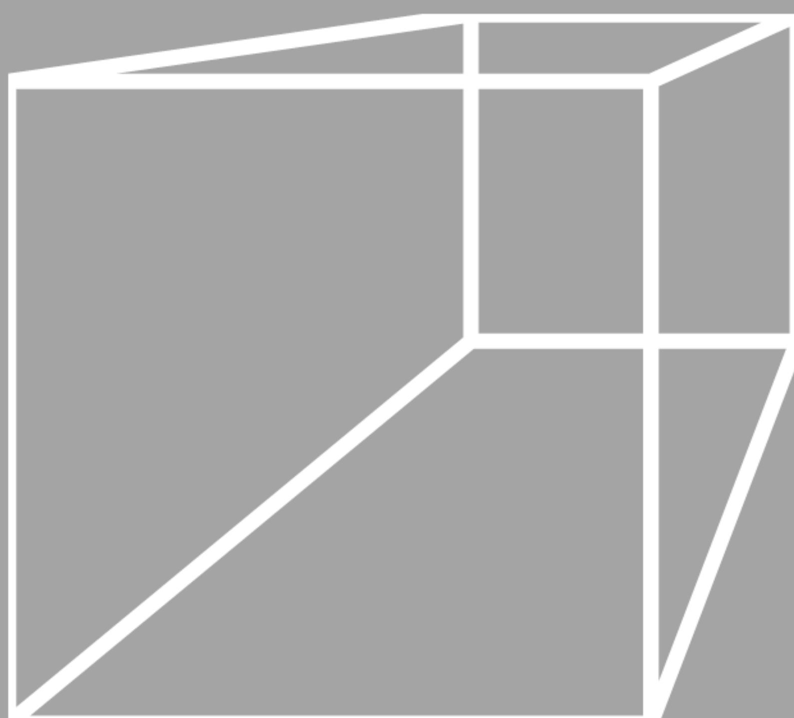
MATEMATIKA

GEOMETRIYA



10- sinf

10- sinfda geometriyaning stereometriya qismini – fazoviy geometrik shakllarning xossalarini tizimli oʻrganishga kirishiladi. Darslikdan asosiy fazoviy shakllar, koʻpyoqlar va aylanma jismlar va ularning asosiy xossalari, fazoda parallel va perpendikular toʻgʻri chiziqlar va tekisliklar hamda ularning xossalariga doir masalalar oʻrin olgan.

“Geometriya-10” darsligida nazariy materiallar sodda va ravon tilda ifoda etishga harakat qilingan. Barcha mavzu va tushunchalar turli hayotiy misollar orqali ochib berilgan. Har bir mavzudan soʻng keltirilgan savollar, isbotlashga, hisoblashga va yasashga doir koʻplab masala va misollar oʻquvchini ijodiy fikrlashga undaydi, oʻzlashtirilgan bilimlarni chuqurlashtirishga va mustahkamlab borishga yordam beradi.

“Geometriya-10” darsligi umumta’lim maktablarining 10- sinf oʻquvchilariga moʻljallangan, undan geometriyani mustaqil oʻrganmoqchi va takrorlamoqchi boʻlgan kitobxonlar ham foydalanishlari mumkin.

MUNDARIJA

Darslikning "Geometriya" boʻlimida ishlatilgan belgilar va ularning talqini:

– teorema tavsifi

– teorema isboti oxiri

– aksioma tavsifi

– amaliy tatbiq

– mavzu boʻyicha savollar

– tarixiy lavhalar

– faollashtiruvchi mashgʻulot

– geometrik boshqotirmalar

I BO‘LIM

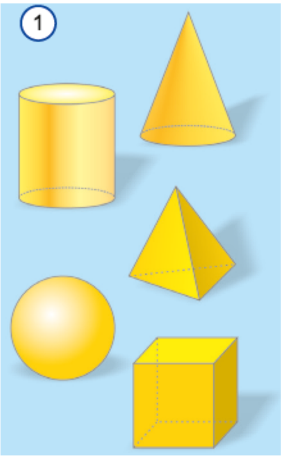
PLANIMETRIYANI TIZIMLI TAKRORLASH

1 PLANIMETRIYANING MANTIQIY TUZILISHI

Geometriya real hayotdagi predmetlarning miqdoriy ko‘rsatkichlari va fazoviy shakllarini o‘rganadigan fandir. Narsalarning boshqa xossalarini boshqa fanlar o‘rganadi. Agar biror narsa o‘rganilayotganda, uning faqat fazoviy shakli va o‘lchamlari hisobga olinsa, unda *geometrik shakl* deb ataluvchi abstrakt obyektga ega bo‘lamiz.

Geometriya – yunoncha so‘z bo‘lib, "yer o‘lchash" degan ma’noni bildiradi. Maktabda o‘rganiladigan geometriya qadimgi yunon olimi Evklid nomi bilan *Evklid geometriyasi* deb ataladi. Geometriya ikki qismdan: planimetriya va stereometriyadan iborat. *Planimetriya* – tekislikdagi, *stereometriya* esa fazodagi geometrik shakllarning xossalarini o‘rganadi (1- rasm).

Geometrik shakllarni bir-biridan farqlash uchun ularning xususiyatlari tavsiflanadi, ya’ni ularga *ta’rif* beriladi. Lekin hamma shakllarga ham ta’rif berib bo‘lmaydi. Ularning dastlaki bir nechtasini ta’rifsiz qabul qilishga majburmiz. Ularni ta’riflanmaydigan, *boshlang‘ich (asosiy) geometrik shakllar* deb olamiz.



Geometriyaning mantiqan qurilishi quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1. Avval asosiy (boshlang‘ich) geometrik shakllar ta’rifsiz qabul qilinadi;
2. Asosiy geometrik shakllarning asosiy xossalari isbotsiz qabul qilinadi;
3. Boshqa geometrik shakllar asosiy shakllar va

ularning xossalariga tayanib ta'riflanadi hamda ularning xossalari ungacha ma'lum xossalarga tayanib isbotlanadi.

Fanning bunday tuzilishi *aksiomatik tuzulish* deb nomlanadi. *Aksioma* deb to'g'riligi isbotsiz qabul qilinadigan xossaga aytiladi.

Shu choqqacha biz o'rgangan planimetriyaning asosiy shakllari bu nuqta va to'g'ri chiziq edi. Ularni ta'rifsiz qabul qildik. Kesma, nur, uchburchak va boshqa geometrik shakllarga esa ta'rif berdik. Shuningdek, quyidagi xossalarni (tasdiqlarni) isbotsiz aksioma sifatida qabul qildik:

I. Tegishlilik aksiomalari guruhi

1.1. *Tekislikda qanday to'g'ri chiziq olinmasin, unda bu to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgan nuqtalar ham, tegishli bo'lmagan nuqtalar ham mavjud.*

1.2. *Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi.*

II. Tartib aksiomalari guruhi

2.1. *Bir to'g'ri chiziqda olingan istalgan uchta nuqtaning faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.*

2.2. *Har bir to'g'ri chiziq tekislikni ikki bo'lakka: ikkita yarimtekislikka ajratadi.*

III. O'lchash aksiomalari guruhi

3.1. *Har qanday kesma noldan farqli tayin uzunlikka ega bo'lib, u musbat son bilan ifodalanadi. Kesma uzunligi uning ixtiyoriy nuqtasi ajratgan bo'laklari uzunliklari yig'indisiga teng.*

3.2. *Har qanday burchak tayin gradus o'lchoviga ega bo'lib, uning qiymati musbat son bilan ifodalanadi. Yoyiq burchakning gradus o'lchovi* $180°$ *ga teng. Burchakning gradus o'lchovi burchak tomonlari orasidan o'tuvchi ixtiyoriy nur ajratgan burchaklar gradus o'lchovlarining yig'indisiga teng.*

IV. Teng shaklni qo'yish aksiomalari guruhi

4.1. *Ixtiyoriy nurga uning uchidan boshlab, berilgan kesmaga teng yagona kesmani qo'yish mumkin.*

4.2. *Ixtiyoriy nurdan tayin yarimtekislikka berilgan, yoyiq bo'lmagan burchakka teng yagona burchakni qo'yish mumkin.*

4.3. *Har qanday uchburchak uchun unga teng uchburchak mavjud va uni nurdan tayin yarimtekislikka yagona tarzda qo'yish mumkin.*

V. Parallellik aksiomasi

4.1. *Tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.*

Biror tasdiqning to'g'riligini mantiqiy mulohazalar yordamida keltirib chiqarish *isbot* deb ataladi. To'g'riligi isbotlash yo'li bilan asoslanadigan tasdiq esa *teorema* deb ataladi. Teorema, odatda, shart va xulosa qismlardan iborat bo‘ladi. Teoremaning birinchi – shart qismida nimalar berilgani bayon qilinadi. Ikkinchi – xulosa qismida esa nimani isbotlash lozimligi ifodalanadi.

Teoremani isbotlash – uning shartidan foydalanib, bungacha isbotlangan va qabul qilingan xossalarga tayanib, mulohaza yuritib, xulosa qismida ifodalangan jumlaning to‘g‘riligini keltirib chiqarishdir. Teoremaning shart va xulosa qismlarini aniqlashtirib olish – teoremani oydinlashtiradi, uni tushunish va isbotlash jarayonini yengillashtiradi.

Evklid
(*eramizdan avvalgi* 356–300- *yillar*)

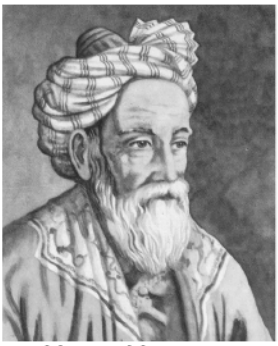
Yunon olimi Platon geometriyada ajoyib bir qonuniyatni payqagan: avval o‘rganilgan, to‘g‘riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarsa bo‘lar ekan. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib, qolgan xossalar teoremalar ko‘rinishida ifodalanadi va aksiomalar hamda bu paytgacha to‘g‘riligi isbotlangan xossalarga asoslanib, mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlanadi.

Mulohaza yuritish jarayonida isbotlanmagan xossalardan (garchi ularning to‘g‘riligi ochiq-oydin ko‘rinib turgan bo‘lsa ham) foydalanish taqiqlanadi.

Shunday qilib, geometriyani bir bino deb qaraydigan bo‘lsak, boshlang‘ich tushunchalar va aksiomalar uning poydevorini tashkil qiladi. Bu poydevor ustiga terulgan g‘ishtlar – ta’riflangan yangi tushunchalar va teoremalar ko‘rinishida isbotlangan xossalardan iborat bo‘ladi.

Geometriyani mustaqil fan sifatida asoslashda qadimgi yunon olimlari katta hissa qo‘shishgan. Masalan, Gippokrat Xiosskiy geometriya asoslari haqidagi dastlabki tasavvurlarini bayon etgan. Bu soha bo‘yicha asosiy ishlarni buyuk yunon olimi Evklid (eramizgacha 356 – 300-yillar) amalga oshirgan. Uning asosiy asari "Negizlar" planimetriya, stereometriya va sonlar nazariyasining ba’zi masalalarini, shuningdek, algebra, nisbatlar umumiy nazariyasi, yuz va hajmlarni hisoblash usuli hamda limitlar nazariyasi elementlarni o‘z ichiga oladi. "Negizlar" da Evklid qadimgi yunon matematikasining barcha yutuqlarini jamladi va uning rivoji uchun asos yaratdi.

"Negizlar" 13 kitobdan iborat bo‘lib, bu asar eramizdan avvalgi V – IV asrlar yunon matematiklari asarlari qayta ishlanmasidan iborat. Asarda 23 ta ta’rif, 5 ta postulat va 9 ta aksioma berilgan. Asarda to‘g‘ri to‘rtburchakka, kvadratga, aylanaga to‘g‘ri ta’riflar berilgan. Nuqta va chiziqqa quyidagi ta’riflar berilgan:



Umar Hayyom (1048-1131)

"Nuqta deb shunday narsaga aytiladiki, u qismlarga ega emas", "Chiziq deb eni yo'q uzunlikka aytiladi".

"Negizlar"da 9 ta aksioma – isbotsiz qabul qilinadigan mulohazalar bayon etilgan. Geometrik yasashlarni amalga oshirish mumkinligini bayon etuvchi matematik mulohazalar (postulat)dan quyidagi beshtasi bayon qilingan:

I. Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

II. To'gri chiziq kesmasini cheksiz davom ettirish mumkin.

III. Har qanday markazdan ixtiyoriy masofada aylana yasash mumkin.

IV. Hamma to'g 'ri burchaklar o'zaro teng.

V. Bir tekislikda yotgan ikki to'g'ri chiziqni uchinchi to'g'ri chiziq kesib, bir tomonli ichki burchaklar hosil qilsa va burchaklar yig'indisi ikki to'g'ri burchakdan kichik bo'lsa, mazkur to'g'ri chiziqlar davom ettirilganda ular yig'indisi ikki to'g 'ri burchakdan kichik burchaklar tomonida kesishadi.

Mazkur asar ulkan va uzoq shuhratga ega bo'ldi. Ayniqsa, V postulat katta ilmiy munozaralarga sabab bo'ldi. Agar V postulatdagi ichki almashinuvchi burchaklarni α va β desak (1-rasm), to'g'ri chiziqlar a va b bo'lsa, u holda postulat mazmuniga ko'ra $\alpha+\beta<180°$ bo'lsa, a va b to'g'ri chiziqlar kesishadi.

Postulatni isbotlash yo'lida unga tengkuchli bir qator mulohazalar paydo bo'ldi. Masalan, ingliz matematigi Yan Pleyfer (1748–1819) ning *parallellik aksiomasi* shular jumlasidandir: tekislikda to'g'ri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin.

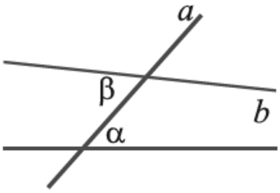
Matematik shoir astronom va faylasuf Umar G'iyosiddin Abul Faxt ibn Ibrohim Hayyom ham bu masala bilan shug'ullangan. Hayyom "Evklid kitobining kirish qismidagi qiyinchiliklarga sharhlar" nomli asarida V haqidagi postulatga to'xtalgan. U Evklidning postulati teorema ekanligini isbotlash uchun pastki asosidagi ikki burchagi to'g'ri bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni qaragan (2- rasm) va agar uning pastki ikki burchagi to'g'ri bo'lsa, yuqoridagi ikki burchagi ham to'g'ri bo'lishi lozim degan xulosaga kelgan. Umar Hayyom "Bitta to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan ikki to'g'ri chiziq to'g'ri chiziqning ikkala tomonida ham kesisha olmaydi-ku", – deydi. Umar Hayyomning bu ishlaridan bexabar italiyalik matematik J. Sakkeri (1667–1733) ham V postulat bilan shug'ullanib, to'g'ri to'rtburchakka murojaat qilgan. Geometriya asoslariga bu to'g'ri to'rtburchak "Hayyom – Sakkeri to'rtburchagi" nomi bilan kirgan.

Bu muammoni buyuk rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy (1792–1856) hal qildi va noevklid geometriyasini yaratdi. Lobachevskiy birinchi marta Evklidning beshinchi postulati geometriyaning boshqa aksiomalariga bog‘liq emasligini isbotladi. Bu geometriya Evklid geometriyasidan tamoman farq qilar edi. Lekin u mantiqiy qarama-qarshilikka (ziddiyatlikka) duch kelishi lozim edi, chunki – ikkita geometriyaning bir vaqtda mavjud bo‘lishligi mumkin emas edi. Shunga qaramay, Lobachevskiy yangi natijalar keltirib chiqara berdi, ular mantiqiy qarama - qarshiliklarga uchramadi. Yangi geometriya va Evklid geometriyasida birinchi to‘rtta guruh aksiomalar ustma-ust tushadi. Bu aksiomalar guruhlari va ularning natijalari absolut geometriya deb atala boshladi.

N.I.Lobachevskiy (1792–1856)

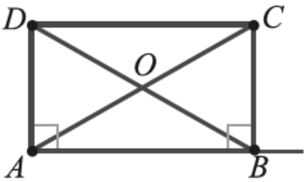
Lekin, noevklid (Lobachevskiy) geometriyasi Evklid geometriyasidan jiddiy farq qiladi. Masalan, Lobachevskiy geometriyasida uchburchak ichki burchaklarining yig‘indisida π dan kichik, unda o‘xshash yoki teng bo‘lmagam uchburchaklar mavjud emas, berilgan to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar to‘plami to‘g‘ri chiziq emas, balki egri chiziq hisoblanadi va h. k.

1



Noevklid geometriyasini yaratishga venger matematigi Yanosh Bolyai (1802– 1860) va nemis matematigi Karl Fridrix Gauss (1777–1855) lar katta hissa qo‘shganlar. Shuningdek, italyan matematigi Eujenio Beltrami (1835–1900) va nemis matematigi Bernxard Riman (1826–1866) yangi geometriya tavsifi bo‘yicha katta ishlar qildilar.

2



Evklid boshlab bergan aksiomatika ma’lum ma’noda nemis matematigi David Gilbert (1862–1943) va rus matematigi Veniamin Fyodorovich Kagan (1859–1953) ishlarida oxiriga yetkazildi.

? *Mavzuga doir savollar*

1. *Geometriya aksiomalari sistemasini bayon etgan Evklid haqida nimalarni bilasiz?*
2. *Evklidning "Negizlar" asari haqida gapirib bering.*
3. *Ta’rif nima? Tekislikda qaysi shakllar asosiy (boshlang‘ich) shakllar sifatida ta’rifsiz qabul qilingan?*

4. *Teorema va aksioma bir-biridan nima bilan farq qiladi?*
5. *Planimetriya aksiomalarini sanang va sharhlang.*
6. *Geometriya fani qanday tuzilgan?*
7. *Evklidning 5-postulati nima haqda va uni nima uchun isbotlashga uringanlar?*
8. *Bu postulatni isbotlashga uringan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.*
9. *Lobachevskiy yangi geometriyaning yaratilishida qanday hissa qo'shgan?*
10. *Noevklid geometriyasini yaratgan olimlar va ularning ishlari haqida gapirib bering.*

2 GEOMETRIK MASALALAR VA ULARNI YECHISH METODLARI

Yuqorida ta'kidlaganimizdek, geometriyaning eng ajoyib xususiyati bu avval o'rganilgan, to'g'riligi isbotlangan xossalardan mantiqiy fikrlash, mushohada yuritish orqali yangi xossalarni keltirib chiqarish mumkin. Bunday ajoyib imkoniyatdan foydalanib, qolgan xossalar teoremalar yoki masalalar ko'rinishida ifodalangan va aksiomalar hamda bu paytgacha to'g'riligi isbotlangan xossalarga asoslanib, mantiqiy mulohazalar yuritish orqali isbotlangan. Shu zayilda matematik yoki geometrik masalalar vujudga kelgan.

Matematik masalada nimalardir (shartlar) berilgan bo'ladi. Ulardan foydalanib, nimanidir topish (hisoblash) yoki isbotlash, yoki yasash talab qilinadi. Qo'yilgan talabni bajarish masalani yechishni bildiradi.

Geometrik masalalar qo'yilgan talabga ko'ra hisoblashga, isbotlashga, tadqiq qilishga va yasashga doir masalalarga bo'linadi.

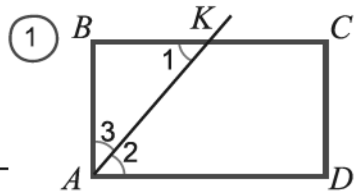
Matematik masalani yechish uchun quruq nazariyani bilish yetarli emas. Masala yechish ko'nikmasiga va tajribasiga ham ega bo'lish talab qilinadi. Bunday ko'nikmaga o'z navbatida sodda masalalardan boshlab, borgan sari murakkabroq masalalarni yechish orqali erishiladi. Shuningdek, masalalarni yechishning turli xil usullari ham bor bo'lib, ularni faqat ko'p masalalar yechish orqali o'zlashtirish mumkin. Har bir usul muayyan turkumga tegishli masalalarni yechish uchun qo'llaniladi. Qancha ko'p usullar o'zlashtirilsa, shuncha masala yechish ko'nikmalari shakllanadi.

Quyida geometrik masalalarni yechishning ba'zi mihim usullari ustida to'xtalamiz.

Masala yechish usullari tuzulishiga ko'ra, sintetik, analitik, teskarisidan faraz qilish va hokazo turlarga bo'linadi. Matematik apparatning qo'llanishiga ko'ra esa, algebraik, vektorli, koordinatali, yuzlar usuli, o'xshashlik usuli, geometrik almashtirishlar kabi turlarga bo'linadi.

Sintetik usul mohiyatan masala shartida berilganlardan foydalanib, mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjiri eng oxirgi bo'lagi masala talabi bilan ustma-ust tushguncha davom ettiriladi.

1- misol. To'g'ri to'rtburchak burchagining bissektrisasi uning tomonini 7 va 9 uzunlikdagi kesmalarga bo'ladi (1-rasm). To'g'ri to'rtburchak perimetrini toping.



Yechish. Aytaylik $ABCD$ – to'g'ri to'rtburchak, AK – bissektrisa, $K \in BC$, $BK = 7$ sm, $KC = 9$ sm bo'lsin.

1. $BC \parallel AD$ va AK kesuvchi bo'lgani uchun: $\angle 1 = \angle 2$. (1)
bo'ladi, chunki bu burchaklar ichki almashinuvchi burchaklardir.
2. AK – bissektrisa: $\angle 2 = \angle 3$. (2)
3. Unda (1) va (2) ga ko'ra $\angle 1 = \angle 3$.
4. U holda ABK teng yonli uchburchak va $AB = BK$. (3)
5. Bu natijadan foydalanib, hisoblashlarni amalga oshiramiz: $AB = BK = 7$ sm.
$P = 2(AB + BC) = 2\,(7+16) = 46\ (sm)$. ❑

Bu masala tayanch masalalar qatoriga kiradi, chunki ko'pgina masalalar xuddi shu g'oya atrofida quriladi. Parallelogramm va trapetsiya burchagining bissektrisasi bu shakllar tekisligidan teng yonli uchburchak kesib oladi. Bunday tayanch faktlarni doim yodda tutish kerak. Ular boshqa masalalarni yechayotganda juda qo'l keladi.

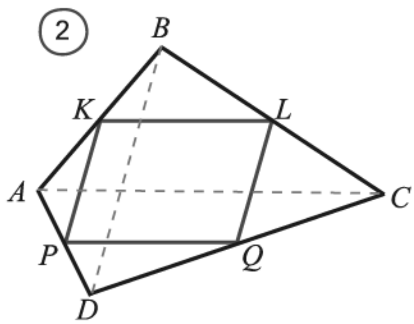
Analitik usul mohiyatan teorema (masala)ning xulosa qismida kelib chiqib, oldindan ma'lum tasdiqlardan foydalanib, mulohaza yuritish orqali mantiqiy fikrlar zanjiri hosil qilinadi. Mulohazalar zanjirining eng oxirgi bo'lagi masala shartining natijasi ekanligini aniqlaguncha davom ettiriladi.

2- misol. Ixtiyoriy to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari bo'lishini isbotlang.

Isbot. Aytaylik $ABCD$ – to'rtburchak (2-rasm), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bo'lsin.

To'rtburchakning AC va BD diagonallarini o'tkazamiz.

1. $\triangle ABC$ da KL o'rta chiziq: $KL \parallel AC$ (1);
2. $\triangle ADC$ da PQ o'rta chiziq: $AC \parallel PQ$ (2);
3. (1) va (2) dan: $KL \parallel PQ$ (3);
4. Yuqoridagiga o'xshash: $KP \parallel LQ$ (4);
5. (3) va (4) dan: $KLQP$ – parallelogramm. ❑



Yuqorida ko‘rilgan sintetik va analitik usullar ***to‘g‘ri usullar*** deb ham ataladi. Masalani to‘g‘ri usullar bilan yechayotganda, avval masala mazmuni tahlil qilinadi. Tahlil natijasiga ko‘ra usuli tanlanadi. Shundan so‘ng rasm ko‘rinishida masalani yechish modeli (chizmasi) tuziladi va chizma ustida mulohaza yuritiladi. Shu tariqa mulohazalar yuritib, masalaning shartidan uning xulosa qismiga qarab borilaveradi.

Masala yechishning teskari usuli ham mavjud. U bilan ko‘p marta duch kelganmiz. U "***teskarisini faraz qilib isbotlash usul*i**" deb ataladi. Bu usulni qo‘llash algoritmini keltiramiz.

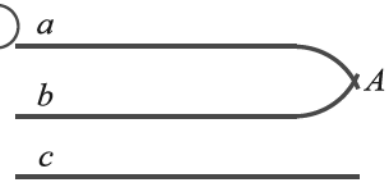
Teskarisini faraz qilib isbotlash usulini qo‘llash algoritmi

Teorema (to‘g‘ri tasdiq)	***Agar A o‘rinli bo‘lsa, B o‘rinli bo‘ladi. (A va B – qandaydir fikrlar)***
Isbot:	
Teskarisini faraz qilamiz:	Teoremada keltirilgan tasdiqning teskarisini faraz qilamiz, ya’ni teoremanig sharti bajarilsin-u, lekin xulosasi o‘rinli bo‘lmasin: ***Agar A o‘rinli bo‘lsa, B o‘rinli bo‘lmaydi.***
Mulohaza yuritamiz:	To‘g‘riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarga tayanib mantiqiy mulohaza yuritamiz.
Ziddiyatga kelamiz:	To‘g‘riligi oldin isbotlangan teorema yoki qabul qilingan aksiomalarning biriga zid bo‘lgan tasdiqqa duch kelib qolamiz.
Xulosa chiqaramiz:	Demak, farazimiz noto‘g‘ri, ya’ni berilgan teorema to‘g‘ri ekan.
Teorema isbotlandi	

3- misol. Agar ikki to‘g‘ri chiziqning har biri uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi.

Aytaylik, a va b to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning har biri uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin. Teoremani teskarisini faraz qilish usuli bilan isbotlaymiz.

3



Isbot. Teskarisini faraz qilamiz: a va b to‘g‘ri chiziqlarning har biri uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin-u, ular o‘zaro parllel bo‘lmasin, ya’ni biror A nuqtada kesishsin (3- rasmga qarang). Unda A nuqtadan c to‘g‘ri chiziqqa ikkita a va b parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tmoqda. Bu parallellik aksiomasiga zid. Ziddiyat farazimizning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi. Ya’ni a va b to‘g‘ri chiziqlarning har biri uchinchi c to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi. ❑

Mazkur usul quyidagi mantiq qonuniga asoslangan: bir-biriga zid ikki tasdiqning faqat bittasi rost, ikkinchisi esa yolg‘on bo‘ladi, uchinchi holatning bo‘lishi mumkin emas.

Endi geometrik masalalarni yechishning boshqa usullariga to‘xtalamiz.

Algebraik usul

Geometrik masalani algebraik usul bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

1) masala mazmunini tahlil qilish va uning chizma modelini qurish;

2) noma’lumni harflar bialn belgilash;

3) masala shartini ifodalovchi tenglama yoki tenglamalar sistemasini tuzish;

4) tuzilgan tenglama yoki tenglamalar sistemasini yechish;

5) topilgan yechimni tahlil qilish;

6) javobni yozish.

4- misol. To‘g‘ri burchakli uchburchakning perimetri 36 sm ga teng. Gipotenuzaning katetga nisbati 5:3. Uchburchak tomonlarini toping.

Aytaylik, $\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $\angle C = 90°$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ bo‘lsin.

Yechish. Proporsionallik koeffitsiyentini k bilan belgilaymiz.

Unda $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagor teoremasiga ko‘ra: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ yoki $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Bundan, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Shartga ko‘ra: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ sm, $AC = 3k = 9$ sm, $BC = 4k = 12$ sm.

Javob: 15 sm, 9 sm, 12 sm. ❑

Yuzlar usuli

Ba’zi geometrik masalalarni yechishda yuzlarni hisoblash formulalaridan foydalanish kutilgan natijani tezda beradi. Bu holatda topish talab qilingan noma’lum masaladagi yordamchi shakllarning yuzlarini tenglashtirish natijasida hosil qilingan tenglamadan topiladi. Buni quyidagi misolda namoyish qilamiz.

5- misol. Uchburchakning tomonlari 13 sm, 14 sm va 15 sm. Uzunligi 14 ga teng tomonga tushirilgan balandlikni toping.

Aytaylik, $\triangle ABC$ berilgan bo‘lib, unda $a = 13$ sm, $b = 14$ sm, $c = 15$ sm bo‘lsin.

Yechish. $a < b$ va $b < c$, h_c – balandlik bo‘lsin.

Geron formulasiga ko‘ra: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 3\cdot 7\cdot 4 = 84$ (sm^2).

Boshqa formula bo‘yicha: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b$; $\quad \frac{1}{2}\, b \cdot h_b = 84$, $\quad h_b = 12$ (sm).

Javob: 12 sm. ❑

Vektorlar usuli

Geometrik masalani vektorlar usuli bilan yechish uchun quyidagi algoritm asosida ish ko‘rish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

1) masalani vektorlar tiliga o‘girish, ya’ni masaladagi ba’zi kattaliklarni vektor sifatida qarab, ularga doir vektorli tenglamalar tuzish;

2) vektorlarning ma’lum xossalaridan foydalanib, vektorli tenglamalarning shaklini almashtirish va noma’lumni topish;

3) vektorlar tilidan geometriya tiliga qaytish;

4) javobni yozish.

Vektor usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo‘ladi:

a) to‘g‘ri chiziqlar (kesmalar)ning parallelligini aniqlash;

b) kesmalarni berilgan nisbatda bo‘lish;

c) uchta nuqtaning bitta to‘g‘ri chiziqda yotishini ko‘rsatish;

d) to‘rtburchakning parallelogramm (romb, trapetsiya, kvadrat, to‘g‘ri to‘rtburchak) ekanligini ko‘rsatish.

6- misol. Qavariq to‘rtburchakning tomonlari o‘rtalari parallelogramm uchlari bo‘lishini isbotlang.

Aytaylik, $ABCD$ to‘rtburchak berilgan bo‘lib, unda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bo‘lsin (4- rasm).

Isbot. 1. Berilgan kesmalarni mos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$ vektorlar bilan almashtirib, masalani vektor tiliga o‘tkazamiz.

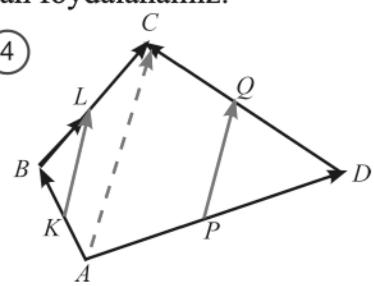
2. Vektorlani qo‘shishning uchburchak qoidasidan foydalanamiz:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \qquad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$

$\overline{KB} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$ va $\overline{BL} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ ekanligidan foydalanib, $\overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2}\,\overline{AB} + \frac{1}{2}\,\overline{BC} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ ekanini topamiz.

Shunga o‘xshash, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ bo‘ladi.

4



3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, ya’ni bu vektorlar bir xil yo‘nalgan va uzunliklari teng. Bu $KLQP$ to‘rtburchak parallelogramm ekanligini anglatadi. ❑

Koordinatalar usuli

Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechayotganda quyidagi algoritm asosida ish ko'rish maqsadga muvofiq bo'ladi:

1) masala mazmunini tahlil qilish va uni koordinatalar tiliga o'girish;
2) ifodalarning shaklini almashtirish va qiymatini hisoblash;
3) natijani geometriya tiliga o'girish;
4) javobni yozish.

Koordinatalar usuli bilan quyidagi geometrik masalalarni yechish maqsadga muvofiq bo'ladi: a) nuqtalarning geometrik o'rnini topish; b) geometrik shakllarning chiziqli elementlari orasidagi bog'lanishlarni isbotlash.

Masalani koordinatalar usuli bilan yechayotganda, koordinatalar boshini to'g'ri tanlash muhimdir. Berilgan shaklni koordinatalar tekisligiga shunday joylashtirish kerakki, imkoni boricha nuqtalarning koordinatalari nolga teng bo'lsin.

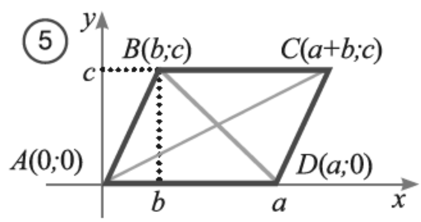
7- misol. Diagonallari teng parallelogrammning to'gri to'rtburchak bo'lishini isbotlang.

Isbot. Koordinatalar sistemasini shunday tanlaymizki, parallelogrammning uchlari quyidagi koordinatalarga ega bo'lsin (5- rasmga qarang):

$A(0;\,0),\quad B(b;\,c),\quad C(a+b;\,c),\quad D(a;\,0),$

bu yerda $a > 0,\ b \geq 0,\ c > 0.$

5



$A,\ B,\ C,\ D$ nuqtalar orasidagi masofalarni ularning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$AC = \sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2},\quad BD = \sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}.$

Unda $\sqrt{(a+b-0)^2+(c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2+(0-c)^2}$

yoki $(a+b-0)^2+(c-0)^2 = (a-b)^2+(0-c)^2.$ Bundan, $4ab = 0.$

Lekin $a > 0$, unda $b = 0$. Bu esa, o'z navbatida, $B\ (b;\ c)$ nuqta Oy o'qida yotishini anglatadi. Shuning uchun BAD to'g'ri burchak bo'ladi.

Bundan $ABCD$ parallelogramm to'g'ri to'rtburchak ekanligi kelib chiqadi. ❑

Geometrik almashtirishlar usuli

Geometrik almashtirishlar usuliga burish, simmetrik akslantirishlar, parallel ko'chirish va gomotetiya kabi almashtirishlarga asoslangan usullar kiradi. Geometrik almashtirishlar yordamida masalalarni yechish jarayonida berilgan geometrik shakllar bilan bir qatorda yangi, qo'llanilgan geometrik almashtirish yordamida hosil qilingan shakllar ham qaraladi. Yangi shakllarning xossalari aniqlanadi va berilgan shaklga o‘tkaziladi. Shundan so‘ng masalani yechish yo‘li topiladi. Yuqorida keltirilgan barcha usullar bitta umumiy nom bilan geometrik usullar deb aytiladi.

Muhim eslatma!

Bu bo‘limdan joy olgan materiallar planimetriyani takrorlash uchun keltirilgan. Takrorlash uchun masalalar keragidan ortiq keltirilmoqda. Ularning barchasini sinfda ko‘rishning imkoni bo‘lmasligi mumkin. Bundan qat’iy nazar, ularni mustaqil yechib chiqishni maslahat beramiz. Bu sizga 10- sinfda geometriyani o‘rganishni muvaffaqiyatli davom ettirishingizga zamin yaratadi.

? *Mavzuga doir savollar*

1. *Matematik masala deganda nimani tushunasiz?*
2. *Geometrik masalaning qanday turlarini bilasiz?*
3. *Masala yechishning qanday usullarini bilasiz?*
4. *Geometrik masalani yechishning sintetik, analitik usullari haqida gapirib bering.*
5. *Masala yechishning to‘g‘ri va teskari usullari haqida nima bilasiz?*
6. *Teskarisidan faraz qilib isbotlash usulining mohiyati nimada?*
7. *Geometrik masalani algebraik usulda yechish algoritmini tushuntirib bering.*
8. *Geometrik masalani vektor usulida yechish algoritmini tushuntirib bering.*
9. *Vektor usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?*
10. *Geometrik masalani koordinatalar usuli bilan yechish algoritmini tushuntirib bering.*
11. *Koordinatalar usuli bilan odatda qanday masalalar yechiladi?*
12. *Geometrik almashtirishlar usulini tushuntirib bering.*

3 AMALIY MASHQ VA TATBIQLAR

1.1. Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan to‘rtta burchak hosil bo‘ldi (1- rasm). Quyida keltirilgan jadvalda har bir shart ($A - E$) ga undan kelib chiquvchi xulosa ($1 - 5$) ni mos qo‘ying:

A) $\angle 1 = \angle 3$;
B) $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
C) $\angle 1 = \angle 2 + 90°$;
D) $\angle 2 + \angle 4 = 260°$;
E) $\angle 3 = 90°$.

1) $\angle 3 = \angle 4 = 90°$;
2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90°$;
3) $\angle 1$ va $\angle 4$ – qo‘shni;
4) $\angle 1$ va $\angle 3$ – o‘tkir;
5) $\angle 2$ va $\angle 4$ – vertikal.

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Quyida ba’zi burchaklarning gradus o‘lchovlari (1–7) berilgan. Ulardan qaysi juftlari qo‘shni bo‘lishi mumkinligini aniqlang.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28°; 6) 108°; 7) 38°.

A) 1 va 2; *B*) 2 va 6; *C*) 3 va 4; *D*) 1 va 7; *E*) 2 va 5.

1.3. Agar 2- rasmda $\angle 1 = \angle 7$ bo‘lsa, to‘g‘ri tasdiqni toping.

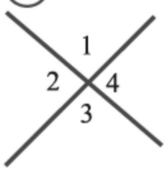
A) $a \parallel b$; *B*) $a \perp b$; *C*) *a* va *b* kesishmaydi;

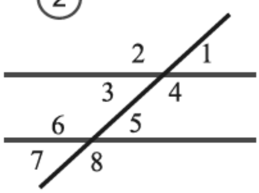
1.4. Agar 3- rasmda $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ va $\angle 2 = 72^{\circ}$ bo‘lsa, $\angle 3 = ?$

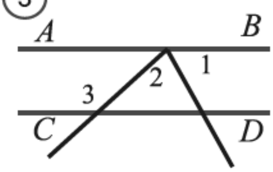
A) 72°; *B*) 144°; *C*) 108°; *D*) 36°; *E*) 124°.

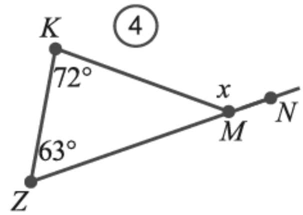
1.5. Agar teng yonli uchburchak burchaklari 3 : 4 : 3 nisbatda bo‘lsa, uning uchining bissektrisasi va yon tomoni orasidagi burchakni toping.

A) 18°; *B*) 36°; *C*) 72°; *D*) 60°; *E*) 30°.

1


2


3


4


1.6. 4- rasmda tasvirlangan *KMZ* uchburchak burchagiga tashqi bo‘lgan *KMN* burchakning gradus o‘lchovini toping.

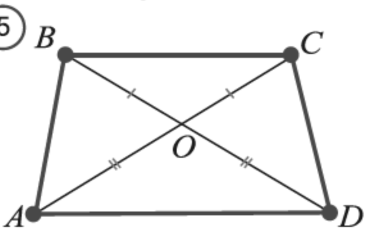
A) 135°; *B*) 108°; *C*) 45°; *D*) 125°; *E*) 117°.

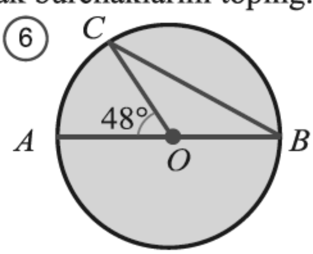
1.7. To‘g‘ri tengliklarni aniqlang (5- rasm).

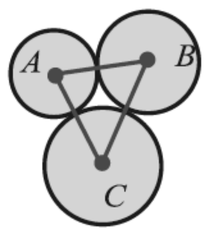
A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; *B*) $BA = CD$; *C*) $\triangle ABO = \triangle COD$;

D) $\angle AOB = \angle DOC$; *E*) $\angle BAO = \angle DCO$; *F*) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-rasmdagi *BOC* uchburchak burchaklarini toping.

5


6


7


A) 48°, 48°; 84°; *B*) 24°, 132°, 24°; *C*)132°, 48°, 48°; *E*)42°,90°,48°; *D*)48°,32°, 20°.

1.9. Uchburchakning uchlari radiuslari 6 sm, 7 sm va 8 sm bo‘lgan va jufti-jufti bilan urinadigan uchta aylana markazlarida yotibdi (7- rasm).

Bu uchburchakning perimetrni toping.

A) 28 sm; *B*) 29 sm; *C*) 27 sm; *D*) 42 sm; *E*) 21 sm.

1.10. Kvadratning tomoni $20\sqrt{2}$ ga teng. Bu kvadratga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

A) 20; *B*) $10\sqrt{2}$; *C*) 10; *D*) $5\sqrt{2}$; *E*) 5.

1.11. Trapetsiyaning bitta asosi ikkinchisidan 8 sm ga uzun, o‘rta chizig‘i esa 10 sm ga teng. Trapetsiyaning kichik asosini toping.

A) 2 sm; *B*) 4 sm; *C*) 6 sm; *D*) 8 sm; *E*) 10 sm.

1.12. Diagonallari 10 m va 36 m bo‘lgan rombning yuzini toping.

A) 90 m^2; *B*) 92 m^2; *C*) 180 m^2; *D*) 184 m^2; *E*) 36 m^2.

1.13. 8-rasmdagi *m* va *n* to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lsa, *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

A) 50°; *B*) 80°; *C*) 100°; *D*) 65°; *E*) 115°.

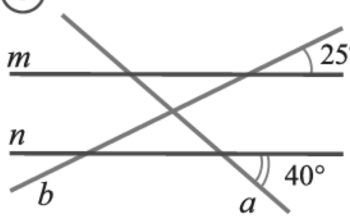
1.14. 9-rasmdagi uchburchak yuzini toping.

A) 6; *B*) 9 ; *C*) 12; *D*) 24; *E*) 30.

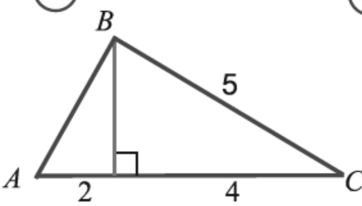
1.15. 10- rasmdagi *R* radiusli aylanaga ichki chizilgan *ABC* uchburchakning *BC* tomonini toping.

A) *R*; *B*) $R\sqrt{2}/2$; *C*) $R\sqrt{2}$; *D*) $R\sqrt{3}$; *E*) $R\sqrt{3}/2$.

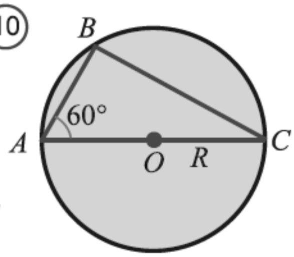
8



9



10



1.16. Yuzi 9π sm^2 bo‘lgan doirani o‘rab turgan aylana uzunligini toping.

A) 3π sm; *B*) 9π sm; *C*) 12π sm; *D*) 18π sm; *E*) 6π sm.

1.17. Tomoni 6 sm ga teng bo‘lgan kvadratga ichki chizilgan doira yuzini toping.

A) 9π sm^2; *B*) 144π sm^2; *C*) 36π sm^2; *D*) 72π sm^2; *E*) 18π sm^2.

1.18. Kvadratga ichki chizilgan aylana radiusi 5 sm. Kvadrat diagonalini toping.

A) $5\sqrt{2}/2$; *B*) $5\sqrt{2}$; *C*) $5\sqrt{2}/4$; *D*) $10\sqrt{2}$; *E*) $20\sqrt{3}$.

1.19. Ichki burchaklari yig‘indisi 1600° bo‘lgan muntazam ko‘pburchakning tomonlari sonini toping.

A) 12; *B*) 14; *C*) 16; *D*) 18; *E*) 20.

1.20. Diagonallari 24 sm va 18 sm bo‘lgan rombning perimetrini toping.

A) 120 sm; *B*) 60 sm; *C*) 84 sm; *D*) 108 sm; *E*) 144 sm.

1.21. Parallelogrammning perimetri 48 dm bo‘lib, bir tomoni ikkinchisidan 8 dm ga uzun. Parallelogrammning kichik tomonini toping.

A) 8 dm; *B*) 16 dm; *C*) 6 dm; *D*) 12 dm; *E*) 10 dm.

1.22. 11- rasmdagi ABC teng yonli uchburchak tashqarisida ikkita teng ABM va CBK burchaklar qurildi. Bu burchaklar tomonlari AC tomonni, mos ravishda, M va K nuqtalarda kesib o‘tdi. MBC va KBA uchburchaklar tengligini isbotlang.

1.23. 12-rasmda tasvirlangan AB va CD to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvini aniqlang. Javobingizni asoslang.

1.24. 13-rasmdagi ABC uchburchakka ichki aylana chizilgan. Aylananing N va Z urinish nuqtalari uchburchakning AB va AC tomonlarini ayirmasiga mos ravishda 3 sm va 4 sm bo‘lgan kesmalarga ajratadi ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Agar uchburchakning perimetri 28 sm bo‘lsa, uning tomonlarini toping.

1.25. Teng tomonli uchburchakka radiusi $3\sqrt{3}$ bo‘lgan aylana tashqi chizilgan. Ichki chizilgan aylana radiusini toping.

1.26. Asosidagi burchagi 30° bo‘lgan, tengyonli trapetsiyaga aylana tashqi chizilgan. Trapetsiyaning balandligi 7 sm ga teng bo‘lsa, uning o‘rta chizig‘ini toping.

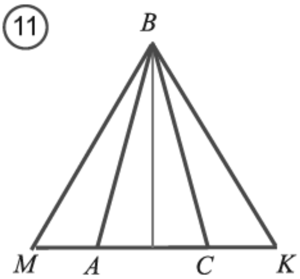
1.27. Asosidagi burchagi 150° bo‘lgan teng yonli trapetsiya aylanaga tashqi chizilgan. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i $16\sqrt{3}$ ga teng bo‘lsa, uning balandligini toping.

1.28. Asosi 16 sm va bu asosga tushirilgan balandligi 15 sm bo‘lgan teng yonli uchburchakning yon tomonini toping.

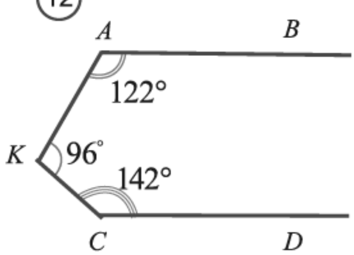
1.29. ABC uchburchakning AO balandligi uning BC tomonini BO va OC kesmalarga ajratadi. Agar $AB = 10\sqrt{2}$ sm, $AC = 26$ sm va $B = 45°$ bo‘lsa, OC kesma uzunligini toping.

1.30. Rombning tomoni 10 sm, diagonallaridan biri 12 sm. Rombga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

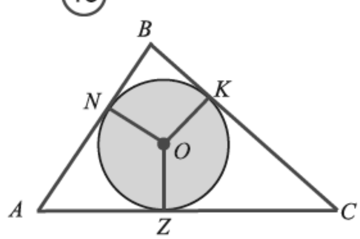
11



12



13



1.31. Radiusi 15 sm bo‘lgan aylanada uning markazidan 12 sm uzoqlikda bo‘lgan vatar o‘tkazilgan. Vatar uzunligini toping.

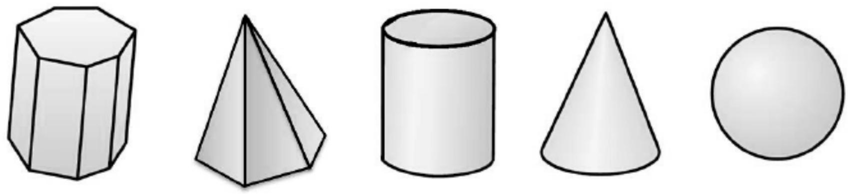
II BO‘LIM

STEREOMETRIYAGA KIRISH

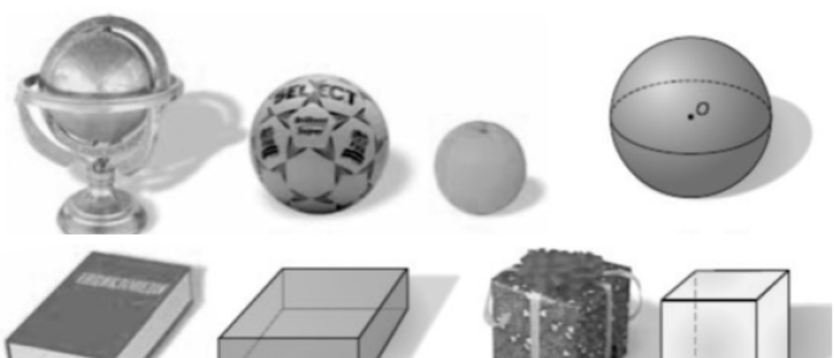
4 FAZOVIY GEOMETRIK SHAKLLAR. KO‘PYOQLAR

Ma’lumki, geometrik shakllar tekislikda to‘liq yotgan yoki yotmaganiga qarab, yassi va fazoviy shakllarga ajratiladi. Oldingi sinflarda geometriya darslarida, asosan, yassi geometrik shakllarning xossalarini o‘rgandik. 9- sinf oxirida esa ba’zi fazoviy shakllar: prizma, piramida, silindr, konus va sharning (1- rasm) xossalarini qarab chiqqan edik. Geometriyaning planimetriya bo‘limi yassi geometrik shakllarni, *stereometriya* bo‘limi esa fazoviy geometrik shakllarning (yoki jismlarning) xossalarini o‘rganadi. Stereometriya so‘zi grekchadan olingan bo‘lib, "stereos" – fazoviy, "metreo"– o‘lchayman degan ma’nolarni anglatadi.

1



2

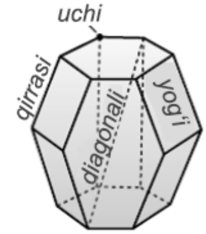


2- rasmda tevarak atrofdagi ba'zi narsalar fazoviy jismlarning timsoli sifatida ular haqida tasavvur beradi. Tevarak atrofimizdagi barcha predmetlar uch o'lchamli bo'lib, ularning shakli qaysidir fazoviy geometrik jismga o'xshab ketadi.

9- sinf oxirida bunday fazoviy jismlar bilan tanishgansiz. Stereometriya kursini tizimli ravishda o'rganishni boshlaymiz. Avval ba'zi bir fazoviy jismlar elementlari haqidagi ma'lumotlarni qisqacha eslatib o'tishni lozim topdik.

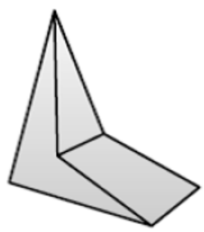
Ko'pyoq deb yassi ko'pburchaklar bilan chegaralangan jismga aytiladi. Yassi ko'pburchaklar bu *ko'pyoqning yoqlari*, ko'pburchaklarning uchlari *ko'pyoqning uchlari*, tomonlari qirralari esa *ko'pyoqning qirralari* deb ataladi. Bitta yoqqa tegishli bo'lmagan uchlarni birlashtiruvchi kesma *ko'pyoqning diagonali* deb ataladi (3-rasm).

3



Ko'pyoqning chegarasi uning *sirti* deb ataladi. Ko'pyoq sirti fazoni ikki qismga ajratadi. Ulardan cheksiz qismi *ko'pyoqning tashqi sohasi,* chekli qismi esa *ko'pyoqning ichki sohasi* deb ataladi.

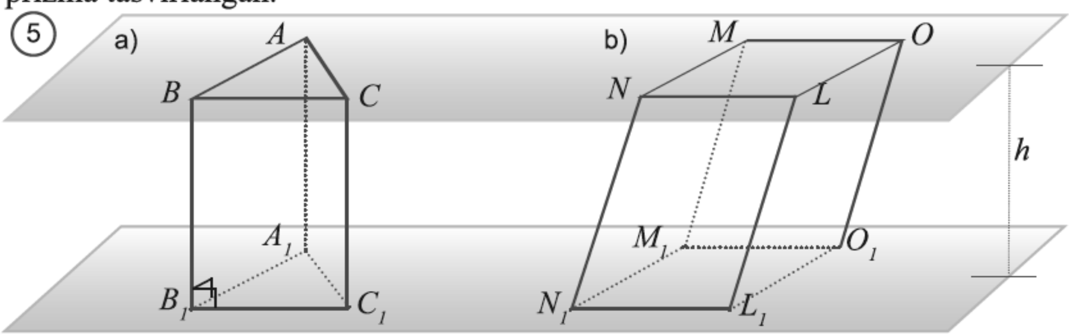
4



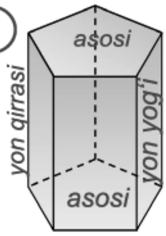
Ko'pyoq ixtiyoriy yog'i yotgan tekislikning bir tomonida yotsa, bunday ko'pyoq *qavariq ko'pyoq* deyiladi. Masalan, kub – qavariq ko'pyoqdir. 4- rasmda esa qavariq bo'lmagan ko'pyoq tasvirlangan. Kelgusida eng sodda qavariq ko'pyoqlar: prizma va piramidalarni o'rganamiz.

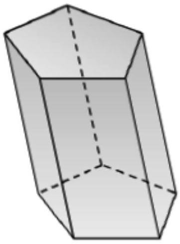
Prizma deb ikki yog'i teng ko'pburchakdan, qolgan yoqlari esa parallelogrammlardan iborat ko'pyoqqa aytiladi (5- rasm). Teng yoqlar prizmaning *asoslari*, parallelogrammlar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi (6- rasm). Asosining tomonlari soniga qarab prizmalar *uchburchakli, to'rtburchakli* va hokazo *n-burchakli prizmalar* deb yuritiladi. 5.a- rasmda uchburchakli $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 5.*b*- rasmda esa tortburchakli $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma tasvirlangan.

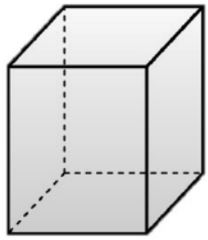
5



Prizma yon yoqlarining asosiga perpendikular yoki perpendikular emasligiga qarab *to‘g‘ri prizma* (6 - rasm) yoki *og‘ma prizma* (7 - rasm) deb ataladi.

6


7


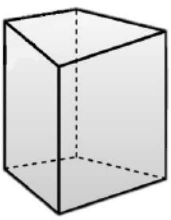
8


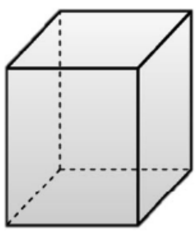
Asosi muntazam ko‘pburchakdan iborat prizma *muntazam prizma* deb nomlanadi (8- rasm).

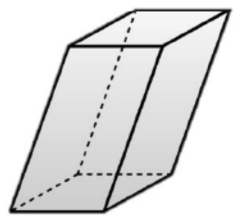
Asosi parallelogrammdan iborat prizma *parallelepiped* deb nomlanadi (9- rasm). Parallelepipedlar ham prizma kabi to‘g‘ri va og‘ma bo‘lishi mumkin. Asosi to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat to‘g‘ri parallelepiped *to‘g‘ri burchakli parallelepiped* deb ataladi (10- rasm). Ravshanki, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat bo‘ladi.

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning bitta uchidan chiquvchi uchta qirrasi uning *o‘lchamlari* deb nomlanadi.

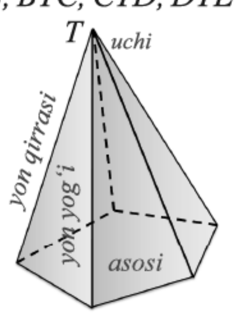
O‘lchamlari teng bolgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped *kub* deb nomlanadi. Ravshanki, kubning barcha yoqlari teng kvadratlardan iborat bo‘ladi.

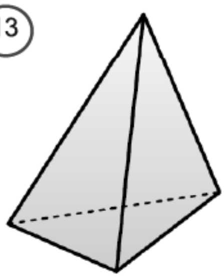
9


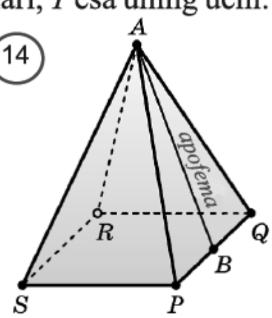
10


11


Piramida deb bir yog‘i ko‘pburchakdan, qolgan yoqlari esa bitta uchga ega uchburchaklardan iborat ko‘pyoqqa aytiladi. Ko‘pburchak piramidaning *asosi*, uchburchaklar esa uning *yon yoqlari* deb ataladi. 12- rasmda *TABCDE* beshburchakli piramida tasvirlangan. *ABCDE* beshburchak piramidaning asosi, *ATB, BTC, CTD, DTE* va *ETA* uchburchaklar uning yon yoqlari, *T* esa uning uchi.

12


13


14


Asosining tomonlari soniga qarab piramidalar *uchburchakli, to‘rtburchakli* va hokazo *n-burchakli piramidalar* deb yuritiladi.

13- rasmda uchburchakli, 14- rasmda esa tortburchakli piramida tasvirlangan.

Piramida yon yoqlarining asosga perpendikular yoki perpendikular emasligiga qarab *to‘g‘ri piramida* yoki *og‘ma piramida* deb ataladi.

Muntazam piramida deb asosi muntazam ko‘pburchak va uchidan asos markaziga tushurilgan kesma shu markazdan o‘tuvchi va asos tekisligida yotuvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bolgan piramidaga aytiladi.

Muntazam piramida yon yog‘ining piramida uchidan tushirilgan balandligi uning *apofemasi* deb yuritiladi.

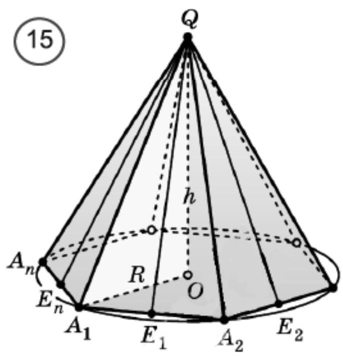
14 - rasmda *APQRS* to‘rtburchakli muntazam piramida tasvirlangan. Undagi *AB* kesma piramida apofemalaridan biridir.

1.1- teorema: Muntazam piramidaning a) yon yoqlari; b) yon qirralari; c) apofemalari o‘zaro teng.

Isbot. Aytaylik, $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramida, O esa piramida asosining markazi bo‘lsin (15- rasm).

a) OA_1, OA_2, ... OA_n kesmalar muntazam ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusidan iborat bo‘lgani uchun o‘zaro teng bo‘ladi. To‘g‘ri burchakli QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n uchburchaklarda ikkita katetlar o‘zaro teng bo‘lgani uchun ular teng bo‘ladi. Unda ularning gipotenuzalari ham teng bo‘ladi: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

15



b) $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramidaning yon qirralari o‘zaro teng bo‘lgani uchun uning yon yoqlari teng yonli uchburchaklardan iborat bo‘ladi. Bu uchburchaklarning asoslari muntazam ko‘pburchakning tomoni bo‘lgani uchun o‘zaro teng bo‘ladi. Demak, muntazam piramidaning yon yoqlari uchta tomonlari bo‘yicha o‘zaro teng.

c) muntazam piramidaning yon yoqlari teng bo‘lgani uchun, ularning Q uchdan tushurilgan balandliklari ham o‘zaro teng bo‘ladi.

Demak, muntazam piramidaning apofemalari ham o‘zaro teng.❑

1.2- teorema: Muntazam piramidaning yon sirti uning asosining yarim perimetri va apofemasining ko‘paytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, $QA_1A_2... A_n$ muntazam piramida bo‘lsin (15- rasm). Piramidaning yon sirti uning yon yoqlari yuzlari yig‘indisiga teng. Uning yon yoqlari esa o‘zaro teng bo‘lgan teng yonli uchburchaklardan iborat. O‘z navbatida bu uchburchaklarning balandliklari ham o‘zaro teng apofemalardan iborat:

$$QE_1 = QE_2 = ... = QE_n.$$

Bulardan $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \ldots + S_{A_nQA} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 +$

$+ \ldots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \; = \frac{1}{2} QE_1 \,(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1) = p \cdot a,$

bu yerda p – piramida asosisning yarimperimetri, a – piramida apofemasi. ❑

? *Mavzu bo‘yicha savollar*

1. *Qanday geometrik shakllar a) yassi; b) fazoviy deb ataladi?*
2. *Qanday jism ko‘pyoq deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
3. *Qanday jism prizma deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
4. *Qanday prizma turlarini bilasiz?*
5. *To‘g‘ri burchakli parallelepipedga ta’rif bering.*
6. *Qanday jism piramida deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
7. *Qanday piramida turlarini bilasiz?*
8. *Muntazam piramida xossalarini ayting.*

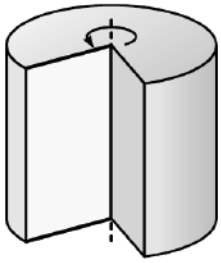
5 AYLANISH JISMLARI: SILINDR, KONUS VA SHAR

Fazoviy shakllarning yana muhim sinflaridan biri – bu aylanish jismlaridir. Ularga silinrd, konus va shar kiradi.

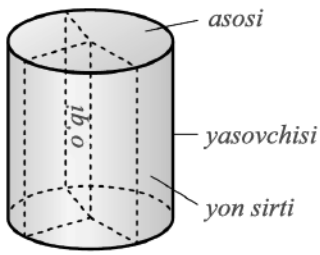
Tog‘ri to‘rtburchakni bir tomoni atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism *silindr* deb aytiladi (16 –18- rasmlar).

Bunday aylantirishda tog‘ri to‘rtburchakning bir tomoni qo‘zg‘alishsiz qoladi.

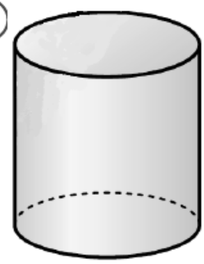
16



17



18



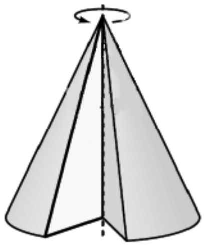
Uni *silindrning o‘qi* deb ataymiz (17 - rasm).

O‘qqa qarama-qarshi yotgan tomon aylanishidan hosil bo‘lgan sirt *silindrning yon sirti* deb, tomonning o‘zi esa *silindrning yasovchisi* deb yuritiladi.

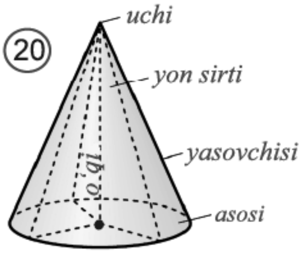
Tog‘ri to‘rtburchakning qolgan tomonlarining har biri bu aylanishda doira ko‘rinishidagi sirtni hosil qiladi. Bu doiralar *silindrning asoslari* deb ataladi.

Tog‘ri burchakli uchburchakni bir kateti atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism *konus* deb aytiladi (19–21 - rasmlar). Bu katetni esa *konusning o‘qi* deb ataymiz.

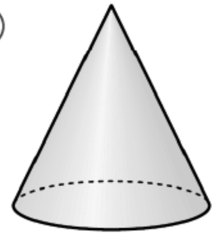
19



20



21

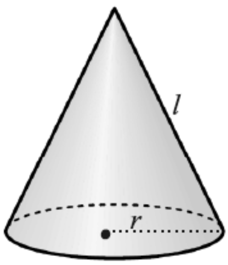


Bu aylantirishda boshqa katet hosil qilgan doira konusning *asosi,* gipotenuza hosil qilgan sirt esa *konusning yon sirti* deb, gipotenuzaning oʻzi esa *konusning yasovchisi* deb yuritiladi. Shuningdek, bu aylanishda qozgʻalmasdan qolgan uchburchak uchi *konusning uchi* deb yuritiladi (20 - rasm).

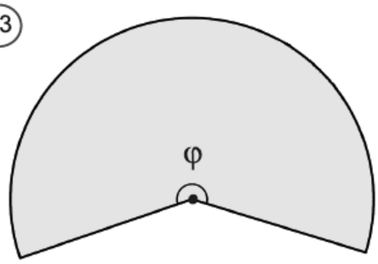
1.3- teorema. Konusning yon sirti uning asosi yuzining yarmi va yasovchisining koʻpaytmasiga teng.

Isbot. Aytaylik, asosining radiusi r va yasovchisi l boʻlgan konus berilgan boʻlsin (22- rasm). Konus yon sirtini tekislikka yoyamiz. Natijada, radiusi l ga teng boʻlgan doiraviy sektorga ega boʻlamiz (23- rasm).

22



23



Bu sektorning markaziy burchagi φ ni topamiz (21- rasm). Bu markaziy burchak konus asosi aylana uzunligi – $2\pi r$ ga teng boʻlgan sektorning aylana yoyiga tiralgan.

Ma'lumki, radiusi l boʻlgan aylananing uzunligi $2\pi l$ ga teng boʻlib, u 360° li markaziy burchakka tiralgan. Natijada proporsiyaga ega boʻlamiz:

φ° li markaziy burchak – $2\pi r$ ga teng yoy;

360° li markaziy burchak – $2\pi l$ ga teng yoy.

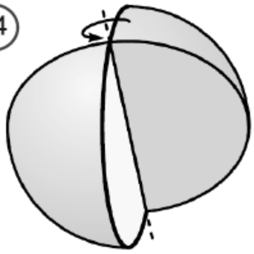
Undan $\varphi = \dfrac{360^\circ}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \dfrac{360^\circ \cdot r}{l}$.

Endi radiusi l ga teng boʻlgan, φ burchakli S sektor yuzini topamiz:

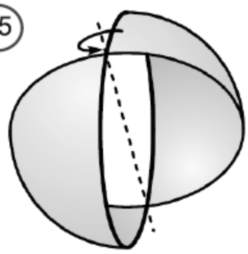
$$S = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \varphi^\circ = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \ \square$$

Doiraning oʻz diametri atrofida aylanishidan hosil boʻlgan jismga *shar* deb aytiladi (24- rasm). Bu aylantirishda aylana hosil qilgan sirt *sfera* deb ataladi 25- rasmda shar tasvirlangan.

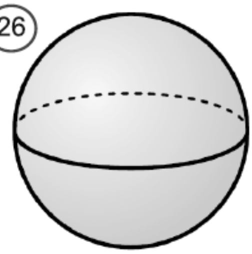
24



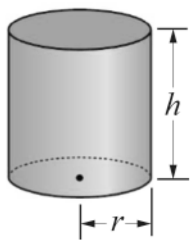
25

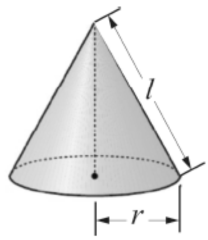


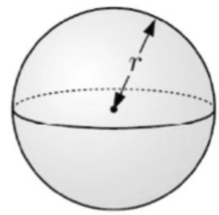
26



Aylanma jismlarning yon va to‘la sirtining yuzi formulalari:







Silindr

$$S_{yon} = 2\pi rh$$
$$S_{to‘la} = 2S_{asos} + S_{yon} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

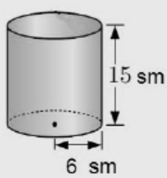
Konus

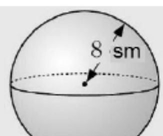
$$S_{yon} = 2\pi rl$$
$$S_{to‘la} = S_{asos} + S_{yon} = \pi r^2 + 2\pi rl$$

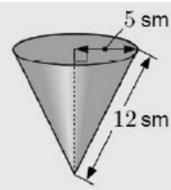
Shar

$$S = 4\pi r^2$$

Misol. Quyidagi jismlarning yon sirtining yuzini toping.







$S_{yon}=2\pi rh=2\cdot3,14\cdot6\cdot5=$ $=565,5$ sm^2	$S=4\pi r^2=4\cdot3,14\cdot8^2=$ $=804,2$ sm^2	$S_{to‘la}=2\pi rl+\pi r^2=$ $=2\cdot3,14\cdot12+3,14\cdot5^2=$ $=267$ sm^2.

Mavzu bo‘yicha savollar

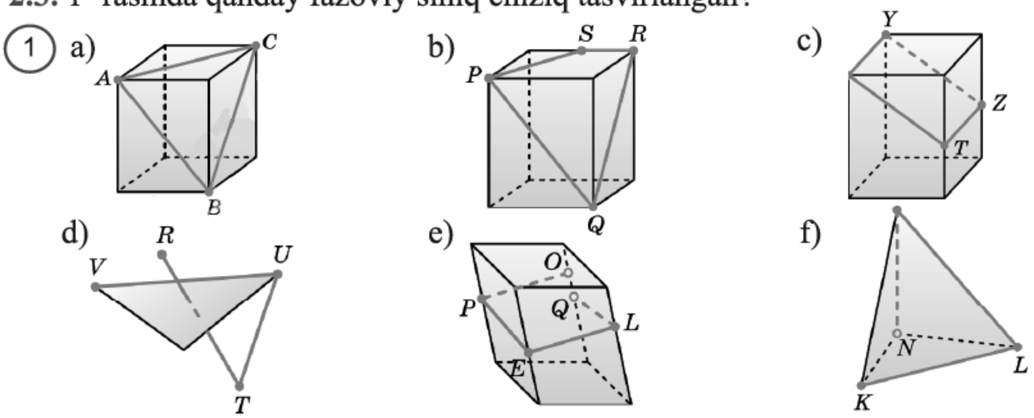
1. *Aylanma jismlarga misol keltiring.*
2. *Qanday jism silindr deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
3. *Qanday jism konus deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*
4. *Qanday jism shar deb ataladi? Uning elementlariga ta’rif bering.*

6 AMALIY MASHQ VA TATBIQLAR

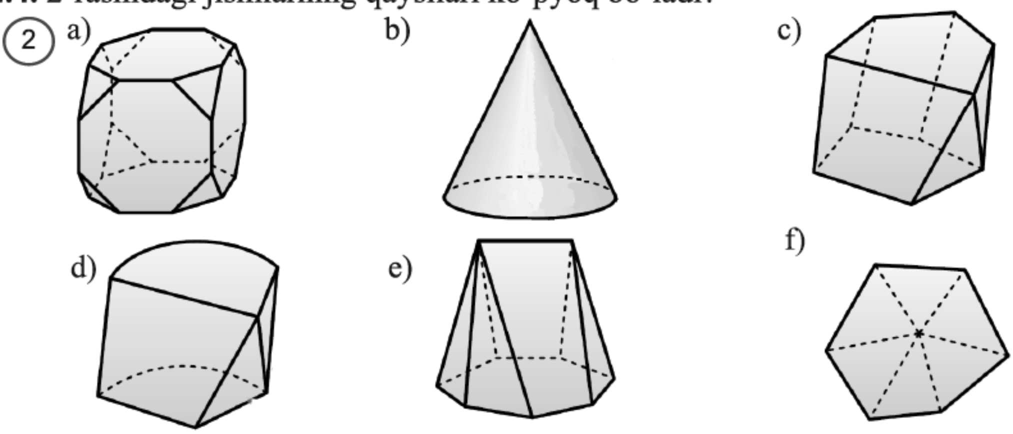
2.1. To‘g‘ri prizmaning yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchak ekanligini isbotlang.

2.2. To‘g‘ri prizma yon sirti asosining perimetri va yon qirrasining ko‘paytmasiga teng ekanligini isbotlang.

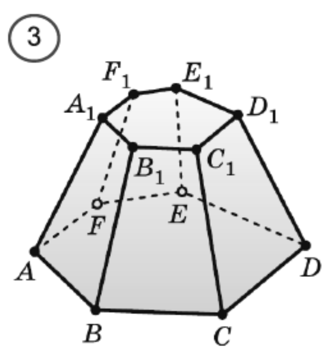
2.3. 1- rasmda qanday fazoviy siniq chiziq tasvirlangan?



2.4. 2-rasmdagi jismlarning qaysilari ko‘pyoq bo‘ladi?



2.5. 3 - rasmda $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ko‘pyoq tasvirlangan. Undagi a) CD qirra umumiy bo‘lgan yoqlarni; b) DD_1 qirra umumiy bo‘lgan yoqlarni; c) E uch umumiy bo‘lgan yoqlarni; d) C_1 uch umumiy bo‘lgan yoqlarni; e) A uch umumiy bo‘lgan qirralarni; f) F_1 uch umumiy bo‘lgan qirralarni ayting.



2.6. To‘g‘ri parallelepipedning asosi rombdan iborat. Rombning tomoni 8 m, diagonallari esa 10 m va 24 m ga teng. Parallelepipedning to‘la sirtini toping.

2.7. *AB* va *AK* to‘g‘ri chiziqlar nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

2.8. Muntazam uchburchakli prizma asosining tomoni 6 sm, yon qirrasi esa 11 sm ga teng. Prizmaning to‘la sirtini toping.

2.9. Muntazam n-burchakli prizma asosining tomoni a, yon qirrasi h ga teng. Agar a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bo‘lsa, prizmaning yon sirti va to‘la sirtini toping.

2.10. Muntazam uchburchakli piramida apofemasi 15 ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 12 ga teng. a) piramida yon qirrasi va asosining tomonini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

2.11. Muntazam to‘rtburchakli piramida asosi 12 sm ga, piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 16 sm ga teng. a) piramida yon qirrasi va apofemasini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

2.12*. *REFGH* piramida asosi tomonlari 10 sm va 18 sm bo‘lgan va yuzi 90 sm^2 ga teng bo‘lgan *EFGH* parallelogrammdan iborat. Piramida uchi *R* ni asos diagonallari kesishish nuqtasi *O* bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 6 sm ga teng. a) piramida yon qirralarini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

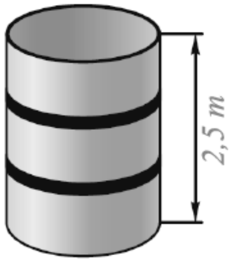
2.13*. Piramida asosi tomonlari 8 va 10 bo‘lgan va kichik diagonali 6 ga teng bo‘lgan parallelogrammdan iborat. Piramida uchini asos diagonallari kesishish nuqtasi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 4 ga teng. a) piramida yon qirralarini; b) piramida yon sirtini; c) piramida to‘la sirtini toping.

2.14*. Muntazam oltiburchakli piramida asosining tomoni 10 sm ga teng. Piramida uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi $\sqrt{69}$ ga teng. a) piramida yon qirrasi va apofemasini; b) piramida yon sirtini; c) piramirda to‘la sirtini toping.

2.15. Muntazam oltiburchakli piramida yon sirtining yuzi 150 m^2 ga, yon qirrasi esa 10 m ga teng. Piramida asosining yuzini toping.

2.16. Silindr yon sirti asosi aylanasi uzunligining silindr yasovchisiga ko‘paytmasiga teng ekanligini isbotlang.

4



2.17. Silindr asosining radiusi va yasovchisiga ko‘ra uning yon sirtini toping. a) 7 sm va 12 sm; b) 12 cm va 7 sm; c) 1 m va 12 m; d) 0,7 m va 1,2 m.

2.18. Silindr asosining yuzi 300π sm^2, yasovchisi 6 sm bo‘lsa, silindr asosining yuzini toping.

2.19. Silindr yon sirtining yuzi 90π sm^2, yasovchisi 5 sm bo‘lsa, silindrning to‘la sirti yuzini toping.

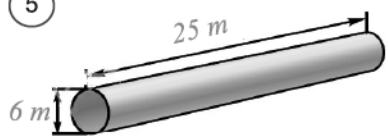
2.20. Silindr asosining diametri 1 m, yasovchisi esa asos aylana uzunligiga teng. Silindr yon sirti yuzini toping.

2.21. Silindr yasovchisi uning asosi radiusidan 12 sm ga uzun. Silindr to‘la sirtining yuzi esa 128π sm^{2}. Silindr asosining radiusi va yasovchisini toping.

2.22. 4- rasmda tasvirlangan silindr shaklidagi bakning har ikki tomonini bo‘yash lozim. Agar bakning balandligi 2,5 m, asosining diametri 1,2 m va bo‘yoq qatlami qalinligi 0,1 mm bo‘lsa, bakni bo‘yash uchun qancha bo‘yoq kerak bo‘ladi?

2.23. 5- rasmda tasvirlangan uzunligi 25 m va diametri 6 m bo‘lgan quvurni tayyorlashda necha bo‘lak tunuka kerak bo‘ladi? Tunuka bo‘laklarini bir-biriga payvandlashda quvur yon sirtining 2,5 % ga teng tunuka ishlatilishini hisobga oling.

5



2.24. Konus asosining radiusi 12 mm, konus uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 35 mm ga teng. Konus yon sirtini toping.

2.25. Konus asosining diametri 32 sm, konus uchini asos markazi bilan tutashtiruvchi kesma uzunligi 63 sm ga teng. Konus yon sirtini toping.

2.26*. Konusning yasovchisi l ga teng bo‘lib, u asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Agar a) $l = 10$ sm, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 24$ dm, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 5$ m, $\alpha = 60^\circ$ bo‘lsa, konus asosining yuzini toping.

2.27*. Konusning yasovchisi l ga teng bo‘lib, u asos radiusi bilan α burchak tashkil qiladi. Agar

a) $l = 18$ sm, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 20$ dm, $\alpha = 45^\circ$;

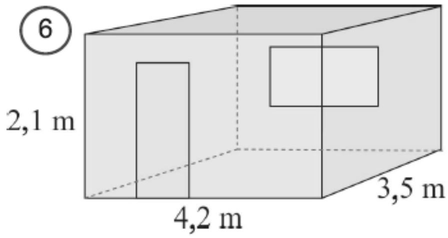
c) $l = 2,4$ m, $\alpha = 60^\circ$ bo‘lsa, konusning to‘la sirtini toping.

2.28*. Konus asosining radiusi va yasovchisi mos ravishda a) 11 sm va 8 sm; b) 8 mm va 11 mm; c) 3 m va 18 m; d) 2,7 m va 1,2 m ga teng bo‘lsa, konus yon sirtini toping.

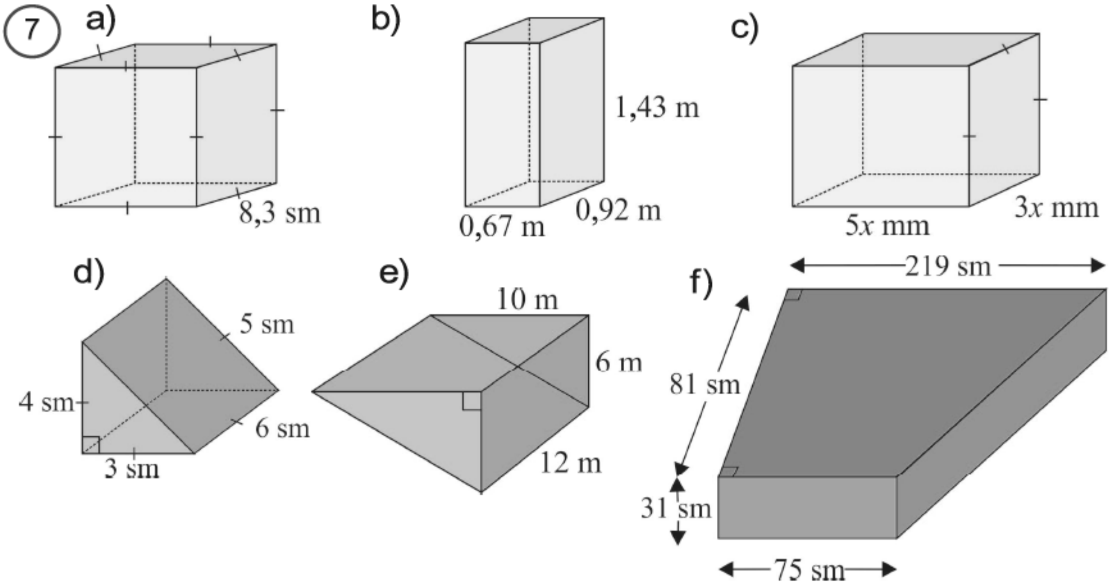
2.29. 6- rasmda tasvirlangan xonani ta’mirlash kerak. Xonada o‘lchamlari 8 m va 2,2 m bo‘lgan eshik va o‘lchamlari 183 sm va 91 sm bo‘lgan deraza bor. Eshikning ikki tomoni ham bo‘yalishi lozim. Jadvalda ikki xil bo‘yoqning narxlari berilgan. Bu ma’lumotlardan foydalanib, tejamli ta’mirlash uchun qancha mablag‘ kerakligini hisoblang.

Bo‘yoq turi	Hajmi	Bo‘yash yuzi	Narxi
Devor uchun	4 l	16 m^2	3245so‘m
	2 l	8 m^2	2080so‘m
Eshik uchun	2 l	10 m^2	2360so‘m
	1 l	5 m^2	1540so‘m

6

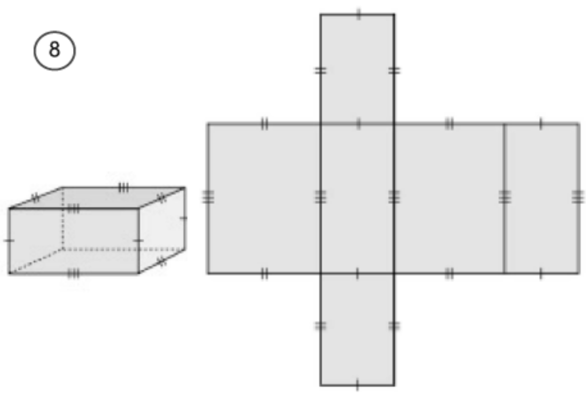


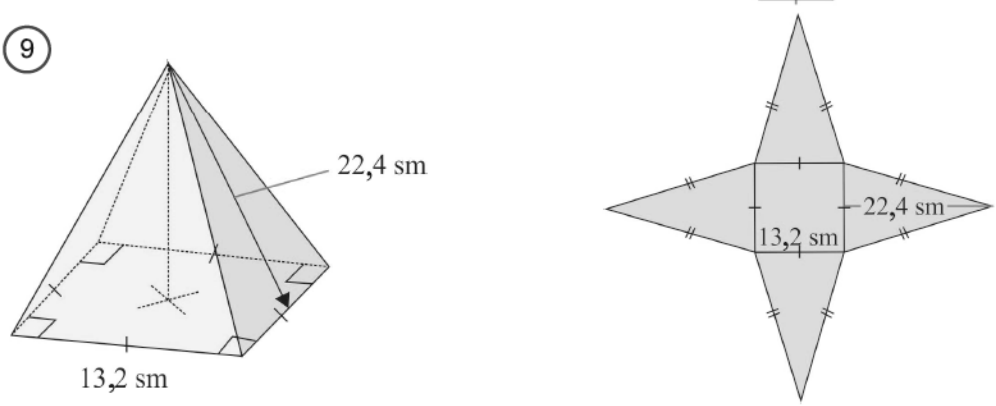
2.30. 7- rasmdagi ma'lumotlardan foydalanib, ko'pyoqlarning to'la sirtini toping.



2.31. 8- rasmda tasvirlangan to'g'ri burchakli parallelepiped yoyilmasiga ko'ra uning to'la sirti formulasini toping.

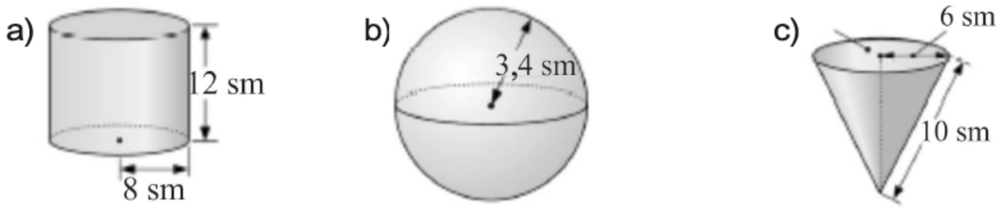
2.32. 9- rasmda tasvirlangan to'rtburchakli muntazam piramida yoyilmasiga ko'ra uning to'la sirti formulasini toping.





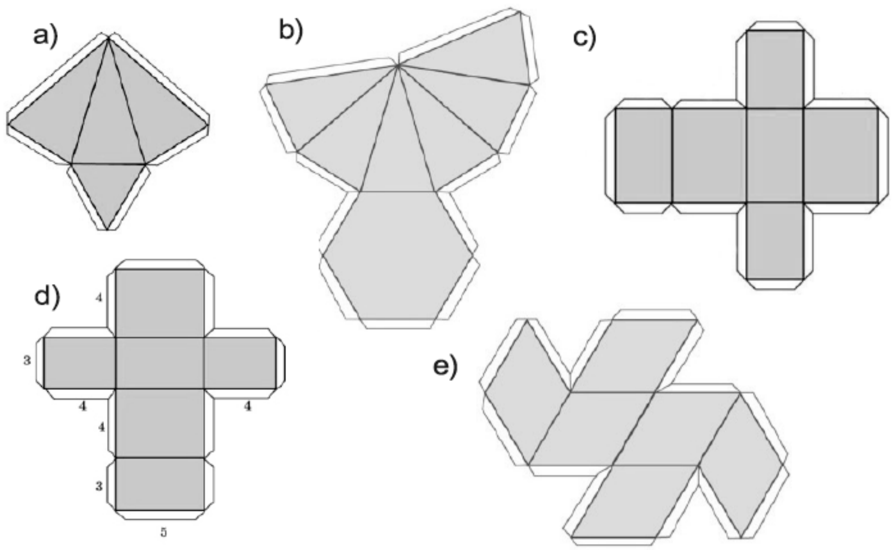
2.33. 10- rasmda tasvirlangan aylanma jismlarning to‘la sirtini toping.

10



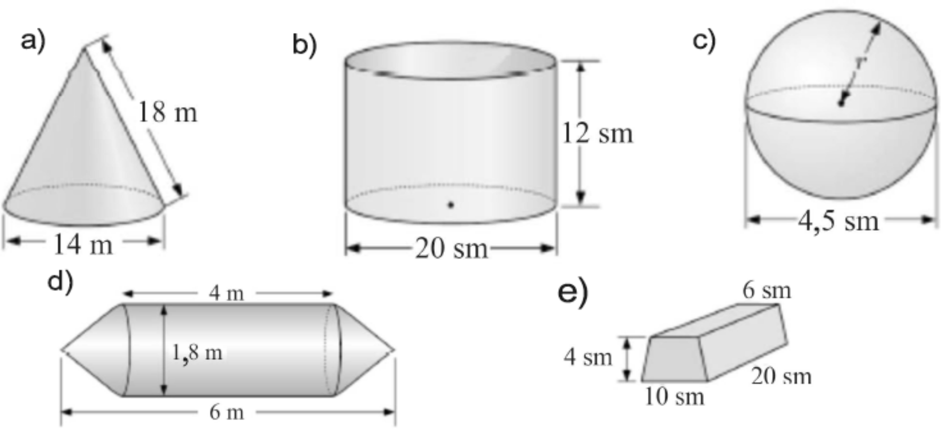
2.34. Fazoviy jismlarni yaxshiroq tasavvur qilish uchun ularning modelidan foydalangan ma’qul. Fazoviy jismlarning modelini ularning yoyilmasidan foydalanib yasash mumkin (11- rasm). Ko‘rib turganingizdek, fazoviy jismlarning yoyilmasi yassi geometrik shakllardan iborat. Quyidagi yoyilmalardan foydalanib, to‘g‘ri burchakli parallelepiped, kub va piramidalar modelini yasang.

11

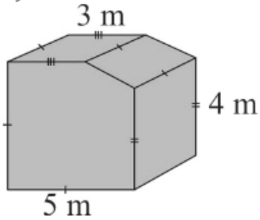


2.35. 12- rasmda tasvirlangan jismlarning to‘la sirtini toping.

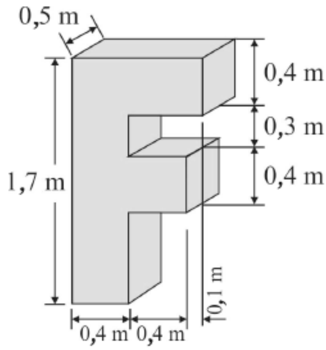
12



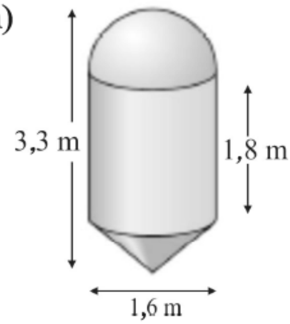
f)



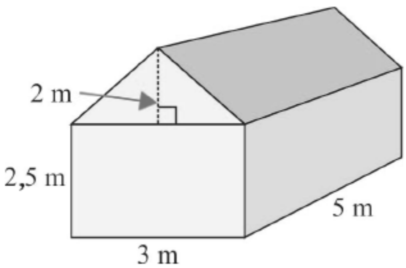
g)



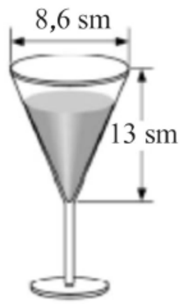
h)



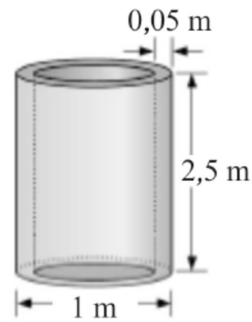
i)



j)



k)



Geometrik joziba

O‘tmishda qurilgan qadimiy arxitektura yodgorliklarini qurishda ota-bobolarimiz katta geometrik bilim va salohiyatga ega bo‘lishgan. Buni birgina Samarqand shahridagi Registon maydonida qurilgan tarixiy yodgorliklardan ham bilib olish mumkin (1- rasm).

Xiva shahridagi Ichanqal’a rasmida (2- rasm) qanday geometrik shakllarni ko‘rayapsiz?

Toj-Mahal – dunyoning yetti mo'jizalaridan biri (3-rasm). Hindistonning Agra shahrida Boburiy Shoh-Jahon tomonidan qurilgan qadimiy yodgorlik. Uni qurgan ustalar geometriyadan mukammal bilimga ega bo'lganliklari kundek ravshan.

Sidney shahri opera teatri (4- rasm) – Avstraliyada qurilgan zamonaviy me'morchilik namunasi. O'zining g'aroyib geometrik ko'rinishi bilan diqqatga sazovordir.

Go'zal geometrik tasavvur egasi, iroqlik mashhur arxitektor ayol Zaha Hadidning loyihasi asosida Xitoy poytaxti Pekin shahrida qad rostlagan "Galaxy Soho" dam olish kompleksining ajabtovur ko'rinishidan zavq olmaslikning iloji yo'q (5- rasm).

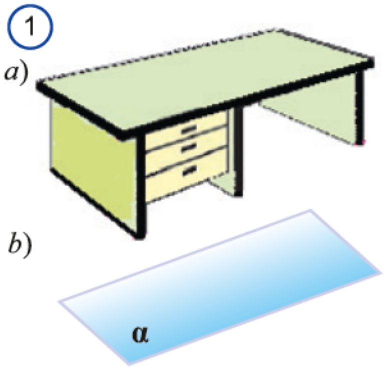
Mamlakatimiz poytaxtida qad ko'tarayotgan "Tashkent city" majmuasining loyihasini ko'rib hayratlanmaslikning iloji yo'q. Bunday g'aroyib go'zalliklarni yaratishda muhandis quruvchilarga qanchalik geometrik bilimlar kerak bo'lganini tasavvur qilish mumkin (6 - rasm).

III BO‘LIM

FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

7 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLAR

1



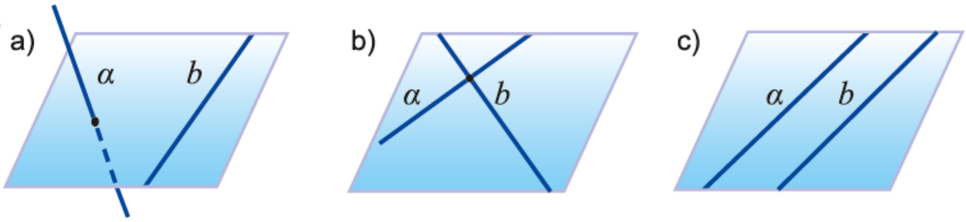
Fazodagi asosiy geometrik shakllar: nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislikdir. Tekislikni stol usti kabi tekis sirt deb tasavvur qilamiz (1.a- rasm). Tekislik ham to‘g‘ri chiziq kabi cheksizdir. Rasmda tekislikning faqat bir qisminigina (odatda parallelogramm shaklida) tasvirlaymiz (1.a- rasm). Lekin uni hamma tomonga cheksiz davom etgan deb tasavvur qilamiz va chizmada parallelogramm shaklida tasvirlaymiz (1.b- rasm). Tekisliklarni α, β, γ,... grek harflari bilan belgilaymiz.

Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotishi yoki yotmasligi mumkin (2- rasm). Fazoda bir tekislikda yotmaydigan ikki to‘g‘ri chiziqqa *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi (2.a- rasm).

Bitta tekislikda yotgan va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar *kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (2.b - rasm).

Bitta tekislikda yotgan va o‘zaro kesishmaydigan to‘g‘ri chiziqlar esa *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (2.c - rasm).

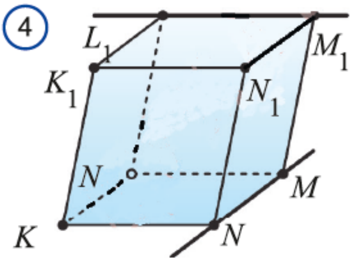
2



Ayqash to‘g‘ri chiziqlarga biri ko‘prikdan, ikkinchisi ko‘prik ostidan o‘tuvchi yo‘llarni timsol sifatida keltirish mumkin (3- rasm). Shuningdek, 4- rasmdagi parallelepipedning MN va L_1M_1 qirralari yotgan to‘g‘ri chiziqlar ham ayqash bo‘ladi.

3

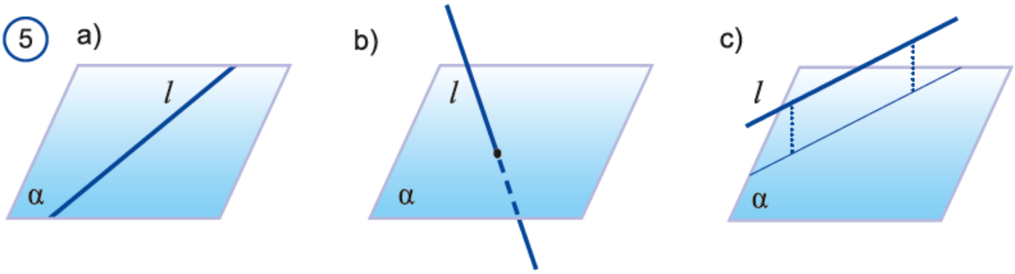
4



Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik o‘zaro qanday joylashishi mumkin?

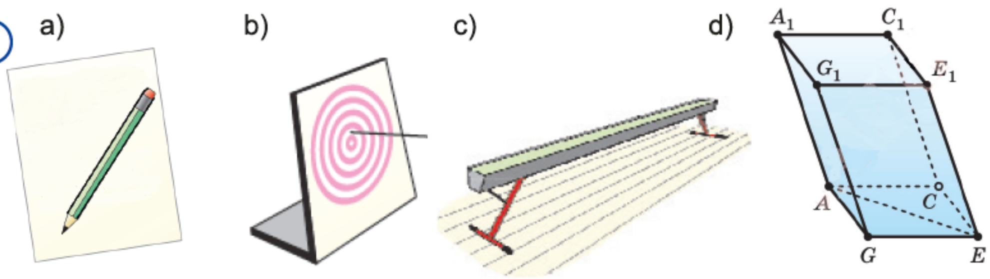
To‘g‘ri chiziq tekislikda yotishi (5.a- rasm), uni kesib o‘tishi (5.b- rasm) yoki kesib o‘tmasligi, ya’ni umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi (5.c- rasm) mumkin. Oxirgi holatda *to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel* deb ataladi.

5

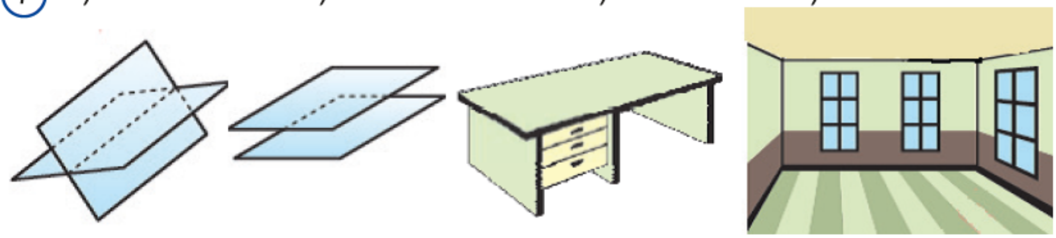


Stol ustida yotgan qalam – tekislikda yotgan to‘g‘ri chiziq haqida (6.a - rasm), nishonga qadalgan o‘q (6.b - rasm) – tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq haqida hamda polda turgan gimnastik yog‘och – tekislikka parallel to‘g‘ri chiziq haqida (6.c - rasm) tasavvur beradi.

6



7 a) b) c) d)



Shuningdek, 6.d- rasmda tasvirlangan parallelepipedning $AGEC$ asosining diagonali AE yotgan to‘g‘ri chiziq asos tekisligida yotadi, AGA_1G_1 yoq yotgan tekislikni kesib o‘tadi hamda $A_1G_1E_1C_1$ yuqori asos tekisligiga parallel bo‘ladi.

Endi fazoda tekisliklarning o‘zaro joylashishiga oydinlik kiritaylik.

Fazoda tekisliklar biror to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishishi (7.a- rasm) yoki umumiy nuqtaga ega bo‘lmasligi mumkin (7.b- rasm). Shundan kelib chiqib, bu tekisliklar, mos ravishda, *kesishuvchi* yoki *parallel* tekisliklar deb ataladi.

7.c- rasmda tasvirlangan stolning ustki sirti va yon yog‘i kesishuvchi tekisliklar haqida, xonaning poli va shifti esa (7.d- rasm) parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Shuningdek, 4- rasmda tasvirlangan parallelepipedning qarama-qarshi bo‘lmagan yon yoqlari – kesishuvchi tekisliklar haqida, pastki va ustki asoslari hamda qarama-qarshi yoqlari esa parallel tekisliklar haqida tasavvur beradi.

Parallellik belgisi – "// " nafaqat parallel to‘g‘ri chiziqlarni, balki tekislikka parallel to‘g‘ri chiqizni va parallel tekisliklarni belgilashda ham ishlatiladi:

$a \parallel b$, $a \parallel \alpha$ va $\alpha \parallel \beta$.

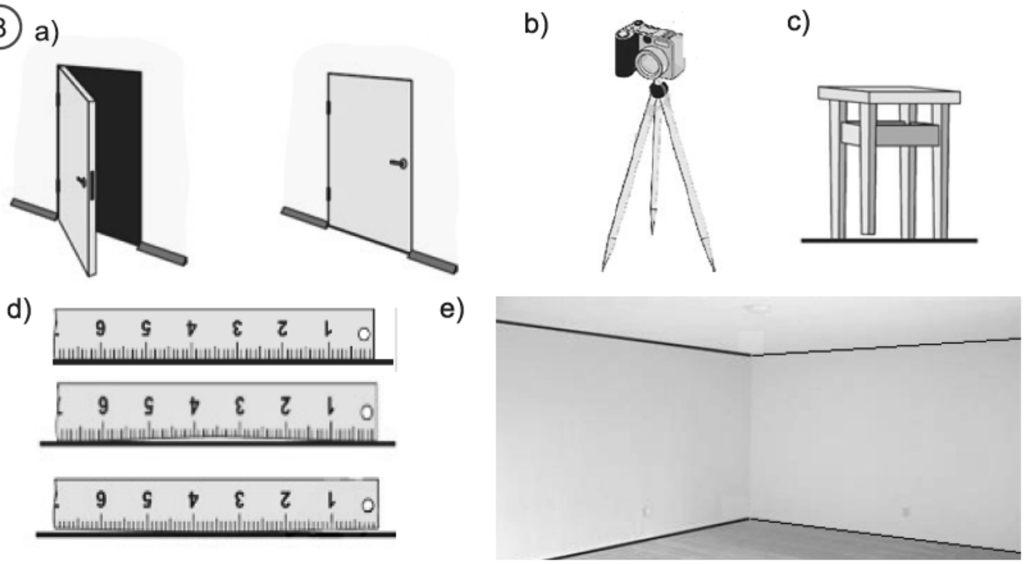
Planimetriyadagi kabi, stereometriyada ham ba’zi geometrik shakllarning xossalari isbotsiz qabul qilinadi. Fazoda tekisliklarning quyidagi xossalarini isbotsiz, S guruh aksiomalari sifatida qabul qilamiz:

S_1 *Agar uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotmasa, u holda ular orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.*

S_2 *Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.*

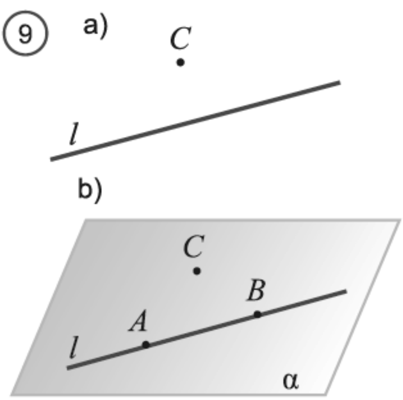
S_3 *Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda bu tekisliklar shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi.*

Faollashtiruvchi mashq. Quyidagi 8- rasmlardagi holatlarni tushuntirishda qaysi aksiomalarga tayanish mumkin?

8


Planimetriyada kiritilgan aksiomalar bilan birgalikda bu uchta aksiomalar stereometriyaning asosini tashkil qiladi. Shuni eslatish lozimki, planimetriyada biz qarayotgan barcha shakllar joylashadigan bitta tekislikka ega edik. Stereometriyada esa bunday tekisliklar cheksiz ko‘p bo‘lib, ularning barchasida planemetriya aksiomalari va planimetriyada isbotlangan barcha xossalar o‘rinli bo‘ladi, deb qaraladi. Shuningdek, stereometriya kursida planimetriya aksiomalariga stereometriya nuqtai nazaridan qarashga to‘g‘ri keladi.

2.1- teorema. To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

9


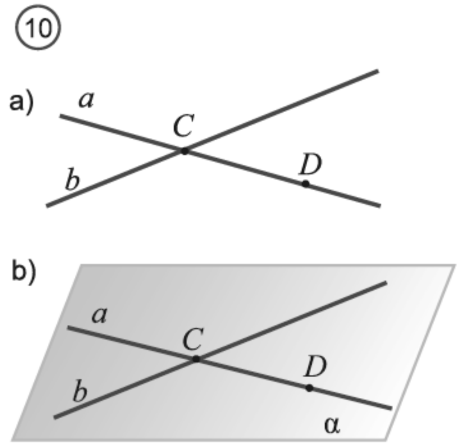
Isbot. l – berilgan to‘g‘ri chiziq, C esa unda yotmagan nuqta bo‘lsin (9.a - rasm).

Avval teorema xulosa qismida aytilgan tekislikning mavjudligini ko‘rsatamiz. l to‘g‘ri chiziqda A va B nuqtalarni olamiz. Shartga ko‘ra, A, B va C nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Unda S_1 aksiomaga ko‘ra, A, B va C nuqtalar orqali α tekislikni o‘tkazish mumkin (9.b- rasm). S_2 aksiomaga ko‘ra esa, α tekislik l to‘g‘ri chiziqdan o‘tadi.

Demak, α – izlangan tekislik ekan.

Endi bu tekislikning yagonaligini ko‘rsatamiz.

Teskarisini faraz qilamiz: l – berilgan to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan C nuqta dan yana bitta, β tekislik o‘tkazish mumkin bo‘lsin. Unda β tekislik ham A, B va C nuqtalardan o‘tadi. Lekin, S_2 aksiomaga ko‘ra uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin. Ziddiyat. Demak, farazimiz noto‘g‘ri. To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin. ❑



2.2- teorema. Berilgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali yagona tekislik o‘tkazish mumkin.

Isbot. Berilgan a va b to‘g‘ri chiziqlar C nuqtada kesishsin (10.a- rasm).

a to‘g‘ri chiziqda C nuqtadan farqli yana bitta D nuqtani olamiz. U holda, isbotlangan 1- teoremaga ko‘ra, b to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan D nuqta orqali yagona α tekislik o‘tadi (10.b- rasm). Bu tekislik a to‘g‘ri chiziqning C va D nuqtalaridan o‘tadi. Unda S_2 aksiomaga ko‘ra, α tekislik a to‘g‘ri chiziqdan ham o‘tadi.

Demak, α tekislik berlgan kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq orqali o‘tadi.

Bu tekislikning yagonaligini mustaqil asoslang. ❑

? *Mavzuga doir savollar*

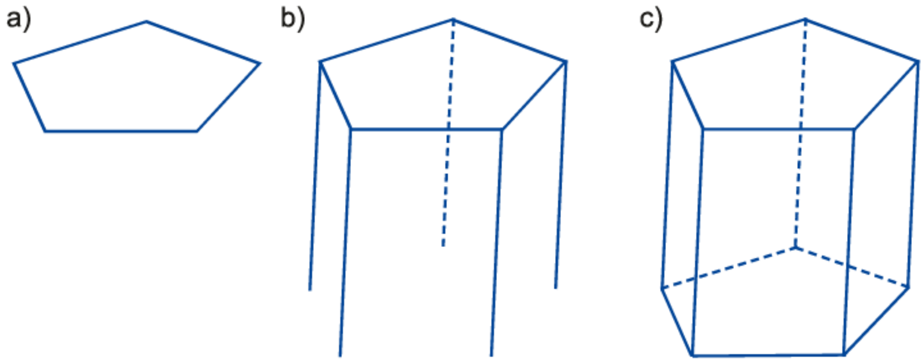
1. *Fazodagi asosiy geometrik shakllarni ayting.*
2. *S guruh aksiomalarini ayting.*
3. *Tekislikda yotuvchi qanday to‘g‘ri chiziqlar: a) kesishuvchi; b) parallel deb ataladi?*
4. *Qanday to‘g‘ri chiziqlar ayqash deb ataladi? Misollar keltiring.*
5. *Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq qanday joylashishi mumkin?*
6. *Qanday to‘g‘ri chiziqlar: a) tekislikda yotuvchi; b) tekislikka parallel deb ataladi?*
7. *Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik qanday joylashishi mumkin?*
8. *Fazoda qanday tekisliklar: a) kesishuvchi; b) parallel deb ataladi?*
9. *Fazoda ikki tekislik qanday joylashishi mumkin?*
10. *Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning xossalarini ifodalovchi aksiomalarni ayting.*
11. *Uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik xossasini ayting.*

8 KO‘PYOQLAR VA ULARNING SODDA KESIMLARINI YASASH

Geometrik masalalarni yechishda masala shartiga mos chizmani chizish juda muhim hisoblanadi. Ba’zida to‘g‘ri chizilgan chizma – masalaning "yarim yechimi" bilan tenglashtiriladi. Stereometriyada masalaning chizmasini to‘g‘ri chizish nihoyatda muhim, o‘ta mas’uliyatli va ba’zida esa murakkab ish hisoblanadi. Chunki stereometrik shakllar uch o‘lchamli bo‘lib, ularni tekislikda, daftar sahifasida tasvirlash kerak bo‘ladi. Noto‘g‘ri chizilgan chizma noto‘g‘ri yechimga yoki boshi berk ko‘chaga boshlaydi.

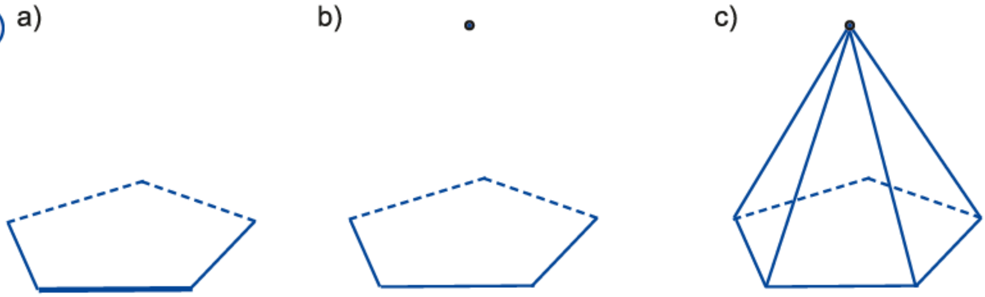
Prizmani tasvirlash quyidagi tartibda olib boriladi (11 - rasm). Oldin ko‘pburchak shaklidagi asoslaridan biri chiziladi. So‘ngra uning har bir uchidan o‘zaro parallel va teng kesmalar, ya’ni prizmaning yasovchilari chiziladi. Kesmaning oxirlari mos ravishda tutashtirib chiqiladi. Bunda ikkinchi asos paydo bo‘ladi. Chizmada prizmaning ko‘rinmaydigan qirralari shtrix-punktir chiziqlar bilan chiziladi.

11



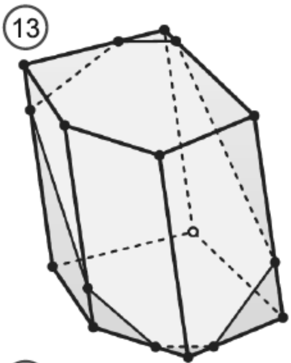
Piramidani tasvirlash ham shunga o‘xshash tartibda olib boriladi (12 - rasm). Oldin ko‘pburchak shaklidagi asosi chiziladi. So‘ngra piramida uchi belgilanib, bu nuqta asosining har bir uchi bilan tutashtirib chiqiladi. Chizmada piramidaning ko‘rinmaydigan qirralari punktir chiziqlar bilan chiziladi.

12

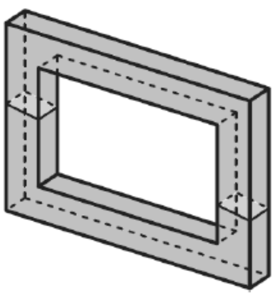


Fazoviy geometrik shakllarning o‘zaro joylashuvini to‘g‘ri tasavvur qilgandagina, uning chizmasini to‘g‘ri chizish mumkin bo‘ladi. Fazoviy shakllarning biri ko‘pyoq, ikkinchisi esa tekislik bo‘lganda, turli kesimlarni tasvirlashga to‘g‘ri keladi. Quyida ko‘pyoqlarning kesimlarini yasash bilan shug‘ullanamiz.

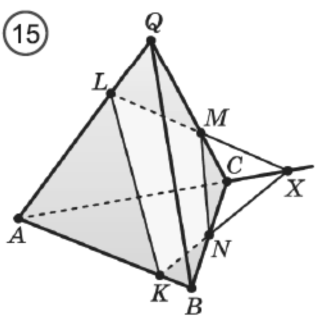
13



14



15



Aytaylik, ko‘pyoqni biror tekislik kesib o‘tgan bo‘lsin. *Ko‘pyoqning kesimi* deb ko‘pyoqning kesuvchi tekislikka tegishli nuqtalaridan iborat geometrik shaklga aytiladi.

Kesuvchi tekislik ko‘pyoq sirtini kesmalar bo‘yicha kesib o‘tadi, ko‘pyoqning kesimi esa bitta yoki bir nechta ko‘pburchaklardan iborat bo‘ladi. 13-rasmda beshburchakli prizmaning yettiburchakdan iborat kesimi tasvirlangan. 14- rasmdagi romni tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimi – ikkita to‘rtburchakdan iborat.

Ko‘pyoqning kesimini tasvirlash uchun uning yoqlari kesuvchi tekislik bilan umumiy nuqtalarini aniqlash kifoya.

1- masala. *QABC* uchburchakli piramidaning *AB, AQ* va *CQ* qirralarini, mos ravishda, *K, L* va *M* nuqtalarda kesib o‘tuvchi α tekislik bilan kesganda hosil bo‘lgan kesimni yasaymiz (15 -rasm).

Yasash. Kesuvchi α tekislik piramidaning *AQB* yog‘i bilan ikkita: *K* va *L* umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni *KL* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

Xuddi shunga o‘xshash, α tekislik piramidaning *AQC* yog‘i bilan ikkita: *M* va *L* umumiy nuqtalarga ega bo‘lgani uchun, bu yoqni *ML* kesma bo‘ylab kesib o‘tadi.

Kesuvchi α tekislik piramidaning *ABC* yog‘i bilan bitta *K* umumiy nuqtaga ega. Bu tekislikning *BC* qirrani kesib o‘tadigan nuqtasini topamiz.

Bu tekislikka tegishli *LM* va *AC* to‘g‘ri chiziqlarni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasi *X* ni topamiz. *X* nuqta *AQC* va *ABC* tekisliklarda ham yotadi.

Kesuvchi α tekislik piramidaning *ABC* yog‘i bilan ikkita: *K* va *X* umumiy nuqtalarga ega. Unda kesuvchi tekislik bu yoqni *KX* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

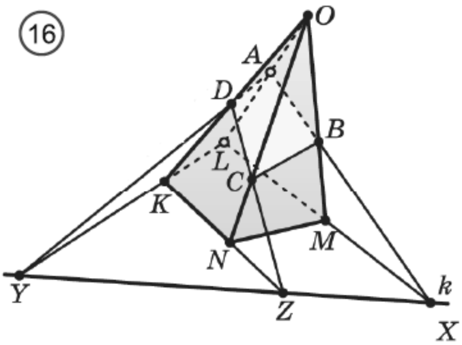
KX to‘g‘ri chiziq va *BC* yoqning kesishish nuqtasi *N* ham α tekislikda yotadi.

Demak, α tekislik *ABC* yoqni *KN* kesma bo‘yicha, *BQC* yoqni esa *MN* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi.

KLMN to‘rtburchak α tekislikning piramida bilan kesimidan iborat bo‘ladi. *KL* va *KN* kesmalar α tekislikning *ABQ* va *ABC* yoqlardagi *izlari* deb ataladi.

2- masala. *OKLMN* piramidaning *OL* qirrasining *A* nuqtasi va piramidaning *KLMN* asosi tekisligida yotuvchi *k* to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi *b* tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasaymiz. (16- rasm).

16

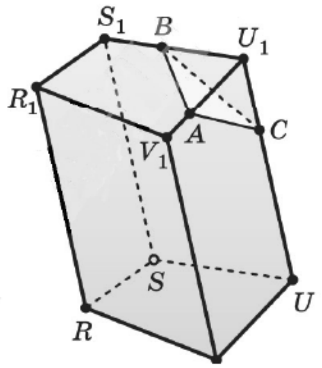


***Yasash*.** *LM* va *k* to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz. Bu nuqta *k* to‘g‘ri chiziqda yotganligi uchun *b* tekislikka tegishli. Shuningdek, bu nuqta *LM* to‘gri chiziqda yotgani uchun *LOM* yoqqa ham tegishli. *A* nuqta bu ikki tekislikning har ikkisiga ham tegishli. Shuning uchun, *b* tekislik *LOM* tekislikni *AX* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha, *LOM* yoqni esa *AB* kesma bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu yerda *B* nuqta *AX* va *OM* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

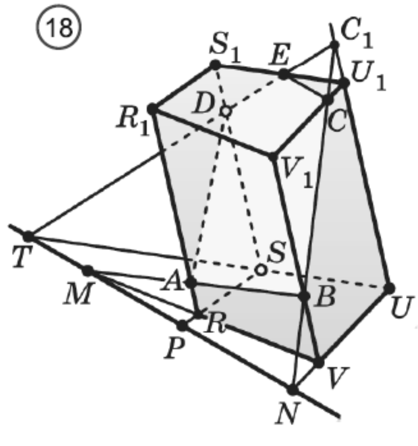
Xuddi shu kabi, β tekislikning *OLK* yoqni kesib o‘tadigan *Y* va *D* nuqtalarni va *AD* kesmani aniqlaymiz. Songra *Z* va *C* nuqtalar va *DC* va *BC* kesmalarni aniqlaymiz. Natijada, hosil bo‘lgan *ABCD* to‘rtburchak izlanayotgan kesimdan iborat bo‘ladi.

3- masala. *A, B* va *C* to‘rtburchakli prizmaning turli yoqlaridagi nuqtalari.

17



18

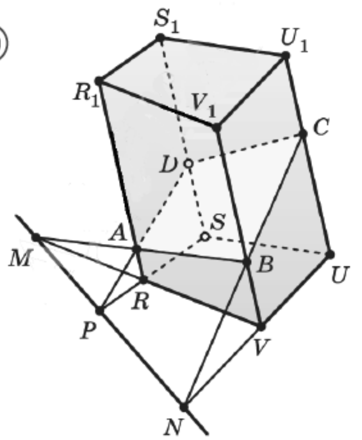


Prizmaning ABC tekislik bilan kesimini topamiz (17- rasm).

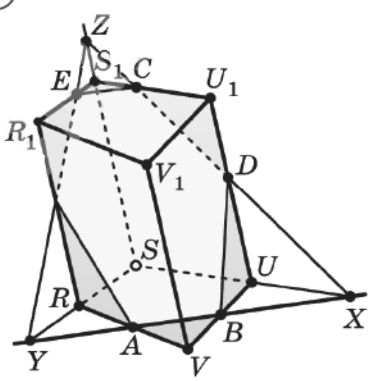
Izlanayotgan kesim A, B va C nuqtalarning to‘rtburchakli prizmaning qaysi yoqlarida va qanday yotganligiga bog‘liq bo‘ladi. 17- rasmda A, B va C nuqtalarning bitta uchdan chiquvchi yoqlarda yotgan eng sodda holat tasvirlangan.

18- rasmda tasvirlangan holatda kesimni yasash murakkabroq ish sanaladi. Qolgan holatlardagi kesimlar quyidagi 19- va 20- rasmlarda keltirilgan. Ko‘rib turganingizdek, kesim uchburchak, to‘rtburchak, beshburchak va oltiburchakdan iborat bo‘lmoqda. Bu kesimlarni yasalishini mustaqil tahlil qiling.

19



20

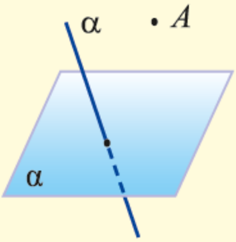
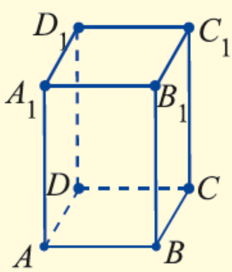
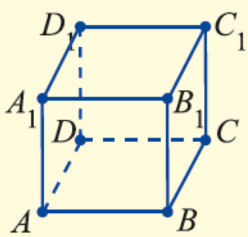
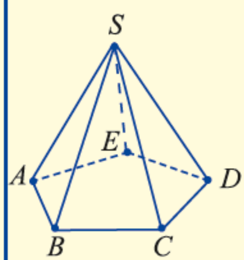


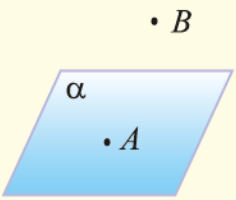
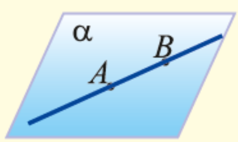
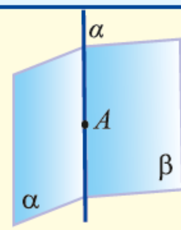
Mavzuga doir savollar

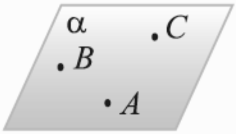
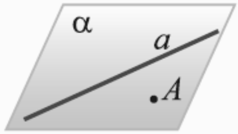
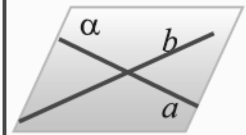
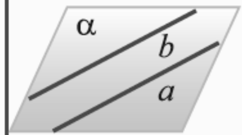
1. *Ko‘pyoqning kesimi deb nimaga aytiladi?*
2. *Ko‘pyoqning kesimi qanday shakl bo‘lishi mumkin?*
3. *Bir tekislikning ikkinchi tekislikdagi izi deb nimaga aytiladi?*
4. *To‘rtburchakli ko‘pyoqlining kesimi nimalar bo‘lishi mumkin?*

9 AMALIY MASHQ VA TATBIQLAR

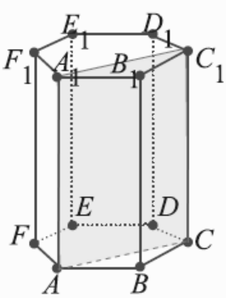
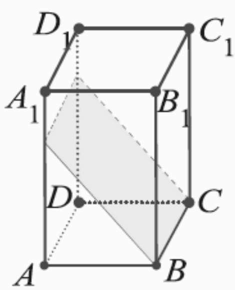
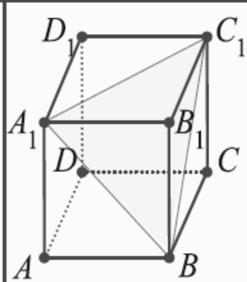
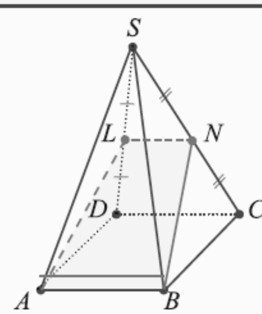
3.0. Quyidagi 3- bo‘lim bo‘yicha tayanch nazariy ma’lumotlarni qaytaring. Ular sizga o‘tilganlarni umumlashtirish va amaliy mashqlarni bajarishga yordam beradi.

Asosiy shakllar	**Ko‘pyoqlar**		
	To‘g‘ri burchakli parallelepiped	**Kub**	**Piramida**
			
A nuqta, α to‘g‘ri chiziq, a tekislik	Asoslari – to‘g‘ri to‘rtburchaklar, yoqlari – to‘g‘ri to‘rtburchaklar	Asoslari – kvadratlar, yoqlari – kvadratlar	Asosi – ko‘pburchak, yoqlari – uchburchak

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar		
		
Tekislikda unga tegishli bo‘lgan va tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud.	Agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi bitta tekislikda yotsa, u holda uning barcha nuqtalari shu tekislikda yotadi.	Agar ikki tekislik umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, u holda ular shu nuqtadan o‘tuvchi umumiy to‘g‘ri chiziqqa ham ega bo‘ladi.

			
Bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqta orqali	To‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqta orqali	Kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq orqali	Parallel ikki to‘g‘ri chiziq orqali
... bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin			

a) jadvalda ba’zi ko‘pyoqlarning sodda kesimlari berilgan. Ularga sinchiklab qarab, bu kesimlar qanday hosil qilinishini izohlang.

Ko‘pyoqlarning sodda kesimlari			
Ko‘pburchakli prizma	**To‘g‘ri burchakli parallelepiped**	**Kub**	**Piramida**
			
ACC_1 – A, C, C_1 nuqtalardan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik. ACC_1CA_1 – kesim.	CBK – K nuqta va CB to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik, $CBKM$ – kesim.	A_1BC_1 – BC_1 va BA_1 to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik, ACC_1CA_1 – kesim.	ABN – AB va LN parallel to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi, kesuvchi tekislik, $ABNL$ – kesim.

b) jadvalning chap ustunida tekislikdagi, o‘ng ustunida esa fazodagi geometrik shakllarning bir-biriga o‘xshash ba’zi xossalari keltirilgan. Ularni ko‘z oldingizga keltiring va qanday o‘xshashlikka ega ekanligini aniqlang. Yana tekislik va fazodagi qanday o‘xshashliklarni keltirish mumkin?

Tekislikda	Fazoda
Agar to‘g‘ri chiziqlar umumiy nuqtaga ega bo‘lsa, ular shu nuqtada kesishadi.	Agar tekisliklar umumiy to‘g‘ri chiziqqa ega bo‘lsa, ular shu to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi.
Tekislikning biror nuqtasidan cheksiz ko‘p to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.	Fazoning biror to‘g‘ri chizig‘idan cheksiz ko‘p tekislik o‘tkazish mumkin.
To‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.	Tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq orqali berilgan tekislikka parallel bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.
Bitta to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro paralleldir.	Bitta tekislikka parallel tekisliklar o‘zaro paralleldir.

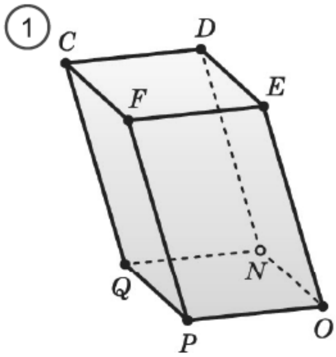
3.1. Fazoda a) ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin?

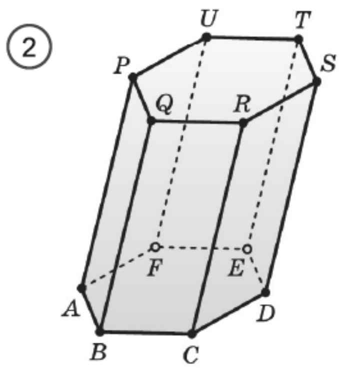
3.2. Fazoda a) ikki to‘g‘ri chiziq; b) to‘g‘ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkinmi?

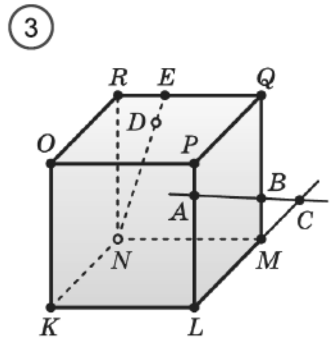
3.3. 1- rasmda *NOPQDEFC* parallelepiped tasvirlangan. a) *CD* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; b) *FP* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; c) *CD* to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlarni; d) *FP* to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlarni; e) *CD* to‘g‘ri chiziq bilan ayqash to‘g‘ri chiziqlarni; f) *FP* to‘g‘ri chiziq bilan ayqash to‘g‘ri chiziqlarni ayting.

3.4. 2- rasmda asosi oltiburchak bo‘lgan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped tasvirlangan. a) *ABC* tekislik bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; b) *UTF* tekislik bilan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; c) *PTR* tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlarni; d) *CDR* tekislikka tegishli to‘g‘ri chiziqlarni; e) *FEC* tekislikka parallel to‘g‘ri chiziqlarni; f) *AQB* tekislikka papallel to‘g‘ri chiziqlarni ayting.

3.5. 1- rasmdagi *NOPQDEFC* parallelepipedda: a) *CQ* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi tekisliklarni; b) *OP* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi tekisliklarni; c) *NO* to‘g‘ri chiziq yotgan tekisliklarni; d) *DN* to‘g‘ri chiziq tegishli bo‘lgan tekisliklarni; e) *CF* to‘g‘ri chiziqqa parallel tekisliklarni; f) *EO* to‘g‘ri chiziqqa parallel tekisliklarni ayting.







3.6. 2- rasmda asosi oltiburchak bo‘lgan *ABCDEFPQRSTU* parallelepiped tasvirlangan. a) *UQR* tekislik bilan kesishuvchi tekisliklarni; b) *FT* to‘g‘ri chiziq bilan kesishuvchi tekisliklarni; c) *ACE* tekislikka parallel tekisliklarni; d) *ETS* tekislikka parallel tekisliklarni ayting.

3.7. 3- rasmdan foydalanib, a) *LMQ* va *NME* tekisliklarda yotuvchi nuqtalarni; b) *NR* to‘g‘ri chiziq yotgan tekisliklarni; c) *BC* to‘g‘ri chiziqning *KLN* tekislik bilan kesishish nuqtalarini; d) *PL* va *ND* to‘g‘ri chiziqlarning *OPR* tekislik bilan kesishish nuqtalarini; e) *KON* va *KLM* tekisliklar kesishadigan to‘g‘ri chiziqni; f) *PDQ* va *MNK* tekisliklar kesishadigan to‘g‘ri chiziqni; g) *AB* va *LM* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini; h) *BQ* va *MC* to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini ayting.

3.8. Bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi uchta nuqtadan tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang. Bunday tekisliklar soni nechta?

3.9. *A, B, C* va *D* nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlang.

3.10. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasidan bu to‘g‘ri chiziqlar bilan bir tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinmi? Javobingizni asoslang.

3.11. *A, B, C* nuqtalar ikkita turli tekislikning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

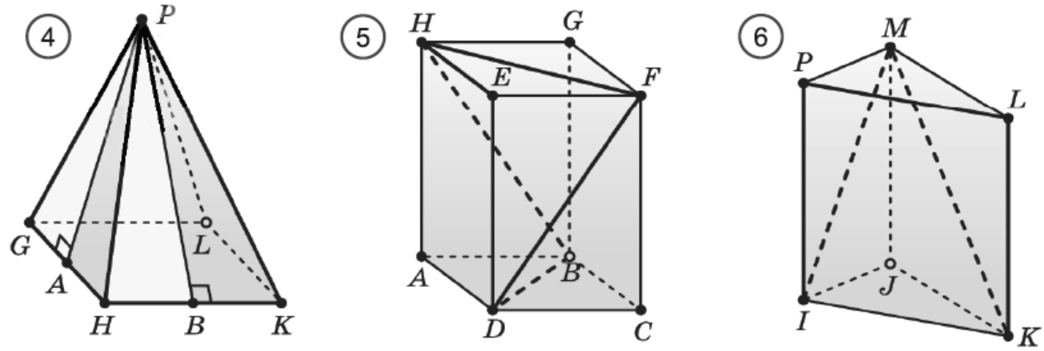
3.12. To‘g‘ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o‘tishini isbotlang.

3.13. *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda yotmaydi. *a* va *b* to‘g‘ri chiziqlarga parallel *c* to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinmi?

3.14. Agar tekislik ikki parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tsa, u ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang.

3.15. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqlardan istalgan biri orqali ikkinchisiga parallel tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

3.16. *ABC* uchburchak berilgan. *AB* to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik bu uchburchakning *AC* tomonini A_1 nuqtada, *BC* tomonni B_1 nuqtada kesib o‘tadi. A_1B_1 kesmaning uzunligini toping. Bunda: a) $AB = 15$ sm , $AA_1 : AC = 2 : 3$; b) $AB = 8$ sm, $AA_1 : AC = 5:3$; c) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4:5$; d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.



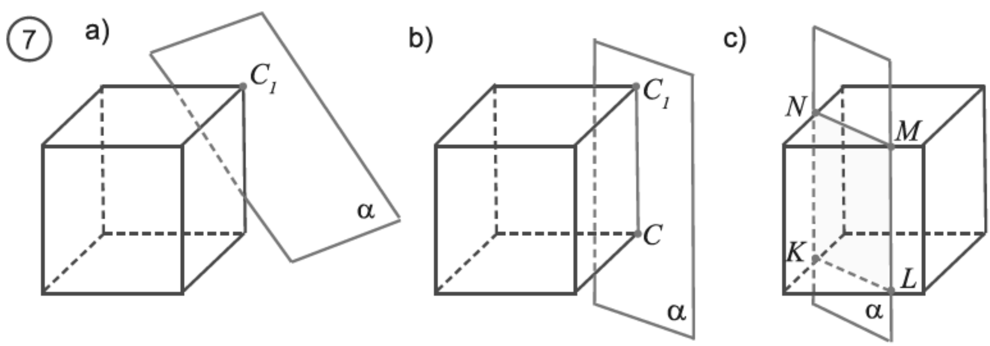
3.17. 4-rasmda to‘rtburchakli muntazam piramida berilgan. *PA* va *PB* – piramida *PGH* va *PHK* yoqlarining balandliklari bo‘lsa, $\triangle PGA = \triangle PHB$ ekanligini isbotlang.

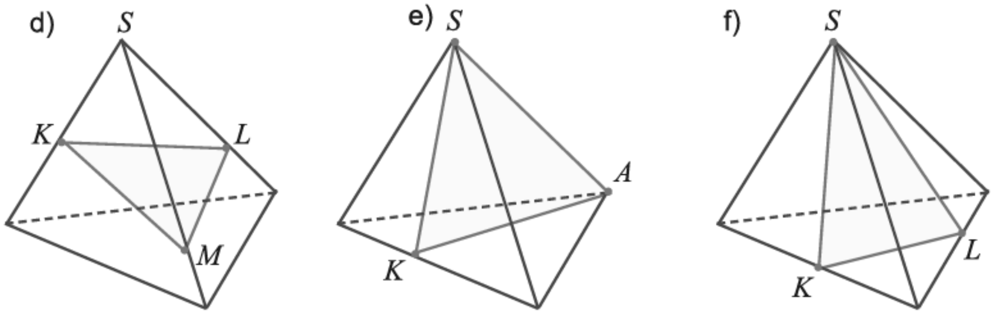
3.18. *ABCDHGFE* to‘g‘ri burchakli parallelepipedning (5- rasm) yon qirrasi 8 sm ga, asosi tomoni 6 sm ga teng kvardratdan iborat. Fazoviy *HFDBH* siniq chiziqning uzunligini toping.

3.19. *IJKPML* uchburchakli to‘g‘ri prizmaning (6- rasm) asosi qirrasi va yon qirrasi uzunliklari 2:3 nisbatda. Agar *IPLKMI* fazoviy siniq chiziqning uzunligi $16+4\sqrt{13}$ ga teng bo‘lsa, prizma yon sirtining yuzini toping.

3.20. Asosi kvadrat bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepipedning yon sirti 12 sm^2 ga teng. Asosining diagonali $\sqrt{2}$ bo‘lsa, yon yog‘ining diagonalini toping.

3.21. 7- rasmda keltirilgan holatlarda fazoviy shakllarning qanday kesimi tasvirlanganligini izohlang.





3.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning AD va CD qirralarida M va N nuqtalar berilgan. Kubni MNB_1 tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang.

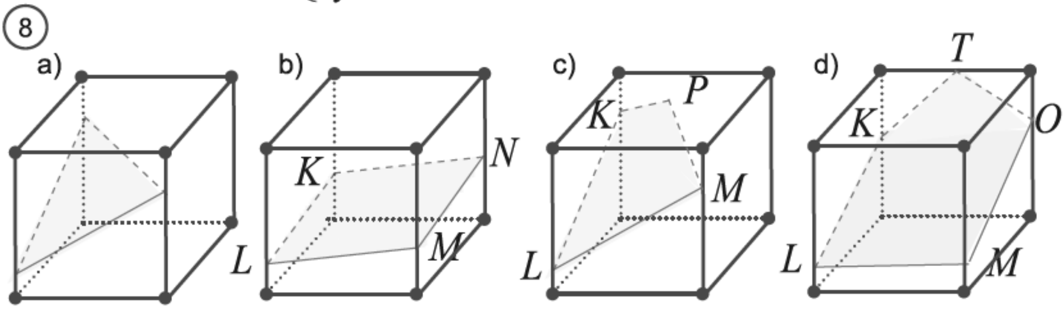
3.23. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubni chizing va AB, BC va BB_1 qirralari o‘rtalari bo‘lgan M, N va L nuqtalarni belgilang. a) kubni MNL tekislik bilan kesganda hosil bo‘ladigan kesimni yasang; b) MNL uchburchakning muntazam ekanligini isbotlang; c) kubning qirrasi 1 sm bo‘lsa, MNL uchburchak yuzini toping.

3.24. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning qirralari $AB = 6$ sm, $AD = 6$ sm va $AA_1 = 8$ sm. Parallelepipedning BC_1D tekislik bilan kesimi teng yonli uchburchak ekanligini isbotlang va bu uchburchak balandligini toping.

3.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ prizmani chizing . Prizmaning AD, AA_1 va DD_1 qirralari o‘rtalari bo‘lgan M, N va L nuqtalardan o‘tuvchi tekislik bilan kesimini yasang.

3.26. Kubni tekislik bilan kesganda kesimda 8-rasmda tasvirlangan qaysi holatlar bo‘lishi mumkin? Qaysilari bo‘lishi mumkin emas?

8

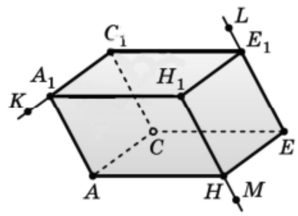


3.27. 9- rasmda berilgan ma’lumotlar asosida a) K, L va M; b) A, B va C; c) A, B va C nuqtalardan o‘tuvchi fazoviy shakllarning tegishli kesimlarini yasang.

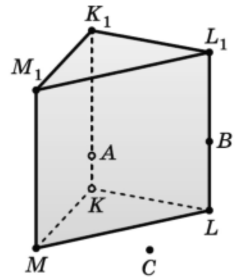
3.28. $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ prizmaning MM_1, M_1P_1 va M_1T_1 qirralarida yotgan A, B va C nuqtalar olingan (10- rasm). Prizmaning ABC tekislik bilan kesimini yasang.

3.29. Berilgan ma’lumotlar asosida 11- rasmda U, V va W, 12- rasmda A va B nuqtalardan o‘tuvchi fazoviy shakllarning tegishli kesimlarini yasang.

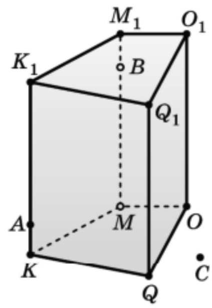
9 a)



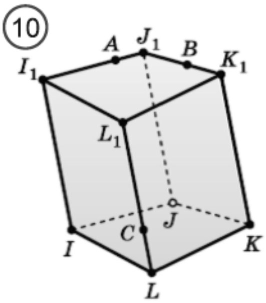
b)



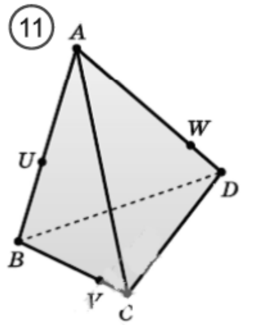
c)



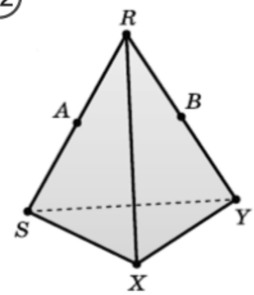
10



11



12



Tatbiqlar va amaliy kompetensiyalarni shakllantirish

1. Nima sababdan biror imorat uchun o‘ra (chuqur) qazishdan oldin belgilash ishlari tarang tortilgan ip yordamida bajariladi?

Javob: ikkita tekislik kesishmasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi.

2. Gisht quyish jarayonida qolipga loy solinib, tekis yog‘och bo‘lagi qolip ustida yuritilib, loyning ortiqcha qismi sidirib olib tashlanadi. Bunda nima sababdan g‘ishtning sirti tekis chiqadi?

3. Yasalgan stulning oyoqlari bir tekislikda yotganligini tekshirish uchun duradgorlar stulning qarama-qarshi oyoqlariga ip tortib tekshiradi. Bu usulni qo‘llab ko‘ring va u nimaga asoslanganligini ayting.

Javob: ikki kesishuvchi chiziq yagona tekislikni aniqlaydi.

4. Bir bo‘lak yog‘och taxtani arralayotib, duradgor arralash sirtining tekis bo‘lishiga qanday erishadi?

Javob: yog‘och taxtaning ikki qo‘shni yoqlariga AB va AC kesmalarni chizadi va arrani imkoni boricha shu kesmalardan o‘tadigan qilib arralashni bajaradi. Natijada, ikki kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi tekislik yagona bo‘lganligi uchun arralash sirti tekis chiqadi.

5. Fotoapparatni o‘rnatish uchun mo‘ljallangan tag moslama nima sababdan uch oyoqli qilib yasaladi?

Javob: bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tadi.

6. Duradgor ishlov berilgan taxta sirtining tekisligini qanday tekshiradi. Bu usul nimaga asoslangan?

Javob: agar to‘g‘ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikda yotsa, uning o‘zi ham butunligicha shu tekislikda yotadi.

7. Nima sababdan uch oyoqli mototsikl ikki oyoqlisiga nizbatan ancha turg‘un bo‘ladi? *Javob: bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan uchta nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tadi.*

8. Nima uchun ochiq eshiklar yelvizakda o‘z holicha harakatga keladi? Nima sababdan bu yopiq eshiklar bilan sodir bo‘lmaydi?

Javob: to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.

9. Kesimi – tomoni 7 dm bo‘lgan kvadratdan iborat, balandligi 4 m bo‘lgan 18 ta ustunlarni qurish uchun qancha g‘isht kerak bo‘ladi? (G‘ishtning o‘lchamlari: 1:1,5:3 dm. Qurish jarayonida 5 % g‘isht chiqitga ketadi). *Javob:* 8200 *dona.*

Javoblar va ko‘rsatmalar

1.23. *AB//CD.* **1.24.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm. **1.26.** 14 sm. **1.27.** $8\sqrt{3}$ sm. **1.28.** 17 sm. **1.29.** 24 sm. **1.30.** 4,8 sm. **1.31.** 18 sm.

2.6. 256 m^2. **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ sm^2. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54°. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3}$ sm^2; c) $648\sqrt{3}$ sm^2. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73}$ sm^2; c) $144+48\sqrt{73}$ sm^2. **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ m; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ m; b) 192 m^2; c) 282 m^2; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34})$ m^2; c) $8(11+\sqrt{34})$ m^2. **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2; c) $30(12+5\sqrt{3})$ sm^2. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ sm^2. **2.17.** a) 168π sm^2; b) 168π sm^2; c) $2{,}4\pi$ m^2; d) $1{,}68\pi$ m^2. **2.18.** 625π sm^2. **2.19.** 252π m^2. **2.20.** π^2 m^2. **2.21.** 4 sm; 16 sm. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** 4,83 m^2. **2.24.** 37 mm. **2.25.** 1040π sm^2. **2.26.** a) 75π sm^2; b) 288π dm^2; c) $6{,}25\pi$ m^2. **2.28.** a) 88π sm^2; b) 88π sm^2; c) 540π dm^2; d) $3{,}24\pi$ m^2;

3.18. $\sqrt{10}$ sm. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm. **3.20.** 72 dm^2. **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ m^2.

Darslikni tuzishda foydalanilgan va qo‘shimcha o‘rganishga tavsiya etilayotgan o‘quv-uslubiy adabiyotlari va elektron resurslar

1. A. A’zamov, B. Haydarov. «Matematika sayyorasi». Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov. «Matematika va matematiklar haqida». Toshkent. «O‘qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug‘ati. Toshkent. «O‘zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina. Matematika va go‘zallik, Toshkent,«O‘qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov. Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O‘qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzayev. Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashayev. Geometriya. Akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma. II qism. Toshkent, «O‘qituvchi», 2005 y.
8. А.В. Погорелов. "Геометрия 10–11", учебник, Москва. «Просвешение», 2009.
9. С. Атанасян. "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва.«Просвешение», 2002.
10. Я.И. Перельман. Қизиқарли геометрия, Тошкент. «Ўқитувчи», 1981.
11. Б. А. Кордемский. Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия–10" учебник, Киев, «Генеза», 2010.
15. А.Д. Александров. "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. «Просвещение», 2013.
16. C. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. http://www.uzedu.uz – Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
20. http://www.eduportal.uz – Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
21. http://www.school.edu.ru – Umumta’lim portali (rus tilida).
22. http://mathc.chat.ru – Matematik kaleydoskop (rus tilida).
23. http://www.problems.ru – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida);
25. http://www.pdmi.ras.ru/~olymp – Matematikadan olimpiada masalalari (rus tilida).
26. http://www.ixl.com – Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
27. http://www.mathkang.ru – "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA-10

ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI

GEOMETRIYA

I QISM

O‘rta ta’lim muassasalarining 10-sinfi va o‘rta maxsus, kasb-hunar ta’limi muassasalari o‘quvchilari uchun darslik

1- nashri

Muharrirlar:	H.Alimov M.Raemov Y. Inog‘omov
Texnik muharrir	K. Madiarov
Kompyuterda sahifalovchi	S.G‘ofurov

Nashriyot litsenziyasi AI № 277. 15.07.2015
Bosishga ruxsat etildi 14.08.2017. Bichimi 70×100$^{1}/_{16}$
«TimesNewRoman» garniturasi.
Hajmi: 9,0 bosma tab. Nashr tab. 9,0.
Adadi 428121 nusxada
Original-maket «Extremum-press» MCHJda
tayyorlandi. 100053, Toshkent sh.
Bog‘ishamol ko‘chasi, 3. Tel: 234-44-05
O‘zbekiston matbuot va axborot agentligining «O‘qituvchi»
nashriyot-matbaa ijodiy uyi bosmaxonasida chop etildi.
100206, Toshkent sh. Yunusobod tumani,
Yangishahar ko‘chasi, 1- uy.
Buyurtma № 232-17.