

# MATEMATIKA



11

## ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI GEOMETRIYA II QISM

Umumiy oʻrta taʼlim maktablarining 11-sinflari va oʻrta maxsus,  
kasb-hunar taʼlimi muassasalari uchun darslik

Oʻzbekiston Respublikasi Xalq taʼlimi vazirligi tomonidan tasdiqlangan

1-nashri

TOSHKENT

2018

### Algebra va analiz asoslari bo‘limining mualliflari:

**M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov**

### Geometriya bo‘limining muallifi:

**B.Q. Xaydarov**

### Taqrizchilar:

**R.B. Beshimov** – Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti “Geometriya va topologiya” kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari doktori;


**Q.S. Jumaniyozov** – Nizomiy nomidagi TDPU fizika-matematika fakulteti “Matematika o‘qitish metodikasi” kafedrasi dotsenti, pedagogika fanlari nomzodi;


**R.O. Ro‘zimov** – Sergeli tumani 237- umumta’lim maktabi matematika fani o‘qituvchisi;


**S.B. Jumaniyozova** – RTM metodisti;

**S.R. Sumberdiyeva** – Sergeli tumani 6- ixtisoslashtirilgan maktab matematika fani o‘qituvchisi.

### Darslikning “Algebra va analiz asoslari” bo‘limida ishlatilgan belgilar va ularning talqini:

 – masalani yechish (isbotlash) boshlandi

 – masalani yechish (isbotlash) tugadi

 – nazorat ishlari va test (sinov) mashqlari

 – savol va topshiriqlar

 – asosiy ma’lumot

 – murakkabroq mashqlar

# Algebra va analiz asoslari

## II BOB. INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI



### ANIQ INTEGRALNING TATBIQLARI

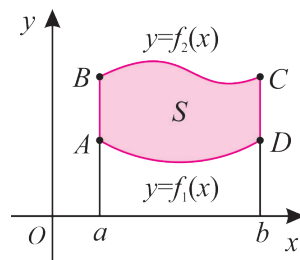
#### *Yuzlarni integrallar yordamida hisoblash*

**Masala.** Rasmdagi  $ABCD$  shakl yuzi  $S$  hisoblansin (7-rasm).

△ Ravshanki, bu shaklning  $S$  yuzi  $aBCb$  va  $aADb$  egri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining ayirmasiga teng:

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (1)$$

Javob:  $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$  ▲



7-rasm.

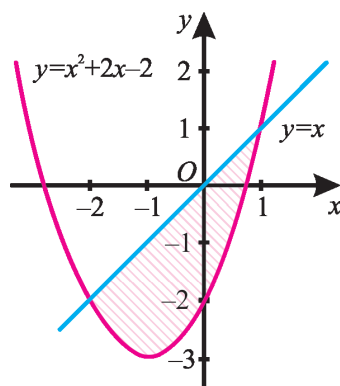
(1) formula  $f_2(x) \geq f_1(x)$  shartni qanoatlantiradigan uzluksiz funksiyalar uchun to‘g‘ridir.

**1-misol.**  $y=x$  to‘g‘ri chiziq va  $y=x^2+2x-2$  parabola bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang.

- △ 1)  $y=x$  va  $y=x^2+2x-2$  chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz:  
2)  $x^2+2x-2=x$  tenglamadan  $x_1=-2, x_2=1$ .

Demak chiziqlar  $(1; 1), (-2; -2)$  nuqtalarda kesishadi. Ravshanki,  $(-2; 1)$  oraliqda  $y=x$  funksiya grafigi  $y=x^2+2x-2$  funksiya grafigidan yuqorida yotadi (8-rasm).

U holda (1) formulada  $a=-2, b=1, f_2(x)=x, f_1(x)=x^2+2x-2$  desak, izlanayotgan yuz (1) ga ko‘ra



8-rasm.

$$S = \int_{-2}^1 (x - (x^2 + 2x - 2)) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-2}^1 = \frac{7}{6} - \left(-\frac{10}{3}\right) = 4,5.$$

Javob:  $S=4,5$  (kv.birlik). ▲

**2-misol.**  $y = \sqrt{x}$  va  $y = x^2$  chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang.

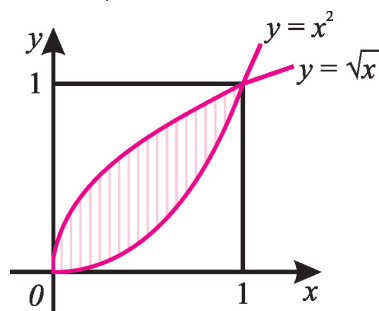
△  $x \in [0;1]$  kesmada  $x^2 \leq \sqrt{x}$  (9-rasm).

(1) formulada  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $f_1(x) = x^2$ ,

$f_2(x) = \sqrt{x}$  deymiz.

$$\text{U holda } S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (kv.birlik).}$$

Javob:  $S = \frac{1}{3}$  kv.birlik. ▲



9-rasm.

### Aylanish jismlarining hajmini hisoblash

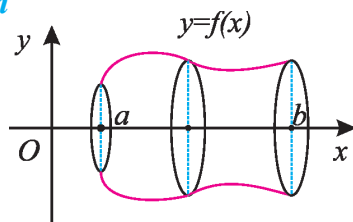
Egri chiziqli trapetsiyani  $Ox$  o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan jismning

$$\text{hajmi} \quad V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx \quad (2)$$

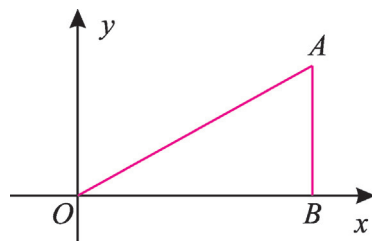
formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin.

Bu formuladan  $f(x)$  ni tanlash hisobiga kesik konus, konus, silindr, shar, shar segmenti hajmlarini osonlikcha topsa bo'ladi.

**Konusning hajmi.** Bu holda  $AB=R$ ,  $OB=H$  deb olamiz (11-rasm).  $OA$  tog'ri chiziq tenglamasi  $y = \frac{R}{H}x$  ekanligi ravshan. U holda (2) formulaga muvofiq



10-rasm.



11-rasm.

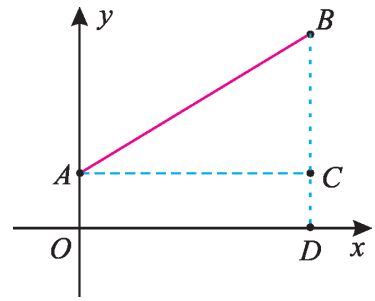
$$V_{\text{konus}} = \pi \cdot \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{R^2}{3H^2} \cdot x^3 \Big|_0^H = \pi \cdot \frac{R^2}{3H^2} \cdot (H^3 - 0) = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Demak,  $V_{\text{konus}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$

**Kesik konusning hajmi.**  $AB$  kesmani  $Ox$  o'qi atrofida aylantirishdan kesik konus hosil bo'ladi.  $AO=r$ ,  $BD=R$ ,  $OD=H$  deylik (12- rasm).

$AB$  to'g'ri chiziqning tenglamasi  $y = \frac{R-r}{H}x + r$  ekani ravshan.

Demak,  $a=0$ ,  $b=H$ ,  $f(x) = \frac{R-r}{H}x + r$ .



12-rasm.

U holda (2) formulaga muvofiq

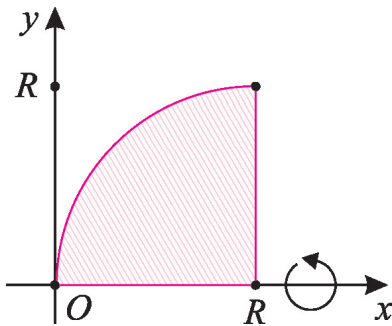
$$V_{k.konus} = \pi \cdot \int_0^H \left( \frac{R-r}{H}x + r \right)^2 dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H}{R-r} \cdot \left( \frac{R-r}{H}x + r \right)^3 \Big|_0^H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H}{R-r} \cdot (R^3 - r^3) = \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (R^2 + Rr + r^2).$$

Shunday qilib, kesik konusning hajmi:  $V = \frac{\pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)H$ . Bundan  $AO=r=0$  bo'lsa, konus hajmi formulasini olamiz.

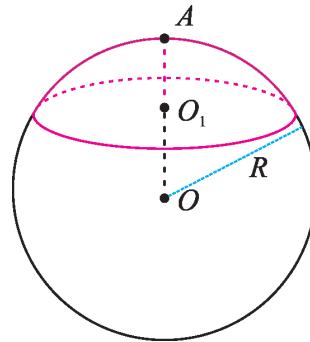
**Sharning hajmi.** Radiusi  $R$ , markazi  $(R; O)$  nuqtada bo'lgan doiraning cho'raq qismini  $Ox$  o'qi atrofida aylantirishdan (13-rasm) hosil qilinadigan shakl

sharning yarmidir. Bizning holda mos aylana tenglamasi  $(x-R)^2 + y^2 = R^2$  bo'ladi, bundan  $y = \sqrt{2Rx - x^2}$ ,  $x \in [0; R]$ . (2) formulaga ko'ra

$$\frac{1}{2}V_{shar} = \pi \cdot \int_0^R (2Rx - x^2) dx = \pi \cdot \left( Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3, \text{ demak, } V_{shar} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



13-rasm.



14-rasm.

**Shar segmentning hajmi.** 14-rasmda  $OA=R$ ,  $O_1A=H$  (segmentning balandligi) bo'lsin. Doira segmentini uning balandligi atrofida aylanishidan shar segmenti hosil bo'ladi (14-rasm.) Shar segmentning hajmini hisoblash shar hajmini topish kabi bo'ladi, bu holda integrallash  $[0; H]$  kesma bo'yicha bajariladi:

$$V_{segment} = \pi \cdot \int_0^H (2Rx - x^2) dx = \pi \cdot \left( Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^H = \pi \cdot \left( RH^2 - \frac{1}{3} H^3 \right).$$

Demak,  $V_{segment} = \frac{1}{3} \pi \cdot H^2 \cdot (3R - H)$ .

**Silindrning hajmi.**  $Ox$  o'qqa parallel  $AB$  kesmani  $Ox$  o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan shakl silindr bo'ladi.

$AB=OC=H$ ,  $OA=BC=R$  bo'lsin (15-rasm).

$AB$  to'g'ri chiziq tenglamasi  $y=R$  ekani ravshan,  $x \in [0; H]$ . U holda (2) formulaga ko'ra,

$$V_{silindr} = \pi \cdot \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 \cdot (H - 0) = \pi R^2 H. \text{ Demak, } V_{silindr} = \pi R^2 \cdot H.$$

Nega aylanish  $Ox$  o'qi atrofida bo'lishi kerak? Aylanish  $Oy$  atrofida bo'lsa-chi? Bunday savolni qo'yish tabiiy.

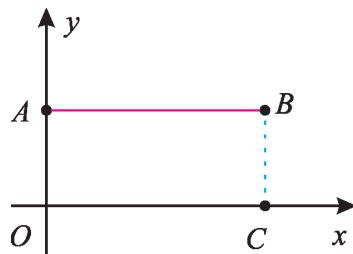
Yuqoridan uzluksiz  $y=f(x)$  funksiya grafigi, pastdan  $Ox$  o'qi, chap va o'ngdan, mos ravishda,  $x=a$  va  $x=b$  vertikal chiziqlar bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyaning  $Oy$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan jismning hajmi

$$V = 2\pi \cdot \int_a^b xf(x) dx \tag{3}$$

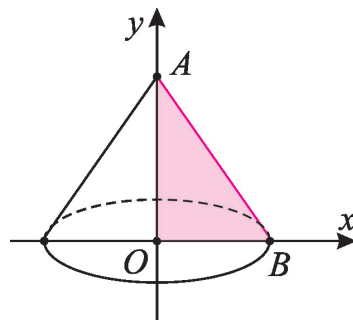
formula bilan hisoblanishini isbotlash mumkin.

**1-misol.** Konus hajmini toping (16-rasm).

$\triangle$   $OA=H$ ,  $OB=R$  deylik.  $AB$  to'g'ri chiziq tenglamasi  $y = -\frac{H}{R}x + H$  ekani ravshan. U holda (3) formulada  $a=0$ ,  $b=R$ ,  $f(x) = -\frac{H}{R}x + H$  desak,  $AB$  kesmani  $Oy$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan konus hajmi



15-rasm.



16-rasm.

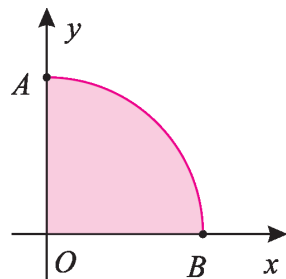
$$V_{konus} = 2\pi \cdot \int_0^R x \cdot \left(-\frac{H}{R}x + H\right) dx = 2\pi \left[ -\frac{H}{R} \int_0^R x^2 dx + H \int_0^R x dx \right] =$$

$$= 2\pi \cdot \left( -\frac{H}{R} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R + H \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^R = -2\pi \cdot \frac{H}{R} \cdot \frac{R^3}{3} + 2\pi \cdot H \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2 H \cdot \left(-\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Demak,  $V_{konus} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ . ▲

**2-misol.** Radiusi  $R$  bo'lgan shar hajmini toping.

△  $OA = OB = R$ ,  $O$  – aylana markazi deylik. Bu aylana tenglamasi, ravshanki,  $x^2 + y^2 = R^2$ , bundan  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq R$ . Bunga mos doiraning chorak qismini (17-rasm)  $Oy$  o'q atrofida aylantirishda sharning yarmi hosil bo'ladi. Avval shu yarim shar



17-rasm.

hajmini topamiz. (3) formulada  $a=0$ ,  $b=R$ ,  $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  deylik. U holda

$$V = 2\pi \cdot \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

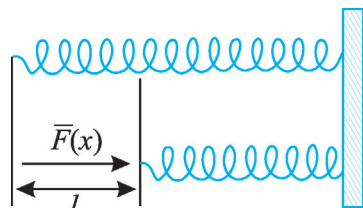
$$R^2 - x^2 = u \text{ desak, } x dx = -\frac{du}{2},$$

$$\int x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Bu yerda  $C=0$  deb olish mumkin.

$$\text{Demak, } V = -\frac{2\pi}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3} \pi R^3, \text{ yoki } V_{shar} = \frac{4}{3} \pi R^3. \text{ ▲}$$

**Kuchning bajargan ishini hisoblash.** Vintsimon prujinaning bir uchi mustahkamlangan, ikkinchi uchiga esa  $F=F(x)$  kuch ta'sir etib, prujinani siqadi, deylik (18-rasm). Guk qonuniga ko'ra prujinaning siqilishi unga ta'sir etayotgan  $F(x)$  kuchga proporsionaldir. Prujinani  $l$  birlikka siqish uchun  $F(x)$  kuchning bajargan ishini toping.



18-rasm.

△ Ma'lumki, o'zgaruvchi  $F(x)$  kuchning  $[a; b]$  oraliqdagi bajargan ishi

$$A = \int_a^b F(x) dx \quad (4)$$

formula yordamida hisoblanadi. Agar  $F(x)$  kuch ta'sirida prujinaning siqilish kattaligini  $x$  orqali belgilasak, u holda Guk qonuniga ko'ra  $F(x) = k \cdot x$  bo'ladi, bu yerda  $k$  – o'zgarmas son. (4) formulaga muvofiq bajarilgan ish

$$A = \int_0^l kx dx = k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^l = \frac{kl^2}{2}. \blacktriangle$$

Xususan, prujinani 0,01 m siqish uchun 10 N kuch kerak bo'lsa,

$$F = 10N = k \cdot x \text{ tenglikdan } k = \frac{F}{x} = 1000. \text{ Demak, } F(x) = kx = 1000 \cdot x.$$

Prujinani 0,09 m siqish uchun ketadigan  $F$  kuch bajargan ish bu holda

$$A = \int_0^{0,09} 1000x dx = 1000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,09} = 500 \cdot 0,0081 = 4,05(\text{J}).$$

### Mashqlar

**51.**  $y = -x^2 + 4x$  parabola, (4;0) va (0;4) nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

**52.**  $f(x) = 2x - 2$  funksiya grafigi va uning  $F(0) = 1$  shartni qanoatlantiruvchi boshlang'ich funksiyasi bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping. Mos rasm chizing (**53–54**):

**53.** 1)  $y = x^2, y = 1 - x^2;$

2)  $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = 4;$

3)  $y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2;$

4)  $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1, x = a(a > 1).$

**54.** 1)  $y = \frac{x^2}{3}, y = 4 - \frac{2}{3}x^2;$

2)  $y = x^2, y = 2x^2, y = 2;$

3)  $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2 \cdot x;$

4)  $y = \frac{1}{x}, y = x^2, y = \frac{x^2}{2}.$

**55.**  $y = \sin x, x \in [0; \pi]$ , funksiya grafigining  $Ox$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

**56.**  $y = \sqrt{x}, x = 1, x = 4$  chiziqlar bilan chegaralangan shaklning  $Ox$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan jism hajmini toping.

**57.** Qiyalik bo'yicha pastga tushayotgan poyezdning tezligi  $v(t) = 15 + 0,2(\text{m/s})$  qonunga ko'ra o'zgaradi. Agar poyezd qiyalikni 20 s davomida o'tgan bo'lsa, qiyalikning uzunligini toping.

**58.** Vaqtning  $t = 0$  paytida 20 m/s tezlik bilan yer sirtidan otilgan jism  $s(t) = 20t - 5t^2$  (m) qonun bilan harakatlanadi. Jismning tezligi 5 m/s bo'lganda, u yerdan qanday balandlikda bo'ladi?



**59.** Avtomobilning tormozlanish tezligi  $v(t)=19-1,2 \cdot t$  (m/s) qonunga ko'ra o'zgaradi. Agar avtomobil tormoz olgan vaqtdan 10 s o'tgach to'xtagan bo'lsa, uning tormozlanish yo'li uzunligini toping.

**60.** Nuqtaning tezligi  $v(t)=3t+\frac{3}{2}\sqrt{t}$  (m/s) qonun bo'yicha o'zgaradi.

Shu nuqtaning  $t=0$  dan  $t=4$  gacha vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini toping.

**61.** Yuqoridan  $y=e^x$  chiziq bilan, pastdan  $Ox$  o'qi bilan, chapdan  $x=0$ , o'ngdan  $x=1$  chiziq bilan chegaralangan sohaning  $Oy$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini toping.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping. Mos rasm chizing (**62–63**):

**62.** 1)  $y=2\sqrt{x}$ ,  $y=6$ ,  $x=0$ ;      2)  $y=x^2$ ,  $y=2\sqrt{2x}$ ;  
3)  $y=x^2$ ,  $y=\sqrt[3]{x}$ ;      4)  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=\sqrt{4-3x}$ ,  $y=0$ .

**63.** 1)  $y=\sin 6x$ ,  $x=0$ ,  $x=\pi$ ,  $Ox$  o'qi;

2)  $y=\sin 2x$ ,  $x=0$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$ ,  $Ox$  o'qi;

3)  $y=\cos x$ ,  $y=1+\frac{2}{\pi}x$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$ ;

4)  $y=-x^2$ ,  $y=2e^x$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ .

**64\*.**  $y=2x^2-8x$ , parabola va shu parabolaga uning uchida o'tkazilgan urinma va  $Oy$  o'qi bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

**65\*.**  $y=x^2+10$  parabola va shu parabolaga (0; 1) nuqtadan o'tkazilgan urinmalar bilan chegaralangan shakl yuzini toping.

**66.** Agar  $2N$  kuch prujinani 1 sm qissa, prujinani 3 sm qisish uchun sarflanadigan ishni hisoblang.

**67.** To'g'ri chizikli harakat qilayotgan nuqtaning vaqtning  $[t_1; t_2]$  oralig'idagi tezligi  $v(t)>0$  bo'lsin. Vaqtning  $t=t_1$  paytidan  $t=t_2$  paytigacha bo'lgan oralig'ida nuqta bosib o'tgan yo'lini toping.

**68\*.**  $y=-x^2+1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  va  $Oy$  o'qi bilan chegaralangan shakln  $Oy$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'ladigan jism hajmini hisoblang.

**69.**  $y=-x^2+4$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $x=0$  ( $Oy$  o'qi) chiziqlar bilan chegaralangan shaklning  $Ox$  o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang.

$\int_a^b f(x)dx$  integraldagi  $f(x)$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topa olsak, uni Nyuton Leybnis formulasidan foydalanib aniq hisoblay olamiz.

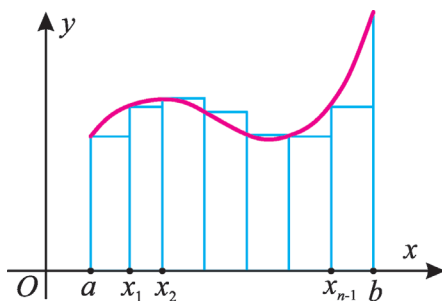
Agar boshlang'ich funksiya topilmasa, u holda  $\int_a^b f(x)dx$  integralni taqribiy hisoblash masalasi qo'yiladi. Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir nechta usuli bor. Shulardan ba'zilarini keltiramiz.

**To'g'ri to'rtburchaklar formulasi.**  $[a; b]$  kesmada  $y=f(x)$  uzluksiz funksiya aniqlangan bo'lsin.  $[a; b]$  kesmani  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  nuqtalar yordamida  $n$  ta o'zaro teng kesmalarga ajratamiz. Har bir kesmaning uzunligi  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  ga teng bo'ladi.  $a=x_0, b=x_n$  deylik. Bo'linish nuqtalari  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  orqali  $y=f(x)$  funksiya grafigi bilan kesishguncha vertikal to'g'ri chiziqlar ( $Ox$  ga perpendikularlar) o'tkazamiz. Natijada egri chiziqli trapetsiya  $n$  ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga bo'linadi.

Har bir kichik egri chiziqli trapetsiyani asosi  $\Delta x$ , balandligi esa  $y=f(x)$  funksiyaning  $[x_k; x_{k+1}]$  kesmaning, masalan, chap uchi  $x_k$  dagi qiymati  $f(x_k)$  ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak bilan almashtiramiz, bunda  $k=0, 1, \dots, n-1$ .

Hosil bo'lgan bu to'g'ri to'rtburchaklar yuzlarining yig'indisi taqriban egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo'ladi (19-rasm). Shunday qilib ushbu formulaga kelimiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})). \quad (1)$$



19-rasm.

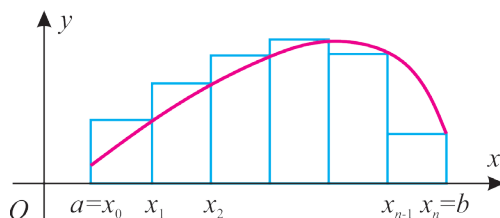
Bu formula aniq integralni taqribiy hisoblashning *to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi* deyiladi.

To‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi sifatida  $f(x)$  funksiyaning  $[x_k; x_{k+1}]$  kesmaning o‘ng uchidagi  $f(x_{k+1})$  yoki shu kesma o‘rtasi  $\frac{x_k + x_{k+1}}{2} = x_{k/2}$  dagi  $f(x_{k/2})$  qiymatini ham olish mumkin edi.

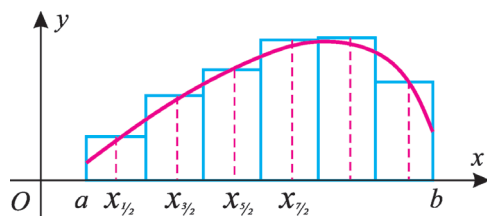
Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning balandligi qilib  $f(x_{k+1})$  yoki  $f(x_{k/2})$  olinsa, u holda, mos ravishda, shunday formulalarni hosil qilamiz (20 a, b -rasmlar):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)), \quad (1a)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left( f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{2n-1}) \right). \quad (1b)$$



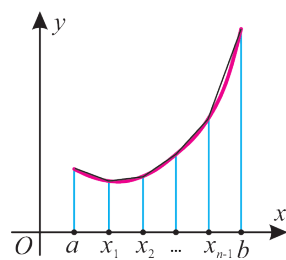
20a-rasm.



20b-rasm.

O‘tkazilgan vertikal chiziqlarning  $y=f(x)$  funksiya grafi bilan kesishish nuqtalarini ketma-ket tutashtirish natijasida har bir kichik egri chiziqli trapetsiyani asoslari  $f(x_k)$  va  $f(x_{k+1})$  hamda balandligi  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  bo‘lgan trapetsiya bilan almashtiramiz, bunda  $k=0,1, \dots, n-1$ .

Hosil qilingan bunday trapetsiyalar yuzlarining yig‘indisi taqriban egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo‘ladi (20d - rasm).



20d-rasm.

Shunday qilib ushbu formulani hosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right). \quad (2)$$

Bu formula aniq integralni taqribiy hisoblashning *trapetsiyalar formulasi* deyiladi.

**1-misol.**  $A = \int_0^1 e^{-x^2} dx$  integralni taqribiy hisoblang.

△ Ma'lumki,  $f(x) = e^{-x^2}$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasini bevosita topishning iloji yo'q. Avval berilgan integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida hisoblab ko'ramiz.  $[0;1]$  kesmani, masalan, 5 ta teng qismga ajratamiz  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2$ ; demak,  $x_0=0$ ;  $x_1=0,2$ ;  $x_2=0,4$ ;  $x_3=0,6$ ;  $x_4=0,8$ ;  $x_5=1$ .

$f(x) = e^{-x^2}$  funksiyaning shu nuqtalardagi taqribiy qiymatlarini yozamiz:

$x$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$e^{-x^2}$	1	0,96079	0,85214	0,69768	0,52729	0,36788

U holda (1) formulaga ko'ra

$$A \approx \frac{1}{5} \cdot (1 + 0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729 + 0,36788) = \frac{1}{5} \cdot 4,40578 = 0,887156.$$

(2) formulaga ko'ra

$$A \approx \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1 + 0,36788}{2} + 0,96079 + 0,85214 + 0,69768 + 0,52729 \right) = \frac{1}{5} \cdot 3,72184 \approx 0,74437.$$

Aytish joizki, trapetsiyalar formulasi aniqroq natijani beradi. ▲

**2-misol.**  $B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  integralni (1b) formulaga ko'ra hisoblang.

△  $[0; 1]$  kesmani 10 ta teng qismga ajratamiz.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$\frac{x_{2k+1}}{2}$  nuqta  $[x_k; x_{k+1}]$  kesmaning o'rtasi,  $\frac{x_{2k+1}}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ ,  $k=0,1, \dots, 9$ .

Ravshanki,  $\frac{x_1}{2} = 0,05$ ;  $\frac{x_3}{2} = 0,15$ ;  $\frac{x_5}{2} = 0,25$ ;

$$\frac{x_7}{2} = 0,35; \frac{x_9}{2} = 0,45; \frac{x_{11}}{2} = 0,55; \frac{x_{13}}{2} = 0,65; \frac{x_{15}}{2} = 0,75; \frac{x_{17}}{2} = 0,85; \frac{x_{19}}{2} = 0,95;$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  funksiyaning  $\frac{x_1}{2}, \frac{x_3}{2}, \dots, \frac{x_{19}}{2}$  nuqtalardagi mos qiymatlari  $f(\frac{x_1}{2}), f(\frac{x_3}{2}), \dots, f(\frac{x_{19}}{2})$  larni hisoblaymiz.

$$\text{Masalan, } f(\frac{x_{15}}{2}) = f(0,75) = f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{1 + (\frac{3}{4})^2} = \frac{16}{25} = 0,64.$$

Natijada ushbu jadvalni hosil qilamiz:

$x$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
$f(x)$	0,9975	0,9780	0,9412	0,8909	0,8316	0,7679	0,7029	0,6400	0,5806	0,5256

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_3}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{19}}{2}\right) = 0,9975 + 0,9780 + \dots + 0,5256 = 7,8561.$$

Demak,  $B \approx \frac{1}{10} \cdot 7,8561 = 0,78561$ .

$$\text{Ammo } B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tgx} \Big|_0^1 = \text{arc tg}1 - \text{arc tg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

Shunday qilib,  $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  ni taqribiy hisoblash  $\frac{\pi}{4}$  ni taqribiy hisoblashga keltirilgan ekan.  $\frac{\pi}{4} \approx 0,7854$  ekanini hisobga olsak, xatolik taqriban  $0,7856 - 0,7854 = 0,0002$  ni tashkil etadi. ▲

### *Mashqlar*

[0; 1] kesmani 10 ta teng qismga ajrating va  $B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  integralni:

**70.** (1) formula – to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi yordamida hisoblang.

**71.** (1a) formula yordamida hisoblang.

**72.** Trapetsiyalar formulasi yordamida hisoblang va natijani **70**, **71**–mashqlardagi natijalar hamda  $\frac{\pi}{4} \approx 0,785398\dots$  bilan taqqoslang.

**73\*.**  $B = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$  integralni (1), (1b) va (2) formulalar bo‘yicha hisoblashga doir komputer dasturlarini tuzing.

## 52–56

### MASALALAR YECHISH

Berilgan tezlik bo‘yicha  $s(t)$  yo‘lni topish masalasini ko‘raylik.

Masalan,  $v(t) = 5 - 3t$  (m/s) bo‘lsa,  $s(t)$  yo‘lni topish uchun  $s'(t) = v(t)$  tenglamani yechish kerak. Bu tenglamada topilishi kerak bo‘lgan noma‘lum  $s(t)$  funksiyaning hosilasi qatnashgan.

*Ta‘rif.* Noma‘lum funksiyaning hosilasi qatnashgan tenglama *differensial tenglama* deyiladi.

Demak, berilgan tezlik bo‘yicha yo‘lni topish, masalasi  $s'(t) = v(t)$  differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

Boshlang‘ich funksiya ta‘rifiga ko‘ra  $y'(x) = f(x)$  ko‘rinishidagi differensial tenglama yechimi  $y(x) = F(x) + C$  ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda  $F(x)$  - boshlang‘ich funksiya,  $C$  - ixtiyoriy son.

**1-masala.**  $s' = 5 - 3t$  differensial tenglamani yeching.

△ Bu masalada hosilasi  $5-3t$  ga teng bo'lgan  $s(t)$  funksiyani topish so'ralyapti. Berilgan hosilasi bo'yicha funksiyani o'zini topish esa uning boshlang'ich funksiyasini topish demakdir.  $5-3t$  funksiyani boshlang'ich funksiyasi esa  $5t - \frac{3}{2}t^2 + C$  ga teng ekani ravshan, bu yerda  $C$  – ixtiyoriy o'zgarmas son. *Javob:*  $s(t) = 5t - \frac{3}{2}t^2 + C$ . ▲

**2-masala.**  $y' = 3x^2 - 1$  differensial tenglamani yeching.

△ Bu masalada hosilasi  $3x^2 - 1$  ga teng bo'lgan  $y(x)$  funksiyani topish so'ralyapti. Berilgan hosilasi bo'yicha funksiyani o'zini topish esa uning boshlang'ich funksiyasini topish demakdir.  $3x^2 - 1$  funksiyani boshlang'ich funksiyasi esa  $x^3 - x + C$  ekani ravshan, bu yerda  $C$  – ixtiyoriy o'zgarmas son. Shunday qilib, masalani javobi  $y = x^3 - x + C$ . ▲

Demak, bu differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko'p, u bir qiymatli topilmadi. O'zgarmas son  $C$  ni topish uchun differensial tenglamaga qo'shimcha shartlar qo'yish kerak.

**3-masala.**  $y' = \sin x + \cos x$  differensial tenglamaning  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$  shartni qanoatlantiruvchi  $y(x)$  yechimini toping.

△ Berilgan tenglamaning barcha yechimlari, ravshanki,  $y(x) = -\cos x + \sin x + C$  bo'ladi.  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 5$ , bundan  $C = 4$ .

*Javob:*  $y = -\cos x + \sin x + 4$ . ▲

**4-masala.**  $y' = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3$  differensial tenglamaning  $y(2) = 9$  shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

△ Integrallar jadvalidan foydalanamiz. Unga ko'ra  $x + x^2 + x^3 - x^4 + C$ .  $x = 2$  bo'lganada  $y = 9$  bo'lgani uchun  $2 + 4 + 8 - 16 + C = 9$ , bundan  $C = 11$ .

*Javob:*  $y = x + x^2 + x^3 - x^4 + 11$ . ▲

**5-masala.**  $y$  miqdorning vaqtning har bir  $t$  momentidagi o'zgarish tezligi shu miqdorning ayni  $t$  momentdagi qiymatiga proporsional bo'lsin. Agar  $t = 0$  bo'lganda bu miqdorning qiymati  $y_0$  bo'lsa,  $y$  ning vaqtning  $t$  momentidagi qiymatini toping.

△ Masala shartiga va hosilaning ma'nosiga ko'ra  $y(t)$  ga nisbatan

$$y' = ky \quad (1)$$

differensial tenglamani hosil qilamiz, bu yerda  $k$ - proporsionallik koefitsiyenti.

$y'(t)$  hosilani  $\frac{dy}{dt}$  "kasr" shaklda ifodalaymiz va (1) ni  $\frac{dy}{dt} = ky$  kabi yozamiz, bundan  $\frac{dy}{y} = kdt$  tenglikni hosil qilamiz. Bundan bevosita  $\int \frac{dy}{y} = \int kdt$  tenglik kelib chiqadi. Integrallaymiz:  $\ln y = kt + \ln C$  (o'zgarish son  $C$  o'rniga  $\ln C$  ni olish qulay,  $C > 0$ ). Demak  $y = Ce^{kt}$ . Shartga ko'ra,  $y_0 = C \cdot e^{k \cdot 0}$ , ya'ni  $C = y_0$  va

$$y = y_0 \cdot e^{kt} \quad (2)$$

Javob:  $y = y_0 \cdot e^{kt}$ . ▲

5-masala fizika, biologiya, kimyo fanlarida uchraydigan ko'plab jarayonlarning matematik modelini beradi (I qism, 29–32 mavzularga qarang).

**6-masala.**  $y(t)$  miqdorning o'zgarish tezligi shu miqdor bilan o'zgarish son  $a$  ning ayirmasiga proporsional bo'lsin. Agar  $t=0$  bo'lganda  $y(t)$  miqdorning qiymati  $y_0$  bo'lsa,  $y(t)$  ning  $t$  vaqtdagi qiymatini toping.

$$\triangle \quad y' = k(y - a) \quad (3)$$

differensial tenglamani yoza olamiz.

(3) tenglamani yechish uchun  $z = y - a$  belgilash kiritamiz.

$z' = (y - a)' = y' - a' = y' - 0 = y'$  bo'lgani uchun (3) tenglamani  $z' = kz$  ko'rinishida yozib olish mumkin. Bu tenglamaning yechimi  $z = z_0 \cdot e^{kt}$  ekani ravshan.  $y = z + a$ ,  $z = y_0 - a$  ekanidan

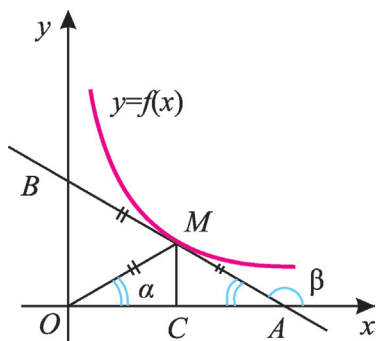
$$y = a + (y_0 - a)e^{kt} \quad (4)$$

ni hosil qilamiz, bu yerda  $y_0$  son  $y(t)$  ning  $t=0$  dagi qiymati.

Javob:  $y = a + (y_0 - a)e^{kt}$ . ▲

(4) tenglama ham ko'pgina jarayonlarning matematik modelidir (I qism, 29–32 mavzularga qarang).

Differensial tenglamaga olib keladigan bitta geometrik masala ko'raylik.



21-rasm.

**7-masala.** Egri chiziq  $M(a; b)$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$  nuqtadan o'tadi. Bu chiziqning ixtiyoriy nuqtasida o'tkazilgan urinmaning koordinatalar o'qlari orasidagi kesmasi urinish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. Shu egri chiziq tenglamasini yozing.

△ Izlanayotgan egri chiziq tenglamasi  $y = f(x)$  bo'lsin. Bu egri chiziqqa  $M(x; y)$  nuqtada koordinata o'qlarini  $A$  va  $B$  nuqtalarda kesib o'tuvchi urinma o'tkazilgan

(21-rasm).  $\triangle AOB$  – to‘g‘ri burchakli,  $M$  nuqta –  $AB$  gipotenuzaning o‘rtasi,  $OM$  kesma – gipotenuzaga o‘tkazilgan mediana.  $OM = \frac{1}{2}AB$  bo‘lgani uchun,  $\triangle MOA$  – teng yonli, demak,  $\angle MOA = \angle MAO$ . Bundan  $\alpha = \angle MOA = 180^\circ - \angle MAx = 180^\circ - \beta$  va  $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$ . Ammo  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MC}{OC}$ ,  $\operatorname{tg}\beta$  esa  $M$  nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng, ya‘ni  $\operatorname{tg}\beta = y'$ . Bundan  $y' = -\frac{y}{x}$  differensial tenglamaga kelamiz. Bu tenglamadan izlanayotgan egri chiziqning  $y=f(x)$  ko‘rinishidagi tenglamasini topa olamiz.  $y'$  hosilani  $\frac{dy}{dx}$  "kasr" shaklida ifodalaymiz va tenglamani  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$  kabi yozib olamiz, bundan  $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$  tenglikni hosil qilamiz. U holda  $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$  tenglik kelib chiqadi. Bu tenglikdagi integrallarni topib  $\ln y = -\ln x + \ln C$  tenglikka kelamiz. Bundan esa  $y = e^{-\ln x} \cdot e^{\ln C} = \frac{C}{x}$ ,  $y = \frac{C}{x}$ . Boshlang‘ich  $y(a) = b$  shartdan  $C = ab$  ekanini topamiz.

Javob:  $y' = \frac{ab}{x}$ . ▲

**8-masala\*.** Sig‘imi 50 litr bo‘lgan idishdagi moddaning 70 foizi azot va 30 foizi kisloroddan iborat. Idishga har bir sekundda 0,2 litr azot quyiladi va aralashmaning shuncha miqdori idishdan oqib chiqib ketadi. Qancha vaqtdan so‘ng idishda 99% azot bo‘ladi?

△ Jarayon boshlanganidan  $t$  sekund o‘tgandan so‘ng idishda  $y(t)$  litr azot bo‘lgan deylik. U holda azot jami eritmaning  $\frac{y}{50}$  qismini tashkil qiladi.  $\Delta t$  vaqt oralig‘ida idishga  $0,2 \cdot \Delta t$  litr azot quyiladi va eritmaning  $0,2 \cdot \Delta t$  litri chiqib ketadi. Vaqtning  $[t; t + \Delta t]$  oralig‘ida idishdagi azot konsentratsiyasi o‘zgarmaydi, deb faraz qilamiz. U holda shu  $\frac{y}{50}$  hajmda  $\frac{y}{50} \cdot 0,2 \cdot \Delta t$  litr azot bo‘ladi. Azot miqdorining o‘sishi  $\Delta y \approx 0,2 \cdot \Delta t - \frac{0,2y}{50} \cdot \Delta t$  kabi ifodalanadi. Bundan  $\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx 0,2 - \frac{0,2y}{50}$  ( $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  nisbat –  $y(t)$  funksiya orttirmasining argument  $t$  orttirmasiga nisbati ekaniga e‘tibor bering).  $\Delta t$  nolga intilganda ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) bu taqribiy tenglikdan

$$y' = 0,2 \cdot \left(1 - \frac{y}{50}\right) \quad (5)$$



tenglikni olamiz.

Demak, masalada aytilgan jarayon (5) differensial tenglama bilan ifodalanadi. (5) tenglama ko'rilgan jarayonlarning matematik modelidir. (5) tenglamani yechamiz. Uni  $y' = -0,004(y - 50)$  ko'rinishga keltirib olamiz. (3) va (4) tenglamalarga ko'ra, (5) ning yechimi  $y = 50 + (y_0 - 50) \cdot e^{-0,004t}$  bo'ladi, bu yerda  $y_0$  son  $y(t)$  ning  $t = 0$  vaqtdagi qiymatidir. Masala shartiga ko'ra, boshlang'ich vaqtda ( $t = 0$  da) 50 litrli idishda 70% azot, ya'ni 35 litr azot bo'lgan. Demak,  $y_0 = 35$  litr. Azotning aralashmadagi konsentratsiyasi 99% bo'lgan vaqtda idishda  $50 \cdot 0,99 = 49,5$  litr azot bo'ladi. Bu holat qancha vaqtdan so'ng ro'y berishini bilish uchun  $49,5 = 50 - 15 \cdot e^{-0,004t}$  ko'rsatkichli tenglamani yechish kerak:  $15 \cdot e^{-0,004t} = 0,5$ .

$$e^{-0,004t} = \frac{1}{30}, \quad -0,004t = -\ln 30. \text{ Hisoblash vositasi yordamida } \ln 30 \text{ ni to-}$$

pamiz. U holda  $t = \frac{\ln 30}{0,004} \approx \frac{3,4112}{0,004} \approx 852,8 \text{ (s)} \approx 14,2 \text{ (min)}$ .

*Javob:* 14,2 min. ▲

### Savol va topshiriqlar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2.  $y' = ky$  tenglamaga olib keluvchi misollar keltiring.
3.  $x = 1$  da  $y = 2$  bo'lsa,  $y' = \frac{2y}{x}$  tenglamani yeching.

### Mashqlar

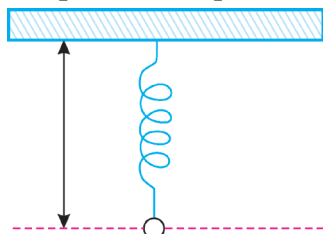
Berilgan funksiya berilgan differensial tenglamaning yechimi ekanini isbotlang (74–76):

74.  $y = x^2 + x$ ,  $xy' = y + x^2$ ;

75\*.  $y = xe^x$ ,  $y'' + 3y' - 4y = 5 \cdot e^x$ . Bu yerda  $y'' = (y')' - y(x)$  funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli differensial tenglamadir.

76.  $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ ,  $y'' + k^2 \cdot y = 0$ .

77. Xonadagi havo temperaturasi  $20^\circ\text{C}$  ga teng. Xonada qaynoq suv 20 minut davomida  $100^\circ\text{C}$  dan  $60^\circ\text{C}$  gacha sovidi. Suvning sovish tezligi suv va xonadagi havo temperaturasi ayirmasiga proporsional deb hisoblab, suvning temperaturasi qancha vaqtda  $30^\circ$  bo'lishini toping.



22-rasm.

78\*. Davriy takrorlanadigan jarayonlarning (22-rasm) (masalan, prujina, mayatnik) matematik modeli bo'lib,  $y'' + \omega^2 y = 0$  differensial tenglama xizmat qiladi. Bu tenglama *garmonik tebranishlarning differensial tenglamasi* deb ata-

ladi.  $y(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x + C_2)$  funksiya  $y'' + \omega^2 y = 0$  tenglamani qanoatlantirishini ko'rsating, bunda  $\omega$  - berilgan musbat son.

**79.** Biror radioaktiv moddaning yarim parchalanish (yemirilish) davri 1000 yilga teng, deylik. Dastlab modda miqdori  $m_0$  bo'lsa: 1) 100 yildan; 2) 500 yildan; 3) 2000 yildan so'ng bu moddaning qanchasi qoladi?

Garmonik tebranishning differensial tenglamasini yozing va fizik ma'nosini tushuntiring (**80-81**):

**80\***.  $y(t) = 5 \sin(4t + \frac{\pi}{6})$ . **81.**  $y(t) = 4 \sin(5t - \frac{\pi}{3})$ .

**82.** Differensial tenglamaning berilgan shartni qanoatlantiradigan yechimini toping: 1)  $y' = 7 \cos x$ ,  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ ; 2)  $y' = e^{-x}$ ,  $y(1) = 2$ .

**83.** Idishda 10 litr suv bor. Idishga har minutda 2 litrdan, har bir litrining tarkibida 0,3 kg tuz bo'lgan, eritma (30% li eritma) quyilib turadi. Bu eritma bilan idishdagi suyuqlik aralashtirilib, o'sha tezlikda (har minutda 2 litrdan) idishdan oqib chiqadi. Idishdagi tuz miqdorining o'zgarish qonunini toping.

## II bobga doir mashqlar

### *Aniqmas integrallarni hisoblash*

$F(x)$  funksiya  $f(x)$  uchun boshlang'ich funksiya bo'ladimi (**84 – 85**):

**84.** 1)  $F(x) = x(\ln x - 1)$ ,  $f(x) = \ln x$ ;

2)  $F(x) = -5 - \cos 2x$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ ;

3)  $F(x) = 4x^2 + 2 \operatorname{tg} 3x + 2$ ,  $f(x) = 8x + \frac{6}{\cos^2 3x}$ .

**85.** 1)  $F(x) = -x + \sqrt[5]{x^4} - e^{2x} + 10$ ,  $f(x) = -1 + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} - 2e^{2x}$ ;

2)  $F(x) = 3^{2x} - \frac{7}{x} - \sin 4x - 7$ ,  $f(x) = (2 \ln 3) \cdot 3^{2x} - 4 \cos 4x + \frac{7}{x^2}$ ;

3)  $F(x) = \sqrt{x} + \ln 5 \cdot \log_5 x - 18$ ,  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \log_5 x$ ?

**86.**  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  funksiyaning qaysi biri uchun  $F(x)$  boshlang'ich funksiya bo'ladi:

1)  $f_1(x) = 6(x^2 - 1)$ ,  $f_2(x) = 6x^2 - 6x + 4$ ,  $f_3(x) = 6x(x - 2)$ ,  $F(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9$ ;

2)  $f_1(x) = -4 \sin x \cos x$ ,  $f_2(x) = 4 \sin x \cos x$ ,  $f_3(x) = -\sin 2x$ ,  $F(x) = -\cos 2x$ ;

3)  $f_1(x) = 3x^2 - 2x$ ,  $f_2(x) = -3x \cdot \left(\frac{4}{3} - x\right)$ ,  $f_3(x) = 3x^2 - 4x$ ,  $F(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ ?

**87.** Integralni hisoblang:  $A = \int \frac{6x - 9}{x^2 - 4x + 5} dx$ .

△ Integralni shunday yozib olamiz:

$$A = \int \frac{3 \cdot (2x - 4) + 3}{x^2 - 4x + 5} dx = 3 \int \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} + 3 \int \frac{dx}{(x - 2)^2 + 1}$$

$(x^2 - 4x + 5)' = 2x - 4$  bo'lgani uchun 1-integral

$$3 \int \frac{d(x^2 - 4x + 5)}{x^2 - 4x + 5} = 3 \ln |x^2 - 4x + 5| + C \text{ ga teng: } x^2 - 4x + 5 = t$$

almashtirish kiritilsa, 1-integral  $3 \int \frac{dt}{t} = 3 \ln |t| + C_1$  bo'ladi.

2-integral esa aniqmas integrallar jadvaliga ko'ra  $3 \arcsin \frac{1}{x-2} + C_2$  ga teng.

Javob:  $A = 3 \ln |x^2 - 4x + 5| + 3 \arcsin \frac{1}{x-2} + C$ ,  $C = C_1 + C_2$ . ▲

**88** - mashqning 1), 5) va **89** - mashqning 3), 4), 6) lari shu kabi mos almashtirish kiritib yechiladi. Boshlang'ich funksiyani toping (**88** – **89**):

**88.** 1)  $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$ ;      2)  $\int \cos(3x - 2) dx$ ;      3)  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ ;

4)  $\int 5ax^4 dx$ ;      5)  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ .

**89.** 1)  $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ;      2)  $\int \ln e^{x^2-1} dx$ ;      3)  $\int \frac{e^x}{x^2} dx$ ;

4)  $\int \frac{\sin 6x}{1 + \cos 6x} dx$ ;      5)  $\int e^{3 \ln x} dx$ ;      6)  $\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x} dx$ .

**90.** Integralni hisoblang:  $I = \int \sin^4 x \cos^3 x dx$ .

△  $\sin x = t$  almashtirish kiritamiz,  $dt = \cos x dx$ . U holda  $\cos^2 x = 1 - t^2$  bo'ladi.

Shunday qilib,  $I = \int t^4 \cdot (1 - t^2) dt = \int (t^4 - t^6) dt$ . Integrallar jadvaliga muvo-

fiq oxirgi integral  $\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C$  ga teng.

Demak, javob:  $I = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$ . ▲

**91.** Integralni hisoblang:  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ .

△  $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$  ayniyatlardan foydalanamiz. U holda

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Javob:  $\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$  ▲

**92.**  $f(x) = 3 \cos x + \sqrt{3x - 2}$  funksiyaning grafigi  $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$  nuqtadan o'tuvchi

boshlang'ich funksiyasi  $F(x)$  ni toping.

△ Aniqmas integrallar jadvali va integralni hisoblash qoidalariga muvofiq

$$F(x) = \int f(x) dx = 3 \int \cos x dx + \int \sqrt{3x-2} dx = 3 \sin x + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= 3 \sin x + \frac{2}{9} \cdot \sqrt{(3x-2)^3} + C.$$

Shartga ko'ra  $F\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ , u holda  $3 \cdot \sin \frac{2}{3} + C = 0$ ,  $C = -3 \cdot \sin \frac{2}{3}$ .

Javob:  $F(x) = 3 \sin x + \frac{2}{9} \sqrt{(3x+2)^3} - 3 \cdot \sin \frac{2}{3}$ . ▲

93.  $f(x)$  funksiyaning grafigi koordinatalari berilgan  $A$  nuqtadan o'tuvchi boshlang'ich funksiyasi  $F(x)$  ni toping:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $f(x) = \sin 2x$ , $A\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$ ;            | 2) $f(x) = \sqrt{x}$ , $A(4; 6)$ ;                                     |
| 3) $f(x) = e^{-3x}$ , $A\left(\ln 2; \frac{5}{24}\right)$ ;         | 4) $f(x) = \sin x - \cos x$ , $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ;       |
| 5) $f(x) = 2x^2 - 3\sqrt{x} + 4$ , $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$ ; | 6) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 3x}$ , $A\left(\frac{\pi}{12}; -1\right)$ . |

Integrallarni hisoblang (94–96):

94. 1)  $\int \frac{x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x}} dx$ ; 2)  $\int \frac{2 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; 3)  $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ ;

4)  $\int x e^{x^2} dx$ ; 5)  $\int 3^x \cdot 2^{2x} dx$ ; 6)  $\int \frac{4 \ln^3 x}{x} dx$ .

95\*. 1)  $\int \cos x \sqrt{\sin x} dx$ ; 2)  $\int \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; 3)  $\int \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} dx$ ;

4)  $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$ ; 5)  $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$ ; 6)  $\int \frac{dx}{x^2+x}$ .

96\*. 1)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$ ; 2)  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ ; 3)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} dx$ ;

4)  $\int \frac{(1 - \sin x) \cos x}{\sin x} dx$ ; 5)  $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$ ; 6)  $\int \cos 5x \cos x dx$ .

Aniq integrallarni hisoblang (97–103):

97. 1)  $\int_0^3 x e^x dx$ ;

2)  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 1}$ ;

3)  $\int_1^2 e^{-5 \ln x} dx$ .

98. 1)  $\int_0^1 x e^{-x} dx$ ;

2)  $\int_0^3 \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$ ;

3)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ .

99\*. 1)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$ ;

2)  $\int_0^1 2 \cdot e^{-2x} dx$ ;

3)  $\int_1^{e^4} \frac{\ln x}{x} dx$ .

100\*. 1)  $\int_1^4 \frac{dx}{x^2 + 2x}$ ;

2)  $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 16}}$ ;

3)  $\int_0^{4\sqrt{2}} \frac{xdx}{x^2 + 4}$ .

101\*. 1)  $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$ ; 2)  $\int_0^4 \frac{2x + 5}{2x + 3} dx = a + \ln \frac{17}{3}$  bo'lsa,  $a$  ni toping.

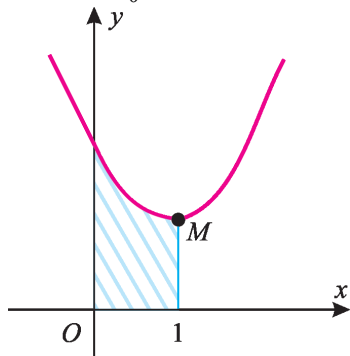
102. 1)  $\int_0^3 d(2^{2x-1})$ ;

2)  $\int_0^4 (x - 2)(x^2 + 2x + 4) dx$ ; 6)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x}$ .

103. 1)  $\int_0^2 (3x + 1)^4 dx$ ;

2)  $\int_1^e \frac{dx}{0,5x}$ ;

3)  $\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right) dx$ .



23-rasm.

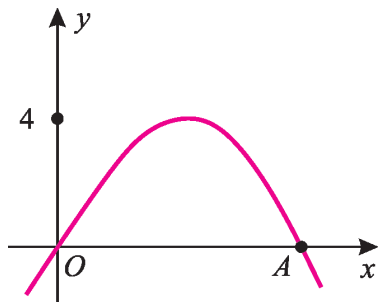
104.  $y = x^2 - 2x + 4$  parabolaning uchi  $M(x_0; y_0)$  nuqtada bo'lsa, shtrixlangan soha yuzini toping (23-rasm).

▲ Parabola uchining koordinatlarini topamiz:  $y = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$ . Bundan  $x_0 = 1, y_0 = 3$ .

Shunday qilib, integrallash chegarasi  $a = 0$  dan  $b = 1$  gacha bo'ladi.

$$S = \int_0^1 [(x - 1)^2 + 3] dx = \int_0^1 (x - 1)^2 dx + 3 \int_0^1 dx = \frac{(x - 1)^3}{3} \Big|_0^1 + 3 \cdot x \Big|_0^1 = 0 + \frac{1}{3} + 3 = 3 + \frac{1}{3}.$$

Javob:  $3\frac{1}{3}$  kvadrat birlik. ▲

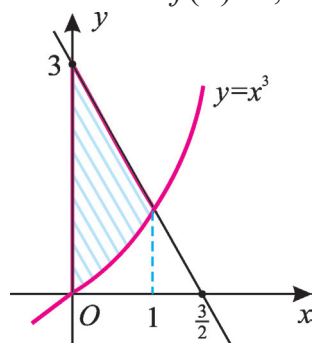


24-rasm.

105\*.  $f(x)$  parabola  $Ox$  o'qini  $O(0; 0)$  va  $A(x_0; 0)$  nuqtalarda kesib o'tadi. Bu parabola va  $Ox$  o'q bilan chegaralangan soha yuzi  $\frac{32}{3}$  kv. birlikka

teng bo'lsa,  $x_0$  va parabola tenglamasini toping (24-rasm).

$\triangle x=0$  da  $f(0)=0$ ,  $x=x_0$  da ham  $f(x_0)=0$ .



25-rasm.

Bundan  $-x_0^2 + bx_0 = 0$ ,  $x_0 = b$ . U holda  $f(x)$  parabolaning tenglamasi:  $f(x) = -x^2 + x_0 \cdot x$  bo'ladi. Demak,

$$S = \int_0^{x_0} (-x^2 + x_0 \cdot x) dx = -\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{x_0} + x_0 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{x_0} = x$$

$$= -\frac{1}{3}x_0^3 + \frac{x_0^3}{2} = \frac{x_0^3}{6}.$$

Shartga ko'ra, bu yuz  $\frac{32}{3}$  ga teng, ya'ni  $\frac{x_0^3}{6} = \frac{32}{3}$ , bundan  $x_0 = 4$ .

Javob:  $x_0 = 4$ ;  $f(x) = -x^2 + 4x$ .  $\blacktriangle$

**106.** Shtrixlangan soha yuzini toping (25-rasm).

$\triangle y = x^3$  kubik parabola bilan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi koordinatalari  $A(1; 1)$  ekanini ravshan.  $(0; 3)$  va  $(1; 1)$  nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi:  $y = -2x + 3$ . Bu chiziq  $Ox$  o'qini  $(\frac{3}{2}; 0)$  nuqtada kesib o'tadi. Shtrixlangan soha yuzini hisoblashning ikkita usulini beramiz.

**1-usul.**  $S = \int_0^1 (-2x + 3 - x^3) dx = (-x^2 + 3x - \frac{x^4}{4}) \Big|_0^1 = -1 + 3 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$ .

**2-usul.** Uchlari  $O(0; 0)$ ,  $(0; 3)$ ,  $(1; 1)$  va  $(1; 0)$  nuqtalarda bo'lgan trapetsiya yuzidan  $y = x^3$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini ayiramiz. Trapetsiyaning yuzi:  $\frac{1+3}{2} \cdot 1 = 2$  (kv. birlik). 2-yuz esa

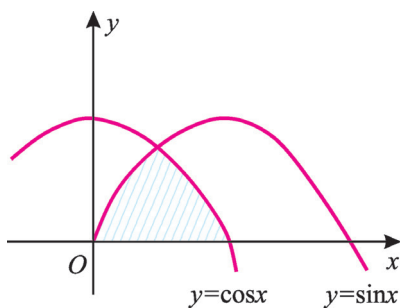
$\int_0^1 x^3 dx$  ga teng.  $\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$  (kv. birlik). Demak, qidirilayotgan yuz

$2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$  (kv. birlik) bo'lar ekan.

Javob:  $1\frac{3}{4}$  kvadrat birlik.  $\blacktriangle$

**107.** Shtrixlangan soha yuzini toping (26-rasm).

$\triangle y = \cos x$  va  $y = \sin x$  funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtasining koordinata-



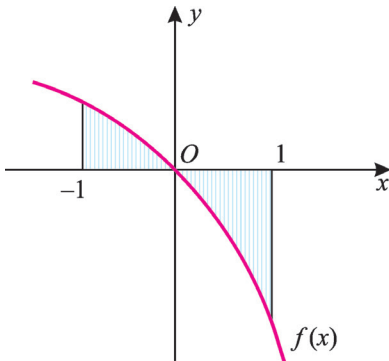
26-rasm.

lari  $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ekanini ravshan. Egri chiziqli uchburchakni  $x = \frac{\pi}{4}$  to'g'ri chiziq

teng ikkiga bo'ladi. U holda izlanayotgan yuz  $S = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -2 \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -2(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0) = -2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$ . *Javob:*  $2 - \sqrt{2}$  kv. birlik. ▲

**108.** 27-rasmda  $f(x) = -x^2 - 4x$  funksiya grafigining bir qismi chizilgan. Shtrixlangan soha yuzini toping.

$$\begin{aligned} \triangle S &= \int_{-1}^0 (-x^2 - 4x) dx + \int_0^1 (0 - (-x^2 - 4x)) dx = \left(-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2\right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{-1}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 2 = 4, \text{ Demak, } S = 4 \text{ (kv. birlik).} \end{aligned}$$



27-rasm.

*Javob:* 4 kvadrat birlik. ▲

**109.**  $y = x^3$  va  $y^2 = 32x$  chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping.

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping. Mos rasm chizing (110 – 113):

**110.** 1)  $y = 3x^2, x = 2, y = 0$ ; 2)  $y = -x^2 + 4, y = 0$  ( $Ox$  o'qi).

**111.** 1)  $y = x^2 + 4x + 4, Ox$  o'qi va  $Oy$  o'qi; 2)  $y^3 = x, x = 1, x = 27$  va  $Ox$  o'qi.

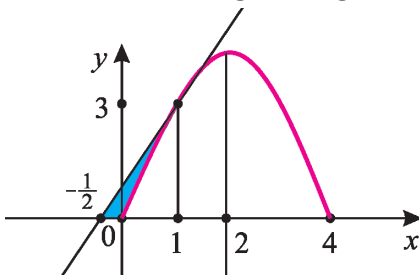
**112.** 1)  $y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{3}{2}x^2 + 8$ ;

2)  $y = \ln x, x = e^3$  va  $Ox$  o'qi.

**113.** 1)  $y = -x^2 + x$  va  $Ox$  o'qi;

2)  $y = \sqrt{x}, Ox$  o'qi,  $y = 2 - x$ .

**114.**  $Ox$  o'qi,  $y = -x^2 + 4x$  parabola va uning  $A(1; 3)$  nuqtasida o'tkazilgan urinma bilan chegaralangan soha yuzini toping (28-rasm).



28-rasm.

△  $y = f(x)$  egri chiziqqa uning  $A(x_0; y_0)$  nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi  $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  bo'ladi.  $x_0 = 1, y_0 = 3$  va  $f'(1) = 2$  ekanidan berilgan parabola uning  $A(1; 3)$  nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi  $y - 3 = 2 \cdot (x - 1), y = 2x + 1$  bo'ladi.

Urinma  $Ox$  o'qini  $x = -\frac{1}{2}$  nuqtada kesib o'tadi. Bo'yalgan soha yuzi, ravshanki, katetlari 3 va  $\frac{3}{2}$  bo'lgan uchburchak yuzidan egri chiziqli uchburchak yuzining ayirmasiga teng. Bu yuzlarning har birini hisoblay-

miz.  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4}$  (kv. birlik). Egri chiziqli uchburchakning yuzi esa

$$S = \int_0^1 (-x^2 + 4x) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 2 = 1\frac{2}{3} \text{ ga teng. U holda izlanayotgan}$$

yuz  $\frac{9}{4} - \frac{5}{3} = \frac{7}{12}$  kv. birlik bo'ladi.

*Javob:*  $\frac{7}{12}$  kv. birlik. ▲

**115.** Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini hisoblang.

Mos rasmni chizing:

1)  $y = \frac{1}{2}x^2$  va  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ;

2)  $x=9$  va  $y^2=x$ ;

3)  $y=5x-8$  va  $y=-x^2+3x$ ;

4)  $y=e^x$ ,  $y=0$ ,  $x=0$ ,  $x=2$ .

**116.** Boshlang'ich  $v_0$  (m/s) tezlik bilan tepaga vertikal otilgan jism (havo qarshiligi hisobga olinmaganda)  $v(t)=v_0-gt$  tezlikka ega, bu yerda  $g$  – erkin tushish tezlanishi,  $t$  – vaqt. Jism qanday eng katta balandlikka ko'tariladi?

**117.** To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan jismning tezligi  $v(t) = \sqrt{2t+3}$  (m/s). Harakat boshlanganidan dastlabki 3 sekundda jism qancha yo'lni bosib o'tgan?

**118.** Nuqta  $v(t)=2t^2+3t$  tezlik bilan to'g'ri chiziqli harakat qiladi. ( $v$  – m/s larda,  $t$  – sekundlarda). Nuqtaning  $t_1=1$  dan  $t_2=4$  gacha vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'lini toping.

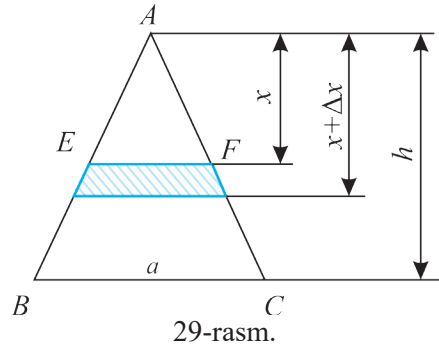
**119\*.** Balandligi  $h$ , asosi  $a$  bo'lgan uchburchak shaklidagi plastinka suvga vertikal ravishda botirildi, bunda uning uchi suv sirtida bo'ldi. Suvning shu plastinkaga bosim kuchini aniqlang.

△ Paskal qonuniga muvofiq  $r$  chuqurlikka botirilgan va yuzi  $S$  bo'lgan sohaga suyuqlikning bosim kuchi  $P=\rho grS$  formulaga ko'ra hisoblanadi, bu yerda  $\rho$  – suyuqlikning zichligi (suv uchun  $\rho=1\frac{\text{gf}}{\text{cm}^3}$  deb qabul qilamiz),  $g$  – erkin tushish tezlanishi.  $x$  chuqurlikda bo'lgan va eni  $\Delta x$  ga teng bo'lgan gorizontal "tasma"ni qaraymiz (29-rasm). Bu tasmani to'g'ri to'rtburchak deb faraz qilib, uning  $EF$  asosini topamiz.



$\triangle ABC \sim \triangle AEF$  ekanidan,  $EF = \frac{ax}{h}$ .

U holda tasmaning yuzi  $\Delta S$  tartiban  $\frac{ax}{h} \cdot \Delta x$  ga teng bo'ladi:  $\Delta S \approx \frac{ax}{h} \cdot \Delta x$ . Pas-kal qonuniga ko'ra  $\Delta S$  yuzga bo'ladigan bosim kuchi  $\Delta P \approx \rho g x \cdot \frac{ax}{h} \Delta x = \frac{\rho g a}{h} x^2 \cdot \Delta x$ .

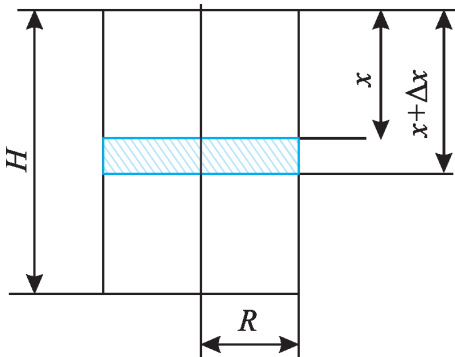


29-rasm.

$ABC$  uchburchak yuzi tasmalarning  $\Delta S$  yuzlarining yig'indisidan iborat bo'ladi. U holda  $\frac{\Delta P}{\Delta x} \approx \frac{\rho g a}{h} x^2$ . Tasmalarning eni (kengligi)  $\Delta x$  yetarlicha kichik bo'lsa, ya'ni  $\Delta x$  nolga intilsa,  $\frac{\Delta P}{\Delta x}$  nisbat  $P'$  ( $P$  ning hosilasiga) ga intiladi, ya'ni,  $P' = \frac{\rho g a}{h} x^2$  tenglik o'rinli bo'ladi. Demak, suyuqlikning  $\triangle ABC$

yuziga bosim kuchi  $P$  shunday hisoblanadi:

$$P = \int_0^h \frac{\rho g a}{h} x^2 dx = \frac{\rho g a}{h} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \rho g a h^2. \text{ Javob: } P = \frac{1}{3} \rho g a h^2. \blacktriangle$$



30-rasm.

**120.** Asosining radiusi  $R$ , balandligi  $H$  bo'lgan doiraviy silindr vertikal (tikka) turibdi va u suv bilan to'la. Suvni tortib chiqarish uchun zarur bo'lgan  $A$  ishni hisoblang (30-rasm).

$\triangle$  *Ko'rsatma.* Asos tekisligidan  $x$  va  $x + \Delta x$  masofalarda bo'lgan "elementar" (kichik) silindrning hajmi  $\pi R^2 \Delta x$  ga,

og'irligi esa  $\pi R^2 g \Delta x$  ga teng. Bu og'irlikni  $x$  balandlikka ko'tarish uchun  $\Delta A \approx \pi R^2 g \Delta x \cdot x$  ish bajariladi, bundan  $\frac{\Delta A}{\Delta x} \approx \pi R^2 g x$  va ushbu  $A' = \pi R^2 g x$  differen-

sial tenglamaga kelamiz. Uning yechimi:  $A = \int_0^H \pi R^2 g x dx = \pi R^2 g \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^2 g}{2}$ .

Javob:  $A = \frac{\pi g}{2} \cdot R^2 H^2 J. \blacktriangle$

## Yozma nazorat ishi namunasi

### I variant

1.  $f(x) = 2\sin 5x + \sqrt{x} + \frac{3}{5}$  funksiyaning shunday  $F(x)$  boshlang'ich funksiyasini topingki, bunda  $f(x)$  va  $F(x)$  funksiyalarning grafiklari  $Oy$  o'qida kesishsin.

(Ko'rsatma:  $f(x)$  va  $F(x)$  funksiyalarning grafiklari  $Oy$  o'qida kesishsin degan shart  $x=0$  da  $f(0)=F(0)$  tenglik bajarilishini bildiradi).

2.  $y=-x^3$ ,  $y=\frac{8}{3}\sqrt{x}$  va  $y=8$  funksiyalarning grafiklari bilan chegaralangan (yopiq) shakl yuzini toping. Mos rasm chizing.

3. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning tezligi  $v(t) = 2t^2 + 3t$  ( $t$ —sekundlarda,  $v$ —m/s larda o'lchanadi).  $t_1=1$  dan  $t_2=6$  gacha bo'lgan vaqt oralig'ida u qanday masofani o'tadi? Nuqtaning  $t=3$  paytidagi tezlanishi nimaga teng bo'ladi?

4. Prujinani 1 cm ga cho'zishga 1N kuch ishlatiladi. Prujinani 5 cm ga cho'zishga qancha kuch ishlatiladi? (Guk qonuniga ko'ra kuch prujinaning cho'zilishiga proporsional).

5.  $y=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$  funksiya  $C_1$  va  $C_2$  ning istalgan qiymatlarida  $y''+25y=0$  differensial tenglamaning yechimi ekanini isbotlang.

### II variant

1.  $f(x) = 3\cos 4x + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{5}{8}$  funksiyaning boshlang'ich funksiyasini toping.

2.  $y=x$ ,  $y=\frac{1}{3}x^2$  funksiyalarning grafiklari bilan chegaralangan (yopiq) shakl yuzini toping. Mos rasm chizing.

3. To'g'ri chiziqli harakat qilayotgan nuqtaning tezligi  $v(t) = 4t^2 - 5t$  ( $t$  — sekundlarda,  $v$  — m/s larda o'lchanadi).  $t_1=2$  dan  $t_2=3$  gacha bo'lgan vaqt oralig'ida u qanday masofani o'tadi? Nuqtaning  $t=3$  paytidagi tezlanishi nimaga teng bo'ladi?

4. Prujinani 3 cm ga cho'zishga 2N kuch ishlatiladi. Prujinani 6 cm ga cho'zishga qancha kuch ishlatiladi? (Guk qonuniga ko'ra kuch prujinaning cho'zilishiga proporsional).

5.  $y=C_1\cos 7x+C_2\sin 7x$  funksiya  $C_1$  va  $C_2$  ning istalgan qiymatlarida  $y''+49y=0$  differensial tenglamaning yechimi ekanini isbotlang.

### *Variantlarni qarab chiqishga oid kombinatorika masalalari*

Kombinatorikaning asosiy savoli—“qancha?”, asosiy masalasi esa berilgan chekli sondagi obyektlarning u yoki bu shartga bo‘ysunuvchi har xil kombinatsiyalarini sanashdir.

Variantlarni birma-bir qarab chiqishda quyidagi ikkita qoidaga amal qilish maqsadga muvofiq:

1. Kombinatsiyalarni harflar yoki raqamlar ketma-ketligi bilan belgilaymiz, bunda belgilash bir qiymatli bo‘lishi kerak.

2. Kombinatsiyalarni alifbo tartibida (agar belgilashda harflar ishlatilsa) yoki sonlarni o‘shish tartibida yozib chiqish.

Bunday holatda birorta ham variant qolib ketmaydi va ayrim variantlarning takrorlanishiga yo‘l qo‘yilmaydi.

**1-masala.** Madina olma, nok va mandarinni yemoqchi. Buni u necha usul bilan bajarishi mumkin?

△ Mevalarni harflar bilan belgilaymiz:  $O$ —olma,  $N$ —nok,  $M$ —mandarin. Bu holda, masalan,  $NMO$ —bu dastlab nok, so‘ng mandarin, va oxirida olma yeyilishiga mos variant.

Variantlarni yozib chiqamiz:  $MNO$ ,  $MON$ ,  $NMO$ ,  $NOM$ ,  $OMN$ ,  $ONM$ . Jami 6 ta usul hosil bo‘ldi. ▲

**2-masala.** Raqamlari yig‘indisi 4 dan kichik bo‘lgan to‘rt xonali sonlar nechta?

△ Raqamlari yig‘indisi 1, 2 va 3 bo‘lgan to‘rt xonali sonlarni o‘shish tartibida yozamiz: 1000; 1001; 1002; 1010; 1011; 1020; 1100; 1101; 1110; 1200; 2000; 2001; 2010; 2100; 3000. Jami 15 ta son hosil bo‘ldi. ▲

**3-masala.** Birinchi raqami 2 bo‘lgan va 1, 2, 3, 4 va 5 raqamlardan tashkil topgan uch xonali sonlar nechta?

△ Oxirgi ikkita raqam bo‘yicha barcha variantlarni qarab chiqamiz:

	1	2	3	4	5
1	211	212	213	214	215
2	221	222	223	224	225
3	231	232	233	234	235
4	241	242	243	244	245
5	251	252	253	254	255

*Javob.* Jami 25 ta son. ▲

**4-masala.** Maktabda beshta 11-sinf mavjud. Shu sinflardan ikki nafar navbatchini tanlashimiz kerak, bunda har qanday juftlikda turli sinf o'quvchilari bo'lishi kerak. Buni nechta usulda amalga oshirsa bo'ladi?

△ Sinflarni 1, 2, 3, 4, 5 raqamlar bilan belgilaymiz va variantlarni yozib chiqamiz: (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5).

*Javob.* Jami 10 ta usul. ▲

### *Qo'shish va ko'paytirish qoidalari*

*Qo'shish va ko'paytirish qoidalari kombinatorika masalalarini yechishda eng ko'p qo'llaniladigan va samarali usullar hisoblanadi.*

**5-masala.** Savatda 5 ta olma va 3 ta nok bor. Savatdan 1 ta meva tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

△ Olmani 5 ta usulda, nokni esa 3 ta usulda tanlash mumkin.

Demak, savatdan mevani tanlash  $5+3=8$  usulda amalga oshirilishi mumkin. ▲

**6-masala.** a) Toqqa 7 ta yo'l olib boradi. Sayyoh toqqa chiqib, so'ng pastga tushmoqchi. Bu ishni necha usulda amalga oshirish mumkin?

b) Agar yuqoriga chiqish va pastga tushish har xil yo'llar bilan amalga oshirilsa, javob qanday o'zgaradi?

△ a) Sayyoh toqqa 7 usulda chiqishi mumkin, har bir chiqishda 7 ta usulda pastga tushishi mumkin. Jami  $7+7+7+7+7+7+7=7 \cdot 7=49$  ta usul.

b) Sayyoh toqqa 7 usulda chiqishi mumkin, har bir chiqishda 6 usulda pastga tushishi mumkin. Jami  $7 \cdot 6=42$  ta usul. ▲

**7-masala.** Do'konda 5 ta turli piyola, 3 ta turli likopcha va 4 ta turli choy qoshig'i bor.

a) Piyola va likopcha juftligi necha usulda xarid qilinishi mumkin?

b) Piyola, likopcha va choy qoshig'i uchligi necha usulda xarid qilinishi mumkin?

c) Turli nomdagi ikkita idishning juftligi necha usulda xarid qilinishi mumkin?

△ a) Dastlab piyolani tanlaymiz. Unga juft qilib uchta likopchadan ixtiyoriysini olishimiz mumkin. Jami beshta piyola bo'lgani sababli turli juftliklar soni 15 ( $15 = 5 \cdot 3$ ) ga teng.

b) Oldingi masaladagi 15 juftliklardan ixtiyoriysini tanlaymiz. Uni choy qoshig'i bilan "uchlik" kacha 4 ta usulda to'ldirish mumkin. Shuning uchun barcha uchliklar soni 60 ( $60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$ ) ga teng.

c) Uchta holat bo'lishi mumkin: birinchisi piyola va likopcha juftligi sotib olinadi, ikkinchisi – piyola va qoshiq, uchinchi– likopcha va qoshiq. Har bir holat uchun juftliklar soni oson topiladi (birinchisida – 15 ta, ikkinchisida – 20 ta, uchinchisida – 12 ta). Hammasini qo'shib chiqsak, barcha variantlar sonini topamiz: 47 ta. ▲

**8-masala.** Barcha raqamlari juft bo'lgan besh xonali sonlar nechta?

△ Besh xonali sonning raqamlari uchun 5 ta o'rinni belqilamiz. Birinchi o'ringa 4 ta raqam qo'ysa bo'ladi: 2, 4, 6 yoki 8. Ikkinchi o'ringa beshta raqam qo'ysa bo'ladi: 0, 2, 4, 6 yoki 8. Uchinchi, to'rtinchi va beshinchi o'rinlarga ham shu beshta raqamni qo'ysa bo'ladi: 0, 2, 4, 6 yoki 8. Demak, jami o'rinlarni to'ldirishning  $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$  usuli mavjud. Barcha raqamlari juft bo'lgan besh xonali sonlar ham 2500 ta. ▲

Bu masalalarni hal qilishda quyidagi qoidalaridan foydalandik.

**Qo'shish qoidasi.** Agar  $A$  obyekt  $m$  ta usul bilan,  $B$  obyekt esa boshqa  $n$  ta usul bilan tanlanishi mumkin bo'lsa, u holda ( $A$  yoki  $B$ )  $m + n$  ta usul bilan tanlanishi mumkin.

**Ko'paytirish qoidasi.** Agar  $A$  obyekt  $m$  ta usul bilan tanlansa va shunday tanlashdan so'ng  $B$  obyekt  $n$  ta usul bilan tanlanishi mumkin bo'lsa, u holda ( $A$  va  $B$ )  $mn$  ta usul bilan tanlanishi mumkin.

### **Takrorli va takrorsiz o'rinlashtirishlar**

**9-masala.** Xonada beshta chiroq bor. Ularning har biri yo yonishi, yo yonmasligi mumkin. Xonani nechta usulda yoritish mumkin?

△ Har bir chiroq uchun ikkita variant mavjud – yo yonish, yo yonmaslik. Jami bo'lib  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$  ta usul. ▲

*Yuqoridagi masalani umumlashtiramiz:  $n$  ta elementdan tashkil topgan to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topaylik.*

*To'plamning  $n$  elementlaridan har biri uchun ikkita imkoniyat bor—u yo qism to'plamga tegishli, yo tegishli emas. Oldingi masalaga o'xshab  $2^n$  ta variant hosil bo'ladi.*

**10-masala.** 3 ta tovuq, 4 ta o'rdak va 2 ta g'oz bor. Bir nechta qush tanlanmoqda, bunda tanlangan qushlar ichida ham tovuq, ham o'rdak, ham g'oz bo'lishi shart. Bunday variantlar soni nechta?

△ Ihtiyoriy tovuq tanlanganlar ichida yo bor, yo yo'q. Shuning uchun tovuqni  $2^3$  ta usul bilan tanlab olishimiz mumkin. Shartga ko'ra tovuq albatta bo'lishi uchun  $2^3 - 1 = 7$  ta imkoniyat bor. Xuddi shunday, o'rdakni  $2^4 - 1 = 15$  ta, g'ozni esa  $2^2 - 1 = 3$  ta usulda tanlasa bo'ladi.

Jami  $7 \cdot 15 \cdot 3 = 315$  ta usul. ▲

**11-masala.** Futbol jamoasida 11 nafar o'yinchi bor.

a) Jamoa sardori va uning yordamchisi; b) jamoa sardori, uning birinchi yordamchisi, uning ikkinchi yordamchisi necha usulda tayinlanishi mumkin?

△ a) Sardor etib jamoaning 11 nafar o'yinchisidan ixtiyoriysini tayinlash mumkin. Sardorning yordamchisi etib qolgan 10 nafar o'yinchidan ixtiyoriysini tayinlash mumkin. Shuning uchun jamoa sardori va uning yordamchisi  $11 \cdot 10 = 110$  usulda tayinlanishi mumkin.

b) Jamoa sardori va uning birinchi yordamchisini  $11 \cdot 10 = 110$  usulda tayinladik. Ikkinchi yordamchi etib qolgan 9 nafar o'yinchidan ixtiyoriysini tayinlash mumkin. Shuning uchun jamoa sardori, uning birinchi yordamchisi, uning ikkinchi yordamchisi  $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$  usulda tayinlanishi mumkin. ▲

*Bu masalada biz 11-elementli to'plamda tartiblangan juftliklar va tartiblangan uchliklar sonini topdik. Endi bu masalani umumiy holda yechaylik.*

*Ta'rif.*  $n$  ta elementli  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  to'plam berilgan bo'lsin. Shu to'plamning ixtiyoriy  $k$  ta turli elementidan hosil qilingan tartiblangan  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$  ketma-ketlik  $n$  ta elementdan  $k$  tadan takrorsiz o'rinashtirish deb ataladi.

*Bunday o'rinashtirishlar soni  $A_n^k$  deb belgilanadi. Bu sonni topish uchun xuddi oldingi masaladek ish tutamiz.*

*Birinchi elementni tanlash uchun  $n$  ta usul, ikkinchi elementni tanlash uchun  $n-1$  ta usul, uchinchi elementni tanlash uchun  $(n-2)$  ta usul va h.k., oxirgi,  $k$ -chi elementni tanlash uchun  $(n-k+1)$  ta usul mavjud. Demak,  $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ .*

**12-masala.** Barcha raqamlari turlicha bo'lgan yetti raqamli telefon nomerlari nechta?

△ Birinchi raqamni tanlash uchun 10 ta usul (0 ham kiradi deb faraz qilamiz), ikkinchi raqamni tanlash uchun 9 ta usul, uchinchi raqamni tanlash uchun 8 ta usul va h.k., oxirgi raqamni tanlash uchun 4 ta usul mavjud. Demak,  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$  ta telefon nomer. ▲

**13-misol.**  $A$  alifbo  $n$  ta belgidan tashkil topgan bo'lsin. Uzunligi  $k$  ga teng bo'lgan hamda turli belgilardan tashkil topgan so'zlar (ya'ni uzunligi  $k$  ga teng bo'lgan ketma-ketliklar) soni  $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$  bo'ladi. Bu natija yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadi.

*Izoh.* Agarda har bir so'zni tashkil etgan belgilar orasida

takrorlanadiganlari bor bo'lsa, bunday so'zlar soni  $n$  ta elementdan  $r$  tadan takrorli o'rinlashtirishlar soni deb ataladi va  $\overline{A_n^k}$  kabi belgilanadi. Ko'paytirish qoidasiga ko'ra bu miqdor  $\overline{A_n^k} = n^k$  formula yordamida topiladi.

**14-masala.** Natural sonning o'nli yozuvida faqat toq raqamlar bo'lsa, bunday sonni "chiroyli" deymiz. Jami nechta to'rt xonali "chiroyli" son bor?

△ Bir xonali chiroyli sonlar 5 taligi ravshan. Bir xonali har bir "chiroyli" sonning oxiriga ikkinchi toq raqamni 5 ta usulda yozishimiz mumkin. Demak, ikki xonali "chiroyli" sonlar  $\overline{A_5^2} = 5 \cdot 5 = 25$  ta bo'ladi. Xuddi shunday, uch xonali "chiroyli" sonlar  $\overline{A_5^3} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  ta, to'rt xonalilari esa  $\overline{A_5^4} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$  ta. ▲

**15-masala.** Qizil, qora, ko'k va yashil sharlarni bir qatorga necha usulda joylashtirish mumkin?

△ Birinchi o'ringa to'rtta shardan ixtiyoriysini qo'yish mumkin. Ikkinchi o'ringa esa qolgan uchta shardan ixtiyoriysini, uchinchi o'ringa qolgan ikkita sharlardan ixtiyoriysini, va nihoyat, oxirgi o'ringa eng oxirgi sharni qo'yish mumkin.

Javob.  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . ▲

**Izoh.** 1 dan  $n$  gacha barcha natural sonlar ko'paytmasi  $n!$  deb belgilanadi va "en faktorial" deb o'qiladi.

*Aslida  $n!$  berilgan  $n$  elementli to'plam elementlarining o'rin almash-tirishlari soniga teng.*

**16-masala.** 1, 2, 3 raqamlaridan ularni takrorlamasdan tuzilgan jami uch xonali sonlar nechta?

△ Birinchi o'ringa uchta raqamdan ixtiyoriysini qo'yish mumkin. Ikkinchi o'ringa qolgan ikkita raqamdan ixtiyoriysini va uchinchi o'ringa eng oxirgi raqamni qo'yish mumkin. Demak, jami  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$  ta son. ▲

**17-masala.** 7 nafar o'quvchi navbatga necha usul bilan turishi mumkin?

△ Birinchi o'rinda 7 nafar o'quvchidan ixtiyoriysi turishi mumkin. Ikkinchi o'rinda qolgan 6 nafar (birinchi o'rinda turgan o'quvchidan qolganlari), 3- o'rinda qolgan 5 nafar o'quvchidan ixtiyoriysi, ..., oxirgi o'rinda faqat bir nafari turishi mumkin. Jami  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$  ta usul. ▲

## Mashqlar

Masalalarni, variantlarni sanab, yeching (1–4):

1. Voris, Doniyor, Olim, Kamola va Anora sinfda matematikani eng yaxshi biladigan o‘quvchilardir. Bir nafar o‘g‘il bola va bir nafar qiz bolani “Bilimlar bellashuvi”ga qatnashish uchun tanlash kerak. Buni nechta usulda amalga oshirsa bo‘ladi?

2. Oshxonada birinchi taom sifatida karam sho‘rvani, qaynatma sho‘rvani, no‘hat sho‘rvani, ikkinchi taom sifatida garnirli go‘sht, baliq, tovuqni, uchinchisiga esa choy va sharbatni buyurish mumkin. Birinchi, ikkinchi va uchinchi taomdan iborat tushlikni nechta usulda buyurish mumkin?

3. Gullola, Sanobar, Karim, Olim, Madina va Voris a‘lo baholarga o‘qiydi. Maktab ma‘muriyati a‘lochilar uchun sovg‘a tarzida konsertga 4 ta chipta olib keldi. Shu chiptalalar a‘lochilar o‘rtasida necha usulda taqsimlanishi mumkin?

4. 3 ta oq, 2 ta qizil va 4 ta sariq atirgul bor. Uchta guldandan iborat guldastani necha usulda tuzish mumkin?

Qo‘shish va ko‘paytirish qoidalaridan foydalanib, masalalarni yeching (5–10):

5. Kitob javonida matematikadan 9 ta, chet tilidan 4 ta va ona tilidan 6 ta kitob turibdi. Javondan bitta kitobni necha usulda tanlash mumkin?

6. Sehrli mamlakatda uchta shahar bor:  $A$ ,  $B$  va  $C$ .  $A$  shahardan  $B$  shahargacha 6 ta yo‘l boradi,  $B$  shahardan  $C$  shahargacha esa – 4 ta yo‘l.  $A$  shahardan  $C$  shahargacha necha usulda borsa bo‘ladi?

7. Do‘konda 7 ta tur pidjak, 5 ta tur shim va 4 ta tur galstuk sotilmoqda. Pidjak, shim va galstukdan iborat uchlikni (to‘plamni) necha usul bilan sotib olsa bo‘ladi?

8. Sehrli mamlakatda to‘rtta shahar bor:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  va  $D$ .  $A$  shahardan  $B$  shahargacha 6 ta yo‘l boradi,  $B$  shahardan  $C$  shahargacha esa – 4 ta yo‘l.

$A$  shahardan  $D$  shahargacha 2 ta yo‘l,  $D$  shahardan  $B$  shahargacha ham 2 ta yo‘l boradi.  $A$  shahardan  $C$  shahargacha necha usulda borsa bo‘ladi?

9. Agar oltita turli rangli mato bor bo‘lsa, bir xil kenglikdagi gorizontaal yo‘lli uchta rangli bayroqni necha usul bilan tiksa bo‘ladi?

10. “Matbuot tarqatuvchi” do‘konida 5 ta tur konvert va 4 ta tur marka sotilmoqda. Konvert bilan markani necha usulda sotib olishimiz mumkin?



*Guruhlashlar*

**1-masala.** Sinfda 30 nafar o‘quvchi bor. Olimpiadada qatnashish uchun 2 nafar o‘quvchini tanlab olishimiz kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

△ Birinchi o‘quvchini 30 ta usulda, ikkinchi o‘quvchini esa qolgan 29 nafar o‘quvchidan 29 ta usulda tanlasak bo‘ladi. Bunda har bir juftlik ikki marta sanalgani bois jami  $\frac{30 \cdot 29}{2} = 435$  ta usulni hosil qilamiz.

Javob. 435. ▲

**Izoh.** Umumiy holda  $n$  elementli to‘planning elementlari yordamida

hosil bo‘lgan juftliklar soni  $\frac{n(n-1)}{2}$  ga teng.

**2-masala.** Tekislikda  $n$  ta nuqta berilgan. Uchlari bu nuqtalarda bo‘lgan nechta kesma o‘tkazsa bo‘ladi?

Javob.  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**3-masala.** Qavariq  $n$ - burchakda nechta diagonal bor?

△ *Birinchi usul.* Uchlari  $n$  ta nuqtada bo‘lgan  $\frac{n(n-1)}{2}$  ta kesma o‘tkazsa bo‘ladi. Shulardan  $n$  tasi diagonal bo‘lmaydi (ular tomonlar bo‘ladi). Demak, diagonal soni  $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$  ga teng.

*Ikkinchi usul.* Har bir uchdan  $(n-3)$  ta diagonal o‘tkazsa bo‘ladi. Demak, jami  $n(n-3)$  ta diagonal. Ammo har diagonalni ikki martadan sanaganmiz. Shuning uchun diagonal soni  $\frac{n(n-3)}{2}$  ga teng.

Javob:  $\frac{n(n-3)}{2}$ . ▲

**4-masala.** Sinfda 30 nafar o‘quvchisi bor. Fan olimpiadasida qatnashish uchun 3 nafar o‘quvchidan iborat jamoani tanlab olishimiz kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

△ Birinchi o‘quvchini 30 ta usulda, ikkinchi o‘quvchini qolgan 29 nafar o‘quvchidan 29 ta usulda, uchinchi o‘quvchini esa 28 usulda tanlasak bo‘ladi. Demak,  $30 \cdot 29 \cdot 28$  ta usul (variant) paydo bo‘ldi. Ammo bunday sanashda biror jamoa bir necha marta sanaldi: bitta uchlik turli usulda

tanlanishi mumkin, masalan, dastlab  $A$ , soʻng  $B$ , undan keyin  $C$  yoki dastlab  $C$ , soʻng  $A$ , undan keyin  $B$ , va h.k.

Uchta elementdan oʻrin almashtirishlar soni  $3!$  ga teng boʻlgani bois, har bir jamoa 6 marta sanaldi. Jami  $\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6}$  ta usulni hosil qilamiz. ▲

**Izoh.** Masalani umumlashtiramiz.

Sinfda  $n$  nafar oʻquvchi boʻlsin. Jamoa esa  $k$  nafar oʻquvchidan iborat. *Jamoani tanlab olish usullari soni  $n$  elementdan  $k$  tadan olingan guruhlashlar soni deyiladi.*

*Yaʼni,  $n$  elementli toʻplamdan olingan  $k$  ta elementli qism toʻplamlar sonini hisoblaymiz.  $k$  ta elementni navbatma-navbat tanlab olamiz – dastlab birinchisini, keyin ikkinchisini va h.k. Natijada*

*$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$  sonini hosil qilamiz. Ammo har bir qism*

*toʻplamni  $k!$  marta sanadik. Shuning uchun natijani  $k!$  ga boʻlish lozim:*

*$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Hosil boʻlgan son binomial koeffitsiyent deb ham ataladi:*

**5-masala.** Qurilish tashkilotining duradgorlar boʻlimida 15 nafar ishchi bor. Koʻp qavatli uyning eshiklarini oʻrnatish uchun 3 nafar duradgorni tanlash zarur. Agar boʻlimdagi har bir duradgor bu topshiriqni bajarishga layoqatli boʻlsa, bunday tanlash imkoniyatlari (variantlari) qancha?

△ Guruhlashlar sonini topish formulasidan foydalanish mumkin. Bu yerda  $n=15$ ,  $m=3$  va  $C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$ . Demak, 15 nafar duradgorlar orasidan 3 nafarini tanlash imkoniyatlari soni 455 ta ekan. ▲

**6-masala.** 5 ta kitobdan 3 ta kitobni necha usulda tanlashimiz mumkin?

△ Binomial koeffitsiyentlar taʼrifiga koʻra  $C_5^3$  usulda tanlash mumkin. ▲

**7-masala.** 30 ta turli munchoqlardan iborat taqinchoqni 8 ta munchoqli qismlarga nechta usulda ajratsa boʻladi?

△ Bu masalaning javobi 30 elementli toʻplamdan 8 ta elementli qism toʻplamlarini ajratib olishlar soni  $C_{30}^8$  ga teng.

Javob.  $C_{30}^8$ . ▲

**8-masala.** 7 nafar kishidan 3 nafarini (ishchi guruhni) necha usulda tanlasa boʻladi? Guruh rahbari ishchi guruh aʼzolaridan tanlab olinsa-chi?

△ Uch nafar (ishchi guruh)ni  $C_7^3$  ta usulda, har bir guruh rahbarini esa 3 ta usulda tanlasa boʻladi.

Javob.  $3C_7^3$ . ▲

## Nyuton binomi

Quyidagi qisqa ko'paytirish formulalarini eslaylik:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \text{ikki son yig'indisining kvadrati};$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - \text{ikki son yig'indining kubi}.$$

Yig'indining navbatdagi ikkita, ya'ni 4- va 5- darajalarini hisoblaymiz:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^3b + b^4;$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)^4 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Umumiy holda, haqiqiy  $a$  va  $b$  hamda natural  $n$  sonlar uchun

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

formula o'rinlidir.

Bu formula **Nyuton binomi** formulasi deb ataladi.

**Binomial koeffitsiyentlarning xossalari.** Binomial koeffitsiyentlarning ba'zi xossalarini keltiramiz.

**1-xossa.** Ixtiyoriy natural  $n$  son uchun barcha  $C_n^m$  binomial koeffitsiyentlar yig'indisi  $2^n$  ga teng, ya'ni

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Bu tenglik Nyuton binomi formulasida  $a = b = 1$  deb olinganda hosil bo'ladi.

Bu xossadan  $n$ -elementli to'plamning barcha qism to'plamlari soni  $2^n$  ga tengligi kelib chiqadi.

**2-xossa.** Toq o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi juft o'rinlarda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisiga teng, ya'ni

$$C_n^0 + C_n^2 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + \dots$$

Chindan ham, Nyuton binomi formulasida  $a=1$  va  $b=-1$  deb olinsa

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan tasdiqning to'g'riligi kelib chiqadi.

1- va 2-xossalar asosida quyidagi xossani hosil qilamiz.

**3-xossa.**  $n$  natural sondan oshmaydigan eng katta toq  $m$  son uchun  $C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$  tenglik hamda  $n$  sondan oshmaydigan eng katta juft  $m$  son uchun  $C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^m = 2^{n-1}$  tenglik o'rinlidir.

## Mashqlar

**11.** Shaxmat musobaqasida har bir ishtirokchi boshqa ishtirokchilarning har biri bilan bittadan o'yin o'ynaydi. Jami 18 ta ishtirokchi bo'lsa, nechta o'yin o'ynaladi?

**12.** Tekislikda  $n$  ta to'g'ri chiziq shunday chizilganki, bunda hech qanday ikkita to'g'ri chiziq parallel emas, hech qanday uchtasi esa bitta nuqtadan o'tmaydi. To'g'ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo'lgan uchburchaklar nechta?

**13.** 7 ta turli rangli bo'yoqdan 4 tasini necha usulda tanlashimiz mumkin?

**14.** Bir to'g'ri chiziqda 10 ta nuqta, unga parallel bo'lgan boshqa to'g'ri chiziqda esa 11 ta nuqta belgilangan. Uchlari bu nuqtalarda bo'lgan nechta a) uchburchak; b) to'rtburchaklar mavjud?

**15.** Ikkita parallel  $a$  va  $b$  to'g'ri chiziqlarda, mos ravishda,  $A_1, A_2, \dots, A_m$  va  $B_1, B_2, \dots, B_n$  nuqtalar belgilangan. Barcha  $A_i B_j$  kesmalar shunday o'tkazilganki, ulardan hech qanday uchtasi bitta nuqtadan o'tmaydi. Kesishish nuqtalar soni nechta?

**16.**  $n$  ta to'g'ri chiziq eng ko'pi bilan nechta nuqtada kesishishi mumkin?

**17.** 100 elementli to'plamning 40 elementli qism to'plamlari soni bilan shu to'plamning 60 elementli qism to'plamlari sonini solishtiring.

**18\*.**  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$  binom yoyilmasida 5- had koeffitsiyenti 3- had koeffitsiyentiga nisbati 7:2 ga teng.  $x$  ning darajasi 1 bo'lgan hadni toping.

**19\*.**  $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)^n$  binom yoyilmasida 3- had koeffitsiyenti 2- had koeffitsiyentidan 44 ga katta. Ozod hadni toping.

**20\*.**  $\left(\sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$  binom yoyilmasining barcha ratsional hadlarini toping.

**21.**  $x(2-3x)^5 + x^3(1+2x^2)^7 - x^4(3+2x^3)^9$  ko'phadning  $x^5$  oldidagi koeffitsiyentini toping.

**22.**  $(a - \sqrt{2})^6$  binom yoyilmasini yozing.

**1-misol.** Firma ishlab chiqargan mahsulotni biror sifat yoki miqdor belgisiga ko'ra tahlil qilish talab etiladi. Bu vazifa qanday bajariladi?

Masalan, go'sht mahsuloti solingan konserva idishlari ichida nuqsonli konservalar ulushini aniqlash uchun har bir konserva idishini tekshirishimiz shartmi?

Go'sht mahsuloti solingan konserva idishining o'rtacha massasini aniqlash uchun har bir konserva idishning massasini o'lchab, ular yig'indisini barcha idishlar soniga bo'lishimiz kerak. Biz bu holda matematik nuqtayi nazardan to'g'ri ish tutgan bo'lamiz, ammo iqtisodiyot nuqtayi nazaridan emas.

Ammo mahsulotlar soni juda katta bo'lsa, u holda yalpi tekshirishni o'tkazish maqsadga muvofiq kelmaydi; sababi, bunday tekshirish qo'shimcha ish kuchini, vaqtni va boshqa resurslarni jalb qilishni talab qiladi. Ayrim hollarda (masalan, tez buziladigan o'simlik yoki go'sht mahsulotlari solingan konserva idishining o'rtacha massasini o'lchash, elektr uskunaning buzilmasdan xizmat qilish vaqtini aniqlash va boshqalar) bunday tekshirishda mahsulot yaroqsiz holga kelishi tabiiy.

Shunga o'xshash hollarda yalpi tekshirishdan voz kechib, mahsulotlar to'plamidan chekli sondagi mahsulotlar tasodifiy ravishda, tavakkaliga olinadi va ular o'rganiladi. Bunday usul *tanlanma kuzatish* deb nomlanadi.

Bizning misolimizda barcha konservalardan bir nechtasi, aytaylik, 200 tasi olinib, shu 200 ta konservaning massalaridan tashkil topgan  $(x_1, x_2, \dots, x_{200})$

qator aniqlanadi va uning  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{200}}{200}$  o'rta qiymati hisoblanadi.

Shu o'rta qiymat barcha konservalarning o'rta qiymatiga *taqriban* teng degan xulosaga kelinadi.

Tanlanma kuzatish usuli mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy holati, asosiy demografik tavsiflar, aholi bandligi, uning turmush darajasi, yashash sharoitlari, ta'lim, sog'liqni saqlash, madaniyat sohalaridagi ko'rsatkichlarini aniqlashda, tovar va xizmatlar iste'mol bozori, transport va aloqa xizmatlari haqida ma'lumotlarni tahlil qilishda qo'llaniladi.

O'rganilishi kerak bo'lgan barcha obyektlar to'plami **bosh to'plam** deyiladi. **Tanlanma to'plam** (ba'zan tanlanma) deb bosh to'plamdan ajratib olingan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Shu to'plamlarning har bir elementini xarakterlovchi sifat yoki miqdor

ko'rsatkichlari majmuasi **statistik<sup>1</sup> ma'lumotlar** deyiladi.

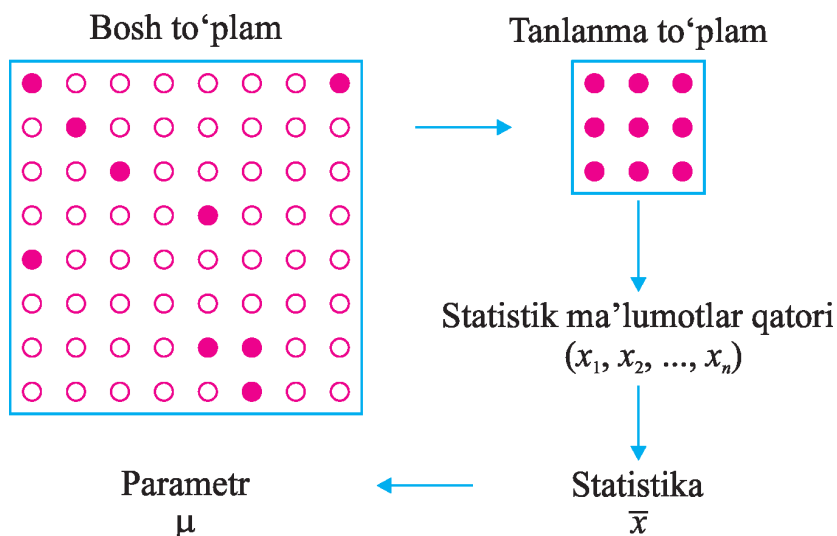
Statistik ma'lumotlar qatorining tabiati sonli bo'lishi shart emas. Masalan, foylanishda bo'lgan avtomashinalar rusumlari, ranglari o'rganilganda, ularga mos statistik ma'lumotlarning tabiati sonli emasligi ravshan.

Tabiati sonli bo'lmagan statistik ma'lumotlar **kvalitativ** (ing.quality – sifat), miqdoriy statistik ma'lumotlar esa **kvantitativ** (ing.quantum – miqdor) deyiladi.

Odatda, kvantitativ statistik ma'lumotlar sonlar ketma-ketligini (qatorini) tashkil qiladi.

Bosh to'plamning barcha elementlarini xarakterlovchi sifat yoki miqdor belgisi **parametr** deyiladi. Tanlanma to'plamning funksiyasi esa **statistika** deyiladi. Statistika miqdoriy xarakterga ega bo'lsa, uni **statistik kattalik** ham deyishadi.

Agar yuqoridagi 1-misolda har bir konserva idishining o'rtacha massasi-ni  $\mu$  deb belgilasak, u holda  $\mu$  – parametr, tanlanmadagi har bir konserva idishining  $\bar{x}$  o'rtacha massasi esa statistikaga misol bo'lishi mumkin. Bunda muay'an holatlarda statistikaga qarab, parametrning qiymatini baholash mumkin.



Keng ma'noda **statistika** deb statistik ma'lumotlarni to'plash, ularni tizimga solish, ishlov berish hamda ulardan ilmiy va amaliy xulosalar chiqarish usullarini o'rganadigan fanga aytiladi.

<sup>1</sup> statistika (lot. stato — davlat; status — holat)

## Savol va topshiriqlar

1. Bosh to‘plam, tanlanma to‘plam deganda nimani tushunasiz?
2. Parametr, statistika deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
3. Qaysi ko‘rsatkichni o‘rganimizda tanlanma kuzatish usulidan foydalanish qulayroq:
  - a) bog‘dagi olma daraxtlarining o‘rtacha hosildorligi;
  - b) O‘zbekistondagi avtomashinalarning rusumi va rangi;
  - c) mahallangizdagi avtomashinalarning rusumi va rangi;
  - d) O‘zbekistondagi o‘quvchilarning matematika fanidan o‘rtacha bahosi;
  - e) maktabdagi o‘quvchilarning matematika fanidan o‘rtacha bahosi;
  - f) do‘stlaringizning matematika fanidan o‘rtacha bahosi;
  - g) teatr tomoshabinlaridan har ikkinchisining jinsi;
  - h) maktabingizda tibbiy ko‘rikdan o‘tayotgan o‘quvchilarning o‘rtacha vazni?
4. Ikkita turli sifatga ega bo‘lgan bosh to‘plamga misol keltiring.
5. Quyidagi statistik ma’lumotlar qatori kvantitativmi kvalitativmi:
  - a) bu yili kasalxonaga tushgan birinchi 40 nafar kasalning jinsi;
  - b) tasodifiy ravishda olingan 20 nafar o‘quvchining sochlari rangi;
  - c) tasodifiy ravishda olingan 20 nafar o‘quvchining yoshi;
  - d) bu oyda ishlab chiqarilgan 20 ta avtomashinaning yoqilgi sarflash ko‘rsatkichi;
  - e) tasodifiy ravishda olingan 100 nafar saylovchining siyosiy partiyalarga mansubligi?
6. Tadbirkor supermarketga bir kunda kirgan insonlarning o‘rtacha sarflagan mablag‘lari 57000 ekanligini aniqladi.
  - a) U qanday bosh to‘plamni o‘rgandi?
  - b) U qanday parametrni o‘rgandi?
  - c) Tanlanma kuzatuvni amalga oshirsak, uning statistikasi qanday ma’noga ega? U nechaga teng bo‘lishi mumkin?
7. Tibbiyot sohasidagi tadqiqotchi oxirgi yillarda tug‘ilgan chaqaloqlarning o‘rtacha vaznini baholamoqchi. U 235 nafar chaqaloqning o‘rtacha massasini hisoblaganda, 3 kg 270 g qiymatni hosil qildi.
  - a) U qanday bosh to‘plamni o‘rgandi?
  - b) U qanday parametrni o‘rgandi?
  - c) Tanlanma qanday statistikaga ega? U nechaga teng?
  - d) Parametr nechaga teng bo‘lishini aniq bila olamizmi?
8. Sotsiolog hududdagi yosh qizlar orasida sport bilan shug‘ullanayotgan

qizlarning ulushini baholamoqchi. Tasodifan olingan 1 320 nafar qizdan 145 nafari (ya'ni taxminan 11 foizi) sport bilan shug'ullanganligi aniqlandi.

- a) Sotsiolog qanday bosh to'plamni o'rgandi?
- b) U qanday parametrni o'rgandi?
- c) Tanlanma qanday statistikaga ega? U nechaga teng?
- d) Parametr nechaga teng bo'lishini aniq bila olamizmi?

Biz bundan buyon faqat kvantitativ statistik ma'lumotlar qatorini qaraymiz. Bu holda tanlanmaga oid statistik ma'lumotlar qatori chekli sonli to'plamni tashkil qilishi ravshan.

**Tanlanma hajmi** yoki **bosh to'plam hajmi** deb, shu to'plamlardagi obyektlar soniga atiladi.

Masalan, 1-misolda 10000 ta konserva sifatini tekshirish uchun 200 ta konserva tanlab olingan bo'lsa, bosh to'plam hajmi  $N = 10000$  va tanlanmaning hajmi  $n = 200$  ga teng bo'ladi.

Tanlanmaning har bir elementi **varianta**, tartiblangan tanlanma **variatsion qator** deb ataladi.

Bosh to'plamdan tanlanma to'plam olingan va unda  $x_1$  qiymat  $n_1$  marta,  $x_2$  qiymat  $n_2$  marta,  $\dots$ ,  $x_k$  qiymat  $n_k$  marta kuzatilgan bo'lsin.  $n_i$  kattalik  $x_i$  variantaning **chastotasi**,  $\frac{n_i}{n}$  kattalik esa **nisbiy chastotasi** deb ataladi.

Ravshanki, tanlanmaning hajmi  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  ga teng.

Statistik ma'lumotlarga quyidagicha dastlabki ishlov berilishi mumkin:

- 1) variatsion qator tuziladi;
- 2) ma'lumotlar chastotalar bo'yicha jadval ko'rinishida yoziladi;
- 3) chastotalar poligoni chiziladi;
- 4) gistogramma chiziladi.

**2-Misol.** Iqtisodchi firma ishchilarining malaka toifalarini o'rganish uchun 20 nafarining hujjatlari asosida quyidagi statistik ma'lumotlar qatorini hosil qildi: 4; 4; 3; 2; 5; 2; 3; 5; 4; 3; 3; 2; 5; 4; 5; 4; 6; 3; 4; 5.

Bu ma'lumotlarni o'sish tartibida yozib *variatsion qatorni* hosil qildi: 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6.

Variatsion qatorda  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 3$ ;  $x_3 = 4$ ;  $x_4 = 5$ ;  $x_5 = 6$  — variantalar;  $x_1$  variantaning chastotasi 3 ga;  $x_2$  niki 5 ga;  $x_3$  niki 6 ga;  $x_4$  niki 5 ga;  $x_5$  niki esa 1 ga teng. Bundan tashqari  $x_1$  variantaning nisbiy chastotasi  $\frac{3}{20} = 15\%$ ;



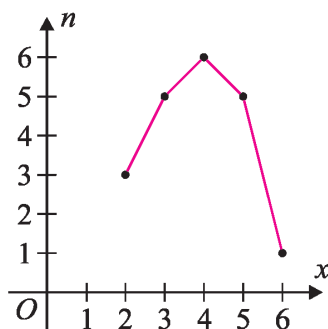
$x_2$  variantaning nisbiy chastotasi esa  $\frac{5}{20} = 25\%$  ga teng.

So‘ng iqtisodchi chastotalar bo‘yicha jadvalni tuzdi:

Malaka toifasi $x_i$	2	3	4	5	6
Ishchilar soni $p_i$	3	5	6	5	1

Dekart koordinatalar sistemasida (2, 3), (3, 5), (4, 6), (5, 5) va (6, 1) nuqtalarni sinq chiziq bilan tutashtirdi. Bu bilan iqtisodchi **chastotalar poligoni** yasadi:

Chastotalar poligoni



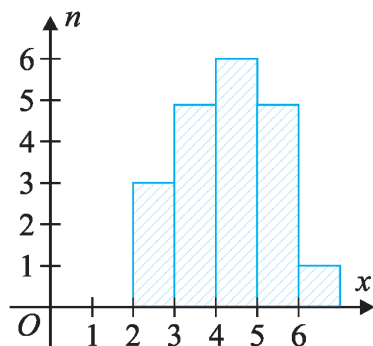
Umumiy holda **chastotalar poligoni** deb  $(x_1; n_1)$ ,  $(x_2; n_2)$ , ...,  $(x_k; n_k)$  nuqtalarni tutashtiruvchi sinq chiziqqa aytiladi.

**Nisbiy chastotalar poligoni** deb  $(x_1, \omega_1)$ ,  $(x_2, \omega_2)$ , ...,  $(x_k, \omega_k)$  nuqtalarni tutashtiruvchi sinq chiziqqa aytiladi, bunda  $\omega_1 = \frac{n_1}{n}$ ,  $\omega_2 = \frac{n_2}{n}$ , ...,  $\omega_k = \frac{n_k}{n}$  – nisbiy chastotalar.

So‘ng absissa o‘qida asoslari [2; 3], [3; 4], [4; 5], [5; 6], [6; 7] kesmalar hamda balandliklari, mos ravishda, 3; 5; 6; 5; 1 chastotalarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklarni yasadi. Bunday shakl **gistogramma** deb nomlanadi.

Agar ma‘lumotlar qatori katta bo‘lib, unda takrorlanadigan qiymatlar kam uchrasa, chastotalar jadvalini tuzishda noqulayliklarga duch kelamiz. Bunday hollarda ma‘lumotlarni tahlil qilish uchun ularni o‘z ichiga olgan bir nechta bir hil uzunlikdagi *oraliqlar* qaraladi. Har bir oraliqqa tegishli

Gistogramma

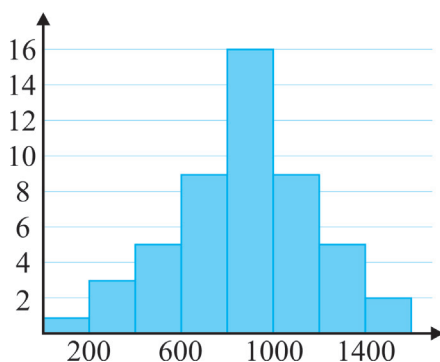


variantalar soni (uni ham chastota deb nomalaymiz) hisoblanadi va tegishli jadval tuziladi.

**3-misol.** Ishlab chiqarilayotgan elektr asboblarning xizmat qilish muddatini o‘rganish uchun 50 ta mahsulot tanlab olindi. Natijada quyidagi jadval tuzildi:

Xizmat qilish muddati, kun	Chastota
200 gacha	1
200 – 400	3
400 – 600	5
600 – 800	9
800 – 1000	16
1000 – 1200	9
1200 – 1400	5
1400 – 1600	2

Asoslari absissa o‘qidagi mos oraliqlar bo‘lgan hamda balandliklari, mos ravishda, chastotalarga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan tashkil topgan **gistogramma** yasaladi:



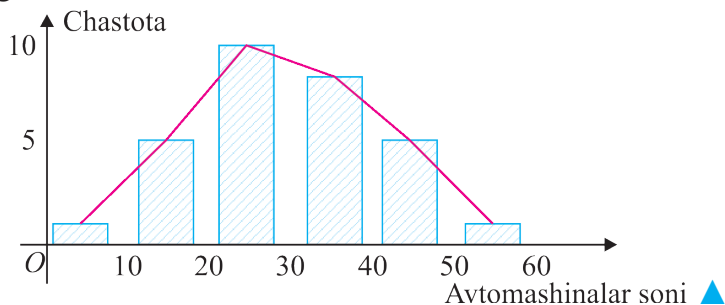
**4-misol.** Odil “Yo‘l harakati havfsizligi oyi” davomida maktab darvozasi yonida soat 7.45 dan 8.00 gacha nechta avtomashina o‘tishini sanadi va quyidagi jadvalni tuzdi:

Avtomashinalar soni	Sanash	Chastota	Nisbiy chastota
0 – 9		1	0,033
10 – 19		5	0,167
20 – 29		10	0,333
30 – 39		9	0,3
40 – 49		4	0,133
50 – 59		1	0,033
Jami		30	

Ma’lumotlarni ustunli diagramma va poligon ko‘rinishda ifodalang.

Kuzatilgan vaqt oralig'ida eng ko'pi bilan nechta avtomashina o'tdi?

△ Asoslari jadvaldagi kesmalar bo'lgan va balandliklari chastotalarga teng to'g'ri to'rtburchaklar (ustunlar) chizib, ustunli diagrammani hosil qilamiz va har bir ustunning yuqori qismining o'rtalarini tutashtiramiz. Natijada poligon hosil bo'ladi:



### Mashqlar

Mashqlarda berilgan ma'lumotlarni jadval, ustunli diagramma, poligon va gistogramma ko'rinishida ifodalang. Qaysi varianta eng ko'p uchradi? Bundan qanday xulosaga kelsa bo'ladi? (23–25):

23. Maktab futbol jamoasining har o'yinda kiritgan gollari quyidagicha:

2	0	1	4	0	1	2	1	1	0	3	1
3	0	1	1	6	2	1	3	1	2	0	2

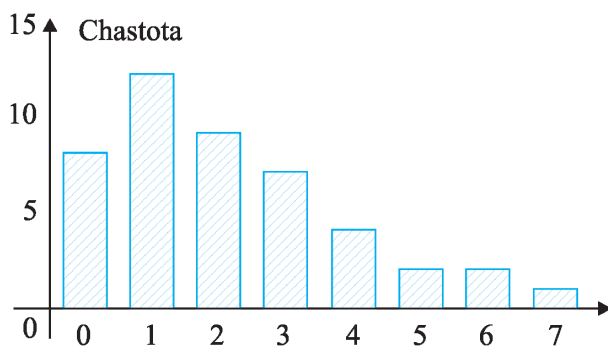
24. Jadvalda oxirgi haftada 40 nafar o'quvchining nechta a'lo baho olgani yozilgan:

0	2	1	5	0	1	4	2	3	1
4	3	0	2	9	2	1	5	0	3
6	4	2	1	5	1	0	2	1	4
3	1	2	0	4	3	2	1	2	3

25. 10 ta savoldan iborat test nazoratida o'quvchilar to'g'ri yechgan testlar soni quyidagicha bo'lgan:

5	7	6	4	6	5	6	7	5	8
7	6	9	8	7	6	6	9	6	7
6	4	7	5	8	7	6	8	7	8
5	6	9	7						

26. Marketolog tasodifiy ravishda tanlangan insonlardan "Siz shu haftada necha marta do'konga kirdingiz?" degan savol bilan murojaat qildi va so'rovnom natijalarini quyidagicha tasvirladi:



- So‘rovnomada nechta kishi ishtirok etdi?
- Qaysi varianta eng ko‘p uchradi? Qanday xulosaga kelsa bo‘ladi?
- Necha kishi bu hafta do‘konga kirmagan?
- Do‘konga 3 martadan ko‘proq kirgan kishilar necha foiz?
- Chastotalar jadvalini tuzing.

**27.** Samandar maktabga avtobusda qatnaydi. 30 kun mobaynida u o‘zi chiqqan avtobusdagi yo‘lovchilar sonini sanadi va quyidagi ma‘lumotlarni hosil qildi:

17	25	32	19	54	30	22	15	38	8
21	29	37	25	42	35	19	31	26	7
22	11	27	44	24	22	32	18	40	29

- 0–9, 10–19, ..., 40–49 oraliqlarga mos chastotalar jadvalini tuzing.
- Necha kunda avtobusga 10 nafardan kamroq yo‘lovchi chiqqan?
- 30 nafardan ko‘proq yo‘lovchi chiqqan kunlar necha foiz?
- Ustunli diagramma, poligonni chizing.
- Qaysi oraliqda eng ko‘p yo‘lovchi chiqqan?

**28.** Adabiyot darsligidan sizga yoqqan she‘rni tanlab oling va undagi unli harflar sonini sanab chiqing. Mos jadvalni, ustunli diagrammani, poligonni va gistogrammani yasang. Qaysi harf ko‘proq uchradi? Natijangizni boshqa sinfdoshlaringiz bilan solishtiring.

Jami unli harflar	A	E	I	O	U	O‘
Sanash natijasi						

*O'rta qiymat, moda va mediana*

Mamlakatning ijtimoiy-iqtisodiy holati, asosiy demografik tavsiflar, aholi bandligi, uning turmush darajasi, yashash sharoitlari, ta'lim, sog'liqni saqlash, madaniyat sohalari ko'rsatkichlarini aniqlashda, tovar va xizmatlar iste'mol bozori, transport va aloqa xizmatlari haqidagi statistik ma'lumotlar qatorlariga ishlov berish *statistik kattaliklar yoki xarakteristikalar* asosida yuritiladi.

Quyidagi statistik xarakteristikalar ma'lumotlar qatorining turli ma'nodagi *markazlarini (ba'zi adabiyotlarda markaziy tendensiya deb yuritiladi)* ifodalaydi: *o'rta qiymat, moda va mediana*.

$$o'rta\ qiymat = \frac{\text{ma'lumotlar qatoridagi hadlar yig'indisi}}{\text{ma'lumotlar qatoridagi hadlar soni}}.$$

**1-misol.** 11-sinf o'quvchilaridan 12 nafari tanlab olinib, ularning bo'ylari o'lchandi:

168, 159, 181, 172, 161, 163, 164, 170, 169, 154, 168, 175.

O'quvchilarning *o'rtacha* bo'yi necha santimetr?

O'quvchilardan nechtasining bo'yi o'rtacha bo'ydan baland?

△ O'lchash natijalarini qo'shib, o'quvchilar soniga bo'lamiz:

$(168+159+181+172+161+163+164+170+169+154+168+175):12=167$ .

Demak, o'quvchilarning o'rtacha bo'yi 167 cm ekan. O'quvchilardan 7 nafarining bo'ylari o'rtacha bo'ydan baland. ▲

*O'zgarish kengligi deb, berilgan statistik ma'lumotlar qatoridagi eng katta variant bilan eng kichik variant ayirmasiga aytiladi.*

Masalan, o'quvchilar bo'ylari to'g'risidagi ma'lumotlar qatorining o'zgarish kengligi  $181-154=27$  cm ekan.

**2-misol.** O'quvchining chorak davomida matematika fanidan olgan baholari 5, 3, 4, 2, 5, 5, 4, 3, 3, 5, deylik.

Uning o'rtacha bahosi  $\frac{5+3+4+2+5+5+4+3+3+5}{10} = 3,9$  bo'lgani uchun bu son yahlitlanib chorakka 4 baho chiqarildi. To'plangan 10 ta baho ichida oltitasi o'rtacha bahodan yuqori ekanligi ko'rinib turibdi.

Shu bilan birga eng ko'p uchragan baho 5 ekanligini aytish joiz.

O'rta qiymat *ma'lumotlar qatorining markazini* ifodalaydigan sonidir. Bu qiymat qatarga tegishli bo'lishi shart emas.

Masalan, maktabda test sinovlarining o'rtacha natijasi 75% bo'lsa, ayrim o'quvchilar natijasi 75% dan yuqori, ayrimlariniki esa 75% dan past bo'lishi mumkin. Bunda 75% natijaga erishgan o'quvchi bo'lmasligi

ham mumkin.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tanlanmaning  $\bar{x}$  o'rta qiymati  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$  formula

yordamida hisoblanadi, bu yerda  $n$  – tanlanma hajmi,  $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ .

*Ma'lumotlar qatorida* eng ko'p uchraydigan varianta *ma'lumotlar qatorining modasi* deyiladi. Masalan, 2-misol uchun moda 5 ga teng.

**Topshiriq.** Kundalik daftaringizda o'tgan chorakda matematika fanidan olgan baholaringiz qatorini yozing. O'rtacha bahoingizni va baholar qatorining modasini toping. Qanday hulosaga keldingiz?

*Ma'lumotlar qatorida* variantalar soni toq son bo'lsa, u holda qatorning *medianasi* deb variatsion qatorning o'rtasida turgan songa aytiladi.

*Ma'lumotlar qatorida* variantalar soni juft bo'lsa, u holda qatorning *medianasi* deb variatsion qatorning o'rtasida turgan ikki variantaning o'rta arifmetigiga aytiladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  tanlanmaning medianasini topish uchun dastlab  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sonlar o'sish tartibida joylashtiriladi, ya'ni variatsion qator hosil qilinadi. So'ng  $\frac{n+1}{2}$  qiymat topiladi.

Agar  $\frac{n+1}{2}$  son butun bo'lsa, ya'ni  $n$  – toq bo'lsa, u holda mediana variatsion qatorning  $\frac{n+1}{2}$ - hadiga,  $\frac{n+1}{2}$  son butun bo'lmasa, yani  $n$  – juft bo'lsa, u holda mediana variatsion qatorning  $\frac{n}{2}$ -chi va  $\frac{n+2}{2}$ - hadlarining o'rta arifmetigiga teng bo'ladi.

Masalan,  $n=13$  bo'lsa,  $\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$  bo'ladi. Bu holda mediana 7-variantaga teng.

Agar  $n=14$  bo'lsa,  $\frac{n+1}{2} = \frac{14+1}{2} = 7,5$  va bu holda mediana 7- va 8-variantalarning o'rta arifmetigiga teng.

Mediana variatsion qatorni teng ikki qismga bo'ladi. Shulardan bir qismi qiymati medianadan katta bo'lmagan variantalardan, ikkinchi qismi esa

qiymati medianadan kichik bo'lmagan variantalardan tashkil topgan.

Masalan, maktabda test sinovlari natijalari medianasi 75 % bo'lsa, natijalari 75 % dan katta bo'lmagan o'quvchilar soni barcha o'quvchilar sonining teng yarmini tashkil qiladi.

**3-misol.** Statistik ma'lumotlar qatorining o'rta qiymatini, modasini va medianasini toping:

a) 3, 6, 5, 6, 4, 5, 5, 6, 7;      b) 13, 12, 15, 13, 18, 14, 16, 15, 15, 17.

△ a) O'rta qiymat:  $\frac{3+6+5+6+4+5+5+6+7}{9} = \frac{47}{9} \approx 5,2$

Bu qator ikkita modaga ega: 5 va 6 (ular uch martadan takrorlanadi).

$n=9$ ,  $\frac{n+1}{2}=5$  bo'lgani uchun variatsion qatorning o'rta hadini

topamiz: ~~3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7.~~

Demak, mediana 5 ga teng ekan.

b) O'rta qiymat:  $\bar{x} = \frac{13+12+15+13+18+14+16+15+15+17}{10} = \frac{148}{10} = 14,8.$

Bu qator modasi 15 ga teng (bu son eng ko'p marta takrorlanadi).  $n=10$ ,  $\frac{n+1}{2}=5,5$  bo'lgani uchun, variatsion qatorni tuzib, variatsion qatorning

ikkita o'rta hadini topamiz: ~~12, 13, 13, 14, 15, 15, 15, 16, 17, 18.~~

Demak, mediana 15 ga teng ekan.

### Mashqlar

**29.** Ma'lumotlar qatorlarining modasini, medianasini va o'rta qiymatini toping.

a) 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9;

b) 10, 12, 12, 15, 15, 16, 16, 17, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 21;

c) 22,4, 24,6, 21,8, 26,4, 24,9, 25,0, 23,5, 26,1, 25,3, 29,5, 23,5.

**30.** Ma'lumotlar qatorlari berilgan bo'lsin:

A: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 10;

B: 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 15.

a) Ularning o'rta qiymatlarini toping.

b) Ularning medianalarini toping.

d) Nega A qatorning o'rta qiymati B qatorning o'rta qiymatidan kichik?

c) Nega A qatorning medianasi B qatorning medianasiga teng?

**31.** Ikki nafar sportchi musobaqada quyidagi natijalarni ko'rsatdi:

160, 175, 142, 137, 151, 144, 169, 182, 175, 155;

157, 181, 164, 142, 195, 188, 150, 147, 168, 148.

Ularning qaysi biri o'rtacha hisobda yuqoriroq natijaga erishdi?

32. Olim 15 kun davomida har kuni necha dona olma yeganini yozib bordi: 2, 3, 1, 1, 0, 0, 4, 3, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 4. Shu qatorning:

a) moda; b) o'rta qiymat; c) medianasini toping.

33. Maktab basketbol jamoasi 4 ta o'yinda savatga 43, 55, 41 va 37 ta ochkoli to'p tushirdi (ochkoga ega bo'ldi).

a) Shu to'rt o'yinda savatga o'rtacha necha ochkoli to'p tushirildi?

b) O'rtacha ochkolar soni saqlanishi uchun keyingi, beshinchi o'yinda savatga necha ochkoli to'p tushirilishi kerak?

c) Beshinchi o'yinda savatga 25 ochkoli to'p tushirilgan bo'lsa, besh o'yinda o'rtacha ochkolar soni nechaga teng bo'ladi?

d) Jamoa 6 – o'yinda savatga 41 ochkoli to'p tushirdi. O'rtacha ochkolar soni qanday o'zgaradi? 6 ta o'yinda o'rtacha ochkolar soni nechaga teng bo'ladi?



### Savollar va topshiriqlar

- 1) Qanday statistik xarakteristikalarni bilasiz?
- 2) Moda nimani anglatadi?
- 3) Berilgan sonlarning medianasi qanday topiladi?

Agar  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tanlanmaning qiymatlari, mos ravishda,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  chastotalarga ega, shu bilan birga  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$  bo'lsa, u holda tanlanmaning o'rta qiymati

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} \quad (2)$$

yoki

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

formula bo'yicha topiladi.



**4-misol.** Statistik qator quyidagicha berilgan bo‘lsin:

Qiymat ( $x_i$ )	Chastota ( $n_i$ )
3	1
4	1
5	3
6	7
7	15
8	8
9	5
Jami	$\sum n_i = 40$

Uning o‘rta qiymatini topish uchun jadvalga yana bir ustunni qo‘shib, unga  $n_i \cdot x_i$  ko‘paytmalarni yozamiz va tegishli hisob-kitoblarni amalga oshiramiz:

Qiymat ( $x_i$ )	Chastota ( $n_i$ )	Ko‘paytma ( $n_i \cdot x_i$ )
3	1	$1 \cdot 3 = 3$
4	1	$1 \cdot 4 = 4$
5	3	$3 \cdot 5 = 15$
6	7	$7 \cdot 6 = 42$
7	15	$15 \cdot 7 = 105$
8	8	$8 \cdot 8 = 64$
9	5	$5 \cdot 9 = 45$
Jami	$\sum n_i = 40$	$\sum n_i \cdot x_i = 278$

Demak, o‘rta qiymat  $\frac{278}{40} = 6,95$  bo‘ladi.

Endi medianani topamiz. Tanlanma hajmi 40 ga teng bo‘lgani bois

$\frac{n+1}{2} = \frac{41}{2} = 20,5$  bo‘ladi. Demak, mediana 20- va 21- variantalarning

o‘rta arifmetigiga teng.

Uning qiymatini topish uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

Qiymat	Chastota	Yig‘ma chastota	Izoh
3	1	1	1 ta had 3 ga teng
4	1	$1+1=2$	2 ta had 4 dan kichik yoki teng
5	3	$2+3=5$	5 ta had 6 dan kichik yoki teng
6	7	$5+7=12$	12 ta had 6 dan kichik yoki teng

7	15	12+15=27	27 ta had 7 dan kichik yoki teng
8	8	27+8=35	35 ta had 8 dan kichik yoki teng
9	5	35+5=40	Barcha 40 ta had 9 dan kichik yoki teng
Jami			

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, 20- va 21- variantlar ikkalasi ham 7 ga teng.

Demak, mediana  $\frac{7+7}{2} = 7$  bo‘lar ekan.

**5-misol.** Xalqaro tennis musobaqasida O‘zbekiston vakili o‘yining setlarida jadvalda ko‘rsatilgandek bir nechta eys qayd etildi:

Eyslar soni	1	2	3	4	5	6
Chastota	4	11	18	13	7	2

- Shu setlarda qayd etilgan eyslarning o‘rtacha sonini aniqlang.
- Shu setlarda qayd etilgan eyslarning medianasini aniqlang.
- Modani toping.

△ Quyidagi jadvalni tuzamiz:

Eyslar soni ( $x_i$ )	Chastota ( $n_i$ )	Ko‘paytma ( $n_i x_i$ )	Yig‘ma chastota
1	4	4	4
2	11	22	15
3	18	54	33
4	13	52	46
5	7	35	53
6	2	12	55
Jami	$\sum n_i = 55$	$\sum n_i x_i = 179$	

$$a) \bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{179}{55} \approx 3,25.$$

Shu setlarda qayd etilgan eyslar o‘rtacha soni taxminan 3,25 ga teng.

b) Tanlanma hajmi  $n=5$  bo‘lgani uchun  $\frac{n+1}{2} = 28$ . Demak mediana 28-had bilan ustma-ust tushadi.

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, 16- haddan boshlab 33- hadgacha barcha hadlar qiymati 3 ga teng, demak mediana ham 3 ga teng.

c) Eng katta chastota 18 ga teng bo‘lgani uchun, unga mos eyslar soni 3 ga teng.

## Mashqlar

34. 3 ta tanga birgalikda 30 marta tashlanganda jadvalda ko'rsatilgan natija qayd etildi.

Gerblar soni	Necha marta kuzatildi
0	4
1	12
2	11
3	3
Jami	30

Shu ma'lumotlarga ko'ra:

- modani;
- medianani;
- o'rta qiymatni toping.
- O'zingiz ham 3 ta tanga olib shunday tajribani amalga oshirib ko'ring-chi? Qanday natijalarga erishdingiz?

35. Quyidagi jadvalda maktab direktoriga har kuni qilingan murojaatlar soni ko'rsatilgan. Bunga ko'ra:

Kunlik murojaatlar soni	0	1	2	3	4	5	6	7	8	11
Chastota	5	8	13	8	6	3	3	2	1	1

- Modani, medianani va o'rta qiymatni toping;
- Mos ustunli diagrammani yasang va moda, mediana va o'rta qiymat qayerda ekanligini ko'rsating.
- Nega o'rta qiymat medianadan katta?
- Ma'lumotlar qatorining markazi sifatida qanday statistik kattalikni tanlar edingiz? Javobingizni asoslang.

36. Amaldagi texnik qoidalarga ko'ra gugurt chiqaradigan firma gugurt qutisiga 50 dona gugurt cho'pini solishi kerak. Sifat komissiyasi 30 ta gugurt qutisini tanlab, ulardagi gugurt cho'plarini sanadi va natijalarni quyidagi jadval ko'rinishda yozdi:

Qutidagi gugurtlar soni	Chastota
47	5
48	4
49	11
50	6
51	3
52	1
Jami	30

- Modani, medianani va o'rta qiymatni toping.

b) Firma texnik qoidalarga rioya qilmoqdam? Nega?

37. Samandar mahallasida istiqomat qiladigan 59 ta oilada bolalar sonini aniqlab, quyidagi jadvalni tuzdi:

Oiladagi bolalar soni	Chastota
1	5
2	28
3	15
4	8
5	2
6	1
Jami	59

Samandarga modani, medianani va o'rtacha qiymatni topishga yordam bering.

Statistik ma'lumotlar oraliqlar bo'yicha guruhlanganda o'rtacha qiymat aniq topilmasligi mumkin. O'rtacha qiymatni taqriban topish uchun har bir oraliqning o'rtasi bilan ish ko'riladi. Bu usulning mohiyatini tushunish uchun misol ko'raylik.

**6-misol.** Firma ishchilari yoshi bo'yicha quyidagicha taqsimlangan:

Yoshi	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40	41 – 45	46 – 50	51 – 55
Chastota	11	14	32	27	29	17	7

Firma ishchilarining o'rtacha yoshining taqribiy qiymatini topish uchun ushbu jadvalni tuzamiz:

Yoshi (yillar)	Chastota ( $n_i$ )	oraliq o'rtasi ( $x_i$ )	$n_i x_i$
21 – 25	11	23	253
26 – 30	14	28	392
31 – 35	32	33	1056
36 – 40	27	38	1026
41 – 45	29	43	1247
46 – 50	17	48	816
51 – 55	7	53	371
Jami	$\sum n_i = 137$		$\sum n_i x_i = 5161$

Bundan 
$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i} = \frac{5161}{137} \approx 37,7.$$

Firma ishchilarining o'rtacha yoshi taqriban 37,7 ga teng ekan.

### Mashqlar

38. Jadvalda o'quvchilardan olingan test natijalari qayd etilgan:

Ballar	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49
Chastota	2	5	7	27	9

O'rtacha natijani taqriban aniqlang.

39. Jadvalda yoqilg'i shahobchalarida sotilgan kunlik benzin hajmi haqida ma'lumotlar keltirilgan:

Hajm (litr)	Chastota
2000 – 2999	4
3000 – 3999	4
4000 – 4999	9
5000 – 5999	14
6000 – 6999	23
7000 – 7999	16

- Nechta shahobcha o'rganilgan?
- Bir kunda jami qancha benzin sotiladi?
- Bir kunda o'rta hisobda qancha benzin sotiladi?

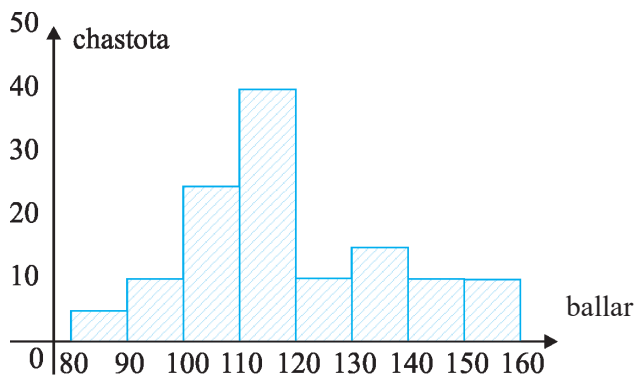
40. Basketbolchining o'yinlarda keltirgan ochkolari soni quyidagicha:

15	8	6	10	0	9	2	16	11	14	13	17	16	12
3	13	5	18	14	19	4	15	15	19	19	14	6	11
9	7	15	19	12	17	14	13	12	10	6	8	9	3

- O'rta hisobda bir o'yinda qancha ochko olingan?
- Ma'lumotlarni quyidagi oraliqlarga guruhlab, o'rtacha ochkolar sonini taqriban toping va asl o'rta qiymat bilan solishtiring:

- 0 – 4, 5 – 9, 10 – 14, 15 – 19;
- 0 – 3, 4 – 7, 8 – 11, 12 – 15, 16 – 19.

41. Test sinovlarida o'quvchilar tomonidan olingan natijalar quyidagi gistogrammada tasvirlangan:



- Test sinovlarda qancha o'quvchi qatnashgan?
- O'rtacha ballar soni nechaga tengligini baholang.
- 100 balldan yuqori natijaga erishgan o'quvchilar ulushini toping.

d) Agar 20% o'quvchi rag'batlantirilishi ko'zda tutilgan bo'lsa, rag'bat olish uchun eng quyi ball nechaga teng bo'ladi?

**Chetlanish, standart chetlanish.** Statistik ma'lumotlar qatorining modasi, medianasi va o'rta qiymati o'rganilayotgan qatorning qaysi qiymati eng xarakterli ekanligini ko'rsatadi, lekin bular qatorni tavsiflash uchun hali yetarli emas. Chunki statistik ma'lumotlar orasidagi har xillik, ya'ni o'zgaruvchanlikning mavjudligi ma'lumotlar to'plamining asosiy xususiyati hisoblanadi.

Agar o'zgaruvchanlik bo'lmaganda edi, statistik qator haqida ma'lumotni qatorning bitta elementiga qarab olish mumkin bo'lar edi. O'zgaruvchanlik mavjud bo'lganda esa bu ma'lumot o'zgaruvchanlikning xarakteri va darajasini hisobga olgan bo'lishi kerak.

Yuqoridagi misollarda ma'lumotlar qatori elementlarining qatorning o'rta arifmetik qiymatidan ozmi-ko'pmi chetlanganini ko'rdik. Bu *chetlanish belgining qanchalik o'zgaruvchanligini ko'rsatadi*.

Tanlanma to'plam belgisining kuzatilgan qiymatlari uning o'rtacha qiymati atrofida tarqoqligini xarakterlash uchun *standart chetlanishdan* foydalaniladi.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  tanlanmaning o'rta qiymati  $\bar{x}$  bo'lsin. Uning *standart chetlanishi* deb

$$s_n = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{yoki} \quad s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

songa aytiladi.

Bunda  $(x_i - \bar{x})^2$  ifoda  $x_i$  belgi  $\bar{x}$  o'rta qiymatdan qanchalik *chetlanishini*,

$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  ifoda barcha chetlanishlar yig'indisini,  $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$  ifoda esa

o'rtacha chetlanishni bildiradi. Ildiz belgisi esa o'rtacha chetlanishning o'lchov birligi ma'lumotlar o'lchov birligiga mosligini ta'minlash uchun qo'yiladi.

**7-misol.** 2, 5, 4, 6, 7, 5, 6 qatorning standart chetlanishini hisoblang.

$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 4 + 6 + 7 + 5 + 6}{7} = 5$  o'rta qiymatni hisoblab, quyidagi jadvalni

tuzamiz:

Ochko ( $x_i$ )	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	-3	9
4	-1	1
5	0	0
5	0	0
6	1	1
6	1	1
7	2	4
35		16

So'ng standart chetlanishni hisoblaymiz:

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{16}{7}} \approx 1,51.$$

Agar  $n$  hajmli tanlanmada  $x_1, x_2, \dots, x_k$  qiymatlar, mos ravishda,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  chastotalarga ega bo'lsa, u holda standart chetlanish

$$s_n = \sqrt{\frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2}{n}}$$

yoki  $s_n = \sqrt{\frac{\sum n_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i}}$  formula yordamida hisoblanadi .

**8-misol.** Tanlanma to'plam quyidagi jadval bilan berilgan:

$x_i$	1	2	3	4
$n_i$	20	15	10	5

Standart chetlanishni toping.

$$\triangle \bar{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = \frac{100}{50} = 2.$$

Endi jadvalni to'ldiramiz:

$(x_i)$	$(n_i)$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
1	20	-1	1	20
2	15	0	0	0
3	10	1	1	10
4	5	2	4	20
Jami:	50			50

$$\text{Demak, } s_n = \sqrt{\frac{20 + 0 + 10 + 20}{20 + 15 + 10 + 5}} = 1.$$

## Mashqlar

42. Tashkilotning avtomashinalari bir haftada sarflagan yoqilg'i miqdori haqidagi ma'lumotlar quyidagicha bo'lsin:

62, 40, 52, 48, 64, 55, 44, 75, 40, 68, 60, 42, 70, 49, 56

Bu qatorning standart chetlanishini hisoblang.

43. Fermer olmazordan tasodifiy ravishda tanlangan bir nechta olmalar-ning vaznini o'lchab,

87, 75, 68, 69, 81, 89, 73, 66, 91, 77, 84, 83, 77, 84, 80, 76, 67

tanlanmani hosil qildi.

Tanlanmaning o'rta qiymatini va standart chetlanishni hisoblang.

Olmazordagi jami olmalar-ning o'rtacha vazni va standart chetlanishi haqida nima deya olasiz?

44. Valijon mahallasida istiqomat qiladigan oilalarda bolalar sonini aniqlab, quyidagi jadvalni tuzdi:

Oiladagi bolalar soni, ( $x$ )	0	1	2	3	4	5	6	7
Chastota, ( $n_i$ )	14	18	13	5	3	2	2	1

Ma'lumotlar qatorining o'rta qiymatini va standart chetlanishni toping.

45. Musobaqada qatnashgan ishtirokchilarning yoshi haqidagi statistik ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan:

Yoshi	11	12	13	14	15	16	17	18
Chastota	2	1	4	5	6	4	2	1

Musobaqada qatnashgan ishtirokchilarning o'rtacha yoshini va standart chetlanishni toping.

46. Tuman sog'lomlashtirish maskani yil mobaynida har haftada murojaat qilgan fuqarolar sonini hisoblab, quyidagi jadvalni to'ldirdi:

Mijozlar soni	Chastota
36	2
39	5
44	9
45	11
46	15
48	5
50	4
52	1
Jami	52

Haftada murojaat qilgan fuqarolarning o'rtacha sonini va standart chetlanishni toping.



**Sochilish diagrammasi.** Kundalik faoliyatimizdagi ko'pgina amaliy masalalarda, tajribalarda o'rganilayotgan ikkita ma'lumotlar qatorlari o'rtasida bog'liqlikni aniqlash talab etiladi.

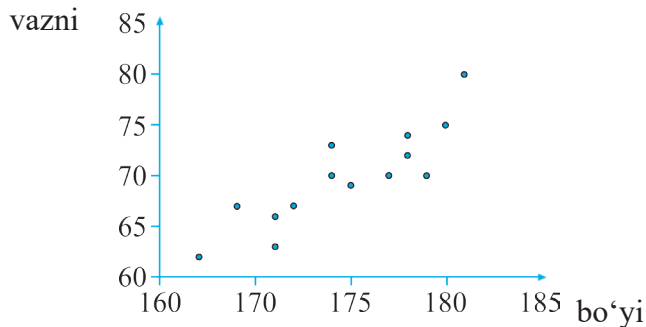
Bunda *sochilish diagrammasi* deb nomlangan diagramma yordam beradi.

**1-misol.** Inson bo'yi va vazni orasida bog'lanish bormi?

△ Bu savolga javob topish uchun 15 nafar yigit tanlanib, ularning bo'ylari va vaznlari o'lchandi. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ldi:

Bo'yi, sm	167	169	179	178	177	175	171	181	174	175	180	174	172	178	171
Vazni, kg	62	67	70	72	70	69	63	80	73	66	75	70	67	74	66

Dekart koordinatalar sistemasida absissalari bo'ylar, ordinatalari esa vaznlar bo'lgan (167; 62) ..., (171; 66) nuqtalarni tasvirlaymiz:



Hosil bo'lgan diagramma *sochilish diagrammasi* deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, taxminan bir xil vaznga ega bo'lgan insonlar turli bo'ylarga ega bo'lishi mumkin va, aksincha, taxminan bir xil bo'yga ega bo'lgan insonlar turli vaznlarga ega bo'lishi mumkin. Bundan, shu miqdorlar (bo'y va vazn) orasidagi qat'iy bog'lanish yo'q, degan hulosaga kelamiz. Ammo, umuman aytganda, insonning bo'yi kattalashsa, uning vazni ham katta bo'laveradi. ▲

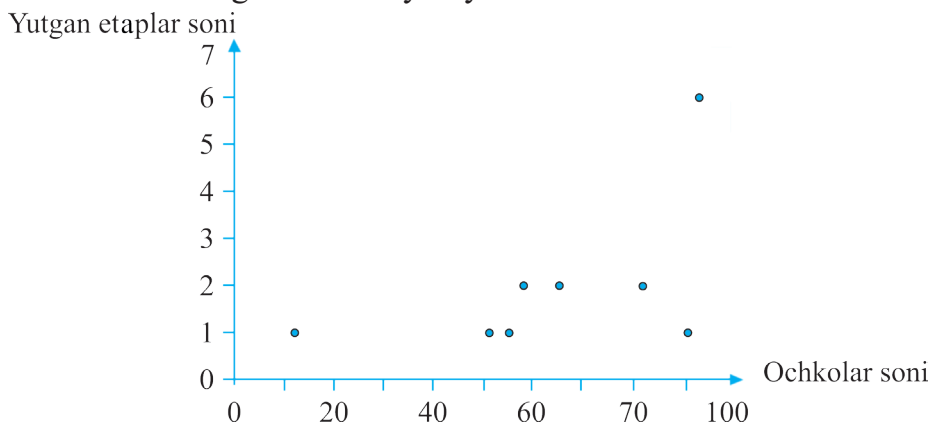
*Sochilish diagrammasi ikki tur ma'lumotlar qatorlari orasidagi bog'lanishning taxminiy xarakterini ko'rsatadi.*

**2-misol.** Quyidagi jadvalda "Formula-1" poygasi qatnashchilarining bir mavsumda erishgan natijalari ko'rsatilgan:

Poygachi	Yutgan etaplar soni	Ochkolar soni	O'rin
M.Shumaxer	6	93	1
K.Raykonen	1	91	2
X.P.Montoyya	2	82	3
R.Barikello	2	65	3
R.Shumaxer	2	58	5
F.Allonso	1	55	6
D.Kultxart	1	51	7
D.Fizikella	1	12	12

G'alaba qozongan etaplar soni bilan barcha etaplarda to'plangan ochkolar orasida bog'lanish bormi?

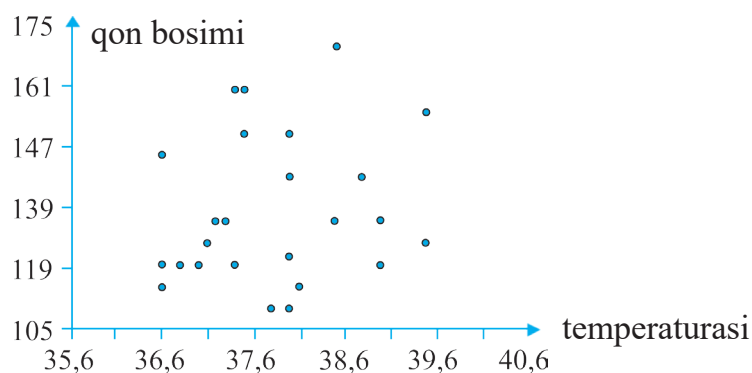
△ Sohilish diagrammasini yasaymiz:



Diagrammadan ko'rinib turibdiki, faqat bitta bosqichda g'alaba qozongan poygachilar ham ko'p ochkolarni to'plashi mumkin ekan. Masalan, Raykonen deyarli barcha bosqichlarda ikkinchi bo'lib kelib, jami 91 ochko to'plagan. Ikkita bosqichda g'alaba qozonganlarning o'rtacha ochkolari soni (taxminan 68 ochko) bitta bosqichda g'alaba qozonganlarning o'rtacha ochkolaridan (taxminan 52 ochko) ko'proq.

G'alaba qozongan etaplar soni bilan barcha etaplarda to'plangan ochkolar orasida bog'lanish bor bo'lishi mumkin, ammo ko'rsatilgan jadval asosida bunday qat'iy hulosaga kelib bo'lmaydi. ▲

**3-misol.** Insonning salomatligi ko'pincha uning tanasi temperaturasi hamda arterial qon bosimiga bog'liq. Kasalxonada 25 nafar bemorning shu ko'rsatkichlari aniqlanib, mos sohilish diagrammasi qurildi:



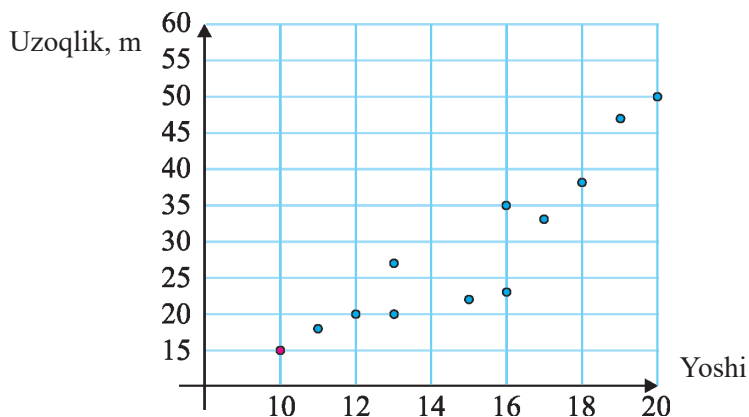
Bu diagrammada inson tanasi temperaturasi hamda arterial qon bosimi orasida hech qanday bog‘lanish yo‘qligi ko‘rinmoqda. Chindan ham, gripp bilan kasallangan inson tanasi temperaturasi yuqori bo‘lib, bunda arterial qon bosimi normal bo‘lishi mumkin. Shu bilan birga, arterial qon bosimi yuqori bo‘lgan insonlarning (gipertoniklar) hamda arterial qon bosimi past bo‘lgan insonlarning (gipotoniklar) tana temperaturasi normal bo‘lishi mumkinligi ma’lum.

**4-misol.** Maktab musobaqasida bolalar granatani uzoqqa uloqtirishda bellashdilar. Quyida ularning natijalari ko‘rsatilgan:

Sportchi	A	B	C	D	E	F	G	H	I	G	K	L
Yoshi	12	16	16	18	13	19	11	10	20	17	15	13
Uzoqlik, m	20	35	23	38	27	47	18	15	50	33	22	20

Sportchilar ko‘rsatgan natijalar ularning yoshlariga bog‘liqligi?

Agar sportchining yoshi kattaroq bo‘lsa, uning natijasi yuqoriroq bo‘ladimi?



Sochilish diagrammasini yasaymiz:

Ikkita 13 yashar hamda ikkita 16 yashar sportchilar turli natijalarni ko‘rsatmoqda. 16 yashar bitta sportchi esa 13 yashar bitta sportchidan yomonroq natija ko‘rsatdi.

Shunga qaramasdan, umuman aytganda, sportchilar ko'rsatgan natijalari ularning yoshlariga bog'liq ekan. Shu bilan birga, sportchining yoshi kattaroq bo'lsa, uning natijasi yuqoriroq bo'lishi kuzatilmoqda.

### Mashqlar

**47.** (1; 2), (2; 2), (3; 2), (3; 4), (4; 5), (5; 6), (4; 3), (4; 4), (6; 6)

nuqtalar bo'yicha sochilish diagrammasini yasang. Birinchi koordinata o'sganda, ikkinchi koordinata ham o'sadi, degan umumiy xulosaga kela olamizmi?

**48.** (1; 2), (2; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 2), (4; 3), (4; 4), (5; 2), (6; 3)

nuqtalar bo'yicha sochilish diagrammasini yasang. Birinchi koordinata o'sganda, ikkinchi koordinata kamayadi, degan umumiy xulosaga kela olamizmi?

**49.** 12 nafar bola tanlanib, ularning bo'ylari va vaznlari o'lchandi. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ldi:

Bo'yi, sm	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Vazni, kg	53	67	45	53	60	62	58	60	62	55	55	49

Sochilish diagrammasini yasang. Inson bo'yi va vazni orasida bog'lanish bormi?

**50.** Konkida figurali uchishda sportchilarga ikkita baho qo'yiladi: o'yin texnikasi va artistik mahorat uchun.

Quyida bir hakamning bir nechta sportchiga qo'ygan ballari jadvali keltirilgan:

Texnika	165	177	161	162	170	176	177	164	166	161	169	159
Mahorat	4,5	4,2	4,6	4,5	5,1	6,2	5,2	5,6	5,1	5,6	5,9	5,8

Sochilish diagrammasini yasang. Texnika va artistik mahorat orasida qandaydir bog'lanish bormi?

**51.** O'g'il bolalar musobaqasida ishtirokchilar uzunlikka sakrash hamda 60 m masofaga yugurishda bellashdilar. Quyida ularning natijalari ko'rsatilgan:

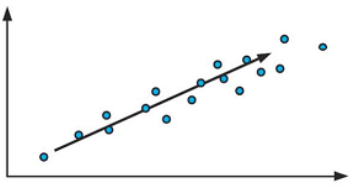
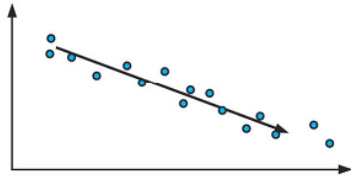
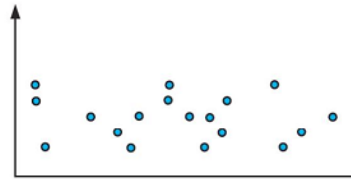
Sakrash, cm	180	194	190	215	210	170	175	202	205	195	205	200	190	186
Yugurish, s	10,8	10,2	10,6	9,5	10,2	11,0	11,6	10,4	10,0	11,0	9,8	10,6	10,8	10,7

Sochilish diagrammasini yasang. Uzunlikka sakrash hamda 60 m masofaga yugurish orasida qandaydir bog'lanish bormi?

Sochilish diagrammalarining ba'zi xossalarini aytib o'tamiz.

### 1) Bog'lanishning yo'nalishi

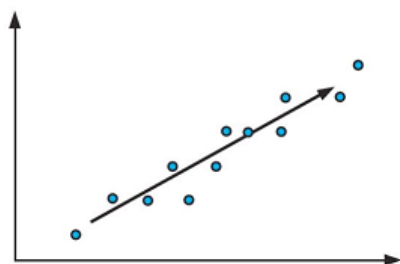
Bunda uch hol kuzatilishi mumkin:

Sochilish diagrammasining ko'rinishi	Izoh
	Bu holda bog'lanish mavjud bo'lib, unga <b>musbat</b> bog'lanish deyiladi. Bunday holatlarda birinchi ma'lumotlar qatoridagi belgi o'ssa, ikkinchi ma'lumotlar qatoridagi belgi ham o'sadi.
	Bu holda bog'lanish mavjud bo'lib, unga <b>manfiy</b> bog'lanish deyiladi. Bunday holatlarda birinchi ma'lumotlar qatoridagi belgi o'ssa, ikkinchi ma'lumotlar qatoridagi belgi kamayadi.
	Bu holda bog'lanish mavjud emas.

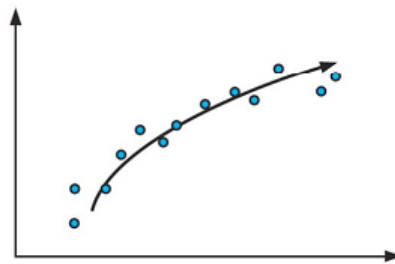
### 2) Bog'lanishning chiziqiligi

Bu xossa mos nuqtalarning qandaydir to'g'ri chiziq yaqinida joylashish darajasini ifodalaydi.

Chizikli bog'langan

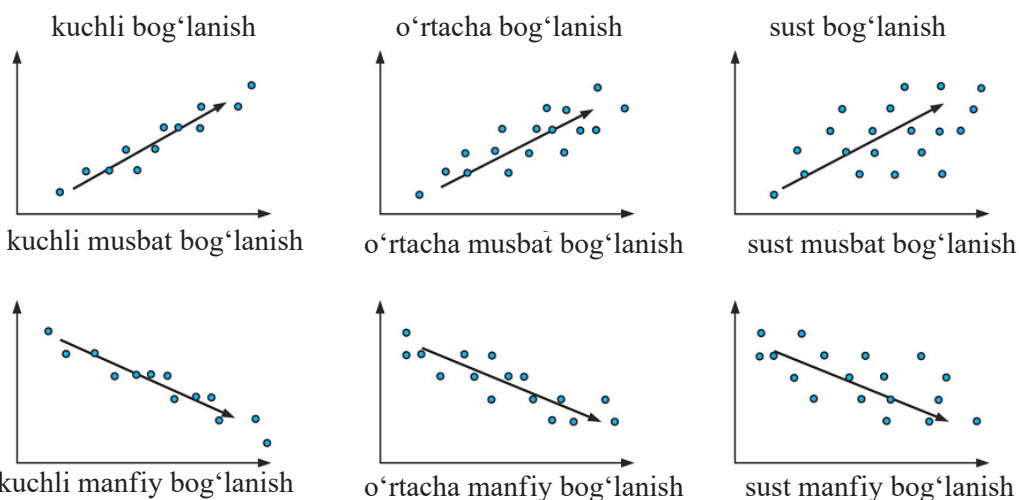


Chizikli bog'lanmagan



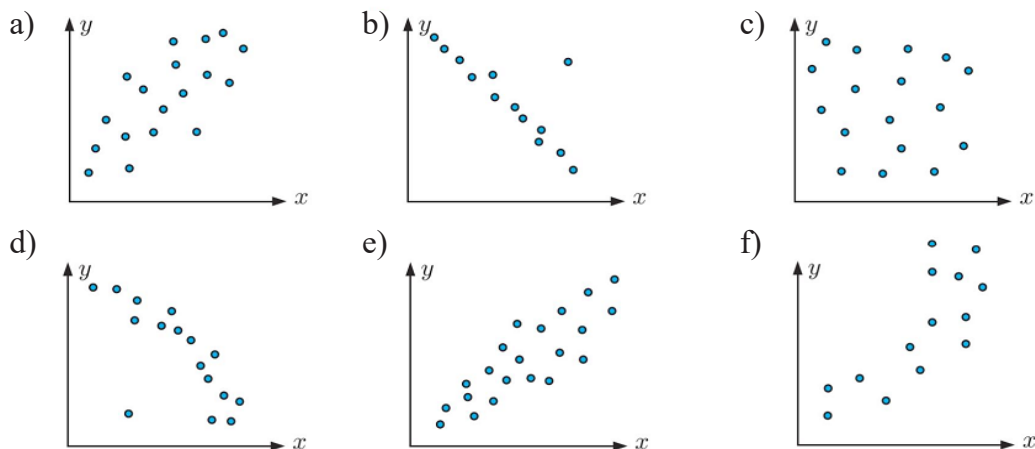
### 3) Chizikli bog'lanishning turg'unligi

Bu hossa birinchi ma'lumotlar qatoriga qarab, ikkinchi ma'lumotlar qatoridagi belgining o'zgarishi haqida hulosalar chiqarishimiz (prognoz qilishimiz)ga imkon beradi.



### Mashqlar

52. Quyidagi sochilish diagrammalariga qarab, xossalari aniqlang.



Ikkita tur ma'lumotlar o'rtasidagi bog'liqlik haqida hulosani chiqaring.

53. Quyida ikki nafar hakamning bir nechta sportchiga qo'ygan ballari keltirilgan:

Sportchi	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1-hakam	5	6.5	8	9	4	2.5	7	5	6	3
2-hakam	6	7	8,5	9	5	4	7.5	5	7	4.5

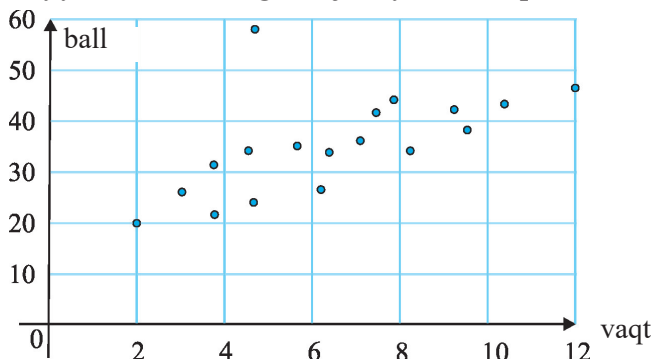
Sochilish diagrammasini yasang. Hakamlar qo'ygan ballar o'rtasida bog'liqlik bormi? Agar bir bo'lsa, uni tadqiq qiling.

54. Quyida o'quvchilarning ona tili va matematika fanlaridan bajargan test natijalari keltirilgan:

O'quvchi	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Ona tili	64	67	69	70	73	74	77	82	84	85
Matematika	85	82	80	82	72	71	70	71	62	66

Sochilish diagrammasini yasang. O'quvchi matematikani yaxshi bilsa, ona tilini ham yaxshi biladimi?

55. Quyidagi diagrammada o'quvchilar matematikadan bajargan test natijalari va shu testga tayyorlanish vaqtlari ko'rsatilgan. O'quvchi testga qancha ko'p vaqt tayyorlansa, uning natijasi yaxshiroq bo'ladimi?















**Chiziqli bog'lanish darajasini aniqlash.**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  va  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ma'lumotlar qatorlari orasidagi chiziqli bog'lanishning darajasini aniqlashda **korrelatsiya koeffitsiyenti** (ing. correlation – bog'lanish) tushunchasidan foydalaniladi.

Bu koeffitsiyent quyidagicha aniqlanadi: 
$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}$$
 Bu yerda  $\bar{x}, \bar{y}$  – berilgan ma'lumotlar qatorlarining o'rta qiymatlari,  $\sum$  – yig'indi belgisi.

Korrelatsiya koeffitsiyentining xossalarini keltiramiz:

- 1)  $r$  koeffitsiyentning qiymatlari  $[-1; 1]$  kesmaga tegishli.
- 2)  $r$  koeffitsiyent **ishorasi** bog'lanishning **yo'nalishini** belgilaydi, ya'ni
  - agar  $r$  **musbat** bo'lsa, u holda berilgan ma'lumotlar qatorlari **musbat** bog'lanishda bo'ladi;
  - agar  $r$  **manfiy** bo'lsa, u holda ma'lumotlar qatorlari **manfiy** bog'lanishda bo'ladi;
- 3)  $r$  koeffitsiyent qiymati bog'lanishning **turg'unligini** belgilaydi, bunda
  - agar  $r = \pm 1$  bo'lsa, u holda berilgan ma'lumotlar qatorlari chiziqli bog'langan bo'ladi.
  - agar  $r = 0$  bo'lsa, u holda ma'lumotlar qatorlari **chiziqli bog'lanmagan** bo'ladi;

Quyidagi jadvalda  $r$  koeffitsiyent qiymatlariga qarab bog‘lanish turlari keltirilgan:

$r = 1$	musbat chiziqli bog‘lanish		$r = -1$	manfiy chiziqli bog‘lanish	
$0,95 \leq r < 1$	juda kuchli musbat bog‘lanish		$-1 < r \leq -0,95$	juad kuchli manfiy bog‘lanish	
$0,87 \leq r < 0,95$	kuchli musbat bog‘lanish		$-0,95 < r \leq -0,87$	kuchli manfiy bog‘lanish	
$0,5 \leq r < 0,87$	o‘rtacha musbat bog‘lanish		$-0,87 < r \leq -0,5$	o‘rtacha manfiy bog‘lanish	
$0,1 \leq r < 0,5$	sust musbat bog‘lanish		$-0,5 < r \leq -0,1$	sust manfiy bog‘lanish	
$0 \leq r < 0,1$	chiziqli bog‘lanish mavjud emas		$-0,1 < r \leq 0$	chiziqli bog‘lanish mavjud emas	

Ko‘rinib turibdiki,  $r$  koeffitsiyent sochilish diagrammasidagi  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$ , ...,  $(x_n; y_n)$  nuqtalar qandaydir to‘g‘ri chiziqqa naqadar yaqin ekanligini belgilaydi.

Korrelatsiya koeffitsiyentni hisoblash uchun ma‘lumotlar asosida jadval tuzish maqsadga muvofiq.

**Misol.** Fermer yetishtiriladigan paxta g‘o‘zasi o‘shish tezligini solingan o‘g‘it miqdori bilan bog‘liqligini o‘rganmoqchi. U daladan to‘rtta  $A, B, C, D$  g‘o‘za ajratib, har biriga har xil miqdorda o‘g‘it soldi, va paxta g‘o‘zasining kunlik o‘shishini yozib oldi (jadvalga qarang):

G‘o‘za	O‘g‘it miqdori (g)	Kunlik o‘shish (mm)
A	1	3
B	2	3
C	4	6
D	5	8

Olingan ikki tur ma‘lumotlar orasidagi bog‘lanishni tadqiq qiling.

△ Jadvalni to‘ldiramiz:



$x$	$y$	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
1	3	-2	-2	4	4	4
2	3	-1	-2	2	1	4
4	6	1	1	1	1	1
5	8	2	3	6	4	9
Jami:	12	20		13	10	18

Bu yerda  $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{12}{4} = 3$ ,  $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{20}{4} = 5$ .

Jadvaldan foydalanib, korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblaymiz:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}} = \frac{13}{\sqrt{10 \cdot 18}} \approx 0,969.$$

Demak, g' o' zaning o' sish tezligi solingan o' g' it miqdori bilan juda kuchli musbat bog'lanishda ekan. ▲

**Eslatma** Ma'lumotlar qatorning hajmi katta bo'lganida korrelatsiya koeffitsiyentini topish hisoblash vositalari yordamida amalga oshiriladi.

**Misol** Bir guruh sportchilarning vaznlari va yugurishdagi maksimal (eng katta) tezliklari o'lchandi:

Vazn, $x$ (kg)	85	60	78	100	83	67	79	62	88	68
Maksimal tezlik, $y$ (km/h)	26	29	24	17	22	30	25	24	19	27

Olingan ikki tur ma'lumotlar orasidagi bog'lanishni tadqiq qiling.

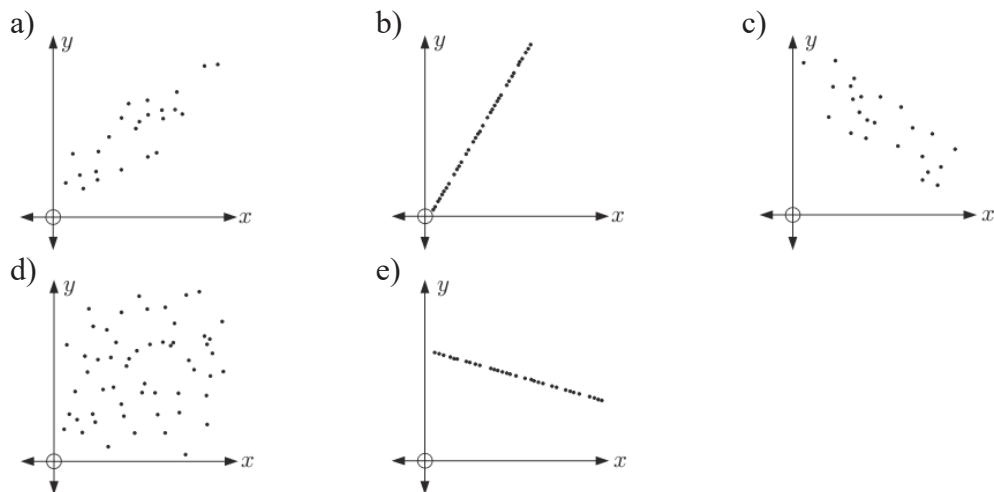
△ Berilgan ma'lumotlarni Microsoft Excel jadvaliga kiritib, korelyatsiya koeffitsiyentini hisoblash uchun bo'sh katakka KOPPEJ(A2:A11; B2:B11) funksiyasini kiritamiz. Natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

	A	B	C
	Vazn $x$ (kg)	Maksimal tezlik $y$ (km/h)	
1			
2	85	26	KOPPEJ(A2:A11;B2:B11) funksiya yordamida hisoblangan korrelatsiya koeffitsiyenti $-0,813$ ga teng.
3	60	29	
4	78	24	
5	100	17	
6	83	22	
7	67	30	
8	79	25	
9	62	24	
10	88	19	
11	68	27	

$r \approx -0,813$  hamda  $-0,87 < r \leq -0,5$  bo'lgani uchun sportchilar vaznlari va ularning yugurishdagi maksimal tezliklari o'rtacha manfiy bog'lanishda ekan.

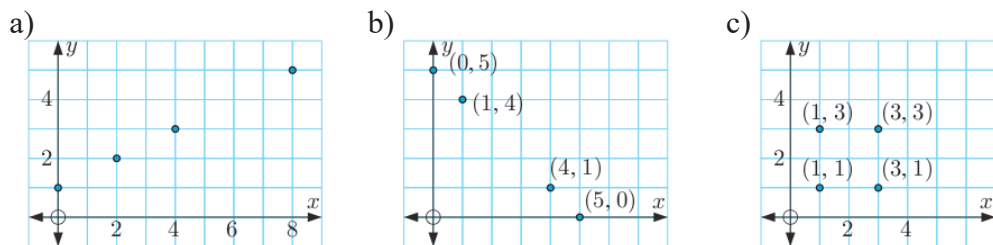
### Mashqlar

56. Keltirilgan sochilish diagrammalariga korrelatsiya koeffitsiyentining qaysi qiymatlari mos keladi?



57\*.  $r = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2 \sum(y - \bar{y})^2}}$  formuladan foydalanib, sochilish diagram-

malari uchun korrelatsiya koeffitsiyentini toping:



58\*. Jadvalda mahalladagi bolalarning sog'lig'ini tekshirish maqsadida shifokorlar tashrifi haqidagi ma'lumotlar keltirilgan:

Yoshi	2	5	7	5	8
Shifokor tashrifi soni	10	6	5	4	3

- Sochilish diagrammasini yasang.
- Korrelatsiya koeffitsiyentini hisoblang. Natijani Microsoft Excel jadvali yordamida tekshiring.
- Bolalar yoshi bilan shifokorlar tashrifi qanday bog'lanishda?

**Tadqiqot uchun masala.** Fermer no‘xot yetishtirish uchun yangi o‘g‘itni ishlatmoqchi va uning samaradorligini aniqlamoqchi. Buning uchun u ikkita kichik maydonga bir xil nav no‘xotni ekib, birinчисiga an’anaviy o‘g‘itni, ikkinчисiga esa yangi o‘g‘itni soldi.

Hosil yetilgandan so‘ng u ikki daladan tasodifiy ravishda 150 tadan dukkakni tanlab, har biridagi no‘xot donlarini sanab chiqdi va natijalarni yozdi:

An’anaviy o‘g‘it solingan dala:

4	6	5	6	5	6	4	6	4	9	5	3	6	8	5	4	6	8	6	5	6	7	4	6	5	2	8	6	5	6	5	5	5	4	4	4	6	7	5	6
7	5	5	6	4	8	5	3	7	5	3	6	4	7	5	6	5	7	5	7	6	7	5	4	7	5	5	5	6	6	5	6	7	5	8	6	8	6	7	6
6	3	7	6	8	3	3	4	4	7	6	5	6	4	5	7	3	7	7	6	7	7	4	6	6	5	6	7	6	3	4	6	6	3	7	6	7	6	8	6
6	6	6	4	7	6	6	5	3	8	6	7	6	8	6	7	6	6	8	4	4	8	6	6	2	6	5	7	3											

Yangi o‘g‘it solingan dala:

6	7	7	4	9	5	5	8	9	8	9	7	7	5	8	7	6	6	7	9	7	7	7	8	9	3	7	4	8	5	10	8	6	7	6	7	5	6	8
7	9	4	4	9	6	8	5	8	7	7	4	7	8	10	6	10	7	7	9	7	7	8	6	8	6	8	7	4	8	6	8	7	3	8	7	6	9	7
6	9	7	6	8	3	9	5	7	6	8	7	9	7	8	4	8	7	7	7	6	8	6	3	8	5	8	7	6	7	4	9	6	6	6	8	4	7	8
9	7	7	4	7	5	7	4	7	6	4	6	7	7	6	7	8	7	6	6	7	8	6	7	10	5	13	4	7	11									

Har bir dala uchun:

- 1) chastotalar bo‘yicha ma’lumotlarni guruhlang;
- 2) chiziqli diagrammalarni yasang;
- 3) modani, medianani va o‘rtacha qiymatlarni toping va ma’nosini tushuntiring;
- 4) ikkala dala uchun olingan xulosalarni taqqoslang.

### Yozma nazorat ishi namunasi

5 ta firmada xodimlarning oylik maoshi ( $X$ ) va bir yil mobaynida ishdan bo‘shaganlar soni ( $Y$ ) quyidagi jadvalda keltirilgan:

$X$ (ming so‘m)	1000	1500	2000	2500	3000
$Y$ (nafar)	60	35	20	20	15

- 1) Bir yil davomida ishdan bo‘shagan xodimlarning o‘rtacha maoshi qancha bo‘lgan?
- 2)  $X$  va  $Y$  ma’lumotlar qatorlari orasidagi bog‘lanishni tahlil qiling. Xulosa chiqaring.

Radiodan yoki televizordan “ob-havo ma’lumoti” berilganda, ba’zan, “... ertaga qisqa muddatli yomg‘ir yog‘ishi mumkin”, “ertaga ... viloyatda momaqaldiroq bo‘lib, yomg‘ir yog‘ish ehtimoli bor”, degan so‘zlarni eshitib qolamiz. Ob-havo ma’lumotida ertaga yomg‘ir albatta yog‘adi (ertaga yomg‘ir yog‘ish hodisasi albatta ro‘y beradi) deyilmayapti, balki uning yog‘ishi mumkinligi (demak, yog‘masligi ham mumkinligi) aytilyapti, xolos. Yomg‘ir yog‘ish hodisasining ro‘y berishi son jihatdan, miqdoran, 30% mi? 50% mi? 95% mi? Ertaga yomg‘ir yog‘ishiga bizning ishonchimizni son bilan o‘lchash mumkinmi? degan savolni qo‘yish tabiiy.

Shu bilan birga, “tavakkaliga 10 ta lotereya chiptasi olgandim, bir emas, ikkitasiga yutuq chiqdi-ya!”, “to‘satdan shu voqea sodir bo‘lib qoldi”, “tajriba uchun 100 ta urug‘ qadagandim, shundan 96 tasi unib chiqipdi” kabi gaplarni eshitgansiz, albatta. Ehtimolliklar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri – tajriba. Biz “tajriba” (eksperiment, sinov)ni juda keng ma’noda tushunamiz.

1) Futbol o‘yinida hakam 11 metrli jarima to‘pini belgiladi. Hamma hayajonda. “Xo‘sh, to‘pni tepishga shaylanib turgan o‘yinchi uni darvozaga kirita oladimi yoki yo‘qmi? Shu imkoniyat amalga oshadimi, ro‘yobga chiqadimi yoki boy beriladimi? Qaysi bir hodisa ro‘y beradi? Buni biz muqarrar ravishda, oldindan ayta olmaymiz. O‘yinchi to‘pni darvozaga kirita olishi ham mumkin, kirita olmasligi ham mumkin. Ammo, ma’lum bir ishonch, katta ehtimollik bilan “to‘p darvozaga kiritiladi” deyishimiz mumkin, chunki shunga o‘xshash hollarning ko‘pida to‘p darvozaga kiritilgan.

Futbol o‘yini ham – tajriba. Bu tajribada “qaysi komanda yutishi”, “o‘yin qanday natija bilan tugashi” kabi hodisalarni kuzatamiz, ammo tajriba – o‘yin natijasini avvaldan 100% ishonch bilan aytib bera olmaymiz. Bu tajribada biz “o‘yin yoki biror tarafning g‘alabasi bilan yoki durang natija bilan tugashi muqarrar” deya olamiz, xolos.

2) Idishda (xaltada) radiuslari o‘zaro teng, massalari ham o‘zaro teng va bir xil materialdan yasalgan 10 ta shar bor. Ularning 5 tasi yashil, 5 tasi oq rangda. Idishdan, uning ichiga qaramasdan, sharlarni aralashtirib, bir dona shar olamiz. Olingan shar qanday rangda bo‘ladi? Idishdan shar olish ham – tajriba. Bu tajribada biz “olingan sharlarning rangi qahday”ligi hodisasini kuzatamiz. Ammo tajriba natijasini avvaldan ayta olmaymiz. Olingan shar oq rangli ham, yashil rangli ham bo‘lishi mumkin. Idishda oq va yashil rangli sharlar soni o‘zaro teng bo‘lgani uchun olingan sharning oq rangda yoki yashil rangda bo‘lish hodisasining imkoniyatlari barobar, bir xil. Bunday

hodalarni *teng imkoniyatli hodisalar* deymiz.

3) Yoqlariga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlari yozilgan (yoki yoqlarida 1 ta, 2 ta, 3 ta, 4 ta, 5 ta, 6 ta “holi” bor) kubni tashlashni ko‘raylik. Bu ham – tajriba. Tabiiyki, kub bir jinsli materialdan yasalgan bo‘lishi (yarmi metall, yarmi yog‘och emas!), tashlanganda havoda “yaxshi aylanishi” va tekis joyga tushishi kerak. Bu tajribada tashlangan kubning yuqori yog‘ida “qanday raqam paydo bo‘lishi” hodisasini kuzatamiz. Bunda 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlarining har biridan paydo bo‘lishi imkoniyatlari bir xil, o‘zaro teng.

4) Futbol o‘yinida hakam o‘yin boshlanishidan avval “tanga tashlab”, o‘yinni qaysi taraf boshlashini aniqlaydi. “Tanga tashlash” tajribasida “raqam yozilgan tomon”, “gerbli tomon”ning paydo bo‘lishi, ro‘y berishi, chiqishi hodisalarini kuzatamiz. Bunda “raqamli” va “gerbli” tomonlarning chiqishi – teng imkoniyatli.

*Tajribani, uning shartlarini o‘zgartirmay, ko‘p marta takrorlash mumkin, deb faraz qilamiz. Xususan, tanga yoki kubni ko‘p marta tashlash mumkin. Natijasi tasodifiy hodisa bo‘lgan tajribalarni o‘quvchining o‘zi ham ko‘plab topa oladi. Shunday qilib:*

1) *“tajriba” tushunchasi nihoyatda keng qamrovli; har birimizning har kungi faoliyatimizning o‘zi ham tajriba;*

2) *tajriba ma‘lum shartlarda o‘tkaziladi (sharlarning radiuslari o‘zaro teng, massalari bir xilligi, idishdan aralastirib olinishi; tanga, kubning bir jinsli materialdan yasalganligi, tashlanganda havoda yaxshi aylanishi va hokazolar);*

3) *tajriba shart-sharoitlarini o‘zgartirmagan holda uni ko‘p marta, istalgancha takrorlash mumkin.*

**1-ta‘rif.** *Tajriba natijasida ro‘y berishi ham, ro‘y bermasligi ham mumkin bo‘lgan hodisa **tasodifiy hodisa** deyiladi.*

Kubni otganda 5 raqamining chiqishi, tanga tashlanganda gerbli tomon chiqishi, idishdan olingan sharning oq rangda ekanligi – bularning hammasi tasodifiy hodisalaridir. Tasodifiy hodisalar, odatda, *A, B, C, ...* harflari bilan belgilanadi.

**2-ta‘rif.** *Tajriba natijasida har gal albatta ro‘y beradigan hodisa **muqarrar hodisa** deyiladi.*

Kubni tashlaganda 1 dan 6 gacha qandaydir raqamning paydo bo‘lishi muqarrar hodisa. Muqarrar hodisani *U* harfi bilan belgilaymiz.

**3-ta‘rif.** *Tajriba natijasida sira ham ro‘y bermaydigan hodisa **ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisa** deyiladi.*

Kubni tashlaganda 7 raqamining yoki 0 raqamining paydo bo‘lishi ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisadir. Ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan

hodisani *V* harfi bilan belgilaymiz.

Tasodifiy hodisalar orasidagi bogʻlanishni oʻrganish, tasodifiylik olamini tadqiq qilish, uning qonuniyatlarini kashf qilish, bu qonunlarni, xulosalarni amaliyot masalalarini yechishga qoʻllash bilan ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fani shugʻullanadi. Aziz Vatanimiz Oʻzbekistonning buyuk olimlari Vsevolod Romanovskiy, Toshmuhammad Sarimsoqov, Saʼdi Sirojiddinov va ular yaratgan ilmiy maktabning chuqur tadqiqotlari jahonga mashhur.

### Mashqlar

59. Savolarga javob bering:

- 1) “Tajriba” deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
- 2) Tasodifiy hodisa deb nimaga aytiladi?
- 3) Muqarrar hodisa taʼrifini ayting. Misollar keltiring.
- 4) Roʻy berishi mumkin boʻlmagan hodisa deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.

60. Tasodifiy, muqarrar, roʻy berishi mumkin boʻlmagan hodisalarga 4 tadan misol keltiring.

61. Quyidagi hodisalardan qaysi biri: tasodifiy, muqarrar, roʻy berishi mumkin boʻlmagan hodisa:

- 1) sotib olgan lotereyangiz yutuqli;
- 2) siz grossmeyster bilan shaxmat oʻynab, uni yutasiz;
- 3) quyosh Sharqdan chiqadi;
- 4) quyosh Janubga botadi;
- 5) dushanbadan soʻng chorshanba keladi;
- 6) berilgan sharoitlarda piyolani toʻnkarsangiz undagi suv toʻkilmaydi;
- 7) sportloto oʻyinida 8, 12, 17, 22, 29, 38 sonlari yutuqli boʻladi;
- 8) payshanbadan soʻng juma keladi;
- 9) 20-iyul kuni Toshkentda yomgʻir yogʻadi;
- 10) 10-mart kuni Fargʻonada yomgʻir yogʻadi;
- 11) 1 dan 6 gacha raqamlangan oʻyin kubi tashlaganda 9; 0; 14 sonlari chiqadi.

62. Ikkita tanga baravar tashlandi. Bunda roʻy berishi mumkin boʻlgan barcha imkoniyatlarni (hodisalarni) yozib chiqing.

63. Maʼmura basketbol toʻriga (savatiga) 30 marta otgan toʻpidan 20 tasini, Manzura esa 28 marta otgan toʻpidan 18 tasini tushirdi. Kim merganroq?

64\*. Ikkita kub baravar tashlandi. Kublarning yuqori yoqlarida paydo boʻlishi mumkin boʻlgan barcha imkoniyatlarni – sonlar juftligini yozib chiqing.

65\*. Tanga 3 marta tashlandi. Bunda qanday imkoniyatlar boʻlishi mumkin? Ularni yozib chiqing.

66. *A* va *B* tasodifiy hodisalarning ro‘y berish imkonini chamalang. Bunda “ehtimolligi (imkoniyati) ko‘proq”, “ehtimolligi kamroq”, “teng ehtimollik” so‘zlarini ishlatib:

1) *A*: kub tashlanganda 5 raqamining chiqishi; *B*: kub tashlanganda 5 raqamining chiqmasligi;

2) *A*: “Bunyodkor” futbol bo‘yicha O‘zbekiston chempioni bo‘ladi;

*B*: “Bunyodkor” futbol bo‘yicha jahon chempioni bo‘ladi;

3) *A*: ertaga payshanba; *B*: ertaga payshanba emas;

4) *A*: kub tashlanganda juft raqam chiqadi; *B*: kub tashlanganda toq raqam chiqadi;

5) *A*: 30-dekabr kuni qor yog‘adi; *B*: 10-iyul kuni Termizda havo temperaturasi 12° C bo‘ladi;

6) *A*: tanga tashlanganda raqam tomoni chiqadi; *B*: tanga tashlanganda raqam tomoni chiqmaydi.

67\*. 3, 6, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan mumkin bo‘lgan barcha 4 xonali sonlarni tuzing. Bu sonlar ichida nechtasi: 1) 4 ga bo‘linadi; 2) 6 raqami bilan boshlanadi; 3) 7 raqami bilan tugaydi; 4) nechta holda toq raqamlar yonma-yon turadi? 5) 3 ga bo‘linadigan raqamlar yonma-yon turgan hollar nechta?

68. Ikkita kub baravar tashlandi. Ularning yuqori yoqlaridagi raqamlari yig‘indisi qanday sonlar bo‘lishi mumkin? 3 ta kub tashlanganda-chi?

69. “49 tadan 6 ta” sportloto chiptasida Muyassar 10, 11, 12, 13, 14, 15 sonlarini, Ma‘mura 7, 13, 19, 26, 31, 48 sonlarini belgiladi. Kimning yutish imkoniyati (ehtimolligi) ko‘proq deb o‘ylaysiz? Nima uchun?

70. 2, 3, 4 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan mumkin bo‘lgan barcha uch-xonali sonlarni tuzing. Nechta holda juft raqamlar yonma-yon joylashgan?

71. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan mumkin bo‘lgan barcha to‘rt xonali sonlarni tuzing. Nechta holda toq raqamlar yonma-yon joylashgan?

**Tasodifiy hodisaning ehtimolligi.** Ikkita misol ko‘raylik.

**1-misol.** Idishda 10 ta shar bo‘lib, uning 1 tasi qora, 9 tasi oq rangda. Tasodifiy ravishda (tavakkaliga) bitta shar olamiz. Uning oq rangda bo‘lish imkoniyati ko‘p mi, qora rangda bo‘lish imkoniyati ko‘pmi? Oq rangda bo‘lish imkoniyati katta, albatta, chunki idishda ular ko‘p. Idishdagi sharlarning ixtiyoriy bittasi olinishi mumkin. Bu tajribada ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar soni 10 ta, ulardan 9 tasi olinadigan sharning “oq rangda bo‘lishi” hodisasiga qo‘l keladi, qulaylik tug‘diradi. Idishdan olinadigan sharning oq rangda bo‘lishiga ishonchimizni  $\frac{9}{10}$  son bilan o‘lchash tabiiy.

**2-misol.** Kubni tashlash tajribasida barcha imkoniyatlar soni 6 ta. Har bir raqamning paydo bo‘lishiga faqat 1 ta imkoniyat bor. Masalan, 5 raqamining paydo bo‘lishiga faqat 1 ta imkoniyat qulaylik tug‘diradi.

Keltirilgan misollar tajriba natijasida kuzatilayotgan tasodifiy hodisaning ro‘y berishini son bilan o‘lchashga, ifodalashga yo‘l ko‘rsatadi.

Biz tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan hodisalar teng imkoniyatli bo‘lgan holni qaraymiz, xolos. Tajriba natijasida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar soni  $n$  ta bo‘lib, shundan  $k$  tasi tajribada kuzatilayotgan  $A$  hodisaga qulaylik tug‘diruvchi imkoniyatlar bo‘lsin.

**Ta’rif.**  $\frac{k}{n}$  kasr son  $A$  tasodifiy hodisaning ro‘y berish ehtimolligi deyiladi.

Bu ehtimollik  $P(A)$  bilan belgilanadi ( $P$  - ing. *probability* - ehtimollik so‘zining bosh harfi). Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{qulaylik tug‘diruvchi imkoniyatlar soni}}{\text{barcha imkoniyatlar soni}}.$$

Bu formula *ehtimollikning klassik ta’rifi* deyiladi. Muqarrar hodisa uchun  $k = n$  va  $P(U) = \frac{n}{n} = 1$ . Ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisa uchun

$k = 0$  va  $P(V) = \frac{0}{n} = 0$ . Bu ikkala hol istisno qilinsa,  $\frac{k}{n}$  - to‘g‘ri kasrdan iborat bo‘ladi.

### Misollar

1) Tanga tashlanganda uning “gerbli tomoni chiqishi” hodisasining ehtimolligini toping. Bu hodisani  $G$  desak,  $P(G) = \frac{1}{2}$ , chunki barcha imkoniyatlar soni  $n = 2$ , gerb chiqishiga qulaylik tug‘diruvchi imkoniyatlar soni  $k = 1$ .

2) Idishda 10 ta oq, 20 ta ko‘k rangli sharlar bor. Tasodifiy ravishda olingan sharning oq rangda; ko‘k rangda ekanligining ehtimolligini toping.

Bu misolda  $n = 10 + 20 = 30$ .

$$P(\text{oq rangli shar chiqishi}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3};$$

$$P(\text{ko‘k rangli shar chiqishi}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

### Savol va topshiriqlar

- 1) Teng imkoniyatli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
- 2) “Qulaylik tug‘diruvchi imkoniyat” nima?
- 3) Ehtimollikning klassik ta’rifi nima?



## Mashqlar

72. 1000 ta mahsulotdan 20 tasi yaroqsiz. Sotib olingan mahsulotning yaroqsiz ekanligi ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.
73. Maktabda 800 ta bola o'qiydi. Shulardan 80 tasi a'lochi. Tasodifiy ravishda bir o'quvchi tanlandi. Uning a'lochi ekanligining ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.
74. Savatda 30 ta qizil olma va 20 ta nashvati nok bor. Savatdan tavakkaliga bir dona meva olindi. Uning: 1) nok; 2) olma; 3) yong'oq; 4) nok yoki olma ekanligining ehtimolligini toping.
75. Idishda 15 ta shar bor, ularga 1, 2, 3, ..., 14, 15 sonlari yozilgan. Tasodifiy ravishda idishdan bitta shar olindi. Unda yozilgan sonning 7 ga; 10 ga; 5 ga; 3 ga; 2 ga bo'linish ehtimolligini toping.
76. Tanga 2 marta tashlandi. Bunda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarning ehtimolliklarini toping va shunga mos jadval tuzing.
- 77\*. Tanga 3 marta tashlandi. Bunda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalarning ehtimolliklarini toping va mos jadval tuzing.
- 78\*. Ikkita kub tashlandi. Ularning yuqori yoqlaridagi raqamlar yig'indisining: 2 ga, 3 ga, ..., 12 ga teng bo'lish ehtimolligini toping va jadvalni to'ldiring:

Raqamlar yig'indisi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Paydo bo'lish ehtimolligi											

*Ko'rsatma:*  $2=1+1$ ;  $3=1+2=2+1$ ;  $4=1+3=3+1=2+2$ .

- 79\*. Idishda o'lchamlari bir xil 10 ta ko'k, 25 ta yashil, 15 ta qora rangli qalamlar bor. Ko'k rangli qalam albatta chiqishi uchun eng kam deganda idishdan bir yo'la nechta qalam olish kerak?
80. Kubning yoqlari oq yoki yashil rangga bo'yalgan. Kubni tashlaganda oq rangli yoq chiqish ehtimolligi  $\frac{1}{3}$  ga, yashil rangli yoq chiqish ehtimolligi esa  $\frac{2}{3}$  ga teng. Kubning nechta yog'i oq, nechta yog'i yashil rangga bo'yalgan?
81. Idishda o'lchamlari bir xil 18 ta ko'k, 15 ta qora, 17 ta qizil qalam bor. Idishdan tavakkaliga bir dona qalam olindi. Uning: 1) ko'k; 2) qizil; 3) qora rangda ekanligining ehtimolligini toping. Bu ehtimolliklarni qo'shing. Nima uchun yig'indi 1 ga teng chiqishini tushuntiring.
82. Idishdagi sharlarning 40% i oq,  $\frac{1}{3}$  qismi qora, qolganlari qizil rangda. Idishdan tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning qaysi rangda

bo‘lish ehtimolligi ko‘proq? Kamroq?

83. 1) 6, 7, 8 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan, 3 xonali sonlar tuzilgan. Juft raqamlarning yonma-yon joylashishi ehtimolligini toping. 2) 3, 4, 5 raqamlaridan, ularni takrorlamasdan, 3 xonali sonlar tuzilgan. Toq raqamlarning yonma-yon joylashishi ehtimolligini toping.
84. 5 ta idishda sharlarning quyidagicha taqsimlanganligi ma’lum:  
 birinchisida: 20 ta yashil, 60 ta oq; ikkinchisida: 30 ta yashil, 90 ta oq;  
 uchinchisida: 18 ta yashil, 32 ta oq; to‘rtinchisida: 25 ta yashil, 75 ta oq;  
 beshinchisida: oq, yashil, qora rangli sharlar teng miqdorda.  
 Idishdan tavakkaliga olingan shar yashil bo‘lsa, Sizni yutuq kutadi.  
 Shar olish uchun qaysi idishni tanlagan bo‘lardingiz?
85. Hamidulla matematikadan 50 ta yozma ish variantlaridan 5 tasini yechishni bilmaydi. Yozma ishda unga bitta variant berildi. Hamidullaning shu variantni bilishi ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.
86. 100 000 ta lotoreya chiptasi o‘yinga qo‘yildi. Shuning 25 000 tasi yutuqli. Tavakkaliga olingan chiptaning: yutuqli bo‘lishi; yutuqli emasligi ehtimolligini toping va uni protsentlarda ifodalang.

**Ehtimollikning statistik ta’rifi.** Tanga tashlanganda gerbli tomoni tushishi ehtimolligi  $P(G) = \frac{1}{2}$  ekanini ko‘rdik. Bu tenglikni qanday tushunish kerak? Bu ikkita teng imkoniyatli hodisa bo‘lsa, tajribalarda ular galmagal chiqaveradi, tanga 100 ta tashlansa, shuning 50 tasida gerbli, 50 tasida raqamli tomoni chiqadi, degani emas.

Agar tanga tashlash tajribasini ko‘p marta takrorlasak, ularning *taqriban yarmida* tangananing gerbli tomoni chiqadi.

Tangananing gerbli tomoni tushgan tajribalar sonining umumiy tajribalar soniga nisbati  $\approx \frac{1}{2}$  ga teng bo‘ladi – gerb chiqishi hodisasining ehtimolligi  $\frac{1}{2}$  ga tengligini shunday tushunamiz. Chindan ham, “tanga tashlash” tajribasida olingan natijalar bu fikrni tasdiqlaydi. Tajriba natijalarini keltiraylik:

Tajriba o‘tkazuvchilar	Tanga tashlashlar soni, $n$	“Gerb chiqishi” soni, $\mu$	“Gerb” chiqish chastotasi, $\frac{\mu}{n}$
Fransuz olimi J.L.Byuffon	4040	2048	$\approx 0,5069$
Maktab o‘quvchilari	6000	2953	$\approx 0,4922$
Ingliz olimi K.Pirson	12000	6019	$\approx 0,5016$
Ingliz olimi K.Pirson	24000	12012	$\approx 0,5005$

Ehtimollikning klassik ta’rifiga ko‘ra,  $P(G) = \frac{1}{2}$ . Jadvaldan  $\frac{\mu}{n}$

nisbatning  $\frac{1}{2}$  ga taqriban tengligini ko‘ramiz:

$$\frac{\mu}{n} \approx \frac{1}{2}.$$

Biror hodisasining ro‘y berish ehtimolligini tajriba yo‘li bilan topish uchun quyidagicha ish tutiladi:

1) tajribani bir xil shart-sharoitlarda, aytaylik,  $n$  marta o‘tkazishadi. Kuzatilayotgan hodisaning mohiyatiga qarab, masalan,  $n = 10; 20; 50; 100; 1000; 10\ 000; 50\ 000, \dots$  bo‘lishi mumkin;

2) bizni qiziqtirayotgan  $A$  hodisasining ro‘y berganini (yoki ro‘y bermaganini) har tajribada kuzatib, yozib, sanab borishadi. Odatda, quyidagi belgilashdan foydalaniladi (jadvalga qarang):

Kuzatilayotgan $A$ hodisasining ro‘y berish soni	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Shu songa mos belgi	•	• •	•• ••	••• •••	•••• ••••	••••• •••••	•••••• ••••••	••••••• •••••••	•••••••• ••••••••	••••••••• •••••••••	•••••••••• ••••••••••

Ro‘y berishlar soni 10 tadan ortiq bo‘lsa, bu belgilash takrorlanadi. Sanash uchun bundan boshqa belgilar ham ishlatilishi mumkin.

3) o‘tkazilgan  $n$  ta tajribada  $A$  hodisasining ro‘y berishlari soni sanab chiqiladi. Bu sonni  $\mu$  (m‘yu – yunon harfi) deb belgilaylik.

4)  $\frac{\mu}{n}$  nisbat tuziladi, bu nisbat  $A$  hodisasining  $n$  ta tajribada ro‘y berish chastotasi deyiladi.

Tajribalar ko‘p marta o‘tkazilgan bo‘lsa, ya‘ni  $n$  katta son bo‘lsa,  $\frac{\mu}{n}$  nisbat biror  $p$  son atrofida “tebrana” boshlaydi. Bu  $p$  son  $\frac{\mu}{n}$  ga nihoyatda yaqin bo‘ladi:

$$\frac{\mu}{n} \approx p.$$

Ana shu  $p$  son  $A$  hodisasining ehtimolligi deb olinadi. Bunday usulda aniqlangan ehtimollikni *statistik ehtimollik* deyiladi.

$\frac{\mu}{n}$	Klassik ta‘rifga ko‘ra $p=P(G)=0,5$	Farqi, $\left  \frac{\mu}{n} - p \right $	Farqi, % larda
0,5069	0,5	0,0069	1,38
0,4922	0,5	0,0078	1,56
0,5016	0,5	0,0016	0,32
0,5005	0,5	0,0005	0,1

Tajribalar soni orta borgan sari  $\frac{\mu}{n}$  nisbat bilan  $p=0,5$  orasidagi farq kamayib borayotganini ko‘ramiz. Shunday qilib, tanga tashlanganda  $G$  (gerbli to-

mon) chiqishining ehtimolligini tajriba yo‘li bilan aniqladik. Tajribamiz soni  $n$  xulosa chiqarish uchun yetarli. Tanga tashlaganda gerb chiqishlari soni  $\mu$  ning tajribalarning umumiy soni  $n$  ga nisbati  $\frac{\mu}{n}$  chastota  $\frac{1}{2}$  atrofida “tebrana-yapti”. Demak, tanga tashlaganda uning gerbli tomoni chiqishi ehtimolligini  $\frac{1}{2}$  deb olish tabiiy.

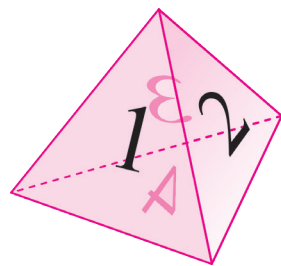
### Savol va topshiriqlar

1. “Kub tashlaganda 4 raqamining chiqish ehtimolligi  $\frac{1}{6}$  ga teng”, degan jumlaning qanday tushunasiz?
2. Tajribada kuzatilayotgan hodisaning ro‘y berish chastotasi nima?
3. Ehtimollikning statistik ta‘rifi nima?

### Mashqlar

87. “Har 150 ta lotereya chiptasiga bitta yutuq to‘g‘ri kelarkan” degan xabarni eshitib, Akmal 150 ta bilet sotib oldi va “Men o‘yinda albatta yutaman”, deb yuripti. Uning fikri to‘g‘rimi? Nima uchun?
88. Po‘lat “49 tadan 6 ta” sportloto o‘yini chiptasida 9, 17, 23, 31, 39, 43 sonlarini belgilagan edi, unga yutuq chiqdi. “Keyingi o‘yinlarda ham men faqat shu sonlarni belgilayman, bu sonlar yutuq keltirarkan”, – dedi u. Uning fikri to‘g‘rimi? Nima uchun?
- 89\*. Idishda 1 dan 50 gacha (1 dan 1000 gacha) natural sonlar yozilgan 50 ta (1000 ta) bir xil qog‘ozchalar bor. Ularni aralashtirib, yozuviga qaramasdan – tavakkaliga bitta qog‘ozcha olindi. Undagi sonning oxirgi raqami: 0; 5; 6; 7; 9 bo‘lishining ehtimolligini toping. Xulosa chiqaring.
90. Idishda 21 dan 100 gacha (100 ham kiradi) natural sonlar yozilgan bir xil qog‘ozchalar bor. Tavakkaliga bitta qog‘ozcha olindi. Undagi sonning: 30 ga, 40 ga, 7 ga, 11 ga, 9 ga bo‘linish ehtimolligini toping.
- 91\*. Yog‘ochdan yasali, ko‘k rangga bo‘yalgan kubning qirrasiz uzunligi 40 cm ga teng. Kubning qirralari teng 20 bo‘lakka bo‘lindi va mos bo‘linish nuqtalari kesmalar bilan birlashtirildi. Kub shu kesmalar bo‘yicha ajratildi va mayda kubchalarga ajratildi. Ular idishga solinib, yaxshilab aralashtirildi. Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping. Tavakkaliga olingan kubning: 1) uchta yog‘i bo‘yalgan; 2) ikkita yog‘i bo‘yalgan; 3) bitta yog‘i bo‘yalgan; 4) hech bir yog‘i bo‘yalmagan.
92. Idishda 251 dan 1000 gacha natural sonlar yozilgan bir xil qog‘ozchalar bor. Tavakkaliga bitta qog‘ozcha olindi. Undagi sonning: 500 ga; 300 ga; 200 ga; 75 ga; 25 ga; 10 ga; 9 ga; 3 ga; 2 ga; 80 ga bo‘linish ehtimolligini toping.

93. Kartondan 4 ta muntazam uchburchak qirqib oling. Ularni bir-biriga tomonlari bo‘ylab yopishtirib, rasmdagidek shaklni yasang. Bu shakl muntazam to‘rtyoqlik – tetraedr deyilishini bilasiz. Uning yoqlariga 1, 2, 3, 4 raqamlarini yozing. Tetraedrni 100 marta (ko‘proq bo‘lsa, yana yaxshi) tashlang, bunda asosdagi paydo bo‘lgan raqamning takrorlanishini hisoblab boring. Jadvalni to‘ldiring.

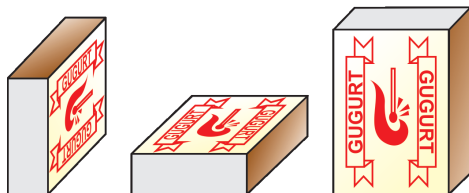


Raqamlar	Asosdagi raqamlar takrorlanishini sanash	Takrorlanishlar soni	Paydo bo‘lish chastotasi
1			
2			
3			
4			

**Tadqiqot uchun.** O‘zbek yozuvchisining biror badiiy asarini olib, undagi bir bo‘g‘inli, ikki bo‘g‘inli, uch bo‘g‘inli, ... so‘zlarning uchrash chastotasini toping. Buning uchun asardagi, masalan, 30 betdagi (ko‘proq bo‘lsa, yana-da yaxshi!) barcha so‘zlarni sanang – ular  $n$  ta deylik. Endi shu betlardagi barcha 1, 2, 3, ... bo‘g‘inli so‘zlarni sanang. Ular, mos ravishda,  $k_1, k_2, k_3, \dots$  ta deylik. So‘ngra  $\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}, \frac{k_3}{n}, \dots$  nisbatlarni tuzing.

Ular asarning tajriba uchun olingan betlaridagi 1, 2, 3, ... bo‘g‘inli so‘zlarning uchrash chastotasi bo‘ladi. Bu chastotalarga mos ustunli va doiraviy diagrammalar tuzing. Chastotalarni verguldan keyin 3 xona aniqligida o‘nli kasrlarda va foizlarda ifodalang.

**Amaliy ish.** Gugurt qutisi tashlanganda rasmda ko‘rsatilgan har bir holatning ro‘y berish ehtimolligini baholang, ya‘ni ro‘y berish chastotasini toping. Buning uchun gugurt qutisini 100 marta (ko‘p bo‘lsa, yana yaxshi) tashlang va jadvalni to‘ldiring.



Holatlar	Holatlar takrorlanishini sanash	Takrorlanishlar soni	Ro‘y berish chastotasi
1			
2			
3			

Tasodifiy hodisalarga oid bir nechta tushunchalar kiritamiz.

1) Agar  $A$  hodisa ro‘y berganda  $B$  hodisa ham ro‘y bersa,  $A$  hodisa  $B$  hodisani ergashtiradi deymiz va buni  $A \subset B$  (yoki  $B \supset A$ ) kabi yozamiz.

**1-misol.**  $A = \{\text{kub tashlaganda 2 sonining chiqishi}\},$   
 $B = \{\text{kub tashlaganda juft sonlarning chiqishi}\}.$



Ravshanki,  $A \subset B$ .

**2-misol.**  $A = \{\text{yomg‘ir sharros yog‘yapti}\},$   
 $B = \{\text{Osmonni bulut qoplagan}\}.$

Bu hodisalar uchun  $A \subset B$  bo‘lishi ayon.

2) Agar  $A$  hodisa  $B$  hodisani va  $B$  hodisa  $A$  hodisani ergatirsa, ya‘ni  $A \subset B$  va  $B \subset A$  bo‘lsa,  $A$  va  $B$  hodisalar tengkuchliri deymiz va  $A = B$  deb yozamiz.

**3-misol.**  $A = \{\text{kub tashlanganda 3 yoki 6 sonlaridan birining paydo bo‘lishi}\},$   
 $B = \{\text{kub tashlanganda 3 ga bo‘linadagin sonning paydo bo‘lishi}\}.$

Bu hodisalar uchun  $A = B$  ekani ravshan.

3)  $A$  va  $B$  hodisalarning ikkalasining bir vaqtda ro‘y berish hodisasi  $A$  va  $B$  hodisalarining ko‘paytmasi deyiladi va  $AB$  (yoki  $A \cap B$ ) kabi belgilanadi.

**4-misol.**  $A = \{\text{kub tashlanganda 2, 4 sonlaridan birining chiqishi}\},$   
 $B = \{\text{kub tashlanganda juft sonlarning paydo bo‘lishi}\}.$

Bu holda  $AB = \{\text{kub tashlanganda 2 va 4 sonlaridan birining chiqishi}\}.$

4)  $A$  va  $B$  hodisalardan hech bo‘lmaganda bittasining ro‘y berishidan iborat hodisani  $A$  va  $B$  hodisalarning yig‘indisi deymiz va  $A+B$  (yoki  $A \cup B$ ) kabi belgilaymiz.

**5-misol.**  $A = \{\text{kub tashlanganda 1, 3 sonlaridan birining chiqishi}\},$   
 $B = \{\text{kub tashlanganda 1, 2, 6 sonlaridan birining chiqishi}\}.$

Bu holda  $A+B = \{1, 2, 3, 6\}.$

5)  $A$  hodisa ro‘y bersa-yu, ammo  $B$  hodisasi ro‘y bermasa, bunday hodisani  $A$  va  $B$  hodisalarning ayirmasi deymiz va  $A-B$  kabi belgilaymiz.

**6-misol.**  $A = \{\text{kub tashlanganda } 1, 4, 6 \text{ sonlaridan birining chiqishi}\},$   
 $B = \{\text{kub tashlanganda } 3, 5 \text{ sonlaridan birining chiqishi}\}.$

Kub tashlanganda 6 soni chiqdi, ya'ni  $A$  hodisa ro'y berdi deylik, ammo  $B$  hodisa ro'y bermadi. Bu holda  $A-B$  hodisa ro'y bergan bo'ladi.

Agar  $A+\bar{A}=U$ ,  $A\bar{A}=V$  shartlar bajarilsa,  $A$  va  $\bar{A}$  hodisalar qaramaq-qarshi hodisalar deyiladi.

**7-misol.**  $A = \{\text{kub tashlanganda juft sonning chiqishi}\}.$   $\bar{A} = \{\text{kub tashlanganda toq sonning chiqishi}\}.$   $\{\text{Kub tashlanganda juft yoki toq sonning chiqish}\}$  hodisasi  $A+\bar{A}=U$  bo'ladi.  $A$  va  $\bar{A}$  hodisalarning umumiy qismi yo'q, ya'ni  $A \cdot \bar{A} = V$  – ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa. Demak,  $A$  va  $\bar{A}$  qaramaq-qarshi hodisa.

6) Agar  $AB = V$  bo'lsa,  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda emas deyiladi, ularning bir vaqtda ro'y berishi mumkin emas.

**8-misol.**  $A = \{\text{kub tashlanganda } 2 \text{ ning chiqishi}\},$   
 $B = \{\text{kub tashlanganda } 3 \text{ ning chiqishi}\}.$

Ravshanki, bitta kub tashlanganda 2 va 3 sonlari birgalikda paydo bo'lmaydi (birgalikda ro'y bermaydi). Demak, bu misolda  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda emas.

7) Agar  $A=B_1+B_2+\dots+B_n$  va  $B_i \cdot B_j = V$  ( $i \neq j$ ) bo'lsa,  $A$  hodisa  $B_1, B_2, \dots, B_n$  *hususiy hollarga (hodisalarga) ajraladi* deymiz. Agar  $A$  hodisa *hususiy hollarga ajralmasa*, uni *elementar hodisa* deymiz.

**9-misol.** Kub tashlanganda 1 sonining chiqish hodisasi  $B_1$ , 2 sonining chiqish hodisasi  $B_2$ , 3 sonining chiqish hodisasi  $B_3$  bo'lsa, u holda kub tashlanganda 1, 2, 3 sonlardan birining chiqish hodisasini  $A$  desak,  $A=B_1+B_2+B_3$ . Shu bilan birga  $B_1 B_2 = B_1 B_3 = B_2 B_3 = V$ . Bu misolda  $B_1, B_2, B_3$  – elementlar hodisalar.

8) Agar  $B_1+B_2+\dots+B_n=U$  va  $B_i \cdot B_j = V$ ,  $i \neq j$ , bo'lsa,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  hodisalar o'zaro birgalikda bo'lmagan hodisalarning *to'liq gruppasini* tashkil etadi deymiz.

Masalan, kubni bir marta tashlanganda 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlarining paydo bo'lishi hodisasi, mos ravishda,  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  bo'lsa, ravshanki,  $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 = U$ .

Odatda, elementar hodisalar  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  harflar bilan, elementar hodisalar fazosi esa  $U$  (yoki  $\Omega$ ) harfi bilan belgilanadi. Biror tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar *elementar hodisalar fazosini tashkil qiladi* deyishadi.

Masalan: tanga tashlash tajribasida ikkita elementar hodisa bor:

$G = \{\text{tanganing gerb tomoni bilan tushishi}\},$   
 $R = \{\text{tanganing raqam tomoni bilan tushishi}\}.$  Bu yerda  $U = \{G, R\}.$

Kubni tashlash tajribasida jami 6 ta elementar hodisa bor:

$\omega_1 = \{\text{1 raqamining tushishi}\}, \dots, \omega_6 = \{\text{6 raqamining tushishi}\}.$

Bu yerda  $U = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}.$

Agar  $U = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  bo'lsa, uning barcha qism to'plamlari soni nechta degan savolga kombinatorika masalalari mavzusida javob berilgan:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n,$$

bu yerda  $C_n^k$  son  $n$  elementli to'plamdan olingan  $k$  elementli barcha qism to'plamlar soni.

Elementar hodisalar  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  teng imkoniyatli bo'lishi shart emas:  $P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n, p_1 + \dots + p_n = 1,$  ya'ni har bir elementar hodisa  $\omega_k$  ga manfiy bo'lmagan  $p_k$  son mos qo'yiladi. Elementar hodisalar teng imkoniyatli bo'lgan holda  $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$  bo'ladi.

Har bir tasodifiy hodisa  $A$  bir nechta elementar hodisalar yig'indisidan iborat. Masalan,  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$  ya'ni  $A = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \dots + \omega_{i_k}$  bo'lsa, u holda

$$P(A) = p(\omega_{i_1}) + \dots + p(\omega_{i_k}) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k}.$$

Umuman,  $A$  hodisaning ehtimolligi  $P(A)$  ushbu shartlarni qanoatlantiradi:

1)  $P(A) \geq 0;$  2)  $P(U) = 1;$  3) Agar  $AB = V$  bo'lsa,  $P(A+B) = P(A) + P(B).$

Agar  $A \cap B \neq V$  bo'lsa, ravshanki,  $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

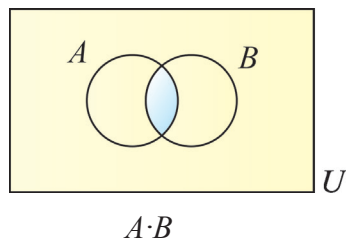
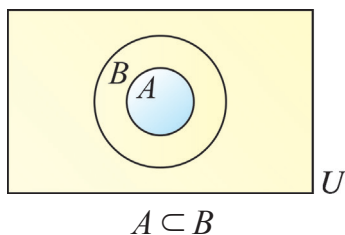
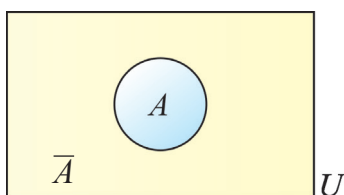
$A + \bar{A} = U$  va  $A \cap \bar{A} = V$  bo'lgani uchun  $P(A + \bar{A}) = P(U) = 1$  va bu holda

$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$  Bundan  $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

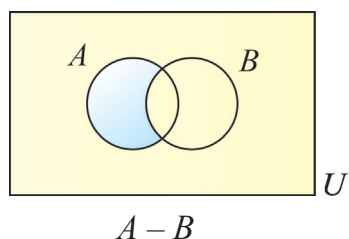
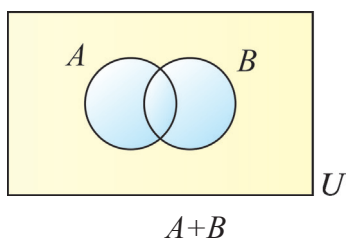
Hodisalar ustida amallarni Eyler-Venn diagrammasida tasvirlash qulay. Bunga rasmlarni tahlil qilib, ishonch hosil qilamiz:

$A, \bar{A}$  – qarama-qarshi hodisalar

$$A + \bar{A} = U, A\bar{A} = V$$







### Mashqlar

**94.** Vertolyot har uchishda 6 nafar odamni manzilga yetkazadi. 30 nafar sayyoh shu vertolyotda toqqa bormoqchi. Ularning vertolyotga o‘tirish tartibi tasodifiydir. Alisher Imomovning birinchi reysda uchishi ehtimolligini toping.



**95.** 10, 11, ..., 199 sonlaridan tavakkaliga bitta sonni tanlasak, uning 3 ga karrali bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

**96.** Xalqaro musiqa musobaqasida 20 nafar musiqachi qatnashmoqda: 8 nafar O‘zbekistondan, 7 nafar AQSHdan, qolgani esa Xitoy Xalq Respublikasidan.

Sahnaga birinchi bo‘lib xitoylik musiqachi chiqishi hodisasining ehtimolligini toping.

**97.** 1000 ta suv nasosidan 5 tasi nosoz. Tavakkaliga olingan nasos soz bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

**98.** Tanga uch marta tashlanganda raqam tomoni tushmaslik hodisasining ehtimolligini toping.



**99.** Tanga uch marta tashlanganda raqam tomoni aynan bir marta tushish hodisasining ehtimolligini toping.

**100.** Tanga uch marta tashlanganda raqam tomoni kamida bir marta tushish hodisasining ehtimolligini toping.

**101.** Ikkita signalizator (avariya ro'y berganda xabar beruvchi qurilma) mustaqil (bog'liqsiz) holda ishlamoqda. Agar birinchi signalizatorning avariya ro'y berganda ishlash ehtimolligi 0,9 va 2- signalizatorning avariya ro'y berganda ishlash ehtimolligi 0,95 bo'lsa, u holda quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping. Avariya ro'y berganda quyidagi hodisalarning ro'y berish ehtimolliklarini toping:

- 1) ikkala signalizatorning bir vaqtda xabar berish hodisasi;
- 2) bitta signalizatorning xabar berish hodisasi;
- 3) faqat birinchi signalizatorning xabar berish hodisasi;
- 4) faqat ikkinchi signalizatorning xabar berish hodisasi;
- 5) ikkala signalizatorning xabar bermaslik hodisasi.



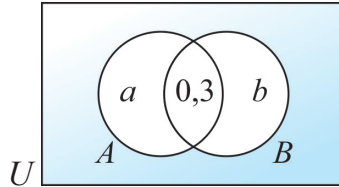
**Ehtimolliklarni qo‘shish.** Avval ko‘rdikki, ixtiyoriy  $A$  va  $B$  hodisalar uchun

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bu tenglik ehtimolliklarni qo‘shish qoidasini ifodalaydi.

**1-misol.**  $P(A) = 0,6$ ,  $P(A \cup B) = 0,7$ ,  $P(A \cap B) = 0,3$  bo‘lsa,  $P(B)$  ni toping.

△ **1-usul.** Tegishli Eylar – Venn diagrammasini chizamiz:



Bundan  $a + 0,3 = 0,6$ ;  $a = 0,3$ .  $a + b + 0,3 = 0,7$ ;  $0,3 + b = 0,4$ ;  $b = 0,1$ .

Demak,  $P(B) = 0,4$ .

**2-usul.** Ehtimolliklarni qo‘shish qoidasiga ko‘ra

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \quad 0,7 = 0,6 + P(B) - 0,3; \quad P(B) = 0,4.$$

Ma’lumki, birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  tenglik o‘rinli bo‘ladi.

**2-misol.** 31 nafar fuqarodan 7 nafari Samarqand shahrida ( $S$ ), 5 nafari esa Samarqand viloyatida ( $W$ ) doimiy ro‘yxatdan o‘tgan.

a)  $S$  va  $W$  hodisalar birgalikda bo‘ladimi?

b) Ihtiyoriy ravishda tanlangan fuqaroning:

I) Samarqandda;

II) Samarqand viloyatida;

III) Yo Samarqandda, yo Samarqand viloyatida;

doimiy ro‘yxatdan o‘tganligining ehtimoligini toping.

△ a) Fuqaro doimiy ro‘yxatdan faqat bir joyda o‘tishi mumkin.

Demak,  $S$  va  $W$  hodisalar birgalikda bo‘lmaydi.

b) I)  $P(S) = \frac{7}{31}$ ;      II)  $P(W) = \frac{5}{31}$ .

Birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun

$$\text{III) } P(S \cup W) = P(S) + P(W) = \frac{7}{31} + \frac{5}{31} = \frac{12}{31}. \blacktriangle$$

**3-masala.** Gulzorda 20 ta qizil, 30 ta binafsha rang va 40 ta oq rangli gul ochilgan. Agar bitta gul uzilgan bo'lsa, uning qizil yoki binafsha rangli bo'lish ehtimolligini toping.

$$\triangle P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{20}{90} + \frac{30}{90} - \frac{0}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}. \blacktriangle$$

### Mashqlar

**102.**  $P(A)=0,4$ ,  $P(A \cup B)=0,9$ ,  $P(A \cap B)=0,1$  bo'lsa,  $P(B)$  ni toping.

**103.**  $P(A)=0,6$ ,  $P(B)=0,5$ ,  $P(A \cup B)=0,9$  bo'lsa,  $P(AB)$  ni toping.

**104.**  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda bo'lmasin.  $P(A)=0,45$ ,  $P(A \cup B)=0,8$  bo'lsa,  $P(B)$  ni toping.

**105.** 1, 2, ..., 15 sonlar bilan nomerlangan chiptalardan ixtiyoriy biri tanlab olinmoqda. Chiptadagi nomer 11 dan katta bo'lishi hodisasini  $A$  harfi bilan, 8 dan kichik bo'lishi hodisasini  $B$  harfi bilan belgilaymiz.

a)  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda bo'ladimi?

b) I)  $P(A)$ ; II)  $P(B)$ ; III)  $P(A \cup B)$  larni toping.

**106.** Sinfda 25 o'quvchi bor. Ulardan

11 nafari 16 yoshda ( $F$ );

12 nafari 17 yoshda ( $S$ );

8 nafarining uyida qo'y boqiladi ( $D$ );

7 nafarining uyida qoramol boqiladi ( $C$ );

4 nafarining uyida hech qanday hayvonni boqilmaydi ( $N$ ).

Ixtiyoriy ravishda o'quvchi tanlanmoqda.

Quyidagilarni toping va ma'nosini tushuntiring:

a)  $P(F)$ ;      b)  $P(S)$ ;      c)  $P(D)$ ;      d)  $P(C)$ ;      e)  $P(N)$ ;  
 f)  $P(F \cup S)$ ;      g)  $P(F \cup D)$ ;      h)  $P(C \cup N)$ ;      i)  $P(F \cup D)$ ;      j)  $P(D \cup N)$ .

ehtimolliklarni toping

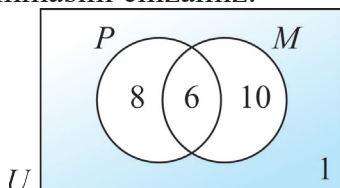
### Ehtimollarni ko'paytirish

$A$  va  $B$  hodisalar berilgan bo'lsin.  $A/B$  yozuv  $B$  hodisaning ro'y berganligi aniq bo'lganida  $A$  hodisaning ro'y berishini bildirsin.

**4-misol.** 25 o'quvchisidan 14 nafari palovni, 16 nafari esa mantini yoqtiradi. Bir nafar o'quvchi palov va mantidan boshqa taomni, 6 nafar o'quvchi esa ikkala taomni ham yoqtiradi. Ixtiyoriy ravishda tanlangan o'quvchi:

- palovni ( $P$ ) yoqtirishining;
- mantini ( $M$ ) yoqtirganligi aniq bo'lganda palovni yoqtirishining ehtimolligini toping.

△ Eylar–Venn diagrammasini chizamiz:



25 nafar o'quvchidan 14 nafari palovni yoqtirganligi sababli

$$P(\text{palov}) = \frac{14}{25}.$$

16 nafar mantini yoqtirganlar ichida 6 nafari palovni ham yoqtirganligi

uchun

$$P(\text{palov} | \text{manti}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Umumiy holda ham  $B$  hodisa ro'y berganligi aniq bo'lganda  $A$  hodisaning ro'y berish ehtimolligi

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

formula yordamida topiladi, bundan  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B)$ . Bu formula ehtimollikni ko'paytirish formulasi deyiladi.

$P(A/B)$  ehtimollik **shartli ehtimollik** deb ataladi.

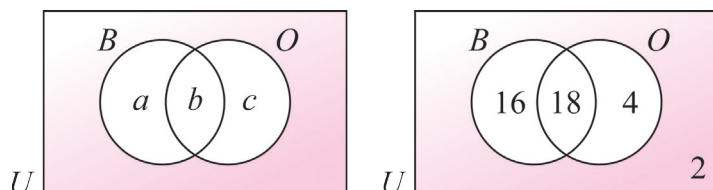
$P(A/B) = P(A)$  bo'lsa,  $A$  hodisa  $B$  hodisaga bog'liq emas deyiladi.  $A$  hodisa  $B$  hodisaga bog'liq bo'lmasa, u holda  $B$  hodisa ham  $A$  hodisaga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni  $P(B/A) = P(B)$ .

Agar  $A$  va  $B$  hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, ularning birgalikda ro'y berish ehtimolligi bu hodisalarning har birining ro'y berish ehtimolliklarining ko'paytmasiga teng, ya'ni  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$  tenglik o'rinli bo'ladi.

**Tadqiqot uchun.** Agar  $A$  va  $B$  hodisalar bog'liq bo'lmasa: 1)  $A$  va  $\bar{B}$ ; 2)  $\bar{A}$  va  $B$ ; 3)  $\bar{A}$  va  $\bar{B}$  hodisalar ham o'zaro bog'liq bo'lmaydi.

**5-misol.** 40 nafar o‘quvchidan 34 nafari banan ( $B$ ), 22 nafari olma ( $O$ ) va 2 nafari ikkala mevani yoqtiradi. Ixtiyoriy tanlangan o‘quvchining:

- ikkala mevani yoqtirishining;
- eng ko‘pi bilan bitta mevani yoqtirishi;
- olmani yoqtirishi sharti bilan bananni yoqtirishining;
- bananni yoqtirishi sharti bilan olmani yoqtirmasligining ( $\bar{O}$ ) ehtimolligini toping.



Diagrammadan ravshanki:  $a+b=34$ ;  $b+c=22$ ;  $a+b+c=38$ . Bundan,  $c=38-34=4$ ;  $b=18$ ;  $a=16$ .

Demak,

$$\text{a) } P(\text{ikkala meva}) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20} = 0,45;$$

$$\text{b) } P(\text{eng ko'pi bilan bitta meva}) = \frac{38}{40} = \frac{19}{20} = 0,95;$$

$$\text{c) } P(B|O) = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}; \quad \text{d) } P(\bar{O} | B) = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}. \quad \blacktriangle$$

**6-misol.**  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = p$  bo‘lsin.

Agar  $A$  va  $B$  hodisalar:

- birgalikda bo‘lmasa;
- bog‘liq bo‘lmasa,  $p$  ni toping.

△ a)  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda bo‘lmasa,  $A \cap B = \emptyset$ , ya’ni  $P(A \cap B) = 0$ .

Ammo  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ , bundan

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 = \frac{5}{6}.$$

b)  $A$  va  $B$  hodisalar o‘zaro bog‘liq bo‘lmasa, u holda

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

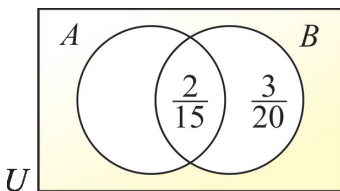
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}. \quad \blacktriangle$$

**7-misol.** Agar  $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$  bo'lsa, quyidagilarni toping: a)  $P(B)$ ; b)  $P(A \cap \bar{B})$ .

$$\triangle P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}, \text{ bundan } P(B \cap A) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}.$$

$$\text{Xuddi shuningdek, } P(B \cap \bar{A}) = P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}.$$

Eyler–Venn diagrammasidan



$$\text{a) } P(B) = \frac{2}{15} + \frac{3}{20} = \frac{17}{60};$$

$$\text{b) } P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15}.$$

## Hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash

**1-misol.** Korxonada bir necha dastgoh ishlaydi. Ish vaqti davomida bitta dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolligi 0,2 ga teng, ikkita dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolligi 0,13 ga teng. Ish vaqti davomida ikkitadan ortiq dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolligi esa 0,07 ga teng. Ish vaqti davomida hech bo'lmaganda bitta dastgohni ta'mirlash talab etilishi ehtimolliini toping.

$\triangle$  Quyidagi hodisalarni qaraymiz:

$A = \{\text{ish vaqti davomida bitta dastgohni ta'mirlash talab etiladi}\};$

$B = \{\text{ish vaqti davomida ikkita dastgohni ta'mirlash talab etiladi}\};$

$C = \{\text{ish vaqti davomida ikkitadan ortiq dastgohni ta'mirlash talab etiladi}\}.$

$A, B$  va  $C$  hodisalar o'zaro birgalikda emas. Bizni qiziqtiradigan hodisa:

$A + B + C = \{\text{ish vaqti davomida hech bo'lmaganda bitta dastgohni ta'mirlashning zarur bo'lishi}\}$ , shu hodisaning ehtimoligini topamiz:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

Javob: 0,4.  $\blacktriangle$

**2-misol.** Idishda 10 ta qizil va 6 ta ko'k rangli shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan ikkala sharning bir xil rangli bo'lish ehtimoligini toping.

$\triangle$   $A$  olingan ikkala shar qizil bo'lishi,  $B$  esa olingan ikkala sharning ko'k rangda bo'lishi hodisasi deylik. Ko'rinib turibdiki,  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda

bo‘lmagan hodisalardir. Demak,

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

$A$  hodisaning ro‘y berishiga  $C_{10}^2$  ta elementar hodisa qulaylik tug‘diradi.  $B$  hodisaning ro‘y berishiga esa  $C_6^2$  ta elementar hodisa qulaylik tug‘diradi. Ro‘y berishi mumkin bo‘lgan jami elementar hodisalar soni esa  $C_{16}^2$  ga teng. U holda

$$P(A + B) = \frac{C_{10}^2 + C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{1}{2}. \blacktriangle$$

**3-misol.** Ikki ovchi bo‘riga qarata bittadan o‘q uzishdi. Birinchi ovchining o‘qni bo‘riga tekkizish ehtimolligi 0,7 ga, ikkinchisniki esa 0,8 ga teng. Hech bo‘lmaganda bitta o‘qning bo‘riga tegishi ehtimolligini toping.

$\triangle$   $A$  – birinchi ovchining o‘qni bo‘riga tekkizishi hodisasi,  $B$  – ikkinchi ovchining o‘qni bo‘riga tekkizishi hodisasi bo‘lsin. Ravshanki,  $A$  va  $B$  hodisalar birgalikda bo‘lgan, ammo bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan hodisalardir. U holda

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,8 - 0,56 = 0,94. \blacktriangle$$

**4-misol.** Tanga va kub bir vaqtda tashlangan. “Gerb“ tushishi va “3” soni tushishi hodisalarining birgalikda ro‘y berishi ehtimolligini toping.

$\triangle$   $A$  – tanganing “gerb” tomoni tushishi hodisasi,  $B$  – kubik tashlanganda “3” sonining tushishi hodisasi bo‘lsin.  $A$  va  $B$  hodisalar bog‘liq bo‘lmagan hodisalar. Demak,

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \blacktriangle$$

**5-misol.** Firmada 7 ta erkak va 3 ta ayol ishchi ishlaydi. Tavakkaliga 3 kishi ajratildi. Ajratib olingan ishchilarning barchasi erkaklar bo‘lishi ehtimolligini toping.

$\triangle$  Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz:

$A$  – birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi;

$B$  – ikkinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi;

$C$  – uchinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasi.

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi hodisasining ehtimolligi:  
 $P(A) = 0,7$ .

Birinchi ajratilgan ishchining erkak kishi bo‘lishi shartida ikkinchi ishchining ham erkak kishi bo‘lishi ehtimolligi, ya’ni  $B$  hodisaning shartli ehtimolligi:

$$P(B / A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$



Oldin ajratib olinganlarning ikkalasi erkak kishi bo'lishi sharti ostida uchinchi ajratilgan ishchining ham erkak kishi bo'lishi ehtimoligi, ya'ni  $C$  hodisaning shartli ehtimoligi:  $P(C/AB) = \frac{5}{8}$ . Ajratib olingan ishchilarning hammasi erkak kishilar bo'lishi ehtimoli  $P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C/AB) = \frac{7}{24}$ . ▲

**6-misol.** Biror obyekt yakson bo'lishi uchun bitta bombaning kelib tushishi kifoya, deylik. Agar obyektga tushishi ehtimolliklari, mos ravishda, 0,3; 0,4; 0,6; 0,7 ga teng bo'lgan 4 ta bomba tashlangan bo'lsa, u holda obyektning yakson bo'lish ehtimoligini toping.

△ Agar  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalar o'zaro bog'liq bo'lmasa, ularga qarama-qarshi bo'lgan  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$  hodisalar ham o'zaro bog'liq emas. Bundan

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) &= P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n) = \\ &= (1 - P(A_1)) (1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n)). \end{aligned} \quad (1)$$

Shu bilan birga,  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$  va  $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$  hodisalar qarama-qarshi hodisalardir. Shuning uchun (1) ga ko'ra  $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \dots (1 - P(A_n))$ . (2)

Bu formula, agar  $P(A_1), \dots, P(A_n)$  ehtimolliklar ma'lum bo'lsa,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hodisalarning kamida bittasining ro'y berishi ehtimoligini hisoblash imkonini beradi. Masalan, avvalgi  $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$  bo'lsa, (2) formula  $P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - (1 - p)^n$  ko'rinishni oladi. Demak, 4 bombadan kamida bitta bombaning ko'prikk tushishi ehtimoligi

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) &= 1 - (1 - 0,3) (1 - 0,4) (1 - 0,6) (1 - 0,7) = \\ &= 1 - 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,3 = 1 - 0,0504 = 0,9496. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

### Mashqlar

**107.**  $P(R) = 0,4$ ,  $P(S) = 0,5$  va  $P(R \cup S) = 0,7$  bo'lsa,  $R, S$  lar o'zaro bog'liq bo'ladimi?

**108.**  $P(A) = \frac{2}{5}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$  bo'lsin.

a)  $P(A \cap B)$ ;                      b)  $P(B|A)$ ;                      c)  $P(A|B)$

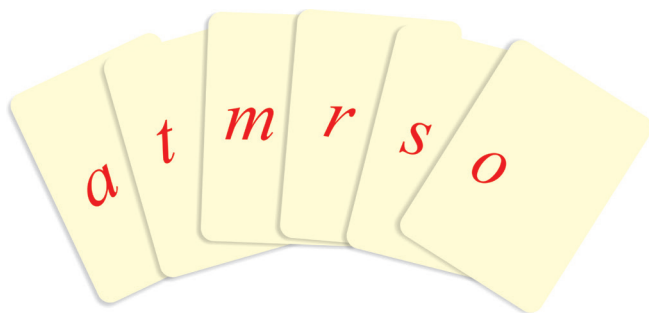
ni toping.  $A, B$  lar o'zaro bog'liq bo'ladimi?

**109.**  $P(X) = 0,5$ ,  $P(Y) = 0,7$  va  $X, Y$  o'zaro bog'liq bo'lmasa, quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

a)  $X, Y$  hodisalarning ikkalasi ham ro'y berdi;

- b) Yo  $X$ , yo  $Y$  hodisasi ro‘y berdi;
- c) Na  $X$ , na  $Y$  hodisasi ro‘y bermadi;
- d)  $X$  ro‘y berdi, ammo  $Y$  ro‘y bermadi;
- e)  $X$  ning ro‘y berishi sharti bilan  $Y$  hodisasi ro‘y berdi.

**110.** Oltita bir xil qog‘ozchanning har biriga quyidagi harflardan biri yozilgan:  $a, t, m, r, s, o$ . Qog‘ozchalar yaxshilab aralashtirilgan. Bittalab olingan va “bir qator qilib” terilgan to‘rtta qog‘ozchada: 1) satr; 2) rost; 3) taom so‘zlarini o‘qish mumkinligi hodisasining ehtimolligini toping.



**111.** Tanga 5 marta tashlandi. Tanganing gerbli tomoni bilan ikki marta tushishi hodisasining ehtimolligini toping.

**112.** 21 ta standart va 10 ta nostandart buyum solingan idishni tashish vaqtida bitta buyum yo‘qolgan, biroq qanday buyum yo‘qolgani ma’lum emas. Yashikdan (tashishdan keyin) tavakkaliga olingan buyum standart buyum bo‘lib chiqdi. Nostandart buyumning yo‘qolgan bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.

**113.** Abonent telefon nomerini terayotib, nomerning oxirgi uchta raqamini eslay olmadi va bu raqamlar turli ekanligini bilgan holda ularni tavakkaliga terdi. Kerakli raqamlar terilgan bo‘lishi hodisasining ehtimolligini toping.



**Bernulli sxemasi.**  $n$  ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan sinashlar (tajribalar) ketma-ketligi o‘tkazilgan. Har bir sinashda  $A$  hodisaning ro‘y berish ehtimolligi  $p$ , ro‘y bermaslik ehtimolligi esa  $q = 1 - p$  bo‘lsin ( $p$  va  $q$  har bir sinash uchun bir hil, sinashning nomeriga bog‘liq emas), deylik.

Mazkur sinashlar ketma-ketligi **Bernulli sxemasi** deyiladi.

3 ta sinashdan iborat Bernulli sxemasini qaraylik. Agar  $A$  hodisa ro‘y bersa, 1 raqamini, ro‘y bermasa, 0 raqamini yozamiz. 3 ta sinashda ro‘y berishi mumkin bo‘lgan 8 ta elementar hodisaga mos kodlar shunday bo‘ladi:

111, 110, 101, 100, 011, 010, 001 va 000

Sinashlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmaganligi sababli, har bir elementar hodisaning ehtimolligini ehtimolliklarni ko‘paytirish formulasiga muvofiq topsak bo‘ladi.

Masalan, 110 ga mos hodisa  $ppq = p^2q$  ehtimollikka ega.

Hisoblashlar natijalarini jadval ko‘rinishda yozaylik:

Elementar hodisa	111	110	101	100	011	010	001	000
Ehtimolligi	$p^3$	$p^2q$	$p^2q$	$pq^2$	$p^2q$	$pq^2$	$pq^2$	$q^3$

Bog‘liq bo‘lmagan  $n = 4, 5, \dots$  sinashlardan iborat Bernulli sxemalarini ham xuddi shunday qarasa bo‘ladi.

Bunda 3 ta sinashda  $8 = 2^3$  ta elementar hodisa, 4 ta sinashda  $16 = 2^4$  ta elementar hodisa, 5 ta sinashda  $32 = 2^5$  ta elementar hodisa va h.k.,  $n$  ta sinashda esa  $2^n$  ta elementar hodisa ro‘y beradi.

**1-misol.** Tanga uch marta ketma-ket tashlangan.  $A$  hodisasi har bir tashlashda tanganing gerbli tomoni bilan tushishi hodisasi bo‘lsin.

Har bir sinashda  $A$  hodisasining ro‘y berish yoki bermasligining ehtimolliklari  $p = q = \frac{1}{2}$  bo‘ladi. Bu holda jadvaldagi har bir hodisaning ehtimolligi  $\frac{1}{8}$  ekani ravshan. Masalan, “ikki marta gerb, bir marta raqam tushish (bunga mos kod 110) hodisasining ehtimolligi  $p^2q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  bo‘ladi.

Boshqa hollarni ham shunday qarash mumkin.

**2-misol.** Qutida 3 ta qizil va 5 ta ko'k qalam bor. Bir sinashda tavakkal qilib bitta qalam olindi. Har gal olingan qalamni joyiga qaytarib, sinashlarni 4 marta takrorlaymiz. Natijada 4 ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinashlarning Bernulli sxemasini hosil qilamiz.  $A$  hodisa olingan qalam rangining qizil bo'lishi hodisasi deylik. Ravshanki, bu holda har bir sinashda  $A$  hodisasining ro'y berish ehtimolligi  $p = \frac{3}{8}$ , ro'y bermaslik ehtimolligi esa  $q = \frac{5}{8}$  ga teng.

*Savol qo'yamiz:* birinchi, uchinchi va to'rtinchi sinashda qizil, ikkinchi sinashda esa ko'k rangli qalamni olish hodisasining ehtimoligi qanday bo'ladi?

Yuqoridagi kabi mulohazalar yuritib, bu hodisaga 0 va 1 larning 1011 ketma-ketligi mos kelishini, kuzatilayotgan hodisasining ehtimolligi esa

$$p^3q = \left(\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{135}{4096} \approx 0,033 \text{ ekanini topamiz.}$$

$n$  ta sinashdan iborat Bernulli sxemasida kuzatilayotgan  $A$  hodisasining roppa-rosa  $m$  marta ro'y berish ehtimolligini topaylik.

Kombinatorikaga oid mavzularda uzunligi  $n$  ga teng va tarkibida aynan  $m$  ta  $a$  harfi va  $n - m$  ta  $b$  harfi bo'lgan so'zlar soni  $C_n^m$  ga tengligi isbotlangan edi.

Demak, Bernulli sxemasida  $A$  hodisasining roppa-rosa  $m$  marta ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar soni  $C_n^m$  ga teng. Har bir bunday elementar hodisaning ehtimolligi esa  $p^m q^{n-m}$  ga teng bo'lgani uchun quyidagi tasdiqqa kelamiz:

**Teorema.**  $n$  ta o'zaro bog'liq bo'lmagan sinashdan iborat Bernulli sxemasida  $A$  hodisasining roppa-rosa  $m$  marta ro'y berish ehtimolligi  $P(n, m) = C_n^m p^m q^{n-m}$  bo'ladi.

**3-misol.** 3 ta sinashdan iborat Bernulli sxemasida har bir sinashda  $A$  hodisasining ro'y berish ehtimoligi  $p = 0,2$  bo'lsin. Bu holda  $q = 1 - 0,2 = 0,8$ .

3 ta sinashda  $A$  hodisasining: ro'y bermaslik (0 marta ro'y berishlik), 1 marta, 2 marta, 3 marta ro'y berishi ehtimolliklari, mos ravishda, quyidagilarga teng:

$$P(3, 0) = C_3^0 p^0 q^3 = 1 \cdot 1 \cdot 0,8^3 = 0,512;$$

$$P(3,1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384;$$

$$P(3,2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,096;$$

$$P(3,3) = C_3^3 p^3 q^0 = 1 \cdot 0,2^3 \cdot 1 = 0,008.$$

Natijalarni **binomial taqsimot** jadvali deb nomlangan jadval ko‘rinishda ifodalaymiz:

$m$	0	1	2	3
$P(3, m)$	0,512	0,384	0,096	0,008

Bu jadvalning ikkinchi qatoridagi ehtimolliklar yig‘indisi 1 ga teng ekanligiga ishonch hosil qiling. Shu bilan birga,

$$\sum_{m=0}^n P(n, m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1.$$

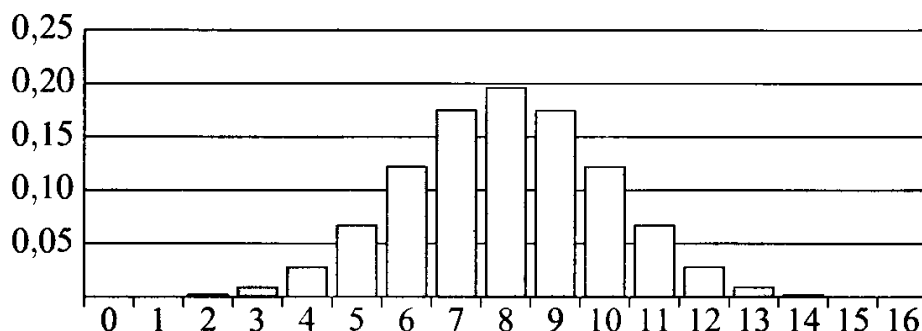
**4-misol.** Statistik ma‘lumotlarga ko‘ra o‘g‘il bola tug‘ilishining ehtimolligi  $p=0,515$  bo‘ladi. Tavakkal qilib tanlangan 10 ta chaqaloqdan 6 tasi o‘g‘il bola bo‘lishining ehtimolliligi taqriban

$$P(10, 6) = C_{10}^6 (0,515)^6 (0,485)^4 \approx 0,2167.$$

**5-misol.** 16 ta sinashdan iborat Bernulli sxemasida har bir sinashda  $A$  hodisaning ro‘y berish ehtimolligi  $p=0,5$  bo‘lsin. Bu holda binomial taqsimot jadvali quyidagicha bo‘lar ekan (verguldan so‘ng 3 xona aniqligida olindi):

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(16, m)$	0	0	0,002	0,009	0,028	0,067	0,122	0,175	0,196	0,175
$m$	10	11	12	13	14	15	16			
$P(16, m)$	0,122	0,067	0,028	0,009	0,002	0	0			

Bu ma‘lumotlarga mos ustunli diagrammani yasaymiz:



Ko‘rinib turibdiki, ehtimolliklar 0,196 qiymatga nisbatan simmetrik

joylashgan.  $A$  hodisaning roppa-rosa 8 marta ro‘y berish ehtimolligi eng kattadir.

**6-misol.** Mahsulotning nosoz bo‘lishining ehtimolligi 0,01 ga teng. Tavakkaliga tanlangan 100 mahsulotdan 3 ta dan kam nosoz mahsulot chiqishining ehtimolligi  $P(100,0) + P(100,1) + P(100,2) = C_{100}^0 (0,01)^0 (0,99)^{100} + C_{100}^1 (0,01)^1 (0,99)^{99} + C_{100}^2 (0,01)^2 (0,99)^{98} \approx 0,9816$  bo‘ladi.

**Tasodifiy miqdor.** Tajriba natijasida yoki bu qiymatni qabul qiladigan miqdor *tasodifiy miqdor* deyiladi.

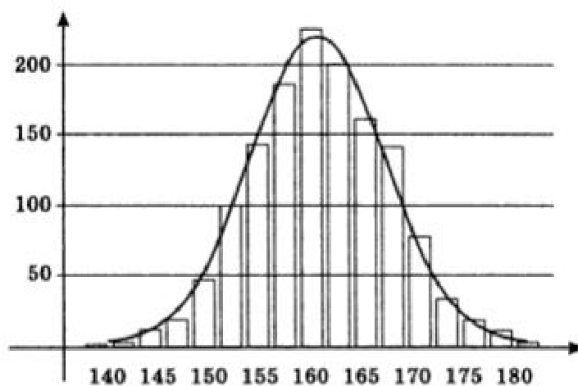
Tasodifiy miqdorlarga bir nechta misol keltiraylik.

1. O‘yin kubi tashlanganda tushgan ochkolar soni.
2. Ixtiyoriy tanlangan insonning santimetrlarda ifodalangan bo‘yi.
3. Taksi to‘xtash joyiga bir soat davomida kelib to‘xtaydigan taksilar soni.
4. Televizorning buzilmasdan xizmat qilish davri.
5. Tavakkaliga tanlangan 100 ta mahsulotdan sifatsizlari soni.
6. 11-sinf o‘quvchining vazni yoki bo‘yi.
7. Yer sirtining ma‘lum maydoniga berilgan vaqt oralig‘ida kelib tushuvchi kosmik zarralar soni.
8. Ma‘lum nav paxtadan berilgan ingichkalikda tayyorlangan ipning pishiqligini tekshirishdagi uzilishlar soni.

**Tadqiqot uchun.** 1) Yuqorida keltirilgan 1–8- misollardagi tasodifiy miqdorlarni muhokama qiling. Bu miqdorlar qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin?

2) Boshqa turdagi tasodifiy miqdorlarga misollar keltiring.

2-misoldagi tasodifiy miqdorni fransuz olimi Muavr tadqiq qilgan. U tasodifiy ravishda tanlangan 1375 nafar ayolning bo‘yini o‘lchab, olingan statistik ma‘lumotlarni ustunli diagramma shaklida tasvirlagan:

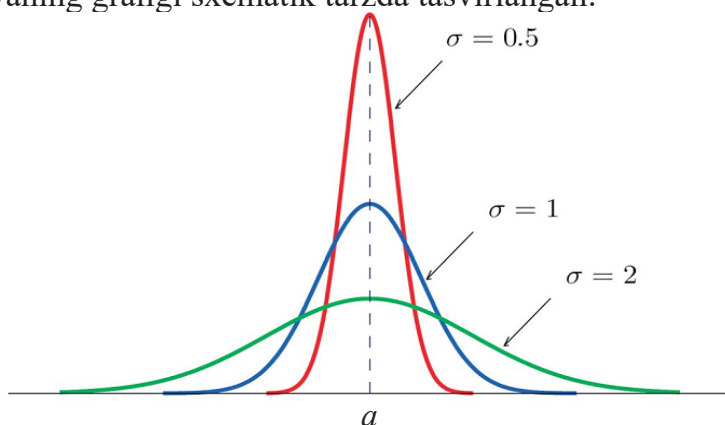


Shu diagrammada tasvirlangan “qalpoqsimon” egri chiziq taqriban

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

funksiya grafigiga yaqinligi aniqlangan, bu yerda  $a$ ,  $\sigma$  - parametrlar.

Quyida  $a$ ,  $\sigma$  – parametrlarning turli qiymatlarida  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$  funksiyaning grafigi sxematik tarzda tasvirlangan:



Ko‘rinib turibdiki,  $a$  parametr tasodifiy miqdor qabul qilgan qiymatlar to‘plamining o‘rtasini,  $\sigma$  esa standart chetlashishni bildiradi.

Tabiatdagi tasodifiy jarayonlarda shunday ko‘rinishda taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ko‘p uchraganligi sababli, Muavr ularni *normal taqsimlangan* deb nomlagan.

Agar biror miqdor yetarlicha ko‘p bo‘lgan va bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan kichik tasodifiy omillar yig‘indisi ta’sirida bo‘lsa, u holda ushbu miqdorni normal taqsimlangan deb faraz qilish mumkin.

Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiraylik.

1. O‘q o‘tishda nishondan chetlanish miqdori (soni).
2. O‘lchashlardagi xatoliklar.
3. Populatsiyalardagi tirik organizmlarning ba’zi xarakteristikalar.

**Tadqiqot uchun.** Yuqorida keltirilgan misollardagi tasodifiy miqdorlar normal taqsimlanganmi? Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlarga misollar keltiring.

**Sinashlar (tajribalar) soni  $n$  yetarlicha katta bo‘lganida binomial taqsimot normal taqsimotga yaqinlashadi.**

### Yozma nazorat ishi namunasi

1. Idishda 25 ta olma bor, shulardan 8 tasi qizil, qolgani esa yashil rangda. Tasodifiy ravishda (tavakkaliga) olingan olma qizil rangda bo'lishi hodisasi ehtimolligini toping.

2. Biologiya fanidan savollar to'plamida 25 ta savol bor. Shu savollar ichida 2 tasi genetikaga oid ekan. Tavakkaliga tanlangan savol genetika haqida emasligining ehtimolligini toping.

3. O'quvchi tavakkaliga 100 dan katta bo'lmagan natural sonni aytdi. Shu son 5 ga karrali bo'linishini ehtimolligini toping.

4. Tanga 3 marta tashlanganda 2 marta gerb va bir marta raqam tomoni tushishining ehtimolligini toping.

5. Merganning nishonga tegish ehtimolligi 0,9 ga teng. U nishonga 3 marta o'q uzganda barcha o'qlari nishonga tegishining ehtimolligini toping. Biror marta ham nishonga tegmasli hodisaning ehtimolligi bilan solishtiring.

### Mashqlar

114. Merganning bir o'q bilan nishonga tegish ehtimolligi 0,8 ga teng. U 6 marta o'q uzganda 4 marta nishonga tegish ehtimolligini toping.

115. 4 ta mergan bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda bir martadan o'q uzishmoqda. Har birining nishonga tegish ehtimolligi 0,25 ga teng. Nishonga

a) 1 ta o'qning nishonga tegishi;

b) 2 ta o'qning nishonga tegishi;

c) 3 ta o'qning nishonga tegishi;

d) 4 ta o'qning nishonga tegishi;

e) birorta ham o'qning nishonga tegmasligi hodisalarining ehtimolliklarini toping.

116\*. Uskuna 10 ta qismdan iborat. Har bir qismning ishdan chiqishi ehtimolligi  $q$  ga teng. Qismlar o'zaro bog'liqsiz holda ishdan chiqishi mumkin. Quyidagi hodisalarning ehtimolliklarini toping:

a) ikkita qismning ishdan chiqishi;

b) kamida ikkita qismning ishdan chiqishi;

c) kamida bitta qismning ishdan chiqishi.



## IV BOB. ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI TAKRORLASH.



### ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI TAKRORLASHGA OID MISOLLAR

1. Tenglamani yeching:

1)  $3(0,75x + \frac{6}{5}) - 2x = \frac{1}{4}x + 2,5$ ;      2)  $7x(2,5 - x)\left(1\frac{2}{3}x + 3\right) = 0$ ;

3)  $(x+1)(x-1)(x-2) - (x^2 + 7x)(x-4) - 2 = 2x$ ;

4)  $\frac{x^2 - 4}{x-2} = 4$ ;      5)  $\frac{x^2 - 5x + 4}{x-1} = x+1$ ;      6\*)  $\frac{8}{x^2 - 6x + 8} + \frac{1-3x}{2-x} = \frac{4}{x-4}$ ;

7\*)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ ;

8\*)  $24x^4 + 16x^3 - 3x - 2 = 0$ ;

9\*)  $2x^4 - 5x^3 - 18x^2 + 45x = 0$ ;

10)  $x^6 - x^4 - 9x^2 + 9 = 0$ ;

11\*)  $(x+1)(x^2 + 2) + (x+2)(x^2 + 1) = 2$ .

2.  $a$  ning qanday qiymatida  $(5-a)x = a-5$  tenglamaning ildizlar soni cheksiz ko'p bo'ladi?

3. Birinchi son ikkinchisidan 15% katta. Agar kichik songa 16 ni qo'shib, katta sondan 32 ni ayirsak sonlar teng bo'ladi. Shu sonlarni toping.

4. Yangi o'zgaruvchi kiritib tenglamani yeching:

1)  $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) = 8$ ;      2)  $(x^2 + 2x)^2 + (x+1)^2 = 57$ ;

3)  $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x-3)(x-2) = 1$ ;      4)  $\frac{21}{x^2 - 4x + 10} = x^2 - 4x + 6$ ;

5)  $\frac{3x+7}{5x-1} + \frac{5x-1}{3x+7} = 5,2$ ;      6\*)  $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1$ ;      7)  $\frac{3x^2}{(x-1)^2} - \frac{5x}{x-1} = 2$ .

5. Tenglamalar sistemasini o'rniga qo'yish usuli bilan yeching:

1)  $\begin{cases} x - 6y = -2, \\ 2x + 3y = 11; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} \frac{x+3y+1}{y} - \frac{y-3x+3}{2(x-2)} = 2, \\ y - x = 1; \end{cases}$       3)  $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

6. Tenglamalar sistemasini qo'shish usuli bilan yeching:

1)  $\begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{y}{2} = 2, \\ \frac{y}{5} - \frac{x+y}{2} = -1; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 2x + y^2 = 3, \\ 3x + y^4 = 4; \end{cases}$       3)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$

7. Tenglamalar sistemasini yangi o'zgaruvchni kiritish usuli bilan yeching:

$$1) \begin{cases} xy = 5, \\ \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{1}{x+y} - \frac{10}{x-y} = 1, \\ \frac{1}{x+y} + \frac{2}{x-y} = -\frac{3}{5}; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3xy - 11\frac{x}{y} = 4, \\ 2xy - 3\frac{x}{y} = 20. \end{cases}$$

8. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} x+y=3, \\ x^3+x^2y=12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2+2y+1=0, \\ y^2+2x+1=0; \end{cases}$$

$$4*) \begin{cases} x^3-xy^2=10, \\ y^3-x^2y=5; \end{cases} \quad 5*) \begin{cases} (x+y)^3+(x-y)^2=27 \\ (x-y)^3(x+y)^2=9. \end{cases}$$

9. Agar  $(x; y) \begin{cases} 2x+5y=12, \\ 3x-4y=-5 \end{cases}$  tenglamalar sistemasining yechimi bo'lsa,  $x^2+y^2$  ni toping.

10. Tenglamalar sistemasi nechta yechimga ega:  $\begin{cases} 3x^2+y^2=19, \\ y-2x=6? \end{cases}$

11. Tenglamalar sistemasining yechimlari sonini toping:

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$$

12. Tengsizlikning eng kichik butun yechimini toping:  $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{6} > 1$ .

13. Tengsizlikning butun yechimlari sonini toping:  $x^2 \leq 2$ .

14. Tengsizlikni yeching: 1)  $|x-1| \geq 2$ ; 2)  $x^2 - 7x + 10 < 0$ ;

$$3) \frac{1}{2x} > 3; \quad 4*) x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0; \quad 5) \frac{x^2 - 6x + 9}{x-1} \leq 0;$$

$$6) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} \leq 0; \quad 7*) \frac{(x-4)(x-5)^2}{x-7} < 0; \quad 8*) \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{3x^2} \geq 0.$$

15. Tengsizliklar sistemasini yeching: 1)  $\begin{cases} -2x^2 + 5x - 3 \geq 0, \\ 5x - 6 < 0; \end{cases}$

$$2) \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} \geq 0, \\ \frac{x^2-3}{3x+5} \leq 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} \frac{(x-1)^2-1}{5} + \frac{x}{2} < \frac{2(x-1)^2}{10} + \frac{x-1}{2} + 3, \\ 1-x > \frac{0,5(x-1)-1}{2} - \frac{2(x-1)+4,5}{3}. \end{cases}$$

16. Qo'sh tengsizlikni yeching:

1)  $1 < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \leq 6$ ;                      2)  $-1,25 < \frac{1}{4}(1-3x) \leq 1\frac{1}{4}$ ;  
3)  $1 < \frac{3x-1}{12} + x + 2 < 3$ ;                      4)  $5x - 20 \leq x^2 \leq 8x$ .

17. Tekislikda  $A(8; 7)$  va  $B(-5; 4)$  nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan  $C(x; 0)$  nuqtani toping.

18. Tekislikda  $A(12; 9)$  va  $B(-9; 7)$  nuqtalardan teng uzoqlikda joylashgan  $C(0; y)$  nuqtani toping.

19. Tenglamani yeching: 1)  $4^{13x+5} = 4^{23-x}$ ;                      2)  $7^{14x-3} = 7^{85+5x}$ ;

3)  $6^{x+7} = 36^{3x}$ ;                      4)  $8^{x+5} = 128^{2-5x}$ ;                      5)  $3^{x+2} - 3^x = 108$ ;

6)  $2^{x+2} + 2^x = 5$ ;                      7)  $11 \cdot 16^x + 9 \cdot 12^x - 20 \cdot 9^x = 0$ ; 8)  $9^{x^2-4x} = 243^{2(x^2-15)}$ ;

9)  $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ ; 10)  $6 \cdot 25^x + 7 \cdot 15^x - 13 \cdot 9^x = 0$ ; 11)  $3^{x+2} + 3^{x-1} + 3^x = 39$ .

20. Savdogar 100 000 000 so'mni bankka yillik 14% foyda bilan ma'lum muddatga qo'ydi. Muddat oxirida u 148 154 400 so'm oldi. Pul necha yilga qo'yilgan edi?

21. Tadbirkor 100 000 000 so'mni bankka yillik 16% foyda bilan ma'lum muddatga qo'ydi. Muddat oxirida u 181 063 936 so'm oldi. Pul necha yilga qo'yilgan edi?

22. Aholi soni yiliga 2% ga ortsa, necha yildan so'ng, aholi soni 2 barobar ortadi?

23. Aholi soni yiliga 1% kamaysa, necha yildan so'ng, aholi soni 10% kamayadi?

24. Tengsizlikni yeching: 1)  $\sqrt{3x-13} > 15$ ;                      2)  $\sqrt{2x+23} > -17$ ;

3)  $\sqrt{2x+25} \geq -27$ ;                      4\*)  $\sqrt{x^2+5x+14} > x-18$ ;

5\*)  $\sqrt{x^2-3x+22} > x+23$ ;                      6\*)  $\sqrt{x^2-5x+26} \leq x-23$ ;

7\*)  $\sqrt{x^2-13x+44} \leq x-36$ ;                      8\*)  $\sqrt{x^2-25x+34} \geq \sqrt{x^2-3x+23}$ .

25. 1) Tekislikda  $A(12; 4)$ ,  $B(-23; 5)$ ,  $C(x; y)$  nuqtalar berilgan.  $AC > BC$  shartni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziqni toping;

2) Tekislikda  $A(24; 34)$ ,  $B(-25; 37)$ ,  $C(x; y)$  nuqtalar berilgan.  $AC > BC$  shartni qanoatlantiruvchi to'g'ri chiziqni toping.

26. Tengsizlikni yeching: 1)  $4^x \geq 64$ ;                      2)  $3^x \leq 81$ ;                      3)  $(0,5)^x < \frac{1}{64}$ ;

4)  $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \frac{1}{27}$ ; 5)  $3^{6-x} > 3^{3x-2}$ ; 6)  $2^{9x-x^3} > 1$ ; 7)  $0,4^{x^2-x-20} > 1$ .

27. Hisoblang: 1)  $\log_2 4$ ; 2)  $\log_{0,5} 0,25$ ; 3)  $6^{\log_6 50}$ ; 4)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+2\log_7 3}$ ;

5)  $4^{\log_4 5 - \log_4 5}$ ; 6)  $16^{0,5\log_4 10}$ ; 7)  $\frac{4}{5}(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$ ;

8)  $27^{\frac{1}{3}\log_1 0,5 - \log_{27} 2}$ ; 9)  $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 + \log_5 3}$ ; 10\*)  $3\log_2 \log_4 16 + \log_{0,5} 2$ .

28. Taqqoslang: 1)  $\log_6 7$  yoki  $\log_7 6$ ; 2\*)  $\log_{0,4} 0,5$  yoki  $\log_{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2}$ .

29. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping:

1)  $y = \log_3(4-5x)$ ; 2)  $y = \log_{0,1}(x^2-3x-4)$ ; 3)  $y = \lg \frac{x^2+4x}{x^2-3x-4}$ .

30\*.  $b$  ni  $a$  va  $c$  orqali ifodalang:

1)  $b = \log_5 6$ ,  $a = \log_2 3$ ,  $c = \log_2 10$ ;

2)  $b = \log_{30} 8$ ,  $a = \log_{30} 3$ ,  $c = \log_{30} 5$ .

31. Tenglamani yeching: 1)  $\log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8$ ;

2)  $\log_{0,3} x = 2\log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$ ; 3)  $\log_2(x^2+4x+3) = 3$ ;

4)  $\log_5(x+1) + \log_5(2x+3) = 1$ ; 5)  $\lg^2 x = 1$ ; 6)  $x^{\log_2 x} = 8$ ;

7)  $\log_5^2 x + \log_{0,2} x = 2$ ; 8\*)  $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$ ;

9\*)  $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ .

32. Tengsizlikni yeching: 1)  $\log_3(12-2x-x^2) > 2$ ;

2)  $\log_4(x+1) + \log_4 x < \log_4 2$ ; 3)  $\log_5(x-3) < 2$ ;

4)  $\log_{0,5}(2x-4) > -1$ ; 5)  $\log_{0,5} x^2 > \log_{0,5} 3x$ ;

6)  $3^{\log_2 \frac{3x-1}{x}} < 1$ ; 7\*)  $(5x-2)\log_{0,(3)} x < 0$ .

33\*. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)} = 8, \\ \log_9(x^2 - y^2) - \log_9(x+y) = 0,5. \end{cases}$$

34\*. Tengsizliklar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$$

**35.** O‘shir tartibida yozing: 1)  $\sin 30^\circ$ ;  $\cos 30^\circ$ ;  $\cos 180^\circ$ ;  $\sin 90^\circ$ ;  
2)  $\sin 45^\circ$ ;  $\cos(-90^\circ)$ ;  $\sin 210^\circ$ ;  $\cos(-45^\circ)$ .

**36.** Soddalashtiring: 1)  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - 2$ ;

$$2^*) \frac{\sin 90^\circ - \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(45^\circ + 3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{ctg}(45^\circ - 3\alpha)} + \operatorname{tg} 4\alpha.$$

**37.** Berilgan shartga ko‘ra hisoblang:

$$1) \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}; \quad 2) \frac{3 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha}, \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

**38.** Berilganlarga ko‘ra qolgan trigonometrik funksiyalar qiymatlarini toping: 1)  $\sin \alpha = -0,6$ ,  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ ;

2)  $\operatorname{tg} \alpha = 2$ ,  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ .

**39.** Ko‘paytma ko‘rinishiga keltiring: 1)  $\sin 2\alpha + \sin \alpha$ ;

2)  $\cos x - \cos 3x$ ; 3)  $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$ ; 4)  $\cos 2x - \cos 4x - \cos 8x$ .

**40.** Tenglamani yeching: 1)  $\sin 3x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 2)  $\sin \frac{x}{2} = 1,5$ ;

$$3) \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad 4) \cos \frac{x}{2} = 1,5; \quad 5) \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 0;$$

$$6) \operatorname{tg}(3x + 60^\circ) = \sqrt{3}; \quad 7) \operatorname{tg} 4x = 3; \quad 8) \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 30^\circ\right) = 0;$$

$$9) \sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0; \quad 10) \cos 2x = 7 \sin x;$$

$$11) \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x; \quad 12) 7 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 15;$$

$$13^*) \sin^2 x - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1,5;$$

$$14^*) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}.$$

**41.** Tenglamalar sistemasini yeching:

$$1) \begin{cases} \cos(x+y) = 0, \\ \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad 2^*) \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases} \quad 3^*) \begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

**42.** Tengsizlikni yeching:

$$1) \sin x > \frac{1}{2}; \quad 2) \sin x < \frac{1}{2}; \quad 3) \sin x \geq -\frac{1}{2}; \quad 4) 2 \cos x > 1;$$

$$5) \sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x \geq \frac{1}{2}; \quad 6) \cos 2x \leq -1; \quad 7) 2 \cos 2x \geq 1;$$

$$8^*) \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg} x - \frac{3}{4} \leq 0;$$

$$9) \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3}.$$

43. 2, 5, 8... arifmetik progressiyaning 15 – hadini va dastlabki 15 ta hadi yig'indisini toping.

44. Agar  $a_3=25$ ,  $a_{10}=-3$  bo'lsa arifmetik progressiyaning 1-hadini va ayirmasini toping.

45. 2 xonali 3 ga karrali sonlarning yig'indisini toping.

46.  $-4, 16, -64...$  geometrik progressiyaning 7- hadini va dastlabki 7 ta hadi yig'indisini toping.

47. Agar  $b_3=8$ ,  $b_7=128$  bo'lsa geometrik progressiyaning 1-hadini va maxrajini toping.

48. Yig'indini toping:

1)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ ;    2)  $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \dots$ ;    3\*)  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$ .

49.  $y=x^2$  funksiya uchun  $\Delta x$  va  $\Delta y$  ni toping:

1)  $x=2,5$  va  $x_0=2$ ;

2)  $x=3,9$  va  $x_0=3,75$ ;

3)  $x=-1,2$  va  $x_0=-1$ ;

4)  $x=-2,7$  va  $x_0=-2,5$ .

50. Hosilani toping:

1)  $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$ ;

2)  $y = -x^3 + 9x^2 + x - 1$ ;

3)  $y = 0,25x^4 + 0,3x^3 + 0,5x^2 - 1$ ;

4)  $y = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$ ;

5)  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ;

6)  $y = (x^3 - 1)^6$ ;

7)  $y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$ ;

8)  $y = \frac{1 + \cos x}{\cos x - 1}$ ;

9)  $y = \cos x^3$ ;

10)  $y = \cos \frac{1}{x^2}$ ;

11)  $y = \operatorname{tg}(2x^2 + 1)$ ;

12)  $y = \lg(5x^2 + 1)$ ;

13\*)  $y = \ln^2(x^2 - 1)$ ;

14)  $y = 2 \cdot 5^x + 3e^x$ ;

15)  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ .

51. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalari, o'sish va kamayish oraliqlari, ekstremumlari hamda  $x = -2$  absissali nuqtadan o'tuvchi urinma tenglamasini toping: 1)  $y = -x^2 - 2x$ ; 2)  $y = x^3 + 3x^2$ ; 3)  $y = 0,5x^4$ .

52. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyalarini toping:

1)  $y = -7x + 4$ ;

2)  $y = 3x^2 + 4$ ;

3)  $y = 2x^2 + 3x - 8$ ;

4)  $y = \frac{1}{x^2} - 4 \sin x$ ;

5)  $y = 1 - \cos 3x$ ;

6)  $y = x^2 + \sqrt{x}$ ;

7)  $y = \frac{2}{\sin^2 3x}$ ;

8)  $y = \frac{3}{\cos^2 5x}$ ;

9)  $y = 7 \sin \frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}$ ;

10)  $y = \frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ ;

11)  $y = \frac{5}{\sqrt{2x+7}}$ ;

12)  $y = \frac{6}{(5x-7)^3}$ ;

$$13) y = \frac{2}{4x-1}; \quad 14) y = e^{2x-3}; \quad 15) y = 2^{0,5x+1}.$$

**53.** Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzini toping:

$$1) y = x^2, y = 0, x = 2; \quad 2) y = -\sqrt{x}, y = 0, x = 1; x = 9;$$

$$3) y = \frac{2}{x}, y = 0, x = 1, x = 3; \quad 4) y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi;$$

$$5) y = \frac{1}{x \ln 2}, y = 0, x = 1, x = 4.$$

**54.** Integralni hisoblang:

$$1) \int_{-2}^2 x^3 dx; \quad 2) \int_{-\pi}^2 \sin x dx; \quad 3) \int_{-3}^2 4x^3 dx;$$

$$4) \int_0^2 (3x^2 - 4x + 5) dx; \quad 5) \int_1^4 (x - 2\sqrt{x}) dx; \quad 6) \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx;$$

$$7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + 60^\circ) dx; \quad 8) \int_0^2 (3x^4 + 2x^2 - 5) dx;$$

$$9) \int_4^9 \left( \frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx; \quad 10) \int_{-\frac{\pi}{6}}^2 \frac{dx}{\cos^2(2x + 60^\circ)}; \quad 11) \int_{-4}^2 \frac{xdx}{\sqrt{2-0,5x}}.$$

### Yozma nazorat ishi namunasi

1. Hosilani toping:  $y = (x^2 - 5x + 8)^6$ .

2. Funksiyaning ekstremumlarini toping:  $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$ .

3.  $y = 2x^2 - 5x + 4$  funksiyaning  $x = 3$  nuqtasidan o'tuvchi urinma tenglamasini toping.

4. Berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyalarini toping:  
 $y = 8(11 - 3x)^5$ .

5. Berilgan chiziqlar bilan chegaralangan shakl yuzini toping:

$$y = x^2 - 7x + 10, y = 10.$$

6. Integralni hisoblang:  $\int_{\frac{\pi}{6}}^2 \operatorname{tg} 2x dx$ .

7. Yoqlari 1 dan 6 gacha raqamlar bilan nomerlangan ikkita kub tashlangani-da hosil bo'ladigan ikki xonali sonning raqamlari yig'indisi 4 ga bo'linishining ehtimolligini toping.

## JAVOBLAR II BOB

51.  $5\frac{1}{4}$ . 52.  $2\frac{1}{3}$ . 53. 1)  $\frac{2}{3}$ ; 2)  $1\frac{2}{3}$ ; 3) 9; 4)  $\frac{1}{4}(a^2-1)$ .
54. 1)  $9\frac{2}{3}$ ; 2)  $7\sqrt{3}-1$ ; 3)  $4\frac{3}{4}$ ; 4)  $2\sqrt{\ln 3}$ . 55.  $V = \frac{\pi^2}{2}$  (kub birlik).
56.  $7,5\pi$  (kub birlik). 57. 340 m. 58. 18,75 m. 59. 120 m.
60. 32 m. 61.  $V=2\pi$  (kub birlik). 62. 1) 18; 2)  $\frac{8}{3}$ ; 3)  $\frac{5}{12}$ ; 4)  $\frac{8}{9}$ .
63. 1)  $\frac{1}{3}$ ; 2) 1; 3)  $\frac{3\pi-4}{4}$ ; 4)  $\frac{6e-5}{3}$ . 64.  $\frac{64}{3}$ . 65. 18. 66. 0,009 J.
67.  $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1)$ . 68.  $\frac{\pi}{3}$ . 69.  $17\frac{1}{15}\pi$ . 70.  $\approx 0,8099$  ((1)- formula).
71.  $\approx 0,7599$  ((1a)- formula). 72. 0,7850 (trapetsiyalar formulasi).
74. 1)  $y = \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x + C$ ; 2)  $y = \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$ . 75. 2)  $y = \frac{C}{x}$ . 77.  $C=2$ .
78. 60 minut. 80. 1)  $\frac{m_0}{\sqrt{10^2}}$ ; 2)  $\frac{m_0}{\sqrt{2}}$ ; 3)  $\frac{m_0}{4}$ .
83.  $y' = -0,2 \cdot (y-3)$ ;  $y = 3 + C \cdot e^{-0,2t}$ . 84. 1), 3) - bo'ladi.
85. 1), 2) - bo'ladi. 86. 1)  $f_3(x)$  uchun; 2)  $f_2(x)$  uchun; 3)  $f_2(x)$  uchun.
88. 2)  $\ln(e^x+1)+C$ ; 3)  $\operatorname{arctg}(x+2)+C$ ; 5)  $\frac{1}{\cos x} + C$ .
89. 2)  $\frac{1}{3}x^3 - x + C$ ; 4)  $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3x| + C$ ; 6)  $\ln|x(x^2+2)| + C$ .
93. 2)  $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{2}{3}$ ; 4)  $F(x) = -\cos x - \sin x + 2$ .
96. 1)  $F(x) = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + C$ ; 2)  $F(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$ ;
- 3)  $F(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C$ ; 4)  $F(x) = \ln|\sin x| - \sin x + C$ ;
- 5)  $F(x) = -\ln|\cos x - \sin x| + C$ ; 6)  $F(x) = \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$ .
98. 3)  $\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$ . 99. 1)  $\sqrt{2}-1$ ; 2)  $1 - \frac{1}{e^2}$ .
100. 2) 1; 3)  $\ln\sqrt{10}$ . 101. 1)  $a=2$ ; 2)  $a=4$ . 102. 1) 24; 2) 32; 3) 0,5.



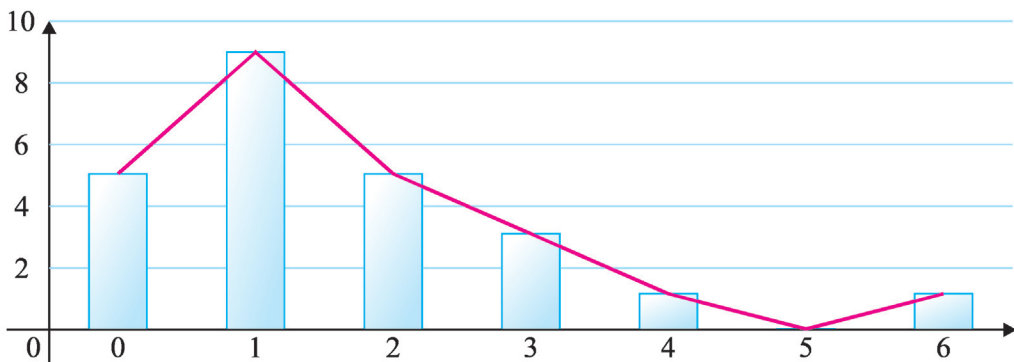
103. 1) 1120,4; 3) 2; 43)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 109.  $6\frac{2}{3}$ . 110. 1) 8; 2)  $10\frac{2}{3}$ . 111.  
 1)  $2\frac{2}{3}$ ; 2) 60. 112. 1)  $21\frac{1}{3}$ ; 2)  $2e^3+1$ . 113. 1)  $\frac{1}{6}$ ; 2)  $1\frac{1}{6}$ . 115. 1)  $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ ;  
 2) 36; 3) 36; 4)  $e^2-1$ .

116. 1)  $\frac{v_0^2}{2g}$  metr. 118. 64,5 metr. 120.  $A = \frac{\pi R^2 H^2 g}{2} J$ .

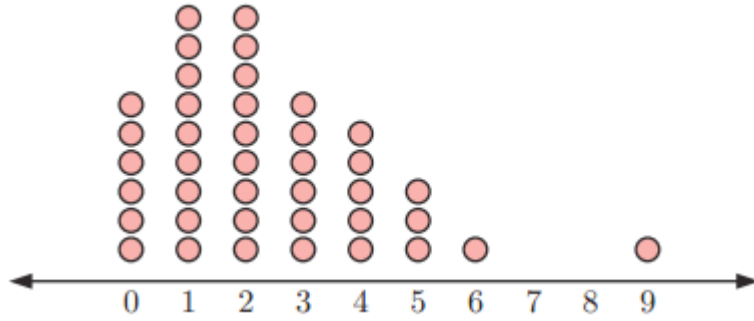
### III BOB

1. 6. 2. 18. 3. 3. 4. 24. 5.  $10+4+6=20$ . 6.  $24=6\cdot 4$ . 7.  $7\cdot 5\cdot 4=140$ .  
 8. 24. 9.  $6\cdot 5\cdot 4=120$ . 10.  $20=5\cdot 4$ . 11.  $18\cdot 17/2=153$ . 12.  $C_n^3$ .  
 13.  $C_7^4$ . 14. a)  $C_{10}^1 C_{11}^2 + C_{10}^2 C_{11}^1$ . b)  $C_{10}^1 C_{11}^3 + C_{10}^2 C_{11}^2 + C_{10}^3 C_{11}^1$ .  
 15.  $C_m^2 C_n^2$ . 16.  $\frac{n(n-1)}{2}$ . 19. -165; 21. 824;  
 23.

Gollar soni	Sanash	Chastota	Nisbiy chastota
0		5	0.208
1		9	0.375
2		5	0,208
3		3	0,125
4		1	0,042
5		0	0
6		1	0,042
	Jami:	24	



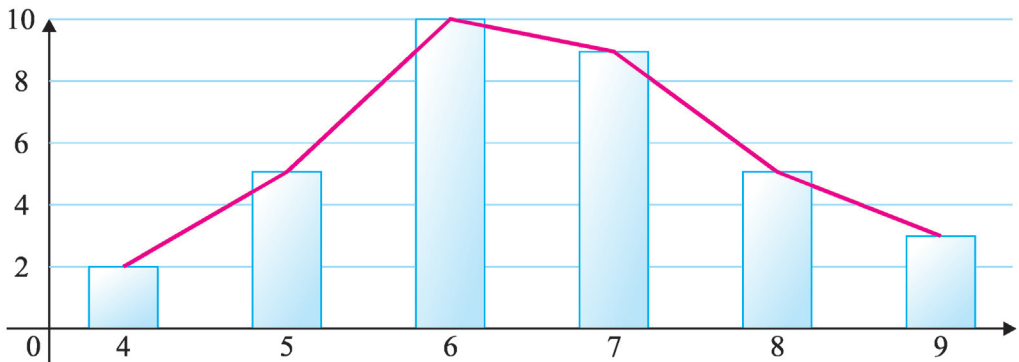
24. a)



b) 1 va 2; c) musbat bog‘langan; d) 12,5%.

25.

4		2	0,059
5		5	0,147
6		10	0,294
7		9	0,265
8		5	0,147
9		3	0,088



26. a) 45; b) 1; c) 8; d) 20%.

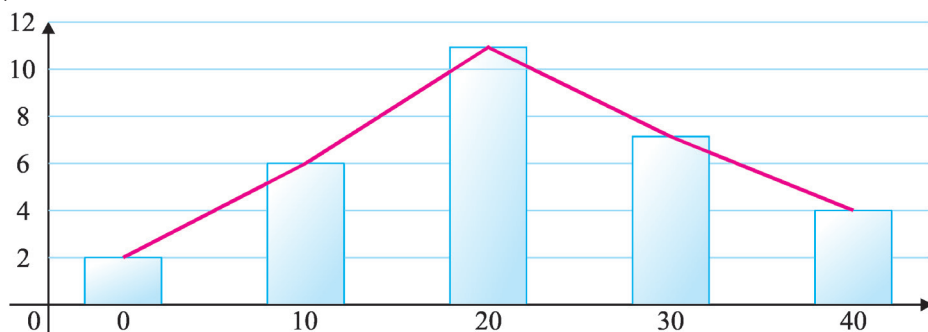
27. a)

0 - 9		2	0,067
10 - 19		6	0,200
20 - 29		11	0,367
30 - 39		7	0,233
40 - 49		4	0,133

b) 2;

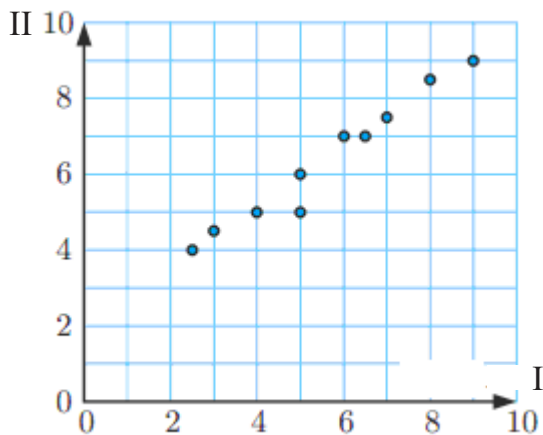
c) 36,7%;

e)

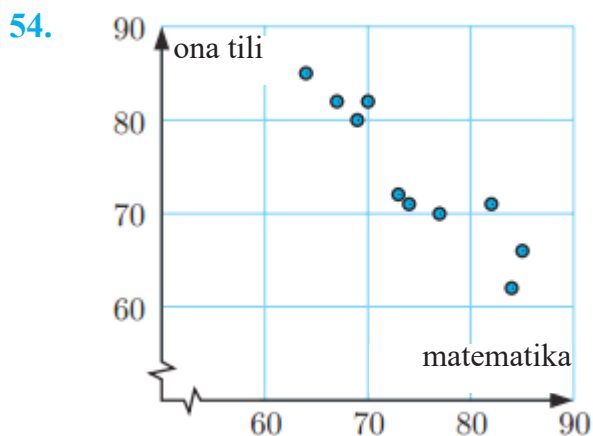


29. a) I) 5,61; II) 6; III) 6. b) I) 16,3; II) 17; III) 18. c) I) 24,8; II) 24,9; III) 23,5. 30. a) A:6,46; B:6,85. b) A:7; B:7. d) 7 – ikkita tanlanma o'rtachasi. 31. Ikkinchi sportchi – 164. 32. a) 1; b) 1,8; c) 2. 33. a) 44; b) 44; c) 40,2; d) o'sadi, 40,3. 38. 31,7. 39. a) 70; b) taxminan 411000 l; c) taxminan 5870 l. 40. a) 11,5; b) I) 11,3; II) 11,4. 41. a)125; b) 119; c) 12%; d) 137. 44. O'rta qiymat – 1,72; Standart chetlanish – 1,67. 45. O'rta qiymat – 14,5; Standart chetlanish – 1,75. 46. O'rta qiymat – 45; Standart chetlanish – 3,28. 52. a) sust musbat bog'langan, chiziqli; b) kuchli manfiy bog'langan, chiziqli; c) bog'lanish mavjud emas; d) kuchli manfiy bog'langan, chiziqli emas; f) sust musbat bog'langan, chiziqli emas.

53.

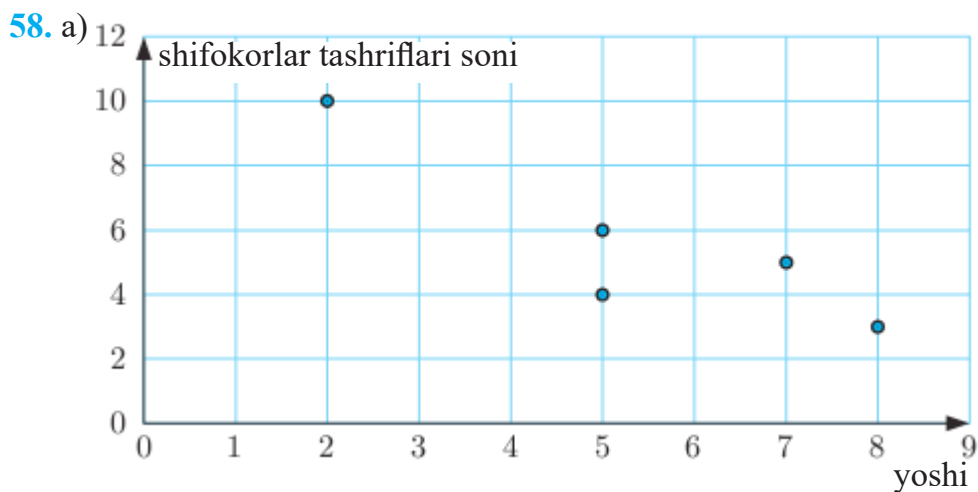


kuchli musbat bog'langan, I hakam qo'ygan ballari o'sganda II hakam qo'ygan ballar ham o'sadi.

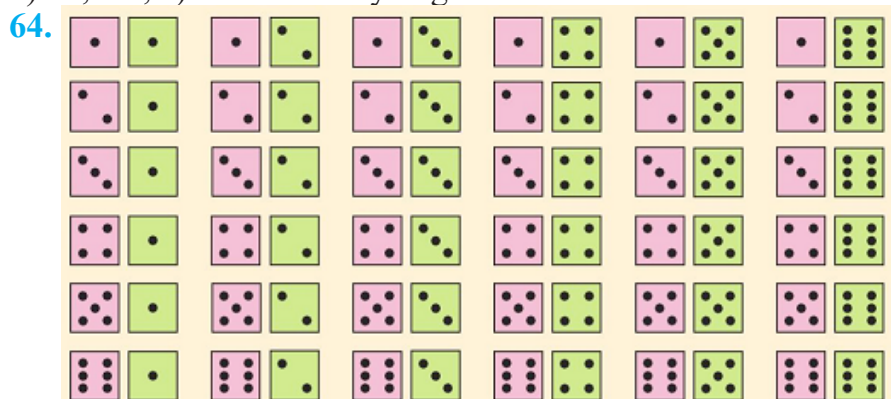


kuchli manfiy bog‘lanish.

55. a) o‘rtacha musbat bog‘lanish. 56. a) *b*; b) *a*; c) *d*; d) *c*; e) *e*; 57. a)  $r=1$ ; b)  $r=-1$ ; c)  $r=0$ .



b)  $-0,892$ ; c) kuchli manfiy bog‘lanish.



65. 8 ta imkoniyat:  $GGG$ ;  $GGR$ ;  $GRG$ ;  $RGG$ ;  $GRR$ ;  $RGR$ ;  $RRG$ ;  $RRR$ .

#### IV BOB

1. 4)  $\emptyset$ ; 5)  $\emptyset$ ; 7) 2; 3; -2; 11) -2. 2. 5. 4. 1) 1; 2; -1;
4. 6) 0; 1. 5. 1) (4; 1); 3) (2; 1); (1; -2). 6. 2) (1; 1); (1; -1);  
 $\left(\frac{5}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;  $\left(\frac{5}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; 3) (4; 2); (-4; -2); (4; -2); (-4; 2); (2; 4); (-2;  
-4); (2; -4); (-2; 4). 7. 1) (5; 1); (-5; -1). 8. 1) (2; 1); (-2; 5); 2)  
(5; 1); (1; 5). 9. 5. 10. 2 ta. 11. 4 ta. 12. 2. 13. 3 ta. 14. 3)  $(0; \frac{1}{6})$  ;
- 5)  $(-\infty; 1) \cup \{3\}$ ; 6)  $(-\infty; -3) \cup (0; 3]$  . 19. 1)  $\frac{9}{7}$ ; 4)  $-\frac{1}{38}$ ; 6) 0; 7) 0; 9) 2.
24. 1)  $\left(\frac{238}{3}; +\infty\right)$ ; 2)  $\emptyset$ ; 3)  $(-12,5; +\infty)$ . 26. 1)  $[3; +\infty)$ ; 2)  $(-\infty; 4]$ ;
- 3)  $(6; +\infty)$ ; 5)  $(-\infty; 2)$ . 27. 1) 2; 3) 50; 6) 10; 7) 4. 28. 1)  $\log_6 7 > \log_7 6$ .
29. 1)  $(-\infty; 0,8)$ ; 2)  $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$ . 30. 1)  $\frac{1+a}{c-1}$ ; 2)  $\frac{3(1-a)}{1+c}$  .
31. 1) 12; 2) 3; 3) -5; 1; 5) 10; 0,1; 8) 100; 100 000 000. 32. 1) (-3; 1);  
2) (0; 1); 3) (3; 28); 5) (0; 3). 33. (4; 1). 34. (1; 2). 35. 1)  $\cos 180^\circ$ ;  
 $\sin 30^\circ$ ;  $\cos 30^\circ$ ;  $\sin 90^\circ$ . 36. 1) 0. 37. 1)  $\frac{12}{7}$ . 39. 2)  $2\sin 2x \sin x$ .
40. 1)  $(-1)^{n+1} 15^\circ + 60^\circ n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 5)  $\emptyset$ ; 6)  $60^\circ + 360^\circ n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; 9)  $240^\circ + 360^\circ n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ ; 10)  $-90^\circ + 360^\circ n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 42. 5)  $(7^\circ 30' + 90^\circ n; 37^\circ 30' + 90^\circ n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
48. 1) 2. 50. 1)  $12x^2 - 4x + 1$ ; 3)  $x^3 + x^2 + x$ ; 7)  $18x^2(x^3 - 1)^5$ . 51. 2) o'sadi:  
 $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ ; kamayadi: (-2; 0); ekstremumlari: -2 va 0; urinma  
tenglamasi:  $y = -6x - 8$ . 52. 2)  $x^3 + 4x + c$ ; 5)  $x - \frac{\sin 3x}{9} + C$ . 54. 3) -81; 4) 10;  
7)  $\frac{1}{2}$ .

## Foydalanilgan va tavsiya etiladigan adabiyotlar

1. *Ш.А. Алимов и др.* Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Naese and Harris publications. 2010.
3. *А.Н. Колмогоров и др.* Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
4. *Э. Сайдаматов и др.* Алгебра и основы математического анализа. часть 2, учебное пособие, Ташкент, “Ilm ziyo”, 2016.
5. *А.У. Abduhamidov va boshqalar.* Algebra va matematik analiz asoslari, 1- qism, Toshkent, “O‘qituvchi”, 2012.
6. *Н.П. Филочева.* Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. “Рязань”. 2009.
7. *М.И. Исроилов.* Ҳисоблаш методлари. Тошкент, “Ўқитувчи”, 1988.
8. *Г.К. Муравин и др.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, “Дрофа”, 2006.
9. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
10. *Г.П. Бевз и др.,* Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса. Киев, 2011.
11. “Математика в школе” jurnali.
12. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001- yildan boshlab chiqa boshlagan).
13. *М.А. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, “Turon-Iqbol”, 2016.
14. Matematikadan qo‘llanma, I va II qismlar. O‘qituvchilar uchun qo‘llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1979.
15. *М.А. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev.* O‘quvchilarni matematik olimpiadalariga tayyorlash. Toshkent, “O‘qituvchi”, 1993.
16. *М.А. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov.* 10-sinf uchun “Algebra va analiz asoslari” dan testlar, G‘.G‘ulom NMIU, Toshkent, 2018.
17. *В.М. Говоров и др.,* Сборник конкурсных задач по математике, Наука, М., 1984.
18. *Т.А. Azlarov, X. Mansurov.* Matematik analiz asoslari. 3-nashr, “Universitet”, Toshkent, 2005.

19. *Б.П. Демидович*. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Наука, М., 1990.
20. Материалы ЕГЭ по математике, М., 2016.
21. *Е.П. Кузнецова, Г.А. Муравьева*, Сборник задач по алгебре, 11-класс, "Мнемозина", 2016.
22. *А.Г. Мордкович*, Сборник задач по алгебре, 10-11 классы, "Мнемозина", 2016.
23. *М.И. Шкиль, З.И. Слепкань*, Алгебра, учебник для 11 класса, Киев, 2016.
24. *Е.П. Нелина, О.Е. Долгова*, Алгебра, учебник для 11 класса, Киев, 2015.
25. *Ю. Н. Тюрин и др.* Теория вероятностей и статистика. М.: МЦНМО ОАО "Московские учебники", 2008г.
26. *М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова* Элементы статистики и теории вероятности Учеб. Пособие для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений, М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова. – М. Просвещение, 2004.
27. *Е.А. Бунимович, В.А. Булычев* Основы статистики и вероятности. 5–11 кл.: учебное пособие – М.: Дрофа, 2008.
28. *Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк*. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей: учеб. Пособие для учащихся 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. 3-е изд. – М.: Просвещение, 2005.
29. *В.С. Крамор*. Повторяем и систематизируем школьный курс "Алгебры и начал анализа". 4-е издание. Москва, "ОНИКС", 2008.
30. *Г.В. Дорофеев и др.* Математика 5–9. Учебное пособие. Просвещение. – 2009.
31. <http://www.edu.uz> – Xalq ta'limi vazirligining axborot ta'lim portali.
32. <http://www.eduportal.uz> – Multimedia markazi axborot ta'lim portali.
33. <http://www.problems.ru> – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
34. <http://matholymp.zn.uz> – O'zbekistonda va dunyoda matematik olimpiadalar.
35. <http://www.ams.org/mathweb/> – Internetda matematika (ingliz tilida).

## MUNDARIJA

### *II bob. INTEGRAL VA UNING TATBIQLARI*

47-50. Aniq integralning tatbiqlari .....	3
51. Taqribiy integrallash.....	10
52-56. Masalalar yechish .....	13

### *III bob. MA'LUMOTLAR TAHLILI. EHTIMOLLIK*

57-58. Kombinatorika masalalari .....	27
59-60. Nyuton binomi.....	33
61-64. Statistik ma'lumotlar. Statistik ma'lumotlarning turli ko'rinishlari.....	37
65-67. O'rta qiymat, moda va mediana. Chetlashish, standart chetlashish .....	45
68-70. Ikkita tur ma'lumotlar o'rtasida bog'liqlikni tadqiq qilish.....	57
71-73. Tasodifiy hodisalar va ularning ehtimolligi haqida tushuncha .....	68
74-77. Qarama-qarshi hodisa. Hodisalar ustida amallar va ularni Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlash.....	78
78-80. Ehtimolliklarni qo'shish va ko'paytirish. Hodisalarning ehtimolligini hisoblash usullari.....	83
81-85. Binomial va normal taqsimot haqida tushuncha.....	91

### *IV bob. ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARINI TAKRORLASH*

86-93. Algebra va analiz asoslarini takrorlashga oid mashqlar .....	97
JAVOBLAR .....	104
Foydalanilgan va tavsiya etiladigan adabiyotlar .....	110