-37).

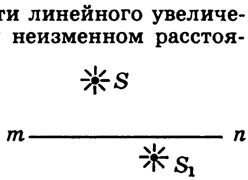


Рис. 19-37

Задача 32. На рис. 19-38 S –источник света, S_1 – его изображение в линзе. Какая это линза? Определите построением ее главный оптический центр и фокусы, mn – главная оптическая ось линзы.

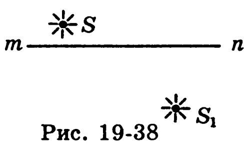


Рис. 19-38

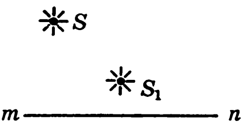


Рис. 19-39

Задача 33. На рис. 19-39 S – точечный источник света, S_1 – его изображение, даваемое тонкой линзой, mn – главная оптическая ось этой линзы. Какая это линза: собирающая или рассеивающая? Найти построением ее главный оптический центр и фокусы.

Задача 34. Найти построением положение источника света S, если известен ход двух лучей после их преломления в линзе (рис. 19-40).

Задача 35. Построить изображение предмета AB, показанного на рис. 19-41.

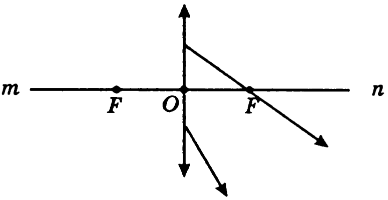


Рис. 19-40

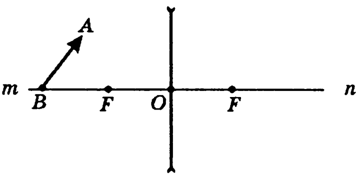


Рис. 19-41

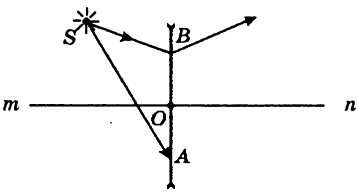


Рис. 19-42

Задача 36. Построить ход произвольного луча SA, падающего на рассеивающую линзу (рис. 19-42), после преломления в ней.

Задача 37. На рис. 19-43 показан ход луча $1 - 1'$ в рассеивающей линзе. Найти построением ход луча 2 после преломления.

Задача 38. Построить изображение предмета AB в линзе, показанной на рис. 19-44 *а* и *б*.

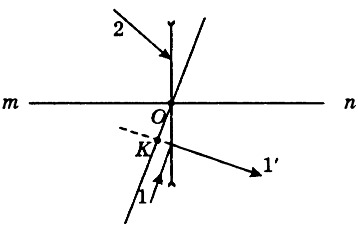


Рис. 19-43

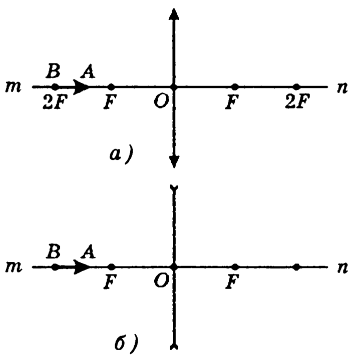


Рис. 19-44

20. ФОТОМЕТРИЯ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

В разделе оптики «Фотометрия» рассматриваются законы распространения световой энергии и оптические характеристики излучения: поток излучения, сила света I и освещенность поверхности E.

Поток излучения (световой поток) Φ равен отношению световой энергии W, переносимой световой волной в течение времени t, к этому времени:

$$\Phi = \frac{W}{t}.$$

Сила света I равна отношению светового потока Φ, распространяющегося внутри телесного угла Ω, к этому углу:

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}.$$

Освещенность поверхности E равна отношению светового потока, падающего на поверхность площадью S, к этой площади:

$$E = \frac{\Phi}{S}.$$

Закон освещенности: освещенность поверхности E прямо пропорциональна силе света источника I и косинусу угла падения лучей α на поверхность и обратно пропорциональна квадрату расстояния r от источника до этой поверхности:

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha.$$

Освещенность поверхности E, созданная N источниками, равна сумме освещенностей E_1, E_2, E_3,...,E_N, созданных каждым источником в отдельности:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_N = \sum_{i=1}^{N} E_i.$$

Если освещенности, создаваемые отдельными источниками, одинаковы, то $E = NE_1$, где E_1 – освещенность, созданная каждым источником.

Иногда в задачах фотометрии встречается величина, называемая световой эффективностью L. Так называют отношение светового потока Φ к мощности источника света P:

$$L = \frac{\Phi}{P}.$$

Единица световой эффективности в СИ – лм/Вт (люмен на ватт).

Если свет, испущенный источником с силой света I, отражается от зеркала, то сила света мнимого источника в зеркале считается равной силе света действительного источника. В этом случае освещенность поверхности равна сумме освещенностей, созданных действительным и мнимым источниками с одинаковой силой света.

Если свет от источника проходит сквозь линзу, то световые потоки – падающий на линзу и выходящий из нее – одинаковы, и выполняется соотношение $\Phi = ES$.

Если лучи преломляются в линзе, то изображение, даваемое линзой, следует рассматривать как источник света. Если сила света первичного источника I_1, а сила света изображения этого источника I_2, то выполняются соотношения

$$\Phi = I_1\Omega_1 \text{ и } \Phi = I_2\Omega_2,$$

где Ω_1 и Ω_2 – телесные углы, внутри которых распространяются падающий на линзу и преломленный ею пучок лучей. Если источник света точечный, то справедливо соотношение

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{f^2}{d^2},$$

где d – расстояние от источника света до линзы и f – расстояние от линзы до изображения.

Если лучи, испущенные точечным источником, падают на площадку S, расположенную на расстоянии r от источника, то телесный угол Ω, внутри которого они распространяются, равен отношению площади S к квадрату расстояния r:

$$\Omega = \frac{S}{r^2}.$$

Решение отдельных задач

Задача 1

С какого наибольшего расстояния r можно заметить ночью огонек сигареты, сила света которой $I = 2 \cdot 10^{-3}$ кд, а минимальный световой поток, воспринимаемый глазом, $\Phi = 1 \cdot 10^{-13}$ лм и диаметр суженного в темноте зрачка $D = 7$ мм?

Дано:
$I = 2 \cdot 10^{-3}$ кд
$\Phi = 1 \cdot 10^{-13}$ лм
$D = 7$ мм

r – ?

Решение. Освещенность зрачка E определяется отношением светового потока Φ, падающего в глаз, к площади зрачка S:

$$E = \frac{\Phi}{S}, \text{ где } S = \frac{\pi D^2}{4},$$

поэтому
$$E = \frac{4\Phi}{\pi D^2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, по закону освещенности

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha,$$

где $\alpha = 0°$ и $\cos\alpha = 1$, поэтому $E = \dfrac{I}{r^2}$. (2)

Приравняем (1) и (2) и определим r: $\dfrac{4\Phi}{\pi D^2} = \dfrac{I}{r^2}$,

откуда $$\boxed{r = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{\pi I}{\Phi}}}$$

Переведем в СИ единицу диаметра: 7 мм = $7 \cdot 10^{-3}$ м.

Произведем вычисления:

$$r = \frac{7 \cdot 10^{-3}}{2}\sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-13}}}\ \text{м} = 877\ \text{м}.$$

Ответ: r = 877 м.

Задача 2

Высота Солнца увеличилась с $\varphi_1 = 30°$ до $\varphi_2 = 45°$. Во сколько раз изменилась освещенность земной поверхности?

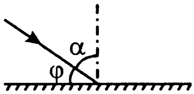


Рис. 20-1

Дано:
$\varphi_1 = 30°$
$\varphi_2 = 45°$

$\dfrac{E_2}{E_1}$ – ?

Решение. Согласно закону освещенности

$$E_1 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha_1 \text{ и } E_2 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha_2,$$

где I – сила света Солнца, r – расстояние до него, α – угол падения. Из рис. 20-1 следует, что $\alpha_1 = 90° - \varphi_1$ и $\alpha_2 = 90° - \varphi_2$,

поэтому $$E_1 = \frac{I}{r^2}\cos(90° - \varphi_1) = \frac{I}{r^2}\sin\varphi_1. \quad (1)$$

Аналогично $$E_2 = \frac{I}{r^2}\sin\varphi_2. \quad (2)$$

Разделив (2) на (1), мы решим задачу:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{I\sin\varphi_2 r^2}{r^2 I\sin\varphi_1}, \quad \boxed{\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}}$$

Произведем вычисления:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°} = 1{,}4.$$

Ответ: $E_2/E_1 = 1{,}4$.

Задача 3

Чему равна мощность P лампы, освещающей школьную парту, наклоненную под углом $\varphi = 20°$ к горизонту? Лампа висит на высоте h = 1,7 м над партой, требуемая освещенность парты E = 50 лк. Световая эффективность лампы L = 19 лм/Вт.

Дано:
$\varphi = 20°$
$h = 1{,}7$ м
$E = 50$ лк
$L = 19\ \dfrac{\text{лм}}{\text{Вт}}$

P – ?

Решение. Согласно определению световой эффективности

$$L = \frac{\Phi}{P}, \text{ откуда } P = \frac{\Phi}{L}. \quad (1)$$

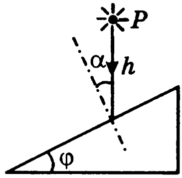


Рис. 20-2

Световой поток Φ определим произведением силы света лампы I и полного телесного угла $\Omega_0 = 4\pi$:

$$\Phi = I\Omega_0 = 4\pi I. \quad (2)$$

Силу света I определим из закона освещенности

$E = \dfrac{I}{h^2}\cos\alpha$, где угол падения α равен углу наклона парты φ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 20-2).

С учетом этого $E = \dfrac{I}{h^2}\cos\varphi$, откуда $I = \dfrac{Eh^2}{\cos\varphi}$. (3)

Подставим (3) в (2): $\Phi = \dfrac{4\pi E h^2}{\cos\varphi}$. (4)

Нам осталось подставить (4) в (1), и задача будет решена:

$$\boxed{P = \frac{4\pi E h^2}{L\cos\varphi}}$$

Произведем вычисления:

$$P = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 2{,}89}{19\cos 20°}\ \text{Вт} = 100\ \text{Вт}.$$

Ответ: $P = 100$ Вт.

Задача 4

При печатании фотоснимка сила света лампы $I_1 = 60$ кд, а время экспозиции $t_1 = 1{,}5$ с. Найти изменение силы света ΔI после замены ее другой лампой, если при прежней световой энергии время экспозиции стало на $\Delta t = 0{,}5$ с меньше.

Дано:
$I_1 = 60$ кд
$t_1 = 1{,}5$ с
$\Delta t = 0{,}5$ с

ΔI – ?

Решение. Энергию W света, падающего на снимок, определим произведением светового потока на время экспозиции. В обоих случаях $W = \Phi_1 t_1$ и $W = \Phi_2 t_2$, значит,

$$\Phi_1 t_1 = \Phi_2 t_2. \quad (1)$$

Световые потоки Φ_1 и Φ_2 выразим через силы света I_1 и I_2 и телесный угол Ω:

$$\Phi_1 = I_1\Omega \quad \text{и} \quad \Phi_2 = I_2\Omega.$$

Телесный угол Ω определим отношением площади снимка S к квадрату расстояния r от лампы до него:

$$\Omega = \frac{S}{r^2}.$$

С учетом этого $\Phi_1 = I_1\dfrac{S}{r^2}$ (2) и $\Phi_2 = I_2\dfrac{S}{r^2}$. (3)

Подставим (2) и (3) в (1):

$I_1\dfrac{S}{r^2}t_1 = I_2\dfrac{S}{r^2}t_2$, откуда сила света новой лампы

$I_2 = \dfrac{I_1 t_1}{t_2}$, где $t_2 = t_1 - \Delta t$, поэтому $I_2 = \dfrac{I_1 t_1}{t_1 - \Delta t}$, а изменение силы света

$$\Delta I = I_2 - I_1 = \frac{I_1 t_1}{t_1 - \Delta t} - I_1 = I_1\left(\frac{t_1}{t_1 - \Delta t} - 1\right) = I_1\frac{t_1 - t_1 + \Delta t}{t_1 - \Delta t},$$

$$\boxed{\Delta I = I_1\frac{\Delta t}{t_1 - \Delta t}}$$

Произведем вычисления:

$$\Delta I = 60\frac{0{,}5}{1{,}5 - 0{,}5}\text{ кд} = 30\text{ кд}.$$

Ответ: $\Delta I = 30$ кд.

Задача 5

Над полом на высоте $h = 1{,}8$ м находятся две лампы с одинаковой силой света $I = 100$ кд. Расстояние между ними $l = 3$ м (рис. 20-3). Найти освещенности E_1 пола под каждой лампой и E_2 в точке пола, равноудаленной от каждой лампы.

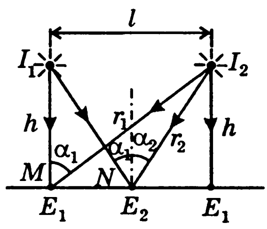


Рис. 20-3

Дано:
$h = 1{,}8$ м
$I = 100$ кд
$l = 3$ м

E_1 – ?
E_2 – ?

Решение. В силу симметрии освещенность E_1 под каждой лампой одинакова и равна сумме освещенности E_{11}, созданной, например, лампой 1 под ней в точке M, и освещенности E_{12}, созданной в точке M лампой 2, удаленной от этой точки на расстояние r_1:

$$E_1 = E_{11} + E_{12}.$$

По закону освещенности $E_{11} = \dfrac{I}{h^2}$ и $E_{12} = \dfrac{I}{r_1^2}\cos\alpha_1$, где по теореме Пифагора $r_1^2 = h^2 + l^2$ и, кроме того,

$$\cos\alpha_1 = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}}.$$

С учетом этого $E_1 = \dfrac{I}{h^2} + \dfrac{Ih}{(h^2 + l^2)\sqrt{h^2 + l^2}}$ или

$$\boxed{E_1 = I\left(\frac{1}{h^2} + \frac{h}{\sqrt{(h^2 + l^2)^3}}\right)}$$

Освещенность E_2 в точке N, созданная обеими лампами, равна удвоенной освещенности E_{21}, созданной каждой лампой в отдельности: $E_2 = 2E_{21}$, где по закону освещенности

$$E_{21} = \frac{I}{r_2^2}\cos\alpha_2.$$

Здесь $r_2^2 = h^2 + \dfrac{l^2}{4}$ и $\cos\alpha_2 = \dfrac{h}{\sqrt{h + \dfrac{l^2}{4}}}$.

С учетом этого

$$E_2 = 2\frac{I}{h^2 + \dfrac{l}{4}} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \dfrac{l}{4}}} = 2\frac{4I}{4h^2 + l^2} \cdot \frac{2h}{\sqrt{4h^2 + l^2}}$$

или

$$\boxed{E_2 = \frac{16Ih}{\sqrt{(4h^2 + l^2)^3}}}$$

Произведем вычисления:

$$E_1 = 100\left(\frac{1}{1{,}8^2} + \frac{1{,}8}{\sqrt{(1{,}8^2 + 3^2)^3}}\right)\text{лк} = 35 \text{ лк},$$

$$E_2 = \frac{16 \cdot 100 \cdot 1{,}8}{\sqrt{(4 \cdot 1{,}8^2 + 3^2)^3}} \text{ лк} = 28 \text{ лк}.$$

Ответ: $E_1 = 35$ лк, $E_2 = 28$ лк.

Задача 6

Два точечных источника света S_1 и S_2 с силами света $I_1 = 100$ кд и $I_2 = 160$ кд расположены на расстоянии $r = 4$ м друг от друга (рис. 20-4). На каком расстоянии r_1 от источника S_1 надо расположить экран Э, чтобы освещенность его с обеих сторон была одинакова?

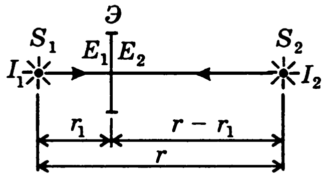


Рис. 20-4

Дано:	
$I_1 = 100$ кд	
$I_2 = 160$ кд	
$r = 4$ м	
$E_1 = E_2$	
r_1 – ?	

Решение. По закону освещенности при угле падения $\alpha = 0°$

$$E_1 = \frac{I_1}{r_1^2} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{I_2}{r_2^2},$$

где $r_2 = r - r_1$, поэтому $E_2 = \dfrac{I_2}{(r - r_1)^2}$.

Согласно условию $E_1 = E_2$, поэтому $\dfrac{I_1}{r_1^2} = \dfrac{I_2}{(r - r_1)^2}$,

$\dfrac{\sqrt{I_1}}{r_1} = \dfrac{\sqrt{I_2}}{r - r_1}$, $r\sqrt{I_1} - r_1\sqrt{I_1} = r_1\sqrt{I_2}$, откуда

$$\boxed{r_1 = \frac{r\sqrt{I_1}}{\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}}}$$

Произведем вычисления: $r_1 = \dfrac{4\sqrt{100}}{\sqrt{100} + \sqrt{160}}$ м $= 0{,}8$ м.

Ответ: $r_1 = 0{,}8$ м.

Задача 7

На расстоянии $r_1 = 1$ м от экрана Э расположен точечный источник света S с силой света $I = 80$ кд. По другую сторону от этого источника на расстоянии $r_2 = 50$ см от него расположено плоское зеркало mn (рис. 20-5). Чему равна освещенность E экрана напротив источника света?

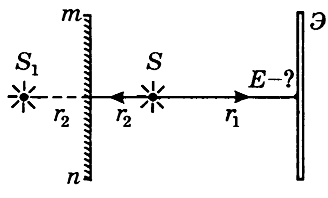


Рис. 20-5

Дано:	
$r_1 = 1$ м	
$I = 80$ кд	
$r_2 = 50$ см	
E – ?	

Решение. Освещенность E равна сумме освещенностей E_1, созданной на экране реальным источником света S, и E_2, созданной мнимым источником света S_1:

$$E = E_1 + E_2. \quad (1)$$

По закону освещенности при угле падения $\alpha = 0°$ $E_1 = \dfrac{I}{r_1^2}$. (2)

Сила света мнимого источника S_1 такая же, как и действительного, а расположен он на расстоянии r_2 от зеркала, поэтому расстояние от мнимого источника S_1 до экрана равно $r_1 + 2r_2$. С учетом этого

$$E_2 = \frac{I}{(r_1 + 2r_2)^2}. \quad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу:

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I}{(r_1 + 2r_2)^2} \quad \text{или} \quad \boxed{E = I\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{(r_1 + 2r_2)^2}\right)}$$

Переведем в СИ единицу r_2: 50 см = 0,5 м.
Произведем вычисления:

$$E = 80\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1 + 2 \cdot 0{,}5)^2}\right) \text{лк} = 100 \text{ лк}.$$

Ответ: $E = 100$ лк.

Задача 8

На расстоянии $d = 40$ см от выпуклого зеркала mn радиусом $R = 50$ см на его главной оптической оси находится точечный источник света S (рис. 20-6). На расстоянии $L = 20$ м от зеркала помещен экран Э. Сила света источника $I = 100$ кд. Чему равна освещенность экрана E?

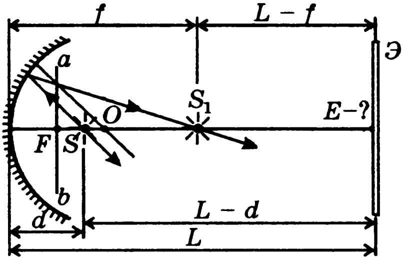


Рис. 20-6

Дано:	
$d = 40$ см	
$R = 50$ см	
$L = 20$ м	
$I = 100$ кд	
E – ?	

Решение. Освещенность E в центре экрана равна сумме освещенностей E_1, созданной на экране источником S, и E_2, созданной его действительным изображением S_1 и имеющим такую же силу света:

$$E = E_1 + E_2. \quad (1)$$

По закону освещенности при $\alpha = 0°$

$$E_1 = \frac{I}{(L-d)^2} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{I}{(L-f)^2}. \qquad (2)$$

Здесь f – расстояние от изображения до зеркала. Его мы найдем из формулы сферического зеркала

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}, \text{ откуда } \frac{1}{f}=\frac{2}{R}-\frac{1}{d} \text{ и } f=\frac{dR}{2d-R}.$$

С учетом этого

$$E_2 = \frac{I}{\left(L-\dfrac{dR}{2d-R}\right)^2} = I\left(\frac{2d-R}{L(2d-R)-dR}\right)^2. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$E = \frac{I}{(L-d)^2} + I\left(\frac{2d-R}{L(2d-R)-dR}\right)^2 \text{ или}$$

$$\boxed{E = I\left(\frac{1}{(L-d)^2} + \left(\frac{2d-R}{L(2d-R)-dR}\right)^2\right)}$$

Переведем в СИ все единицы: 40 см = 0,4 м, 50 см = 0,5 м.

Произведем вычисления:

$$E = 100\left(\frac{1}{(20-0{,}4)^2} + \left(\frac{2\cdot 0{,}4-0{,}5}{20(2\cdot 0{,}4-0{,}5)-0{,}4\cdot 0{,}5}\right)^2\right) = 0{,}1 \text{ лк.}$$

Ответ: E = 0,1 лк.

Задача 9

Точечный источник S с силой света I = = 50 кд находится на расстоянии d = 1 м от собирающей линзы диаметром D_1 = 30 см (рис. 20-7). За линзой расположен экран $Э$, на котором преломленные лучи образуют световой круг диаметром D_2 = 3 см. Чему равна освещенность E этого круга?

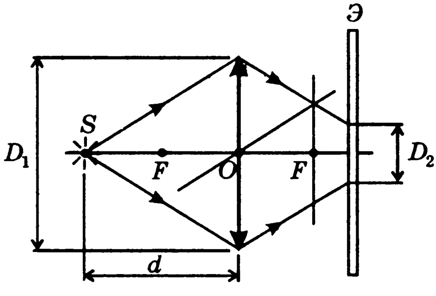


Рис. 20-7

Дано:
$I = 50$ кд
$d = 1$ м
$D_1 = 30$ см
$D_2 = 3$ см

E – ?

Решение. Воспользуемся законом сохранения светового потока, согласно которому, если линза не поглощает световую энергию, то световой поток Φ, прошедший сквозь нее, сохраняется. Значит,

$$E = \frac{\Phi}{S_2}, \text{ где } S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4}$$ – площадь круга

на экране. С учетом этого $E = \dfrac{4\Phi}{\pi D_2^2}$. (1)

Световой поток найдем, зная силу света I, по формуле $\Phi = I\Omega$, где телесный угол Ω равен отношению площади линзы $S_1 = \dfrac{\pi D_1^2}{4}$ к квадрату расстояния d до нее:

$$\Omega = \frac{S_1}{d^2} = \frac{\pi D_1^2}{4d^2}.$$

С учетом этого $$\Phi = \frac{\pi D_1^2 I}{4d^2}. \quad (2)$$

Нам осталось подставить (2) в (1), и задача будет решена:

$$E = \frac{4\pi D_1^2 I}{4\pi D_2^2 d^2}, \quad \boxed{E = I\left(\frac{D_1}{dD_2}\right)^2}$$

Переведем все единицы в СИ:
30 см = 0,3 м, 3 см = 0,03 м.
Произведем вычисления:

$$E = 50\left(\frac{0{,}3}{1 \cdot 0{,}03}\right)^2 \text{ лк} = 5 \cdot 10^3 \text{ лк}.$$

Ответ: $E = 5 \cdot 10^3$ лк.

Задача 10

Высоко над горизонтальной поверхностью расположен точечный источник света с силой света $I = 50$ кд.

Между ним и поверхностью помещена собирающая линза с оптической силой $D = 5$ дптр так, что источник света находится в ее фокусе (рис. 20-8). Найти освещенность E поверхности под линзой.

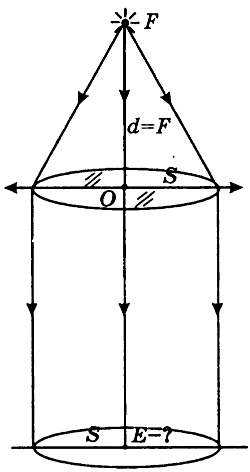


Рис. 20-8

Дано:	
$I = 50$ кд	
$D = 5$ дптр	
$d = F$	
E – ?	

Решение. Освещенность поверхности E определим отношением светового потока Φ, падающего на нее, к освещаемой площади S:

$$E = \frac{\Phi}{S}. \qquad (1)$$

Поскольку источник находится в фокусе линзы, т. е. расстояние от него до линзы $d = F$, где $F = \frac{1}{D}$ – фокусное расстояние, то лучи после линзы пойдут параллельно ее главной оптической оси, образуя светящийся цилиндр с равными верхним и нижним основаниями S. Согласно сказанному $d = \frac{1}{D}$ и, кроме того, $\Phi = I\Omega$, где телесный угол $\Omega = \frac{S}{d^2} = SD^2$, поэтому

$$\Phi = ISD^2. \qquad (2)$$

Нам осталось подставить (2) в (1):

$$E = \frac{ISD^2}{S}, \quad \boxed{E = ID^2}$$

Произведем вычисления:
$E = 50 \cdot 5^2$ лк $= 1250$ лк.
Ответ: $E = 1250$ лк.

Задача 11

Над центром круглого стола радиусом $R = 1$ м висит лампа с силой света $I = 100$ кд (рис. 20-9). Построить график зависимости освещенности E края стола от высоты h лампы над столом $E = E(h)$ в интервале от 0,5 до 0,9 м через каждые 0,1 м.

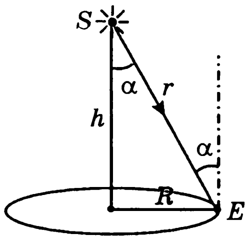


Рис. 20-9

Дано:
$R = 1$ м
$I = 100$ кд
$h_1 = 0{,}5$ м
$h_2 = 0{,}9$ м
$E = E(h)$ – ?

Решение. Сначала выведем формулу, устанавливающую зависимость освещенности края стола E от высоты h источника света:

$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$, где r – расстояние от источника света до края стола, α – угол падения лучей на край.

По теореме Пифагора $r^2 = h^2 + R^2$.

Кроме того, $\cos\alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$.

С учетом этого

$$E = \frac{Ih}{(h^2 + R^2)\sqrt{h^2 + R^2}} = \frac{Ih}{\sqrt{(h^2 + R^2)^3}}. \qquad (1)$$

Теперь заменим I и R их численными значениями:

$$E = \frac{100h}{\sqrt{(h^2 + 1)^3}}. \qquad (2)$$

Далее, будем придавать h численные значения 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 м и, подставляя их поочередно в (2), вычислять соответствующие им величины E. Заполним таблицу:

h, м	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
E, лк	35,8	37,8	38,5	38,1	37,0

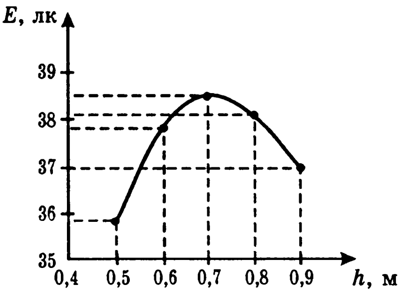


Рис. 20-10

Построим график $E = E(h)$ (рис. 20-10).

Мы видим, что функция $E = E(h)$ достигает максимума при $h = 0,7$ м, т. е. при этой высоте освещенность края стола максимальна. В следующей задаче мы подтвердим этот факт теоретически.

Задача решена.

Задача 12

На некоторой высоте над круглым столом радиусом R висит лампа с силой света I. На какой высоте h должна она висеть, чтобы освещенность края стола E была максимальной?

Дано:
R
I
$E = E_{max}$
h – ?

Решение. Воспользуемся формулой (1) в задаче 11 как готовой (но, если вам попадется такая задача, непременно сделайте рисунок 20-9 и вывод этой формулы):

$$E = \frac{Ih}{\sqrt{(h^2 + R^2)^3}}. \qquad (1)$$

Теперь надо исследовать эту зависимость E от h на экстремум.

Для этого надо взять первую производную выражения (1) по h и приравнять ее нулю, а затем из полученного равенства найти высоту h, при которой освещенность стола будет максимальной.

Приступим:

$$\left(\frac{Ih}{\sqrt{(h^2+R^2)^3}}\right)' = I\frac{\sqrt{(h^2+R^2)^3} - h\frac{3}{2}\sqrt{h^2+R^2}\cdot 2h}{(h^2+R^2)^3} = 0.$$

Так как $I \neq 0$, то нулю равен числитель этой дроби:

$$\sqrt{(h^2+R^{2)^3}} - 3h^2\sqrt{h^2+R^2} = 0,$$

$\sqrt{(h^2+R^{2)^3}} = 3h^2\sqrt{h^2+R^2}$, $\quad (h^2 + R^2)^3 = 9h^4(h^2 + R^2)$,
$(h^2 + R^2)^2 = 9h^4$, $\;h^2 + R^2 = 3h^2$, $\;R^2 = 2h^2$,

откуда $\boxed{h = \frac{R}{\sqrt{2}}}$

Если вернуться к задаче 11, то при $R = 1$ м освещенность максимальна, когда $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$ м $= 0{,}7$ м, как у нас там и получилось.

Ответ: $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Какой световой поток Φ испускает точечный источник силой света $I = 30$ кд внутри телесного угла $\Omega = 0{,}6$ ср (стерадиан)? Во сколько раз этот световой поток меньше полного светового потока Φ_0, испускаемого этим источником?

Ответ: $\Phi = 18$ мм, $\Phi_0/\Phi = 21$.

Задача 2. Чему равна сила света I точечного источника, расположенного в центре прозрачной сферы радиусом $R = 0{,}8$ м, причем с части поверхности этой сферы площадью $S = 1$ м^2 излучается световой поток $\Phi = 300$ лм?

Ответ: $I = \frac{\Phi R^2}{S} = 192$ кд.

Задача 3. Когда высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$, освещенность земной поверхности $E = 400$ лк. Насколько изменится освещенность поверхности, если высота Солнца увеличится вдвое?

Ответ: $\Delta E = E(2\cos\varphi - 1) = 293$ лк.

Задача 4. На какой высоте h над чертежной доской, наклоненой под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, должна висеть лампа, излучающая за $t = 10$ мин световую энергию $W = 60$ кВт? Световая эффективность лампы $L = 19$ лм/Вт, требуемая освещенность доски $E = 60$ лк.

Ответ: $h = \sqrt{\frac{WL}{4\pi Et}\cos\varphi} = 1{,}3$ м.

Задача 5. При печатании фотоснимка его освещенность была $E = 60$ лк, когда лампа располагалась на расстоянии $r = 1$ м от него. При этом время экспозиции было $t = 2$ с. Насколько уменьшилось время экспозиции, если силу света лампы увеличили на $\Delta I = 20$ кд?

Ответ: $\Delta t = t\frac{\Delta I r^2}{E + \Delta I r^2} = 0{,}5$ с.

Задача 6. Над полом на высоте $h = 3$ м висят две лампы, излучающие световой поток $\Phi = 2500$ лм каждая. Расстояние между лампами $l = 4$ м. Определить освещенность E_1 пола под каждой лампой и освещенность E_2 в точке пола, равноудаленной от обеих ламп.

Ответ: $E_1 = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{h}{\sqrt{(h^2 + l^2)^3}}\right) = 27$ лк,

$$E_2 = \frac{4\Phi}{\pi\sqrt{(4h^2 + l^2)^3}} = 8{,}5 \text{ лк}.$$

Задача 7. Сила света первого точечного источника в $N = 1{,}5$ раза больше силы света второго. Между источниками света расположен тонкий экран на расстоянии $r_1 = 20$ см от первого источника. Чему равно расстояние r между источниками света, если освещенность E экрана с обеих сторон одинакова?

Ответ: $r = r_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right) = 36$ см.

Задача 8. Посередине между вертикальными плоским зеркалом и экраном находится точечный источник света с силой света $I = 100$ кд. Освещенность в центре экрана $E = 50$ лк. Чему равно расстояние l от зеркала до экрана?

Ответ: $l = \sqrt{4{,}4\frac{I}{E}} = 3$ м.

Задача 9. Чему равен полный световой поток Φ_0, испускаемый точечным источником света, расположенным на главной оптической оси собирающей линзы диаметром $D_1 = 20$ см, если на экране лучи образовали световое пятно диаметром $D_2 = 2$ см. Фокусное расстояние линзы $F = 8$ см, расстояние от линзы изображения источника $f = 30$ см. Освещенность светового пятна $E = 500$ лк.

Ответ: $\Phi_0 = 4\pi E\left(\frac{fFD_2}{D_1(f - F)}\right)^2 = 0{,}6$ лм.

Задача 10. Полный световой поток, излучаемый точечным источником света, $\Phi_0 = 40$ лм. Точечный источник расположен в фокусе собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F = 30$ см. Чему равна освещенность E поверхности под линзой?

Ответ: $E = \frac{\Phi_0}{4\pi F^2} = 35$ лк.

Задача 11. Над центром круглого стола диаметром $D = 1,5$ м висит лампа с силой света $I = 200$ кд. Постройте график зависимости освещенности E края стола от высоты h лампы над ним в интервале высот от $h = 0,4$ до $1,2$ м через каждые $0,2$ м.

21. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Краткая теория. Методические указания к решению задач

В теории относительности рассматривают движение частиц со скоростью порядка 10^7 м/с, т. е. близкой к скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. В основе теории относительности лежат постулаты Эйнштейна:

1-й постулат: любые физические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета;

2-й постулат: скорость света в вакууме абсолютна, т. е. одинакова относительно любых инерциальных систем отсчета.

Следствием этих постулатов являются релятивистские эффекты замедления времени и сокращение длины материальных объектов, движущихся с релятивистской (порядка 10^7 м/с) скоростью. Если промежуток времени между двумя событиями в неподвижной относительно наблюдателя инерциальной системе отсчета равен t_0, то промежуток времени между этими же событиями в движущейся инерциальной системе отсчета

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{21.1}$$

где v – скорость движущейся системы отсчета.

Если длина объекта в неподвижной относительно наблюдателя инерциальной системе отсчета равна l_0, то длина этого же объекта в движущейся со скоростью v системе равна:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{21.2}$$

Если инерциальная система отсчета движется со скоростью v_0 относительно неподвижной системы отсчета, а в ней частица движется в том же направлении со скоростью v_1 относительно движущейся системы, то скорость частицы v относительно неподвижной системы отсчета

$$v = \frac{v_0 + v_1}{1 + \frac{v_0 v_1}{c^2}}. \tag{21.3}$$

Собственная энергия E_0 частицы связана с ее инвариантной массой m формулой

$$E_0 = mc^2. \tag{21.4}$$

Релятивистская энергия E связана с импульсом массовой частицы p соотношением

$$E = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2}. \tag{21.5}$$

Импульс массовой частицы связан с ее скоростью v формулой

$$p = E\frac{v}{c^2}. \tag{21.6}$$

Импульс безмассовой частицы p связан с ее энергией E формулой

$$E = pc. \tag{21.7}$$

Энергия E массовой частицы связана с ее скоростью v формулой

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{21.8}$$

Импульс массовой частицы p связан с ее скоростью v формулой

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{21.9}$$

Кинетическая энергия $E_к$ массовой частицы связана с ее скоростью v формулой

$$E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right). \tag{21.10}$$

Полная энергия массовой частицы связана с ее собственной энергией E_0 и кинетической энергией $E_к$ соотношением

$$E = E_0 + E_к. \tag{21.11}$$

Если использовать понятие релятивистской массы, зависящей от скорости, то во всех этих формулах инвариантную массу m надо заменить массой покоя m_0.

Когда вы решаете задачу о движении элементарных частиц, прежде всего обратите внимание на порядок их скоростей. Если скорость частицы порядка 10^6 м/с или меньше, то эта частица классическая и к ее движению применимы уравнения классической кинематики и динамики. Если же скорость частицы порядка 10^7 м/с, то эта частица релятивистская, и здесь следует применять уравнения специальной теории относительности.

Следует знать, что, чем ближе скорость частицы v к скорости света c, тем большая погрешность в решении возникает при замене релятивистских формул классическими. Так, если $v = 0{,}1\ c$, то относительная погрешность при измерении длины

$$\delta = \frac{l - l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{l} 100\% = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{0{,}01c^2}{c^2}}\right) 100\% = 0{,}5\%.$$

Если же $v = 0{,}8\ c$, то $\delta = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{0{,}64c^2}{c^2}}\right) 100\% = 40\%.$

Таким образом, решая задачи об относительном движении элементарных частиц, например, электрона и протона, когда скорость одной частицы относительно другой в классической кинематике равна сумме их скоростей, убедитесь, что эта скорость менее 10^7 м/с, иначе погрешность ваших вычислений будет велика. Если относительная скорость частиц порядка 10^7 м/с (например, когда одна частица движется со скоростью $v_1 = 4 \cdot 10^6$ м/с, а вторая – со скоростью $v_2 = 6 \cdot 10^6$ м/с), то переходите к релятивистской формуле сложения скоростей (21.3).

Если частица разгоняется электрическим полем, то пользоваться формулой

$$A = qU = \frac{mv^2}{2},$$

где q – заряд частицы, m – ее масса и U – напряжение, можно только при таких напряжениях U электрического поля, которые сообщат частице скорость $v < 10^7$ м/с. Например, если этой частицей является электрон и он разгоняется полем, где $U \leqslant 1$ кВ, то пользоваться приведенным выше равенством еще можно, поскольку при $U = 1$ кВ скорость электрона порядка 10^6 м/с. А если $U = 10$ кВ, то применение этой формулы даст слишком большую погрешность, так как в таком поле электрон разгонится до релятивистской скорости порядка 10^7 м/с. Если же $U = 100$ кВ, то применение приведенной выше формулы для вычисления скорости электрона v приведет к тому, что скорость электрона окажется больше скорости света c, что невозможно. В таких случаях работу поля $A = qU$ следует приравнивать релятивистской кинетической энергии электрона, которую определяет формула (21.10).

Если вам «повезет» на задачу, где требуется применить уравнения релятивистской динамики, можно уточнить у экзаменаторов, какое решение их больше удовлетворит: с использованием понятия «масса покоя m_0» и «масса движения m» или «инвариантная масса m», одинаковая во всех инерциальных системах отсчета. Поскольку подход к решению таких задач различен, мы рассмотрим решение задач с использованием понятия инвариантной массы m отдельно от решения задач, где применяется понятие релятивистской массы, т. е. массы покоя m_0 и массы движения m. Релятивистская масса m движущейся со скоростью v частицы связана с ее массой покоя m_0 формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Запомните: если скорость частицы в какой-либо инерциальной системе меньше скорости света в вакууме c, то ее скорость всегда будет меньше c в любой другой инерциальной системе, т. е. по отношению к любым материальным объектам, движущимися с любыми скоростями, скорость этой частицы v будет меньше c. Если же скорость частицы равна c (фотон, нейтрино), то она всегда будет равна c по отношению к любым инерциальным системам отсчета.

В некоторых учебных пособиях введен термин «скорость взаимного сближения частиц» или «скорость их взаимного удаления» (Физика 11 / Под ред. А. А. Пинского, М., «Просвещение», 1995). При этом под «скоростью взаимного сближения» подразумевают не скорость одной из сближающихся частиц относительно другой, а нечто иное. Определяют скорость взаимного сближения частиц простым арифметическим сложением их скоростей независимо от порядка их величин, а скорость их взаимного удаления, – вычитанием скоростей. При этом скорость взаимного сближения двух фотонов оказывается равной $c + c = 2c$, т. е. больше скорости света в вакууме. Здесь все дело в терминах. Поэтому запомните: если вам требуется определить скорость одной из сближающихся частиц относительно другой, то используйте формулу (21.3). А если надо найти **скорость взаимного сближения** частиц, то ... все же уточните у экзаменатора, что же имеется в виду, учитывая богатство смысловых оттенков русского языка. И если имеется в виду именно скорость взаимного сближения, то просто складывайте скорости частиц, но при этом на всякий случай подчеркните, что эта «взаимная скорость» не есть скорость одной частицы относительно другой.

Решение отдельных задач

Задача 1

Две частицы в некоторый момент времени находятся на расстоянии $S = 1$ км друг от друга и движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 0{,}4c$ и $v_2 = 0{,}6c$. Через какое время t они столкнутся?

Дано:
$S = 1$ км
$v_1 = 0{,}4c$
$v_2 = 0{,}6c$
$c = 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

t – ?

Решение. Время сближения частиц t определим из уравнения равномерного движения

$$t = \frac{S}{v}, \tag{1}$$

где v – скорость, с которой одна из частиц приближается к другой. Ее найдем по формуле (21.3):

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2}\left(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\right).$$

С учетом того, что $v_1 = 0{,}4c$, а $v_2 = 0{,}6c$, имеем

$$t = \frac{S}{0{,}4c + 0{,}6c}\left(1 + \frac{0{,}4c \cdot 0{,}6c}{c^2}\right), \quad \boxed{t = \frac{1{,}24S}{c}}$$

Переведем в СИ единицу S: 1 км = $1 \cdot 10^3$ м.

Произведем вычисления:

$$t = \frac{1{,}24 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}\ \text{с} = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{с} = 4\ \text{мкс}.$$

Ответ: $t = 4$ мкс.

Задача 2

Чему равна скорость v_0 одной инерциальной системы отсчета относительно другой, если скорость частицы относительно одной системы $v = 0{,}5c$, а ее же скорость относительно другой инерциальной системы отсчета $v_1 = 0{,}3c$, где c – скорость света в вакууме?

Дано:
$v = 0{,}5c$
$v_1 = 0{,}3c$
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
v_0 – ?

Решение. Примем одну из инерциальных систем отсчета, относительно которой скорость частицы равна v, за неподвижную. Тогда вторая система отсчета движется относительно первой со скоростью v_0, а частица движется относительно второй системы отсчета со скоростью v_1.

Согласно правилу преобразования релятивистских скоростей

$$v = \frac{v_0 + v_1}{1 + \frac{v_0 v_1}{c^2}}.$$

Отсюда найдем скорость v_0 одной инерциальной системы отсчета относительно другой:

$$v + \frac{v v_0 v_1}{c^2} = v_0 + v_1, \quad v - v_1 = v_0 - \frac{v v_0 v_1}{c^2}, \text{ откуда}$$

$$v_0 = \frac{v - v_1}{1 - \frac{vv_1}{c^2}}$$ или с учетом условия задачи

$$v_0 = \frac{0{,}5c - 0{,}3c}{1 - \frac{0{,}5c \cdot 0{,}3c}{c^2}} = 0{,}24\ c.$$

Произведем вычисления:

$$v_0 = 0{,}24 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 7 \cdot 10^7\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v_0 = 7 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 3

В некоторой инерциальной системе отсчета K частица A покоится, а частица B удаляется от нее со скоростью $v = 0{,}2\ c$. С какой скоростью v_0 должна двигаться другая инерциальная система отсчета K_1 относительно первой, чтобы обе частицы удалялись от нее с одинаковой по модулю скоростью, но в противоположных направлениях?

Дано:
$v = 0{,}2c$
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

v_0 – ?

Решение. Обозначим v_1 модули скоростей частиц A и B относительно системы K_1. Пусть система K неподвижна. Скорость частицы A относительно системы K равна нулю, а относительно системы K_1 пусть она равна $-v_1$, т. е. пусть частица A движется антинаправленно системе K_1. Тогда формула (21.3) применительно к частице A примет вид $0 = \frac{-v_1 + v_0}{1 + \frac{v_1 v_0}{c^2}}$, откуда $v_1 = v_0$. (1)

Частица B согласно условию должна двигаться в системе K_1 противоположно частице A со скоростью v_1 относительно системы K_1 и сонаправленно с ней. И при этом скорость частицы B относительно неподвижной системы K согласно условию v. Тогда правило преобразования скоростей применительно к частице B примет вид

$$v = \frac{v_1 + v_0}{1 + \frac{v_1 v_0}{c^2}}. \qquad (2)$$

С учетом (1) выражение (2) примет вид $v = \dfrac{2v_0}{1+\dfrac{v_0^2}{c^2}}$. (3)

Определить из (3) искомую скорость v_0:

$$v + \frac{v}{c^2}v_0^2 = 2v_0, \quad \frac{v}{c^2}v_0^2 - 2v_0 + v = 0.$$

Отсюда $v_0 = \dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\dfrac{v}{c^2}}$ или $\boxed{v_0 = \dfrac{c^2}{v}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}\right)}$

Знак «плюс» перед корнем мы опустили, иначе v_0 будет больше c.

С учетом условия $v_0 = \dfrac{c^2}{0{,}2c}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{0{,}04c^2}{c^2}}\right) = 0{,}1\,c$.

Произведем вычисления:

$v_0 = 0{,}1 \cdot 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}} = 3 \cdot 10^7\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Ответ: $v_0 = 3 \cdot 10^7$ м/с.

Задача 4

Чему равна относительная погрешность δ вычислений при замене релятивистского правила преобразования скоростей классическим законом сложения скоростей Галилея, если скорость подвижной системы K_1 относительно неподвижной $v_0 = 0{,}2\,c$, а скорость частицы относительно подвижной системы $v_1 = 0{,}8\,c$?

Дано:
$v_0 = 0{,}2\ c$
$v_1 = 0{,}8\ c$

δ – ?

Решение. Относительную погрешность δ определим отношением разности $\Delta v = v_{\text{абс}1} - v_{\text{абс}2}$, где $v_{\text{абс}1}$ – абсолютная скорость частицы, т. е. скорость относительно неподвижной системы K в классической механике, а $v_{\text{абс}2}$ – абсолютная скорость этой частицы в релятивистской механике, к ее скорости $v_{\text{абс}2}$, выраженным в %:

$$\delta = \frac{\Delta v}{v_{\text{абс}2}}100\% = \frac{v_{\text{абс}1} - v_{\text{абс}2}}{v_{\text{абс}2}}100\% \text{ или}$$

$$\delta = \left(\frac{v_{\text{абс}1}}{v_{\text{абс}2}} - 1\right)100\%. \qquad (1)$$

Согласно галилееву правилу преобразования скоростей

$$v_{\text{абс}1} = v_0 + v_1. \qquad (2)$$

Согласно правилу преобразования релятивистских скоростей

$$v_{\text{абс}2} = \frac{v_0 + v_1}{1 + \frac{v_0 v_1}{c^2}}. \qquad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1):

$$\delta = \left(\frac{v_0 + v_1}{\frac{v_0 + v_1}{1 + \frac{v_0 v_1}{c^2}}} - 1 \right) 100\% = \left(1 + \frac{v_0 v_1}{c^2} - 1 \right) 100\%,$$

$$\boxed{\delta = \frac{v_0 v_1}{c^2} 100\%}$$

С учетом условия задачи

$$\delta = \frac{0{,}2c \cdot 0{,}8c}{c^2} 100\% = 16\%.$$

Ответ: $\delta = 16\%$.

Задача 5

Три частицы движутся в одном направлении вдоль одной прямой в инерциальной системе отсчета. Скорость первой частицы относительно второй $v_{12} = 0{,}2\,c$, скорость второй частицы относительно третьей $v_{23} = 0{,}5\,c$. Скорость третьей частицы относительно этой системы отсчета $v_3 = 0{,}7\,c$. Чему равны скорости первой частицы v_1 и второй v_2 относительно системы отсчета, в которой они движутся?

Дано:
$v_{12} = 0{,}2\ c$
$v_{23} = 0{,}5\ c$
$v_3 = 0{,}7\ c$

---

v_1 – ?
v_2 – ?

Решение. Скорость второй частицы относительно системы отсчета согласно правилу (21.3)

$$v_2 = \frac{v_3 + v_{23}}{1 + \frac{v_3 v_{23}}{c^2}}$$

или с учетом условия задачи

$$v_2 = \frac{0{,}7c + 0{,}5c}{1 + \frac{0{,}7c \cdot 0{,}5c}{c^2}} = 0{,}89\ c.$$

Теперь, зная абсолютную скорость второй частицы v_2 и скорость первой частицы относительно второй, определим по той же формуле скорость первой частицы v_1 относительно системы отсчета: $v_1 = \dfrac{v_2 + v_{12}}{1 + \dfrac{v_2 v_{12}}{c^2}}$ или с учетом значений $v_2 = 0{,}89\ c$ и $v_{12} = 0{,}2\ c$

$$v_1 = \frac{0{,}89c + 0{,}2c}{1 + \dfrac{0{,}89c \cdot 0{,}2c}{c^2}} = 0{,}92\ c.$$

Ответ: $v_1 = 0{,}92\ c$, $v_2 = 0{,}89\ c$.

Задача 6

Звездный корабль, движущийся со скоростью $v = 0{,}8\ c$, путешествовал $t_0 = 10$ лет по часам космонавтов. Насколько земляне будут старше космонавтов, когда корабль вернется на Землю?

Дано:
$v = 0{,}8\ c$
$t = 10$ лет
$c = 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

Δt – ?

Обозначим Δt разность между возрастом космонавтов и землян по возвращении корабля на Землю.

Решение. Разность Δt между возрастом космонавтов и землян можно определить, отняв от промежутка времени t между моментами старта корабля и его возвращением на Землю по часам землян, промежуток времени t_0 между этими моментами по часам космонавтов: $\Delta t = t - t_0$.

Промежуток времени t по часам землян связан с промежутком времени t_0 по часам космонавтов соотношением

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

С учетом этого $\Delta t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - t_0$, $\boxed{\Delta t = t_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right)}$

Задача в общем виде решена.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\Delta t = 10\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{0,64c^2}{c^2}}}-1\right) \text{лет} = 6,7 \text{ лет}.$$

Ответ: $\Delta t = 6,7$ лет.

Задача 7

С какой скоростью v должен лететь космический корабль от Земли до звезды, чтобы собственное время полета космонавтов t_0 было в 1,5 раза больше времени $t_{св}$, необходимого свету для преодоления того же расстояния?

Дано:
$t_0 = 1,5\ t_{св}$
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$

v — ?

Решение. Пусть расстояние от Земли до этой звезды равно S. Тогда время, за которое свет ее достигнет,

$$t_{св} = \frac{S}{c}.$$

Согласно условию, собственное время космонавтов $t_0 = 1,5\ t_{св}$, значит,

$$t_0 = 1,5\frac{S}{c}. \qquad (1)$$

Время, в течение которого космонавты преодолеют расстояние S, двигаясь со скоростью v (координатное время), с точки зрения земного наблюдателя:

$$t = \frac{S}{v}. \qquad (2)$$

Поскольку $t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, то с учетом (1) и (2)

$$\frac{S}{v} = \frac{1,5S}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$1,5v = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \quad 2,25v^2 = c^2 - v^2, \text{ откуда}$$

$$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{3,25}}}$$

Произведем вычисления:

$$v = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3,25}} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1,7 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v = 1,7 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 8

Чему равно собственное время t_0, необходимое для полета космонавтов к звезде Альфа-Центавра, до которой свет должен лететь $t_{св} = 4$ года. Скорость космического корабля $v = 0,9\,c$.

Дано:
$t_{св} = 4$ года
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
$v = 0,9\ c$

t_0 – ?

Решение. Расстояние от Земли до звезды

$$S = ct_{св}. \qquad (1)$$

Для космонавтов это же расстояние

$$S = vt, \qquad (2)$$

где t – координатное время. Оно связано с собственным временем космонавтов t_0 формулой $t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, откуда искомое время

$$t_0 = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (3)$$

Приравняем (1) и (2), определим координатное время t:

$$ct_{св} = vt, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{ct_{св}}{v}. \qquad (4)$$

Нам осталось подставить (4) в (3): $t_0 = \dfrac{ct_{св}}{v}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ или с учетом условия $v = 0,9\ c$

$$t_0 = \frac{ct_{св}}{0,9c}\sqrt{1 - \frac{0,81c^2}{c^2}} = 0,48\ t_{св}.$$

Произведем вычисления:

$t_0 = 0,48 \cdot 4$ года $= 1,92$ года $= 1$ год и 11 месяцев.

Ответ: $t_0 = 1$ год и 11 месяцев.

Задача 9

Собственное время жизни частицы $t_0 = 2,5 \cdot 10^{-8}$ с. Частица пролетела с момента своего рождения до места распада расстояние $S = 500$ м. На сколько процентов ее скорость меньше скорости света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с?

Дано:
$t_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ с
$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{м}{с}$
$S = 500$ м

$\frac{\Delta v}{v}100\% - ?$

Решение. Разность между скоростью частицы v и скоростью света c

$$\Delta v = c - v.$$

С учетом этого

$$\frac{\Delta v}{v}100\% = \frac{c - v}{v}100\% = \left(\frac{c}{v} - 1\right)100\%. \quad (1)$$

Таким образом, задача сводится к определению скорости частицы v. Запишем формулу, связывающую координатное время частицы t, за которое она проходит расстояние S со скоростью v, с ее собственным временем t_0:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ где } t = \frac{S}{v}, \text{ поэтому } \frac{S}{v} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда определим скорость частицы v:

$$\frac{S^2}{v^2} = \frac{t_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \frac{S^2}{v^2} = \frac{c^2 t_0^2}{c^2 - v^2},$$

$$c^2S^2 - v^2S^2 = c^2v^2t_0^2, \text{ откуда } v = \frac{cS}{\sqrt{c^2t_0^2 + S^2}}. \quad (2)$$

Нам осталось подставить (2) в (1):

$$\frac{\Delta v}{v}100\% = \left(\frac{c}{cS}\sqrt{(ct_0)^2 + S^2} - 1\right)100\%,$$

$$\boxed{\frac{\Delta v}{v}100\% = \left(\sqrt{\left(\frac{ct_0}{S}\right)^2 + 1} - 1\right)100\%}$$

Произведем вычисления:

$$\frac{\Delta v}{v}100\% = \left(\sqrt{\left(\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8}}{500}\right)^2 + 1} - 1\right)100\% =$$

$$= 0{,}01\%.$$

Ответ: $\frac{\Delta v}{v}100\% = 0{,}01\%$.

Задача 10

С какой скоростью v должно двигаться тело, чтобы его длина уменьшилась на 20% по сравнению с длиной в состоянии покоя.

Дано:
$\frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}2$
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$

v – ?

Решение. Поскольку относительное уменьшение длины тела

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \frac{l}{l_0},$$

где длина тела l_0 в движущейся системе отсчета K_1 связана с длиной тела l в неподвижной системе отсчета K соотношением

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$ то

$$\frac{\Delta l}{l_0} = 1 - \frac{l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{l_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Отсюда определим скорость тела v: $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{\Delta l}{l_0}$,

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = 1 - 2\frac{\Delta l}{l_0} \boxed{+\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2},$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 2\frac{\Delta l}{l_0} - \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2, \text{ откуда } v = c\sqrt{\frac{\Delta l}{l_0}\left(2 - \frac{\Delta l}{l_0}\right)}$$

Произведем вычисления:

$$v = 3 \cdot 10^8 \sqrt{0{,}2(2 - 0{,}2)}\ \frac{м}{с} = 1{,}8 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}.$$

Ответ: $v = 1{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

Задачи с использованием понятия инвариантной массы

Задача 11

Чему равна скорость v частицы, если ее кинетическая энергия $E_к = 0{,}25mc^2$?

Дано:
$E_к = 0{,}25\ mc^2$
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$

v – ?

Решение. Кинетическая энергия релятивистской частицы определяется формулой

$$E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right).$$

Учтем, что согласно условию задачи $E_к = 0{,}25\ mc^2$:

$$0{,}25\ mc^2 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right), \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1{,}25,$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1{,}25^2}, \quad \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{1{,}25^2} = 0{,}36, \quad \boxed{v = 0{,}6\ c}$$

Произведем вычисления:

$$v = 0{,}6\cdot 3\cdot 10^8\ \frac{м}{с} = 1{,}8\cdot 10^8\ \frac{м}{с}.$$

Ответ: $v = 1{,}8\cdot 10^8\ \frac{м}{с}$.

Задача 12

Релятивистская частица массой m, покоящаяся относительно инерциальной системы отсчета, самопроизвольно распадается на две частицы с массами m_1 и m_2. Определить энергии E_1 и E_2 образовавшихся частиц.

Дано:
m
m_1
m_2
c
E_1 – ?
E_2 – ?

Решение. Запишем законы сохранения энергии E и импульса $\vec{p}$ системы этих частиц. Так как частица до распада покоилась, ее суммарный импульс $\vec{p} = 0$ и таким же он должен остаться и после распада. Если импульс одной частицы после распада стал $\vec{p}_1$, а второй – $\vec{p}_2$, то по закону сохранения импульса $0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ или в скалярной записи $0 = p_1 - p_2$, т. е. частицы после распада стали двигаться антинаправленно друг другу, поэтому $$p_1 = p_2.$$

По закону сохранения энергии собственная энергия частицы E_0 до распада равна сумме полной энергии E_1 одной частицы и полной энергии E_2 другой:

$E_0 = E_1 + E_2$, где $E_0 = mc^2$, поэтому $mc^2 = E_1 + E_2$. (1)

Теперь свяжем энергию каждой частицы с ее импульсом (см. формулу 21.5):

$$E_1^2 - p_1^2c^2 = m_1^2c^4 \qquad (2)$$

и

$$E_2^2 - p_2^2c^2 = m_2^2c^4 .$$

Поскольку $p_1 = p_2$, то $E_2^2 - p_1^2c^2 = m_2^2c^4$, откуда

$$p_1^2c^2 = E_2^2 - m_2^2c^4 . \qquad (3)$$

Из (2)

$$p_1^2c^2 = E_1^2 - m_1^2c^4 . \qquad (4)$$

Приравняем (3) и (4): $E_2^2 - m_2^2c^4 = E_1^2 - m_1^2c^4$. (5)

Теперь выразим из (1) энергию E_2 и подставим в (5). Так мы получим одно уравнение с одной искомой энергией E_1, которое и решим. Приступим:

из (1)

$$E_2 = mc^2 - E_1. \qquad (6)$$

Подставляем (6) в (5):

$$(mc^2 - E_1)^2 - m_2^2c^4 = E_1^2 - m_1^2c^4 ,$$

$$m^2c^4 - 2mc^2E_1 + E_1{}^2 - m_2^2c^4 = E_1^2 - m_1^2c^4 ,$$

$c^4(m^2 + m_1^2 - m_2^2) = 2mc^2E_1$, откуда

$$\boxed{E_1 = \frac{c^2(m^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2m}}$$

Поскольку $E_2 = E - E_1 = mc^2 - E_1$, то

$$E_2 = mc^2 - \frac{c^2(m^2 + m_1^2 - m_2^2)}{2m} = c^2\frac{2m^2 - m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m},$$

$$\boxed{E_2 = c^2\frac{m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m}}$$

Обратим внимание на то, что сумма масс образовавшихся частиц $m_1 + m_2$ меньше их исходной массы m. Только при этом условии частица может самопроизвольно распасться на две частицы. Если же $m_1 + m_2 \geqslant m$, то самопроизвольный распад частиц невозможен.

Задача 13

Релятивистская частица с собственной энергией E_0, движущаяся в инерциальной системе отсчета со скоростью v, распадается на две одинаковые безмассовые частицы, импульсы которых антинаправлены друг другу. Чему равны импульсы p_1 и p_2 этих частиц в этой системе отсчета?

Дано:	
E_0	
v	
c	
p_1 — ?	
p_2 — ?	

Решение. По закону сохранения импульса импульс частицы $\vec{p}$ до ее распада равен сумме импульсов безмассовых частиц $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ после распада:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 .$$

В скалярной записи с учетом направления импульсов $p = p_1 - p_2$.

Поскольку согласно 21.6 $p = \dfrac{Ev}{c^2}$, где E — полная энергия частицы до ее распада, то $\dfrac{Ev}{c^2} = p_1 - p_2$. (1)

Полная энергия частицы E равна сумме ее собственной энергии E_0 и ее кинетической энергии $E_к$:

$$E = E_0 + E_к,\ \text{где}\ E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right)\ \text{и}\ mc^2 = E_0,$$

поэтому $E = E_0 + E_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = \dfrac{E_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. (2)

Подставим (2) в (1):

$$\frac{vE_0}{c^2\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = p_1 - p_2 \ \text{или}\ \frac{vE_0}{c\sqrt{c^2 - v^2}} = p_1 - p_2. \quad (3)$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии:

$E = E_1 + E_2$, где энергии безмассовых частиц E_1 и E_2 согласно уравнению $E_1^2 - p_1^2c^2 = mc^4$, где $m = 0$, соответственно равны: $E_1 = p_1c$ и $E_2 = p_2c$, поэтому

$E = p_1c + p_2c = c(p_1 + p_2)$, откуда $p_1 + p_2 = \dfrac{E}{c}$ или с учетом (2) $p_1 + p_2 = \dfrac{E_0}{c\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}$. (4)

Сложим (3) и (4). При этом получим одно уравнение с искомым импульсом p_1:

$$p_1 - p_2 + p_1 + p_2 = \frac{vE_0}{c\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

$$2p_1 = \frac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}\left(\frac{v}{c} + 1\right) = \frac{E_0(v + c)}{c\sqrt{c^2 - v^2}},$$

откуда $p_1 = \dfrac{E_0}{2c}\sqrt{\dfrac{(v + c)^2}{c^2 - v^2}}$ или $\boxed{p_1 = \dfrac{E_0}{2c}\sqrt{\dfrac{v + c}{c - v}}}$

Из (4) $p_2 = \dfrac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} - p_1 = \dfrac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} -$

$$-\frac{E_0}{2c}\sqrt{\frac{(c + v)^2}{c^2 - v^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}\left(1 - \frac{c + v}{2c}\right) =$$

$$= \frac{E_0(2c - c - v)}{\sqrt{c^2 - v^2}\cdot 2c} = \frac{E_0}{2c}\frac{c - v}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

или окончательно $\boxed{p_2 = \dfrac{E_0}{2c}\sqrt{\dfrac{c - v}{c + v}}}$

Задача решена.

Ответ: $p_1 = \dfrac{E_0}{2c}\sqrt{\dfrac{v + c}{c - v}}$, $p_2 = \dfrac{E_0}{2c}\sqrt{\dfrac{c - v}{c + v}}$.

Задача 14

Покоящаяся частица массой m_1 поглощает безмассовую частицу с энергией E. Чему равна масса m_2 вновь возникшей частицы?

Дано:
m_1
E
c

m_2 – ?

Решение. По закону сохранения энергии собственная энергия $E_0 = m_1c^2$ покоящейся частицы плюс энергия E налетающей на нее безмассовой частицы равна полной энергии E_2 образовавшейся частицы массой m_2:

$$E_0 + E = E_2 \text{ или } m_1c^2 + E = E_2. \qquad (1)$$

Энергия новой частицы E_2 связана с ее массой m_2 и импульсом p_2 соотношением

$$E_2^2 - p_2^2c^2 = m_2^2c^4. \qquad (2)$$

По закону сохранения импульса импульс безмассовой частицы p_1 равен импульсу новой частицы p_2:

$p_1 = p_2$, где энергия E налетающей безмассовой частицы связана с ее импульсом p_1 соотношением (при $m = 0$)

$$E^2 - p_1^2c^2 = 0\text{, откуда } p_1 = \frac{E}{c} = p_2. \qquad (3)$$

Подставим (1) и (3) в (2):

$$(m_1c^2 + E)^2 - \frac{E}{c^2}c^2 = m_2^2c^4.$$

Отсюда найдем m_2:

$$m_1^2c^4 + 2m_1c^2E + E^2 - E^2 = m_2^2c^4,$$

$$m_2^2c^4 = m_1c^2(m_1c^2 + 2E),\ m_2 = \frac{1}{c}\sqrt{m_1(m_1c^2 + 2E)} \text{ или}$$

$$\boxed{m_2 = \sqrt{m_1\left(m_1 + \frac{2E}{c^2}\right)}}$$

Задача решена.

Ответ: $m_2 = \sqrt{m_1\left(m_1 + \dfrac{2E}{c^2}\right)}$.

Задача 15

Чему равен процент ошибки при расчете конечной скорости элементарной частицы, разгоняемой из состояния покоя, если ей сообщают энергию E, в 1,5 раза превышающую ее собственную энергию E_0?

Дано:
$E = 1{,}5E_0$
$\dfrac{\Delta v}{v_p}100\% - ?$

Обозначим Δv разность между классической конечной скоростью $v_к$ и релятивистской скоростью $v_р$.

Решение: Поскольку $\Delta v = v_к - v_р$,

$$\text{то } \frac{\Delta v}{v_р} = \frac{v_к - v_р}{v_р}100\% = \left(\frac{v_к}{v_р} - 1\right)100\%. \qquad (1)$$

Классическую скорость частицы $v_к$ найдем, воспользовавшись классической формулой кинетической энергии:

$$E_к = \frac{mv_к^2}{2}\text{, откуда } v_к = \sqrt{\frac{2E_к}{m}}.$$

Согласно условию $E_к = 1{,}5E_0 = 1{,}5mc^2$. С учетом этого

$$v_к = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}5mc^2}{m}} = c\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Теперь запишем релятивистскую формулу кинетической энергии, из которой найдем релятивистскую скорость $v_р$:

$$E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}}-1\right)$$

или с учетом условия задачи

$$1{,}5mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} - mc^2, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = 2{,}5,$$

$$1-\frac{v_р^2}{c^2} = \frac{1}{6{,}25}, \quad \frac{v_р^2}{c^2} = \frac{21}{25} \text{ и } v_р = \frac{c\sqrt{21}}{5}. \qquad (3)$$

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1). Проделаем эти действия:

$$\frac{\Delta v}{v_р}100\% = \left(\frac{c\sqrt{3}\cdot 5}{c\sqrt{21}}-1\right)100\% = 89\%.$$

Ответ: $\frac{\Delta v}{v_р}100\% = 89\%$.

Задача 16

Масса совокупности двух безмассовых частиц, движущихся с противоположными импульсами, равна m. Чему равна энергия E каждой частицы в отдельности?

Дано:
m
c
E – ?

Решение. Если импульсы обеих частиц противоположны, то их общий импульс $p_{общ} = p - p = 0$. При этом общая энергия $E_{общ}$ системы этих невзаимодействующих частиц может быть определена из равенства $E_{общ}^2 - p_{общ}^2 = m^2c^4$ с учетом, что $p_{общ}^2 = 0$. Отсюда $E_{общ} = mc^2$, а по закону сохранения энергии $E_{общ} = 2E$.

С учетом этого $2E = mc^2$, отсюда $\boxed{E = 0{,}5\ mc^2}$.

Вы уже не удивляетесь тому, что масса совокупности двух частиц, массы которых равны нулю, не равна нулю?

Ответ: $E = 0{,}5\ mc^2$.

Задача 17

Две частицы с массами m и $3m$ движутся в инерциальной системе отсчета навстречу друг другу со скоростью v каждая. Чему равен избыток массы Δm совокупности этих частиц и собственная кинетическая энергия $E_к$ этой совокупности?

Дано:	
m	
$3m$	
v	
c	
Δm – ?	
$E_{ко}$ – ?	

Решение. Общая энергия $E_{общ}$ совокупности частиц связана с массой $m_{общ}$ этой совокупности равенством $E^2_{общ} - p^2_{общ}c^2 = m^2_{общ}c^4$. (1)

Если мы определим отсюда массу совокупности частиц $m_{общ}$, то избыток массы Δm этих невзаимодействующих частиц найдем по формуле

$$\Delta m = m_{общ} - (m + 3\,m) = m_{общ} - 4\,m.$$

Из (1)
$$m_{общ} = \sqrt{\frac{E^2_{общ} - p^2_{общ}c^2}{c^4}}. \qquad (2)$$

По закону сохранения энергии полная энергия $E_{общ}$ системы этих частиц равна сумме полных энергий E_1 и E_2 каждой частицы:

$$E_{общ}\ E_1 + E_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{3mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{4mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (3)$$

Поскольку частицы движутся навстречу друг другу, то их общий импульс

$$p_{общ} = \frac{3mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4)$$

Подставим (3) и (4) в (2):

$$m_{общ} = \sqrt{\frac{1}{c^4}\left(\frac{16m^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{4m^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)},$$

$$m_{общ} = 2m\sqrt{\frac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}}.$$

Тогда избыток массы совокупности частиц равен

$$\Delta m = 2m\sqrt{\frac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}} - 4\,m, \quad \boxed{\Delta m = 2\,m\left(\sqrt{\frac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}} - 2\right)}$$

Из теории мы знаем, что собственная кинетическая энергия системы этих частиц $\boxed{E_{ко} = \Delta mc^2}$

Ответ: $\Delta m = 2m\left(\sqrt{\dfrac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}} - 2\right)$, $E_{ко} = \Delta mc^2$.

Задача 18

Насколько возрастет масса кислорода, если его изохорно нагреть от 10°С до 410°С? Молярная масса кислорода $M = 0{,}032$ кг/моль. Масса кислорода при 10°С $m = 10$ кг.

Дано:
$t°_1 = 10°C$
$t°_2 = 410°C$
$M = 0{,}032\ \dfrac{кг}{моль}$
$m = 10$ кг
$R = 8{,}31\ \dfrac{Дж}{моль \cdot К}$

Δm – ?

Решение. Изменение полной энергии кислорода ΔE произойдет за счет количества теплоты Q, полученного при его нагревании:

$\Delta E = Q$ (1), где $\Delta E = \Delta mc^2$ (2)

и $Q = cm(t_2^0 - t_1^0)$.

Удельную теплоемкость кислорода при постоянном объеме c_v определим как отношение его молярной теплоемкости при постоянном объеме C_v к молярной массе M:

$$c_v = \frac{C_v}{M}, \text{ где } C_v = \frac{i}{2}R.$$

Здесь $i = 5$ – число степеней свободы двухатомных молекул кислорода и R – молярная газовая постоянная.

С учетом этого $c_v = \dfrac{iR}{2M}$.

Тогда $$Q = \frac{iRm}{2M}(t_2^0 - t_1^0). \quad (3)$$

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1):

$$\Delta mc^2 = \frac{iRm}{2M}(t_2^0 - t_1^0), \text{ откуда } \boxed{\Delta m = \frac{iRm}{2Mc^2}(t_2^0 - t_1^0)}$$

Произведем вычисления:

$$\Delta m = \frac{5 \cdot 8{,}31 \cdot 10(410 - 10)}{2 \cdot 0{,}032 \cdot 9 \cdot 10^{16}} \text{ кг} = 3 \cdot 10^{-11} \text{ кг} = 0{,}03 \text{ мкг}.$$

Ответ: $\Delta m = 0{,}03$ мкг.

Задача 19

Какая работа A будет совершена, если на электрон, начальная скорость которого равна нулю, действовать в течение $t = 10$ с силой $F = 2$ нН (наноньютонов)? Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано: $v_0 = 0$ $t = 10$ с $F = 2$ нН $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	*Решение.* Работа A равна кинетической энергии электрона $E_к$:
A – ?	

$$A = E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right). \quad (1)$$

Импульс силы Ft, подействовавшей на электрон, равен изменению импульса электрона $\Delta p = p - 0 = p$:

$$Ft = p. \quad (2)$$

Импульс электрона $p = \dfrac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. (3)

С учетом (2) $Ft = \dfrac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. (3)

Из (3) найдем скорость частицы v:

$(Ft)^2 = \dfrac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $(Ft)^2 - (Ft)^2\dfrac{v^2}{c^2} = m^2v^2$, откуда

$$v = \frac{Ftc}{\sqrt{(mc)^2+(Ft)^2}}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), получим

$$A = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(Ft)^2c^2}{c^2(m^2c^2+(Ft)^2)}}}-1\right)$$ или после упрощений

$$A = mc^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}-1\right).$$

Поскольку $Ft = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10$ Н · с $= 2 \cdot 10^{-8}$ Н · с во много раз больше $mc = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8$ кг$\frac{м}{с}$ $= 2{,}7 \cdot 10^{-22}$ кг$\frac{м}{с}$, то $\dfrac{Ft}{mc} \gg 1$, потому можно приближенно считать, что

$$1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2 \approx \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2.$$

Тогда $A = mc^2\sqrt{\frac{(Ft)^2}{m^2c^2}}$ или окончательно $\boxed{A = cFt}$

Произведем вычисления:

$A = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10$ Дж $= 6$ Дж.

Ответ: $A = 6$ Дж.

Задача 20

Электроны достигают анода рентгеновской трубки, имея скорость $v = 1{,}2 \cdot 10^5$ км/с. Каково анодное напряжение U – ? Масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, модуль его заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Дано:

$v = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$

$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-3}$ кг

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

U – ?

Решение. Из электростатики мы знаем, что напряжение U, т. е. разность потенциалов между анодом и катодом, можно определить отношением работы A, совершаемой электрическим полем по перемещению электрона от катода к аноду, к величине заряда электрона e: $U = \frac{A}{e}$.

Если считать, что скорость электрона по вылете из катода равна нулю (на самом деле это не так, но эта скорость крайне мала по сравнению со скоростью электрона при подлете к аноду, поэтому ею можно пренебречь), то работа электрического поля A равна кинетической энергии электрона $E_к$, которую он приобретет, подлетая к аноду:

$$A = E_к.$$

Поскольку скорость электрона $v = 1{,}2 \cdot 10^5$ км/с $=$ $= 1{,}2 \cdot 10^8$ м/с является релятивистской, то его кинетическую энергию определим по формуле

$$E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Тогда $$\boxed{U=\frac{mc^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)}$$

Переведем в СИ единицу скорости:

$1{,}2\cdot10^5\ \frac{\text{км}}{\text{с}} = 1{,}2\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot9\cdot10^{16}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1{,}44\cdot10^{16}}{9\cdot10^{16}}}}-1\right)\text{В}=$$

$= 4{,}7\cdot10^4$ В.

Ответ: $U = 4{,}7\cdot10^4$ В.

Задача 21

Протон влетает в однородное магнитное поле индукцией $B = 2$ Тл со скоростью $v = 0{,}8\ c$ перпендикулярно магнитным линиям. Определить радиус окружности R, по которой он станет двигаться в этом магнитном поле. Масса протона $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, его заряд $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Дано:
$B = 2$ Тл
$v = 0{,}8\ c$
$c = 3\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
$m = 1{,}67\cdot10^{-19}$ кг
$q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл

R – ?

Решение. На протон в магнитном поле станет действовать сила Лоренца $F_л = Bqv\sin\alpha$, где $\alpha = 90°$ – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$, поэтому

$$F_л = Bqv. \qquad (1)$$

По второму закону Ньютона, записанному применительно к релятивистским скоростям,

$F_л = \dfrac{ma_ц}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$, где $a_ц = \dfrac{v^2}{R}$ – центростремительное ускорение протона. С учетом этого

$$F_л = \frac{mv^2}{R\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}}. \qquad (2)$$

Нам осталось приравнять (1) и (2) и определить R с учетом того, что $v = 0{,}8\ c$:

$$Bqv = \frac{mv^2}{R\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}, \text{ откуда}$$

$$R = \frac{mv}{Bq\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} = \frac{m \cdot 0{,}8c}{Bq\sqrt{\left(1 - \frac{0{,}64c^2}{c^2}\right)^3}} = \frac{0{,}8mc}{Bq\sqrt{(0{,}36)^3}},$$

$$\boxed{R = \frac{3{,}7mc}{Bq}}$$

Произведем вычисления:

$$R = \frac{3{,}7 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ м} = 5{,}8 \text{ м}.$$

Ответ: $R = 5{,}8$ м.

Задачи с использованием понятия массы покоя m_0 и релятивистской массы m

Задача 22

Отношение заряда релятивистского электрона к его массе (удельный заряд электрона) $\frac{e}{m} = 0{,}88 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Определить скорость v электрона.

Дано:

$\frac{e}{m} = 0{,}86 \cdot 10^{11}\ \frac{\text{Кл}}{\text{кг}}$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$v - ?$

Решение. Масса m релятивистского электрона связана с его массой покоя m_0 соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

Обозначим c скорость света в вакууме. Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг известна из справочных данных. Из приведенного соотношения найдем скорость электрона: $v = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{m_0}{m}$,

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{m_0}{m}\right)^2,\quad v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}\,. \qquad (2)$$

Масса движущегося электрона m связана с его зарядом $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл соотношением, известным из условия задачи: $m = \dfrac{e}{0{,}88\cdot10^{11}}$ кг. (3)

Отметим, что заряд электрона в отличие от его массы не зависит от скорости движения электрона и одинаков в любых инерциальных системах отсчета (инвариантен к разным инерциальным системам отсчета).

Заменив в выражении (2) массу движущегося электрона на соотношение (3), получим

$$\boxed{v=c\sqrt{1-\left(\frac{0{,}88\cdot10^{11}m_0}{e}\right)^2}}$$

Произведем вычисления:

$$v=3\cdot10^8\sqrt{1-\left(\frac{0{,}88\cdot10^{11}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\right)^2}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}=2{,}6\cdot10^8\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $2{,}6\cdot10^8$ м/с.

Задача 23

При какой скорости v кинетическая энергия частицы $E_к$ равна ее энергии покоя E_0?

Дано:
$E_к = E_0$
$c = 3\cdot10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

v – ?

Решение. Полная энергия релятивистской частицы E складывается из ее энергии покоя E_0 и кинетической энергии движения частицы $E_к$ (в специальной теории относительности не учитывается действие на частицу сильных силовых полей, например, гравитационных, поэтому потенциальной энергией частицы мы здесь пренебрегаем):

$$E = E_0 + E_к.$$

Согласно соотношению, устанавливающему связь массы и энергии, полная энергия движущейся частицы E связана с ее массой m отношением $E = mc^2$.

Аналогично энергия покоя частицы E_0 связана с ее массой покоя m_0 соотношением $E = m_0c^2$.

Масса движущейся частицы m связана с ее массой покоя m_0 формулой $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

Тогда $\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} c^2 = E_к + m_0c^2$.

Но по условию задачи $E_к = E_0 = m_0c^2$.

Тогда $\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = m_0c^2 + m_0c^2 = 2m_0c^2$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 2, \text{ откуда } \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2},\ 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},\ v^2 = \frac{3}{4}c^2,\ \boxed{v = c\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Произведем вычисления: $v = 3 \cdot 10^8 \dfrac{\sqrt{3}}{2} \dfrac{м}{с} = 2{,}6 \cdot 10^8 \dfrac{м}{с}$.

Ответ: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Две элементарные частицы движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $v = 0{,}8\ c$. Скорость одной из них относительно лабораторной системы отсчета $v_1 = 0{,}4\ c$. Чему равна скорость v_2 другой частицы относительно этой системы отсчета?

Ответ: $v_2 = \dfrac{v - v_1}{1 - \dfrac{vv_1}{c^2}} = 1{,}7 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 2. На каком расстоянии S друг от друга находились сначала две частицы, движущиеся со скоростями $v_1 = 0{,}2\,c$ и $v_2 = 0{,}6\,c$, если время их сближения составило $t = 10$ мкс?

Ответ: $S = t\dfrac{c^2(v_1 + v_2)}{v_1v_2 + c^2} = 214$ м.

Задача 3. Чему равна относительная погрешность δ вычисления относительной скорости v при замене релятивистского преобразования скоростей классическим, если скорость одной из сближающихся частиц $v_1 = 0{,}4\ c$, а другой $v_2 = 0{,}9\ c$?

Ответ: $\delta = 36\%$.

Задача 4. Три частицы движутся в одном направлении вдоль одной прямой в инерциальной системе отсчета. Скорость первой частицы относительно этой системы отсчета $v_1 = 0{,}4\ c$, скорость первой частицы относительно второй $v_{12} = 0{,}6\ c$, а скорость второй частицы относительно третьей $v_{23} = 0{,}8\ c$. Чему равны скорости v_2 и v_3 второй и третьей частиц относительно этой системы отсчета?

Ответ: $v_2 = 0{,}8\ c$, $v_3 = 0{,}97\ c$.

Задача 5. С какой скоростью v должна двигаться система отсчета, чтобы время в ней текло вдвое медленнее, чем в неподвижной системе отсчета?

Ответ: $v = c\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 6. Элементарная частица – мезон – «живет» по его «собственным» часам $t_0 = 1$ с. Какое время t живет мезон по земным часам, если он движется относительно земного наблюдателя со скоростью $v = 0{,}9\ c$?

Ответ: $t = 1{,}05$ с.

Задача 7. Космический корабль будущего двигался со скоростью $v = 7 \cdot 10^4$ км/с. На какое время космонавт, проведший в пути один год ($t_0 = 1$ год по часам космонавта), окажется моложе своих сверстников по возвращении на Землю?

Ответ: $\Delta t = t_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = 10$ дней.

Задача 8. Найти собственную длину стержня l_0 в космическом корабле, движущемся со скоростью $v = 0{,}6\,c$, если его длина относительно неподвижной системы отсчета $l = 10$ см.

Ответ: $l_0 = 12{,}5$ см.

Задача 9. При какой скорости v длина тела сокращается на 25%?

Ответ: $v = 0{,}66\ c = 1{,}98 \cdot 10^8$ м/с.

Задачи с использованием понятия релятивистской массы

Задача 10. Насколько увеличится масса альфа-частицы при увеличении ее скорости от $v_0 = 0$ до $v = 0{,}9c$? Принять массу покоя альфа-частицы $m_0 = 4$ а.е.м.

Ответ: $\Delta m = m_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = 5{,}2$ а.е.м. $= 8{,}6 \cdot 10^{-27}$ кг.

Задача 11. Во сколько раз масса движущегося протона m, имеющего кинетическую энергию $E_к = 10^{10}$ МэВ (мегаэлектрон-вольт), больше массы покоя протона $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг? 1 МэВ = $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Ответ: $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{E_к}{m_0c^2} + 1 = 1{,}06 \cdot 10^7$.

Задача 12. Найти, во сколько раз увеличивается масса электрона при прохождении им разности потенциалов $U = 1$ МВ (мегавольт). Масса покоя электрона $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Ответ: $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{eU}{m_0c^2} + 1 = 2{,}95$.

Задача 13. Частица в вакууме движется со скоростью, равной половине скорости света. Во сколько раз ее масса m больше массы покоя m_0?

Ответ: $m/m_0 = 1{,}155$.

Задача 14. $m = 1$ г воды, взятой при температуре $t°_0 = 0°C$, превратили в стоградусный пар ($t° = 100°C$). Насколько масса пара больше массы воды? Удельная теплоемкость воды $c_{воды} = 4200$ Дж/кг · К, удельная теплота парообразования $L = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Ответ: $\Delta m = \dfrac{m(c_{воды}(t° - t_0^0) + L}{c^2} = 3 \cdot 10^{-14}$ кг.

Задача 15. Мощность излучения Солнца $N = 3{,}83 \cdot 10^{26}$ Вт энергии. Насколько каждую секунду уменьшается масса Солнца?

Ответ: $\Delta m = 4{,}3 \cdot 10^9$ кг $= 4{,}3$ Мт.

Задача 16. Подъемный кран поднял груз массой $m = 20$ т на высоту $H = 10$ м. Насколько изменилась масса груза?

Ответ: $\Delta m = 2{,}2 \cdot 10^{-11}$ кг.

Задача 17. Найти удельный заряд электрона при скорости его движения $v = 0{,}8c$.

Ответ: $q/m = 1{,}055 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Задача 18. Масса пружины $m_0 = 5$ г. На сколько процентов увеличится ее масса при растяжении пружины на $x = 10$ см, если ее жесткость $k = 10$ кH/м?

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{m}100\% = \dfrac{\lambda}{c^2}100\% = 3{,}3 \cdot 10^{-10}\%$.

Задача 19. На сколько процентов изменится масса льда при плавлении? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Ответ: $\dfrac{\Delta m}{m_0}100\% = \dfrac{\lambda}{c^2}100\% = 3{,}3 \cdot 10^{-10}\%$.

Задача 20. Насколько отличается масса продуктов сгорания $m_0 = 10$ кг каменного угля от его массы покоя?

Ответ: $\Delta m = \dfrac{m_0q}{c^2} = 3{,}2 \cdot 10^{-9}$ кг.

22. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ. ФОТОЭФФЕКТ. КВАНТОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Краткая теория. Методические указания к решению задач

В задачах на тепловое излучение иногда требуется определить всю энергию E, излучаемую телом за время t. Если известна его температура T, то по закону Стефана – Больцмана можно определить интегральную светимость этого тела R (еще ее называют интегральной плотностью излучения):

$$R = \sigma T^4,$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Дж/(м$^2 \cdot$ с $\cdot$ К^4) – постоянная Стефана–Больцмана.

Вся энергия E, излученная этим телом (как правило, указывают, что его можно принять за абсолютно черное тело), будет равна произведению интегральной светимости R, площади тела S и времени излучения t. Напомним, что площадь сферы (обычно это тело имеет форму сферы) $S = 4\pi R^2{}_1 = \pi D^2$, где R_1 ее радиус и D – диаметр (не перепутайте интегральную светимость R с радиусом сферы, лучше обозначьте его r или добавьте индекс, например, R_1).

Если тело излучило N квантов (фотонов), то вся энергия E равна произведению энергии одного кванта $\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$ и их числа (поскольку вся энергия излучения квантуется, т. е. содержит целое число N квантов или фотонов):

$$E = N\varepsilon \text{ или } E = Nh\nu.$$

Излучаемой телом энергии ΔE соответствует потеря его массы Δm. Их связывает соотношение

$$\Delta E = \Delta mc^2,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Если известна длина волны λ_m, на которую приходится максимум излучаемой энергии, то абсолютную температуру этого тела T можно определить из закона смещения Вина

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \text{ откуда } T = \frac{b}{\lambda_m}.$$

Здесь $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м $\cdot$ К – постоянная Вина.

Если в задаче на фотоэффект что-либо сказано о запирающем напряжении $U_{зап}$, при котором электрическое поле не пропускает фотоэлектроны к аноду, то можно приравнять работу поля

$$A = eU_{зап}$$

кинетической энергии выбитых светом электронов (если их начальная скорость $v_0 = 0$):

$$E_к = \frac{m_e v^2}{2},$$

$$A = E_к \quad \text{или} \quad eU_{зап} = \frac{m_e v^2}{2},$$

и тогда формулу Эйнштейна для фотоэффекта

$$\varepsilon = A_{вых} + E_к \text{ или } h\nu = A_{вых} + \frac{m_e v^2}{2}$$

можно записать так: $\varepsilon = A_{вых} + A$

или $h\nu = A_{вых} + eU_{зап}$, где $\nu = \frac{c}{\lambda}$.

Если в условии задачи идет речь о работе выхода электрона $A_{вых}$, то ее можно связать с красной границей фотоэффекта, т. е. с граничной частотой ν_0 или длиной волны λ_0:

$$A_{вых} = h\nu_0 \text{ или } A_{вых} = h\frac{c}{\lambda_0}.$$

Работу выхода электронов из данного металла можно найти в справочных данных. Часто ее выражают в электрон-вольтах. Напоминаем: 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж и 1 МэВ = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

Если фотон движется не в вакууме, а в некоторой прозрачной среде с абсолютным показателем преломления n, то его энергия согласно формуле Планка

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{v}{\lambda}, \text{ где } v = \frac{c}{n}.$$

Здесь v – скорость фотона в этой среде.

Границей фотохимической реакции называют длину волны λ_0, при которой эта реакция наступает. Если длина волны λ падающего на вещество света больше λ_0, то фотохимическая реакция не возникнет, а если меньше, то возникнет. Таким образом, граница фотохимической реакции λ_0 (или ν_0) соответствует красной границе фотоэффекта.

Напоминаем, что фотон – безмассовая частица. Его импульс p можно найти по формуле

$$p = \frac{h}{\lambda} \text{ или } p = \frac{h\nu}{c}.$$

Если же в условии задачи идет речь о релятивистской массе $m_ф$ фотона, то ее можно найти, приравняв энергию фотона $\varepsilon = h\nu$ произведению его релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме:

$$h\nu = m_ф c^2, \text{ откуда } m_ф = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}.$$

Если в задаче спрашивается, возникнет ли фотоэффект при освещении некоторого металла светом с длиной волны λ или частотой ν, то определите энергию падающего на металл фотона $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$ и сравните ее с работой выхода электрона из этого металла $A_{вых}$ (ее можно найти в справочнике или вычислить по формулам, приведенным выше). Если $\varepsilon > A_{вых}$, то фотоэффект наступит, а если $\varepsilon < A_{вых}$, то – нет.

Решение отдельных задач

Задача 1

Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения Солнца, $\lambda_m = 0{,}47$ мкм, его радиус $R_c = 7 \cdot 10^8$ м. Найти изменение массы Солнца Δm за $t = 10$ лет. Солнце считать абсолютно черным телом.

Дано:
$\lambda_m = 0{,}47$ мкм
$R_c = 7 \cdot 10^8$ м
$t = 10$ лет
$b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м · К
$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$
$c = 3 \cdot 10^8 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

Δm – ?

Решение. Изменение массы Солнца за 10 лет определим отношением излученной им энергии ΔE к квадрату скорости света c:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}. \qquad (1)$$

Излученную энергию ΔE найдем, умножив интегральную светимость Солнца R на площадь поверхности Солнца $S = 4\pi R_c^2$ и время t:

$$\Delta E = RSt \quad \text{или} \quad \Delta E = 4\pi R_c^2 Rt. \qquad (2)$$

Согласно закону Стефана–Больцмана

$$R = \sigma T^4. \qquad (3)$$

Абсолютную температуру Солнца найдем из закона смещения Вина:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \text{ откуда } T = \frac{b}{\lambda_m}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3): $R = \sigma\left(\dfrac{b}{\lambda_m}\right)^4$. (5)

Теперь подставим (5) в (2):

$$\Delta E = 4\pi R_c^2 \sigma \left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4 t. \qquad (6)$$

И наконец, подставим (6) в (1):

$$\Delta m = \frac{4\pi R_c^2 \sigma t}{c^2}\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4 \quad \text{или} \quad \boxed{\Delta m = 4\pi\sigma t\left(\frac{R_c}{c}\right)^2\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4}$$

Переведем все единицы в СИ:
0,47 мкм = $4{,}7 \cdot 10^{-7}$ м,
10 лет = $10 \cdot 12 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600$ с = $3 \cdot 10^8$ с.

Произведем вычисления:

$$\Delta m = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^{8} \left(\frac{7 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{8}}\right)^{2} \left(\frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}}{4{,}7 \cdot 10^{-7}}\right)^{4} \text{ кг} =$$

$= 2{,}2 \cdot 10^{18}$ кг.

Ответ: $\Delta m = 2{,}2 \cdot 10^{18}$ кг.

Задача 2

Чему равна длина волны λ кванта с энергией ε, равной средней кинетической энергии $E_к$ атома гелия при температуре $t° = 100°C$? Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Дано:

$\varepsilon = \overline{E}_к$

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

$c = 3 \cdot 10^{8}\ \dfrac{м}{с}$

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{Дж}{К}$

$t° = 100°C$

λ – ?

Решение. Энергия кванта ε согласно формуле Планка

$$\varepsilon = h\nu, \quad \text{где} \quad \nu = \frac{c}{\lambda},$$

поэтому

$$\varepsilon = h\frac{c}{\lambda}. \tag{1}$$

Здесь h – постоянная Планка.

Средняя кинетическая энергия атома гелия связана с температурой формулой

$$\overline{E}_к = \frac{3}{2}kT. \tag{2}$$

Согласно условию задачи $\varepsilon = \overline{E}_к$, поэтому

$$h\frac{c}{\lambda} = \frac{3}{2}kT,$$

откуда

$$\boxed{\lambda = \frac{2hc}{3kT}}$$

Переведем в СИ единицу температуры:
$100°C = 373$ К.

Произведем вычисления:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 373} \text{ м} = 2{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ м.

Задача 3

Определить длину волны света λ, кванты которого имеют такую же энергию ε, какую приобретет электрон, пролетевший из состояния покоя разность потенциалов $U = 4{,}1$ В.

Дано:
$\varepsilon = E_к$
$v_0 = 0$
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$U = 4{,}1$ В

λ – ?

Здесь $E_к$ – кинетическая энергия, приобретенная электроном, пролетевшим из состояния покоя разность потенциалов U, v_0 – начальная скорость электрона, e – заряд электрона, h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме.

Решение. Работа электрического поля A по перемещению электрона между точками поля с разностью потенциалов U определяется разностью кинетических энергий электрона в конечной $E_к$ и начальной $E_{ко}$ точках перемещения:

$$A = E_к - E_{ко}, \text{ где } A = eU.$$

Поскольку $v_0 = 0$, то $E_{ко} = 0$ и $E_к = eU$.

Согласно условию задачи кинетическая энергия электрона $E_к$ в конечной точке перемещения равна энергии кванта ε:

$$E_к = \varepsilon = eU.$$

По формуле Планка $\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, где $\nu = \frac{c}{\lambda}$, поэтому

$h\frac{c}{\lambda} = eU$, откуда $\boxed{\lambda = \frac{hc}{eU}}$

Произведем вычисления:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 4{,}1} \text{ м} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 3 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 4

Источник света мощностью $P = 100$ Вт испускает $N = 5 \cdot 10^{20}$ фотонов за $t = 1$ с. Найти длину волны излучения λ.

Дано:
$P = 100$ Вт
$N = 5 \cdot 10^{20}$
$t = 1$ с
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$

λ – ?

Решение. Общая энергия излучения $E_{общ}$ равна работе электрического тока A в источнике, мощность которого P:

$$E_{общ} = A.$$

Работа тока A связана с мощностью источника P известным соотношением

$$P = \frac{A}{t}, \text{ поэтому } P = \frac{E_{общ}}{t}.$$

Любое излучение всегда содержит целое число фотонов (квантов), поэтому общая энергия излучения $E_{общ}$ за время t равна произведению энергии одного кванта ε и их количества N в этом излучении: $E_{общ} = N\varepsilon$.

Тогда $$P = \frac{N\varepsilon}{t}.$$

По формуле Планка энергия одного фотона (кванта)
$$\varepsilon = h\nu.$$

С учетом этого $P = \dfrac{Nh\nu}{t}$.

Частоту колебаний в световой волне ν свяжем с искомой длиной волны λ соотношением $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$.

Тогда $P = \dfrac{Nhc}{t\lambda}$, откуда $\boxed{\lambda = \dfrac{Nhc}{Pt}}$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 10^{20} \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{100 \cdot 1} \text{ м} = 9{,}9 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda = 9{,}9 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 5

Возникнет ли фотоэффект в цинке под действием излучения, имеющего длину волны $\lambda = 0{,}45$ мкм? Работа выхода электронов из цинка $A_{вых} = 4{,}2$ эВ.

Дано:
$\lambda = 0{,}45$ мкм
$A_{вых} = 4{,}2$ эВ
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^{8}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$

ε – ?

Здесь h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме, ε – энергия фотона (кванта), падающего на цинк.

Решение. Возникнет ли внешний фотоэффект при освещении данного металла светом с определенной длиной волны или нет – ответ на этот вопрос зависит от соотношения между энергией одного фотона, падающего на металл, и работой выхода электрона из этого металла. Если энергия фотона ε больше работы выхода электрона $A_{вых}$, то этой энергии хватит и на вырывание электрона из металла, и на сообщение ему кинетической энергии, и фотоэффект будет. Если же энергия фотона меньше работы выхода электрона из металла, то этой энергии не хватит фотону, чтобы вырвать из металла электрон, и фотоэффект не произойдет. В предельном случае, когда энергия фотона равна работе выхода электрона, фотоэффект становится возможным, а длина волны λ_0 или частота ν_0, соответствующие такому кванту, называются красной границей фотоэффекта (длинноволновой или коротковолновой границей фотоэффекта, или порогом фотоэффекта).

Таким образом, чтобы ответить на вопрос нашей задачи, надо отыскать энергию одного фотона ε, падающего на цинк. Для этого воспользуемся формулой Планка

$$\varepsilon = h\nu, \text{ где } \nu = \frac{c}{\lambda}, \text{ поэтому } \boxed{\varepsilon = h\frac{c}{\lambda}}$$

Нам осталось вычислить энергию фотона ε и сравнить ее с работой выхода $A_{вых}$ электрона из металла. Но вначале переведем все единицы в СИ:

$0{,}45$ мкм $= 0{,}45 \cdot 10^{-6}$ м $= 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м,

$4{,}2$ эВ $= 4{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 6{,}72 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Подставим числа и вычислим энергию ε:

$$\varepsilon = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4{,}5 \cdot 10^{-7}} \text{ Дж} = 4{,}4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Мы видим, что энергия фотона $\varepsilon = 4{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж меньше работы выхода электрона из цинка, которая равна $A_{вых} = 6{,}72 \cdot 10^{-19}$ Дж, поэтому внешний фотоэффект не произойдет.

Ответ: фотоэффекта не будет.

Задача 6

Красная граница фотоэффекта для металла $\lambda_0 = 6{,}2 \cdot 10^{-5}$ см. Найти величину запирающего напряжения $U_{зап}$ для фотоэлектронов при освещении металла светом с длиной волны $\lambda = 3300$ Å.

Дано:
$\lambda_0 = 6{,}2 \cdot 10^{-5}$ см
$\lambda = 3300$ Å
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{м}{с}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$U_{зап}$ – ?

Обозначим h постоянную Планка, c – скорость света в вакууме, е – заряд электрона.

Решение. Запирающим напряжением $U_{зап}$ называют наименьшее напряжение электрического поля, которое способно полностью оттолкнуть электроны, вылетевшие из катода, от анода. Это напряжение должно быть таким, чтобы работа соответствующего электрического поля $A_{поля} = eU_{зап}$ была равна кинетической энергии вылетевших из металла электронов $E_к$:

$$A_{поля} = E_к \quad \text{или} \quad eU_{зап} = E_к.$$

Кинетическую энергию вылетевших из металла при фотоэффекте электронов определим, воспользовавшись формулой Эйнштейна для фотоэффекта, согласно которой энергия фотона ε, падающего на металл, расходуется на работу выхода электрона из металла $A_{вых}$ и на сообщение вырванному электрону кинетической энергии $E_к$:

$$\varepsilon = A_{вых} + E_к, \text{ откуда } E_к = \varepsilon - A_{вых},$$

поэтому
$$eU_{зап} = \varepsilon - A_{вых}. \qquad (1)$$

Работу выхода $A_{вых}$ можно определить, если известна красная граница фотоэффекта λ_0, т. е. длина световой волны, при которой у данного металла наступает фотоэффект. При этой длине волны энергия фотона равна работе выхода электрона из металла:

$$\varepsilon_0 = A_{вых},$$

где согласно формуле Планка

$$\varepsilon_0 = h\nu_0 \text{ или } \varepsilon_0 = h\frac{c}{\lambda_0}, \text{ поскольку } \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0}.$$

С учетом этого
$$A_{вых} = h\frac{c}{\lambda_0}. \qquad (2)$$

Энергию фотона ε, падающего на металл, также определим по формуле Планка: $\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$. (3)

Нам осталось подставить (2) и (3) в (1) и из полученного выражения определить искомое запирающее напряжение:

$$eU_{зап} = h\frac{c}{\lambda} - h\frac{c}{\lambda_0} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right),$$

откуда
$$\boxed{U_{зап} = \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ: $6{,}2 \cdot 10^{-5}$ см $= 6{,}2 \cdot 10^{-7}$ м, 3300 Å $= 3300 \cdot 10^{-10}$ м $= 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U_{зап} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\left(\frac{1}{3{,}3 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{6{,}2 \cdot 10^{-7}}\right) \text{В} =$$
$$= 1{,}76 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{зап} = 1{,}76$ В.

Задача 7

Рентгеновская трубка, работающая под напряжением $U = 50$ кВ и потребляющая ток $I = 2$ мА, излучает $N =$

$= 5 \cdot 10^{13}$ фотонов за $t = 1$ с. Считая длину волны излучения λ равной 0,1 нм, найти КПД η трубки.

Дано:
$U = 50$ кВ
$I = 2$ мА
$N = 5 \cdot 10^{13}$
$t = 1$ с
$\lambda = 0,1$ нм
$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

η – ?

Решение. Коэффициентом полезного действия рентгеновской трубки η называется отношение энергии рентгеновского излучения $E_{\text{общ}}$ к работе потребляемого электрического тока A, выраженное в процентах:

$$\eta = \frac{E_{\text{общ}}}{A} 100\%. \qquad (1)$$

Общую энергию рентгеновского излучения $E_{\text{общ}}$ можно определить, умножив энергию одного кванта излучения ε на число излученных за время t квантов N:
$$E_{\text{общ}} = \varepsilon N.$$

Энергию одного кванта ε определим по формуле Планка

$$\varepsilon = h\nu \text{ или } \varepsilon = h\frac{c}{\lambda}, \text{ тогда } E_{\text{общ}} = h\frac{c}{\lambda}N. \qquad (2)$$

Работу электрического тока в трубке определим по формуле
$$A = UIt. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), мы решим задачу в общем виде:

$$\boxed{\eta = \frac{hcN}{\lambda UIt} 100\%}$$

Переведем все единицы в СИ:
50 кВ $= 5 \cdot 10^4$ В, 0,1 нм $= 1 \cdot 10^{-10}$ м, 2 мА $= 2 \cdot 10^{-3}$ А.
Подставим числа и произведем вычисления:

$$\eta = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 5 \cdot 10^{13}}{10^{-10} \cdot 5 \cdot 10^{4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1} \cdot 100\% = 0,1\%.$$

Ответ: $\eta = 0,1\%$.

Задача 8

Определить показатель преломления n среды, в которой свет с энергией кванта ε имеет длину волны λ.

Дано:
λ
ε
h
c

n – ?

Решение. Показатель преломления среды n связан со скоростью распространения света в этой среде v простым соотношением $n = \frac{c}{v}$.

В свою очередь скорость света в прозрачной среде v связана с длиной волны в этой среде λ и частотой колебаний в волне ν соотношением $\lambda = \frac{v}{\nu}$, откуда $v = \nu \cdot \lambda$.

С учетом этого $$n = \frac{c}{\nu\lambda}. \qquad (1)$$

Частоту колебаний в световой волне найдем из формулы Планка, поскольку энергия кванта ε нам известна:

$$\varepsilon = h\nu, \text{ откуда } \nu = \frac{\varepsilon}{h}. \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1). Получим $\boxed{n = \frac{ch}{\varepsilon\lambda}}$

Задача решена.

Ответ: $n = ch/(\varepsilon\lambda)$.

Задача 9

Докажите, что минимальная длина волны λ_{min} в спектре рентгеновского излучения определяется формулой

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24}{U},$$

где U – напряжение между катодом и анодом трубки.

Решение. Рентгеновское излучение возникает при торможении электронов вблизи анода. Когда работа электрического поля $A = eU$ равна энергии кванта рентгеновского излучения $\varepsilon = h\nu_{max}$, частота ν_{max} является максимальной в спектре возможных частот рентгеновского излучения, а соответствующая длина волны

$$\lambda_{min} = \frac{c}{\nu_{max}}$$

минимальной. С учетом сказанного

$$A = \varepsilon \quad \text{или} \quad eU = h\frac{c}{\lambda_{min}},$$

откуда $$\boxed{\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}} \qquad (1)$$

Здесь $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с и $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Подставим эти величины в формулу (1): $\lambda_{min} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}6^{-19}U} = \frac{1{,}24}{U}$, что и требовалось доказать.

Задача решена.

Задача 10

На плоский алюминиевый электрод падает ультрафиолетовое излучение с длиной волны $\lambda = 90$ нм. На какое максимальное расстояние d от его поверхности может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется однородное электрическое поле напряженностью $E = 8$ В/см, задерживающее этот фотоэлектрон? Красная граница фотоэффекта для алюминия $\lambda_0 = 332$ нм.

Дано:
$\lambda = 90$ нм
$E = 8\,\dfrac{\text{В}}{\text{см}}$
$\lambda_0 = 332$ нм
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

d – ?

Решение. Если из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{к}} \qquad (1)$$

найти кинетическую энергию фотоэлектрона $E_{\text{к}}$, которую он имеет сразу после вылета из электрода, и приравнять ее работе однородного электрического поля

$$A = Eed, \qquad (2)$$

задерживающего электрон, то можно найти искомое расстояние d. Приступим. Из (1)

$$E_{\text{к}} = h\nu - A_{\text{вых}},$$

где $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ и $A_{\text{вых}} = h\dfrac{c}{\lambda_m}$.

С учетом этого $E_{\text{к}} = h\dfrac{c}{\lambda} - h\dfrac{c}{\lambda_0} = hc\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0}\right)$. (3)

Поскольку $E_{\text{к}} = A$, то, приравняв правые части равенств (2) и (3), получим

$Eed = hc\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0}\right)$, откуда $\boxed{d = \dfrac{hc}{eE}\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda_0}\right)}$

Переведем все единицы в СИ: 90 нм = $9 \cdot 10^{-8}$ м, 8 В/см = 800 В/м, 332 нм = $3{,}32 \cdot 10^{-7}$ м.

Произведем вычисления:

$$d = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 800}\left(\frac{1}{9 \cdot 10^{-8}} - \frac{1}{3{,}32 \cdot 10^{-7}}\right)\text{м} = 0{,}01 \text{ м}.$$

Ответ: $d = 0{,}01$ м.

Задача 11

Длина волны рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния увеличилась с $\lambda_1 = 4$ пм до $\lambda_2 = 4{,}5$ пм. Найти энергию электронов отдачи E.

Дано:
$\lambda_1 = 4$ пм
$\lambda_2 = 4,5$ пм
$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{м}{с}$

E – ?

Решение. По закону сохранения энергии энергия электронов отдачи E равна уменьшению энергии квантов рентгеновского излучения $\Delta\varepsilon$:

$E = \Delta\varepsilon$, где $\Delta\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.

По формуле Планка

$$\varepsilon_1 = h\nu_1 = h\frac{c}{\lambda_1} \text{ и } \varepsilon_2 = h\frac{c}{\lambda_2}.$$

С учетом этого $E = h\frac{c}{\lambda_1} - h\frac{c}{\lambda_2}$, $\boxed{E = hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}$

Переведем все единицы в СИ: 4 пм = $4 \cdot 10^{-12}$ м, 4,5 пм = $4,5 \cdot 10^{-12}$ м.

Произведем вычисления:

$$E = 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8\left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-12}} - \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-12}}\right)\text{Дж} =$$

$= 6 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Ответ: $E = 6 \cdot 10^{-15}$ Дж.

Задача 12

Постройте график зависимости скорости фотоэлектронов v от длины волны λ, падающей на металл, если работа выхода электронов из этого металла $A_{вых} = 2,35$ эВ.

Дано:
$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{м}{с}$
$A_{вых} = 2,35$ эВ
$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг

$v = v(\lambda)$ – ?

Решение. Из формулы Эйнштейна для фотоэффекта

$h\nu = A_{вых} + \frac{m_e v^2}{2}$ следует, что

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_e}(h\nu - A_{вых})}, \text{ где } \nu = \frac{c}{\lambda},$$

поэтому $$v = \sqrt{\frac{2}{m_e}\left(h\frac{c}{\lambda} - A_{вых}\right)}. \quad (1)$$

Переведем в СИ единицу работы выхода: 2,35 эВ = $= 2,35 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж $= 3,76 \cdot 10^{-19}$ Дж. Теперь подставим в (1) все числовые значения величин, кроме λ:

$$v = \sqrt{\frac{2}{9,1 \cdot 10^{-31}}\left(6,62 \cdot 10^{-34}\frac{3 \cdot 10^8}{\lambda} - 3,76 \cdot 10^{-19}\right)}\frac{м}{с} =$$

$$= 668\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 2 \cdot 10^6}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad (2)$$

Теперь будем придавать λ произвольные значения, например, $\lambda = 0{,}1 \cdot 10^{-6}$ м; $0{,}2 \cdot 10^{-6}$ м; $0{,}3 \cdot 10^{-6}$ м; $0{,}4 \cdot 10^{-6}$ м и $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м и, подставляя их в (2), вычислять соответствующие этим длинам волн скорости фотоэлектронов, после чего заполним таблицу:

$\lambda, 10^{-6}$ м	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
v, 10^6 м/с	8	3	1,3	0,5	0

Построим график $v = v(\lambda)$ (рис. 22-1):

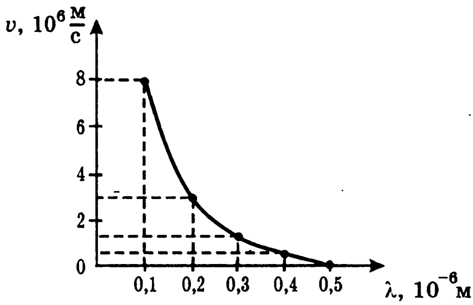


Рис. 22-1

Из графика следует, что при $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м фотоэффекта не будет. Значит, $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м – это красная граница фотоэффекта для данного металла.

Задача решена.

Задача 13

Угол рассеяния рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda_1 = 2$ пм равен $\Theta = 60°$, а электроны отдачи движутся под углом $\varphi = 30°$ к направлению падающих лучей. Найти импульс p_2 квантов рассеянных лучей и импульс p_e электронов отдачи.

Дано:
$\lambda_1 = 2$ пм
$\Theta = 60°$
$\varphi = 30°$
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8 \ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

p_2 – ?
p_e – ?

Решение. Импульс рассеянного кванта p_2 найдем по формуле

$$p_2 = \frac{h}{\lambda_2},$$

где λ_2 – длина волны, соответствующая этому кванту. Ее найдем из формулы

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 2\frac{h}{m_e c}\sin\frac{\Theta}{2}, \text{ откуда}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 2\frac{h}{m_e c}\sin\frac{\Theta}{2}.$$

С учетом этого

$$\boxed{p_2 = \frac{h}{\lambda_1 + 2\dfrac{h}{m_e c}\sin\dfrac{\Theta}{2}}}$$

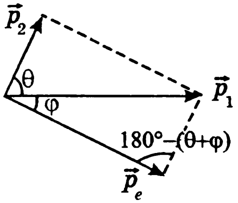


Рис. 22-2

Для определения импульса электрона отдачи воспользуемся законом сохранения импульса, согласно которому векторная сумма импульсов рассеянного кванта $\vec{p}_2$ и электрона отдачи $\vec{p}_e$ равна импульсу $\vec{p}_1$ падающего на электрон кванта:

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_e + \vec{p}_1.$$

Для перехода к модулям этих векторов воспользуемся теоремой косинусов. Согласно рис. 22-2

$$p_1^2 = p_e^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos(180° - (\Theta + \varphi)).$$

Поскольку $\Theta + \varphi = 90°$ согласно условию задачи, а $\cos 90° = 0$, то получим $p_1^2 = p_e^2 + p_2^2$, откуда $p_e = \sqrt{p_1^2 - p_2^2}$,

где $p_1 = \dfrac{h}{\lambda_1}$, поэтому окончательно $\boxed{p_e = \sqrt{\left(\dfrac{h}{\lambda_1}\right)^2 - p_2^2}}$

Переведем все единицы в СИ: 2 пм $= 2 \cdot 10^{-12}$ м.
Произведем вычисления:

$$p_2 = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-34} + 2\dfrac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}\sin\dfrac{60°}{2}} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1{,}66 \cdot 10^{-22} \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

$$p_e = \sqrt{\left(\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-12}}\right)^2 - (1{,}66 \cdot 10^{-22})^2}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 2{,}86 \cdot 10^{-22}\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $p_2 = 1{,}66 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с, $p_e = 2{,}86 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

Задача 14

Давление солнечных лучей на парус площадью $S = 200$ м^2 равно $p = 8$ мкПа. Через какое время t лодка под этим парусом приобретет скорость $v = 40$ м/с, если ее масса $m = 200$ кг и она движется без начальной скорости, не испытывая сопротивления окружающей среды? Какой путь L она пройдет за это время?

Дано:
$S = 200$ м^2
$p = 8$ мкПа
$v = 40\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
$m = 200$ кг
$v_0 = 0$

t – ?
L – ?

Решение. Если мы определим ускорение лодки a, которое она приобретет под действием силы давления $F = pS$, то из формул

$v = at$ (1) и $L = \dfrac{at^2}{2}$ (2) при $v_0 = 0$, где v_0 – начальная скорость лодки, найдем искомые время t и путь L.

Ускорение a найдем по второму закону Ньютона:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{pS}{m}. \tag{3}$$

Подставим (3) в (1): $v = \dfrac{pS}{m}t$, откуда $\boxed{t = \dfrac{mv}{pS}}$

Зная время t, найдем путь по формуле (2) с учетом (3):

$$\boxed{L = \frac{pSt^2}{2m}}$$

Переведем единицу давления в СИ: 8мкПа = $8 \cdot 10^{-6}$Па.

Произведем вычисления:

$$t = \frac{200 \cdot 40}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 200} = 5 \cdot 10^6\ \text{с},$$

$$L = \frac{8 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \cdot 25 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 200}\ \text{м} = 1 \cdot 10^8\ \text{м}.$$

Ответ: $t = 5 \cdot 10^6$ с, $L = 1 \cdot 10^8$ м.

Задача 15

Давление света на абсолютно черную поверхность, расположенную перпендикулярно лучам с длиной волны $\lambda = 5000$ Å, равно $p = 10$ мкПа. Найти число фотонов N, падающих за $t = 10$ с на $S = 1$ см^2 этой поверхности.

Дано:
$\lambda = 5000$ Å
$p = 10$ мкПа
$t = 10$ с
$c = 3 \cdot 10^8 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
$S = 1$ см^2
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

N – ?

Решение. Давление света определяется по формуле

$$p = \frac{E}{St}(1 + \rho).$$

Здесь $E = N\varepsilon$ – энергия света, падающего на площадку S за время t, ρ – коэффициент отражения. Так как поверхность абсолютно черная, $\rho = 0$.

Согласно формуле Планка энергия одного фотона

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}.$$

С учетом всего этого $p = \dfrac{Nhc}{St\lambda}$, откуда $\boxed{N = \dfrac{pSt\lambda}{hc}}$

Переведем все единицы в СИ: 5000 Å $= 5000 \cdot 10^{-10}$ м $= 5 \cdot 10^{-7}$ м, 10 мкПа $= 1 \cdot 10^{-5}$ Па, 1 см$^2 = 1 \cdot 10^{-4}$ м^2.

Произведем вычисления:

$$N = \frac{1 \cdot 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6{,}22 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 7{,}6 \cdot 10^{10}.$$

Ответ: $N = 7{,}6 \cdot 10^{10}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Поток энергии, излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, $\Phi = 40$ Вт, площадь окошка $S = 5$ см^2. Чему равна температура в печи T?

Ответ: $T = \sqrt[4]{\dfrac{\Phi}{\sigma S}} = 600$ К.

Задача 2. На сколько процентов увеличится энергетическая светимость абсолютно черного тела, если его абсолютная температура увеличится на 20%?

Ответ: $\dfrac{\Delta R}{R_1} 100\% = (1{,}2^4 - 1) \cdot 100\% = 107\%$.

Задача 3. На какую длину волны λ_m приходится максимум спектральной светимости абсолютно черного тела при температуре $t° = 0°$C?

Ответ: $\lambda_m = 10{,}6$ мкм.

Задача 4. Длина волны, на которую приходится максимум спектральной светимости Солнца, $\lambda_m = 0{,}5$ мкм, его диаметр $D = 1{,}4 \cdot 10^9$ м. Какую энергию ΔE потеряет Солнце за $t = 1000$ лет?

Ответ: $\Delta E = \pi D^2 \sigma \left(\dfrac{b}{\lambda_m}\right)^4 t = 1{,}2 \cdot 10^{37}$ Дж.

Задача 5. Чему равна частота ν светового кванта, у которого энергия равна средней кинетической энергии атома гелия, если $\nu_м$ = = 2 моль гелия занимают объем V = 5 л под давлением p = 2 атм?

Ответ: $\nu = \dfrac{3pV}{2\nu_m N_A h} = 2 \cdot 10^{12}$ Гц.

Задача 6. Длинноволновая граница фотоэффекта для серебра λ_0 = 0,29 мкм. Определить работу выхода электрона $A_{вых}$.

Ответ: $A_{вых} = 7 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача 7. Глаз после длительного пребывания в темноте способен воспринимать свет с длиной волны λ = 0,5 мкм при мощности излучения $P = 2{,}1 \cdot 10^{-17}$ Вт. Сколько фотонов попадает при этом на сетчатку глаза за t = 1 с?

Ответ: $N = \dfrac{P\lambda t}{hc} = 53$.

Задача 8. На вольфрамовый катод фотоэлемента падают ультрафиолетовые лучи с длиной волны λ = 0,1 мкм. При каком запирающем напряжении $U_{зап}$ между катодом и анодом фотоэлемента фототок в цепи равен нулю (т. е. ни один фотоэлектрон не может долететь до анода)? Работа выхода электронов из вольфрама $A_{вых}$ = 4,5 эВ.

Ответ: $U_{зап} = \dfrac{hc - \lambda A_{вых}}{\lambda e} = 7{,}9$ В.

Задача 9. Под каким напряжением работает рентгеновская трубка, если самые «жесткие» лучи в ее рентгеновском спектре имеют частоту $\nu = 1 \cdot 10^{19}$ Гц?

Ответ: $U = \dfrac{h\nu}{e} = 4{,}1 \cdot 10^4$ В.

Задача 10. Найти длину волны λ и частоту ν излучения, в котором релятивистская масса фотона $m_ф$ равна массе покоя электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $\lambda = \dfrac{h}{m_e c} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м, $\nu = \dfrac{m_e c^2}{h} = 1{,}2 \cdot 10^{20}$ Гц.

Задача 11. Какова мощность P источника света, испускающего $N = 5 \cdot 10^{13}$ фотонов за t = 1 с? Длина волны излучения λ = 0,1 нм.

Ответ: $P = \dfrac{Nhc}{\lambda t} = 0{,}1$ Вт.

Задача 12. Определить красную границу фотоэффекта λ_0 для калия. Работа выхода электрона из калия $A_{вых}$ = 2,2 эВ.

Ответ: $\lambda = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 13. Определить постоянную Планка h, если известно, что фотоэлектроны, вызываемые светом с поверхности некоторого металла, полностью задерживаются запирающим напряжением $U_{зап1}$ = 0,5 В, если частота колебаний в световой волне $\nu = 0{,}39 \cdot 10^{15}$ Гц, а когда частота колебаний $\nu_2 = 0{,}75 \cdot 10^{15}$ Гц, то запирающее напряжение становится равным $U_{зап2}$ = 2В.

Ответ: $h = \dfrac{e(U_{зап1} - U_{зап2})}{\nu_2 - \nu_1} = 6{,}7 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Задача 14. Найти импульс фотона p, энергия которого E = $= 6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Ответ: $p = \dfrac{E}{c} = 2 \cdot 10^{-27}\,\dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 15. Два источника с одинаковой мощностью испускают за одно и то же время разное количество фотонов N_1 и N_2. Во сколько раз различаются их длины световых волн?

Ответ: $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = \dfrac{N_1}{N_2}$.

Задача 16. Красная граница фотоэффекта для вольфрама $\lambda_0 = 2750$ Å. Найти минимальное значение энергии фотона E_{min}, при котором еще возможен фотоэффект.

Ответ: $E_{\min} = \dfrac{hc}{\lambda_0} = 7{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача 17. Какую длину волны λ имеют световые волны, падающие на поверхность цезия, если фотоэлектроны, вылетающие из цезия, имеют скорость $v = 2 \cdot 10^6$ м/с? Красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_0 = 690$ нм.

Ответ: $\lambda = \dfrac{2\lambda_0 hc}{2hc + m_e v^2 \lambda_0} = 9{,}4 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 18. При напряжении между катодом и анодом рентгеновской трубки $U = 20$ кВ минимальная длина волны рентгеновского излучения $\lambda_1 = 62$ пм (пикометра, 1пм $= 10^{-12}$ м). При каком анодном напряжении U_2 минимальная длина волны излучения станет равна $\lambda_2 = 31$ пм?

Ответ: $U_2 = U_1 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 4 \cdot 10^4$ В.

Задача 19. При какой скорости v электрон будет иметь кинетическую энергию, равную энергии кванта с длиной волны $\lambda = 100$ нм?

Ответ: $v = \sqrt{\dfrac{2hc}{m_e \lambda}} = 2{,}1 \cdot 10^6\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 20. Найти длину волны λ_2 рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния под углом $\Theta = 90°$, если длина волны падающих лучей $\lambda_1 = 10$ пм.

Ответ: $\lambda_2 = \lambda_1 + \Lambda \sin\dfrac{\Theta}{2} = 11{,}7$ пм.

Здесь $\Lambda = \dfrac{h}{m_e c}$ – комптоновская длина волны.

Задача 21. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_1 = 20$ пм рассеиваются под углом $\Theta = 90°$. Найти импульс p_e электронов отдачи.

Ответ: $p_e = h\sqrt{\dfrac{1}{\lambda_1^2} - \dfrac{1}{\left(\lambda_1 + 2\Lambda \sin\dfrac{\Theta}{2}\right)^2}} = 4{,}4 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с.

Задача 22. Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}75$ МэВ рассеялся на покоившемся электроне под углом $\Theta = 60°$. Определить энергию ε_2 рассеянного фотона и кинетическую энергию $E_к$ электрона отдачи.

Ответ: $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\dfrac{\varepsilon_1}{m_e c^2}\sin\dfrac{\Theta}{2} + 1} = 7 \cdot 10^{-14}$ Дж,

$E_к = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 5 \cdot 10^{-14}$ Дж.

Задача 23. Построить график зависимости скорости фотоэлектронов v от частоты ν световой волны, падающей на металл, если работа выхода электронов из металла $A_{вых} = 4{,}5$ эВ.

Задача 24. Давление солнечных лучей на парус фантастической лодки, имеющий форму плоского круга радиусом R, равно p. За какое время t лодка массой m увеличит свою скорость с v_0 до v, двигаясь без сопротивления?

Ответ: $t = \dfrac{m(v - v_0)}{pS}$.

Задача 25. Для возбуждения фотохимической реакции на фотопленке требуются фотоны с энергией $\varepsilon_0 = 1{,}2$ эВ. Возникнет ли такая реакция при освещении фотопленки светом с длиной волны $\lambda = 500$ нм? Чему равна здесь граница реакции λ_0?

Ответ: нет, $\lambda_0 = 1$ мкм.

Задача 26. Чему равна толщина h частицы, имеющей форму диска, если при нормальном падении на ее плоскую поверхность солнечных лучей сила светового давления вблизи поверхности Земли уравновешивает силу притяжения частицы к Солнцу? Солнечная постоянная $\omega_0 = 1{,}36$ кВт/м^2, расстояние от Солнца до Земли $r = 150$ млн км, плотность вещества частицы $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м^3, масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Частицу считать абсолютно черным телом.

Примечание: солнечной постоянной ω_0 называют энергию солнечного излучения, падающего за единицу времени на единичную площадку, перпендикулярную солнечным лучам и расположенную вне земной атмосферы на расстоянии от Солнца, равном среднему расстоянию между Солнцем и Землей.

Ответ: $h = \dfrac{w_0 r^2}{c\rho GM} = 9{,}6 \cdot 10^{-8}$ м,

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $H \cdot$ м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Задача 27. На плоскую белую поверхность площадью S падает нормально свет с энергией кванта ε. Сколько фотонов N упадет на эту поверхность в течение времени t, если свет оказывает на нее давление p?

Ответ: $N = \dfrac{pSt}{2\varepsilon}$.

Задача 28. Световые волны с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м падают нормально на абсолютно черную поверхность и давят на нее с силой $F = 0{,}01$ мкн. Найти число фотонов N, падающих за $t = 1$ с на эту поверхность.

Ответ: $N = \dfrac{F\lambda t}{ch} = 4 \cdot 10^{18}$.

23. ФИЗИКА АТОМА

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Согласно современным представлениям атом состоит из ядра, несущего положительный заряд, и электронной оболочки, заряженной отрицательно. Когда суммарный положительный заряд ядра по модулю равен суммарному отрицательному заряду оболочки, атом нейтрален.

Нейтральный атом может находиться в основном (невозбужденном) состоянии сколь угодно долго, если на него не оказывать воздействия извне.

Энергия электрона E в атоме водорода целиком определяется номером его орбиты и может быть найдена по формуле

$$E = -\frac{m_e e^4}{8(\varepsilon_0 h n)^2} \quad \text{или} \quad E = -\frac{m_e e^4}{32(\pi \varepsilon_0 \hbar n)^2}.$$

Здесь $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$кг – масса покоя электрона, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – его заряд, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, n – целое число, соответствующее номеру орбиты электрона и называемое главным квантовым числом, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ – постоянная Планка с «черточкой».

В невозбужденном атоме водорода электрон находится на низшей электронной орбите с номером $n = 1$. Величина энергии, которой он при этом обладает, называется его основным энергетическим уровнем.

Под внешним воздействием (облучение, механическое воздействие, передача тепла) атом может перейти в возбужденное состояние, поглотив при этом порцию энергии определенной величины. В результате электрон перейдет на новую электронную орбиту, более удаленную от ядра, на которой величина его энергии станет другой (рис. 23-1, *а*). Иными словами, электрон поднимается на новый энергетический уровень. Согласно первому постулату Бора энергия электрона в атоме не может быть любой, а может принимать только некоторые разрешенные значения, т. е. она квантуется. Поэтому возможные энергетические уровни электрона в атоме E разделены промежутками, соответствующими величинам энергии, которую электрон в атоме иметь не может.

На рис. 23-1, *а* показаны переходы электрона на более высокие энергетические уровни вследствие поглощения им энергии извне, т. е. переходу атома в возбужденное состояние.

В возбужденном состоянии атом не может находиться долго, его «время жизни» в этом состоянии составляет стомиллионные доли секунды, после чего атом переходит в менее возбужденное или в основное состояние, излучив порцию энергии в виде электромагнитной волны. При этом электрон опускается на более низкий энергетический уровень, т. е. возвращается на более близкую к ядру орбиту (рис. 23-1, *б*).

Радиус орбиты электрона r в атоме так же, как и его энергия E, определяется номером электронной орбиты n. Радиус орбиты электрона в атоме водорода может быть определен по формуле

$$r = \frac{\varepsilon_0 (nh)^2}{\pi m_e e^2} \text{ или}$$

$$r = \frac{4\pi\varepsilon_0 (n\hbar)^2}{m_e e^2}.$$

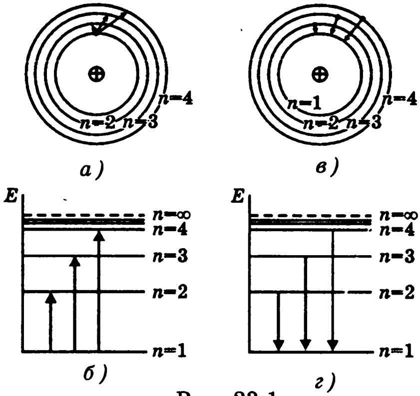


Рис. 23-1

Энергия электромагнитной волны, поглощенной в процессе возбуждения атома или излученной при переходе атома в менее возбужденное или основное состояние, определяется разностью энергий E_n и E_m конечного и начального состояний атома. Поскольку согласно формуле Планка энергия электромагнитной волны в одном акте поглощения или излучения определяется частотой волны ν, т. е. равна $h\nu$, то она связана с энергией атома в конечном и начальном состояниях соотношением

$$\varepsilon = h\nu = E_n - E_m.$$

Здесь n и m – номера энергетических уровней (или номера стационарных электронных орбит) атома.

Частота излученного или поглощенного кванта при переходе электрона с одной орбиты на другую

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ или } \nu = \frac{m_e e^4}{(8\pi\varepsilon_0 \hbar)^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где $m < n$ – целые числа.

Постоянная величина $\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} = \frac{m_e e^4}{(8\pi\varepsilon_0 \hbar)^3}$ обозначается буквой R и называется постоянной Ридберга: $R = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} = 3{,}3 \cdot 10^{15}$ Гц.

Таким образом, частота излучения энергии возбужденным атомом целиком определяется номерами электронных орбит, на которых пребывает электрон в начальном и конечном состояниях атома:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Возбужденные атомы водорода излучают видимый свет, когда их электроны переходят с более высоких энергетических уровней на второй ($m = 2$). Набор спектральных линий, соответствующих видимой части спектра атома водорода, называется серией Бальмера. Частоты излучения, соответствующие видимой части спектра излучения атома водорода, могут быть определены по формуле Бальмера

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Переходя из стационарного в возбужденное состояние, атом остается нейтральным, если энергетические уровни, на которые поднялся электрон, расположены ниже уровня $n = \infty$. Если же энергия, переданная атому извне, такова, что его электроны достигнут этого уровня или превысят его, то это означает, что эти электроны покинут атом, в результате чего атом станет положительно заряженным ионом. Этот процесс называется ионизацией атома. Заметим, что нейтральный атом может поглотить «лишний» электрон, который «залетит» в сферу действия его кулоновых сил притяжения к ядру, в результате чего атом станет отрицательным ионом.

Ионизировать атом, отняв у него электрон, можно воздействием внешнего электромагнитного поля, если энергия падающего на атом кванта поля $h\nu$ превосходит энергию ионизации атома $\Delta E_{\text{ион}}$ (или, по крайней мере, равна ей).

Ионизировать атом можно также ударом какого-либо внешнего электрона, разогнав его посредством, например, внешнего электрического поля. Разность потенциалов $U_{\text{ион}}$, которую должен пролететь электрон во внешнем поле, чтобы приобрести энергию $\Delta E_{\text{ион}}$, необходимую для ионизации атома, называется потенциалом ионизации. Поскольку работа A, совершенная при этом электрическим полем, разгоняющим электрон, определяется произведением модуля заряда электрона e и потенциала ионизации $U_{\text{ион}}$, то

$$A = eU_{\text{ион}} = \Delta E_{\text{ион}}.$$

Энергию ионизации атома $\Delta E_{\text{ион}}$ можно определить как разность между энергией E_∞ атома, соответствующей энергетическому уровню $n = \infty$, и энергией E_1, соответствующей стационарному состоянию атома, когда электрон находится на стационарной орбите.

Если же энергия электрона, разогнанного электрическим полем, меньше энергии ионизации атома, на который налетает этот электрон, то ионизации ударом не произойдет. Но вследствие удара атом может перейти, например, из одного стационарного состояния в другое, более возбужденное. Разность потенциалов $U_{\text{возб}}$, которую пролетит при этом во внешнем электрическом поле электрон, возбуждающий своим ударом атом, называется потенциалом возбуждения. Если при возбуждении атом перейдет из состояния, соответствующего энергетическому уровню E_{m}, в возбужденное состояние, соответствующее энергетическому уровню E_{n}, то работа внешнего поля $A = eU_{\text{возб}}$ равна энергии возбуждения $\Delta E_{\text{возб}}$, определяемой как разность этих двух энергетических состояний атома:

$$A = \Delta E_{\text{возб}} = E_{\text{n}} - E_{\text{m}}.$$

Все объекты природы обладают волновыми свойствами. Длина волны фотона связана с его частотой ν и импульсом $p_{\text{ф}}$ формулами

$\lambda = \dfrac{h\nu}{c}$ или $\lambda = \dfrac{h}{p_{\text{ф}}}$, где $p_{\text{ф}} = \dfrac{\varepsilon_{\text{ф}}}{c}$ и $\varepsilon_{\text{ф}} = h\nu$ – энергия фотона.

Длина волны де Бройля электрона или любой другой частицы

$\lambda = \dfrac{h}{mv}$, где m – масса частицы, v – ее скорость.

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга неопределенность импульса частицы, обусловленная ее волновыми свойствами, связана с неопределенностью координаты частицы выражением

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar .$$

Здесь Δx – неопределенность координаты частицы, т. е. интервал возможных значений координаты, определяющей положение частицы в пространстве, Δp – неопределенность ее импульса, т. е. интервал возможных изменений импульса частицы, $\hbar$ – постоянная Планка (с черточкой).

Неопределенность энергии частицы в некотором состоянии ΔE и неопределенность времени пребывания ее в этом состоянии Δt связывает соотношение неопределенностей в виде

$$\Delta E \Delta t = \hbar .$$

Решение отдельных задач

Задача 1

Найти полную энергию E и скорость электрона v на первой боровской орбите в атоме водорода. Чему равен период электрона T на этой орбите?

Дано:
$n = 1$
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

T – ?

Здесь n – номер орбиты, m_e – масса электрона, e – модуль его заряда, ε_0 – электрическая постоянная, h – постоянная Планка.

Решение. Полную энергию электрона E определим по формуле

$$\boxed{E = -\frac{m_e e^4}{8(\varepsilon_0 n h)^2}} \qquad (1)$$

Для определения скорости электрона найдем сначала его кинетическую энергию $E_к$ как разность полной энергии E и его потенциальной энергии $E_п$:

$$E_к = E - E_п, \qquad (2)$$

где $E_п = -e\varphi$ и $\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$, поэтому $E_п = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Здесь φ – потенциал электрического поля ядра на первой орбите, r – радиус этой орбиты.

$$r = \frac{\varepsilon_0 (nh)^2}{\pi m_e e^2}. \qquad (3)$$

С учетом этого

$$E_п = -\frac{e^2\pi m_e e^2}{4\pi\varepsilon_0^2(nh)^2} = -\frac{m_e e^4}{(2\varepsilon_0 nh)^2}. \qquad (4)$$

Кинетическая энергия электрона

$$E_к = \frac{m_e v^2}{2}. \qquad (5)$$

Подставив (1), (4) и (5) в (2), получим

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e e^4}{8(\varepsilon_0 nh)^2} = \frac{m_e e^4}{(2\varepsilon_0 nh)^2},$$

откуда

$$\boxed{v = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh}} \qquad (6)$$

Нам осталось найти период вращения электрона, и задача будет решена. Период вращения T связан с линейной скоростью v известным из кинематики соотношением

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \qquad (7)$$

С учетом (3), (6) и (7)

$$\frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} = \frac{2\pi\varepsilon_0(nh)^2}{\pi m_e e^2 T} \quad \text{или} \quad \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} = \frac{2\varepsilon_0(nh)^2}{m_e e^2 T},$$

откуда $T = \dfrac{4\varepsilon_0^2 n^3 h^3}{m_e e^4}$ или $\boxed{T = \left(\dfrac{2\varepsilon_0}{e^2}\right)^2 \dfrac{(nh)^3}{m_e}}$

Задача в общем виде решена.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$E = -\frac{9{,}1\cdot10^{-31}(1{,}6\cdot10^{-19})^4}{8(8{,}85\cdot10^{-12}\cdot6{,}62\cdot10^{-34}\cdot1)}\ Дж =$$

$$= -2{,}2\cdot10^{18}\ Дж = -\frac{2{,}2\cdot10^{-18}}{1{,}6\cdot10^{-19}}\ эВ = -13{,}75\ эВ,$$

$$v = \frac{(1{,}6\cdot10^{-19})^2}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot6{,}62\cdot10^{-34}\cdot1}\ \frac{м}{с} = 2{,}2\cdot10^6\ \frac{м}{с},$$

$$T = \left(\frac{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}{(1{,}6\cdot10^{-19})^2}\right)\cdot\frac{(6{,}62\cdot10^{-34}\cdot1)^3}{9{,}1\cdot10^{-31}}\ с = 1{,}4\cdot10^{-16}\ с.$$

Ответ: $E = 13{,}75$ эВ, $v = 2{,}2\cdot10^6$ м/с, $T = 1{,}4\cdot10^{-16}$ с.

Задача 2

При облучении атома водорода квантами монохроматического света электрон перешел с первой стационарной орбиты ($n_1 = 1$) на третью ($n_3 = 3$), а при возвращении в исходное состояние он перешел сначала с третьей орбиты на вторую ($n_2 = 2$), а затем со второй на первую. Определить энергию квантов E_1, E_2 и E_3, излученных и поглощенных при этих переходах.

Дано:
$n_1 = 1$
$n_2 = 2$
$n_3 = 3$
$R = 3{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

E_1 – ?
E_2 – ?
E_3 – ?

Решение. Энергию кванта E_1, поглощенного атомом водорода при переходе электрона с первой орбиты на третью, т. е. при подъеме его с первого энергетического уровня на третий (рис. 23-2, *а*), определим по формуле Планка

$$E_1 = h\nu_1.$$

Здесь ν_1 – частота поглощенной электромагнитной волны в

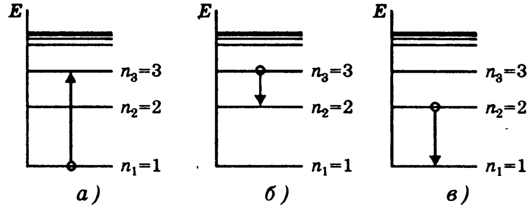


Рис. 23-2

одном акте поглощения. Эту частоту можно определить по формуле Бальмера

$$\nu_1 = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_3^2}\right).$$

С учетом этого $\boxed{E_1 = hR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_3^2}\right)}$

Аналогичным образом определим энергию квантов E_2 и E_3, излученных возбужденным атомом водорода при переходе электрона с третьей орбиты на вторую, т. е. с третьего энергетического уровня на второй (рис. 23-2, *б*), и со второго на первый (рис. 23-2, *в*):

$$\boxed{E_2 = hR\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_3^2}\right)} \qquad \boxed{E_3 = hR\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)}$$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$E_1 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)\text{Дж} =$$

$$= 1{,}9 \cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 11{,}9\ \text{эВ}.$$

$$E_2 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)\text{Дж} =$$

$$= 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 1{,}9\ \text{эВ}.$$

$$E_3 = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)\text{Дж} =$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-18}\ \text{Дж} = 10\ \text{эВ}.$$

Ответ: $E_1 = 11{,}9$ эВ, $E_2 = 1{,}9$ эВ, $E_3 = 10$ эВ.

Задача 3

При какой минимальной температуре T атомы атомарного водорода в результате столкновения станут испускать видимый свет?

Дано:

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$

$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

$R = 3{,}3 \cdot 10^{-15}$ Гц

$m = 1$

$n = 3$

T – ?

Решение. Чтобы атомы стали излучать видимый свет, их надо перевести из основного состояния с $m = 1$ в возбужденное так, чтобы их электроны поднялись хотя бы на 3-й энергетический уровень. Тогда они, испустив фотон с наименьшей энергией, могут опуститься с 3-го на 2-й уровень, поэтому испущенный фотон будет соответствовать видимому красному свету.

Для перевода атомов в возбужденное состояние их можно разогнать так, чтобы, столкнувшись, они возбудились. Для этого атомам надо сообщить тепловую энергию не менее $2\overline{E}_\text{к}$, где $\overline{E}_\text{к}$ – средняя кинетическая энергия атома. Из молекулярной физики мы знаем, что

$$\overline{E}_\text{к} = \frac{3}{2}kT,$$

где k – постоянная Больцмана.

Эта энергия $2\overline{E}_\text{к}$ и пойдет на поглощение атомом энергии

$$hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

необходимой для перевода электрона с уровня $m = 1$ на уровень $n = 3$, откуда его переход на второй уровень приведет к испусканию видимого света. С учетом этого по закону сохранения энергии

$$2\frac{3}{2}kT = hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \text{ откуда } \boxed{T = \frac{hR}{3k}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Произведем вычисления:

$$T = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}3 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right)K = 4{,}7 \cdot 10^4\ K.$$

Ответ: $T = 4{,}7 \cdot 10^4\ K$.

Задача 4

Лазер мощностью $P_1 = 2$ кВт в течение $t_1 = 2$ с излучает $N = 300$ импульсов света. Длительность каждого импульса $t_2 = 4$ мкс. На излучение идет $\eta = 0{,}3\%$ потребляемой энергии. Найти мощность P_2 и энергию E_2 одного импульса.

Дано:
$P_1 = 2$ кВт
$t_1 = 2$ с
$N = 300$
$t_2 = 4$ мкс
$\eta = 0{,}3\%$

P_2 – ?
E_2 – ?

Решение. КПД лазера равен отношению световой энергии E_1, излучаемой им в течение времени t_1, ко всей потребляемой лазером за это время энергии E_0, выраженному в %:

$$\eta = \frac{E_1}{E_0}100\%.$$

Отсюда энергия $E_1 = \dfrac{\eta E_0}{100\%}$, где

$$E_0 = P_1 t_1, \text{ поэтому } E_1 = \frac{\eta P_1 t_1}{100\%}. \qquad (1)$$

Разделив энергию E_1 на количество импульсов N, излученных за время t_1, найдем энергию E_2 одного импульса:

$$E_2 = \frac{E_1}{N} \text{ или с учетом (1) } \boxed{E_2 = \frac{P_1 t_1 \eta}{N \cdot 100\%}}$$

Мощность P_2 одного импульса определим отношением его энергии E_2 ко времени излучения каждого импульса t_2:

$$\boxed{P_2 = \frac{E_2}{t_2}}$$

Переведем все единицы в СИ:
2 кВт = $2 \cdot 10^3$ Вт, 4 мкс = $4 \cdot 10^{-6}$ с.

Произведем вычисления:

$$E_2 = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0{,}3}{300 \cdot 100} = \text{Дж} = 0{,}04 \text{ Дж}.$$

$$P_2 = \frac{0{,}04}{4 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^4 \text{ Вт} = 10 \text{ кВт}.$$

Ответ: $E_2 = 0{,}04$ Дж, $P_2 = 10$ кВт.

Задача 5

Расходимость лазерного излучения $\varphi = 1$ мрад (миллирадиан). За один импульс продолжительностью $t = 0{,}8$ мкс лазер излучает $E = 800$ мДж световой энергии. Найти плотность потока излучения I_s на расстоянии $r = 8$ м от лазера.

Дано:
$r = 8$ м
$\varphi = 1$ мрад
$t = 0{,}8$ мкс
$E = 800$ мДж

I_s – ?

Решение. Расходимостью излучения называют плоский угол φ при вершине осевого сечения светового конуса (рис. 23-3).

Из рис. 23-3 следует, что радиус в основании светового конуса

$$R = r\sin\frac{\varphi}{2} = 0{,}5r\varphi,$$

ведь при малых углах синус угла равен самому углу, выраженному в радианах.

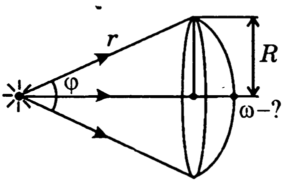


Рис. 23-3

Зная радиус R, найдем площадь S, на которую падает световой поток Φ:

$$S = \pi R^2 = \pi(0{,}5r\varphi)^2. \qquad (1)$$

Нам надо определить плотность потока излучения I_s (точнее, поверхностную плотность потока). Она равна отношению светового потока излучения Φ к площади освещаемой поверхности S:

$$I_s = \frac{\Phi}{S}. \qquad (2)$$

В свою очередь, световой поток Φ равен отношению световой энергии E ко времени излучения t:

$$\Phi = \frac{E}{t}. \qquad (3)$$

Подставив (1) и (3) в (2), мы ответим на вопрос задачи:

$$\boxed{I_s = \frac{E}{\pi t(0{,}5r\varphi)^2}}$$

Переведем все единицы в СИ:

1 мрад = $1 \cdot 10^{-3}$ рад, 0,8 мкс = $8 \cdot 10^{-7}$ с,
800 мДж = 0,8 Дж.

Произведем вычисления:

$$I_в = \frac{0{,}8}{3{,}14 \cdot 8 \cdot 10^{-7}(0{,}5 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 10^{-3})^2} \frac{Вт}{м^2} = 1{,}8 \cdot 10^{10} \frac{Вт}{м^2}.$$

Ответ: $I_в = 1{,}8 \cdot 10^{10}$ Вт/м².

Задача 6

Наибольшая длина волны излучения в видимой части спектра водорода $\lambda_{мах} = 0{,}66$ мкм. Найти длины волн λ_1, λ_2 и λ_3 ближайших трех линий в видимой части спектра водорода.

Дано:
$\lambda_{мах} = 0{,}66$ мкм
$R = 3{,}2 \cdot 10^{15}\ \frac{1}{с}$
$c = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{м}{с}$

λ_1 – ?
λ_2 – ?
λ_3 – ?

Здесь R – постоянная Ридберга.

Решение. Для решения задачи необходимо знать номер n энергетического уровня, соответствующего максимальной длине волны излучения в видимой части спектра атома водорода (напомним, что максимальной длине волны соответствует красная линия спектра).

Возбужденный атом водорода излучает видимый свет, когда его электрон опускается с более высоких на второй энергетический уровень. Самым близким ко второму уровню, очевидно, является третий уровень. Когда электрон опускается с этого уровня на второй, то излучается минимальная порция световой энергии. Минимальной порции энергии E_{min} соответствует и минимальная частота ν_{min}, ведь по формуле Планка

$$E_{min} = h\nu_{min}.$$

А минимальной частоте ν_{min} соответствует максимальная длина λ_{max}, поскольку длина волны обратно пропорциональна частоте ν:

$$\lambda_{max} = \frac{c}{\nu_{min}}.$$

Следовательно, уровнем, при переходе с которого на второй уровень испускается максимальная длина волны λ_{max}, является третий энергетический уровень. Тремя ближайшими к нему уровнями являются четвертый ($n_1 = 4$), пятый ($n_2 = 5$) и шестой ($n_3 = 6$).

При переходе с четвертого уровня ($n_2 = 4$) на второй будет испущен видимый свет с частотой ν_1, которая согласно формуле Бальмера равна:

$$\nu_1 = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Этой частоте соответствует длина волны

$\lambda_1 = \dfrac{c}{\nu_1}$, поэтому $\boxed{\lambda_1 = \dfrac{c}{R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n_1^2}\right)}}$

Следующая ближайшая длина волны λ_2 соответствует переходу электрона с пятого энергетического уровня ($n_2 = 5$) на второй, поэтому, рассуждая аналогично, мы можем написать:

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{c}{R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n_2^2}\right)}}$$

И последняя ближайшая длина волны λ_3 соответствует переходу электрона с шестого энергетического уровня ($n_3 = 6$) на второй, поэтому

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{c}{R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{n_3^2}\right)}}$$

Задача в общем виде решена.

Переведем все единицы в СИ: 0,66 мкм = $6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$\lambda_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}2 \cdot 10^{15}\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{4^2}\right)} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$\lambda_2 = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}2 \cdot 10^{15}\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{5^2}\right)} \text{ м} = 4{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$\lambda_3 = \frac{3 \cdot 10^8}{3{,}2 \cdot 10^{15}\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{6^2}\right)} \text{ м} = 4{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 5{,}0 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda_2 = 4{,}5 \cdot 10^{-7}$ м, $\lambda_3 = 4{,}2 \cdot 10^{-7}$ м.

Задача 7

Какую наименьшую скорость v должен иметь электрон, ударяющийся об атом водорода и возбуждающий его так, что в спектре излучения этого атома появляются линии всех возможных серий? Каков потенциал возбуждения $U_{возб}$ этого атома?

Дано:
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$R = 3{,}2 \cdot 10^{15}\ \frac{1}{с}$
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{м}{с}$
$m = 1$
$n = \infty$

v – ?
$U_{возб}$ – ?

Здесь m_e – масса электрона, e – модуль его заряда, R – постоянная Ридберга, h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме.

Решение. Для того чтобы возбужденный ударом атом водорода излучил все возможные линии спектра, нужно ему при ударе сообщить извне такую энергию ΔE, которой хватит для перевода его электрона с нижнего энергетического уровня с номером $m = 1$ на уровень $n = \infty$. Если атому сообщить извне еще большую энергию, то электрон покинет атом, вырвавшись за пределы действия сил притяжения к ядру. Если же энергия, переданная атому извне, будет меньше величины ΔE, то его электрон не достигнет уровня $n = \infty$ и излучение не будет содержать всех линий спектра.

Таким образом, мы знаем номера начального m и конечного n энергетических уровней электрона в атоме водорода, и значит, можем определить энергию ΔE, необходимую для перевода атома в такое возбужденное состояние. По формуле Планка

$$\Delta E = h\nu, \text{ где } \nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

поэтому

$$\Delta E = hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Такую энергию ΔE должен иметь электрон, налетающий на атом водорода и возбуждающий его своим ударом. Поэтому

$$\Delta E = \frac{m_e v^2}{2} \quad \text{или} \quad hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{m_e v^2}{2},$$

откуда

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2hR}{m_e}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)}}$$

Мы определили одну искомую величину. Теперь, чтобы определить потенциал возбуждения атома водорода $U_{возб}$, т. е. разность потенциалов, которую должен пролететь электрон во внешнем электрическом поле перед ударом об атом водорода, чтобы своим ударом возбудить его, сообщив энергию ΔE, приравняем кинетическую энергию электрона $\frac{m_e v^2}{2}$ работе разгоняющего его электрического поля A (будем считать, что электрон разгоняется из состояния покоя, ведь нам ничего не сказано о его начальной скорости):

$$\frac{m_e v^2}{2} = A \text{, где } A = eU_{возб},$$

поэтому $\frac{m_e v^2}{2} = eU_{возб}$, откуда $\boxed{U_{возб} = \frac{m_e v^2}{2e}}$

Подставим числа и произведем вычисления:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{15}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right)}\ \frac{м}{с} = 2{,}2 \cdot 10^6\ \frac{м}{с},$$

$$U_{возб} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}(2{,}2 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ В = 13{,}8\ В.$$

Ответ: $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с, $U_{возб} = 13{,}8$ В.

Задача 8

Для ионизации атома водорода требуется энергия $\Delta E = 14$ эВ. Ионизировать атом можно ударом электрона, разогнанного внешним электрическим полем, или облучением электромагнитной волной. Определить потенциал ионизации $U_{ион}$ этого атома, а также минимальную длину λ_{min} электромагнитной волны, способной ионизировать этот атом.

Дано:
$\Delta E = 14$ эВ
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$

$U_{ион}$ – ?
λ_{min} – ?

Здесь e – модуль заряда электрона, h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме.

Решение. Чтобы электрон, разогнанный внешним электрическим полем до энергии ΔE, ионизировал своим ударом атом водорода, нужно, чтобы работа электрического поля $A_{поля}$, разгоняющего его, была как минимум равна этой энергии:

$$A_{поля} = \Delta E \text{, где } A_{поля} = eU_{ион},$$

поэтому $eU_{\text{ион}} = \Delta E$, откуда $\boxed{U_{\text{ион}} = \dfrac{\Delta E}{e}}$

Чтобы электромагнитное излучение, которым облучают атом, смогло его ионизировать, нужно, чтобы энергия кванта электромагнитной волны была равна ΔE. По формуле Планка

$\Delta E = h\nu_{max}$, где максимальная частота волны

$\nu_{\max} = \dfrac{c}{\lambda_{\min}}$, поэтому $\Delta E = h\dfrac{c}{\lambda_{\min}}$, откуда $\boxed{\lambda_{\min} = \dfrac{hc}{\Delta E}}$

Задача в общем виде решена. Переведем единицу энергии в СИ:

14 эВ = $14 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж = $2{,}24 \cdot 10^{-18}$ Дж.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$U_{\text{ион}} = \frac{2{,}24 \cdot 10^{-18}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\ \text{В} = 14\ \text{В},$$

$$\lambda_{\min} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2{,}24 \cdot 10^{-18}}\ \text{м} = 8{,}9 \cdot 10^{-8}\ \text{м}.$$

Ответ: $U_{\text{ион}} = 14$ В, $\lambda_{\min} = 8{,}9 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 9

Электрон разогнали из состояния покоя в электрическом поле при напряжении $U = 100$ В. Чему равна длина волны де Бройля λ_e этого электрона?

Дано:
$v_0 = 0$
$U = 100$ В
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

λ_e – ?

Решение. Длина волны де Бройля электрона определяется равенством

$$\lambda_e = \frac{h}{m_e v}, \qquad (1)$$

где v – скорость электрона, разогнанного электрическим полем, сообщившим ему кинетическую энергию

$$E_к = \frac{m_e v^2}{2}. \qquad (2)$$

При этом электрическое поле совершило работу

$$A = eU. \qquad (3)$$

Приравняв (2) и (3), найдем скорость электрона v, необходимую нам для определения длины волны де Бройля:

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU, \text{ откуда } v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (1): $\lambda_e = \dfrac{h}{m_e\sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}}$ или $\boxed{\lambda_e = \dfrac{h}{\sqrt{2m_e eU}}}$

Проверим единицу полученной величины:

$$[\lambda_e]_{си} = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг \cdot Кл \cdot В}} = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг \cdot Кл \cdot \dfrac{Дж}{Кл}}} = \frac{Дж \cdot с}{\sqrt{кг \cdot Дж}} =$$

$$= \sqrt{\frac{Дж^2 \cdot с^2}{кг \cdot Дж}} = \sqrt{\frac{Дж \cdot с^2}{кг}} = \sqrt{\frac{Н \cdot м \cdot с^2}{кг}} =$$

$$= \sqrt{\frac{кг\dfrac{м}{с^2} \cdot м \cdot с^2}{кг}} = \sqrt{м^2} = м\,.$$

Напомним, что $В = \dfrac{Дж}{Кл}$, $Дж = Н \cdot м$ и $Н = кг\dfrac{м}{с^2}$.

Произведем вычисления:

$$\lambda_e = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}}\ м = 2{,}3 \cdot 10^{-10}\ м.$$

Ответ: $\lambda_e = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 10

При какой температуре T длина волны де Бройля атомарного водорода $\lambda_2 = 8 \cdot 10^4$ фм?

Дано:
$\lambda_2 = 8 \cdot 10^4$ фм
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \dfrac{Дж}{К}$

T – ?

Здесь m – масса атома водорода, k – постоянная Больцмана.

Решение. Длину волны де Бройля атома водорода определим по формуле $\lambda_e = \dfrac{h}{mv}$. (1)

Здесь v – скорость атома, которую он приобрел при температуре T. При этом его средняя кинетическая энергия $\dfrac{mv^2}{2}$ равна $\dfrac{3}{2}kT$:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT \text{, откуда } v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (2)$$

Нам осталось подставить (2) в (1) и из полученного выражения определить температуру T. Проделаем эти действия:

$$\lambda_e = \frac{h}{m\sqrt{\frac{3kT}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}.$$

Отсюда $3mkT = \left(\frac{h}{\lambda_e}\right)^2$ и $\boxed{T = \frac{1}{3mk}\left(\frac{h}{\lambda_e}\right)^2}$

Переведем в СИ единицу λ:

$8 \cdot 10^4$ фм $= 8 \cdot 10^{-11}$ м.

Напомним, что 1 фм (фемтометр) $= 1 \cdot 10^{-15}$ м.

Произведем вычисления:

$$T = \frac{1}{1{,}67 \cdot 10^{27} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot 10^{-11}}\right)^2 \text{ К} = 1 \cdot 10^3 \text{ К}.$$

Ответ: $T = 1 \cdot 10^3$ *К*.

Задача 11

Неопределенность радиуса электрона r на первой боровской орбите с $n = 1$ в атоме водорода $\Delta r = 0{,}01\ r$. Найти отношение неопределенности проекции импульса электрона Δp_r на его радиус к импульсу электрона p на орбите.

Дано:
$\Delta r = 0{,}01\ r$
$n = 1$

$\frac{\Delta p_r}{p}$ – ?

Решение. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга неопределенность радиуса орбиты электрона Δr связана с неопределенностью его импульса Δp_r выражением $\Delta r \cdot \Delta p_r = \hbar$, откуда $\Delta p_r = \frac{\hbar}{\Delta r}$. (1)

Здесь $\hbar$ – постоянная Планка «с черточкой».

Импульс электрона на орбите $p = m_e v$, где его скорость $v = \frac{e^2}{2\varepsilon_2 nh}$ (см. решение задачи 1).

С учетом этого $$p = \frac{m_e e^2}{2\varepsilon_2 nh}. \qquad (2)$$

Радиус орбиты электрона r (см. решение задачи 1)

$$r = \frac{\varepsilon_0 (nh)^2}{\pi m_e e^2}. \qquad (3)$$

Теперь найдем отношение $\Delta p_r/p$, подставив в него (1), (2) и (3) с учетом равенств $\Delta r = 0{,}01\, r$ и $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$:

$$\frac{\Delta p_r}{p} = \frac{\hbar}{\Delta r p} = \frac{h\pi m_e e^2 \cdot 2\varepsilon_0 nh}{2\pi \cdot 0{,}01\varepsilon_0 (nh)^2 m_e e^2},$$

откуда

$$\boxed{\frac{\Delta p_r}{p} = \frac{100}{n}}$$

При $n = 1$ $\dfrac{\Delta p_r}{p} = 100.$

Ответ: $\dfrac{\Delta p_r}{p} = 100.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти радиус второй боровской орбиты r в атоме водорода и скорость электрона на ней.

Ответ: $r = 2 \cdot 10^{-10}$ м, $\upsilon = 1 \cdot 10^{6}$ м/с.

Задача 2. Насколько кинетическая энергия электрона на третьей боровской орбите меньше, чем на второй?

Ответ: $\Delta E_к = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Задача 3. Найти кинетическую $E_к$, потенциальную $E_п$ и полную E энергии электрона, находящегося на второй орбите в атоме водорода.

Ответ: $E_к = 3{,}4$ эВ, $E_п = -6{,}8$ эВ, $E = -3{,}4$ эВ.

Задача 4. Во сколько раз изменяется энергия атома водорода при переходе электрона с первой стационарной орбиты на третью?

Ответ: увеличивается в 9 раз.

Задача 5. Найти угловую скорость ω электрона, находящегося на ближайшей возможной к ядру орбите в атоме водорода.

Ответ: $\omega = \dfrac{\pi m_e e^4}{2\varepsilon_0^2 (nh)^3} = 4{,}4 \cdot 10^{16}\ \dfrac{рад}{с}$.

Задача 6. Во сколько раз длина волны излучения атома водорода при переходе электрона с третьей орбиты на вторую больше длины волны, обусловленной переходом электрона со второй орбиты на первую?

Ответ: $\dfrac{\lambda_{3\to 2}}{\lambda_{2\to 1}} = 5{,}4.$

Задача 7. Какие спектральные линии появятся при возбуждении водорода ударами электронов с энергией $E = 12{,}1$ эВ?

Ответ: $\lambda_{31} = \dfrac{c}{R\left(\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{3^2}\right)} = 1{,}03 \cdot 10^{-7}$ м,

$$\lambda_{21} = \frac{c}{K\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)} = 1{,}21 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

$$\lambda_{32} = \frac{c}{K\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 6{,}56 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Задача 8. Найти номер орбиты n, с которой при переходе электрона на вторую орбиту атом водорода излучает свет с длиной волны $\lambda = 4{,}87 \cdot 10^{-5}$ см.

Ответ: $n = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{c}{\lambda R}}} = 4.$

Задача 9. Определить наибольшую длину волны λ_{max} спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Ответ: $\lambda_{max} = \dfrac{c}{K\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)} = 6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м, $m = 2$, $n = 3$.

Задача 10. Найти первый потенциал возбуждения однократно ионизированного атома гелия ($Z = 2$).

Ответ: $U_{возб} = \dfrac{3}{4} Z^2 \dfrac{hR}{e} = 40{,}8$ В.

Задача 11. Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появилась линия с наибольшей длиной волны $\lambda_{max} = 1{,}21 \cdot 10^{-7}$ м в ультрафиолетовой области спектра водорода? Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $v_{min} = \sqrt{\dfrac{2hR}{m_e}\left(\dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2}\right)} = 2 \cdot 10^6$ м/с.

Задача 12. Найти потенциал ионизации $U_{ион}$ однократно ионизированного гелия ($Z = 2$).

Ответ: $U_{ион} = \dfrac{Z^2 hR}{e} = 54{,}4$ В.

Задача 13. Определить наибольшую длину волны λ_{max} спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Ответ: $\lambda_{max} = \dfrac{c}{R\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)} = 6{,}56 \cdot 10^{-7}$ м, $m = 2$, $n = 3$.

Задача 14. Какую минимальную энергию E_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

Ответ: $E_{min} = hR\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right) = 10{,}2$ эВ, $m = 1$, $n = 2$.

Задача 15. Найти длину волны λ фотона, излучаемого при переходе электрона со второй орбиты на первую в однократно ионизированном атоме гелия ($Z = 2$).

Ответ: $\lambda = \dfrac{c}{ZR\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)} = 3 \cdot 10^{-8}$ м.

Задача 16. При работе лазера в импульсном режиме энергия одного импульса излучения $E = 50$ мДж. Найти число импульсов излучения N, произведенных за время $t_1 = 1$ с, если мощность, потребляемая лазером, $P_1 = 1{,}5$ кВт, а его КПД $\eta = 0{,}2\%$. Какова длительность импульса t_2, если его мощность $P_2 = 2$ кВт.

Ответ: $N = \dfrac{P_1 t_1 \eta}{E \cdot 100\%} = 60$, $t_2 = \dfrac{E}{P_2} = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$ с.

Задача 17. Газовый лазер, работая в режиме непрерывного излучения, дает свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Найти число фотонов N, излучаемых им за время $t = 2$ с, если мощность излучения $P = 50$ мВт.

Ответ: $N = \dfrac{\lambda P t}{hc} = 1{,}3 \cdot 10^{17}$.

Задача 18. Определить длину волны де Бройля λ_e электрона на первой боровской орбите в атоме водорода.

Ответ: $\lambda = \dfrac{e^2}{2m_e\varepsilon_0 n} = 3{,}3 \cdot 10^{-10}$ м.

Задача 19. Определить длину волны де Бройля λ_e атомов водорода при температуре $T = 1 \cdot 10^3$ K.

Ответ: $\lambda_e = \dfrac{h}{\sqrt{3mkT}} = 8 \cdot 10^{-11}$ м.

Задача 20. Электрон может находиться на второй боровской орбите атома водорода в течение $\Delta t = 1$ нс. Чему равна неопределенность его энергии ΔE (т. е. ширина второго энергетического уровня)?

Ответ: $\Delta E = \dfrac{\hbar}{\Delta t} = 1{,}04 \cdot 10^{-25}$ Дж.

24. ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА

Краткая теория. Методические указания к решению задач

Ядро атома состоит из элементарных частиц двух типов: нейтральных – нейтронов и положительно заряженных – протонов. Нейтроны обозначают ${}_0^1n$, а протоны ${}_1^1p$ или ${}_1^1H$. Протоны и нейтроны называют также нуклонами.

Количество протонов в ядре обозначают буквой Z, а количество нейтронов – буквой N. Сумма числа протонов Z и числа нейтронов N в ядре называется массовым числом ядра A. Таким образом,

$$A = Z + N.$$

Очевидно, что массовое число A – безразмерная величина.

Массу ядер в ядерной физике часто обозначают M (не перепутайте с молярной массой), а массу частиц – m.

В ядерной физике из-за исключительной малости размеров ядер и элементарных частиц введена единица длины – ферми или фемтометр (сокр. фм):

$$1 \text{ фм} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$$

В качестве единицы массы принята атомная единица массы (сокр. а.е.м), равная массе 1/12 части атома углерода:

$$1 \text{ а.е.м} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Атомной единице массы соответствует энергия E

$E = mc^2 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16}$ Дж $= 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж $= 931$ МэВ, поскольку 1 МЭВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж.

В некоторых книгах при обозначении атома элемента число всех нуклонов A пишут слева вверху символа, обозначающего этот элемент, а число протонов Z – слева внизу. Например, запись

$${}_{11}^{23}Na$$

означает, что это ядро атома натрия и оно содержит всего 23 нуклона, в числе которых 11 протонов, и значит, 23 – 11 = 12 нейтронов.

Таким образом, запись ${}_Z^AX$ означает, что элемент X с массовым числом A содержит в ядре Z протонов и $A - Z$ нейтронов.

Теперь откройте таблицу Менделеева и внимательно посмотрите на нее (откройте, не ленитесь). Запомните: порядковый номер элемента – это число протонов в его ядре. Другая цифра в соответствующей клетке таблицы Менделеева, та, которая больше (она записана в виде десятичной дроби), будучи округленной до целого числа, равна массовому числу A этого элемента. Запись в восьмой клетке таблицы Менделеева ${}_{15{,}9994}^{\quad\;\;8}O$ (т. е. здесь наоборот, массовое число расположено внизу, а зарядовое – вверху) означает, что ядро кислорода содержит $Z = 8$ протонов, а его массовое число $A = 16$, и значит, в его ядре $N = 16 - 8 = 8$ нейтронов (A всегда больше Z).

Масса нейтрона больше массы протона.

Массы ядер и элементарных частиц приводятся в соответствующих справочных таблицах. Такие таблицы имеются и в конце вашего школьного задачника.

Может возникнуть вопрос: если массовое число А по смыслу всегда должно быть целым числом, то почему в таблице Менделеева оно дробное, т. е. записано в виде десятичной дроби, ведь не может быть половинки протона или четвертушки нейтрона. Дело в том, что в природе существуют атомы одного и того же элемента, имеющие в своих ядрах одинаковое число протонов, но разное число нейтронов. В связи с этим они помещаются в одной и той же клетке таблицы Менделеева и имеют одинаковые химические свойства, но разные радиоактивные. Такие атомы называются изотопами. Изотопы есть у всех элементов таблицы Менделеева. Химически чистое вещество всегда представляет собой смесь изотопов данного элемента, которые содержатся в нем в разных пропорциях, поэтому массовое число элемента является дробным.

Не следует путать массовое число с атомной массой элемента. Атомной массой называют отношение массы атома данного элемента к 1/12 массы атома углерода ${}^{12}_{6}C$, тогда как массовое число – это число нуклонов в ядре. Атомная масса измеряется в а.е.м., а в СИ – в кг, тогда как массовое число – величина безразмерная.

У водорода известны три изотопа: ${}^{1}_{1}H$, ${}^{2}_{1}H$ и ${}^{3}_{1}H$. Изотоп ${}^{1}_{1}H$ – это обычный водород, ядром которого является только один протон. Изотоп водорода ${}^{2}_{1}H$ называется дейтерием. В его ядре имеются один протон и один нейтрон. Изотоп ${}^{3}_{1}H$ называется тритием. В его ядре, кроме одного протона, имеются еще и два нейтрона.

Между нуклонами ядра действуют самые мощные силы природы – ядерные силы, обеспечивающие связь нуклонов ядра друг с другом (если бы этих сил не было, то протоны, входящие в состав ядра, немедленно разлетелись бы под действием кулоновых сил отталкивания). Энергией связи $E_{св}$ ядра называют минимальную энергию, которая необходима для полного расщепления ядра на отдельные нуклоны без сообщения им кинетической энергии. При этом всегда масса ядра $M_{ядра}$, которое распалось на отдельные нуклоны, оказывается меньше суммы масс этих нуклонов. Разница между массой ядра и суммарной массой нуклонов, на которые оно распалось, называется дефектом массы атомного ядра ΔM.

Если масса каждого протона m_p, а масса каждого нейтрона m_n и ядро распалось на Z протонов и N нейтронов, то дефект массы

$$\Delta M = Zm_p + Nm_n - M_{ядра}.$$

Энергия связи $E_{св}'$ атомного ядра согласно формуле, устанавливающей взаимосвязь массы и энергии $E = mc^2$, связана с дефектом массы ΔM соотношением

$$E_{св} = \Delta Mc^2 \text{ или } E_{св} = (Zm_p + Nm_n - M_{ядра})c^2.$$

Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

Подчеркнем, что если в этой формуле массы протона, нейтрона и ядра выражены в килограммах, а скорость света – в метрах в секунду, то энергия связи $E_{св}$ будет измерена в джоулях. Однако в физике атома и атомного ядра энергию ядер и элементарных частиц чаще выражают в мегаэлектрон-вольтах (МэВ):

$$1 \text{ МэВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Решая соответствующие задачи, можно получить энергию связи в джоулях, а затем, если требуется, перевести ее в мегаэлектрон-вольты, разделив полученное число джоулей на $1{,}6 \cdot 10^{-13}$. Но гораздо проще получить значение энергии связи в мегаэлектронвольтах, если оставить массы протона, нейтрона и ядра выраженными в атомных единицах массы и умножить дефект массы ΔM не на c^2, а на число 931. Тогда получим

$E_{св} = 931\,\Delta M$ или $E_{св} = 931\,(Zm_p + Nm_n - M_{ядра})$ МэВ.

Это связано с тем, что одной атомной единице массы соответствует энергия связи 931 МэВ.

Для характеристики прочности ядра используется величина, которая называется удельной энергией связи $\varepsilon_{св}$. Удельная энергия связи $\varepsilon_{св}$ определяется отношением энергии связи $E_{св}$ к массовому числу ядра атома A:

$$\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A}.$$

Иными словами, удельная энергия связи равна энергии связи ядра, приходящейся на один нуклон.

Чем меньше удельная энергия связи, тем менее прочным является ядро. Элементы конца таблицы Менделеева имеют малую энергию связи, поэтому они обладают свойством радиоактивности. Они самопроизвольно распадаются с образованием новых элементов и излучают при этом α- и β-частицы, а также гамма-лучи. Такая радиоактивность является естественной в отличие от искусственной, вызванной воздействием человека на ядра атомов.

Альфа-частицами, излучаемыми ядром атома при альфа-распаде, являются ядра газа гелия. Их символ ${}^4_2He$, и значит, они содержат два протона и два нейтрона.

Бета-частицами, излучаемыми ядром при бета-распаде, являются быстрые электроны, летящие с околосветовой скоростью. Их символ ${}^{0}_{-1}e$, что означает наличие у них отрицательного заряда и отсутствие массового числа.

Гамма-лучами являются электромагнитные волны с очень короткой длиной волны, порядка $10^{-10} - 10^{-13}$ м. Их символ γ, т. е. у них нет ни зарядового, ни массового числа.

Напомним еще раз символы некоторых ядер и частиц:

${}^1_1H$ или ${}^1_1p$ – протон (ядро водорода), ${}^2_1H$ – дейтерий, ${}^3_1H$ – тритий (все – изотопы водорода), ${}^4_2He$ – альфа-частица (ядро гелия), ${}^1_0n$ – нейтрон, ${}^{0}_{-1}e$ – бета-частица (электрон), ${}^{0}_{+1}e$ – позитрон (антиэлектрон – частица с массой электрона, но имеющая положительный заряд), γ – гамма-квант.

В процессе радиоактивного распада количество ядер исходного элемента непрерывно уменьшается. Время T, за которое распадается половина исходного количества ядер N_0, называется периодом полураспада. Каждый элемент таблицы Менделеева имеет свой период полураспада, величину которого можно определить с помощью справочника.

Величина a, равная количеству ядер, распадающихся за единицу времени, называется активностью радиоактивного элемента. Если в начальный момент времени имелось N_0 ядер данного радиоактивного элемента, а по прошествии времени t их осталось N, то активность a может быть определена выражением

$$a = \frac{N_0 - N}{t} = \frac{\Delta N}{t}, \text{ где } \Delta N = N_0 - N.$$

Число N оставшихся через время t ядер данного элемента можно определить по закону радиоактивного распада

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

где N_0 – число ядер в момент времени $t = 0$ и T – период полураспада данного элемента.

Активность радиоактивного препарата в процессе распада ядер непрерывно уменьшается по закону, аналогичному закону радиоактивного распада:

$$a = a_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Здесь a_0 – активность в начальный момент времени, a – активность через время t, T – период полураспада радиоактивного элемента.

Процессы радиоактивного распада сопровождаются превращением одних элементов таблицы Менделеева в другие. При этом выполняются законы сохранения зарядового и массового чисел: массовое (или зарядовое) число исходного элемента равно суммарному массовому (зарядовому) числу продуктов распада. Следствием этих законов является правило смещения:

а) каждый акт альфа-распада сопровождается образованием нового элемента, массовое число которого на 4 меньше массового числа исходного элемента, а зарядовое число меньше на 2, поэтому новый элемент смещается относительно исходного на две клетки таблицы Менделеева к ее началу. Если исходный элемент обозначить X, а конечный – Y, то правило смещения применительно к альфа-распаду выглядит так: ${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$;

б) каждый акт бета-распада сопровождается образованием нового элемента, массовое число которого равно массовому числу исходного элемента, а зарядовое число на 1 больше зарядового числа исходного элемента, поэтому новый элемент смещается относительно исходного на одну клетку к концу таблицы Менделеева. Правило смещения применительно к бета-распаду может быть записано так: ${}^{A}_{Z}X \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{-1}e$.

Гамма-излучение не сопровождается образованием новых элементов.

Процессы взаимодействия ядер элементов друг с другом или с элементарными частицами, приводящие к образованию новых элементов или новых частиц, называют ядерными реакциями. Ядерные реакции подчиняются закону сохранения импульса и закону сохранения энергии. Ядерные реакции, протекающие с выделением энергии, называются экзотермическими, а ядерные реакции, протекающие с поглощением энергии, – эндотермическими.

Энергетическим выходом ядерной реакции ΔW называется разность между суммарной энергией покоя ядер и частиц до и после реакции.

Если сумма масс покоя частиц и ядер до реакции равна $\sum\limits_{i=1}^{N_1} M_{i1}$, сумма масс покоя частиц и ядер после реакции равна $\sum_{i=1}^{N_2} M_{i2}$, то энергетический выход реакции

$$\Delta W = c^2\left(\sum_{i=1}^{N_1} M_{i1} - \sum_{i=1}^{N_2} M_{i2}\right).$$

Если масса ядер и частиц выражена в килограммах, а скорость света c – в метрах в секунду, то энергетический выход ΔW будет измеряться в джоулях. Если же необходимо получить энергетический выход ядерной реакции измеренным в мегаэлектрон-вольтах, то предыдущая формула примет вид:

$$\Delta W = 931\left(\sum_{i=1}^{N_1} M_{i1} - \sum_{i=1}^{N_2} M_{i2}\right) \text{МэВ}.$$

Здесь массы ядер и частиц должны быть измерены в атомных единицах массы.

Очевидно, что если энергетический выход ядерной реакции положителен, т. е. энергия покоя взаимодействующих частиц и ядер до реакции превосходит энергию покоя ядер и частиц, образовавшихся в результате реакции, то реакция протекает с выделением энергии, т. е. является экзотермической, а если наоборот, то эндотермической.

При облучении вещества α, β и γ-частицами происходит возбуждение или ионизация атомов вещества. При этом сами частицы могут тормозиться, что сопровождается рентгеновским излучением. Кроме того, частицы могут упруго и неупруго соударяться с атомами вещества. Все это может привести к изменению свойств облучаемого вещества и к отрицательному воздействию на живые организмы.

Наибольшей проникающей способностью обладают нейтроны и γ-кванты, так как они нейтральны, поэтому легко проникают к ядрам атомов, представляя наибольшую опасность.

В дозиметрии различают поглощенную и эквивалентную дозы.

Поглощенная доза D равна энергии радиоактивного излучения, поглощенного единицей массы вещества:

$$D = \frac{E}{m}.$$

Здесь E – энергия излучения и m – масса вещества.

Единица поглощенной дозы в СИ – грей (Гр):

$$1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}.$$

Для характеристики биологического воздействия на организм используется коэффициент качества излучения или коэффициент относительной биологической активности (ОБЭ) k. Для γ-квантов $k = 1$, для тепловых нейтронов $k = 3$, для нейтронов с энергией порядка 0,5 Мэв $k = 10$.

Эквивалентная доза H равна произведению коэффициента качества излучения и поглощенной дозы:

$$H = kD.$$

Единица эквивалентной дозы в СИ – зиверт (Зв). 1 зиверт – это эквивалентная доза, при которой поглощенная доза равна 1 Гр при коэффициенте качества $k = 1$.

Естественный фон составляет 2 мЗв за год.
Предельно допустимая доза (ПДД) 5 мЗв за год:
5 мЗв = 0,1 ПДД при 1 ПДД = 50 мЗв за год.

При дозе 0,5–1 Зв – острое лучевое поражение организма, при 3–5 Зв – смертельный исход.

Допустимая доза облучения за среднее время жизни человека (70 лет) составляет 0,35 Зв.

Решение отдельных задач

Задача 1

Найти удельную энергию связи $\varepsilon_{св}$ ядра $^{16}_{8}O$. Масса ядра $M_{ядра}$ = 15,99052 а.е.м., масса одного протона m_p = = 1,00783 а.е.м., масса нейтрона m_n = 1,00866 а.е.м.

Дано:
$A = 16$
$Z = 8$
m_p = 1,00783 а.е.м.
m_n = 1,00866 а.е.м.
$M_{ядра}$ = 15,99052 а.е.м.

$\varepsilon_{св}$ – ?

Здесь A – массовое число изотопа кислорода $^{16}_{8}O$, Z – его зарядовое число.

Решение. Напомним, что удельной энергией связи называют энергию связи, приходящуюся на один нуклон. Поэтому удельная энергия $\varepsilon_{св}$ связи ядра может быть определена отношением всей энергии связи $E_{св}$, т. е. энергии связи, приходящейся на все нуклоны ядра, к их общему количеству, т. е. к массовому числу A:

$$\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A}.$$

Энергию связи ядра $E_{св}$ (по модулю) можно определить по формуле

$$E_{св} = 931(Zm_p + Nm_n - M_{ядра}) \text{ МэВ}.$$

Здесь $N = A - Z$ – число нейтронов в ядре. Напомним, что здесь массы протона, нейтрона и ядра следует оставить выраженными в атомных единицах массы (а.е.м.), и тогда мы получим энергию связи $E_{св}$, выраженную в мегаэлектрон-вольтах (МэВ).

С учетом этого $E_{св} = 931(Zm_p + (A - Z)m_n - M_{ядра})$ МэВ.

Подставив это выражение в первую формулу, получим

$$\boxed{\varepsilon_{св} = \frac{931(Zm_p + (A - Z)m_n - M_{ядра})}{A}}$$

Задача в общем виде решена. Очевидно, что единицей измерения здесь будет $\frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}$.

Отметим, что в некоторых справочных таблицах приводятся не массы ядер, а массы изотопов элементов. В этом случае для нахождения массы ядер следует вычесть из массы изотопа массу всех его электронов, умножив их количество на массу покоя одного электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Количество электронов в нейтральном атоме равно количеству протонов в его ядре, т. е. тоже равно зарядовому числу Z или порядковому номеру элемента в таблице Менделеева.

Подставим числа в полученное выражение для $\Delta\varepsilon_{св}$ и произведем вычисления:

$$\varepsilon_{св} = 931 \frac{8 \cdot 1{,}00783 + (16 - 8) \cdot 1{,}00866 - 15{,}99052}{16} \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}} =$$

$$= 8{,}2 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}}.$$

Ответ: $\varepsilon_{св}$ = 8,2 МэВ/нуклон.

Задача 2

Масса атома хлора M = 35,5 а.е.м. Хлор имеет два изотопа: ${}^{35}_{17}Cl$ с массой атома M_1 = 35 а.е.м. и ${}^{37}_{17}Cl$ с массой атома M_2 = 37 а.е.м. Найти их процентное содержание.

Дано:
$M = 35{,}5$
$M_1 = 35$
$M_2 = 37$

$\frac{N_1}{N}$ – ?

$\frac{N_2}{N}$ – ?

Обозначим N некоторое количество атомов хлора, N_1 – количество изотопов хлора ${}^{35}_{17}Cl$ в общем количестве N, N_2 – количество изотопов ${}^{37}_{17}Cl$ в этом же количестве N, $\frac{N_1}{N}$, $\frac{N_2}{N}$ – относительное содержание изотопов ${}^{35}_{17}Cl$ и ${}^{37}_{17}Cl$.

Решение. Здесь следует сообразить, что сумма произведений массы атома M_1 на относительное содержание $\frac{N_1}{N}$ изотопов хлора ${}^{35}_{17}Cl$ и массы атома M_2 на относительное содержание $\frac{N_2}{N}$ изотопов хлора ${}^{37}_{17}Cl$ есть масса M: $\quad M_1\frac{N_1}{N} + M_2\frac{N_2}{N} = M.$

Так как $N_2 = N - N_1$, то $M_1 \frac{N_1}{N} + M_2 \frac{N - N_1}{N} = M$.

Отсюда найдем относительное содержание $\frac{N_1}{N}$ изотопов хлора $^{35}_{17}Cl$ в их смеси с изотопами $^{37}_{17}Cl$, выраженное в частях, а затем, умножив полученное отношение $\frac{N_1}{N}$ на 100%, получим искомое процентное содержание этих изотопов:

$$M_1 \frac{N_1}{N} + M_2\left(1 - \frac{N_1}{N}\right) = M.$$

$$\frac{N_1}{N}(M_1 - M_2) = M - M_2, \quad \boxed{\frac{N_1}{N} = \frac{M_2 - M}{M_2 - M_1} 100\%}$$

Мы нашли одну искомую величину. Очевидно, что, отняв ее от 100%, мы определим процентное содержание $\frac{N_2}{N}$ изотопов $^{37}_{17}Cl$, выраженное тоже в процентах:

$$\boxed{\frac{N_2}{N} = 100\% - \frac{N_1}{N}}$$

Все полученные величины будут выражены в процентах. Подставим числа и произведем вычисления:

$$\frac{N_1}{N} = \frac{37 - 35{,}5}{37 - 35} 100\% = 75\%,$$

$$\frac{N_2}{N} = 100\% - 75\% = 25\%.$$

Ответ: $\frac{N_1}{N} = 75\%$, $\frac{N_2}{N} = 25\%$.

Задача 3

Какая доля радиоактивных ядер некоторого элемента распадается за время t, равное половине периода полураспада?

Дано:	
$t = \frac{T}{2}$	Обозначим ΔN количество ядер, распавшихся за время t, N_0 – первоначальное количество ядер (т. е. в момент $t = 0$), T – период полураспада элемента.
$\frac{\Delta N}{N_0}$ – ?	

Решение. Количество ΔN распавшихся за время $t = \frac{T}{2}$ ядер равно разности первоначального количества ядер N_0 и количества ядер N, оставшихся нераспавшимися через время t от начала отсчета времени распада: $\Delta N = N_0 - N$.

Количество нераспавшихся ядер N связано со временем распада t и периодом полураспада T законом радиоактивного распада $\Delta N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{T}}}$, где $t = \frac{T}{2}$, поэтому

$$N = \frac{N_0}{2^{\frac{T}{2T}}} = \frac{N_0}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{N_0}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $\Delta N = N_0 - \frac{N_0}{\sqrt{2}} = N_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, откуда

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}29.$$

Задача решена.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N_0} = 0{,}29$.

Задача 4

Активность радиоактивного препарата уменьшилась в четыре раза за $t = 8$ дней. Найти период полураспада T этого препарата.

Дано:
$\frac{a_0}{a} = 4$
$t = 8$ дней
T – ?

Обозначим a_0 активность препарата в начальный момент времени, a – активность препарата через t дней.

Решение. Напомним, что активностью a радиоактивного препарата называется величина, равная числу распадающихся ядер в единицу времени. В отличие от периода полураспада, который для данного препарата постоянная величина, активность с течением времени убывает.

Пусть вначале за единицу времени распадалось a_0 ядер препарата, а через время t стало распадаться в единицу времени a ядер. Тогда согласно закону убывания активности

$$a = a_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

откуда $$\frac{a_0}{a} = 2^{\frac{t}{T}}.$$

Отсюда определим период полураспада T, выполнив логарифмирование:

$$\lg \frac{a_0}{a} = \frac{t}{T} \lg 2, \quad \boxed{T = t \frac{\lg 2}{\lg \frac{a_0}{a}}}$$

Задача в общем виде решена. Подставим числа и выполним вычисления:

$$T = 8 \cdot \frac{\lg 2}{\lg 4} \text{ дней} = 4 \text{ дня}.$$

Ответ: $T = 4$ дня.

Задача 5

При бомбардировке азота $^{14}_{7}N$ альфа-частицами $^{4}_{2}He$ образовался изотоп кислорода $^{17}_{8}O$ и еще одна частица. Какая еще частица возникла в результате этой ядерной реакции? Какая это реакция: экзотермическая или эндотермическая? Найти энергетический выход ΔW этой реакции.

Решение. Сначала запишем уравнение реакции, воспользовавшись законами сохранения заряда и массы. Согласно этим законам суммарное массовое число ядер и частиц, вступающих в реакцию, равно суммарному массовому числу ядер и частиц – продуктов реакции, и то же самое можно сказать о суммарном зарядовом числе ядер и частиц до и после реакции. Согласно условию задачи имеет место реакция

$$^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{?}_{?}X.$$

Здесь $^{?}_{?}X$ – неизвестная частица, возникшая в результате реакции.

Определим ее зарядовое число. Суммарное зарядовое число азота и альфа-частицы равно $7 + 2 = 9$, а зарядовое число кислорода, образовавшегося в результате реакции, равно 8, следовательно, зарядовое число неизвестной частицы равно $9 - 8 = 1$. Аналогичным образом определим ее массовое число. Суммарное массовое число исходного ядра кислорода и альфа-частицы, вступающих в реакцию, равно $14 + 4 = 18$, а массовое число продукта реакции – кислорода – равно 17, значит, массовое число искомой частицы равно $18 - 17 = 1$. Элементарной частицей с зарядовым и массовым числами, равными 1, является протон ${}^1_1H$. Таким образом, наша реакция может быть записана так:

$$ {}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H . $$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, нужно определить суммарную энергию покоя ядра азота и альфа-частицы, вступающих в реакцию, и суммарную энергию покоя ядра кислорода и протона – продуктов реакции, а затем сравнить эти величины. И если суммарная энергия азота и альфа-частицы, вступивших в реакцию, больше суммарной энергии кислорода и протона – продуктов реакции, то реакция идет с выделением энергии, т. е. является экзотермической, а если меньше, то эндотермической.

Суммарная энергия покоя азота и альфа-частицы выраженная в мегаэлектрон-вольтах,

$$ W_1 = 931(M_{{}^{14}_{7}N} + M_{{}^{4}_{2}He}) . $$

Здесь $M_{{}^{14}_{7}N}$ – масса покоя ядра азота, $M_{{}^{4}_{2}He}$ – масса покоя альфа-частицы. Напоминаем, что обе эти массы должны быть выражены в атомных единицах массы.

Суммарная энергия покоя кислорода и протона, выраженная тоже в мегаэлектрон-вольтах,

$$ W_2 = 931(M_{{}^{17}_{8}O} + M_{{}^{1}_{1}H}) . $$

Здесь $M_{{}^{17}_{8}O}$ – масса покоя ядра кислорода, $M_{{}^{1}_{1}H}$ масса покоя протона, тоже выраженные в атомных единицах массы.

Теперь обратите внимание, что в вашем школьном задачнике и в других изданиях приведены массы не ядер, а массы атомов элементов, в величину которых, кроме масс ядер, входит и масса их электронных оболочек. Можно, конечно, исключить массы электронов, составляющих эти оболочки, поскольку масса покоя электрона нам тоже известна, а их количество равно количеству протонов в ядрах элементов, т. е. их порядковому номеру в таблице Менделеева. Тем не менее мы этого делать не будем, поскольку масса всех электронов, составляющих электронные оболочки азота и гелия (ядром которого является альфа-частица), равна общей массе всех электронов кислорода и водорода (ядром которого является протон), и значит, при вычитании из общей массы азота и альфа-частицы общей массы кислорода и водорода массы электронов скомпенсируются и останется разность масс покоя только ядер этих элементов.

Итак, массы названных элементов согласно справочным данным

$$M_{^{14}_{7}N} = 14{,}00307 \text{ а.е.м.}, \quad M_{^{4}_{2}He} = 4{,}00260 \text{ а.е.м.},$$

$$M_{^{17}_{8}O} = 16{,}99913 \text{ а.е.м.}, \quad M_{^{1}_{1}H} = 1{,}00783 \text{ а.е.м.}$$

Теперь найдем суммарную энергию азота и гелия W_1, а также кислорода и водорода W_2:

$W_1 = 931 \cdot (14{,}00307 + 4{,}00260)$ а.е.м. $= 16763{,}4$ МэВ,

$W_2 = 931 \cdot (16{,}99913 + 1{,}00783)$ а.е.м. $= 16764{,}5$ МэВ.

Таким образом, мы видим, что суммарная энергия покоя W_1 ядер, вступивших в реакцию, меньше суммарной энергии покоя W_2 ядер – продуктов реакции. Значит, эта реакция протекает с поглощением энергии, т. е. является эндотермической.

Энергетический эффект реакции, т. е. разность между энергиями W_1, и W_2,

$\Delta W = (16764{,}5 - 16763{,}4)$ МэВ $= 1{,}1$ МэВ.

Еще раз повторим, что при вычитании из энергии W_2 энергии W_1 массы электронных оболочек, а значит, и их энергетический вклад в энергию покоя атомов, скомпенсировались.

Задача решена.

Ответ: в результате реакции выделится протон, реакция эндотермическая, $\Delta W = 1{,}1$ МэВ.

Задача 6

Какая масса m урана $^{235}_{92}U$ расходуется за сутки на атомной электростанции мощностью $P = 5000$ кВт с КПД $\eta = 17\%$, если при каждом акте деления выделяется энергия $\Delta W_1 = 200$ МэВ? Сравнить полученный результат с суточным расходом m_1 каменного угля тепловой электростанцией той же мощности при КПД $\eta = 75\%$. Теплотворная способность каменного угля $q = 2{,}93 \cdot 10^7$ Дж/кг.

Дано:
$t = 1$ сут
$P = 5000$ кВт
$\Delta W_1 = 200$ МэВ
$\eta = 17\%$
$\eta_1 = 75\%$
$q = 2{,}93 \cdot 10^7 \dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}}$
$M = 0{,}235 \dfrac{\text{кг}}{\text{моль}}$

m – ?
m_1 – ?

Обозначим t время работы электростанции (как атомной, так и на каменном угле), M – молярную массу урана.

Решение. Масса урана m, расходуемая в сутки, больше массы одного атома $m_{ат}$ в N раз, где N – число атомных ядер, испытавших деление в течение суток:

$$m = Nm_{ат}.$$

Массу одного атома урана $m_{ат}$ найдем, разделив молярную массу урана M (т. е. массу всех атомов в одном моле) на число Авогадро N_A (т. е. на число атомов урана в одном моле):

$$m_{ат} = \frac{M}{N_A}.$$

Тогда масса всех N ядер, распавшихся за время t,

$$m = N\frac{M}{N_A}.$$

Число ядер урана N, распавшихся за время t, найдем, разделив всю выделенную за сутки энергию ΔW на энергию ΔW_1, выделяющуюся при делении одного ядра урана:

$$N = \frac{\Delta W}{\Delta W_1}.$$

С учетом этого $m = N\dfrac{M}{N_A} = \dfrac{\Delta W M}{\Delta W_1 N_A}$.

Наконец, всю энергию ΔW, выделившуюся за время t, найдем из формулы КПД η: $\eta = \dfrac{A}{\Delta W}100\%$, где $A = Pt$, поэтому $\eta = \dfrac{Pt}{\Delta W}100\%$, откуда $\Delta W = \dfrac{Pt}{\eta}100\%$.

Тогда окончательно получим

$$\boxed{m = \frac{PtM}{\Delta W_1 N_A \eta}100\%}$$

Теперь найдем массу m_1 угля, который надо сжечь за такое же время t, чтобы иметь тепловую электростанцию той же мощности. Когда сожгут m_1 угля, то выделится количество теплоты $Q = m_1 q$.

При этом КПД электростанции

$$\eta_1 = \frac{A}{Q}100\% \quad \text{или} \quad \eta_1 = \frac{Pt}{m_1 q}100\%,$$

откуда

$$\boxed{m_1 = \frac{Pt}{q\eta_1}100\%}$$

Задача в общем виде решена. Переведем все единицы в СИ:

1 сут = $24 \cdot 3600$ с = 86400 с, 5000 кВт = $5 \cdot 10^6$ Вт, 200 МэВ = $200 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж = $3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж.

Подставим числа и произведем вычисления:

$$m = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 86400 \cdot 0{,}235 \cdot 100}{17 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-11} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot} \text{ кг} = 0{,}031 \text{ кг},$$

$$m_1 = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 86400 \cdot 100}{75 \cdot 2{,}93 \cdot 10^7} \text{ кг} = 2 \cdot 10^4 \text{ кг}.$$

Ответ: $m = 0{,}031$ кг, $m_1 = 2 \cdot 10^4$ кг.

Задача 7

При захвате ядром лития ${}^6_3Li$ медленного нейтрона ${}^1_0n$ образуется изотоп водорода – тритий ${}^3_1H$.

Реакция экзотермическая с выделением энергии $\Delta E = 5{,}6$ МэВ. Какая еще частица образуется в результате этой реакции? Какая энергия E_1 приходится на ядро трития, а какая E_2 – на эту частицу? Кинетическими энергиями ядра лития и нейтрона до реакции можно пренебречь.

Дано:
$\Delta E = 5{,}6$ МэВ
$M_1 = 3$ а.е.м.
$M_2 = 4$ а.е.м.
E_1 – ?
E_2 – ?

Обозначим M_1 и M_2 – массы атома трития и альфа-частицы соответственно.

Решение. Запишем соответствующую условию задачи ядерную реакцию:

$${}^6_3Li + {}^1_0n \to {}^3_1H + {}^4_2He.$$

Определяя, что в результате реакции образуется альфа-частица ${}^4_2He$, мы исходили из закона сохранения суммарного зарядового числа до и после реакции (оно равно 3) и суммарного массового числа (оно равно 7).

Поскольку кинетическими энергиями частиц до реакции мы пренебрегаем, их суммарный импульс равен 0, значит, суммарный импульс частиц – продуктов реакции – тоже равен нулю:

$$0 = M_1v_1 + M_2v_2, \qquad (1)$$

где v_1 – скорость трития, а v_2 – скорость альфа-частицы.

Энергия ΔE, выделившаяся в результате реакции, равна сумме кинетических энергий E_1 и E_2 трития ${}^3_1H$ и альфа-частицы ${}^4_2He$, образовавшихся в результате реакции:

$$\Delta E = E_1 + E_2, \qquad (2)$$

где $E_1 = \dfrac{M_1v_1^2}{2}$ и $E_2 = \dfrac{M_2v_2^2}{2}$, поэтому

$$\Delta E = \frac{M_1v_1^2}{2} + \frac{M_2v_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Из (1) $$v_2 = -\frac{M_1 v_1}{M_2}. \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$\Delta E = \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 M_1^2 v_1^2}{2M_2^2} = \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_1^2 v_1^2}{2M_2} =$$

$$= E_1 + E_1 \frac{M_1}{M_2} = E_1\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) = E_1 \frac{M_1 + M_2}{M_2}.$$

Отсюда $$\boxed{E_1 = \frac{\Delta E M_2}{M_1 + M_2}}$$

Из (2) найдем E_2: $\boxed{E_2 = \Delta E - E_1}$

Произведем вычисления:

$$E_1 = \frac{5{,}6 \cdot 4}{3+4} \text{ МэВ} = 3{,}2 \text{ МэВ},$$

$E_2 = (5{,}6 - 3{,}2)$ МэВ $= 2{,}4$ МэВ.

Ответ: $E_1 = 3{,}2$ МэВ, $E_2 = 2{,}4$ МэВ.

Задача 8

Изотоп урана $^{235}_{92}U$, испытав ряд радиоактивных превращений, превратился в свинец $^{207}_{82}Pb$. Сколько альфа- и бета-распадов произошло при этом?

Решение. При бета-распаде массовое число элемента не меняется, а меняется только при альфа-распаде, так как при каждом таком распаде выделяется альфа-частица и, значит, массовое число уменьшается на 4. Согласно условию массовое число при превращении урана в свинец уменьшилось на 235 − 207 = 28, значит, произошло 28:4 = 7 альфа-распадов. При этом зарядовое число уменьшилось на 7 · 2 = 14. Соответствующая реакция может протекать так:

$$^{235}_{92}U \to {}^{207}_{78}Pt + 7\,^{4}_{2}He.$$

Образовавшаяся платина $^{207}_{78}Pt$ должна превратиться в свинец $^{207}_{82}Pb$. Это возможно после четырех бета-распадов:

$$^{207}_{78}Pt \to {}^{207}_{82}Pb + 4\,^{0}_{-1}e.$$

Таким образом, здесь имели место 7 альфа-распадов и 4 бета-распада, значит, всего 11 распадов.

Ответ: 11 распадов.

Задача 9

При бомбардировке железа $^{56}_{26}Fe$ нейтронами образуется бета-радиоактивный изотоп марганца $^{56}_{25}Mn$. Напишите соответствующие реакции.

Решение.

$$^{56}_{26}Fe + ^{1}_{0}n \to ^{56}_{25}Mn + ^{1}_{1}H, \quad ^{56}_{25}Mn \to ^{56}_{26}Fe + ^{0}_{-1}e.$$

Задача 10

При прохождении слоя защитного покрытия толщиной h гамма-излучение ослабевает в 2 раза. Доказать, что при прохождении слоя толщиной nh излучение ослабевает в 2^n раз. Здесь n – целое число. Чему будет при этом равна энергия излучения E, если до прохождения покрытия она была равна E_0?

Решение. Когда лучи проникнут сквозь покрытие толщиной h, их энергия уменьшится вдвое и станет равна $\frac{E_0}{2}$. Если лучи проникнут сквозь покрытие толщиной $2h$, их энергия уменьшится в 4 раза, т. е. в 2^2, и станет равна $\frac{E_0}{2^2}$. Когда лучи проникнут сквозь покрытие толщиной 3 h, их энергия уменьшится в 2^3 раза и станет равна $\frac{E_0}{2^3}$. Значит, когда гамма-лучи проникнут сквозь покрытие толщиной nh, их энергия уменьшится в 2^n раза и станет равна $\frac{E_0}{2^n}$.

Задача решена.

Ответ: $E = \frac{E_0}{2^n}$.

Задача 11

Гамма-излучение лучше всего поглощает свинец. Толщина слоя половинного ослабления γ-лучей у свинца $h = 2$ см. Какой толщины H нужен слой свинца, чтобы ослабить γ-излучение в 128 раз?

Дано:
$h = 2$ см
$\frac{E_0}{E} = 128$

H – ?

Решение. При прохождении слоя толщиной h энергия γ-лучей ослабнет в 2 раза, а при прохождении слоя толщиной H она ослабнет в 128 раз = 2^7 раза. Согласно решению предыдущей задачи $H = nh$ и $\frac{E_0}{E} = 2^n$, значит, $n = 7$.

Произведем вычисления:
$H = 7 \cdot 2$ см $= 14$ см.
Ответ: $H = 14$ см.

Задача 12

Средняя доза, поглощенная врачом, работающим с рентгеновской установкой, $D_1 = 14$ мкГр за $t_1 = 2$ ч. Не заболеет ли врач, работающий 200 дней в году по $t_2 = 4$ ч в день, если предельно допустимая доза $D_{пред} = 50$ мГр в год.

Дано:
$D_1 = 14$ мкГр
$t_1 = 2$ ч
$N = 200$
$t_2 = 4$ ч
$D_{пред} = 50$ мГр
$t_3 = 1$ год

D_2 – ?

Решение. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти поглощенную врачом дозу D_2 за $t_3 = 1$ год и сравнить ее с ПДД $D_{пред} = 50$ мГр. И если D_2 окажется больше $D_{пред}$, то врач заболеет, а если нет, то будет здоров.

Будем рассуждать так: в году врач работает $N = 200$ дней по $t_2 = 4$ ч каждый день, значит, за год у него насчитывается Nt_2 рабочих часов. За время $t_1 = 2$ ч он поглощает дозу D_1, а за 1 час – $\frac{D_1}{t_1}$.

Следовательно, доза, поглощенная врачом за Nt_2 часов,

$$\boxed{D_2 = \frac{D_1 N t_2}{t_1}}$$

Произведем вычисления:

$$D_2 = \frac{14 \cdot 200 \cdot 4}{2} \text{ мкГр} = 5600 \text{ мкГр} = 5{,}6 \text{ мГр}.$$

Поскольку ПДД $D_{пред} = 50$ мГр, значит, за год врач получит почти в десять раз меньшую дозу и из-за этого он не заболеет.

Ответ: не заболеет.

Задача 13

Мощность экспозиционной дозы вблизи Чернобыльской АЭС достигает $\frac{x}{t} = 200$ мкР/ч (микрорентген в час). Во сколько раз радиоактивное излучение превосходит ПДД для населения $H_{доп} = 5$ мЗв/год. Экспозиционной дозе $X = 1$ Р (рентген) соответствует поглощенная доза 8,8 мГр.

Дано:

$\frac{x}{t} = 200 \frac{мкР}{ч}$

$\frac{H_{доп}}{t} = 5 \frac{мЗв}{год}$

$\frac{x}{D_{доп}}$ – ?

Обозначим X экспозиционную дозу, равная заряду, возникающему в единице массы окружающего воздуха: $X = \frac{q}{m}$, а $\frac{x}{t}$ – мощность экспозиционной дозы.

Решение. Поскольку экспозиционной дозе X = 1 Р соответствует поглощенная доза 8,8 мГр, то 1 мкР соответствуют $8{,}8 \cdot 10^{-6}$ мГр, а 200 мкР соответствуют $200 \cdot 8{,}8 \cdot 10^{-6}$ мГр $= 1{,}76 \cdot 10^{-3}$ мГр.

Эквивалентной дозе 5 мЗв соответствует поглощенная доза 5 мГр (применительно к γ-излучению). Таким образом, мощности экспозиционной дозы $\frac{x}{t} = 200 \frac{мкР}{ч}$ соответствует мощность поглощенной дозы

$$\frac{D}{t} = 1{,}76 \cdot 10^{-3} \frac{мГр}{ч}.$$

Мощности эквивалентной дозы $H = 5 \frac{мЗв}{год}$ соответствует мощность допустимой поглощенной дозы

$$\frac{D_{доп}}{t} = 5 \frac{мГр}{год} = \frac{5}{12 \cdot 30 \cdot 24} \frac{мГр}{ч} = 5{,}8 \cdot 10^{-4} \frac{мГр}{ч}.$$

Тогда $\frac{X}{D_{доп}} = \frac{D}{D_{доп}} = \frac{1{,}76 \cdot 10^{-3}}{5{,}8 \cdot 10^{-4}} = 3.$

Ответ: в 3 раза.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Какая минимальная энергия E_{min} необходима для расщепления ядра азота $^{14}_{7}N$ на протоны и нейтроны без придания им кинетической энергии? Масса атома изотопа азота $^{14}_{7}N$ m_N = 14,00307 а.е.м., масса изотопа водорода $^{1}_{1}H$ m_H = = 1,00783 а.е.м., масса нейтрона m_n = 1,00877 а.е.м.

Ответ: $E_{min} = 931(Zm_H + (A - Z)m_n - m_N)$ = 105 МэВ.

Задача 2. В какой элемент превращается уран $^{239}_{92}U$ после двух β-распадов и одного α-распада? Напишите соответствующие ядерные реакции.

Задача 3. При бомбардировке изотопа бора $^{10}_{5}B$ α-частицами образуется изотоп азота $^{13}_{7}N$. Какая при этом выбрасывается частица? Написать реакцию позитронного распада радиоактивного изотопа азота $^{13}_{7}N$.

Задача 4. Какая энергия ΔE выделяется при термоядерной реакции $^{2}_{1}H + ^{3}_{1}H \to ^{4}_{2}He + ^{1}_{0}n$? Массы изотопов и частиц $m_{^{2}_{1}H} = 2{,}01410$ а.е.м., $m_{^{3}_{1}H} = 3{,}01605$ а.е.м, $m_{He} = 4{,}00260$ а.е.м., $m_n = 1{,}00866$ а.е.м.

Ответ: $\Delta E = 931\ (m_{^{2}_{1}H} + m_{^{3}_{1}H}) - (m_{He} + m_n)) = 17{,}6$ МэВ.

Задача 5. Поглощая фотон с длиной волны $\lambda = 4{,}7 \cdot 10^{-13}$ м, дейтрон $^{2}_{1}H$ распадается на протон $^{1}_{1}H$ и нейтрон $^{1}_{0}n$. Вычислить суммарную кинетическую энергию $E_к$ образовавшихся частиц, считая дейтрон покоящимся. Массы частиц = $m_{^{2}_{1}H} = 2{,}01410$ а.е.м., $m_n = 1{,}00866$ а.е.м., $m_{^{1}_{1}H} = 1{,}00783$ а.е.м.

Ответ: $E_к = 931(m_{^{2}_{1}H} - (m_{^{1}_{1}H} + m_n)) = 0{,}4$ МэВ.

Задача 6. Сколько атомов эманации радия (радона) распадается за сутки (t = 1 сут) из N_0 = 1 млн атомов? Период полураспада радона T = 3,82 сут.

Ответ: $\Delta N = N_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) = 133\,000.$

Задача 7. Какая энергия ΔE выделяется при ядерной реакции $^{7}_{3}Li + ^{2}_{1}H \to ^{8}_{4}Be + ^{1}_{0}n$? Массы изотопов и частиц: $m_{Li} = 7{,}01601$ а.е.м., $m_H = 2{,}01410$ а.е.м., $m_{Be} = 8{,}00531$ а.е.м., $m_n = 1{,}00866$ а.е.м.

Ответ: $\Delta E = c^2((m_{Li} + m_H) - (m_{Be} + m_n)) = 15$ МэВ.

Задача 8. Какую минимальную энергию E_{min} должна иметь α-частица для осуществления ядерной реакции $^{7}_{3}Li + ^{4}_{2}He \to ^{10}_{5}B + ^{1}_{0}n$? Массы изотопов и частиц: $m_{Li} = 7{,}01601$ а.е.м., $m_{He} = 4{,}00260$ а.е.м., $m_B = 10{,}01294$ а.е.м., $m_n = 1{,}00866$ а.е.м.

Ответ: $E_{min} = 2{,}8$ МэВ.

Задача 9. В какой элемент превращается радиоактивный изотоп $^{8}_{3}Li$ после одного β- и одного α-распада.

Ответ: в гелий.

Задача 10. Сколько процентов радиоактивных ядер кобальта $\left(\frac{N}{N_0} - ?\right)$ останется через t = 1 мес, если период полураспада кобальта T = 71 день?

Ответ: $\dfrac{N}{N_0} = \dfrac{1}{\sqrt[T]{2^t}} 100\% = 75\%$.

Задача 11. При бомбардировке азота $^{14}_{7}N$ нейтронами $^{1}_{0}n$ образуется новое ядро и выбрасывается протон $^{1}_{1}H$. Полученное ядро оказывается β-радиоактивным. Написать уравнение реакций.

Задача 12. Выделяется или поглощается энергия при реакции $^{7}_{3}Li + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{10}_{5}B + ^{1}_{0}n$?

Массы соответствующих изотопов и частиц:

$m_{Li} = 7{,}01601$ а.е.м., $m_{He} = 4{,}00260$ а.е.м., $m_B = 10{,}01294$ а.е.м., $m_n = 1{,}00866$ а.е.м.

Ответ: $\Delta E = 931((m_{Li} + m_{He}) - (m_B + m_n)) = -2{,}8$ МэВ – поглощается.

Задача 13. При аннигиляции электрона $^{0}_{-1}e$ и позитрона $^{0}_{+1}e$ образовались два одинаковых γ-кванта. Найти длину волны λ, пренебрегая кинетической энергией частиц до реакции. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Ответ: $\lambda = \dfrac{h}{m_e c} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м.

Задача 14. При делении одного ядра $^{235}_{92}U$ на два осколка выделяется около $\Delta E_1 = 200$ МэВ энергии. Какое количество энергии ΔE освобождается при «сжигании» в ядерном реакторе $m = 1$ г этого изотопа? Какое количество каменного угля m_1 надо сжечь для получения такого же количества энергии? Молярная масса урана $M = 0{,}235$ кг/моль.

Ответ: $\Delta E = \Delta E_1 \dfrac{m}{M} N_A = 8{,}2 \cdot 10^{10}$ Дж, $m_1 = \dfrac{\Delta E}{q} = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг.

Задача 15: Найти энергию связи $\varepsilon_{св}$, приходящуюся на один нуклон, в ядре $^{7}_{3}Li$.

Масса атома изотопа лития $m_{Li} = 7{,}01601$ а.е.м., масса атома изотопа водорода $m_H = 1{,}00783$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1{,}00866$ а.е.м.

Ответ: $\varepsilon_{св} = 931 \dfrac{Zm_H + (A - Z)m_n - m_{Li}}{A} = 5{,}6$ МэВ.

Задача 16. Написать недостающие обозначения в следующих ядерных реакциях:

$^{65}_{30}Zn + ^{1}_{0}n \rightarrow ? + ^{4}_{2}He$, $^{14}_{7}N + ^{1}_{1}H \rightarrow ? + ^{1}_{0}n$,

$? + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{24}_{12}Mg + ^{4}_{2}He$, $^{27}_{13}Al + \gamma \rightarrow ^{23}_{11}Na + ?$

Задача 17. Какова электрическая мощность P атомной электростанции, расходующей за $t = 1$ сут массу $m = 220$ г изотопа $^{235}_{92}U$ и имеющей КПД $\eta = 25\%$? При одном акте деления $^{235}_{92}U$ выделяется $\Delta E_1 = 200$ МэВ энергии.

Ответ: $P = \dfrac{m\Delta E_1 N_A \eta}{tM100\%} = 5{,}3 \cdot 10^7$ Вт.

Задача 18. Сколько процентов ядер радиоактивного элемента останется через время t, если период его полураспада T?

Ответ: $\dfrac{N}{N_0} = 2^{-\frac{t}{T}} \cdot 100\%$.

Задача 19. Сколько процентов ядер радиоактивного элемента распадется за время t, если период его полураспада T?

Ответ: $\dfrac{\Delta N}{N} = \left(1 - 2^{-\frac{t}{T}}\right) 100\%$.

Задача 20. Какая энергия выделится при термоядерной реакции ${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n$?

Ответ: $\Delta E = 17{,}6$ МэВ.

Задача 21. Толщина слоя половинного ослабления нейтронного излучения водой $h = 3$ см. Во сколько раз ослабит поток нейтронов слой воды толщиной $H = 9$ см?

Ответ: в 8 раз.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные единицы СИ:

масса – килограмм (кг),
путь, перемещение, длина, амплитуда – метр (м),
время, период – секунда (с),
температура – кельвин (К),
количество вещества – моль (моль),
сила тока – ампер (А),
сила света – кандела (кд).

Дополнительные единицы:

фаза, плоский угол – радиан (рад),
телесный угол – стерадиан (ср).

Некоторые производные единицы:

площадь – метр в квадрате ($м^2$),
объем – метр в кубе ($м^3$),
скорость – метр в секунду (м/с),
ускорение – метр в секунду за секунду ($м/с^2$),
угловая скорость, циклическая скорость – радиан в секунду (рад/с),
частота колебаний – герц ($Гц = с^{-1}$),
гравитационная постоянная – ньютон на метр в квадрате, деленный на килограмм в квадрате ($Н \cdot м^2/кг^2$),
сила, вес – ньютон ($Н = кг \cdot м/с^2$),
момент силы – ньютон на метр ($Н \cdot м$),
жесткость – ньютон на метр (Н/м)
давление, модуль упругости (модуль Юнга) – паскаль ($Па = Н/м^2$),
энергия, работа, количество теплоты – джоуль ($Дж = Н \cdot м$),
объемная плотность энергии – джоуль на метр в кубе ($Дж/м^3$),
мощность, поток энергии – ватт (Вт = Дж/с),
импульс тела – килограмм-метр на секунду ($кг \cdot м/с$),
плотность – килограмм на метр в кубе ($кг/м^3$),
импульс силы – ньютон на секунду ($Н \cdot с$),
молярная масса – килограмм на моль (кг/моль),
молярная газовая постоянная, молярная теплоемкость – джоуль на моль-кельвин ($Дж/(моль \cdot К)$),
постоянная Больцмана, теплоемкость тела – джоуль на кельвин (Дж/К),

удельная теплоемкость – джоуль на килограмм – кельвин (Дж/(кг · К)),

удельные теплота плавления, теплота парообразования, теплота сгорания – джоуль на килограмм (Дж/кг),

заряд – кулон (Кл = А · с)

напряженность электрического поля – вольт на метр (В/м или Н/Кл),

электрическая постоянная – фарад на метр (Ф/м),

потенциал, напряжение, ЭДС – вольт (В = Дж/Кл),

электроемкость – фарад (Ф = Кл/В),

поверхностная плотность заряда – кулон на метр в квадрате (Кл/м^2),

концентрация частиц – метр в минус третьей степени (м$^{-3}$),

сопротивление – ом (Ом = В/А),

удельное сопротивление – ом на метр (Ом · м),

электропроводность – сименс (См = Ом$^{-1}$)

плотность тока – ампер на метр в квадрате (А/м^2),

индукция магнитного поля – тесла (Тл = Н/(А · м),

магнитная постоянная – генри на метр (Гн/м),

магнитный поток – вебер (Вб = Тл · м^2 или Вб = Вс),

индуктивность – генри (Гн = В · с/А или Гн = Вб/А),

плотность потока энергии (интенсивность) – ватт на метр в квадрате (Вт/м^2),

оптическая сила линзы – диоптрия (дптр = м$^{-1}$),

световой поток – люмен (лм = св · ср),

освещенность поверхности – люкс (лк = Вт/м^2),

световая эффективность – люмен на ватт (лм/Вт),

постоянная Стефана–Больцмана – джоуль на метр в квадрате–секунда-кельвин в четвертой степени (Дж/(м^2 · с · К^4)),

интегральная светимость (интегральная плотность излучения – джоуль на кельвин в кубе, деленный на метр в квадрате–секунда (Дж · К^3/м^2 · *с*)),

постоянная Вина – метр на кельвин (м · К),

постоянная Планка – джоуль на секунду (Дж · с),

постоянная Ридберга – секунда в минус первой степени или герц (Гц = с$^{-1}$),

удельная энергия связи ядра – джоуль на нуклон (Дж/нуклон),

активность радиоактивного элемента – распад в секунду (распад/с или с$^{-1}$),

поглощенная доза – грей (Гр = Дж/кг),

эквивалентная доза = зиверт (Зв),

экспозиционная доза – кулон на килограмм (Кл/кг).

Некоторые приставки для преобразования внесистемных единиц в СИ

Приставка	Числовое значение	Сокращенное обозначение	Приставка	Числовое значение	Сокращенное обозначение
Атто	10^{-18}	а	Деци	10^{-1}	д
Фемто	10^{-15}	ф	Дека	10^{1}	да
Пико	10^{-12}	п	Гекто	10^{2}	г
Нано	10^{-9}	н	Кило	10^{3}	к
Микро	10^{-6}	мк	Мега	10^{6}	М
Милли	10^{-3}	м	Гига	10^{9}	Г
Санти	10^{-2}	с	Тера	10^{12}	Т

Важнейшие физические постоянные

Ускорение свободного падения .... 9,80665 м/с^2
(при решении задач принимать .... 9,8 м/с^2)
Средний радиус Земли .... 6370 км
Масса Земли .... $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Среднее расстояние Земли от Солнца .... $1{,}5 \cdot 10^{8}$ км
Гравитационная постоянная .... $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2 $\cdot$ кг$^{-2}$
Абсолютный нуль температуры .... -273,15°C
При решении задач принимать .... -273°C
Число Авогадро .... $6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Число Лошмидта .... $2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
Заряд электрона .... $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса электрона .... $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
Число Фарадея .... $9{,}65 \cdot 10^{4}$ Кл/моль
Скорость света в вакууме .... $2{,}99793 \cdot 10^{8}$ м/с
(при решении задач принимать .... $3 \cdot 10^{8}$ м/с)
Скорость звука в воздухе при 0° .... 332 м/с
Масса протона .... $1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса нейтрона .... $1{,}6746 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Планка .... $6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с
Масса альфа-частицы ${}^{4}_{2}He$ .... $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг
или 4,00274 а.е.м.

Перевод некоторых единиц в СИ

1 Å (ангстрем) = 10^{-10} м
1 нм (нанометр) = 10^{-9} м
1 мкм (микрометр) = 10^{-6} м
1 мм (миллиметр) = 10^{-3} м
1 см (сантиметр) = 10^{-2} м
1 дм (дециметр) = 10^{-1} м

1 км (километр) = 10^{3} м
1 Мм (мегаметр) = 10^{6} м
1 Гм (гигаметр) = 10^{9} м
1 Тм (тераметр) = 10^{12} м
1 мм^2 = 10^{-6} м^2
1 см^2 = 10^{-4} м^2

1 дм^2 = 10^{-2} м^2
1 мм^3 = 10^{-9} м^3
1 см^3 = 10^{-6} м^3
1 дм^3 = 1 л = 10^{-3} м^3
1 ч = 3600 с
1 мин = 60 с
1 нс = 10^{-9} с
1 мг = 10^{-6} кг
1 г = 10^{-3} кг
1 г/см^3 = 10^3 кг/м^3
1 кПа = 1000 Па
1 мм рт. ст.= 133 Па
1 атм = 760 мм рт. ст. = 10^5 Па
1 т = 10^3 кг
1 гВт = 10^2 Вт
1 кВт = 10^3 Вт
1 МВт = 10^6 Вт
1 Мм/с = 10^6 м/с

1 м/мин = $\frac{1}{60}$ м/с

1 км/ч = $\frac{1000}{3600}$ м/с
1 кН = 10^3 Н
1 ат = 1 кгс/см^2 = $9{,}8 \cdot 10^4$ Па – техническая атмосфера
1 кал (калория) = 4,186 Дж
1 ккал (килокалория) 4186 Дж
1 нКл = 10^{-9} Кл
1 мкКл = 10^{-6} Кл
1 мКл = 10^{-3} Кл

$1\,\frac{\text{Кл}}{\text{см}^2} = 10^4\,\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

1 об/мин = $\frac{1}{60}$ об/с
1 км/с = 1000 м/с
1 кДж = 10^3 Дж
1 МДж = 10^6 Дж
1 В/см = 100 В/м
1 кВ/см = 10^5 В/м
1 мВ = 10^{-3} В
1 мкВ = 10^{-6} В
1 мА = 10^{-3} А
1 мкА = 10^{-6} А
1 Ом · мм^2/м = 10^{-6} Ом · м

Некоторые сведения из математики

Правила действия со степенями и корнями

$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$

$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

Тождества сокращенного умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ – квадрат двучлена

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ – куб двучлена

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов

Основные свойства логарифмов

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3) $\log a x^k = k \log_a x$

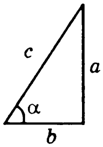
Тригонометрические функции острого угла

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$



Теорема Пифагора

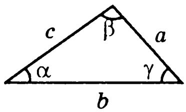
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$$

Теорема синусов

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Формулы корней квадратных уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

$\left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$	0°	30°	45°	60°	90°	180°
α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
ctg α		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Формулы приведения

α	$\alpha+\frac{\pi}{2}$	$\alpha+\pi$	$\alpha+\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
tg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} \qquad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

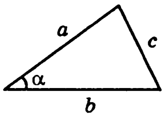
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

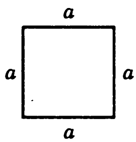
Площадь треугольника

$$S = \frac{ab}{2}\sin\alpha$$



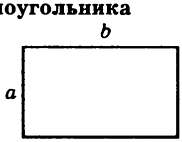
Площадь квадрата

$$S = a^2$$



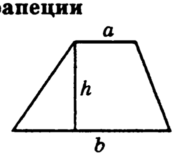
Площадь прямоугольника

$$S = ab$$



Площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2}h$$



Площадь сферы радиусом R (диаметром D)

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2, \text{ где } R = \frac{D}{2}$$

Площадь круга радиусом R (диаметром D)

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Длина окружности радиусом R (диаметром D)

$$l = 2\pi R = \pi D$$

Объем сферы радиусом R (диаметром D)

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

Объем цилиндра высотой H с радиусом основания R

$$V = \pi R^2 H$$

Объем куба со стороной a

$$V = a^3$$

Объем конуса высотой H с радиусом основания R

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Основные производные

$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = \text{const}$	$y' = 0$
$y = Ax$	$y' = A$, где A – const
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \sin Ax$	$y' = A \cos Ax$, $A = \text{const}$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \cos Ax$	$y' = -A \sin Ax$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$

$$y = \mathrm{tg}\ x \qquad\qquad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Некоторые интегралы

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad m = \mathrm{const} \neq 1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

СОДЕРЖАНИЕ

Вышли в свет

ХИМИЯ
Пособие-репетитор
для поступающих в вузы

Пособие содержит подробное изложение основ обшей, неорганической и органической химии, а также типовые задачи с решениями и большое число заданий разной степени сложности для самостоятельной работы (в том числе элективные тесты).

Второе издание данного пособия в целом сохраняет структуру и методическую концепцию первого издания. Вместе с тем в ряд разделов внесены существенные изменения и дополнения, целью которых являлось приведение содержания учебного материала в полное соответствие с новыми программами для поступающих в вузы, в частности с программой по химии для вступительных испытаний в медицинские и фармацевтические вузы.

Рекомендуется учащимся школ, гимназий и лицеев, абитуриентам химических и медико-биологических вузов.

Вышли в свет

И. Ю. Павлов, Д. В. Вахненко, Д. В. Москвичев

БИОЛОГИЯ
Пособие-репетитор
для поступающих в вузы

Настоящее издание пособия соответствует государственному образовательному стандарту по биологии и программе для поступающих в высшие учебные заведения. Книга содержит большое количество дополнительного материала, тестовые задания, вопросы для самоконтроля, задачи. Может использоваться абитуриентами, поступающими во все учебные заведения биологического профиля; на биологические и психологические факультеты университетов, в медицинские вузы, сельскохозяйственные и ветеринарные институты.

$$\lambda = \upsilon T$$
$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$$
$$\upsilon_{зв} = 340\ \frac{м}{с}$$
$$x = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}y + \alpha_0)$$
$$x = A\cos(\omega t - ky + \alpha_0)$$
$$k = \frac{\omega}{\upsilon}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\Phi = \frac{W}{t}$$
$$\omega = \frac{W}{V}$$
$$I = \frac{\Phi}{S}$$
$$I = \frac{W}{St}$$
$$I = \omega\upsilon$$
$$\Delta r = 2k\frac{\lambda}{2} = k\lambda - \max$$
$$\Delta r = (2k+1)\frac{\lambda}{2} - \min$$
$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$\upsilon_{звука\ в\ газе} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$
$$\upsilon_{звука\ в\ твердом\ теле} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$
$$L = 10\ln\frac{I}{I_0}$$
$$\alpha = \beta$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$
$$R = \frac{W_{отр}}{W_{пад}}$$

$$\alpha = \frac{W_{погл}}{W_{пад}}$$
$$\nu = \nu_0\frac{\upsilon_{волн} \pm \upsilon_{приемн.}}{\upsilon_{волн} \pm \upsilon_{источн.}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} Тл = \frac{Н}{А \cdot м} \\ Вб = Тл \cdot м^2 \\ Вб = В \cdot с \\ Гн = \frac{В \cdot с}{А} \\ Гн = \frac{Вб}{А} \quad Гц = с^{-1} \end{gathered}}$$

$$q = q_m\cos\alpha$$
$$q = q_m\cos(\omega t + \alpha_0)$$
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$
$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$u = U_m\cos(\omega t + \alpha_0)$$
$$i = -I_m\sin(\omega t + \alpha_0)$$
$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad U_m = \frac{q_m}{C}$$
$$I_m = \omega q_m$$
$$p = U_m I_m\cos^2\omega t$$
$$P = UI\cos\varphi$$
$$X_L = \omega L \qquad X_C = \frac{1}{\omega C}$$
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$
$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$
$$k = \frac{U_1}{U_2}$$
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$$
$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$$
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$
$$c = 3 \cdot 10^8\ \frac{м}{с}$$
$$\lambda = cT$$
$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$
$$T = \frac{2l}{c}$$
$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$
$$\omega_{эл\text{-}м} = \frac{W_{эл\text{-}м}}{V}$$
$$\omega_{эл\text{-}м} = \omega_{эл} + \omega_{м}$$
$$\omega_{эл\text{-}м} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0\mu}$$
$$\omega_{эл\text{-}м} = EB\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}$$
$$d\sin\varphi = k\lambda$$
$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$R = kN$$

$$\sin\alpha_{пр} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = \pm\frac{1}{F} = \pm\frac{2}{R}$$

$$\Gamma = \frac{f}{d} \qquad \Gamma = \frac{H_{изобр}}{h_{предм}}$$

$$\Gamma_{лупы} = \frac{d_0}{F} \quad d_0 = 0{,}25 \text{ м}$$

$$\pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$D = \frac{1}{F} \qquad I = \omega_{ср} c$$

$$I = \frac{\Phi}{\Omega} \qquad \Omega_0 = 4\pi$$

$$E = \frac{\Phi}{S} \qquad E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha$$

$$v = \frac{v_0 + v_1}{1 + \frac{v_0 v_1}{c^2}}$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$E = mc^2 \qquad E = E_0 + E_к$$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

$$p = \frac{Ev}{c^2} \qquad p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_к = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad p = \frac{h\nu}{c}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F = \frac{ma}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$$

$$R = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$$

$$\lambda_m = \frac{b}{T}$$

$$b = 2{,}898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

$$\varepsilon = h\nu \qquad \varepsilon = h\frac{c}{\lambda}$$

$$E = N\varepsilon$$

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\varepsilon = A_{вых} + E_к$$

$$h\nu = A_{вых} + \frac{m_e v^2}{2}$$

$$A_{вых} = h\nu_0$$

$$A_{вых} = h\frac{c}{\lambda_0}$$

$$p = \frac{W}{cSt}(1 + R)$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2\Lambda\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Lambda = 2{,}43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

$$h\nu = E_n - E_m$$

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$R = 3{,}3 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$$

$$E = -\frac{m_e e^4}{32(\pi\varepsilon_0\hbar n)^2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad \lambda = \frac{h}{mv}$$

$$\Delta x \Delta p = \hbar \qquad \Delta E \Delta t = \hbar$$

$$\nabla^2\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$$

$$S = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad s = \pm\frac{1}{2}$$

$$A = Z + N$$

$$E_{св} = 931(Zm_p + Nm_n - M)$$

$$E_{св} = (Zm_p + Nm_n - M)c^2$$

$$\Delta M = Zm_p + Nm_n - M$$

$$\varepsilon_{св} = \frac{E_{св}}{A}$$

$$a = \frac{N_0 - N}{t} = \frac{\Delta N}{t}$$

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$a = a_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$\Delta W = c^2\left(\sum_{i=1}^{N_1} M_{i1} - \sum_{i=1}^{N_2} M_{i2}\right)$$

$$\Delta W = 935\left(\sum_{i=1}^{N_1} M_{i1} - \sum_{i=1}^{N_2} M_{i2}\right)$$

$$D = \frac{E}{m}$$

$$H = kD$$

$$X = \frac{q}{m}$$

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{-1}e$$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{дптр} = \text{м}^{-1} \\ \text{Гр} = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\end{gathered}}$$