A.A. RAHIMQORIYEV, M.A. TO‘XTAXO‘JAYEVA

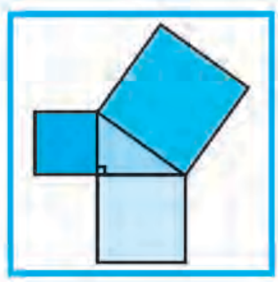
# GEOMETRIYA

# 8

UMUMIY O‘RTA TA’LIM MAKTABLARINING
8-SINFI UCHUN DARSLIK

O‘zbekiston Respublikasi Xalq ta’limi vazirligi tomonidan
nashrga tavsiya etilgan

*Uzviylashtirilgan dasturga mos qayta ishlangan 3-nashri*



TOSHKENT
«YANGIYO‘L POLIGRAF SERVIS»
2014

**UO‘K:514(075)**
**KBK 22.151**
**R 29**

**Rahimqoriyev A. A.**
**Geometriya** : umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik / A. A. Rahimqoriyev, M. A. To'xtaxo‘jayeva. - Uzviylashtirilgan dasturga mos qayta ishlangan 3-nashri. - Toshkent : Yangiyo‘l Poligraf Servis, 2014. - 160 b.

UO‘K:514(075
ISBN 978-9943-4223-8-4 KBK 22.151ya721

**Taqrizchi:**

**M.M. Shoniyozova** — Toshkent shahar Sirg‘ali tumanidagi 300-maktabning oliy toifali matematika o‘qituvchisi

Mazkur darslik Davlat ta’lim standarti va dasturining uzviylashtirilgan variantiga mos holda yozildi. Sinfda ishlash uchun tavsiya etilgan masalalar nisbatan murakkab masalalar bilan tugaydi. Ular alohida ajratib ko‘rsatilgan bo‘lib, o‘quvchilarning qobiliyatlarini oshirishga xizmat qiladi. Undan keyingi masalalar uy vazifasi uchun mo‘ljallangan.

Har bir paragraf oxirida unga mos qo‘shimcha masalalar berilgan. Shuningdek, o‘quvchilarning bilimlarini sinash uchun minimal miqdorda mavzuiy testlar ham berilgan. Testlar DTS ga mos holda tuzilgan. Kurs oxirida berilgan takrorlash mashqlaridan dars jarayonida ham foydalanish mumkin.

Qayta ishlash jarayonida ekspertlar va taqrizchilarning takliflari inobatga olindi, darslik yangi masalalar bilan to‘ldirildi.

**SHARTLI BELGILAR:**

7. — murakkab masalalar
— yodda saqlang!
— tarixiy ma’lumotlar
1- TEST — o‘zingizni sinab ko‘ring!

**Respublika maqsadli kitob jamg‘armasi mablag‘lari hisobidan ijara uchun chop etildi.**



ISBN 978-9943-4223-8-4

## 7-SINFDA O‘TILGANLARNI TAKRORLASH

### 1. Qo‘shni va vertikal burchaklarga doir masalalar

*Savol, masala va mashqlar*

**1.** 1) Qanday burchaklar qo‘shni burchaklar deyiladi?
2) Qo‘shni burchaklarning xossasini ifodalang.
3) Qanday burchaklar vertikal burchaklar deyiladi?
4) Vertikal burchaklarning xossasini ifodalang.
5) Agar ikkita burchak teng bo‘lsa, ularga qo‘shni burchaklar ham teng bo‘ladimi?
6) Burchakning bissektrisasi deb nimaga aytiladi?

**2.** Ikki to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan ikkita burchakning yig‘indisi 170° ga teng. Shu burchaklarni toping.

**3.** $AB$ va $CD$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lgan $AOD$ va $COB$ vertikal burchaklarning yig‘indisi 140° ga teng. $AOC$ burchakni toping.

**4.** $ABC$ va $ABO$ burchaklarning yig‘indisi 150° ga teng. Ular qo‘shni burchaklar bo‘la oladimi?

Y e c h i l i s h i. Agar $ABC$ va $ABO$ burchaklar qo‘shni bo‘lsa, u holda $\angle ABC + \angle ABO = 180°$ tenglik bajariladi, bu esa masala shartiga ziddir. Demak, $ABC$ va $ABO$ burchaklar qo‘shni emas.

J a v o b: yo‘q, bo‘la olmaydi.

**5.** Burchakning bissektrisasi uning tomoni bilan: 1) 50°; 2) 71°; 3) 89° li burchak tashkil qiladi. Berilgan burchakka qo‘shni burchakni toping.

**6.** 1) Qo‘shni burchaklardan biri ikkinchisidan 36° katta bo‘lsa; 2) ularning ayirmasi 50° ga teng bo‘lsa; 3) ulardan biri ikkinchisidan to‘rt marta kichik bo‘lsa; 4) ular teng bo‘lsa, shu qo‘shni burchaklarni toping.

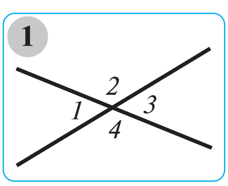
**7.** Agar (1- rasm): 1) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$; 2) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$; 3) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$ bo‘lsa, barcha burchaklarni toping.

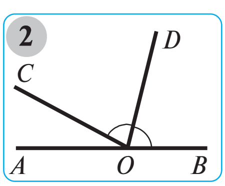
**8.** 2- rasmda $BOD$ va $COD$ burchaklar teng. Agar $\angle COB = 152°$ bo‘lsa, $AOD$ burchakni toping.

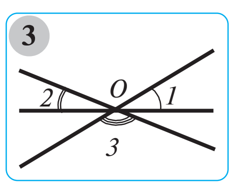
**9.** Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan uchtasining yig‘indisi 175° ga teng bo‘lishi mumkinmi?

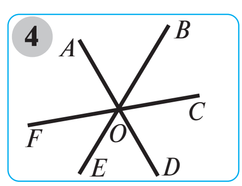
**10.** Bir nuqtada kesishuvchi uchta to‘g‘ri chiziq berilgan (3- rasm). $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ ekanini isbotlang.

**11.** 4- rasmda $\angle AOB = 50°$ va $\angle FOE = 70°$. $AOC$, $BOD$, $COE$ va $COD$ burchaklarni toping.



**12.** «Agar qo‘shni burchaklar teng bo‘lsa, ular to‘g‘ri burchak bo‘ladi», degan tasdiq to‘g‘rimi?

**13.** Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan uchtasining yig‘indisi 322° ga teng. Shu burchaklarni toping.

**14.** Burchak bissektrisasi uning tomoni bilan 68° li burchak hosil qiladi. Berilgan burchakka qo‘shni bo‘lgan burchakni toping.

**15.** Vertikal burchaklarning yig‘indisi 180° ga teng. Shu burchaklarni toping.

**16.** 47° ga teng burchakka qo‘shni burchak nimaga teng?

## 2. Uchburchakning perimetri, bissektrisasi va balandligiga doir masalalar

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**17.** 1) Uchburchakning perimetri nima?
2) Uchburchakning medianasi nima?
3) Uchburchakning balandligi nima?
4) Uchburchakning bissektrisasi nima?

**18.** Perimetri 36 ga teng bo‘lgan uchburchakning balandligi uni perimetrlari 18 va 24 ga teng bo‘lgan uchburchaklarga ajratadi. Berilgan uchburchakning balandligini toping.

**19.** Perimetri 36 ga teng bo‘lgan uchburchakning bissektrisasi uni perimetri 24 va 30 ga teng bo‘lgan uchburchaklarga ajratadi. Berilgan uchburchakning bissektrisasini toping (5- rasm).

**20.** Perimetri 28 sm ga teng bo‘lgan teng yonli uchburchakning asosi yon tomonidan 4 sm uzun. Shu uchburchakning tomonlarini toping.

**21.** Uchburchakning asosiga tushirilgan medianasi uni 18 va 24 ga teng bo‘lgan ikki uchburchakka ajratadi. Berilgan uchburchakning kichik yon tomoni 6 sm ga teng. Uning katta yon tomonini toping (6- rasm).

**22.** Uchburchakning perimetri 72 sm ga teng, tomonlarining nisbati esa 2 : 3 : 4 kabi. Shu uchburchakning tomonlarini toping.

**23.** $ABC$ uchburchakda $AB = BC$ va $BD$ mediana 6 sm ga teng. $ABD$ uchburchakning perimetri 24 sm ga teng. Berilgan uchburchakning perimetrini toping (7- rasm).

B e r i l g a n: $\triangle ABC$ da: $AB = BC$, $BD = 6$ sm – mediana, $P_{ABD} = 24$ sm.

T o p i s h  k e r a k: $P_{ABC} = ?$

Y e c h i l i s h i. 1) $P_{ABD} = AB + BD + AD$, bundan:

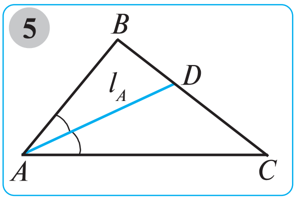
$$24 = AB + AD + 6, \quad AB + AD = 24 - 6, \quad AB + AD = 18.$$

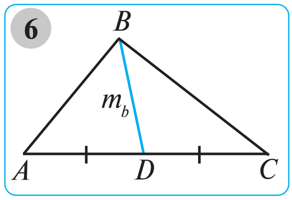
2) $AB = BC$ va $AC = 2AD$, u holda

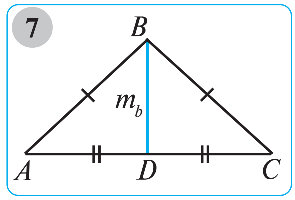
$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 2(AB + AD) = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (sm)}.$$

J a v o b: $P_{ABC} = 36$ sm.

**24.** Uchburchakning ikki tomoni 0,5 va 8,7 ga teng. Uchinchi tomoni uzunligi natural son ekanini bilgan holda shu tomonni toping.




**25.** $ABC$ uchburchakning $AB$ tomoni $x$ ($x > 13$) sm. $AC$ tomoni $AB$ tomondan 8 sm ga qisqa, $BC$ tomon esa $AB$ tomondan 5 sm ga uzun. $ABC$ uchburchakning perimetrini toping.

**26.** Perimetri 30 ga teng bo‘lgan uchburchakning bissektrisasi uni perimetrlari 16 va 24 teng bo‘lgan uchburchaklarga ajratadi. Berilgan uchburchakning bissektrisasini toping.

**27.** Uchburchakning balandligi 4 sm ga teng. Bu balandlik uchburchakni perimetrlari, mos ravishda, 16 va 23 ga teng bo‘lgan ikkita uchburchakka ajratadi. Berilgan uchburchakning perimetrini toping.

**28.** Asosi $AC$ dan iborat teng yonli $ABC$ uchburchakning $BD$ medianasi o‘tkazilgan. $ABC$ uchburchakning perimetri 50 dm ga, $ABD$ uchburchakniki esa 40 dm ga teng bo‘lsa, shu mediana uzunligini toping.

## 3. Uchburchaklar tengligining alomatlari, uchburchak burchaklarining yig‘indisi va tashqi burchagining xossasiga doir masalalar

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**29.** 1) Uchburchaklar tengligining birinchi alomatini ifodalang.
2) Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatini ifodalang.
3) Uchburchaklar tengligining uchinchi alomatini ifodalang.
4) Uchburchak tashqi burchagining xossasini ifodalang.

**30.** $ABC$ va $DEF$ uchburchaklarda: $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$. Bu uchburchaklar tengmi?

**31.** Uchburchakning 117° li tashqi burchagiga qo‘shni bo‘lmagan ichki burchaklarining nisbati 5 : 4 kabi. Shu ichki burchaklarni toping.

**32.** $ABC$ uchburchakning $AB$ tomonida $D$ nuqta, $A_1B_1C_1$ uchburchakning $A_1B_1$ tomonida esa $D_1$ nuqta olingan. $ADC$ va $A_1D_1C_1$ uchburchaklar hamda $DB$ va $D_1B_1$ kesmalar teng ekani ma’lum. $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning tengligini isbotlang.

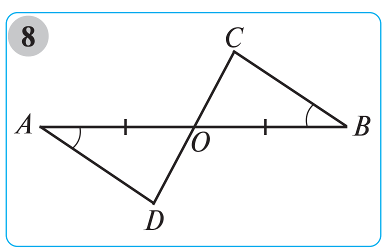
**33.** 8- rasmda $AO = OB$, $\angle A = \angle B$, $CO = 5$ sm. $DO$ ni toping.

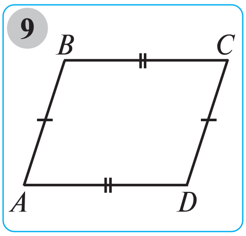
Y e c h i l i s h i. Tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko‘ra ($\angle AOD = \angle BOC$ – vertikal burchaklar, $AO = OB$ va $\angle A = \angle B$ – shartga ko‘ra):

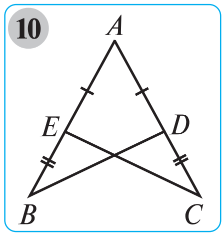
$$\Delta AOD = \Delta BOC.$$

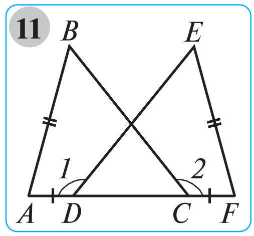
Shuning uchun, $CO = DO = 5$ sm.

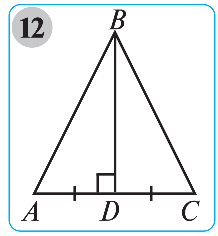
J a v o b: $DO = 5$ sm.












**34.** $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB$ va $A_1B_1$, $BC$ va $B_1C_1$ tomonlar teng hamda mos ravishda $AB$ va $A_1B_1$ tomonlarga o‘tkazilgan $CD$ va $C_1D_1$ medianalar ham teng. Shu uchburchaklarning tengligini isbotlang.

**35.** Bir uchburchakning ikki tomoni va burchagi mos ravishda ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va burchagiga teng. Bundan shu uchburchaklarning tengligi kelib chiqadimi?

**36.** 9- rasmda $AB = DC$ va $BC = AD$. $B$ burchakning $D$ burchakka tengligini isbotlang.

**37.** 10- rasmda $AB = AC$ va $AE = AD$. $BD = CE$ ekanini isbotlang.

**38.** 11- rasmda $AD = CF$, $AB = FE$ va $CB = DE$. $\angle 1 = \angle 2$ ekanini isbotlang.

**39.** $AB$ va $CD$ kesmalar $O$ nuqtada kesishadi. Agar $\angle ACO = \angle DBO$ va $BO = CO$ ekani ma’lum bo‘lsa, $ACO$ va $DBO$ uchburchaklarning tengligini isbotlang.

**40.** 12- rasmda $BD \perp AC$ va $AD = CD$. Ushbu rasmda teng uchburchaklar bormi?

**41.** Uchburchakning $108^\circ$ li tashqi burchagiga qo‘shni bo‘lmagan ichki burchaklarining nisbati 2 : 7 kabi. Shu ichki burchaklarni toping.

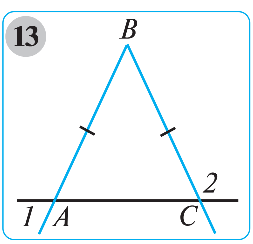
**42.** Asosi $AC$ dan iborat $ABC$ teng yonli uchburchakda: 1) $\angle 1 = 65^\circ$ (13- rasm); 2) $\angle 1 = 55^\circ$ (14- rasm). 2-burchakni toping.

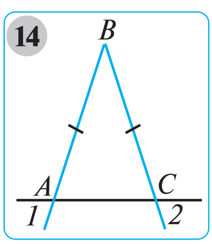
**43.** $ABC$ uchburchakning $B$ burchagi $42^\circ$ ga, $A$ uchidagi tashqi burchagi esa $100^\circ$ ga teng. $BCA$ burchakni toping.

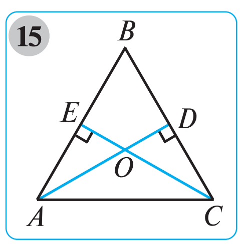
**44.** To‘g‘ri burchakli $ABC$ uchburchakning $C$ burchagi – to‘g‘ri, $A$ uchidagi tashqi burchagi esa $136^\circ$ ga teng. $B$ burchakni toping.

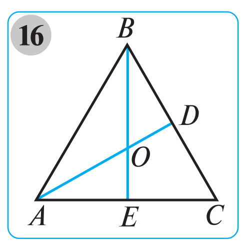
**45.** Teng tomonli $ABC$ uchburchakning $AD$ va $CE$ balandliklari $O$ nuqtada kesishadi (15- rasm). $ABC$ uchburchakning balandliklari orasidagi $AOC$ burchakni toping.

**46.** Teng tomonli $ABC$ uchburchakning $AD$ va $BE$ bissektrisalari $O$ nuqtada kesishadi (16- rasm). $ABC$ uchburchakning bissektrisalari orasidagi $AOE$ burchakni toping.









# 1- §. TO‘RTBURCHAKLAR

## 1- mavzu. KO‘PBURCHAKLAR

**1. Ko‘pburchaklar.** Siniq chiziq va uning elementlari, yopiq siniq chiziq va ko‘pburchak haqidagi dastlabki tushunchalar bilan Siz 7- sinfda tanishgansiz. Endi ularni o‘rganishni davom ettiramiz. Agar yopiq siniq chiziq o‘z-o‘zi bilan kesishmasa, bunday siniq chiziq *sodda yopiq siniq chiziq* deyiladi. U tekislikni shu siniq chiziqqa tegishli bo‘lmagan ikki sohaga — ichki va tashqi sohaga ajratadi, u shu sohaning umumiy chegarasidir. 17- rasmda ichki soha bo‘yab ko‘rsatilgan.

Endi biz ko‘pburchaklarni o‘rganishni davom ettiramiz.

**1-ta’rif.** *Tekislikning sodda yopiq siniq chiziq bilan uning ichki sohasining birlashmasi* ***ko‘pburchak*** *deb ataladi.*

Ko‘pburchakning chegarasiga tegishli bo‘lmagan nuqtalari shu ko‘pburchakning *ichki nuqtalari*, chegarasida yotgan nuqtalari *chegaraviy nuqtalar* deyiladi. Ko‘pburchakni tashkil qilgan siniq chiziqning uchlari ko‘pburchakning *uchlari*, uning bo‘g‘inlari ko‘pburchakning *tomonlari* deb ataladi.

Ko‘pburchakning hamma tomonlari uzunliklarining yig‘indisi *ko‘pburchakning perimetri* deyiladi.

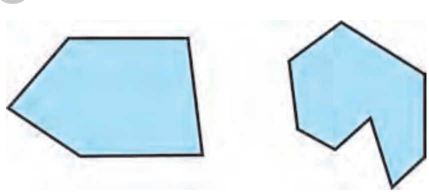
Ko‘pburchakning tomonlari (uchlari) soni o‘zining burchaklari soniga teng.

18-*a* rasmda *ABCDE* beshburchak tasvirlangan. 18-*b* rasmda tasvirlangan shakl esa ko‘pburchak emas, chunki u o‘z-o‘zini kesmaydigan yopiq siniq chiziqdan tuzilgan emas (ya’ni uning qo‘shni bo‘lmagan tomonlari umumiy nuqtaga ega).

Ko‘pburchakning bir tomoniga tegishli ikki uchi *qo‘shni uchlar* deyiladi. Ko‘pburchakning qo‘shni bo‘lmagan ixtiyoriy ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deyiladi.

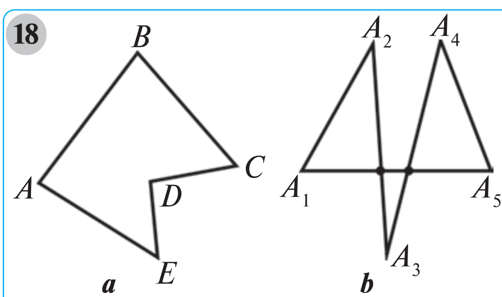
Masalan, 19-*a* rasmda $A_1A_3$, ... va $A_1A_{n-1}$ — $n$ burchakning $A_1$ uchidan, 19-*b* rasmdagi $AC$ va $CE$ hamda 19-*d* rasmdagi $BE$ va $BD$ kesmalar esa, mos ravishda, beshburchakning $C$ va $B$ uchidan chiqqan diagonallaridir.

17

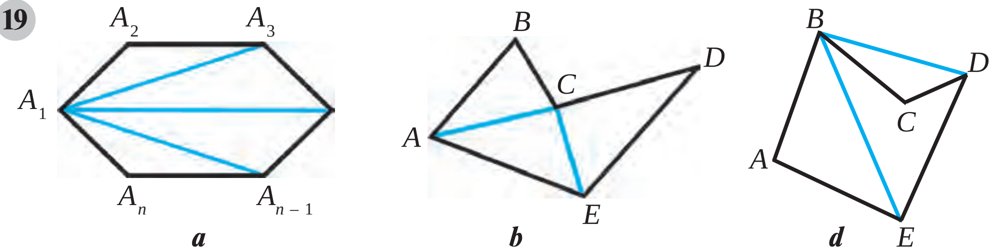


*a* *b*

18



19




Ko‘pburchakni belgilashda uning uchlari ketma-ket kelish tartibida ifodalanadi. Masalan, 20-*a* rasmdagi beshburchak *ABCDE*, *BCDEA* yoki *CDEAB* va hokazo kabi belgilanishi mumkin.

### 2. Qavariq ko‘pburchaklar.

**2-ta’rif.** *Agar ko‘pburchak tomonini o‘z ichiga olgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa nisbatan bitta yarim tekislikda yotsa, u* ***qavariq ko‘pburchak*** *deyiladi.*

*Bunda to‘g‘ri chiziqning o‘zi shu yarim tekislikka tegishli hisoblanadi.*

Masalan, 20-*a* rasmda qavariq ko‘pburchak, 20-*b* rasmda esa botiq ko‘pburchak tasvirlangan.

### 3. To‘rtburchaklar.

**3-ta’rif.** *To‘rtta nuqta va bu nuqtalarni ketma-ket tutashtiruvchi to‘rtta kesmadan iborat shakl* ***to‘rtburchak*** *deyiladi.*

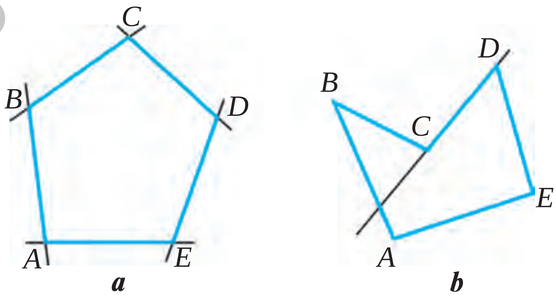
*Bunda nuqtalardan hech qanday uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmasligi, ularni tutashtiruvchi kesmalar esa kesishmasligi kerak.*

Masalan, 21- rasmda tasvirlangan to‘rtburchakda *AB* va *AD* – *qo‘shni tomonlar*, *AB* va *CD* – *qarama-qarshi tomonlar*; *A* uchga *B* va *D* uchlar –*qo‘shni uchlar*, *C* uch esa *qarama-qarshi uch* bo‘ladi; *AC* va *BD* kesmalar *diagonallardir*.

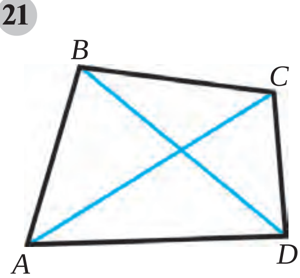
22-*a* rasmda qavariq to‘rtburchak, 22-*b* rasmda esa botiq to‘rtburchak tasvirlangan. Botiq to‘rtburchakning diagonallaridan biri, ya’ni *AC* diagonal to‘rtburchakning ichki qismiga tegishli emasligiga ahamiyat bering.

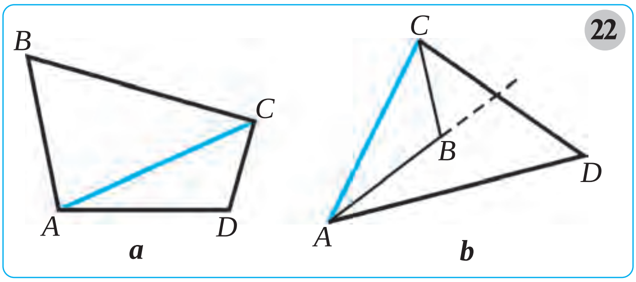
Ma’lumki, biz asosan maktabda qavariq ko‘pburchaklarni o‘rganamiz. Shuning uchun bundan keyin *to‘rtburchak* deganda, asosan, qavariq to‘rtburchaklarni nazarda tutamiz (boshqa hollarda esa alohida aytib o‘tiladi).

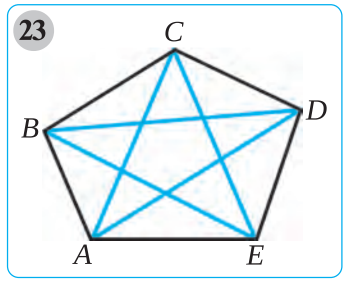
20




21






### 4. Ko‘pburchakning diagonallari soni haqida.

**Teorema.**

**Qavariq $n$ burchakning diagonallari soni $\frac{n(n-3)}{2}$ ga teng.**

Isbot. Ko‘pburchakning ixtiyoriy uchini olsak, u bilan bir tomonga tegishli bo‘lgan ikkita uch mavjud. Bir tomonga tegishli bo‘lmagan uchlar soni esa $(n-3)$ ta. Shuning uchun ko‘pburchakning har bir uchidan chiqqan diagonallari soni $(n-3)$ ga teng. Hamma uchidan chiqqan diagonallar soni esa $n(n-3)$ ta ga teng. Bunda har bir diagonal ko‘pburchakning ikki uchini tutashtirgani sababli, ikki martadan hisobga olingan. Demak, ko‘pburchakning jami turli diagonallari soni undan ikki marta kam bo‘ladi, ya’ni $\frac{n(n-3)}{2}$ ga teng.

**Masala.** Qavariq beshburchakning: 1) bir uchidan chiqqan diagonallari sonini; 2) jami diagonallari sonini toping.

Yechilishi. $ABCDE$ beshburchakning ($n=5$) $A$ uchidan chiqqan diagonallari soni $5-3=2$ ($AC$ va $AD$) ta, jami diagonallari soni esa $\frac{5\cdot(5-3)}{2}=5$ ta ($AC$, $AD$, $BD$, $BE$ va $CE$) bo‘ladi (23- rasm).

Javob: 1) 2 ta; 2) 5 ta.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**1.** 1) Ko‘pburchak deb nimaga aytiladi?
2) Ko‘pburchakning diagonali deganda nimani tushunasiz?
3) Qavariq ko‘pburchakning ta’rifini ayting.
4) To‘rtburchakning nechta diagonali bor?

**2.** 1) Qavariq ko‘pburchak chizing; 2) qavariq bo‘lmagan ko‘pburchak chizing. Qavariq ko‘pburchak qavariq bo‘lmagan ko‘pburchakdan nimasi bilan farq qilishini tushuntiring.

**3.** 1) Qavariq ko‘pburchak uchlarining soni kamida nechta bo‘lishi mumkin?
2) Qavariq bo‘lmagan ko‘pburchakniki-chi?

***Hamma tomonlari teng va hamma burchaklari teng bo‘lgan qavariq ko‘pburchak teng tomonli (muntazam) ko‘pburchak deyiladi.***

**4.** Qavariq $n$ burchakni boshi koʻpburchakning uchlaridan birida boʻlgan nurlar bilan kamida nechta uchburchakka ajratish mumkin ($n > 3$)?

**5.** Qavariq koʻpburchakning bir uchidan chiqqan diagonallari soni 15 ta. Shu koʻpburchakning jami diagonallari sonini toping.

**6.** Qavariq: 1) oʻnbirburchakning; 2) oʻttizburchakning bir uchidan chiqqan va jami diagonallari soni nechta?

**7.** Qavariq koʻpburchakning diagonallari soni uning tomonlari sonidan 2,5 marta koʻp. Shu koʻpburchakning tomonlari nechta?

**8.** $ABCD$ toʻrtburchakning perimetri 44 sm ga teng. $AB$ tomoni qolganlaridan, mos ravishda, 3 sm, 4 sm va 5 sm ga kichik. $AB$ tomon uzunligini toping.

Yechilishi. $AB = x$ boʻlsin. U holda qolgan tomonlar, mos ravishda, $BC = (x + 3)$ sm, $CD = (x + 4)$ sm va $AD = (x + 5)$ sm boʻladi. Shartga koʻra, toʻrtburchakning perimetri 44 sm ga teng ekanini e'tiborga olib, tenglama tuzamiz va uni yechamiz:

$$x + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) = 44,\ 4x + 12 = 44,\ 4x = 32,\ x = 8 \text{ (sm)}.$$

Javob: $AB = 8$ sm.

**9.** Toʻgʻri toʻrtburchakning perimetri 96 sm ga teng. Agar toʻgʻri toʻrtburchakning tomonlari 1 : 3 nisbatda boʻlsa, uning tomonlarini toping.

**10.** $ABCD$ toʻrtburchakning $AD$ tomoni 12 sm ga teng. U qoʻshni tomonlarning har biridan 2 sm ga katta va qarshisidagi tomondan esa 4 sm ga kichik. Shu toʻrtburchakning perimetrini toping.

Yechilishi. $AD$ tomon bilan qoʻshni boʻlgan $AB$ va ... tomonlar 12 – ... = ... (sm) ga teng. $AD$ tomonga qarama-qarshi ... tomon 12 + ... = ... (sm) ga teng. U holda $P_{ABCD}$ = 12 + .... + ... + ... = ... (sm) boʻladi.

Javob: $P_{ABCD}$ = ... sm.

**11.** Diagonallarining soni: 1) tomonlari soniga teng; 2) tomonlarining sonidan ortiq boʻlgan koʻpburchak bormi?

**12.** $ABCD$ toʻrtburchakning perimetri 22 sm ga teng. Agar $AB$ tomoni $BC$ tomondan 2 sm ga katta hamda $DA$ va $CD$ tomonlarining har biridan 2 sm ga kichik boʻlsa, uning $BC$ tomonini toping.

**13.** Qavariq koʻpburchakning bir uchidan chiqqan diagonallari soni 18 ta. Shu koʻpburchakning tomonlari soni nechta? Jami diagonallari soni-chi?

**14.** Qavariq oltiburchakning: 1) bir uchidan chiqqan diagonallar sonini; 2) jami diagonallari sonini toping.

**15.** Toʻgʻri toʻrtburchakning perimetri 66 sm ga, eni esa 15 sm ga teng. Shu toʻgʻri toʻrtburchakning boʻyini toping.

**16.** Qavariq koʻpburchakning diagonallari uning tomonlaridan 12 ta koʻp. Koʻpburchakning tomonlari nechta?

**17.** Toʻrtburchakning perimetri 16 sm, tomonlaridan biri, mos ravishda, qolganlaridan 6 mm, 8 mm va 10 mm ga katta. Shu toʻrtburchakning tomonlarini toping.

**2- mavzu.**

# QAVARIQ KO‘PBURCHAK ICHKI VA TASHQI BURCHAKLARINING YIG‘INDISI

*Qavariq beshburchak chizing va uning biror uchidan chiquvchi barcha diagonallarini o‘tkazing.*

*1) Bunda nechta uchburchak hosil bo‘ladi?*

*2) Shu beshburchakning burchaklari yig‘indisini toping.*

*J a v o b: 1) ... ta; 2) ...°.*

## 1. Ko‘pburchak ichki burchaklarining yig‘indisi.

**T a ’ r i f.** ***Ko‘pburchakning berilgan uchidagi ichki burchagi*** *deb, uning shu uchida uchrashuvchi tomonlari hosil qilgan burchakka aytiladi.*

**1- t e o r e m a.**

**Qavariq $n$ burchak ichki burchaklarining yig‘indisi $180°(n-2)$ ga teng, bunda $n$ – tomonlar soni.**

I s b o t. $A_1A_2A_3...A_n$ – berilgan qavariq $n$ burchak va $n>3$ bo‘lsin (19-*a* rasmga q.). Biror uchidan, masalan $A_1$ dan, ko‘pburchakning barcha diagonallarini o‘tkazamiz. Bu diagonallar uni $(n-2)$ ta uchburchakka ajratadi.

Haqiqatan ham, *ikki chetki uchburchaklar* ($\triangle A_1A_2A_3$ va $\triangle A_1A_{n-1}A_n$) ko‘pburchakning ikki tomoni va bir diagonali, qolgan uchburchaklar esa ko‘pburchakning bir tomoni va ikki diagonalidan tuzilgan. Shuning uchun uchburchaklar soni $(n-2)$ ta, ya’ni ko‘pburchakning tomonlari sonidan ikkitaga kam bo‘ladi. Ko‘pburchakning burchaklari yig‘indisi uni tashkil qiluvchi uchburchak burchaklari yig‘indisiga, ya’ni $180°(n-2)$ ga teng bo‘ladi.

1. *Qavariq ko‘pburchakning ichki burchaklari yig‘indisi 180° ga karrali bo‘ladi.*
2. *Qavariq ko‘pburchakning har bir burchagi 180° dan kichikdir.*
3. *Ko‘pburchak burchaklari yig‘indisi to‘g‘risidagi teorema qavariq bo‘lmagan ko‘pburchaklar uchun ham o‘rinli.*

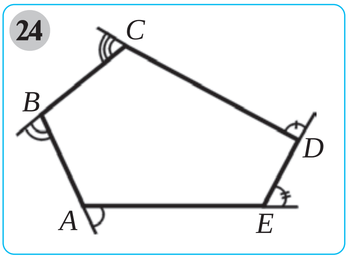
Masalan, qavariq bo‘lmagan beshburchak burchaklari yig‘indisi (19-*b* rasmga q.) uchta uchburchakning (chunki $AC$ va $CE$ diagonallar uni uchta uchburchakka ajratadi) hamma burchaklari yig‘indisiga, ya’ni 540° ga teng. Biroq, $n=5$ da ham $180° \cdot (5-2) = 180° \cdot 3 = 540°$.

## 2. Ko‘pburchak tashqi burchaklarining yig‘indisi.

**T a ’ r i f.** ***Ko‘pburchakning berilgan uchidagi tashqi burchagi*** *deb, uning shu uchidagi ichki burchagiga qo‘shni burchakka aytiladi.*

**2- teorema.**

**Qavariq *n* burchakning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi 360° ga teng.**




Isbot. Ko'pburchakning har qaysi uchida bittadan tashqi burchak yasaymiz. Ko'pburchak ichki burchagi va u bilan qo'shni bo'lgan tashqi burchagining yig'indisi 180° ga teng (24- rasm). Shu sababli barcha ichki va har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi $180°n$ ga teng. Ammo ko'pburchakning hamma ichki burchaklarining yig'indisi $180°(n-2)$ ga teng. U holda har qaysi uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi

$$180°n - 180°(n-2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°$$

ga teng bo'ladi.

**1- masala.** Qavariq ko'pburchakning ichki burchaklarining va bitta tashqi burchagining yig'indisi 2115° ga teng. Shu ko'pburchakning nechta tomoni bor?

Yechilishi. Qavariq ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisi 180° ga karrali, shuning uchun 2115° ni quyidagicha yozib olamiz:

$$2115° = 11 \cdot 180° + 135°.$$

Demak, ushbu qavariq ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisi $11 \cdot 180° = 1980°$ ga teng, 135° esa biror ichki burchagiga mos tashqi burchakdir. $180°(n-2) = 11 \cdot 180°$ tenglamani yechib, quyidagilarni topamiz:

$$n - 2 = 11, \text{ ya'ni } n = 13.$$

Javob: 13 ta.

**2- masala.** Tomonlari teng bo'lgan (muntazam) *n* burchakning har bir ichki burchagi ($\alpha_n$) nimaga teng?

Yechilishi. Bizga ma'lumki, ixtiyoriy qavariq *n* burchakning burchaklari yig'indisi $180°(n-2)$ ga teng. Muntazam ko'pburchakning burchaklari teng bo'lgani uchun ularning har biri quyidagiga teng:

$$\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}.$$

**3- masala.** Tomonlari teng bo'lgan (muntazam) *n* burchakning har bir tashqi burchagi ($\beta_n$) nimaga teng?

Yechilishi. Bizga ma'lumki, ixtiyoriy qavariq *n* burchakning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi 360° ga teng.

Shunday qilib, tomonlari teng bo'lgan *n* burchakning har bir tashqi burchagi quyidagiga teng:

$$\beta_n = \frac{360°}{n}.$$

***Qavariq n burchakning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi ko'pburchak tomonlari soniga bog'liq emas.***

**18.** 1) Ko'pburchakning berilgan uchidagi ichki burchagi deb qanday burchakka aytiladi? Tashqi burchagi deb-chi?

2) Qavariq $n$ burchakning ichki burchaklari yig'indisi nimaga teng? Har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi-chi?

**19.** $ABCD$ to'rtburchakning eng kichik burchagi $40^\circ$ ga teng. Qolgan burchaklari 4, 5 va 7 sonlariga proporsional. Shu burchaklarni toping.

Yechilishi. $\angle A = 40^\circ$ — eng kichik burchak bo'lsin. U holda $\angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ - ...^\circ = ...^\circ$ bo'ladi. $\angle B = 4x$ desak, u holda $\angle C = ...x$ va $\angle D = ...x$ bo'ladi. Tenglama tuzamiz: $...x + ...x + ...x = ...^\circ$. Endi hosil bo'lgan tenglamani yechamiz: $...x = ...^\circ$, $x = ...^\circ$. Va nihoyat, izlanayotgan burchaklarni topamiz:

$$\angle B = 4 \cdot ...^\circ = ...^\circ; \quad \angle C = 5 \cdot ...^\circ = ...^\circ; \quad \angle D = 7 \cdot ...^\circ = ...^\circ.$$

Javob: $\angle B = ...^\circ$, $\angle C = ...^\circ$, $\angle D = ...^\circ$.

**20.** Qavariq to'rtburchakning burchaklari 1, 2, 3 va 4 sonlariga proporsional. Shu burchaklarni toping.

**21.** 1) O'nikkiburchakning; 2) o'ttizburchakning; 3) ellikburchakning; 4) to'qsonburchakning burchaklari yig'indisini toping.

Namuna. 1) $\alpha_{13} = 180^\circ \cdot (13 - 2) = ...^\circ \cdot ... = ...^\circ$.

**22.** Ko'pburchak burchaklarining yig'indisi: 1) $1080^\circ$ ga; 2) $1620^\circ$ ga; 3) $3960^\circ$ ga teng. Ko'pburchakning nechta tomoni bor?

**23.** a) Har bir ichki burchagi: 1) $144^\circ$ ga; 2) $150^\circ$ ga; 3) $170^\circ$ ga; 4) $171^\circ$ ga teng bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta tomoni bor?

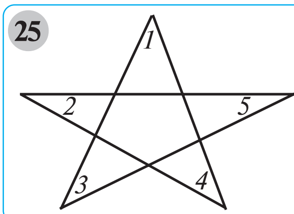
b) Tashqi burchagining har biri: 1) $36^\circ$ ga; 2) $24^\circ$ ga; 3) $60^\circ$ ga; 4) $15^\circ$ ga teng bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta tomoni bor?

**24.** Ichki burchaklar yig'indisi uning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklari yig'indisidan 6 marta katta bo'lgan ko'pburchakning tomoni nechta?

**25.** Qanday qavariq $n$ burchakda uning hamma burchaklari: 1) o'tmas; 2) to'g'ri; 3) o'tkir bo'lishi mumkin?

**26.** Ixtiyoriy beshburchakli yulduzcha o'tkir burchaklarining yig'indisi nimaga teng (25- rasm)?

25

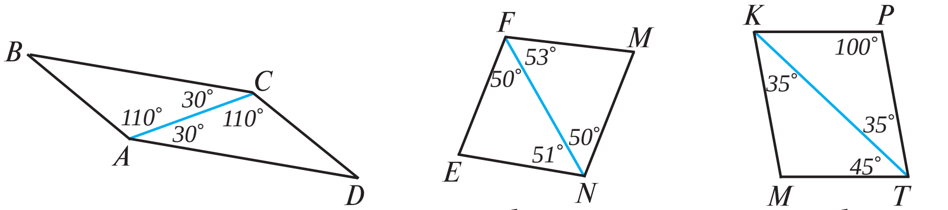



**27.** Ko'pburchak ichki burchaklarining va bitta tashqi burchagining yig'indisi $1000^\circ$ ga teng. Shu ko'pburchakning tomonlari soni nechta?

**28.** 1) O'nuchburchakning; 2) o'nburchakning; 3) yigirmaburchakning; 4) qirqburchakning burchaklari yig'indisini toping.

**29.** Tashqi burchagining har biri: 1) $10^\circ$ ga; 2) $12^\circ$ ga; 3) $30^\circ$ ga; 4) $45^\circ$ ga teng bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta tomoni bor?

## 3- mavzu. PARALLELOGRAMM VA UNING XOSSALARI




**a** **b** **d**

— *To'rtburchaklarning qaysi tomonlari o'zaro parallel? Topishga harakat qiling!*

### 1. Parallelogramm.

**Ta'rif.** *Qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel bo'lgan to'rtburchak* ***parallelogramm*** *deb ataladi.*

Agar $ABCD$ parallelogramm bo'lsa, $AB \parallel DC$ va $AD \parallel BC$ bo'ladi (26- rasm).

Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlariga perpendikular bo'lgan kesmalar parallelogrammning *balandliklari* deyiladi. Parallelogrammning, umuman aytganda, bir-biridan farq qiladigan ikkita balandligi bo'ladi. Masalan, 27- rasmda $BP$ va $BF$ — balandliklardir.

### 2. Parallelogrammning xossalari.

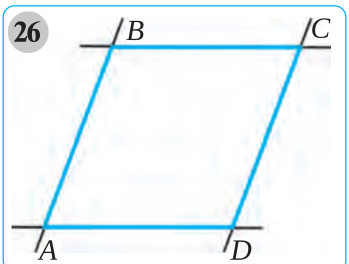
**1-teorema.**

**(1-xossa.) Parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka bo'ladi.**

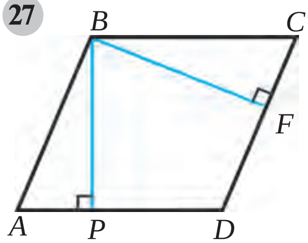
Isbot. $ABCD$ parallelogramm berilgan bo'lsin, unda $AB \parallel CD$ va $BC \parallel AD$. Uning $AC$ diagonalini o'tkazamiz (28- rasm). Bunda $ABCD$ parallelogramm $ADC$ va $CBA$ uchburchaklarga ajraladi. $\triangle ADC = \triangle CBA$ ekanini isbotlaymiz.

Bu uchburchaklarda $AC$ — umumiy tomon va unga yopishgan mos burchaklar teng, ya'ni $\angle 1 = \angle 3$ ($AB$ va $DC$ parallel to'g'ri chiziqlar hamda ularning $AC$ kesuvchi bilan kesishishlaridan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun) va $\angle 2 = \angle 4$ ($AD$ va $BC$ parallel to'g'ri chiziqlar hamda ularning $AC$ kesuvchi bilan kesishishlaridan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra: $\triangle ADC = \triangle CBA$.

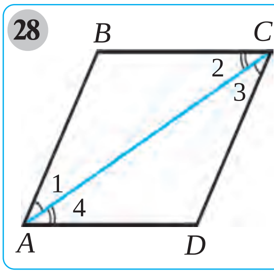
26




27




28



Bu teoremadan ushbu natijalar kelib chiqadi:

**1-natija.** Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng.

**2-natija.** Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari teng.

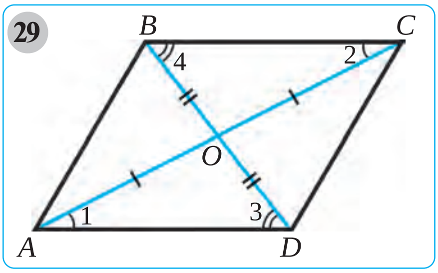
Natijalarning to‘g‘ri ekanini isbotlashni o‘zingizga havola qilamiz.

**2-teorema.**

**(2-xossa.) Parallelogrammning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.**

Isbot. $ABCD$ — berilgan parallelogramm va $O$ — $AC$ va $BD$ diagonallarining kesishish nuqtasi bo‘lsin (29- rasm). $AO = OC$ va $DO = OB$ ekanini isbot qilamiz.

29




Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko‘ra: $\triangle AOD = \triangle COB$. Chunki bu uchburchaklarda $AD = BC$ (parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari bo‘lgani uchun), $\angle 1 = \angle 2$ va $\angle 3 = \angle 4$ ($AD$ va $BC$ parallel to‘g‘ri chiziqlarning, mos ravishda, $AC$ va $BD$ kesuvchilar bilan kesishishlaridan hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo‘lgani uchun). Shuning uchun, $AO = OC$ va $DO = OB$.

**3-teorema.**

**(3-xossa.) Parallelogrammning bir tomoniga yopishgan burchaklari yig‘indisi 180° ga teng.**

Isbot. Parallelogrammning bir tomoniga yopishgan burchaklar ichki bir tomonli burchaklar bo‘ladi. Shuning uchun ularning yig‘indisi 180° ga teng.

**1-masala.** Parallelogramm burchaklaridan ikkitasining yig‘indisi 172° ga teng. Uning burchaklarini toping.

Yechilishi. Parallelogrammning qo‘shni burchaklari yig‘indisi 180° ga teng bo‘lgani uchun berilgan burchaklar qo‘shni burchaklar bo‘la olmaydi va, demak, ular qarama-qarshi burchaklardir. Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari teng bo‘lganligidan, bizning holda ularning har biri $172^\circ : 2 = 86^\circ$ ga teng bo‘ladi. Parallelogrammning qolgan ikki burchagi $180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$ dan bo‘ladi.

Javob: 86°, 94°, 86°, 94°.

**2-masala.** Parallelogrammning ikki tomoni 5 : 7 kabi nisbatda, perimetri esa 4,8 sm ga teng. Parallelogrammning tomonlarini toping.

Yechilishi. Parallelogramm tomonlarining umumiy o‘lchovi $x$ bo‘lsin. U holda tomonlardan biri $5x$ sm, ikkinchisi esa $7x$ sm bo‘ladi. Shartga ko‘ra: $2(5x + 7x) = 4{,}8$. Bundan $12x = 2{,}4$, ya’ni $x = 0{,}2$. U holda birinchi tomon $5 \cdot 0{,}2 = 1$ (sm) ga, ikkinchi tomoni esa $7 \cdot 0{,}2 = 1{,}4$ (sm) ga teng bo‘ladi.

Javob: 1 sm, 1,4 sm, 1 sm, 1,4 sm.

## Savol, masala va topshiriqlar

**30.** 1) Qanday to‘rtburchakka parallelogramm deyiladi?
2) Parallelogramm qavariq to‘rtburchak bo‘ladimi?

**31.** Parallelogrammning: 1) hamma burchaklari o‘tkir bo‘lishi mumkinmi? 2) burchaklaridan faqat bittasi to‘g‘ri bo‘lishi mumkinmi?

**32.** 1) (*Og‘zaki.*) $ABCD$ parallelogrammda $O$ – $AC$ va $BD$ diagonallarining kesishish nuqtasi. Bir juft teng uchburchaklarni ayting.
2) (*Og‘zaki.*) Parallelogrammning ikki qo‘shni tomoni, mos ravishda, 14 sm ga va 16 sm ga teng. Shu parallelogrammning perimetrini toping.

**33.** 30- rasmda parallelogramm ayrim elementlarining kattaligi ko‘rsatilgan. Yana qaysi kattaliklarni topish mumkin?

**34.** Agar parallelogrammning burchaklaridan biri: 1) 35°; 2) 100°; 3) boshqasidan 2 marta katta; 4) boshqasidan 90° ortiq bo‘lsa, parallelogrammning burchaklarini toping.

**35.** Parallelogrammning diagonali uning ikki tomoni bilan 25° va 45° li burchaklar tashkil qiladi. Shu parallelogrammning burchaklarini toping.

**36.** Parallelogrammning perimetri 54 sm ga, tomonlaridan biri esa 15 sm ga teng. Shu parallelogrammning qolgan tomonlarini toping.

**37.** O‘tkir burchagi $A$ bo‘lgan $ABCD$ parallelogrammning $B$ uchidan $AD$ tomonga $BK$ perpendikular o‘tkazilgan, $BK = 0{,}5AB$. $C$ va $D$ burchaklarni toping.

**38.** Parallelogrammning qo‘shni tomonlari yig‘indisi 20 sm ga, ayirmasi esa 12 sm ga teng. Shu parallelogramm tomonlarini toping.

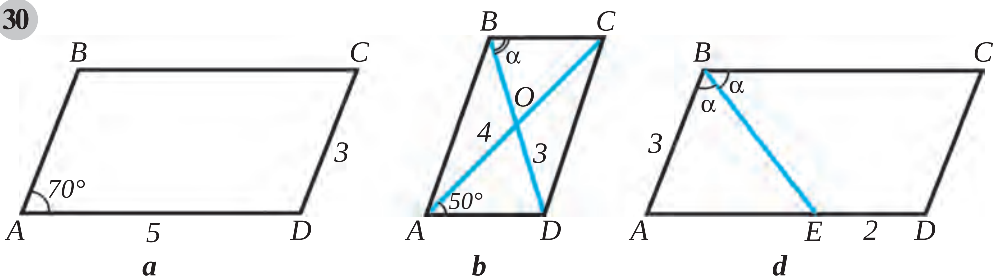
**39.** Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu to‘g‘ri chiziqning parallelogramm parallel tomonlari orasidagi kesmasi bu nuqtada teng ikkiga bo‘linishini isbotlang.

**40.** Parallelogrammning diagonali uning ikki tomoni bilan 20° va 55° li burchaklar tashkil qiladi. Shu parallelogrammning burchaklarini toping.

**41.** Parallelogrammning ikki tomoni uzunliklari 2 va 3 sonlariga proporsional. Uning perimetri 50 sm ga teng. Parallelogrammning hamma tomoni uzunliklarini toping.

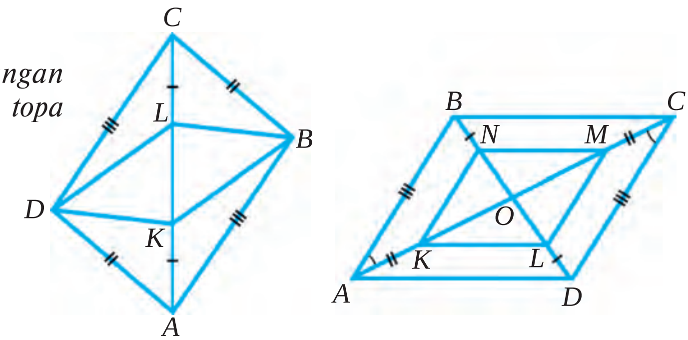
**42.** $ABCD$ parallelogrammda: $AB = 7$ sm, $BC = 11$ sm, $AC = 14$ sm, $BD = 12$ sm; $O$ – diagonallarning kesishish nuqtasi ekani ma’lum. $ABO$ va $BOC$ uchburchaklarning perimetrlarini toping.

30



## 4- mavzu. PARALLELOGRAMMNING ALOMATLARI

*Rasmlarda tasvirlangan parallelogrammlarni topa olasizmi?*



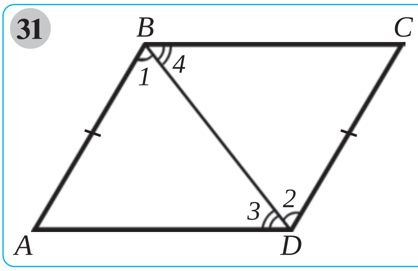

Avvalgi mavzuda ko'rib chiqqanimizdan ma'lum bo'ldiki, parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari va tomonlari teng. Shuningdek, parallelogrammda ixtiyoriy ikki qo'shni burchak yig'indisi 180° ga teng; parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotladik.

Endi parallelogrammning alomatlari bilan tanishamiz.

**1-teorema.**

**(1-alomat.) Agar to'rtburchakning ikkita tomoni teng va parallel bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.**

31



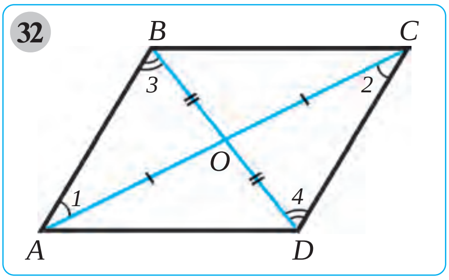

Isbot. $ABCD$ to'rtburchakda $AB = DC$ va $AB \parallel DC$ bo'lsin (31-rasm). Uning $BD$ diagonalini o'tkazamiz. Natijada ikkita teng $ABD$ va $CDB$ uchburchaklarga ega bo'lamiz (ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra), chunki ularda $AB = DC$ (shartga ko'ra), $BD$ tomon – umumiy, $\angle 1 = \angle 2$ ($AB$ va $DC$ parallel to'g'ri chiziqlar hamda $BD$ kesuvchi kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Uchburchaklarning tengligidan, $\angle 3 = \angle 4$ ekani kelib chiqadi. Bu burchaklar $AD$ va $BC$ to'g'ri chiziqlar hamda $BD$ kesuvchi kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar, demak, $AD \parallel BC$.

Shunday qilib, $ABCD$ to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan parallel. Shuning uchun, parallelogramm ta'rifiga ko'ra, $ABCD$ to'rtburchak – parallelogrammdir.

**2-teorema.**

**(2-alomat.) Agar to'rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.**

Isbot. $ABCD$ to'rtburchakda $O$ nuqta $AC$ va $BD$ diagonallarining kesishish nuqtasi hamda $AO = OC$ va $BO = OD$ tengliklar bajariladi (32-rasm). Uchbur-




chaklar tengligining 1- alomatiga ko‘ra, $AOB$ va $COD$ uchburchaklar teng ($AO = OC$, $BO = OD$ — shartga ko‘ra, $\angle AOB = \angle COD$ — vertikal burchaklar), shuning uchun $AB = CD$ va $\angle 1 = \angle 2$. 1 va 2 burchaklarning tengligidan, $AB \parallel CD$ (to‘g‘ri chiziqlarning parallellik alomatiga ko‘ra) kelib chiqadi.

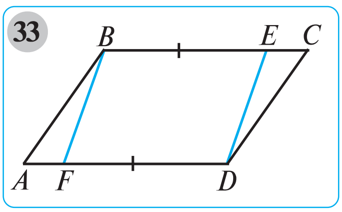
Shunday qilib, $ABCD$ to‘rtburchakda $AB$ va $CD$ tomonlar teng hamda parallel, demak, parallelogrammning 1- alomatiga ko‘ra, $ABCD$ to‘rtburchak — parallelogramm.

Parallelogrammning yana quyidagi alomatlari bor:

**3- alomat.** Agar to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan teng bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogrammdir.

**4- alomat.** Agar to‘rtburchakning qarama-qarshi burchaklari jufti-jufti bilan teng bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogrammdir.

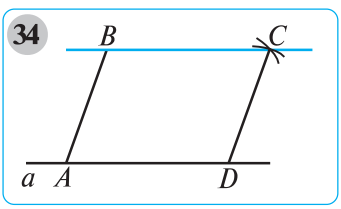
**1- masala.** $ABCD$ parallelogrammning $BC$ va $AD$ tomonlariga teng kesmalar qo‘yilgan: $BE = DF$ (33- rasm). $BEDF$ to‘rtburchak parallelogramm bo‘ladimi?




Yechilishi. $BEDF$ to‘rtburchakning $BE$ va $DF$ qarama-qarshi tomonlari teng hamda parallel. Shuning uchun, parallelogrammning 1- alomatiga ko‘ra, $BEDF$ to‘rtburchak — parallelogramm.

Javob: ha, bo‘ladi.

**2- masala.** Berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqni yasang.

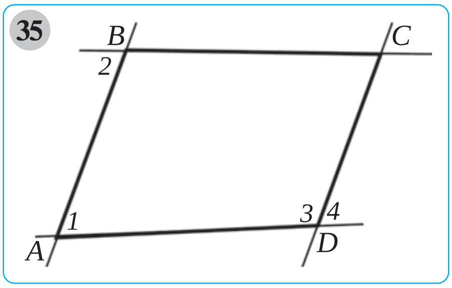


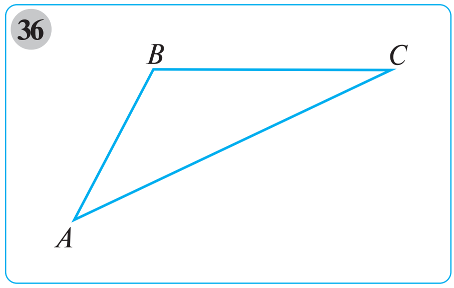

Yechilishi. $a$ — to‘g‘ri chiziq, $B$ — unda yotmaydigan nuqta bo‘lsin. $a$ to‘g‘ri chiziqda $A$ va $D$ nuqtalarni belgilaymiz (34- rasm). $B$, $D$ nuqtalardan radiuslari, mos ravishda, $AD$ va $AB$ bo‘lgan aylanalar o‘tkazamiz. Ularning kesishish nuqtasini $C$ bilan belgilaymiz. $BC$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz, u izlanayotgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Haqiqatan ham, $ABCD$ to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari teng. Parallelogrammning 3- alomatiga ko‘ra, $ABCD$ to‘rtburchak — parallelogrammdir. Shuning uchun, $BC \parallel AD$.

## Savol, masala va topshiriqlar

**43.** 1) Agar to‘rtburchakning ikkita tomoni teng va parallel bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogramm bo‘lishini isbotlay olasizmi?

2) Agar to‘rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linsa, bu to‘rtburchak parallelogramm bo‘lishi qanday isbotlanadi?




**44.** Agar: 1) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2) $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 115°$ bo‘lsa (35- rasm), u holda $ABCD$ to‘rtburchak parallelogramm bo‘ladimi? (Quyida yechish jarayonidagi muhim joylar ajratib ko‘rsatilgan.)

Yechilishi. 1) $ABCD$ to‘rtburchakda ikkita $AB$ va $CD$ tomonlar parallel, chunki $\angle 1 + \angle 3 = 70° + 110° = \mathbf{180}°$. Bu burchaklar – $\boldsymbol{AB}$ va $\boldsymbol{DC}$ to‘g‘ri chiziqlar hamda $\boldsymbol{AD}$ kesuvchi hosil qilgan **ichki bir tomonli burchaklar**. $AB \parallel DC$ bo‘lgani sababli, $\angle 1 = \angle \mathbf{4}$ bo‘ladi (**mos burchaklar**). $ABCD$ to‘rtburchakning qolgan ikki $\boldsymbol{AD}$ va $\boldsymbol{BC}$ tomonlari parallel emas, chunki ichki almashinuvchi **1** va **2** burchaklar teng emas ($\angle 1 = \angle 4 \neq \angle 2$). Demak, $ABCD$ to‘rtburchak **parallelogramm** bo‘la olmaydi.

2) Xuddi yuqoridagiga o‘xshash muhokama yuritib, yechimni rasmiylashtirishni o‘zingizga havola qilamiz.

**45.** Agar to‘rtburchakning ikkita qarama-qarshi burchagi teng bo‘lsa, u parallelogramm bo‘ladimi?

**46.** Parallelogramm tomonlari o‘rtalarini tutashtirishdan hosil bo‘lgan to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

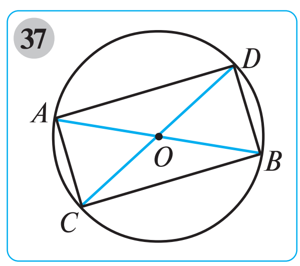
**47.** $ABC$ uchburchakning $AO$ medianasi o‘ziga teng $OP$ kesmaga davom ettirildi. $ABPC$ to‘rtburchakning parallelogramm ekanini isbot qiling.

**48.** $ABCD$ parallelogrammning $BC$ tomoni o‘rtasi $E$ nuqtadan, $AD$ tomoni o‘rtasi $F$ nuqtadan iborat. $BEDF$ to‘rtburchakning parallelogramm ekanini isbotlang.

**49.** $AB$, $BC$ va $AC$ kesmalar, mos ravishda, $ABCD$ parallelogrammning tomonlari va diagonalidir. Sirkul va chizg‘ich yordamida $ABCD$ parallelogrammni yasang (36- rasm).

**50.** Ikkita teng va parallel kesmalar berilgan. Ularning oxirlari o‘zaro kesishmaydigan kesmalar bilan tutashtirilgan. Hosil bo‘lgan to‘rtburchak parallelogramm bo‘ladi, deyish to‘g‘rimi?

**51.** $AB$ va $CD$ kesmalar – aylananing diametrlari. $ACBD$ to‘rtburchak qanday shakl bo‘ladi (37- rasm)?



## 5- mavzu. TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAK VA UNING XOSSALARI

**Ta’rif.** *Hamma burchaklari to‘g‘ri bo‘lgan parallelogramm* ***to‘g‘ri to‘rtburchak*** *deb ataladi* (38-*a* rasm).

To‘g‘ri to‘rtburchak parallelogrammning xususiy holi bo‘lgani uchun u parallelogrammning barcha xossalariga ega bo‘ladi: to‘g‘ri to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari teng; diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi; to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonali uni ikkita teng to‘g‘ri burchakli uchburchakka ajratadi.

To‘g‘ri to‘rtburchakning o‘ziga xos xossasini ko‘rib chiqamiz.

**Teorema.**

**To‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro teng.**

Isbot. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. $AC = BD$ bo‘lishini isbot qilamiz (38-*b* rasm).

To‘g‘ri burchakli $ACD$ va $DBA$ uchburchaklar ikki katetiga ($AD$ – umumiy tomon, $CD = BA$) ko‘ra teng. Bundan bu uchburchaklar gipotenuzalarining tengligi, ya’ni $AC = BD$ kelib chiqadi.

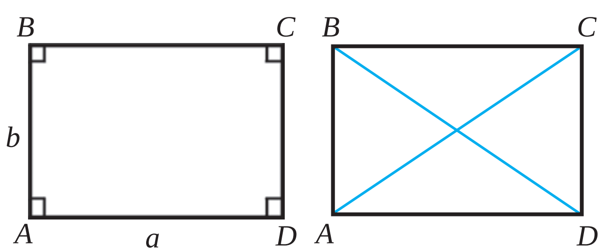
Bu teoremadan quyidagi teskari teorema kelib chiqadi.

**Teskari teorema.**

**Agar parallelogrammning diagonallari teng bo‘lsa, u to‘g‘ri to‘rtburchakdir**.

Isbot. $ABCD$ parallelogrammda $AC$ va $BD$ diagonallar teng bo‘lsin (38-*b* rasmga q.). $ABD$ va $DCA$ uchburchaklar uch tomoniga ko‘ra teng ($AB = DC$, $BD = CA$, $AD$ – umumiy tomon). Bundan $\angle A = \angle D$ kelib chiqadi. Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari teng, shuning uchun $\angle A = \angle C$ va $\angle B = \angle D$. Shunday qilib, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Parallelogramm – qavariq to‘rtburchak, shuning uchun: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

**38**

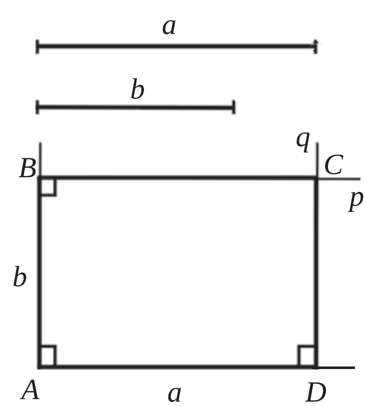



$\angle A = \angle B = \angle C =$
$= \angle D = 90°$;

$P = 2(a + b)$

***a*** ***b***

**39**



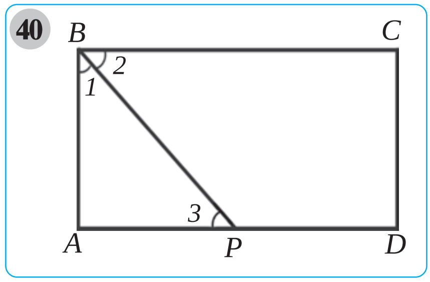
Bundan $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, ya'ni $ABCD$ parallelogrammning to'g'ri to'rtburchak ekani kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

**1-masala.** Ikkita qo'shni tomoni $a$ va $b$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni yasang.

Yasash. $A$ to'g'ri burchak yasaymiz (39- rasm). Uning tomonlarida $AD = a$ va $AB = b$ kesmalarni qo'yamiz. $B$ va $D$ nuqtalar orqali $p \perp AB$ va $q \perp AD$ to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. $p \perp AB$ va $AD \perp AB$ bo'lgani uchun $p \parallel AD$ bo'ladi. $q$ to'g'ri chiziq $AD$ to'g'ri chiziq bilan kesishgani sababli, u unga parallel bo'lgan $p$ to'g'ri chiziqni biror $C$ nuqtada kesadi. Hosil bo'lgan $ABCD$ to'rtburchak – to'g'ri to'rtburchak bo'ladi. Unda yasashga ko'ra, $A$, $B$ va $D$ burchaklar to'g'ri, $C$ burchak ham to'g'ri. (Agar to'g'ri chiziq ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikular bo'lsa, u ikkinchi to'g'ri chiziqqa ham perpendikular bo'ladi.)

To'g'ri to'rtburchaklarni yasashning boshqa usullari ham bor.

**2-masala.** $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak $B$ burchagining bissektrisasi $AD$ tomonni $P$ nuqtada kesadi hamda uni $AP = 17$ sm va $PD = 21$ sm li kesmalarga ajratadi (40- rasm). Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.




Yechilishi. 1) $ABCD$ – to'g'ri to'rtburchak bo'lgani uchun $AD \parallel BC$ va shuning uchun $\angle 2 = \angle 3$ (ichki almashinuvchi burchaklar). Biroq, shartga ko'ra, $\angle 2 = \angle 1$, demak, $\angle 1 = \angle 3$ hamda $\triangle ABP$ – asosi $BP$ bo'lgan teng yonli uchburchak. Shunday qilib, $AB = AP = 17$ sm.

2) $AD = AP + PD = 17 + 21 = 38$ (sm);

$$P_{ABCD} = 2\,(AB + AD) = 2 \cdot (17 + 38) = 2 \cdot 55 = 110 \text{ (sm)}.$$

Javob: $P_{ABCD} = 110$ sm.

**3-masala.** $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning perimetri 24 sm ga, uning $BD$ diagonali esa 9 sm ga teng. $ABD$ uchburchakning perimetrini toping.

Yechilishi. $AB + AD = P_{ABCD} : 2 = 24 : 2 = 12$ (sm) – qo'shni tomonlar yig'indisi (38-*b* rasmga q.). $P_{ABD} = AB + AD + BD = 12 + 9 = 21$ (sm).

Javob: $P_{ABD} = 21$ sm.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**52.** 1) Qanday parallelogramm to'g'ri to'rtburchak deb ataladi?
2) To'g'ri to'rtburchakning diagonallari teng ekanini isbotlang.

**53.** To'g'ri to'rtburchakning perimetri 54 sm ga, tomonlaridan biri esa ikkinchisidan 3 sm ga uzun. Qo'shni tomonlar uzunliklarini toping.

**54.** To'g'ri to'rtburchakning bissektrisalaridan biri to'g'ri to'rtburchak tomonini teng ikkiga bo'ladi. To'g'ri to'rtburchakning kichik tomoni 12 sm ga teng bo'lsa, uning perimetrini toping.

**55.** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakda *AC* diagonal o‘tkazilgan. *BAC* burchak *ACB* burchakdan 2 marta katta ekani ma’lum. Shu burchaklarni toping.

**56.** To‘g‘ri to‘rtburchakning kichik tomoni 10 sm ga teng, diagonallari esa 60° li burchak ostida kesishadi. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallarini toping.

**57.** To‘g‘ri to‘rtburchakning perimetri 24 sm. To‘g‘ri to‘rtburchakning ixtiyoriy ichki nuqtasidan uning tomonlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisini toping.

**58.** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakning *AC* va *BD* diagonallari *O* nuqtada kesishadi, shu bilan birga $\angle AOB = 50°$ (41- rasm). $\angle DAO$ ni toping.

Y e c h i l i s h i. 1) *ABCD* — to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lgani uchun uning diagonallari *O* nuqtada **kesishadi** va kesishish nuqtasida **teng ikkiga bo‘linadi**, bundan $\triangle AOB$ — **teng yonli** va

$$\angle BAO = \angle \boldsymbol{ABO} = (180° - \mathbf{50}°) : \mathbf{2} = \mathbf{65}°$$

ekani kelib chiqadi.

2) $\angle DAO = \angle BAD - \angle \boldsymbol{BAO} = 90° - \mathbf{65}° = \mathbf{25}°$.

J a v o b: $\angle DAO = \mathbf{25}°$. E s l a t m a! Muhim joylar ajratib ko‘rsatilgan.

**59.** 1) Agar to‘rtburchak diagonallari teng va ular kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linsa, bu to‘rtburchak to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lishini isbot qiling.

2) Agar to‘rtburchakning uchta ichki burchagi to‘g‘ri burchak bo‘lsa, uning qarama-qarshi tomonlari parallel bo‘ladi. Buni isbot qiling.

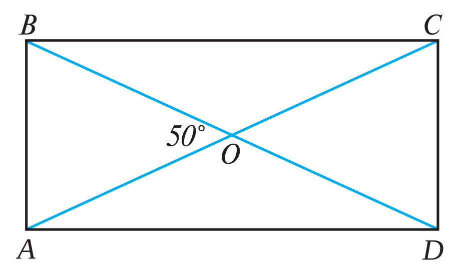
**60.** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakning *BD* diagonali *AB* tomon bilan 65° li burchak tashkil qiladi. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari kesishishidan hosil bo‘lgan o‘tkir burchakni toping.

**61.** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetri 24 sm ga teng. *P* nuqta *BC* tomonning o‘rtasi, $\angle APD = 90°$ (42- rasm). Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlarini toping. Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

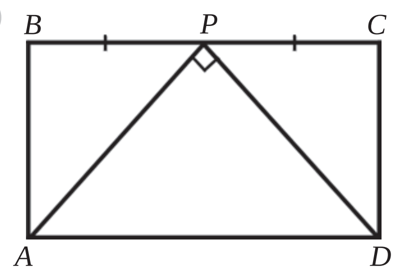
Y e c h i l i s h i. $BP = PC$ va $AB = DC$ bo‘lgani uchun $\triangle ABP = \triangle DCP$ (...). Bundan $\angle BPA = \angle CPD$ kelib chiqadi. Shartga ko‘ra, $\angle APD = ...°$, demak, $\angle BPA + \angle CPD = ...°$ bo‘ladi. U holda $\angle BPA = 45°$ va $\triangle ABP$ — teng yonli. Shunday qilib, $AB + BC = AB + 2AB$, ya’ni $3AB = 12$ sm, bundan $AB = ...$ sm, $BC = ...$ sm.

**62.** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakning *AB* tomoni 6 sm ga, diagonallari esa 10 sm ga teng. *O* — to‘g‘ri to‘rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasi. *COD* uchburchakning perimetrini toping.

41




42



## 6- mavzu. ROMB VA UNING XOSSALARI

**Ta'rif.** *Tomonlari teng bo'lgan parallelogramm* ***romb*** *deyiladi* (43-rasm).

Romb parallelogrammning umumiy xossalariga ega bo'lgan holda yana quyidagi xossaga ega:

**Teorema.**

**Rombning diagonallari o'zaro perpendikular hamda rombning burchaklarini teng ikkiga bo'ladi.**

Isbot. $ABCD$ — berilgan romb (44- rasm), $O$ — uning diagonallari kesishgan nuqta bo'lsin. $AC \perp BD$ va har bir diagonal rombning mos burchaklarini teng ikkiga bo'lishini (masalan, $\angle BAC = \angle DAC$) isbotlaymiz.

Rombning ta'rifiga ko'ra, $AB = AD$, shuning uchun $BAD$ uchburchak teng yonli. Romb parallelogramm bo'lgani uchun uning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi, ya'ni $BO = OD$. Demak, $AO$ — teng yonli $BAD$ uchburchakning medianasi. Teng yonli uchburchakning xossasiga ko'ra, uning asosiga o'tkazilgan mediana ham bissektrisa, ham balandlik bo'ladi. Shuning uchun $AC \perp BD$ va $\angle BAC = \angle DAC$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

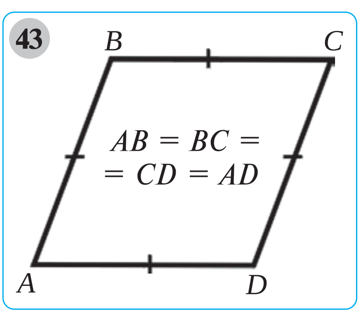
**1-masala.** $ABCD$ rombning $BD$ diagonali tomoni bilan $35^\circ$ li burchak hosil qiladi. Uning burchaklarini toping.

Yechilishi. $\angle ABD = 35^\circ$, deylik (45- rasm). U holda $\angle CBD = 35^\circ$ (rombning xossasiga ko'ra). $\angle ABC = 2\,\angle ABD = 2 \cdot 35^\circ = 70^\circ$, $\angle ADC = \angle ABC = 70^\circ$ (parallelogrammning xossasiga ko'ra), $\angle DAB = 180^\circ - \angle ABC$ ( parallelogrammning 3- xossasiga ko'ra). Demak, $\angle DAB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$, $\angle BCD = \angle DAB = 110^\circ$ (parallelogrammning xossasiga ko'ra). Javob: $70^\circ$, $110^\circ$, $70^\circ$, $110^\circ$.

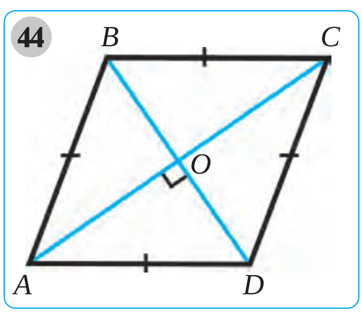
**2- masala.** Har xil romblarning perimetrlari teng bo'lishi mumkinmi?

Yechilishi. Perimetrlari teng bo'lgan romblar bir-biridan burchaklari bilan farq qiladi. Agar rombning o'tkir burchagi: 1) $40^\circ$ ga teng bo'lsa, u holda qolgan burchaklari, mos ravishda, $140^\circ$, $40^\circ$, $140^\circ$ bo'ladi; 2) $15^\circ$ ga teng bo'lsa, u holda qolgan burchaklari, mos ravishda, $165^\circ$, $15^\circ$, $165^\circ$ bo'ladi va h.k. Shuningdek, o'tkir burchak o'rniga turli o'tmas burchaklarni olish mumkin.

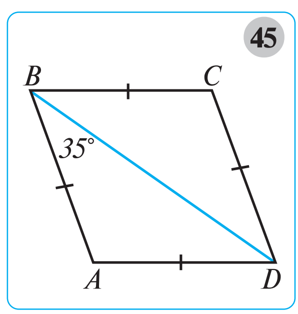
Javob: ha, mumkin.



43



44



45

## Savol, masala va topshiriqlar

**63.** 1) Romb deb nimaga aytiladi?
2) Rombning diagonallari o‘zaro perpendikular ekanini isbotlang.

**64.** 1) Qanday ikkita teng uchburchakdan romb yasash mumkin?
2) Qanday to‘rtta teng uchburchakdan romb yasash mumkin?

**65.** Rombning: 1) kichik diagonali uning tomoniga teng; 2) tomonlaridan biri bilan uning diagonallari hosil qiladigan burchaklari nisbati $4:5$ ga teng. Rombning burchaklarini toping.

**66.** 1) Romb tomonining uzunligi uning diagonali uzunligining yarmiga teng bo‘lishi mumkinmi?
2) Rombning barcha tomonlaridan baravar uzoqlashgan nuqta mavjudmi?
3) $ABCD$ – romb. $BAC$ va $BDC$ burchaklarning bissektrisalari qanday burchak ostida kesishadi?

**67.** $ABCD$ rombning tomoni 24 sm ga, $A$ burchagi esa $30^\circ$ ga teng. $D$ uchidan unga qarama-qarshi $BC$ tomongacha bo‘lgan masofani toping.

Y e c h i l i s h i. $B$ nuqtadan $AD$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa $B$ nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning uzunligiga, ya’ni $BP$ kesma uzunligiga teng (46- rasm). $ABP$ uchburchakni ko‘rib chiqamiz. Unda $\angle APB = ...^\circ$, $\angle A = ...^\circ$, $AB = ...$ . U holda

$$BP = 0{,}5 \cdot ... = 0{,}5 \cdot ... = ... \text{ (sm)}$$

($...^\circ$ li burchak qarshisida yotgan katetning xossasiga ko‘ra).

J a v o b: $BP = ....$ sm.

**68.** Sirkul va bo‘limli chizg‘ich yordamida diagonallari 2 sm va 5 sm ga teng hamda $m$ va $l$ to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi romb yasang (47- rasm).

**69.** Rombning hamma balandliklari o‘zaro teng ekanini isbot qiling.

**70.** Isbot qiling: 1) hamma tomonlari teng to‘rtburchak rombdir;
2) ikkita qo‘shni tomoni teng parallelogramm rombdir.

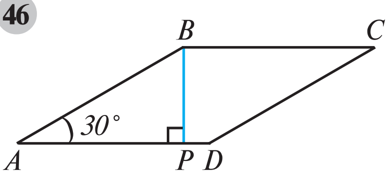
**71.** Parallelogrammning diagonallari o‘zaro perpendikular bo‘lganda va faqat shundagina uning romb bo‘lishini isbot qiling.

**72.** Rombning perimetri 72 sm ga teng. Uning tomonlarini toping.

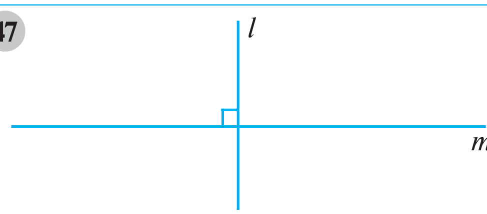
**73.** Rombning diagonallari bilan tomonlari orasida hosil bo‘lgan burchaklarning nisbati $2:7$ kabi. Rombning burchaklarini toping.

**74.** Burchaklaridan biri $60^\circ$, kichik diagonalining uzunligi 16 sm bo‘lgan romb perimetrini toping.

46




47



## 7- mavzu. KVADRAT VA UNING XOSSALARI

**Ta’rif.** *Tomonlari teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak* ***kvadrat*** *deb ataladi.*

Kvadrat va rombning ta’riflaridan kvadrat burchaklari to‘g‘ri bo‘lgan romb ekanligi kelib chiqadi (48-*a* rasm). Kvadrat ham parallelogramm, ham to‘g‘ri to‘rtburchak, ham romb bo‘lgani uchun ularning barcha xossalariga egadir. Kvadratning asosiy xossalarini keltiramiz.

**1. Kvadratning hamma burchaklari to‘g‘ri.**

**2. Kvadratning diagonallari o‘zaro teng.**

**3. Kvadratning diagonallari o‘zaro perpendikular va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi hamda kvadratning burchaklarini teng ikkiga bo‘ladi** (48-*b* rasm).

Shu xossalarni mustaqil isbot qiling.

**1-masala.** Agar rombning diagonallari teng bo‘lsa, u holda bunday romb kvadrat ekanini isbotlang.

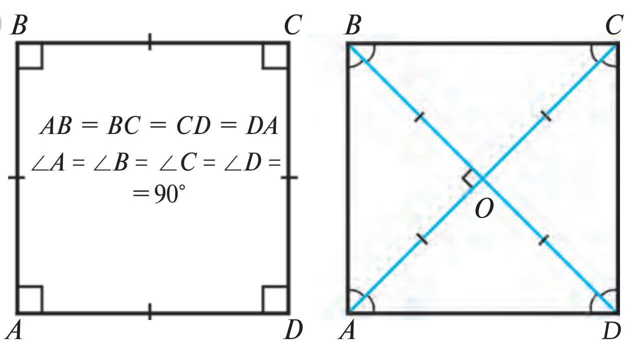
Isbot. Romb parallelogramm bo‘lgani uchun to‘g‘ri to‘rtburchakning alomatidan diagonallari teng bo‘lgan rombning to‘g‘ri to‘rtburchak ekani kelib chiqadi, va, demak, u kvadrat bo‘ladi.

**2-masala.** To‘rtburchakning diagonallari perpendikular va o‘zaro bir-biriga teng. Shu to‘rtburchak kvadrat bo‘ladimi?

Yechilishi. Masala shartini qanoatlantiruvchi to‘rtburchaklardan biri 49- rasmda tasvirlangan. Bu holda diagonallardan biri teng ikkiga bo‘lingan. Ammo bu kvadratning 2- xossasini hamda 3- xossada keltirilgan shartning bir qismini, ya’ni o‘zaro perpendikularlik shartini qanoatlantiradi, xolos. Keltirilgan holatda faqat diagonallaridan biri teng ikkiga bo‘lingan, shu sababli bu to‘rtburchak kvadrat bo‘la olmaydi. Ma’lum bir holatda to‘rtburchakning har ikkala diagonali kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linishi mumkin. Faqat shu holdagina to‘rtburchak kvadrat bo‘la oladi.

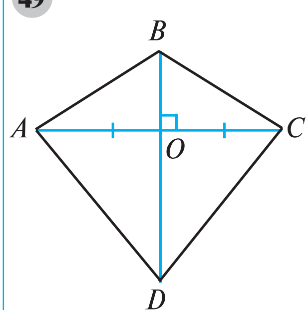
Javob: shart emas.

48




*a* *b*

49




$AC = BD$, $AC \perp BD$

## Savol, masala va topshiriqlar

**75.** a) Kvadrat deb nimaga aytiladi? Kvadratning xossalarini ayting.
b) Kvadratga: 1) «parallelogramm»; 2) «romb»; 3) «to‘g‘ri to‘rtburchak» tushunchasi yordamida ta’rif bering.

**76.** Kvadrat — kvadrat bo‘lmagan: 1) to‘g‘ri to‘rtburchakka nisbatan; 2) rombga nisbatan qanday alohida xossalarga ega?

**77.** 1) Kvadratning tomoni 20 sm ga teng. Diagonallari kesishish nuqtasidan tomonlaridan birigacha bo‘lgan masofani toping.
2) Kvadratning diagonali bilan tomoni orasidagi burchak nimaga teng? Diagonallari orasidagi burchak-chi?

**78.** Kvadratning perimetri 32 sm ga teng. Uning tomoni nimaga teng?

**79.** To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi 32 sm, eni esa 28 sm ga teng. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetriga teng bo‘lgan kvadratning tomonini toping.

**80.** Qanday: 1) ikkita; 2) to‘rtta teng uchburchakdan kvadrat hosil qilish mumkin? Mumkin bo‘lgan yechimlarni ko‘rsating.

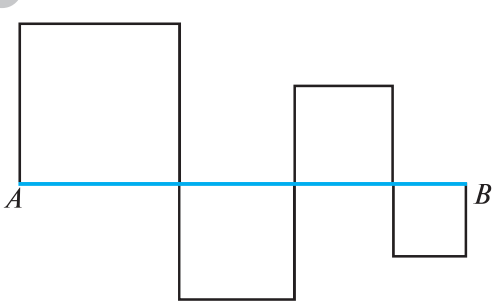
**81.** $AB = 19$ sm li kesmaga kvadratchalar yasalgan bo‘lib, ularning bir tomoni $AB$ tomonda, ikkita qo‘shni kvadratlar umumiy uchga ega va $AB$ dan turli tomonda joylashgan (50- rasm). Kvadratlarning $AB$ kesmada yotmagan tomonlari uzunliklari yig‘indisini toping.

**82.** 1) Berilgan: $ABCD$ — kvadrat, $AE = BF = CP = DL$ (51- rasm).
Isbot qilish kerak: $EFPL$ — kvadrat ekanligini.
2) Agar kvadrat tomonlarining o‘rtalari ketma-ket to‘g‘ri chiziq kesmasi bilan birlashtirilsa, natijada qanday shakl hosil bo‘ladi?
3) To‘rtburchakning kvadrat ekanligini tekshirish uchun diagonallarining tengligini va perpendikularligini tekshirish kifoya qiladimi?

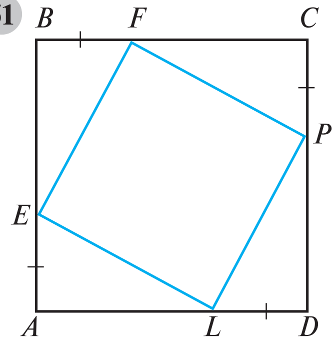
**83.** Kvadratning diagonallari kesishish nuqtasidan tomonlaridan birigacha bo‘lgan masofa 2 dm 3 sm ga teng. Kvadratning perimetrini toping.

**84.** 1) Kvadratning perimetri 30 sm ga teng. Uning tomoni nimaga teng?
2) $ABCD$ kvadratda $AC$ diagonal o‘tkazilgan. a) $ACD$ uchburchakning turini; b) $ACD$ uchburchakning burchaklarini toping.

50




51



## 8- mavzu. UCHBURCHAKNING O‘RTA CHIZIG‘I

**Ta’rif.** *Uchburchakning* ***o‘rta chizig‘i*** *deb, uning ikki tomoni o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.*

$ABC$ uchburchakda $AD=DB$ va $CE=EB$ bo‘lsin, u holda $DE$ o‘rta chiziq bo‘ladi (ta’rifga ko‘ra). $DE$ o‘rta chiziqqa nisbatan $AC$ tomon *asos* deb ataladi (52- rasm). Har qanday uchburchakda uchta o‘rta chiziq bo‘ladi (53- rasm).

**Teorema.**

**Uchburchakning o‘rta chizig‘i uning uchinchi tomoniga parallel, uning uzunligi esa bu tomon uzunligining yarmiga teng.**

Berilgan: $\triangle ABC$ da: $AD=DB$, $CE=EB$, $DE$ — o‘rta chiziq (54- rasm).

Isbot qilish kerak: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE=\frac{1}{2}AC$.

Isbot. Isbot qilish uchun $DE$ to‘g‘ri chiziqda $EF=DE$ kesmani qo‘yamiz hamda $C$ va $F$ nuqtalarni kesma yordamida tutashtiramiz. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra, $EBD$ va $ECF$ uchburchaklar teng (shartga ko‘ra ularda $BE=CE$, yasashga ko‘ra $DE=FE$, vertikal burchaklar bo‘lgani uchun $\angle 1=\angle 2$). Bundan $CF=BD$, va, demak, $CF=AD$ kelib chiqadi. 3 va 4 burchaklar teng, shu sababli $AB$ va $CF$ to‘g‘ri chiziqlar parallel. Shunday qilib, parallelogrammning alomatiga ko‘ra, $ACFD$ to‘rtburchak parallelogramm bo‘ladi. Shunga ko‘ra, $AC$ tomon $DF$ ga parallel va unga teng. $DE$ o‘rta chiziq $DF$ kesmaning yarmiga teng, va, demak, u $AC$ tomonning yarmiga teng bo‘ladi.

Demak, isbotga ko‘ra, $DE \parallel AC$ va $DE=\frac{1}{2}AC$ ekan. Teorema isbotlandi.

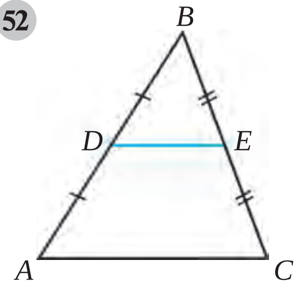
**1- masala.** Uchburchakning perimetri $p$ ga teng. Uchlari berilgan uchburchak tomonlarining o‘rtalarida bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.

Yechilishi. Hosil bo‘lgan uchburchakning tomonlari berilgan uchburchakning o‘rta chiziqlari bo‘ladi (53- rasm). Demak, ular mos tomonlarining yarmiga teng. Shu sababli izlanayotgan perimetr berilgan uchburchak perimetrining yarmiga teng bo‘ladi:

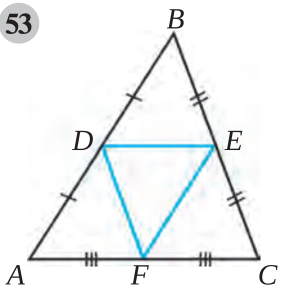
$$P_{DEF}=DE+EF+FD=0{,}5(AC+AB+BC)=0{,}5p.$$

Javob: $0{,}5p$.

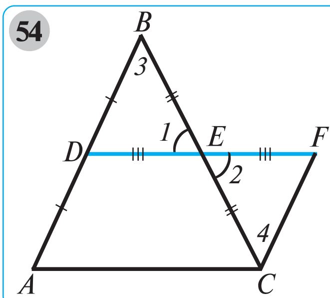
52

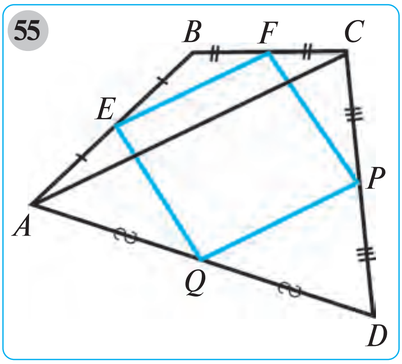



53




54






**2- m a s a l a .** Qavariq to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari ketma-ket birlashtirilsa, parallelogramm hosil bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

Y e c h i l i s h i . $ABCD$ – qavariq to‘rtburchak, $E$, $F$, $P$ va $Q$ nuqtalar – uning tomonlari o‘rtalari bo‘lsin (55- rasm). $EFPQ$ to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlaymiz. $AC$ diagonalni o‘tkazamiz. $ABC$ uchburchakda $EF$ o‘rta chiziq va shuning uchun $EF \parallel AC$ hamda $EF = 0{,}5AC$, shuningdek, $ACD$ uchburchakda $PQ$ o‘rta chiziq va shuning uchun $PQ \parallel AC$ hamda $PQ = 0{,}5AC$. Yuqoridagi tasdiqlardan ko‘rinadiki, $EFPQ$ to‘rtburchakda: $EF \parallel PQ$ va $EF = PQ = 0{,}5AC$. Demak, parallelogrammning alomatiga ko‘ra, bu to‘rtburchak parallelogrammdir. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**85.** 1) Uchburchakning o‘rta chizig‘i deb nimaga aytiladi?
2) Berilgan uchburchakda nechta o‘rta chiziq yasash mumkin?
3) Uchburchakning o‘rta chizig‘i haqidagi teoremani ifodalang.

**86.** Uchburchakning tomonlari: 1) 4 sm, 6 sm va 8 sm; 2) 5 sm, 7 sm va 11 sm ga teng. Shu uchburchakning o‘rta chiziqlarini toping.

**87.** Uchburchakning perimetri 28 sm ga teng. Uchlari berilgan uchburchak tomonlarining o‘rtalarida bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.

**88.** 1) Teng tomonli uchburchakning perimetri 48 sm ga teng. Shu uchburchakning o‘rta chizig‘ini toping.
2) Uchburchakning perimetri 24,6 sm ga teng. Shu uchburchakning o‘rta chiziqlaridan biri yordamida ajratib olingan uchburchakning perimetrini toping.

**89.** Uchburchak tomonlarining nisbatlari 6 : 8 : 10 kabi, perimetri 120 sm. Uchlari berilgan uchburchak tomonlarining o‘rtalarida bo‘lgan uchburchakning tomonlari va perimetrini toping.

**90.** Berilgan to‘rtburchak diagonallarining uzunliklari $m$ va $n$ ga teng. Uchlari berilgan to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalarida yotuvchi to‘rtburchakning perimetrini toping. Agar $m = 6$ dm va $n = 10$ dm bo‘lsa, bu perimetrni hisoblang.

**91.** To‘g‘ri to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari rombning uchlari ekanini isbotlang. Va aksincha, romb tomonlarining o‘rtalari to‘g‘ri to‘rtburchakning uchlari ekanini isbotlang.

**92.** 1) $ABC$ uchburchakning $A$, $B$ va $C$ uchlari orqali qarshisida yotgan tomonlarga parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlardan hosil bo‘lgan $A_1B_1C_1$ uchburchakning tomonlari $A$, $B$ va $C$ nuqtalarda teng ikkiga bo‘linadi. Shuni isbot qiling.
2) $AB = 12$ sm, $BC = 24$ sm, $AC = 30$ sm deb, masalaning birinchi qismida ko‘rsatilgandek yasalgan uchburchak tomonlarini toping.

**93.** 1) To‘g‘ri to‘rtburchakning ikkita qo‘shni tomoni o‘rtalarini tutashtiruvchi kesma diagonallaridan biriga parallel ekanini isbot qiling. Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonali 12 sm ga teng bo‘lsa, bu kesma uzunligini toping.
2) O‘tkir burchakli $ABC$ uchburchakda $D$ va $E$ nuqtalar, mos ravishda, $AB$ va $AC$ tomonlarning o‘rtalari, $AF$ esa uchburchakning balandligi. $DFE$ burchakning $A$ burchakka tengligini isbotlang.

**94.** Uchburchakning tomonlari o‘rtalari tutashtirilib, perimetri 50 sm ga teng uchburchak hosil qilindi. Berilgan uchburchakning perimetrini toping. Xulosa chiqaring.

**95.** Uchburchakning perimetri 14,6 sm ga teng. Shu uchburchakning o‘rta chiziqlaridan biri yordamida ajratib olingan uchburchakning perimetrini toping.

**96.** Kvadratning diagonali 14 sm ga teng. Berilgan kvadrat tomonlarining o‘rtalarini ketma-ket tutashtiruvchi kesmalar hosil qilgan to‘rtburchakning perimetrini toping.

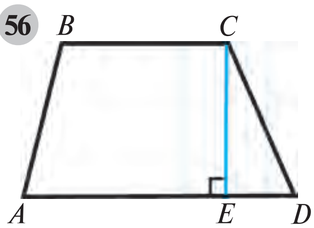
## 9- mavzu. TRAPETSIYA

**Ta’rif.** *Ikkita tomoni parallel, qolgan ikki tomoni parallel bo‘lmagan to‘rtburchak* ***trapetsiya*** *deb ataladi.*

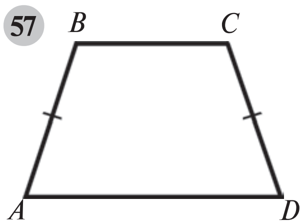
Trapetsiyaning parallel tomonlari uning *asoslari*, parallel bo‘lmagan tomonlari esa *yon tomonlari* deb ataladi. Trapetsiyaning asoslari yotgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa *trapetsiyaning balandligi* deyiladi (56- rasm). Trapetsiya asoslariga perpendikular bo‘lgan har qanday kesma uning balandligi sifatida olinishi mumkin, chunki parallel to‘g‘ri chiziqlar nuqtalari orasidagi masofalar o‘zaro teng.

Yon tomonlari uzunligi teng trapetsiya *teng yonli trapetsiya* deyiladi (57- rasm). Burchaklaridan biri to‘g‘ri bo‘lgan trapetsiya *to‘g‘ri burchakli trapetsiya* deyiladi (58- rasm).

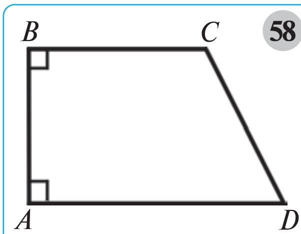
Endi $ABCD$ to‘rtburchakning trapetsiya bo‘lishi uchun qanday shartni qanoatlantirishini ko‘rib chiqamiz.

56


$AD$ va $BC$ – asoslar, $AD \parallel BC$, $AB$ va $DC$ – yon tomonlar, $CE \perp AD$, $CE$ – balandlik

57


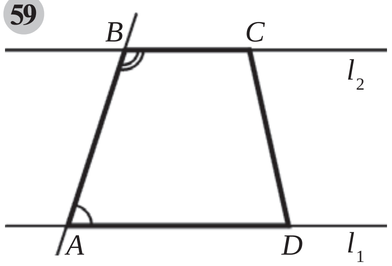
$AB = DC$, teng yonli trapetsiya

58


$\angle A = 90^\circ$, to‘g‘ri burchakli trapetsiya

Birinchidan, bir juft qarama-qarshi tomonlar parallel ekanini ko‘rsatishimiz lozim. Buning uchun bizda parallellik alomati mavjud. Faraz qilaylik, $\angle A + \angle B = 180^\circ$ bo‘lsin (59-rasm). U holda $AD$ va $BC$ kesmalar parallellik alomatiga ko‘ra parallel bo‘ladi. (Ikki $a$ va $b$ to‘g‘ri chiziqlarni uchinchi $c$ to‘g‘ri chiziq kesganda ichki bir tomonli burchaklarning yig‘indisi 180° ga teng bo‘lsa, u holda $a$ va $b$ to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladi.)

59




Ikkinchidan, $ABCD$ to‘rtburchakning qolgan ikki tomoni parallel emasligini ko‘rsatishimiz lozim. Buning uchun $A$ va $D$ (yoki $B$ va $C$) burchaklarning yig‘indisi 180° ga teng emasligiga ishonch hosil qilishimiz yetarli. Bu holda $AB$ va $DC$ kesmalar parallel bo‘la olmaydi (Yevklidning parallel to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘risidagi 5-aksiomasiga ko‘ra). Demak, $ABCD$ to‘rtburchak trapetsiya ekan.

Biz ushbu muhokama orqali **trapetsiyaning alomatini** isbotladik. Uni ifodalaymiz.

**Teorema.**

**Agar to‘rtburchakning bir tomoniga yopishgan ikki burchagining yig‘indisi 180° ga teng hamda unga qo‘shni tomonlarga yopishgan ikki burchagining yig‘indisi 180° dan farqli bo‘lsa, bunday to‘rtburchak *trapetsiya* bo‘ladi.**

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

**Natija.** *Trapetsiyaning bir burchagi 90° bo‘lsa, uning yana bitta 90° li burchagi mavjuddir.*

Demak, to‘g‘ri burchakli trapetsiyaning bitta yon tomoni ikkala asosga perpendikular bo‘lib, uning balandligiga teng bo‘ladi (58- rasmga q.).

Trapetsiyani har qanday uchburchakdan uning bir tomoniga parallel to‘g‘ri chiziq bilan kesish yordamida hosil qilish mumkin (60- rasm).

**1-masala.** 1) Trapetsiyaning ikkita qarama-qarshi burchagi o‘tkir bo‘lishi mumkinmi?

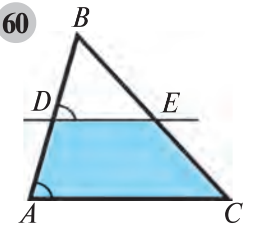
2) Trapetsiyaning asosiga yopishgan burchaklardan biri o‘tkir, ikkinchisi esa o‘tmas bo‘lishi mumkinmi?

Yechilishi. 1) Ha, bo‘lishi mumkin. Bunga misol 61- rasmda ko‘rsatilgan ($A$ va $C$ burchaklar o‘tkir).

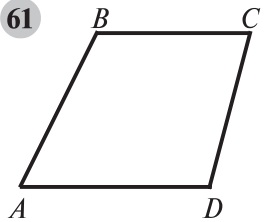
2) Ha, mumkin. 61- rasmdagi $A$ burchak – o‘tkir, $D$ burchak esa o‘tmas.

**2-masala.** Teng yonli trapetsiyaning tomonlari nisbati $1:1:1:2$ kabi. Shu trapetsiyaning burchaklarini toping.

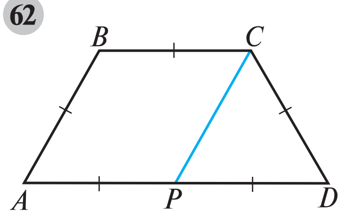
60




61




62



Y e c h i l i s h i . $ABCD$ trapetsiyada $AB = BC = CD = 1$ va $AD = 2$ bo'lsin. $AD$ tomonning o'rtasini $P$ bilan belgilaymiz (62- rasm). $ABCP$ to'rtburchakning $AP$ va $BC$ tomonlari teng va parallel. Demak, parallelogrammning alomatiga ko'ra, bu to'rtburchak parallelogramm bo'ladi. Shunga ko'ra, $PC = AB = 1$. $PCD$ uchburchakning hamma tomonlari 1 ga teng, shuning uchun $\angle PDC = 60°$. Shunday qilib, $ABCD$ trapetsiyada $\angle A = \angle D = 60°$ va $\angle B = \angle C = 120°$.

J a v o b : $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**97.** 1) Qanday to'rtburchak trapetsiya deyiladi?
2) Trapetsiyaning qaysi tomonlari: a) asoslari; b) yon tomonlari deyiladi?
3) Qanday trapetsiya: a) teng yonli trapetsiya; b) to'g'ri burchakli trapetsiya deb ataladi?

**98.** Trapetsiya uchidan o'tmagan balandligi uni ikkita to'g'ri burchakli trapetsiyaga ajratadi. Shuni chizib ko'rsating.

**99.** To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga parallel to'g'ri chiziq kesmasi uni qanday shakllarga ajratadi?

**100.** To'rtburchakning diagonallari teng. Shu to'rtburchak teng yonli trapetsiya bo'lishi mumkinmi?

**101.** To'g'ri burchakli trapetsiya yon tomonlarining nisbati $1:2$ kabi. Trapetsiyaning eng katta burchagini toping.

**102.** Trapetsiyaning diagonali yon tomoniga perpendikular, shu diagonal qarshisidagi o'tkir burchak 50° ga teng. Trapetsiyaning kichik asosi ikkinchi yon tomoniga teng. Trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

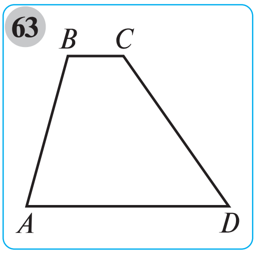
**103.** $ABCD$ trapetsiyaning asosidagi $B$ va $C$ burchaklari 110° va 99° ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

**104.** 1) $ABCD$ trapetsiyaning kichik asosi $BC = 4$ sm. $B$ uchidan yon tomoniga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning perimetri 12 sm ga teng. Trapetsiyaning perimetrini toping.
2) $ABCD$ to'g'ri burchakli trapetsiyaning ($AD \parallel BC$ va $BA \perp AD$) kichik diagonali katta yon tomoniga teng. Trapetsiyaning kichik diagonali va kichik asosi orasidagi burchak 50° ga teng. Trapetsiyaning o'tkir burchagini toping.

**105.** Trapetsiyaning asoslari 12 sm va 20 sm, yon tomonlari esa 4 sm va 11 sm. Kichik asosining uchidan kichik tomoniga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Shu parallel to'g'ri chiziq ajratgan uchburchakning perimetrini toping.

**106.** Trapetsiyada: 1) uchta to'g'ri burchak; 2) uchta o'tkir burchak;
3) uchta burchak yig'indisi 180° ga teng bo'la oladimi?
Javobingizni asoslang.

**107.** $AD$ va $BC$ asosli $ABCD$ trapetsiyaning $B$ va $C$ burchaklarini toping, bunda $\angle A = 75°$ va $\angle D = 55°$ (63- rasm). Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.




Y e c h i l i s h i. $A$ va $B$, $C$ va $D$ burchaklar $AD$ va $BC$ parallel to‘g‘ri chiziqlarni ... va ... kesuvchilar bilan kesishishidan hosil bo‘lgan ..., shuning uchun $\angle A + \angle B = ...^\circ$ va $\angle C + \angle D = ...^\circ$. Shartga ko‘ra, $\angle A = 75^\circ$ va $\angle D = 55^\circ$, u holda $\angle B = ...^\circ - \angle A = ...^\circ - ...^\circ = ...^\circ$ va $\angle C = ...^\circ - \angle D = = ...^\circ - ...^\circ = ...^\circ$.

J a v o b: $\angle B = ...^\circ$, $\angle C = ...^\circ$.

**108.** $ABCD$ trapetsiyaning asosidagi $A$ va $D$ burchaklari 72° va 86° ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

**109.** $ABCD$ trapetsiyaning kichik asosi 6 sm ga, $ABE$ uchburchakning ($BE \parallel CD$) perimetri 36 sm ga teng. Shu tapetsiyaning perimetrini toping.

**110.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning qarama-qarshi burchaklaridan biri ikkinchisidan 40° ga katta. Shu trapetsiyaning burchaklarini toping.

## 10- mavzu. TENG YONLI TRAPETSIYANING XOSSASI

$ABCD$ teng yonli trapetsiyani qaraylik. Bunda $AD = a$ — katta asos, $BC = b$ — kichik asos bo‘lsin. Kichik asosining $B$ uchidan $BP$ balandlik o‘tkazaylik (64-rasm). Balandlikning $P$ asosi $AD$ asosni $AP$ va $PD$ kesmalarga ajratsin.

**T e o r e m a.**

**Teng yonli trapetsiyaning o‘tmas burchagi uchidan o‘tkazilgan balandlik katta asosini uzunliklari asoslari ayirmasining yarmiga va asoslari yig‘indisining yarmiga teng bo‘laklarga ajratadi, ya’ni:**

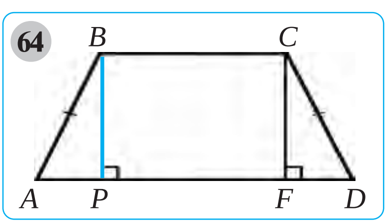
$$AP = \frac{a-b}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$

I s b o t. $C$ uchidan $CF \perp AD$ ni o‘tkazamiz. To‘g‘ri burchakli $ABP$ va $DCF$ uchburchaklar teng: $AB = DC$ — shartga ko‘ra, $BP = CF$ esa $BC$ va $AD$ parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa bo‘lgani uchun. Uchburchaklar tengligidan, $AP = FD$ kelib chiqadi.

To‘g‘ri chiziqqa perpendikular ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro parallel bo‘ladi. Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa teng bo‘lgani uchun $BC = PF = b$.

Demak, $AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}$, $PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Shunday qilib, $AP = \frac{a-b}{2}$ va $PD = \frac{a+b}{2}$ ekan.




**M a s a l a.** Teng yonli trapetsiyaning asosidagi burchaklari teng ekanini isbot qiling.

Y e c h i l i s h i. Trapetsiyaning $B$ va $C$ uchlaridan $AD$ asosiga perpendikular o‘tkazamiz: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (64- rasmga q.). To‘g‘ri burchakli $ABP$ va $DCF$ uchburchaklar (gipotenuza va katetga ko'ra) teng: $AB = DC$ – shartga ko'ra, $BP = CF$ esa $BC$ va $AD$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa bo'lgani uchun. Uchburchaklar tengligidan, $\angle A = \angle D$ kelib chiqadi.

$A$ va $B$, $C$ va $D$ burchaklar $AD$ va $BC$ parallel to'g'ri chiziqlarni, mos ravishda, $AB$ va $CD$ kesuvchilar bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki bir tomonli burchaklar, shuning uchun $\angle A + \angle B = 180°$ va $\angle C + \angle D = 180°$. Bundan $\angle B = \angle C$ ekani kelib chiqadi.

Shunday qilib, teng yonli trapetsiyaning asosidagi burchaklari teng ekan: $\angle A = \angle D$ va $\angle B = \angle C$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**111.** 1) Qanday trapetsiya teng yonli trapetsiya deb ataladi?

2) Teng yonli trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan o'tkazilgan balandlik qanday xossaga ega?

**112.** Teng yonli trapetsiyaning qarama-qarshi burchaklari ayirmasi 50° ga teng ekani ma'lum bo'lsa, uning burchaklari nimaga teng?

**113.** Teng yonli trapetsiyaning o'tkir burchagi 60°, asoslari 15 sm va 49 sm ekani ma'lum. Shu trapetsiyaning perimetrini toping.

**114.** Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 60° ga, yon tomoni 24 sm ga, asoslarining yig'indisi esa 43 sm ga teng. Trapetsiyaning asoslarini toping.

**115.** Teng yonli trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan o'tkazilgan balandlik katta asosini 6 sm va 30 sm li kesmalarga bo'ladi. Shu trapetsiyaning asoslarini toping.

**116.** Teng yonli uchburchakni asosiga parallel to'g'ri chiziq bilan kesganda, teng yonli trapetsiya hosil bo'lishini isbotlang.

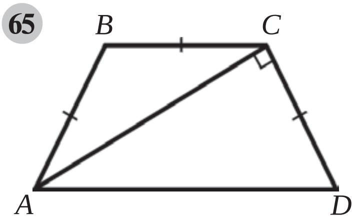
**117.** Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 105° ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

**118.** 1) Teng yonli trapetsiyaning diagonallari teng ekanligini isbot qiling.

2) Teng yonli trapetsiyaning balandligi yon tomonidan ikki marta kichik. Shu trapetsiyaning burchaklari nimaga teng?

**119.** Teng yonli trapetsiyaning kichik asosi yon tomoniga teng, diagonali yon tomoniga perpendikular (65- rasm). Uning burchaklarini toping.

65




**120.** Teng yonli trapetsiyaning qarama-qarshi burchaklari ayirmasi 70° ga teng. Uning burchaklarini toping.

**121.** Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 72° ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

**122.** Teng yonli trapetsiyaning katta tomoni 5,4 dm ga, yon tomoni 2 dm ga va ular orasidagi burchak 60° ga teng. Uning kichik asosini toping.

## 11- mavzu. TRAPETSIYANING O‘RTA CHIZIG‘I

**Ta’rif.** *Trapetsiya yon tomonlari o‘rtasini tutashtiruvchi kesma* ***trapetsiyaning o‘rta chizig‘i*** *deyiladi.*

Bizga $ABCD$ trapetsiya berilgan bo‘lib, unda $AD$ va $BC$ — trapetsiya asoslari; $AB$ va $DC$ uning yon tomonlari, $E$ va $F$ nuqtalar yon tomonlarining o‘rtalari bo‘lsin (66- rasm). Bunda $EF$ — o‘rta chiziq bo‘ladi.

**Teorema.**

**Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uning asoslariga parallel va uning uzunligi trapetsiya asoslari uzunliklari yig‘indisining yarmiga teng.**

Isbot. *1- usul.* $EF$ — $ABCD$ trapetsiyaning o‘rta chizig‘i bo‘lsin ($AD \parallel BC$). $BF$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz va uning $AD$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasini $P$ deb belgilaymiz (67- rasm). Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko‘ra, $BCF$ va $PDF$ uchburchaklar teng ($CF = DF$ — shartga ko‘ra, $\angle 1 = \angle 2$ — vertikal burchaklar va $\angle 3 = \angle 4$ — ichki almashinuvchi burchaklar bo‘lgani uchun). Bu uchburchaklarning tengligidan $BF = PF$ va $BC = DP$ kelib chiqadi va, demak, $EF$ — $ABP$ uchburchakning o‘rta chizig‘i bo‘ladi. Uchburchakning o‘rta chizig‘i haqidagi teoremaga asosan: $EF \parallel AP$ va $EF = \frac{1}{2}AP$ larga ega bo‘lamiz. $AD \parallel BC$ bo‘lgani sababli, $EF$ har ikkala asosga parallel bo‘ladi va bundan tashqari,

$$EF = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

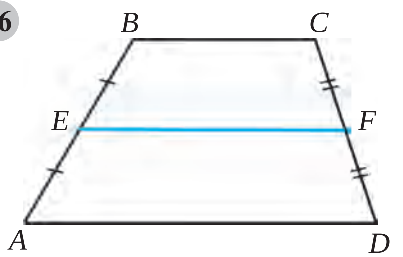
Demak, $EF \parallel AD \parallel BC$ va $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

*2- usul.* Teoremani isbot qilish uchun trapetsiyaning kichik asosi uchidan ikkinchi yon tomonga parallel $BN$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (68- rasm). Bunda trapetsiya parallelogramm va uchburchakka ajraladi. $BCDN$ parallelogrammda qarama-qarshi tomonlar bo‘lgani uchun $BC = ND$ va $CD = BN$. Shuningdek, $CF = BP$ ($BCFP$ parallelogrammning qarama-qarshi tomoni) va $FD = PN$ ($PFDN$ parallelogrammning qarama-qarshi tomoni). Bundan topamiz: $BP = PN$ ($CF = FD$ — yasashga ko‘ra). $\triangle ABN$ da $BE = EA$ (shartga ko‘ra) va $BP = PN$ (isbotga ko‘ra), va demak, ta’rifga ko‘ra, $EP$ o‘rta chiziq bo‘ladi. Bundan $EP \parallel AN$ kelib chiqadi.

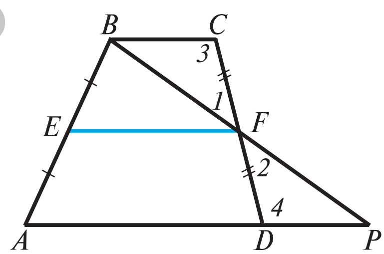
Uchburchak o‘rta chizig‘i xossasiga ko‘ra, $EP = \frac{1}{2}AN$.

Ammo, $AN = AD - ND = AD - BC$.

66



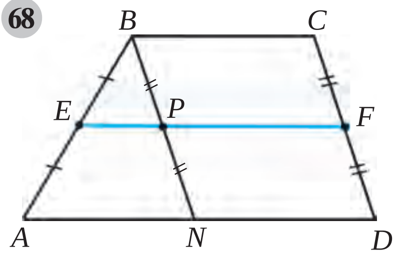

67



Trapetsiyaning oʻrta chizigʻi $EF = EP + PF$ yoki $EF = \frac{1}{2}AN + PF$, bu yerda $AN = AD - BC$ va $PF = BC$ ekanini nazarga olsak, $EF = \frac{AD - BC}{2} + BC = \frac{AD + BC}{2}$ kelib chiqadi.

Demak, $EF = \frac{AD+BC}{2}$ ekan.

68



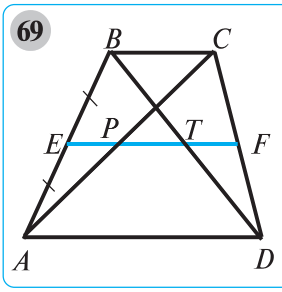

**Natija.** Trapetsiyaning yon tomoni oʻrtasidan oʻtuvchi va asoslariga parallel toʻgʻri chiziq ikkinchi yon tomonini teng ikkiga boʻladi. Shuni isbotlang.

Isbot. $ABCD$ – berilgan trapetsiya ($AD \parallel BC$), $AE = EB$ va $EF \parallel AD$ boʻlsin (67- rasmga q.). Trapetsiyaning oʻrta chizigʻi $E$ nuqta orqali oʻtadi va $AD$ ga parallel boʻlgani sababli, oʻrta chiziq (parallellik aksiomasiga asosan) $EF$ bilan ustma-ust tushadi va, demak, $EF$ toʻgʻri chiziq ikkinchi yon tomonini teng ikkiga boʻladi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

**Masala.** Trapetsiya diagonallarining oʻrtalarini tutashtiruvchi kesma asoslariga parallel va asoslar ayirmasining yarmiga tengligini isbotlang.

Isbot. $ABCD$ – berilgan trapetsiya, $AD$ uning katta asosi boʻlsin (69- rasm). $AB$ tomonning oʻrtasi $E$ orqali asoslarga parallel toʻgʻri chiziq oʻtkazamiz. U diagonallarni $P$ va $T$ nuqtalarda kesib oʻtadi, bu nuqtalar diagonallarning oʻrtalaridir. $ET$ kesma $ABD$ uchburchakning oʻrta chizigʻi, $EP$ esa $ABC$ uchburchakning oʻrta chizigʻi. $PT$ kesma bu oʻrta chiziqlarning ayirmasiga teng:

69




$$PT = ET - EP = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**123.** 1) Trapetsiyaning oʻrta chizigʻi deb nimaga aytiladi?
2) Trapetsiyaning oʻrta chizigʻi haqidagi teoremani ayting va undagi belgilashlarni yozing.

**124.** Trapetsiyaning asoslari: 1) 11 sm va 17 sm; 2) 4,5 dm va 8,2 dm; 3) 9 sm va 21 sm ga teng. Uning oʻrta chizigʻining uzunligi qancha?

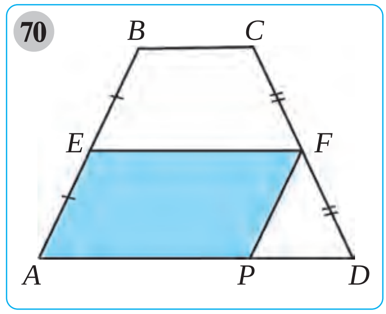
**125.** Trapetsiyaning oʻrta chizigʻi 16 sm ga, asoslaridan biri esa 12 sm ga teng. Trapetsiyaning ikkinchi asosi nimaga teng?

**126.** Trapetsiyaning perimetri 40 sm ga, parallel boʻlmagan tomonlarining yigʻindisi esa 16 sm ga teng. Shu trapetsiyaning oʻrta chizigʻini toping.

**127.** Trapetsiyaning oʻrta chizigʻi 30 sm ga, kichik asosi esa 20 sm ga teng. Shu trapetsiyaning katta asosini toping.

**128.** $ABCD$ trapetsiyaning yon tomoni $AB$ ga parallel $CP$ to‘g‘ri chiziq $AD$ asosni:
1) $AP = 10$ sm va $PD = 8$ sm li;
2) $AP = 5$ sm va $PD = 7$ sm li kesmalarga ajratadi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

**129.** $EF$ – $ABCD$ trapetsiyaning o‘rta chizig‘i. $F$ nuqta orqali $AB$ tomonga parallel va $AD$ tomonni $P$ nuqtada kesadigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan (70- rasm). $AEFP$ parallelogramm ekanini isbotlang.




**130.** Teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘tkir burchagini teng ikkiga bo‘ladi. Trapetsiyaning perimetri 66 sm, asoslarining nisbati 2 : 5 kabi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

**131.** Trapetsiyaning diagonallari uning o‘rta chizig‘ini har biri 6 sm li kesmalarga bo‘ladi. Shu trapetsiya asoslarini toping.

**132.** Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uning balandligini teng ikkiga bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

**133.** $ABCD$ trapetsiyaning tomonlari ma’lum: $AB = 4$ sm, $BC = 6$ sm, $CD = 5$ sm, $AD = 10$ sm. Agar $EF$ – trapetsiyaning o‘rta chizig‘i bo‘lsa, $AEFD$ trapetsiyaning tomonlari nimaga teng?

**134.** Trapetsiyaning katta asosi kichik asosidan 3 marta katta va uning o‘rta chizig‘i 20 sm ga teng. Trapetsiyaning asoslarini toping.

**135.** Trapetsiyaning katta asosi 16 sm ga teng, kichik asosi esa o‘rta chiziqdan 6 sm qisqa. Trapetsiyaning kichik asosi va o‘rta chizig‘ini toping.

**136.** Trapetsiyaning diagonallari uning o‘rta chizig‘ini 5 sm, 4 sm va 7 sm li kesmalarga bo‘ladi. Shu trapetsiya asoslarini toping (69- rasmga q.).

Yechilishi. $ABC$ uchburchakda $EP$ kesma ... bo‘ladi. Demak, $BC = ...$ sm (... xossasiga ko‘ra). $ACD$ uchburchakda $PF$ kesma ... bo‘ladi. $PF = ... + ... = ...$ sm + ... sm = ... sm. Shunga ko‘ra, $AD = ...$ sm.

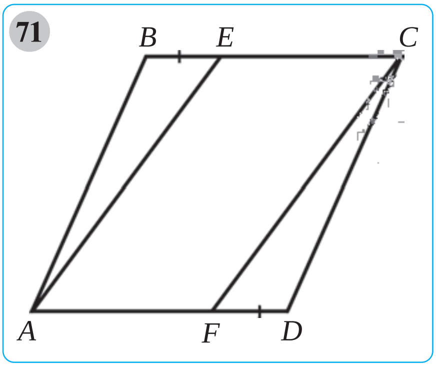
Javob: ... .

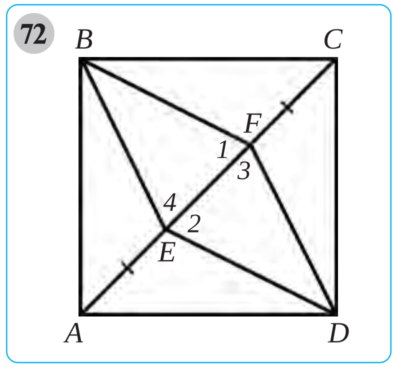
### *1-§ ga (to‘rtburchaklarga) doir qo‘shimcha mashqlar*

**137.** Qavariq $ABCD$ to‘rtburchakda: $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle ACD = 50°$. $BC = AD$ ekanini isbot qiling.

**138.** Parallelogramm tomonlarining uzunliklari 4 sm va 6 sm ga teng. Shu parallelogramm o‘tkir burchagining bissektrisasi katta tomonni qanday kesmalarga bo‘ladi?

**139.** $ABCD$ parallelogrammning $BC$ va $AD$ tomonlarida $E$ va $F$ nuqtalar shunday olinganki, unda $BE = DF$. $AECF$ to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang (71- rasm). Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.




I s b o t. Shartga koʻra, $ABCD$ parallelogramm boʻlgani uchun uning $BC$ va $AD$ qarama-qarshi tomonlari ... va ..., ya'ni ... $\|$ ... va ... = ... . $EC$ = ... – ..., $AF$ = ... – ... va $BE = DF$ ekanligidan, $EC$ = ... boʻladi.

Shunday qilib, $AECF$ toʻrtburchakda ikkita qarama-qarshi tomonlar ... va ... (... $\|$ ..., ... = ...), demak, $AECF$ – ... .

**140.** Oʻtkir burchagi $A$ boʻlgan $ABCD$ parallelogramm berilgan. $B$ uchidan $AD$ tomonga $BK$ perpendikular oʻtkazilgan, $AK = BK$. $C$ va $D$ burchaklarni toping.

**141.** 1) $ABCD$ – toʻgʻri toʻrtburchak. $BAC$ va $BDC$ burchaklarning bissektrisalari $45°$ li burchak ostida kesishadi. $ABCD$ – kvadrat ekanini isbotlang.

2) Agar toʻrtburchakning diagonallari oʻzaro teng boʻlib, toʻrtburchakning burchaklarini teng ikkiga boʻlsa, bunday toʻrtburchak kvadrat boʻladi. Shuni isbotlang.

**142.** 1) B e r i l g a n: $ABCD$ – kvadrat, $AE = CF$ (72- rasm).

I s b o t q i l i s h k e r a k: $BEDF$ – romb ekanligini.

2) Rombning perimetri 16 sm ga, qarama-qarshi tomonlari orasidagi masofa 2 sm ga teng. Rombning burchaklarini toping.

**143.** Agar toʻgʻri toʻrtburchakning diagonallari toʻgʻri burchak ostida kesishsa, uning kvadrat ekanini isbotlang.

**144.** $ABCD$ teng yonli trapetsiyada $BC = 20$ sm, $AB = 24$ sm va $\angle D = 60°$ boʻlsa, uning $AD$ asosini toping.

**145.** Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri $125°$ ga teng. Trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

**146.** Teng yonli trapetsiyaning yon tomoniga yopishgan ikki burchagi bissektrisalari oʻzaro perpendikular ekanini isbotlang.

**147.** Teng yonli trapetsiyaning diagonali oʻtkir burchagini teng ikkiga boʻladi, asoslari esa 6 sm va 15 sm ga teng. Trapetsiyaning perimetrini toping.

**148.** Teng yonli trapetsiyaning oʻtmas burchagi uchidan oʻtkazilgan balandlik katta asosini 5 sm li va 20 sm li kesmalarga ajratadi. Shu trapetsiyaning asoslarini toping.

## 1- TEST

**1.** Qavariq beshburchakning burchaklari kattaliklari $2:3:4:5:6$ kabi nisbatda. Burchaklardan kattasining miqdorini toping.

A) $136°$; B) $162°$; D) $156°$; E) $148°$.

**2.** Ko'pburchak ichki burchaklari va bitta tashqi burchagining yig'indisi $2070°$ ga teng. Shu ko'pburchakning tomonlari soni nechta?

A) 13 ta; B) 16 ta; D) 11 ta; E) 15 ta.

**3.** Har bir ichki burchagi $156°$ bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta burchagi bor?

A) 10; B) 15; D) 12; E) 8.

**4.** Qavariq to'rtburchakning burchaklaridan biri to'g'ri burchak, qolganlari esa o'zaro $6:5:4$ nisbatda. To'rtburchakning kichik burchagini toping.

A) $108°$; B) $60°$; D) $72°$; E) $90°$.

**5.** Ikkita burchagining yig'indisi $100°$ ga teng bo'lgan parallelogrammning katta burchagini toping.

A) $100°$; B) $110°$; D) $130°$; E) $150°$.

**6.** Parallelogrammning ikki tomoni nisbati $3:7$ ga, uning perimetri esa 18 sm ga teng. Shu parallelogrammning kichik tomonini toping.

A) 2,7 sm; B) 5,4 sm; D) 3,4 sm; E) 4,5 sm.

**7.** Parallelogramm burchaklaridan biri ikkinchisidan $30°$ ga katta. Uning katta burchagini toping.

A) $75°$; B) $150°$; D) $105°$; E) $60°$.

**8.** To'g'ri to'rtburchakning eni 5 ga teng, bo'yi undan 7 ga ortiq. Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

A) 34; B) 32; D) 26; E) 30.

**9.** To'g'ri to'rtburchakning perimetri 32 ga, qo'shni tomonlarining ayirmasi 2 ga teng. Uning tomonlarini toping.

A) 8 va 6; B) 12 va 10; D) 9 va 7; E) 11 va 9.

**10.** Rombning diagonali tomoni bilan $25°$ li burchak tashkil qiladi. Rombning katta burchagini toping.

A) $130°$; B) $150°$; D) $120°$; E) $115°$.

**11.** Trapetsiyaning uchta tomoni 4 sm dan, to'rtinchi tomoni esa 8 sm. Trapetsiyaning eng katta burchagini toping.

A) $140°$; B) $120°$; D) $150°$; E) $60°$.

**12.** $ABCD$ trapetsiyada $AC$ diagonal $CD$ yon tomonga perpendikular. Agar $\angle D = 72°$ va $AB = BC$ bo'lsa, $\angle ABC$ ni toping.

A) $150°$; B) $144°$; D) $136°$; E) $108°$.

## *Tarixiy ma'lumotlar*

Qadimda Misr va Bobil matematikasida to'rtburchaklarning quyidagi turlari uchraydi: kvadratlar, to'g'ri to'rtburchaklar, to'g'ri burchakli va teng yonli trapetsiyalar.

O'rta Osiyolik olimlardan **Abu Rayhon Beruniy** ham to'rtburchaklarning turlariga mufassal to'xtalgan. U o'zining **«Astronomiya san'atidan boshlang'ich ma'lumot beruvchi kitob»** nomli asarida «To'rtburchaklarning turi qanday?» deb savol qo'yadi va quyidagicha javob beradi:

**Abu Rayhon Beruniy**
(973–1048)

*«Ulardan birinchisi – kvadrat, uning barcha tomonlari teng, barcha burchaklari to'g'ri, diagonallari, ya'ni qarama-qarshi burchaklarini (uchlarini) tutashtiruvchi chiziqlari esa o'zaro teng.*

*Ikkinchisi – to'g'ri to'rtburchak, u kvadratga nisbatan uzunroq, barcha burchaklari to'g'ri, turli tomonlari turlicha, ularning faqat qarama-qarshi tomonlari va diagonallari teng.*

*Uchinchisi – romb, uning to'rtta tomoni teng, ammo diagonallari turlicha, burchaklari esa to'g'ri burchak emas.*

*To'rtinchisi – romboid, uning diagonallari turlicha, faqat ikkitadan qarama-qarshi tomonlari teng.*

*Bu shakllardan farqli to'rtburchaklar trapetsiyalar deyiladi».*

*Kvadrat* lotincha so'z bo'lib, «to'rt burchakli» degan ma'noni bildiradi. Beruniy arabcha «*murabba*» atamasini ishlatgan, lotinchaga mana shu arabcha atama tarjima qilingan. To'g'ri to'rtburchakning arabchasi «*mustatil*» – «cho'zinchoq» degan ma'noni bildiradi.

*Romb* atamasining vujudga kelishi turlicha tushuntiriladi. U yunoncha so'z bo'lib, romb «*aylanuvchi jism*», «*pildiroq*» ma'nosini beradi. Geometriyaga bu atama pildiroq kesimining rombga o'xshashligi tufayli kirgan. Arabchada romb uchun «*muayyan*» atamasi olingan.

*Trapetsiya* yunoncha so'z bo'lib, tajrimasi «*stolcha*» (ovqat yeyiladigan stol)ga to'g'ri keladi, lug'aviy ma'nosi – «to'rt oyoqlik». Haqiqatan, yunoncha «*trapedzion*» – «stolcha», «xo'rak stoli» ma'nosini beradi.

Beruniyda trapetsiya «*muxarrif*» deb nomlangan, bu atama yunoncha «*trapedzion*»ning arabchaga aynan tajrimasidir.

*Parallelogramm* yunoncha so'z bo'lib, *«to'g'ri chiziqli yuza»* degan ma'noni beradi. Parallelogramm arabchada «*mutavozi al-azla*» atamasi bilan yuritilgan, bu «*asoslari parallel*» degan ma'noni bildiradi.

Beruniy parallelogrammga quyidagicha ta'rif beradi:

*«U to'rtburchakli shakl, uning har qanday ikki qarama-qarshi tomoni parallel. Uning qarama-qarshi burchaklarining uchlarini tutashtiruvchi chiziq diagonal deb ataladi».*

## 12- mavzu. FALES TEOREMASI

**1. Dastlabki tushunchalar.** Bizga o‘zaro parallel $l_1$ va $l_2$ to‘g‘ri chiziqlar hamda ularni kesuvchi $a$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin (73- rasm).

Agar kesuvchi $a$ to‘g‘ri chiziq, $l_1$ va $l_2$ to‘g‘ri chiziqlarni $A$ va $B$ nuqtalarda kesib o‘tsa, $l_1$ va $l_2$ parallel to‘g‘ri chiziqlar $a$ to‘g‘ri chiziqdan $AB$ kesma *ajratadi,* deb aytiladi.

Uchta $l_1$, $l_2$ va $l_3$ parallel to‘g‘ri chiziqlar $a$ to‘g‘ri chiziqni $A$, $B$, $C$ nuqtalarda kesib, $AB$ va $BC$ kesmalar ajratsin (74- rasm).

Agar $AB = BC$ bo‘lsa, parallel to‘g‘ri chiziqlar $a$ to‘g‘ri chiziqdan *teng kesmalar ajratadi,* deb aytiladi (74- rasm).

**Teorema.**

**Agar $a \parallel b$ bo‘lib, $l_1$, $l_2$ va $l_3$ parallel to‘g‘ri chiziqlar $a$ to‘g‘ri chiziqdan teng kesmalar ajratsa, $b$ to‘g‘ri chiziqdan ham teng kesmalar ajratadi.**

Isbot. To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini, mos ravishda, $A$, $B$, $C$ va $A_1$, $B_1$, $C_1$ bilan belgilaylik (75- rasm).

Teorema shartiga ko‘ra, $a \parallel b$ va $AB = BC$. $A_1B_1 = B_1C_1$ ekanini isbot qilishimiz kerak.

To‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lgan $ABB_1A_1$ va $BCC_1B_1$ to‘rtburchaklar parallelogrammdir, chunki ular o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lgan. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari bo‘lgani uchun $AB = A_1B_1$ va $BC = B_1C_1$ bo‘ladi. Bundan $A_1B_1 = B_1C_1$ kelib chiqadi, chunki shartga ko‘ra, $AB = BC$. Teorema isbot bo‘ldi.

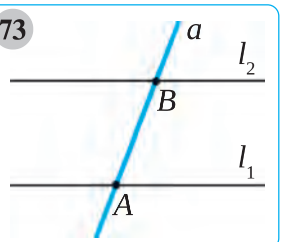
**Eslatma!** Bu holda $AB = BC = A_1B_1 = B_1C_1$ ekanini esda tutish kerak.

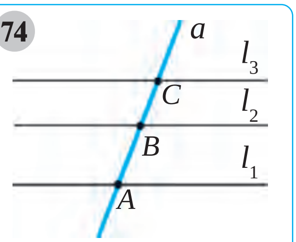
**2. Fales teoremasi.** Quyida ko‘riladigan teorema uchburchak va trapetsiyaning o‘rta chiziqlari haqidagi teoremalarning umumlashgan holi bo‘lib, u «**Fales teoremasi**» deb ataladi.

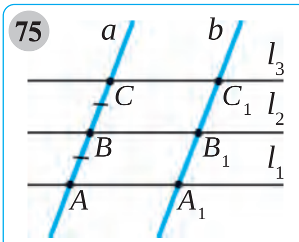
**Teorema.**

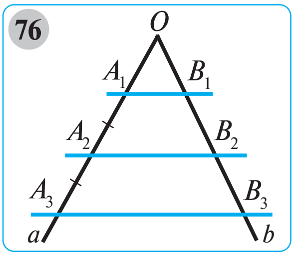
**Agar burchak tomonlarini kesuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar uning bir tomonidan teng kesmalar ajratsa, ular ikkinchi tomonidan ham teng kesmalar ajratadi.**

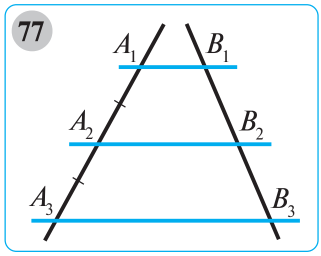
Isbot. $O$ burchakning bir tomonida ($a$ nurda) o‘zaro teng $A_1A_2$ va $A_2A_3$ kesmalar qo‘yilgan hamda ularning oxirlari ($A_1$, $A_2$, $A_3$) orqali ikkinchi tomonni

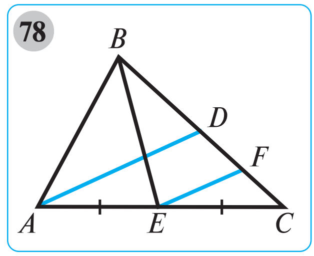
73



74



75





($b$ nurni) $B_1$, $B_2$, $B_3$ nuqtalarda kesuvchi o'zaro parallel $A_1B_1$, $A_2B_2$ va $A_3B_3$ to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan bo'lsin (76- rasm).

Endi hosil bo'lgan $B_1B_2$ va $B_2B_3$ kesmalarning o'zaro tengligini, ya'ni agar $A_1A_2 = A_2A_3$ bo'lsa, u holda $B_1B_2 = B_2B_3$ bo'lishini isbotlaymiz.

Bizga ma'lumki, trapetsiya yon tomoni o'rtasidan o'tuvchi va asoslariga parallel to'g'ri chiziq ikkinchi yon tomonini teng ikkiga bo'ladi (35- betdagi natijaga q.). Shuning uchun, $A_1B_1B_3A_3$ trapetsiyada $B_1B_2 = B_2B_3$ bo'ladi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

$A_1B_1B_3A_3$ trapetsiyada $A_1A_2 = A_2A_3$ (yasashga ko'ra) va $B_1B_2 = B_2B_3$ (isbotga ko'ra) bo'lgani uchun, $A_2B_2$ – trapetsiyaning o'rta chizig'i (ta'rifga ko'ra) bo'ladi.

Navbatdagi $A_2A_3 = A_3A_4$ dan $B_2B_3 = B_3B_4$ kelib chiqishi esa trapetsiyaning o'rta chizig'i haqidagi teoremadan foydalanib isbotlanadi.

Xuddi shunga o'xshash qolgan kesmalarning tengligi isbotlanadi.

**Eslatma!** Fales teoremasi shartida burchak o'rniga har qanday ikki to'g'ri chiziqni olish mumkin bo'ladi, bunda teoremaning xulosasi ilgarigicha qoladi (77- rasm):

**berilgan ikki to'g'ri chiziqni kesuvchi va to'g'ri chiziqlarning biridan teng kesmalar ajratuvchi parallel to'g'ri chiziqlar ikkinchi to'g'ri chiziqdan ham teng kesmalar ajratadi.**

**1-masala.** Berilgan: $AD$ va $BE$ – $ABC$ uchburchakning medianalari, $EF \parallel AD$, $EC = 6$ sm, $CF = 4$ sm (78- rasm).

Berilgan uchburchakning $BC$ va $AC$ tomonlari uzunliklarini toping.

Yechilishi.

1) $AC = 2 \cdot EC = 2 \cdot 6 = 12$ (sm) (uchburchakning medianasi ta'rifiga ko'ra).

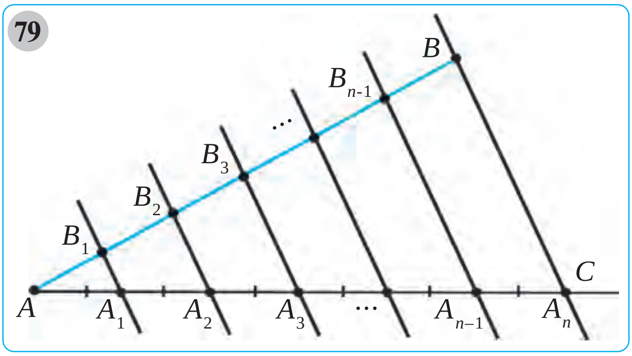
2) Fales teoremasiga ko'ra: $CF = FD$. Bundan $FD = 4$ sm, $CD = 2 \cdot CF = 2 \cdot 4 = 8$ (sm) (uchburchakning medianasi ta'rifiga ko'ra) ekanligi kelib chiqadi.

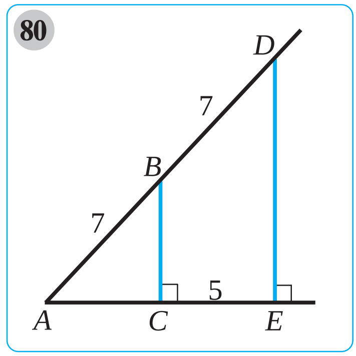
3) $BC = 2 \cdot CD = 2 \cdot 8 = 16$ (sm) (uchburchakning medianasi ta'rifiga ko'ra).

Javob: $BC = 16$ sm, $AC = 12$ sm.

**2- masala.** (*Kesmani teng bo'laklarga bo'lish.*) Berilgan $AB$ kesmani $n$ ta teng bo'lakka bo'ling.

Yechilishi. $AB$ kesma berilgan bo'lsin. Uni $n$ ta teng bo'lakka bo'lishni ko'rsatamiz. $A$ nuqtadan $AB$ to'g'ri chiziqda yotmaydigan $AC$ nurni o'tkazamiz va unda $A$ nuqtadan boshlab $n$ ta $AA_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$ teng kesmalarni, ya'ni berilgan $AB$ kesmani masala shartidan kelib chiqib nechta bo'lakka bo'lish zarur bo'lsa, shuncha teng kesmani qo'yamiz (79- rasm, $n = 6$). So'ngra $A_nB$ to'g'ri




chiziqni o‘tkazamiz ($A_n$ nuqta – oxirgi kesmaning oxiri) va $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_{n-1}$ nuqtalar orqali $A_nB$ to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlar $AB$ kesmani $B_1$, $B_2$, $B_3$, ..., $B_{n-1}$ nuqtalarda kesadi va uni Fales teoremasiga ko‘ra $n$ ta teng bo‘lakka bo‘ladi: $AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B$.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**149.** 1) Fales teoremasini ayting.
2) Fales teoremasi faqat burchak uchun o‘rinlimi?

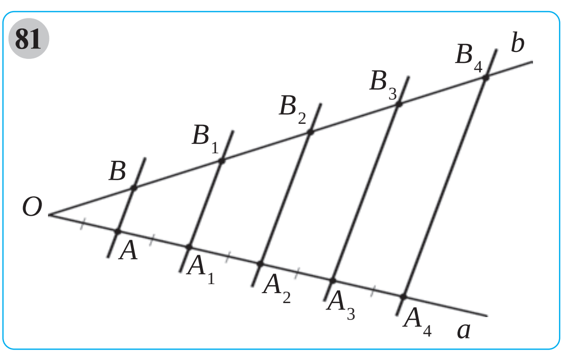
**150.** Sirkul (pargar) va chizg‘ich yordamida berilgan $AB$ kesmani: 1) ikkita; 2) uchta; 3) oltita; 4) yettita teng bo‘lakka bo‘ling.

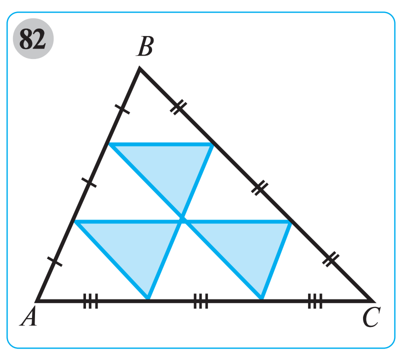
**151.** Berilgan: $AB = BD = 7$ sm, $BC \parallel DE$, $CE = 5$ sm (80- rasm).
Topish kerak: $AC$.

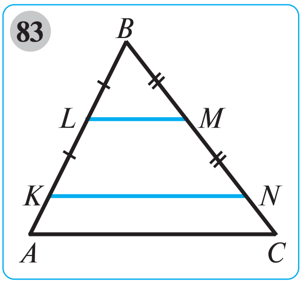
**152.** Berilgan: $\angle aOb$, $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$. $OB_4 = 8$ sm (81- rasm).
Topish kerak: $OB_1$, $OB_2$, $OB_3$.

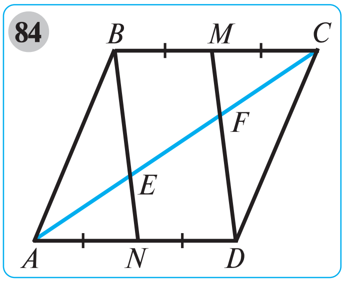
**153.** Agar burchakning har qaysi tomoniga ketma-ket teng uzunlikdagi kesmalar qo‘yib chiqilsa va kesmalarning tegishli uchlari (burchak uchidan boshlab sanab) orqali to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, bu to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lishini isbotlang.

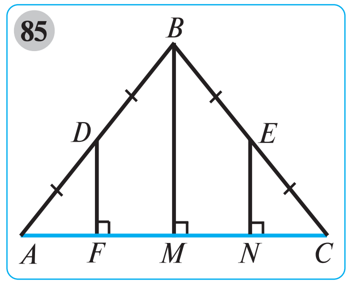
**154.** $ABC$ uchburchakning $BC$ tomoni to‘rtta teng kesmalarga bo‘lingan va bo‘linish nuqtalari orqali uzunligi 18 sm ga teng bo‘lgan $AB$ tomoniga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Shu to‘g‘ri chiziqlarning uchburchak ichida qolgan kesmalarining uzunliklarini toping.










**155.** Trapetsiyaning yon tomonlaridan biri uchta teng bo‘lakka bo‘lingan, bo‘linish nuqtalaridan asoslariga parallel qilib kesmalar o‘tkazilgan. Trapetsiyaning asoslari 15 sm va 24 sm ga teng bo‘lsa, bu kesmalarning uzunliklarini toping.

**156.** B e r i l g a n: $\triangle ABC$, $D$ — $AB$ ning o‘rtasi va $DF \parallel BC$, $E$ — $BC$ ning o‘rtasi va $EP \parallel AB$.

I s b o t q i l i s h k e r a k: $DF$ va $EP$ to‘g‘ri chiziqlar $ABC$ uchburchakni $AC$ ga tegishli bir nuqtada kesadi.

**157.** $ABC$ uchburchak tomonlarining har biri uchta teng kesmalarga bo‘lingan va bo‘linish nuqtalari kesmalar bilan tutashtirilgan (82- rasm). Agar $ABC$ uchburchakning perimetri $p$ ga teng bo‘lsa, bu rasmda hosil bo‘lgan shaklning perimetrini toping.

**158.** Sirkul va chizg‘ich yordamida berilgan $AB$ kesmani: 1) to‘rtta; 2) beshta teng bo‘lakka bo‘ling.

**159.** $ABC$ burchakning tomonlarida to‘rtta nuqta: $K$, $L$, $M$ va $N$ ($K$, $L$ — burchakning $AB$ tomonida, $M$, $N$ — burchakning $BC$ tomonida) olingan. Agar $BM = MN$ va $BL = LK$ bo‘lsa, $LM$ va $KN$ to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘ladimi (83- rasm)?

**160.** $ABCD$ parallelogrammda $M$ nuqta $BC$ tomonning o‘rtasi, $N$ nuqta $AD$ tomonning o‘rtasi. $BN$ va $MD$ to‘g‘ri chiziqlar parallelogrammning $AC$ diagonalini teng uchta bo‘lakka bo‘lishini isbot qiling (84- rasm).

**161.** $ABC$ uchburchakda $D$ va $E$ nuqtalar — teng $AB$ va $BC$ tomonlarining o‘rtalari. $DF$, $BM$ va $EN$ kesmalar $AC$ tomonga perpendikular. $AC$ tomon 36 sm ga teng. $F$ va $N$ nuqtalar orasidagi masofani toping (85- rasm).

## 13- mavzu. FALES TEOREMASI TATBIG‘IGA DOIR MASALALAR

### 1. Kesmalarning nisbati.

**T a ’ r i f.** ***Ikki kesmaning nisbati*** *deb, shu kesmalar bir xil uzunlik o‘lchov birliklari bilan ifodalanganda, ulardan biri ikkinchisidan necha marta katta yoki kichikligini ko‘rsatuvchi songa aytiladi.*

Masalan, $a$ va $b$ kesmalar, mos ravishda, 6 sm va 18 sm ga teng bo‘lsin. Kesmalarning nisbati bo‘linma (kasr) shaklida ifodalanadi.

$$\frac{a}{b}=\frac{6\text{ sm}}{18\text{ sm}}=\frac{1}{3} \quad \text{yoki} \quad \frac{b}{a}=\frac{18\text{ sm}}{6\text{ sm}}=3\,.$$

1-izoh. Agar kesmalar turli uzunlik o‘lchov birliklarida berilgan bo‘lsa, dastlab ularni bir xil uzunlik o‘lchov birliklariga keltirib, so‘ngra nisbat olish kerak, aks holda noto‘g‘ri natijaga kelinadi.

2-izoh. Ikki kesmaning nisbati o‘lchov birligining qanday tanlanishiga bog‘liq emas. Bir o‘lchov birligidan boshqa o‘lchov birligiga o‘tishda kesmalarning uzunliklarini ifodalovchi sonlar bir xil songa ko‘paytiriladi, shuning uchun bunda ikki kesmaning nisbati o‘zgarmaydi.

3-izoh. $\frac{a}{b}$ nisbatda $a$ — nisbatning *oldingi hadi*, $b$ — nisbatning *keyingi hadi* deyilishini; shuningdek, $a$ ning $b$ ga nisbati $a:b$ kabi belgilanishini eslatib o‘tamiz.

### 2. Proporsional kesmalar.

**Ta’rif.** *Agar* $\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ *bo‘lsa, u holda* $AB$ *va* $BC$, $A_1B_1$ *va* $B_1C_1$ *kesmalar* ***proporsional kesmalar*** *deb ataladi. Bu kesmalarning uzunliklarini ifodalovchi sonlar* ***proporsional sonlar*** *bo‘ladi.*

Masalan, uzunliklari 2 sm va 3 sm teng bo‘lgan $AB$ va $BC$ kesmalar uzunliklari 4 sm va 6 sm teng bo‘lgan $A_1B_1$ va $B_1C_1$ kesmalarga proporsional kesmalar bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{2}{3}.$$

4-izoh. Bu yerda ham va bundan keyin ham ko‘pincha $AB$, $CD$ va hokazo kesmalar deganda, ularning uzunliklarini ifoda etuvchi sonlarni tushunamiz.

Buning natijasida kesmalarning nisbati va kesmalardan tuzilgan proporsiyalar sonlar nisbatlarining va sonlardan tuzilgan proporsiyalarning barcha xossalariga ega bo‘ladi.

Shuning uchun bu yerda ularni keltirmaymiz, chunki ular 6- sinf matematika kursidan Sizga tanish.

Fales teoremasi yordamida quyidagi muhim teoremani isbot qilish mumkin.

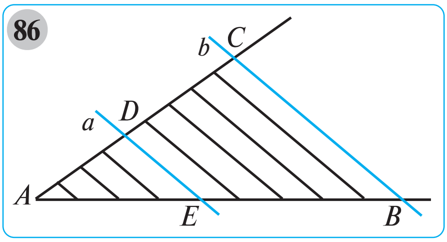
**Teorema.**

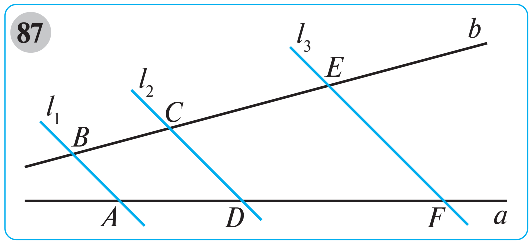
**(*Proporsional kesmalar haqida.*) Burchak tomonlarini kesuvchi ikki parallel to‘g‘ri chiziq burchak tomonlaridan proporsional kesmalar ajratadi.**

$a$ va $b$ dan iborat ikki parallel to‘g‘ri chiziq $A$ burchakning tomonlarini $B$, $C$ va $D$, $E$ nuqtalarda kesgan bo‘lsin.

$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}$ ekanligini isbot qilish talab etiladi.

Isbot. $AE$ va $EB$ kesmalar umumiy o‘lchovli bo‘lsin. U holda $AE$ va $EB$ kesmalarning eng katta umumiy $k_1$ o‘lchov birligi $AE$ kesmaga $m$ marta ($AE = m\cdot k_1$) va $EB$ kesmaga esa $n$ marta ($EB = n\cdot k_1$) joylashadi, deylik (86- rasm).




Bu holda kesmalarning nisbati $\frac{m}{n}$ ratsional son bilan ifodalanadi, ya'ni $\frac{AE}{EB} = \frac{m \cdot k_1}{n \cdot k_1} = \frac{m}{n}$ bo'ladi. Demak, $\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}$. Bu tenglik, agar $AE$ kesmada $m$ ta teng bo'lak bo'lsa, $EB$ kesmada bunday bo'laklardan $n$ ta bo'lishini ko'rsatadi. Bizning misolda $m = 4$ va $n = 5$ ga teng.

Har bir bo'linish nuqtasidan $a$ va $b$ ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.

Fales teoremasiga ko'ra, $AD$ va $DC$ kesmalar teng bo'laklarga bo'linadi. Agar $AC$ tomon uchun $k_2$ ni o'lchov birligi sifatida qabul qilsak, u holda bunday bo'laklardan $AD$ da $m$ ta ($AD = m \cdot k_2$) va $DC$ da $n$ ta ($DC = n \cdot k_2$) joylashadi. Demak, $\frac{AD}{DC} = \frac{m \cdot k_2}{n \cdot k_2} = \frac{m}{n}$, ya'ni $\frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}$ ekan.

Shunday qilib, $\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n}$ va $\frac{AD}{DC} = \frac{m}{n}$, bundan $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$.

Bu teorema ixtiyoriy ikki ($a$, $b$) to'g'ri chiziqni parallel ($l_1$, $l_2$, $l_3$) to'g'ri chiziqlar kesib o'tganda hosil bo'ladigan kesmalar uchun ham o'rinlidir (87- rasm). Buni o'zingiz isbot qiling.

**Eslatma!** $m$ va $n$ lar berilgan o'lchov birliklarida butun sonlar bilan ifoda qilinmasa, unda shunday mayda birlik olish kerakki, $AE$ va $EB$ larga umumiy o'lchov bo'la olsin.

**Natija.** Agar parallel to'g'ri chiziqlar $A$ burchakning tomonlarini $B$, $C$ va $D$, $E$ nuqtalarda kessa, u holda

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

tenglik o'rinlidir (86- rasm).

Isbot. Proporsiyaning xossasini tatbiq etib, yuqorida isbotlangan $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ proporsiyani $\frac{EB}{AE} = \frac{DC}{AD}$ ko'rinishda yozib olamiz va uning ikkala qismiga 1 ni qo'shsak, yana to'g'ri tenglik hosil bo'ladi. Demak,

$$\frac{EB}{AE} + 1 = \frac{DC}{AD} + 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{AE + EB}{AE} = \frac{AD + DC}{AD}.$$

So'nggi tenglikka $AE + EB = AB$ va $AD + DC = AC$ ifodalarni qo'ysak, talab qilinayotgan tenglik kelib chiqadi:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}.$$

**1- m a s a l a .** Uchta kesma berilgan: $a=6$ sm, $b=3$ sm, $c=4$ sm. To‘rtinchi $d$ kesmaning uzunligi qanday bo‘lganda bu to‘rtta kesma proporsional bo‘ladi (izlangan $d$ kesma berilgan kesmalarning har biridan katta bo‘lish sharti bilan)?

Y e c h i l i s h i . Berilganlarni va shartni hisobga olsak, $b<c<a<d$ ekani ravshan. Buning uchun berilgan kesmalar ichidan ikkita eng kattasining uzunliklarini ifodalovchi sonlar ko‘paytmasini eng kichigiga bo‘lish kifoya, ya’ni $d=a\cdot c:b=6\cdot 4:3=8$ (sm).

J a v o b : $d=8$ sm.

**2- m a s a l a .** Uchburchak ichki burchagining bissektrisasi shu burchak qarshisidagi tomonni qolgan ikki tomonga proporsional bo‘laklarga bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

I s b o t . $ABC$ uchburchakda $AD$ kesma $A$ burchakning bissektrisasi bo‘lsin, u holda $\angle 1=\angle 2$ bo‘ladi (88- rasm). $BD:DC=AB:AC$ ekanini isbotlaymiz. $DA$ ga parallel va $BA$ ning davomini $E$ nuqtada kesuvchi $CE$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. $AEC$ va $ACE$ burchaklarni, mos ravishda, 3 va 4 bilan belgilaymiz. U vaqtda $DA$ va $CE$ parallel to‘g‘ri chiziqlarni $BE$ kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo‘lgan mos burchaklar bo‘lgani uchun $\angle 1=\angle 3$. Shu parallel to‘g‘ri chiziqlarni $AC$ kesuvchining kesishidan hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo‘lgani uchun $\angle 2=\angle 4$.

Shartga ko‘ra, $\angle 1=\angle 2$ ($AD$ — bissektrisa), shuning uchun $\angle 3=\angle 4$ bo‘ladi (uchburchakda teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi). Demak, $\Delta CAE$ — teng yonli, ya’ni $AE=AC$ (teng burchaklar qarshisida yotgan tomonlar bo‘lgani uchun).

Proporsional kesmalar haqidagi teoremaga asosan: $BD:DC=AB:AE$ proporsiyani hosil qilamiz. Bu proporsiyadagi $AE$ kesmani o‘ziga teng $AC$ kesma bilan almashtirsak,

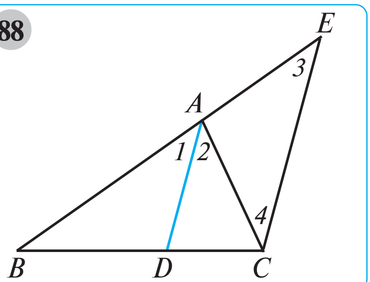
$$BD:DC=AB:AC$$

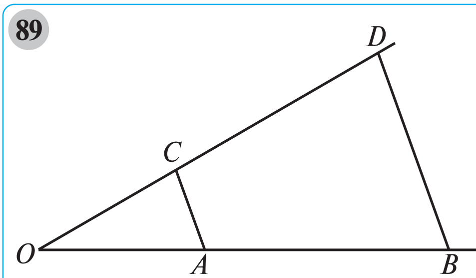
hosil bo‘ladi.

Shuni isbotlash talab etilgan edi.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**162.** 1) Ikki kesmaning nisbati deganda nimani tushunasiz?
2) Ikki kesmaning nisbati o‘lchov birligiga bog‘liqmi?
3) Proporsional kesmalar deb nimaga aytiladi?
4) Proporsiyaning avvaldan ma’lum bo‘lgan xossalarini ayting va formula ko‘rinishida yozing.
5) Proporsional kesmalar haqidagi teoremani ifodalang.

88



89


**163.** $AC = 8$ sm va $BD = 16$ sm. 1) Bu kesmalar uzunliklarining nisbatini toping. 2) Olingan kesmalarning uzunliklari detsimetrda (millimetrlarda, metrlarda) ifodalansa, ular uzunliklarining nisbati o‘zgaradimi?

**164.** 1) $C$ nuqta $AB$ kesmani $AC : CB = 3 : 2$ nisbatda bo‘ladi. $AC : AB$ va $AB : CB$ nisbatlarni toping.

2) $C$ nuqta $AB$ kesmani $AC : CB = 2 : 3$ nisbatda bo‘ladi. $AC$ kesmaning uzunligi 4,8 dm. $AB$ va $CB$ kesmalarning uzunliklarini toping.

**165.** 1) Agar ikki kesmaning nisbati 2,5 : 1,5 kabi, qolgan ikkitasining nisbati 75 : 45 kabi bo‘lsa, bu kesmalar proporsionalmi?

2) $a$ bilan $b$ va $c$ bilan $d$ kesmalar bir-biriga proporsional kesmalar. Agar $a = 5$ sm, $b = 80$ mm, $d = 1$ dm bo‘lsa, $c$ ni toping.

**166.** Uzunliklari quyidagicha bo‘lsa, $a$, $b$ va $c$, $d$ kesmalar proporsional bo‘ladimi:

1) $a = 1{,}6$ sm, $b = 0{,}6$ sm, $c = 4{,}8$ sm, $d = 1{,}8$ sm;

2) $a = 50$ sm, $b = 6$ dm, $c = 10$ dm, $d = 9{,}5$ dm?

**167.** Ikki parallel to‘g‘ri chiziq $O$ burchakning bir tomonini $A$ va $B$ nuqtalarda, ikkinchi tomonini esa $C$ va $D$ nuqtalarda kesadi. Agar $OD = 25$ sm va $OA : OB = 2 : 5$ bo‘lsa, $OC$ kesmaning uzunligini toping (89- rasm).

Yechilishi. Proporsional kesmalar haqidagi teoremaga ko‘ra: $OC : OD = 2 : 5$. Kesmalardan kichigini $OC = 2x$ bilan belgilaymiz. U holda $OD = 5x = 25$ sm bo‘ladi. Bundan $x = 5$ sm. Demak, izlanayotgan kesma $OC = 10$ sm ga teng.

Javob: $OC = 10$ sm.

**168.** Ikkita $AB$ va $CD$ kesmalar berilgan. $E$ va $F$ nuqtalar, mos ravishda, $AB$ va $CD$ kesmalarda yotadi. $AE$, $EB$ va $CF$, $FD$ kesmalar proporsional. $AB \cdot FD = CD \cdot EB$ ekanini isbotlang.

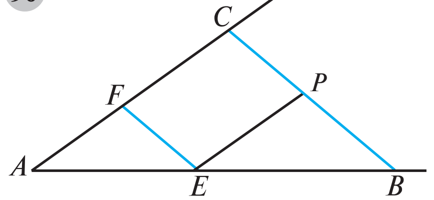
**169.** Agar parallel to‘g‘ri chiziqlar $A$ burchakning tomonlarini $B$, $C$ va $E$, $F$ nuqtalarda kessa, u holda

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{AE}$$

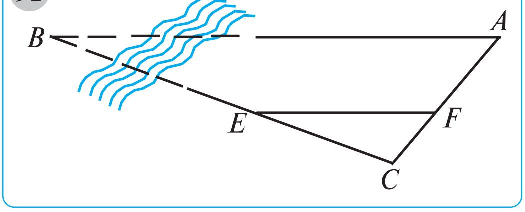
tenglik o‘rinlidir (90- rasm). Ko‘rsatma. Qo‘shimcha $EP \parallel AC$ o‘tkazilgan.

**170.** (*Amaliy masala.*) $A$ punktdan $B$ punktgacha (91- rasm) bo‘lgan masofani aniqlash uchun ($B$ punkt $A$ dan ko‘rinadi, ammo unga borib bo‘lmaydi) ixtiyoriy $AC$ to‘g‘ri chiziq, so‘ngra $AB$ va $CB$ to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi ($C$ nuqtadan $B$ punkt ko‘rinadi). $CA$ to‘g‘ri chiziqda $C$ nuqtadan boshlab $CF$ kesma ajratiladi va $AB$ ga parallel qilib $EF$ to‘g‘ri chiziq o‘tka-

90




91



ziladi. $AC$, $EF$ va $CF$ kesmalarni o‘lchash bilan $AB$ masofa qanday topiladi? $AC = 200$ m, $CF = 50$ m va $EF = 150$ m deb olib, hisoblashni bajaring.

**171.** $C$ nuqta $AB$ kesmani $AC : CB = 1 : 2$ nisbatda bo‘ladi. $AC : AB$ va $CB : AB$ nisbatlarni toping.

**172.** 1) Kesma 4 : 3 nisbatda ikki bo‘lakka bo‘lingan. Agar kichik bo‘lak kattasidan 5 sm qisqa bo‘lsa, kesmaning har bir bo‘lagi uzunligini toping.

2) Uzunligi 12 sm ga teng bo‘lgan $AB$ kesmani $C$ nuqta $AC : CB = 5 : 3$ nisbatda bo‘ladi. $AC$ va $CB$ kesmalarning uzunligini toping.

**173.** 1) $a$ bilan $b$ va $c$ bilan $d$ kesmalar bir-biriga proporsional kesmalar. Agar $a = 15$ sm, $b = 50$ mm, $d = 2$ dm bo‘lsa, $c$ ni toping.

2) $a = 2$ sm, $b = 17{,}5$ sm, $c = 16$ sm, $d = 35$ sm, $e = 4$ sm bo‘lsa, $a$, $b$, $c$, $d$ va $e$ kesmalardan proporsional juftlarni tanlab oling.

## *1- § ga (Fales teoremasiga) doir qo‘shimcha mashqlar*

**174.** $C$ nuqta $AB$ kesmani $m : n$ nisbatda bo‘ladi. $AC : AB$, $CB : AB$ nisbatlarni toping.

**175.** 12 sm uzunlikdagi $AB$ kesmada $C$ nuqta berilgan, undan $A$ gacha bo‘lgan masofa 7,2 sm, $AB$ kesmaning $B$ nuqtadan uzaytirilgan davomida shunday $D$ nuqtani topingki, ulardan $A$ gacha bo‘lgan masofaning $B$ gacha bo‘lgan masofasi nisbati $AC : CB$ kabi bo‘lsin.

**176.** Ikkita $KP$ va $EC$ kesmalar berilgan. $M$ va $L$ nuqtalar, mos ravishda, $KP$ va $EC$ kesmalarda yotadi. $KP$, $MP$ va $EC$, $LC$ kesmalar proporsional. $KM \cdot LC = MP \cdot EL$ ekanini isbotlang.

**177.** Uchta kesma berilgan: $a = 3$ sm, $b = 6$ sm, $c = 9$ sm. To‘rtinchi $d$ kesmaning miqdori qanday bo‘lganda bu to‘rtta kesma proporsional bo‘ladi?

**178.** Teng yonli trapetsiyaning o‘rta chizig‘i balandligiga teng bo‘lsa, diagonallari o‘zaro perpendikular bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

**179.** Uchburchak uchlaridan uning qarama-qarshi tomonlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan uchburchakning tomonlari berilgan uchburchak tomonlaridan ikki marta katta ekanini isbotlang.

**180.** Trapetsiyaning yon tomoni to‘rtta teng bo‘lakka bo‘lingan va bo‘linish nuqtalari orqali trapetsiya asoslariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Trapetsiyaning asoslari 46 sm va 30 sm ga teng. Bu parallel to‘g‘ri chiziqlarning trapetsiya yon tomonlari orasidagi kesmalarining uzunligini toping.

**181.** $KP$ bilan $MN$ va $DO$ bilan $AL$ kesmalar bir-biriga proporsional kesmalar. Agar $KP = 8$ dm, $MN = 40$ sm, $DO = 1$ m bo‘lsa, $AL$ ni toping.

**182.** Trapetsiya asoslarining uzunliklari 56 sm va 24 sm ga teng. Trapetsiyaning diagonallari o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligini toping.

## *2- TEST*

**1.** Uchburchakning o‘rta chizig‘i uning asosidan 5,4 sm qisqa. Uchburchakning o‘rta chizig‘i bilan asosining yig‘indisini toping.

A) 13,5 sm; B) 16,2 sm; D) 10,8 sm; E) 21,6 sm.

**2.** Teng yonli trapetsiyaning perimetri 36 sm, o‘rta chizig‘i 10 sm. Yon tomonining uzunligini toping.

A) 10 sm; B) 8 sm; D) 12 sm; E) 13 sm.

**3.** Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i 9 sm, asoslaridan biri ikkinchisidan 6 sm qisqa. Trapetsiyaning katta asosini toping.

A) 15 sm; B) 18 sm; D) 12 sm; E) 10 sm.

**4.** Trapetsiyaning kichik asosi 4 sm, o‘rta chizig‘i katta asosidan 4 sm qisqa. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

A) 6 sm; B) 10 sm; D) 8 sm; E) 12 sm.

**5.** Teng yonli trapetsiyaning diagonali o‘tkir burchagini teng ikkiga bo‘ladi. Agar trapetsiyaning perimetri 48 sm ga, katta asosi 18 sm ga teng bo‘lsa, uning o‘rta chizig‘ini toping.

A) 14 sm; B) 15 sm; D) 12 sm; E) 13 sm.

**6.** Asoslari 28 sm va 12 sm ga teng bo‘lgan trapetsiyaning diagonallari o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligini toping.

A) 8 sm; B) 10 sm; D) 6 sm; E) 7 sm.

**7.** Trapetsiyaning diagonallari uning o‘rta chizig‘ini uchta teng bo‘lakka ajratsa, katta asosining kichik asosga nisbatini toping.

A) 2 : 1; B) 3 : 1; D) 5 : 2; E) 7 : 3.

**8.** *ABCD* trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uni o‘rta chiziqlari 13 sm va 17 sm ga teng bo‘lgan ikkita trapetsiyaga ajratadi. Trapetsiyaning katta asosini toping.

A) 19 sm; B) 21 sm; D) 18 sm; E) 30 sm.

**9.** Teng yonli trapetsiyaning kichik asosi 3 ga, perimetri 42 ga teng. Uning diagonali o‘tmas burchakni teng ikkiga bo‘ladi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

A) 8; B) 12; D) 8,5; E) 10.

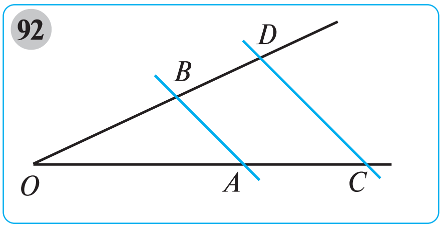
**10.** Trapetsiyaning diagonallari katta asosidagi burchaklarini teng ikkiga bo‘ladi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i 11,7 ga, perimetri esa 36 ga teng. Trapetsiya katta asosining uzunligini toping.

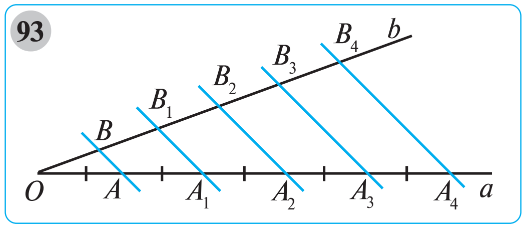
A) 18; B) 17,6; D) 17,1; E) 16,3.

**11.** B e r i l g a n: $\angle O$, $AB \parallel CD$, $OB=6$ sm, $BD=2{,}4$ sm, $AC=2{,}2$ sm. (92- rasm).

T o p i s h  k e r a k: $OA$.

A) 4,8 sm; B) 4,5 sm; D) 5,5 sm; E) 5,2 sm.




**12.** Berilgan: $\angle aOb$, $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$. $BB_4 - B_2B_3 = 10$ sm (93- rasm).

Topish kerak: $OB_4$.

A) 20 sm; B) $16\frac{2}{3}$ sm; D) 15 sm; E) $18\frac{1}{3}$ sm.

## *Tarixiy ma'lumotlar*

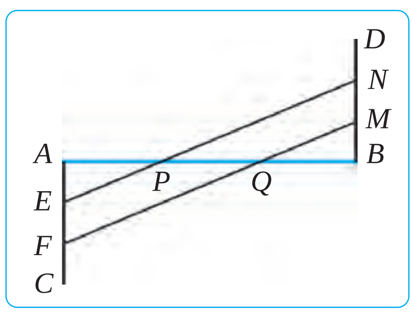
**Fales** (miloddan avvalgi 625—547- y.) Gretsiyadagi Milet shahrida yashagan. U Misrga qilgan sayohati davomida u yerda turli fanlar bilan tanishgan. Falesni ko'proq geometriya qiziqtirgan. U Ioniya maktabining asoschisi hisoblanadi. Fales maktabi matematikani ma'lum bir tizimga solishdan tashqari, Gretsiyada fanning rivojlanishiga katta ta'sir ham ko'rsatdi.

Fales geometriyaga tegishli juda ko'p kashfiyotlar qilgan. U geometriyaning bir necha teoremalarini isbotlagan, jumladan, yuqorida bayon qilingan teoremaning hamda teng yonli uchburchak asosidagi burchaklar tengligining isboti ham Falesga tegishli.

Fales faqat geometr olimgina emas, balki u faylasuf, astronom ham edi. Fales astronomiyada ham anchagina yutuqlarga erishgan.

Yuqoridagiga o'xshash masalalar o'rta asrlarda yashagan matematiklarning asarlarida ham ko'p uchraydi. Masalan, **Abul Vafo**ning bir masalasida berilgan kesmani teng uch qismga bo'lish talab qilinadi va u quyidagicha yechiladi.

Berilgan $AB$ kesmaning uchlaridan qarama-qarshi yo'nalishlarda $AC$ va $BD$ perpendikularlar chiqariladi. $AC$ nurda esa o'zaro teng $AE$ va $EF$ kesmalar ajratiladi. $BD$ nurda esa $AE$ ga teng $BM$ va $EF$ ga teng $MN$ kesmalar ajratiladi. So'ngra $E$ nuqta $N$ bilan, $F$ nuqta $M$ bilan birlashtiriladi. $AB$ kesmada hosil bo'lgan $P$ va $Q$ nuqtalar uni teng uch bo'lakka bo'ladi. Uning isboti bilan 9- sinfda tanishasiz.



## 14- mavzu. O‘QQA NISBATAN SIMMETRIYA

**1. Simmetriya.** Kundalik hayotimizda simmetriyaga juda ko‘plab duch kelamiz. Daraxt barglari shakllari, kapalak qanotlarining uning tanasiga nisbatan va inson a’zolarining tanaga nisbatan joylashishi va hokazolar simmetriyaga yorqin misol bo‘ladi.

Boshqa ko‘pgina matematik tushunchalar kabi shakllarning simmetriyasi tushunchasi ham atrofni o‘rab turgan dunyo (tabiat) obyektlarini kuzatish natijasida paydo bo‘lgan. Masalan, o‘simliklar va tirik organizmlar tasvirlarini ko‘zdan kechirib (bu tasvirlarni tekis shakl deb hisoblash mumkin), ularning ko‘plari yuqori darajadagi aniqlikda biror simmetriyaga ega ekaniga ishonch hosil qilish mumkin. Masalan, daraxt barglari (94-*a* rasm), kapalaklar (94-*b* rasm) va qor uchqunlari o‘qqa nisbatan simmetriyaga egadir.

Simmetriyaga misollar san’atda, texnikada (94-*d* rasm), turmushda ko‘plab uchraydi. Masalan, ko‘pgina binolarning old tomonlari va ustidan ko‘rinishlari simmetrik bo‘ladi. Gilamdagi naqshlar, turli mebel jihozlari, uy-ro‘zg‘or anjomlari, mexanizmlar, masalan, g‘ildiraklar yoki shesternalar simmetrik bo‘ladi.

Aytib o‘tganimizdek, bunday simmetriyani har joyda ko‘rishimiz mumkin. Masalan, yashayotgan joyingizdagi chiroyli qurilgan imorat, tosh yotqizilgan maydon yoki koshin bilan bezatilgan devorga ahamiyat bering.

Agar siz qadimiy me’morchilik obidalarini ko‘zdan kechirsangiz, ularning chiroyi undagi shakllarning uyg‘unligi hamda ma’lum qonuniyat asosida takrorlanishida namoyon bo‘lishini sezishingiz mumkin. Vatanimizda bunday obidalar behisob. Ularning qadimiylaridan biri Buxorodagi Mir Arab madrasasi (95-rasm), zamonaviy binolardan biri esa Temuriylar tarixi davlat muzeyidir (96-rasm).

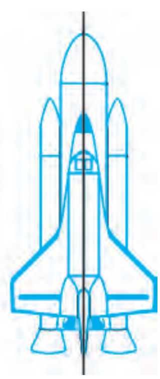
Bunday simmetriyaga ega bo‘lgan shakllar *simmetrik shakllar* deb ataladi. Bu simmetriyani hosil qiluvchi qonun esa *simmetriya* deb ataladi.

Simmetriya — geometriya fanining bir qismi bo‘lib, uni to‘la o‘rganish uchun chuqur matematik bilimlarga ega bo‘lish lozim. Biz esa uning boshlang‘ich tushunchalari bo‘lgan «O‘qqa nisbatan simmetriya va markaziy simmetriya» bilan tanishamiz.

**94**

***a***

***b***



***d***

95

96

## 2. O‘qqa nisbatan simmetriya va uning xossasi.

*$l$ to‘g‘ri chiziq bo‘ylab magistral qaz quvuri o‘tgan. $A$ va $B$ qishloqlariga gaz taqsimlaydigan stansiya uchun $C$ joyni to‘g‘ri chiziqning qayerida tanlansa, stansiyadan bu qishloqlargacha yotqaziladigan qaz quvuri xarajatlari arzonga tushadi va uning uzunligi eng qisqa bo‘ladi? ($AC + CB$ masofa eng qisqa bo‘lishi uchun $C$ ni qanday tanlash kerak?)*

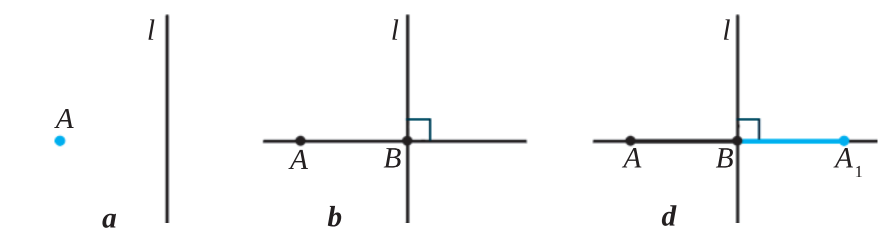
*– Siz qishloqlar magistral gaz quvuriga nisbatan: 1) turli tomonda; 2) bir tomonda joylashgan holda quruvchilarga qanday maslahat berasiz?*

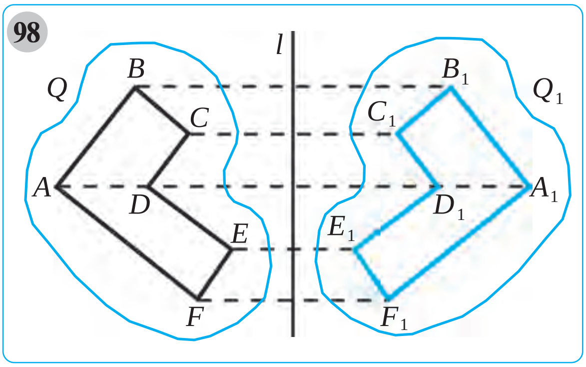
***2.1. O‘qqa nisbatan simmetriya.*** Bizga tekislikda $l$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin (97- rasm). Ma’lumki, $l$ to‘g‘ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi. Yarim tekisliklarning birida $A$ nuqta olaylik va u nuqtadan $l$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular $AB$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazaylik. Bunda $B \in l$. So‘ngra $AB$ to‘g‘ri chiziqning ikkinchi yarim tekisligidagi bo‘lagida $AB$ kesmaga teng $BA_1$ kesma qo‘yamiz. Hosil qilingan $A_1$ nuqta, $A$ nuqtaga *$l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqta* deyiladi. $l$ to‘g‘ri chiziq esa *simmetriya o‘qi* deb ataladi. Simmetriya o‘qida yotgan nuqtalar o‘z-o‘ziga *simmetrik nuqtalar* deb qaraladi. Biz ko‘rgan holda $B$ nuqtaga simmetrik nuqta shu $B$ nuqtaning o‘zidir.

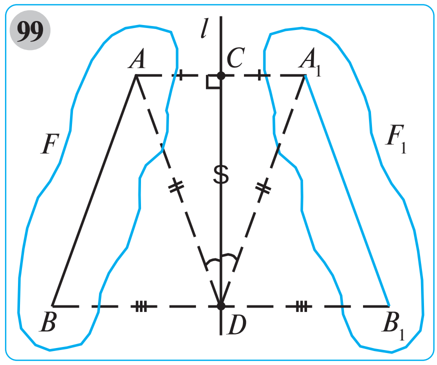
Endi biror $Q$ shaklni qaraylik (98- rasm). Shakl nuqtalardan tashkil topgan bo‘ladi.

**Ta’rif.** *Agar $Q_1$ shaklning har bir nuqtasi biror $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $Q$ shaklning nuqtalariga simmetrik bo‘lsa, bunday shakllar $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan* ***simmetrik shakllar*** *deb ataladi, $l$ esa* ***simmetriya o‘qi*** *deyiladi.*

97






O‘zaro simmetrik shakllardan biri ikkinchisining simmetrik *aksi* deb nomlanadi. Albatta, agar $Q$ shakl $Q_1$ shaklning simmetrik aksi bo‘lsa, $Q_1$ shakl ham $Q$ shaklning simmetrik aksi bo‘ladi.

**To‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik ikkita geometrik shakl o‘zaro tengdir.**

### *2.2. O‘qqa nisbatan simmetriyaning xossasi.*

**Teorema.**

**Shakl o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirilganda uning nuqtalari orasidagi masofa o‘zgarmaydi, ya’ni saqlanadi.**

I s b o t. $F$ shaklning $l$ o‘qqa nisbatan simmetrik aksi $F_1$ bo‘lsin (99- rasm). $F$ shaklning ixtiyoriy $A$ va $B$ nuqtalarini olaylik. Ularga simmetrik bo‘lgan nuqtalarni, mos ravishda, $A_1$ va $B_1$ bilan belgilaymiz. Bu yerda biz $A$ va $B$ nuqtalar $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan bir tomonda yotgan holni ko‘ramiz.

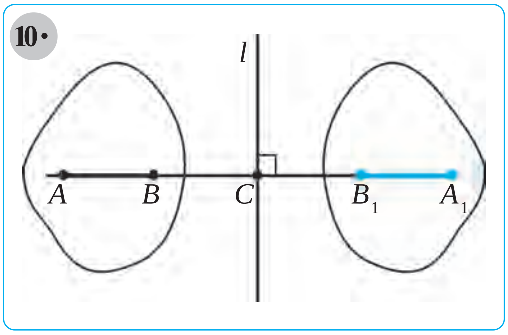
$AB = A_1B_1$ ekanini isbot qilishimiz kerak. Isbot qilish uchun $AA_1$ kesmaning $l$ o‘qi bilan kesishgan nuqtasini $C$ bilan, $BB_1$ kesmaning $l$ o‘qi bilan kesishgan nuqtasini $D$ bilan belgilaymiz. So‘ngra $D$ nuqtani $A$ va $A_1$ bilan tutashtiruvchi $DA$ va $DA_1$ kesmalarni o‘tkazamiz. Hosil bo‘lgan $ACD$ va $A_1CD$ to‘g‘ri burchakli uchburchaklar o‘zaro teng (ikki katetiga ko‘ra), chunki ularda $CD$ katet umumiy hamda $A$ va $A_1$ — simmetrik nuqtalar bo‘lgani uchun $AC = CA_1$. Bundan $AD = A_1D$ va $\angle ADC = \angle A_1DC$ kelib chiqadi.

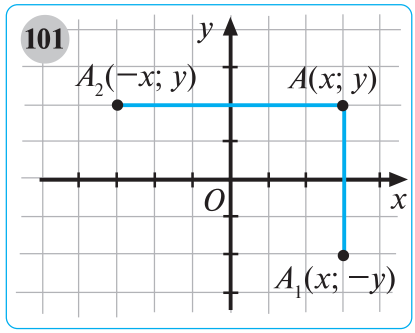
Endi $ADB$ va $A_1DB_1$ uchburchaklarni solishtiramiz. Bularda $BD = B_1D$, chunki $B_1$ nuqta $B$ ga simmetrik. Yuqorida $AD = A_1D$ ekanini isbot qildik.

$\angle ADB = \angle A_1DB_1$, chunki ular o‘zaro teng bo‘lgan burchaklarni 90° ga to‘ldiruvchi burchaklar, ya’ni $\angle ADB = 90° - \angle ADC$ va $\angle A_1DB_1 = 90° - \angle A_1DC$. Demak, qaralayotgan $ADB$ va $A_1DB_1$ uchburchaklarda mos ikki tomon va ular orasidagi burchak teng ekan. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra, bu uchburchaklar teng. Bundan $AB = A_1B_1$ ekani kelib chiqadi.

Ma’lumki, $A$ va $B$ nuqtalarni ixtiyoriy oldik. Shunday hol bo‘lishi mumkinki, $A$, $B$, $A_1$ va $B_1$ nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotib qoladi. U holda ham teorema isboti simmetriya xossasidan oddiygina hosil qilinadi (100- rasm). Haqiqatan ham, $AC = A_1C$ va $BC = B_1C$ ekani ravshan. Shuning uchun $AB = AC - BC$ va $A_1B_1 = A_1C - B_1C$, bundan $AB = A_1B_1$ kelib chiqadi.

Demak, $F$ shaklning ixtiyoriy $A$ va $B$ nuqtalari orsidagi masofa $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada o‘zgarmas ekan. Teorema isbotlandi.




1. *O'qqa nisbatan simmetriyada kesmaning uzunligi o'zgarmaydi, shaklning joylashishi esa o'qqa nisbatan simmetrik bo'ladi.*
2. *Simmetriyada to'g'ri chiziqlar to'g'ri chiziqlarga o'tadi, bunda simmetriya o'qiga perpendikular to'g'ri chiziqlar o'z-o'ziga o'tadi, simmetriya o'qi esa o'z joyida qoladi.*
3. *Ox (abssissalar) o'qiga nisbatan simmetriyada nuqtaning abssissasi o'zgarmaydi, ordinatasi esa qarama-qarshisiga o'zgaradi* (101- rasm).
4. *Oy (ordinatalar) o'qiga nisbatan simmetriyada nuqtaning ordinatasi o'zgarmaydi, abssissasi esa qarama-qarshisiga o'zgaradi* (101- rasm).
5. *O'qlarda yotgan nuqtaning koordinatalari o'zgarmaydi.*

**1-masala.** Sirkul va chizmachilik uchburchagi yordamida $ABCD$ rombga $CD$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik rombni yasang (102- rasm).

Yechilishi. 1) $C$ va $D$ uchlar, ya'ni simmetriya o'qida yotgan nuqtalar o'ziga-o'zi o'tadi.

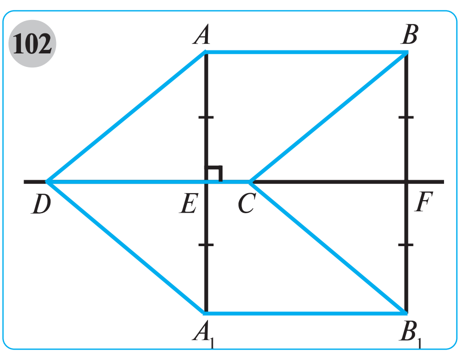
2) $CD$ to'g'ri chiziqqa $AE$ va $BF$ perpendikularni o'tkazamiz hamda ularni $E$ va $F$ nuqtalardan keyin $AE$ va $CF$ kesmalarga, mos ravishda, teng $EA_1$ va $FB_1$ kesmalar hosil bo'lguncha davom ettiramiz. So'ngra $CB_1$, $DA_1$ va $A_1B_1$ kesmalarni o'tkazamiz.

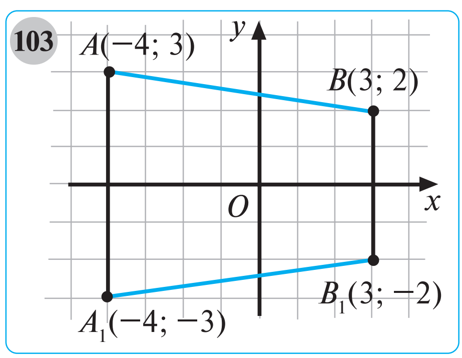
Javob: $A_1B_1CD$ robm – izlanayotgan shakl.

**2-masala.** $AB$ kesma berilgan, bunda $A(-4; 3)$ va $B(3; 2)$ (103- rasm).

1) Abssissalar o'qiga nisbatan berilgan kesmaga simmetrik bo'lgan $A_1B_1$ kesma uchlarining koordinatalarini toping.

2) $ABB_1A_1$ to'rtburchak qanday shakl bo'ladi?



Y e c h i l i s h i . 1) Abssissalar o'qiga nisbatan simmetriyada nuqtaning abssissasi o'zgarmaydi, ordinatasi esa qarama-qarshisiga o'zgaradi. Shuning uchun berilgan nuqtaga simmetrik bo'lgan $A_1B_1$ kesmaning koordinadatalari quyidagicha bo'ladi: $A_1(-4; -3)$, $B_1(3; -2)$.

2) $AA_1 \parallel BB_1$ va $AB = A_1B_1$ bo'lgani uchun $ABB_1A_1$ to'rtburchak teng yonli trapetsiya bo'ladi.

J a v o b : 1) $A_1(-4; -3)$, $B_1(3; -2)$; 2) $ABB_1A_1$ to'rtburchak – teng yonli trapetsiya.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**183.** 1) Qanday nuqtalar berilgan to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqtalar deyiladi?
2) Qanday shakllar berilgan to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakllar deyiladi?

**184.** $l$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $X$ nuqta $X_1$ nuqtaga o'tadi. Shu simmetriyada $Y$ o'tadigan nuqtani yasang.

**185.** 1) $A$ nuqta $l$ o'qqa nisbatan $A_1$ nuqtaga simmetrik, $A_1$ nuqta shu o'qqa nisbatan $A$ nuqtaga simmetrik, deyish to'g'rimi?
2) $F$ shakl $l$ o'qqa nisbatan $F_1$ shaklga simmetrik, $F_1$ shakl shu o'qqa nisbatan $F$ shaklga simmetrik, deyish to'g'rimi?

**186.** Berilgan kesmaga berilgan o'qqa nisbatan simmetrik kesmani yasang (104- rasm).

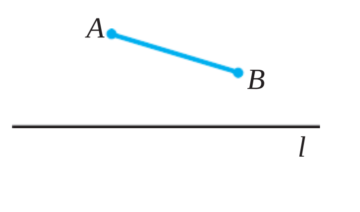
**187.** 105- rasmda $ABC$ uchburchak va $l$ to'g'ri chiziq tasvirlangan. $l$ to'g'ri chiziqqa nisbatan $ABC$ uchburchakka simmetrik bo'lgan $A_1B_1C_1$ uchburchakni yasang.

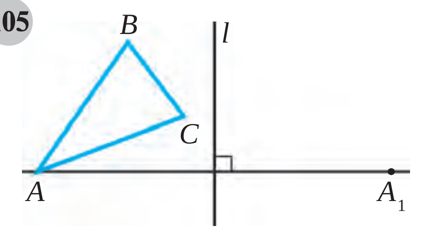
**188.** $ABCD$ trapetsiya ($AB \parallel CD$) berilgan. Bu trapetsiyaga: 1) $CD$ to'g'ri chiziqqa; 2) $AD$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriyada bo'lgan shaklni yasang.

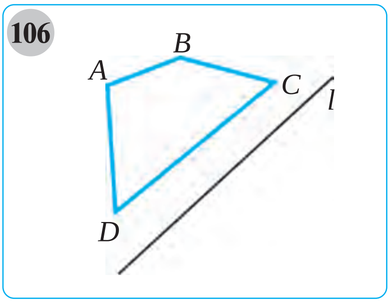
**189.** $A(a;\ b)$ nuqta berilgan. Koordinata o'qlariga nisbatan $A$ nuqtaga simmetrik nuqta qanday koordinatalarga ega bo'ladi?

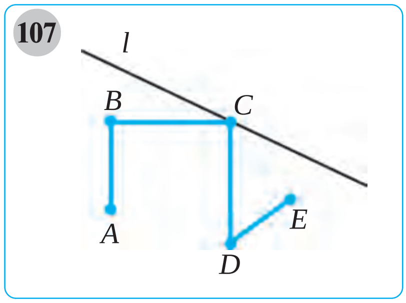
**190.** Tekislikda $A(4;\ 3)$, $B(3;\ -2)$, $C(-2;\ 2)$ va $D(-1;\ -1)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

**191.** Berilgan to'rtburchakka berilgan o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan to'rtburchakni yasang (106- rasm).

104



105





**192.** $ABCDE$ siniq chiziqqa berilgan $l$ o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgan siniq chiziqni yasang (107- rasm).

**193.** $l$ to‘g‘ri chiziq va uning turli tomonida yotuvchi $A$ va $B$ nuqtalar berilgan. $l$ to‘g‘ri chiziqda shunday bir $C$ nuqtani topingki, $AC$ va $CB$ kesmalarning yig‘indisi eng qisqa bo‘lsin.

**194.** Berilgan burchakka berilgan o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgan burchak yasang.

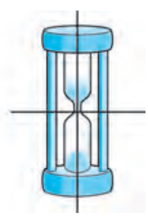
**195.** Tekislikda $A(-1; -5)$ va $B(3; 4)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

**196.** $ABCD$ kvadrat berilgan. $AC$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan $B$ nuqtaga simmetrik nuqtani yasang.

**197.** Koordinata o‘qlariga nisbatan $A(-4; 4)$ nuqtaga simmetrik $A_1$ va $A_2$ nuqtani yasang va ularning koordinatalarini yozing.

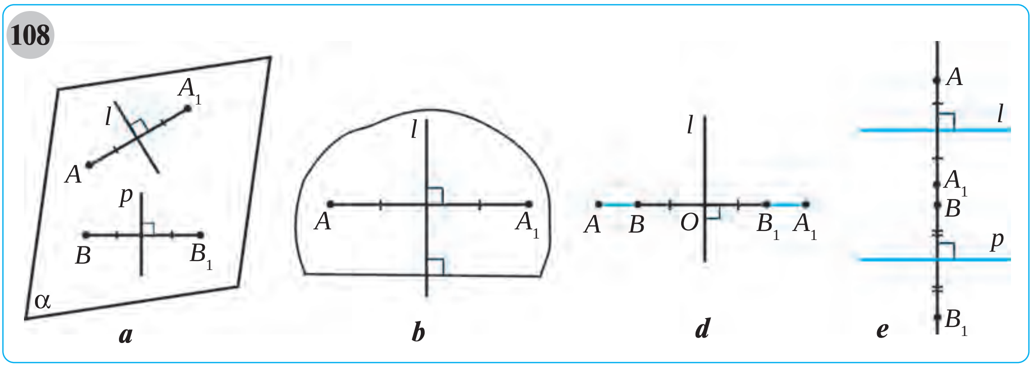
**198.** $ABCD$ kvadratning uchta uchining koordinatalari berilgan: $A(0; 2)$, $B(2; 0)$, $D(-2; 0)$. Shu kvadratni yasang va $C$ uchining koordinatalarini toping.

## 15- mavzu. SIMMETRIYA O‘QIGA EGA BO‘LGAN SHAKLLAR



*Tasvirlangan buyumlarda qanday umumiylik bor?*
*Agar payqagan bo‘lsangiz, uni tushuntirishga harakat qiling.*

Shakl biror $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan o‘ziga-o‘zi simmetrik bo‘lishi mumkin. Bu degani, uning har bir $X$ nuqtasiga $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik $X_1$ nuqta uning o‘zida yotadi. U holda $l$ to‘g‘ri chiziq *shaklning simmetriya o‘qi* deyiladi, shakl esa *o‘q simmetriyasiga* ega deyiladi.




O‘q simmetriyasiga ega bo‘lgan shakllarga misollar keltiramiz.

Masalan: 1) tekislik shu tekislikda yotgan har qanday to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik (108-*a* rasm); 2) yarim tekislik uning chegarasiga perpendikular bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik (108-*b* rasm); 3) kesma o‘zining o‘rta perpendikulariga nisbatan simmetrik (108-*d* rasm); 4) to‘g‘ri chiziq unga perpendikular bo‘lgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa simmetrik (108-*e* rasm). Ushbu rasmlardan bu tasdiqlarning to‘g‘riligini ko‘rish qiyin emas.

Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan shaklni quyidagicha yasash mumkin: bir varaq qog‘ozni buklab, unga biror shakl (naqsh, qul, ...) chizing va uni shaklning chegaralari bo‘ylab qirqing. Varaqni ochsangiz, buklash chizig‘iga nisbatan simmetrik shaklni hosil qilasiz. Buklash chizig‘i Siz chizgan shaklning simmetriya o‘qi bo‘ladi.

Shakl bitta, ikkita, uchta, ..., cheksiz ko‘p simmetriya o‘qiga ega bo‘lishi mumkin.

**Teorema.**

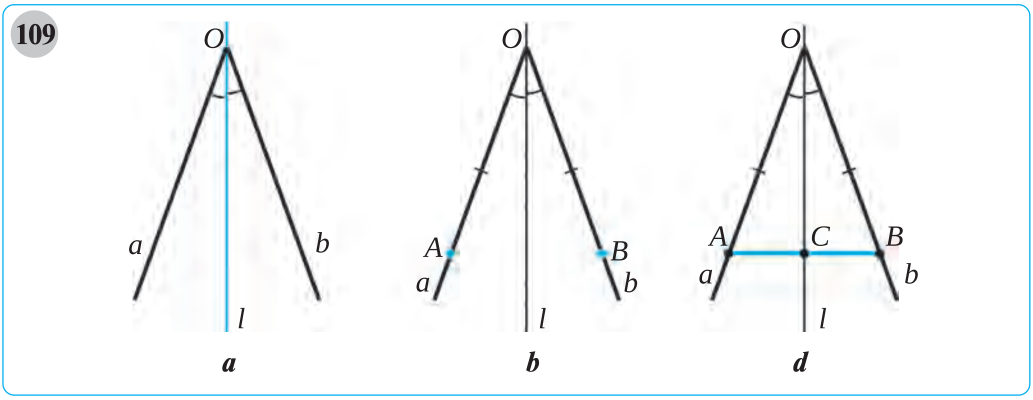
**Burchakning bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq shu burchakning simmetriya o‘qidir.**

Isbot. 1-usul. 1) $O$ uchli hamda tomonlari $a$ va $b$ nurlardan iborat yoyiq bo‘lmagan burchak (uni $aOb$ kabi belgilash ham mumkin) uchun $a$ va $b$ nurlarning burchak bissektrisasi yotgan $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrikligini isbotlaymiz (109-*a* rasm).

1-qadam. $a$ nurda ixtiyoriy $A$ nuqta olamiz. So‘ngra $b$ nurda $B$ nuqtani shunday yasaymizki, unda $OB = OA$ (109- *b* rasm).

2-qadam. $AB$ kesmani o‘tkazamiz. U $l$ to‘g‘ri chiziqni biror $C$ nuqtada kesadi (109- *d* rasm).

3-qadam. $OC$ kesma teng yonli $OAB$ uchburchakning $AB$ asosiga o‘tkazilgan bissektrisasi va shu bilan bir qatorda, bu bissektrisa $OAB$ uchburchakning ham medianasi, ham balandligi bo‘ladi (chunki $OAC$ va $OBC$ uchburchaklar uchburchaklar tengligining 1-alomatiga ko‘ra teng). Shuning uchun $OC$ to‘g‘ri chiziq $AB$ kesmaning o‘rta perpendikulari, ya’ni $A$ va $B$ nuqtalar $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik. $aOb$ burchak tomonlari $a$ va $b$, uning bissektrisasi yotadigan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik. Demak, burchakning o‘zi ham shu to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik ekan.




Shunday qilib, *burchak bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq shu burchakning simmetriya o‘qi bo‘ladi.*

2) Yoyiq burchak uchun bu tasdiqning to‘g‘riligi 108-*d* rasmda ko‘rsatilgan.

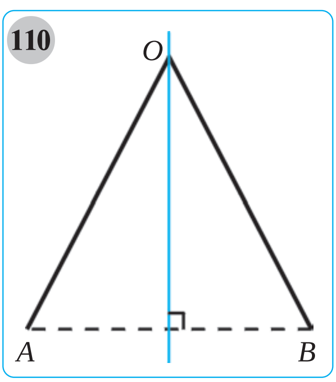
2-usul. $aOb$ burchakning bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq $l$ bo‘lsin (109-*a* rasmga q.). $l$ to‘g‘ri chiziqli simmetriyani ko‘rib chiqamiz.

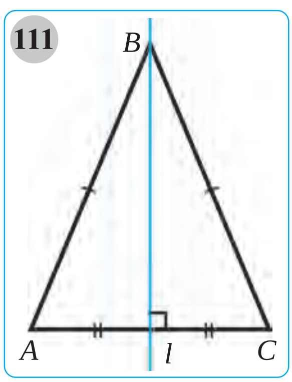
Bu simmetriyada $l$ nur o‘ziga akslanadi, $aOl$ burchak esa $l$ tomonli va $aOl$ burchakka teng burchakka akslanadi. Ammo $\angle aOl = \angle bOl$ (shartga ko‘ra $l$ nur $aOb$ burchakning bissektrisasi). Har qanday nurga berilgan kattalikdagi ikkita burchakni qo‘yish mumkin. Shuning uchun $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmeriyada $a$ nurning aksi $b$ nur, $b$ nurning aksi esa $a$ nurdir. Demak, $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $aOb$ burchak o‘ziga-o‘zi akslanadi.

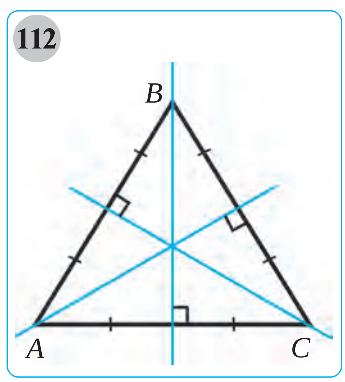
Burchakning bissektrisasini yasash berilgan burchakning simmetriya o‘qini yasashga keltiriladi, buni yuqoridagi teorema yordamida asoslash mumkin (110- rasm).

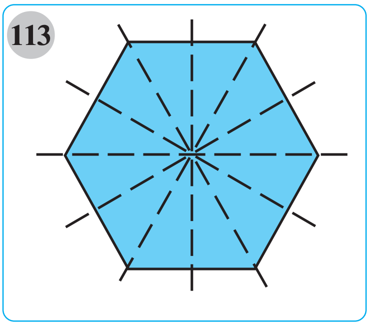
**Natija.** *Teng yonli uchburchak uchidagi burchak bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq shu uchburchakning simmetriya o‘qidir.*

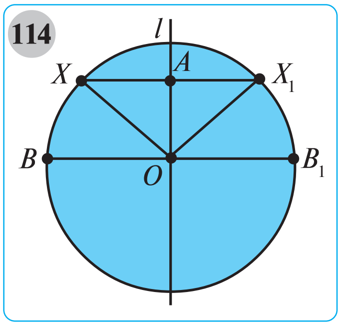
Isbot. $ABC$ teng yonli uchburchak $B$ burchagining bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziqni $l$ bilan belgilaymiz (111- rasm). Yuqorida isbotlangan teoremadan foydalanib, $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $BA$ nurning aksi $BC$ nur, $BC$ nurning aksi esa $BA$ nur ekanini aniqlaymiz. Shartga ko‘ra, $AB = CB$. Shu $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $A$ nuqta $C$ nuqtaga, $C$ nuqta esa $A$ nuqtaga o‘tadi.

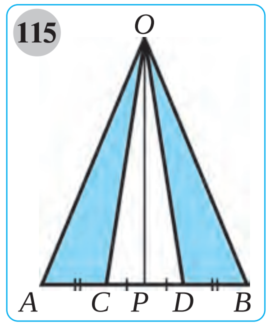





Bundan tashqari, o‘qqa nisbatan simmetriyaning ta’rifiga ko‘ra $B$ o‘ziga-o‘zi akslanadi. Demak, $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $ABC$ teng yonli uchburchak o‘ziga-o‘zi akslanadi.

Teng tomonli uchburchakning bir nuqtadan o‘tuvchi uchta simmetriya o‘qi mavjud (112- rasm).

**1-masala.** Teng tomonli (muntazam) oltiburchakning nechta simmetriya o‘qi bor?

Yechilishi. Oltita simmetriya o‘qi bor. Ulardan uchtasi qarama-qarshi uchlari orqali, qolgan uchtasi esa qarama-qarshi tomonlarining ortalari orqali o‘tadi (113- rasm).

Javob: oltita simmetriya o‘qi bor.

**2-masala.** Aylananing markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar uning simmetriya o‘qi bo‘lishini isbot qiling.

Isbot. $O$ — aylananing markazi, $l$ — $O$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lsin (114- rasm). Ravshanki, $l$ to‘g‘ri chiziqqa simmetriyada aylananing $B$ nuqtasi $B_1$ nuqtaga o‘tadi, $O$ nuqta o‘ziga-o‘zi o‘tadi.

Aylanada ixtiyoriy $X$ nuqta olamiz va $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik $X_1$ nuqtani yasaymiz.

$OAX$ va $OAX_1$ uchburchaklar tengligining birinchi alomatga ko‘ra teng. Ularning $A$ uchidagi burchaklari to‘g‘ri burchaklardir, $OA$ tomon umumiy, $AX$ va $AX_1$ tomonlar esa simmetriya ta’rifiga ko‘ra teng. Uchburchaklarning tengligidan $OX$ va $OX_1$ tomonlar teng degan natija chiqadi, ya’ni $X_1$ nuqta aylanada yotadi. Bu esa $l$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada aylananing o‘z-o‘ziga o‘tishini, ya’ni $l$ to‘g‘ri chiziq aylananing simmetriya o‘qi ekanini bildiradi.

Shunday qilib, aylananing markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar uning simmetriya o‘qlari bo‘ladi.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**199.** 1) Shaklning simmetriya o‘qi nima?
2) Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan jismlarga, shakllarga misollar keltiring. Shakl nechta simmetriya o‘qiga ega bo‘lishi mumkin?
3) Berilgan burchakning bissektrisasi sirkul va chizg‘ich yordamida qanday yasaladi?

**200.** 1) Kvadrat bo‘lmagan rombning; 2) kvadratning; 3) nurning; 4) teng yonli uchburchakning nechta simmetriya o‘qi bor?

**201.** Teng yonli uchburchakning uchidan oʻtkazilgan balandligi (simmetriya oʻqi) undan perimetri 36 sm ga teng uchburchak kesadi. Agar berilgan teng yonli uchburchakning perimetri: 1) 48 sm ga; 2) 60 sm ga; 3) 40 sm ga teng boʻlsa, balandligining uzunligini hisoblang.

**202.** 1) Berilgan ikki nuqtaning nechta simmetriya oʻqi bor?

2) Kesishuvchi ikki toʻgʻri chiziqning nechta simmetriya oʻqi bor?

**203.** Toʻgʻri toʻrtburchakning diagonallari kesishish nuqtasidan uning tomonlariga parallel ravishda oʻtuvchi toʻgʻri chiziqlar shu toʻgʻri toʻrtburchakning simmetriya oʻqlari boʻlishini isbot qiling.

**204.** Romb diagonallari uning simmetriya oʻqlari boʻlishini isbotlang.

**205.** Agar uchburchakning simmetriya oʻqi mavjud boʻlsa: 1) u uchburchak uchlarining biridan oʻtishini; 2) uchburchak teng yonli boʻlishini isbot qiling.

**206.** Teng yonli uchburchak ikki tomonining uzunligi: 1) 6 sm va 14 sm; 2) 10 sm va 5 sm; 3) 21 sm va 24 sm boʻlsa, asosi va yon tomonining uzunliklarini toping.

**207.** Ushbu lotin alifbosidagi harflardan qaysilari: 1) bitta simmetriya oʻqiga ega; 2) ikkita simmetriya oʻqiga ega?

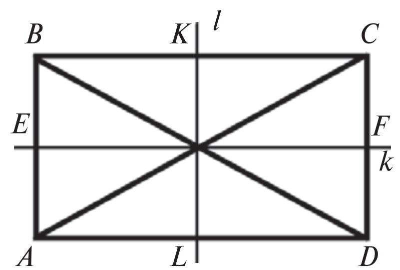
**A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, P, O, Q, R, S,**
**T, U, V, X, Y, Z, W**

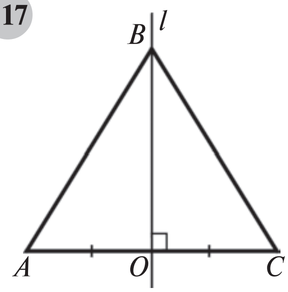
**208.** 115- rasmda: 1) *ODB* va *OCA* uchburchaklarning tengligini isbotlang;
2) teng kesmalar juftlarini, teng burchaklar juftlarini toping;
3) qaysi nuqtalar, kesmalar va uchburchaklar *OP* dan oʻtuvchi toʻgʻri chiziqqa (oʻqqa) nisbatan simmetrik boʻladi?

**209.** $k$ va $l$ toʻgʻri chiziqlar $ABCD$ toʻgʻri toʻrtburchakning simmetriya oʻqlari (116- rasm). $EF = 20$ sm va $KL = 15$ sm boʻlsa, $EBCF$ va $ABCD$ toʻrtburchaklarning perimetrlarini toping.

**210.** $l$ toʻgʻri chiziq $ABC$ uchburchakning simmetriya oʻqi (117- rasm). Uchburchakning perimetri 46 sm. $AO = 6{,}5$ sm boʻlsa, shu uchburchakning $AC$ va $BC$ tomonlarini toping.

**211.** Qanday holda toʻgʻri chiziq oʻq simmetriyasida unga parallel toʻgʻri chiziqqa oʻtadi?

116


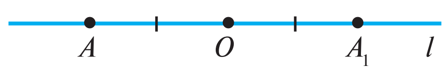

117


## 16- mavzu. MARKAZIY SIMMETRIYA VA UNING XOSSALARI

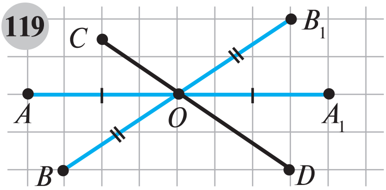
**1. Nuqtaga nisbatan (markaziy) simmetriya.** Tekislikda $O$ nuqtadan o'tuvchi $l$ to'g'ri chiziqni qaraylik (118- rasm). To'g'ri chiziqdagi $A$ va $A_1$ nuqtalar uchun $AO = OA_1$ shart bajarilsa, ya'ni $A$ va $A_1$ nuqtalar $O$ nuqtadan teng uzoqlikda bo'lsa, $A_1$ nuqta $A$ nuqtaning $O$ nuqtaga nisbatan *simmetrik nuqtasi* deb ataladi. Buning aksi ham to'g'ri, ya'ni $A_1$ nuqta $A$ ning simmetrik nuqtasi. Bunda $O$ nuqta *simmetriya markazi* deb ataladi.

119- rasmda $A$ va $A_1$, $B$ va $B_1$ nuqtalar $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik; $C$ va $D$ nuqtalar esa $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik emas, chunki $CO \neq OD$.

118




119




**Ta'rif.** *Agar $F_1$ shaklning har bir nuqtasi $F$ shaklning mos nuqtalarining $O$ nuqtaga nisbatan* ***simmetrik nuqtasi*** *bo'lsa, $F$ va $F_1$ shakllar $O$ nuqtaga nisbatan* ***markaziy simmetrik shakllar*** *deb ataladi.*

$O$ nuqta $F$ va $F_1$ shakllarning *simmetriya markazi* deb ataladi.

**2. Markaziy simmetriyaning xossalari.**

**1-teorema.**

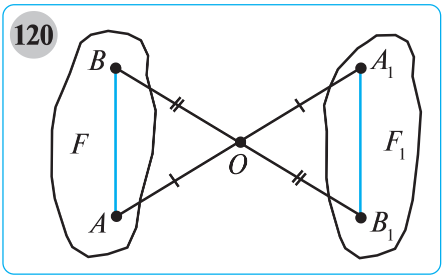
**Nuqtaga nisbatan simmetrik shakllarda mos nuqtalar orasidagi masofalar teng hamda burchak kattaligi saqlanadi.**

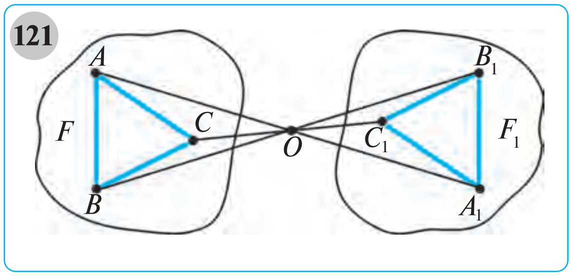
Isbot. $F$ va $F_1$ markaziy simmetrik shakllar bo'lib, $A$ va $B$ nuqtalar $F$ shaklning ixtiyoriy nuqtalari hamda $A_1$ va $B_1$ nuqtalar $F_1$ shaklning $A$ va $B$ ga mos kelgan simmetrik nuqtalari bo'lsin (120- rasm). $AB = A_1B_1$ ekanini isbot qilish kerak.

Isbot qilish uchun $ABO$ va $A_1B_1O$ uchburchaklarni taqqoslaymiz. Bu uchburchaklarda $AO = A_1O$ va $BO = B_1O$, chunki $A$, $B$ va $A_1$, $B_1$ nuqtalar markaziy simmetrik nuqtalar. Shuningdek, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, chunki vertikal burchaklar. Demak, taqqoslanayotgan uchburchaklarda ikkita mos tomonlar va ular orasidagi burchak teng. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra: $\triangle ABO = A_1B_1O$. Bundan mos tomonlar bo'lgani uchun $AB = A_1B_1$.

Agar $A$, $B$ nuqtalar $O$ dan o'tuvchi bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, $AB = A_1B_1$ ekanligi markaziy simmetriya ta'rifidan kelib chiqadi.

$F$ va unga simmetrik bo'lgan $F_1$ shakl berilgan bo'lsin (121- rasm). Bu shakllarga tegishli uchta $A$, $B$, $C$ va ularning aksi bo'lgan $A_1$, $B_1$, $C_1$ nuqtalarni qaraylik. Bu nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmasin. U holda $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ lar mos tomonlarining uzunliklari teng (yuqorida isbot qilingan teoremaga ko'ra). Uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Bundan uchburchaklarning burchaklari ham teng ekanligi kelib chiqadi.




**2-teorema.**

**Markaziy simmetriyada kesmalar kesmalarga, nurlar nurlarga, to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘ri chiziqlarga o‘tadi.**

Isbot. $A$, $B$ va $C$ nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda, ya’ni $C$ nuqta $A$ va $B$ nuqtalar orasida yotsin. U holda $AC + CB = AB$. Markaziy simmetrik $A_1$, $B_1$ va $C_1$ nuqtalar uchun $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$ tenglik bajariladi. Shunday qilib, $C_1$ nuqta $A_1B_1$ to‘g‘ri chiziqda $A_1$ va $B_1$ nuqtalar orasida yotadi. Demak, $AB$ kesma $A_1B_1$ kesmaga o‘tadi (122- *a* rasm). $O$ — simmetriya markazi.

Xuddi shunga o‘xshash, $AB$ nur $A_1B_1$ nurga, $AB$ to‘g‘ri chiziq to‘laligicha $A_1B_1$ to‘g‘ri chiziqqa o‘tishi isbotlanadi.

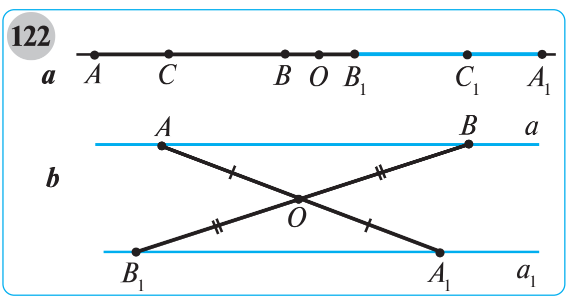
**Masala.** Markaziy simmetriya to‘g‘ri chiziqni unga parallel to‘g‘ri chiziqqa yoki o‘zini-o‘ziga o‘tkazishini isbotlang.

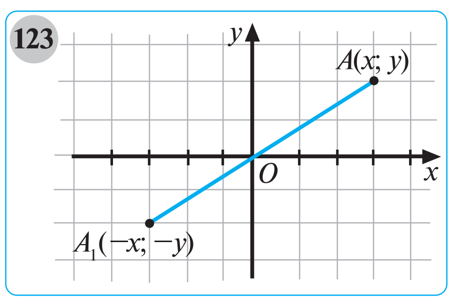
Isbot. Agar simmetriya markazi berilgan to‘g‘ri chiziqda yotsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq markaziy simmetriyada o‘ziga-o‘zi o‘tishi ravshan.

$O$ markaz $a$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmasin (122- *b* rasm). $a$ to‘g‘ri chiziqqa simmetrik $a_1$ to‘g‘ri chiziqning $a$ to‘g‘ri chiziqqa parallel ekanini isbotlaymiz.

$a$ to‘g‘ri chiziqdagi biror $A$ va $B$ nuqtalarni ko‘rib chiqamiz. Ular $O$ markazga nisbatan $a_1$ to‘g‘ri chiziqdagi biror $A_1$ va $B_1$ nuqtalarga o‘tadi. Bunda hosil bo‘lgan $OAB$ va $OA_1B_1$ uchburchaklarda markaziy simmetriya ta’rifiga ko‘ra $OA = OA_1$ va $OB = OB_1$, vertikal burchaklar bo‘lgani uchun $\angle AOB = \angle A_1OB_1$. Demak, uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra: $\triangle OAB = \triangle OA_1B_1$. Bundan $\angle OAB = \angle OA_1B_1$ kelib chiqadi. Bu burchaklar $a$ va $a_1$ to‘g‘ri chiziqlar hamda $AA_1$ kesuvchidan hosil bo‘lgan ichki almashinuvchi burchaklardir. Demak, $a$ va $a_1$ to‘g‘ri chiziqlar parallel (ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik alomatiga ko‘ra).

*Koordinatalar boshi O(0; 0) nuqtaga nisbatan simmetriyada ixtiyoriy A (x; y) nuqta A₁(–x; –y) nuqtaga o‘tadi* (123- rasm).



## Savol, masala va topshiriqlar

**212.** 1) Nuqtaga nisbatan simmetriya deganda nimani tushunasiz?
2) Qanday shakl nuqtaga nisbatan simmetrik shakl deb ataladi? Simmetriya markazi nima?

**213.** 1) $A$ va $B$ nuqtalar berilgan. $A$ nuqtaga nisbatan $B$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan $B_1$ nuqtani yasang.
2) Shu masalani faqat sirkuldan foydalanib yeching.

**214.** $ABC$ uchburchak berilgan. $A$ va $B$ nuqtaga nisbatan $C$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan shaklni yasang.

**215.** Biror $O$ nuqtaga nisbatan simmetriyada $X$ nuqta $X_1$ nuqtaga o‘tadi. Shu simmetriyada $Y$ o‘tadigan nuqtani yasang.

**216.** $A(-2;\ 2)$ va $B(2;\ -1)$ nuqtalar berilgan. 1) Koordinatalar boshiga nisbatan berilgan nuqtalarga simmetrik $A_1$ va $B_1$ nuqtalarni yasang.
2) $A_1$ va $B_1$ nuqtalarning koordinatalarini yozing.

**217.** $A(-3;\ 5)$ va $B(2;\ -4)$ nuqtalar berilgan. Koordinatalar boshiga nisbatan simmetriyada $AB$ kesmaga simmetrik bo‘lgan $A_1B_1$ kesma uchining koordinatalarini toping.

**218.** 124- rasmda $AB$ kesma va $O$ nuqta tasvirlangan. $O$ nuqtaga nisbatan $AB$ kesmaga simmetrik bo‘lgan $A_1B_1$ kesmani yasang.

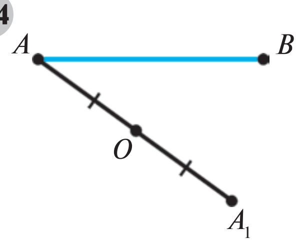
Y e c h i l i s h i. $AO$ to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va unda $A_1$ nuqtani shunday belgilaymizki, unda $O$ nuqta $AA_1$ kesmaning ... (118- rasmga q.) bo‘lsin. $A_1$ nuqta $O$ nuqtaga nisbatan $A$ nuqtaga ... . Shunga o‘xshash, ... nisbatan $B$ nuqtaga ... bo‘lgan $B_1$ nuqta yasaymiz. $A_1B_1$ — izlanayotgan kesma.

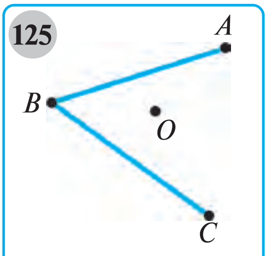
**219.** $A(-1;\ -4)$ va $B(3;\ 2)$ nuqtalar berilgan. 1) Abssissalar o‘qiga; 2) ordinatalar o‘qiga; 3) koordinatalar boshiga; 4) I va III koordinatalar burchaklari bissektrisalariga nisbatan berilgan nuqtalarga simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

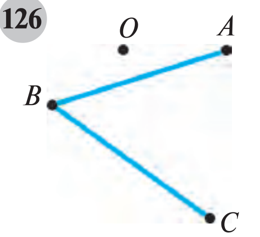
**220.** $ABC$ burchak va bu burchakning tomonlarida yotmagan $O$ nuqta berilgan (125- rasm). Berilgan burchakka $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan shaklni yasang.

**221.** $ABC$ uchburchak $AC$ tomonining o‘rtasiga nisbatan simmertiyada $B$ uchi $D$ nuqtaga o‘tadi. $ABCD$ to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

**222.** Qaysi ikki raqam markaziy simmetriyada bir-biriga o‘tadi?

124



125



126


**223.** Lotin alifbosi harflari ichidan simmetriya markaziga ega bo‘lganlarini ko‘rsating:

**A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, P, O,**
**Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z, W**

**224.** $ABC$ burchak va bu burchakning tomonlarida yotmagan $O$ nuqta berilgan (126- rasm). $O$ nuqtaga nisbatan $ABC$ burchakka simmetrik bo‘lgan shaklni yasang.

**225.** $A(1;\ 1)$, $B(-2;\ 0)$, $C(2;\ 3)$, $D(0;\ 1)$, $E(-3;\ 4)$ va $F(-2;\ -2)$ nuqtalar berilgan. 1) Abssissalar o‘qiga; 2) ordinatalar o‘qiga; 3) koordinatalar boshi $O(0;\ 0)$ nuqtaga nisbatan berilgan nuqtalarga simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

**226.** $A(3;\ 5)$, $B(4;\ 2)$, $C(3;\ -5)$, $D(-4;\ -2)$ va $E(-3;\ 5)$ nuqtalardan qaysi juftlari: 1) abssissalar o‘qiga; 2) ordinatalar o‘qiga; 3) koordinatalar boshi $O(0;\ 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘ladi?

## 17- mavzu. MARKAZIY SIMMETRIK SHAKLLAR

Biror $O$ markazga nisbatan simmetriyada o‘ziga-o‘zi akslanadigan shakl *markaziy simmetrik shakl* deyiladi (bu shakl *simmetriya markaziga ega,* deb ham aytiladi). $O$ nuqta esa shaklning *simmetriya markazi* deyiladi.

***Aylana o‘zining markaziga nisbatan simmetrik.***

Haqiqatan ham, $O$ markazli aylanada yotgan ixtiyoriy $X$ nuqta olaylik. $X$ nuqtadan $O$ nuqta orqali aylananing $XX_1$ diametrini o‘tkazamiz. $O$ markaz $XX_1$ kesmaning o‘rtasi, ya’ni $X$ va $X_1$ nuqtalar $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik. Demak, $O$ nuqta aylananing simmetriya markazi bo‘ladi (127- rasm).

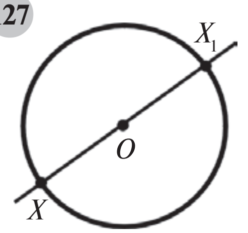
Uchburchak simmetriya markaziga ega emas, to‘rtburchak esa simmetriya markaziga ega bo‘lishi mumkin.

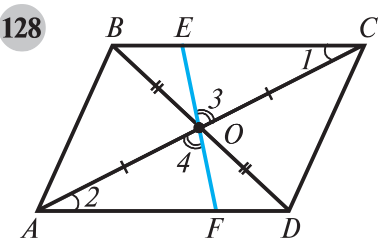
**Teorema.**

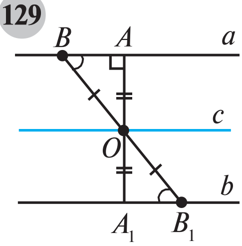
**Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi uning simmetriya markazidir.**

Isbot. $O$ — $ABCD$ parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi bo‘lsin (128- rasm). Parallelogrammning uchlarini ko‘rib chiqamiz. $A$ va $C$, $B$ va $D$ nuqtalar $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtalar bo‘ladi (markaziy simmetriya ta’rifi va parallelogrammning xossalari (2- teorema)ga ko‘ra).

Parallelogrammning tomonlaridan birida biror ($E$) nuqta olamiz, uni $O$ nuqta bilan tutashtiramiz va $EO$ kesmani qarama-qarshi tomon bilan $F$ nuqtada ke-

127



128



129


sishguncha davom ettiramiz. $EO = OF$, ya'ni parallelogrammning tomonlarida yotuvchi ixtiyoriy nuqta uchun diagonallarining kesishish nuqtasiga nisbatan simmetrik nuqta topilishini isbotlaymiz.

Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra: $\triangle AOF = \triangle COE$ ($AO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$ — $BC \parallel AD$ va $AC$ kesuvchidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar, $\angle 3 = \angle 4$ — vertikal burchaklar). Va, demak, $EO = OF$. Shunday qilib, parallelogramm markaziy simmetrik shakldir, ya'ni $ABCD$ parallelogramm $O$ markazli simmetriyada o'ziga-o'zi akslanadi, binobarin, uning diagonallarining kesishish nuqtasi uning simmetriya markazidir.

**Masala.** Ikkita parallel to'g'ri chiziqdan iborat shaklning nechta simmetriya markazi bor? Ular qayerda joylashgan?

Yechilishi. $a \parallel b$ bo'lsin. Ikkita parallel to'g'ri chiziq $a$ va $b$ ga perpendikular bo'lgan $AA_1$ kesmani yasaymiz. $O$ — bu kesmaning o'rtasi bo'lsin (129- rasm).

$O$ nuqta berilgan parallel to'g'ri chiziqlarning simmetriya markazi ekanini isbot qilamiz. $a$ to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $B$ nuqtani olamiz va unga $O$ nuqtaga nisbatan simmetrik $B_1$ nuqtani yasaymiz. Yasalishiga ko'ra, $OB = OB_1$ va $AO = OA_1$. Gipotenuza va katetiga ko'ra, $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$. Uchburchaklar tengligidan $\angle ABO = \angle A_1B_1O$ kelib chiqadi, bu burchaklar esa $a \parallel b$ va $BB_1$ kesuvchidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklardir. Demak, $a \parallel A_1B_1$. Biroq, $A_1$ nuqta orqali $a$ to'g'ri chiziqqa parallel $b$ to'g'ri chiziq o'tadi. Demak, $A_1B_1$ va $b$ to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi, ya'ni $O$ nuqtaga nisbatan simmetriyada $a$ to'g'ri chiziq $b$ to'g'ri chiziqqa o'tadi va aksincha. Demak, simmetriya markazi berilgan to'g'ri chiziqlarga perpendikular bo'lgan istalgan kesmaning o'rtasidan iborat bo'ladi, ya'ni ikkita parallel to'g'ri chiziqdan iborat shakl cheksiz ko'p simmetriya markaziga ega bo'lib, ular berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel va ulardan bu to'g'ri chiziqlar orasidagi masofaning yarmiga teng masofada o'tuvchi ($c$) to'g'ri chiziqda joylashgandir. Demak, $c$ to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqta berilgan to'g'ri chiziqlar uchun simmetriya markazi bo'ladi.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**227.** 1) Qanday shakl markaziy simmetrik shakl deyiladi? Markaziy simmetrik shakllarga misollar keltiring.
2) Shaklning simmetriya markazi nima?

**228.** Markaziy simmetriyada: 1) tekislikning qanday nuqtasi; 2) qanday to'g'ri chiziqlar o'ziga akslanadi?

**229.** $O$ nuqta $AB$ to'g'ri chiziqda yotadi. $O$ nuqtaga nisbatan $AB$ to'g'ri chiziqqa simmetrik shakl qanday shakl bo'ladi? Uni yasang.

**230.** 1) Ikkita teng va parallel kesmalar berilgan. Ularning simmetriya markazini yasang.
2) Kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq simmetriya markaziga egami?

**231.** Uchta to'g'ri chiziqdan ikkitasi o'zaro parallel, uchinchisi esa ularni kesadi. Ulardan hosil bo'lgan shakl simmetriya markaziga egami?

**232.** $A_1B_1$ va $A_2B_2$ kesmalarning o‘rtalari umumiy $O$ nuqtadan iborat.

1) $A_1A_2$ va $B_1B_2$, $A_1B_2$ va $A_2B_1$ kesmalarning tengligini isbotlang.

2) $A_1A_2$ va $B_1B_2$ kesmalarning o‘rtalari $O$ nuqta bilan bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

**233.** Agar to‘rtburchakning simmetriya markazi bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

**234.** Tekislikda $A(2; 2)$, $B(-2; 0)$, $C(3; 4)$, $D(0; 2)$, $E(-2; -2)$, $F(-4; 2)$, $K(3; -2)$, $L(-3; -3)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga:

1) koordinata o‘qlariga; 2) koordinata boshi $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasang va koordinatalarini yozing.

**235.** Simmetriya markaziga ega bo‘lgan uchburchak (to‘rtburchak) bormi?

**236.** $O$ markazli aylanada ikkita o‘zaro teng va parallel vatar o‘tkazilgan. Ularning simmetriya markazini toping.

## *1-§ ga (simmetriyaga) doir qo‘shimcha mashqlar*

**237.** $A$, $B$ va $C$ nuqtalar berilgan. $C$ nuqtaga $AB$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgan $C_1$ nuqtani faqat sirkuldan foydalanib yasang.

**238.** $AB$ kesma hamda shunday ikki nuqta $C$ va $D$ berilganki, bunda $CA = CB$ va $DA = DB$ bo‘lsin. $A$ va $B$ nuqta $CD$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik ekanini isbotlang.

**239.** Turli tomonli uchburchak simmetriya o‘qlariga ega emasligini isbotlang.

**240.** Teng yonli uchburchakning asosiga o‘tkazilgan medianasi yotgan to‘g‘ri chiziq uchburchakning simmetriya o‘qi bo‘lishini isbotlang.

**241.** $ABCD$ romb berilgan. $BC$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada $A$ nuqtaga simmetrik bo‘lgan nuqtani yasang.

**242.** To‘g‘ri to‘rtburchakning simmetriya o‘qlari $x = 4$ va $y = 3$. Uning uchlaridan biri $A(7; 5)$, qolgan uchlarining koordinatalarini toping.

**243.** $AB$ kesmaga $O_1$ nuqtaga nisbatan simmetrik $A_1B_1$ kesmani yasang, so‘ngra $A_1B_1$ kesmaga $O_2$ nuqtaga nisbatan simmetrik kesmani yasang.

**244.** Berilgan nuqtaga nisbatan: 1) kesmaga; 2) burchakka; 3) nurga simmetrik bo‘lgan shakl nimadan iborat bo‘ladi?

**245.** Uchburchakning uchlari $A(-2; 1)$, $B(1; 5)$ va $C(4; -2)$ nuqtalarda yotadi. Koordinatalar boshiga nisbatan berilgan uchburchakka simmetrik bo‘lgan uchburchakning koordinatalarini toping.

**246.** $A(5; 2)$, $B(5; -2)$, $C(2; 5)$ va $D(-5; -2)$ nuqtalar berilgan.

1) Bulardan qaysi biri koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik?

2) $A$ va $C$ nuqtalarning simmetriya markazini aniqlang.

**247.** To‘g‘ri chiziqda teng ikkita $AB$ va $CD$ kesmalar berilgan. Ularning simmetriya markazini yasang.

**248.** Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasidan o‘tkazilgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq uni ikkita teng shaklga ajratishini isbotlang.

**249.** Teng tomonli $ABC$ uchburchak $AC$ tomonining o‘rtasiga nisbatan simmetriyada $B$ uchi $D$ nuqtaga o‘tadi. $ABCD$ to‘rtburchak romb bo‘lishini isbotlang.

**250.** Ikkita teng aylana tashqi tomondan urinsa, ular urinish nuqtasiga nisbatan simmetrik bo‘lishini isbotlang.

**251.** Radiuslari teng ikkita aylana berilgan. Berilgan aylanalarning simmetriya markazini toping.

**252.** Agar shakl ikkita perpendikular simmetriya o‘qiga ega bo‘lsa, u holda u simmetriya markaziga ega bo‘lishini isbotlang.

## *3- TEST*

**1.** To‘g‘ri mulohazani ko‘rsating:
1) O‘q simmetriyasida ikkita mos kesmalar parallel.
2) Markaziy simmetriyada ikkita mos nurlar yo‘nalishdosh.
3) Ixtiyoriy beshburchak simmetriya markaziga ega emas.
A) 1; 2; B) 1; 3; D) 2; 3; E) 3.

**2.** Har qanday burchakning nechta simmetriya o‘qi bor?
A) 0; B) 1; D) 2; E) cheksiz ko‘p.

**3.** To‘g‘ri mulohazalarni ko‘rsating:
1) Markaziy simmetriyada ikkita mos kesmalar parallel.
2) O‘q simmetriyasida ikkita mos nurlar yo‘nalishdosh.
3) Biror oltiburchak simmetriya o‘qiga ega.
A) 1; 2; B) 1; 3; D) 2; 3; E) 1; 2; 3.

**4.** $B(5; -3)$, $B_1$ – $Oy$ o‘qiga nisbatan $B$ nuqtaga simmetrik nuqta, $B_2$ esa $Ox$ o‘qiga nisbatan $B_1$ nuqtaga simmetrik nuqta. $B_2$ nuqtaning koordinatalarini toping.
A) $(5; 3)$; B) $(-5; -3)$; D) $(-5; 3)$; E) to‘g‘ri javob yo‘q.

**5.** Quyidagi mulohazalardan qaysi biri to‘g‘ri?
1) To‘g‘ri to‘rtburchakning ikkita simmetriya o‘qi bor, ular uning diagonallaridir.
2) To‘g‘ri to‘rtburchakning ikkita simmetriya o‘qi bor, ular uning tomonlariga o‘tkazilgan o‘rta perpendikulardir.
3) To‘g‘ri to‘rtburchakning to‘rtta simmetriya o‘qi bor.
4) 1-, 2-, 3- mulohazalar noto‘g‘ri.
A) 1; B) 2; D) 3; E) 4.

**6.** Har qanday kesma nechta simmetriya o‘qiga ega?
A) 0; B) 1; D) 2; E) cheksiz ko‘p.

**7.** Uchburchak faqat bitta simmetriya o‘qiga ega. Uchburchakning turini aniqlang.
A) turli tomonli; D) teng yonli;
B) teng tomonli; E) bunday uchburchak mavjud emas.

## *Tarixiy ma'lumotlar*

**Simmetriya haqida.** «Simmetriya» yunoncha so'z bo'lib, o'zbek tiliga tarjimasi «o'lchovlik» yoki «o'lchovlilik» degan ma'noni beradi.

Arxitektura, rassomchilik, haykaltaroshlikda ham simmetriya moslik, tenglik va go'zallik ma'nosida ishlatiladi.

Simmetriyadan odamlar juda qadim zamonlardan foydalana boshlaganlar. O'zbekiston hududida olib borilgan arxeologik qazish ishlari paytida topilgan ko'plab sopol idishlardagi bezaklarda simmetrik shakllarni ko'rishimiz mumkin. O'tmishdan qolgan arxitektura yodgorliklarining naqshlarida, ularning qurilishlarida ham ajoyib simmetriklik mavjud.

Poytaxtimizning 2200 yilligi munosabati bilan Toshkentning markazida qad rostlagan yangi me'moriy durdona bo'lmish **«O'zbekiston» anjumanlar saroyi** o'zining go'zalligi bilan barchani lol qoldirmoqda. Bu binoning balandligi 48 metr. Diametri 53 metr bo'lgan gumbazning ustiga farovon hayot va tinchlik ramzi – ikkita laylakning haykali o'rnatilgan. Saroyning bevosita foydalaniladigan maydoni 6,5 ming $m^2$ ni tashkil etadi. Mazkur binoda ko'plab yirik xalqaro miqyosdagi tadbirlarni o'tkazish rejalashtirilgan.

*Toshkentda yangi qad rostlangan «O'zbekiston» anjumanlar saroyi.*

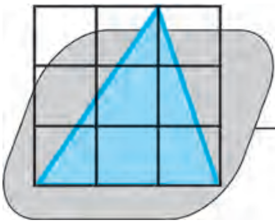
Yevklidning «Negizlar»ida simmetriya tushunchasi yo'q. Ammo bu asarning bir kitobida simmetriyaning fazoviy o'qi haqida tushuncha mavjud.

Simmetriya markazi haqidagi tushuncha birinchi marta XVI asrda yashagan **Xristofor Kladius** (1537–1612)ning asarida uchraydi.

Arxitektura haqida birinchi bo'lib muhandis **Vitruviy** (I asr) kitob yozgan. U simmetriyani mufassal o'rganib, o'z asarida uning arxitekturaga qanday tatbiq etilishini bayon etgan. Uyg'onish davrining buyuk rassomlari **Leonardo da Vinchi** va **Rafael** o'z ijodlarida simmetriyadan unumli foydalanganlar.

Elementar geometriyaga simmetriya nazariyasi elementlarini birinchi marta fransuz matematigi **Lejandr** (1752–1833) kiritgan. Lejandr simmetriya haqida gapirganda faqat tekislikka nisbatan simmetriyani nazarda tutadi. U simmetriyaga quyidagicha ta'rif bergan:

*«Agar $\alpha$ tekislik AB kesmaga uning o'rtasida perpendikular bo'lsa, u holda A va B nuqtalar $\alpha$ tekislikka nisbatan simmetrik deyiladi».*



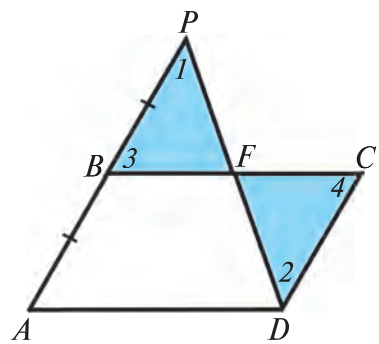
# 2- §. YUZLAR

## 18-mavzu. YUZ HAQIDA TUSHUNCHA. TENGDOSH SHAKLLAR

*ABCD to'rtburchak — parallelogramm, P nuqta B nuqtaga nisbatan A nuqtaga simmetrik nuqta. $S_{ABCD} = S_{ADP}$ ekanini isbotlang.*

*I s b o t . 1) BPF = △CDF — tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra (AB = ... = ..., ∠1 = ∠... va ∠3 = ∠... , bu burchaklar ... va ... parallel to'g'ri chiziqlarni ... va ... kesuvchilar kesganda hosil bo'lgan ... bo'lgani uchun), shuning uchun $S_{BPF} = ...$ .*

*2) $S_{ABCD} = S_{ABFD} + ...$, $S_{ADP} = S_{ABFD} + ...$, shuning uchun $S_{ABCD} = ...$ .*




*Nuqtalar o'rniga mos javoblarni yoza olasizmi?*

**1. Yuz haqida tushuncha.** Shakllarning yuzlarini aniqlash masalasi juda qadim zamonlarga borib taqaladi. Bu masalaning vujudga kelishini insonlarning amaliy faoliyati taqozo etgan. Har birimiz kundalik turmushimizda yuz haqida birmuncha tasavvurga egamiz. Masalan, Siz to'g'ri to'rtburchak (aytaylik, o'zingiz yashayotgan xona) va kvadratning yuzini topishni bilasiz. Biz endi shaklning yuzi to'g'risidagi tushunchalarni aniqlash va uni o'lchash usullarini topish bilan shug'ullanamiz.

Agar geometrik shaklni chekli sondagi uchburchaklarga bo'lish mumkin bo'lsa, bu shakl *sodda shakl* deyiladi.

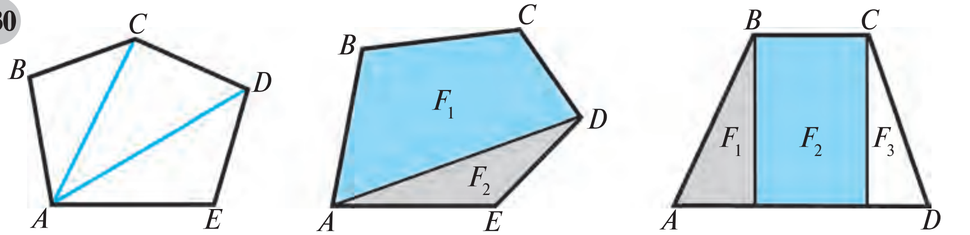
Biz uchburchak deb, tekislikning uchburchak bilan chegaralangan chekli qismini aytamiz. Qavariq ko'pburchak sodda shaklga misol bo'ladi. Bu ko'pburchak o'zining biror uchidan chiqqan diagonallari bilan uchburchaklarga bo'linadi (130-*a* rasm).

***Yuz*** — bu musbat miqdor (kattalik) bo'lib, uning son qiymati quyidagi asosiy xossalarga (aksiomalarga) ega:

**1-xossa.** *Teng shakllar teng yuzlarga ega.*

**2-xossa.** *Agar ko'pburchak bir-birini qoplamaydigan ko'pburchaklardan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning yuzi bu ko'pburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi.*

130



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$ $\qquad$ $S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

*a* $\qquad$ *b* $\qquad$ *d*

*F* ko‘pburchak bir-birini qoplamaydigan ko‘pburchaklardan tashkil topgan degani: 1) *F* bu ko‘pburchaklar yig‘indisidan iborat va 2) bu ko‘pburchaklardan hech qaysi ikkitasi umumiy ichki nuqtalarga ega emas. Masalan, 130-*b*, *d* rasmda bir-birini qoplamaydigan ko‘pburchaklardan tuzilgan ko‘pburchaklar tasvirlangan.

## 2. Tengdosh shakllar.

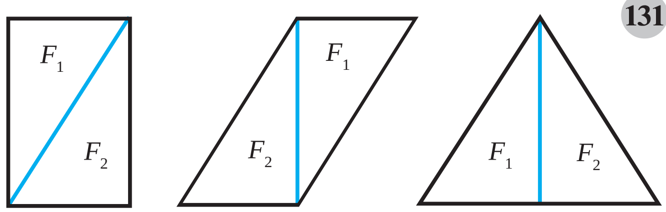
**T a ’ r i f .** *Agar ikki ko‘pburchakdan birini bir necha qismga bo‘lib, bu qismlarni boshqacha joylashtirganda ikkinchi ko‘pburchak hosil bo‘lsa, bu ko‘pburchaklar* ***teng tuzilganlar*** *deyiladi* (131- rasm).

Agar ikkita ko‘pburchakning yuzlari teng bo‘lsa, ular *tengdosh ko‘pburchaklar* deb ataladi. 131- rasmdagi ko‘pburchaklar tengdoshdir.

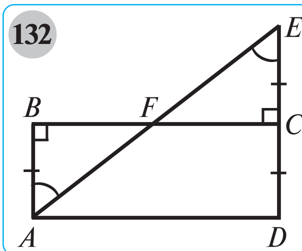
Teng ko‘pburchaklar tengdoshdir (1- xossa), ammo teskari tasdiq, umuman aytganda, to‘g‘ri bo‘lmaydi: agar ikki shakl tengdosh bo‘lsa, bundan ularning tengligi kelib chiqmaydi.

**M a s a l a .** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchak *DC* tomonning davomida *C* uchiga nisbatan *D* nuqtaga simmetrik *E* nuqta belgilangan (132- rasm). *ADE* uchburchak yuzining *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchak yuziga teng ekanini isbotlang.

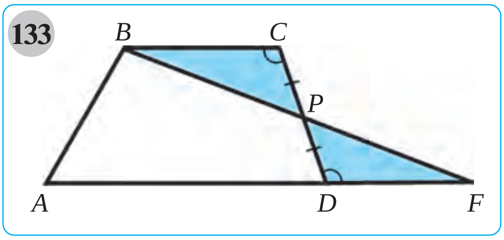
I s b o t . *AE* va *BC* tomonlar *F* nuqtada kesishsin. *ABF* va *ECF* uchburchaklar teng (kateti va o‘tkir burchagiga ko‘ra: $AB = EC$, $\angle BAF = \angle E$). Natijada *ADE* uchburchak *AFCD* trapetsiya bilan *ECF* uchburchakdan, *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchak esa o‘sha *AFCD* trapetsiya bilan *ECF* ga teng bo‘lgan *ABF* uchburchakdan tuzilgan, demak, *ADE* uchburchak bilan *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchak teng tuzilgandir (ya’ni tengdoshdir). Shuni isbotlash talab qilingan edi.

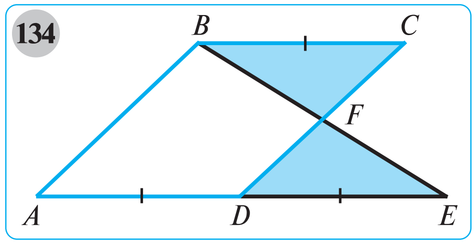


131



132




## Savol, masala va topshiriqlar

**253.** 1) Sodda shakl deb nimaga aytiladi?
2) Shaklning yuzi deganda nimani tushunasiz?
3) Yuzning xossalarini ifodalang.
4) Qanday ikki ko‘pburchak teng tuzilgan deyiladi?
5) Tengdosh shakllar nima?

**254.** Berilgan kvadrat diagonali bo‘yicha ikki uchburchakka bo‘lingan. Bu uchburchaklardan kvadratdan farqli nechta qavariq ko‘pburchak yasash mumkin?

**255.** $AD - ABCD$ trapetsiyaning katta asosi. $CD$ tomonning o‘rtasi $P$ nuqta va $B$ uchi orqali $AD$ nurni $F$ nuqtada kesuvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan (133- rasm). $S_{ABCD} = S_{ABF}$ ekanini isbot qiling.

**256.** $ABCD$ parallelogramm $AD$ tomonining davomida $D$ nuqtaga nisbatan $A$ nuqtaga simmetrik $E$ nuqtani belgilang (134- rasm). $S_{ABCD} = S_{ABE}$ ekanini isbot qiling.

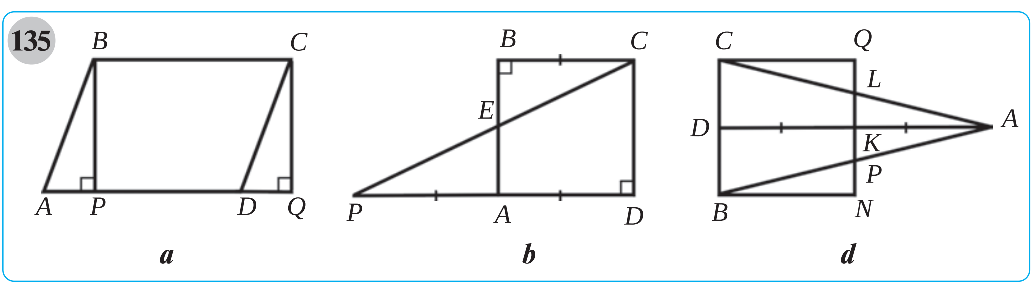
**257.** Teng tuzilgan ikkita to‘g‘ri to‘rtburchakdan: 1) bu to‘g‘ri to‘rtburchaklarning tengligi; 2) ularning tengdoshligi kelib chiqadimi?

**258.** To‘g‘ri to‘rtburchakning diagonalini o‘tkazing. Hosil bo‘lgan uchburchaklardan nechta ko‘pburchak tuzish mumkin?

**259.** $ABCD$ parallelogrammning $BC$ tomonida $P$ nuqta olingan. Parallelogrammning yuzi $APD$ uchburchakning yuzidan ikki marta katta ekanini isbot qiling.

**260.** Teng yonli uchburchakni simmetriya o‘qi bo‘yicha qirqing va hosil bo‘lgan ikki uchburchakdan mumkin bo‘lgan barcha qavariq ko‘pburchaklarni yasang.

**261.** 135- rasmda tasvirlangan ko‘pburchaklar ichidan tengdoshlarini toping.



## 19- mavzu. YUZNI O‘LCHASH

**1. Yuzni o‘lchash.** Yuz – tekis shakllarni tavsiflovchi asosiy matematik miqdorlardan biridir. Sodda hollarda yuz tekis shaklni to‘ldiruvchi birlik kvadratlar – tomoni uzunlik birligiga teng bo‘lgan kvadratlar soni bilan o‘lchanadi.

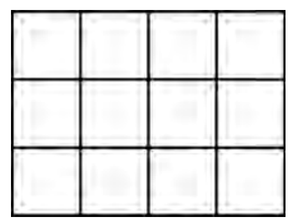
**3-xossa.** *Tomoni bir uzunlik o‘lchov birligiga teng bo‘lgan kvadratning yuzi birga teng.*

Berilgan shaklning yuzini o‘lchash uchun eng avval yuz birligi tanlab olinadi. Bunday birlik uchun tomoni bir uzunlik birligiga, masalan, bir metrga, bir santimetrga va hokazoga teng bo‘lgan kvadrat olinadi. Yuz birligini o‘lchanuvchi yuzga necha marta mumkin bo‘lsa, shuncha marta qo‘yamiz. Buni kichikroq yuzlar uchun qilish mumkin.

Haqiqatda, yuzlarni o‘lchash yuz birligini yoki uning ulushlarini qo‘yish bilan emas, balki vositali yo‘l, ya’ni shakllarning ba’zi chiziqlarini o‘lchash yo‘li bilan bajariladi.

Masalan, tomonlari $a$ va $b$ butun sonlarga teng to‘g‘ri to‘rtburchakni qaraylik. Agar $a = 3$ va $b = 4$ bo‘lsa, to‘g‘ri to‘rtburchakni tomonlari bir uzunlik birligiga teng 12 ta kvadratga ajratish mumkin (136- rasm). To‘g‘ri to‘rtburchak yuzi esa 12 kv. birlikka teng bo‘ladi.

136



Xuddi shunga o‘xshash $a$ butun songa teng uzunlik birligidagi kvadratning yuzi $a^2$ ga teng.

Umumiy holda, bu tasdiqni isbotlash ancha murakkab bo‘lgani uchun biz uni keltirmaymiz. Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi.

**Teorema.**

**Tomonining uzunligi $a$ ga teng bo‘lgan kvadratning yuzi $a^2$ ga teng.**

Odatda, yuzni lotincha bosh harf $S$ bilan belgilanadi. Demak, kvadrat uchun

$$S = a^2$$

formula o‘rinli bo‘lib, uzunlik o‘lchovi birligi kvadrati bilan birga aytiladi.

*Kvadratning yuzi uning tomoni uzunligining kvadratiga teng. Qit’alarning, davlatlarning hududlari kvadrat kilometrlarda, katta ekin maydonlarining yuzi gektarlarda, uncha katta bo‘lmagan yer maydonlari ar (sotix)larda o‘lchanadi.*

**1- m a s a l a .** Kvadratning perimetri 60 sm ga teng. Shu kvadratning yuzini toping.

Y e c h i l i s h i . Kvadratning tomoni $60:4=15$ (sm) ga teng. Shuning uchun uning yuzi $S=15^2=225$ (sm$^2$) ga teng.

J a v o b : $S=225$ sm$^2$.

**2. Kvadrat ildiz.**

**2- m a s a l a .** Tomoni $a$ ga teng bo‘lgan kvadratning yuzi 100 sm$^2$ ga teng. Shu kvadratning tomonini toping.

Y e c h i l i s h i . Shartga ko‘ra, $S=a^2=100$ sm$^2$. Kvadrat tomonining uzunligi – musbat son. Kvadrati 100 ga teng bo‘lgan musbat son esa 10 ga teng.

J a v o b : $a=10$ sm.

Bu masalada musbat sonning kvadrati ma’lum bo‘lganda, shu sonning o‘zini topishimizga to‘g‘ri kelindi, ya’ni $S>0$ sonni bilgan holda, biz shunday $a>0$ sonni topamizki, unda $S=a^2$ bo‘ladi. Topilgan musbat $a$ son quyidagicha belgilanadi: $a=\sqrt{S}$ va «$a$ soni $S$ dan chiqarilgan *arifmetik kvadrat ildizga* teng» deb o‘qiladi. Arifmetik kvadrat ildizni topish amali *kvadrat ildizdan chiqarish* deb ataladi va u kvadratga ko‘tarish amaliga teskari amaldir. $\sqrt{\phantom{x}}$ – *arifmetik kvadrat ildiz* belgisi deyiladi.

Demak, $S=100$ sm$^2$ bo‘lgan kvadratning tomoni $a=\sqrt{S}=\sqrt{100}=10$ (sm).

Musbat kvadrat ildizni topishni kvadratning yuziga ko‘ra tomonini topish, deb geometrik talqin qilish mumkin. Kvadrat ildiz chiqarish to‘g‘risida 8- sinf algebra kursida kengroq to‘xtalib o‘tiladi.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

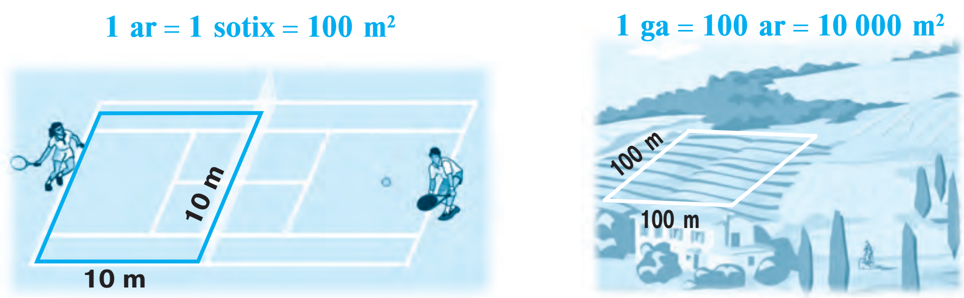
**262.** 1) Yuzni o‘lchash haqida qanday xossani bilasiz?
2) Yuz o‘lchov birliklaridan qaysilarini bilasiz?
3) Bir ar (sotix) necha kvadrat metrga teng?

**263.** Kvadratning tomoni: 1) 1,3 sm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 sm; 4) 18 dm; 5) 2,5 m; 6) 250 mm. Kvadratning yuzini toping.

**264.** Kvadratning yuzi: 1) 0,16 dm$^2$; 2) 1,44 sm$^2$; 3) 64 dm$^2$; 4) 121 sm$^2$; 5) 196 sm$^2$; 6) 49 mm$^2$; 7) 6,25 m$^2$. Kvadratning tomonini toping.

**265.** Tomonlari 54 sm va 42 sm ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetriga teng bo‘lgan kvadratning yuzini toping.

***S*** – lotincha «***superficies***» so‘zidan olingan bo‘lib, «***sirt***» ma’nosini bildiradi.
**Ar** fransuzcha «**are**», lotincha «**arca**» so‘zidan olingan bo‘lib, «**yuz**» deganidir. **Gektar** so‘zi ikkita – «**gekto**» (yunoncha «**hexaton**» – «**yuz**» («**100**»)) va «**ar**» so‘zlaridan tashkil topgan bo‘lib, **100 ta yuz** ma’nosini beradi.




**266.** Kvadratning yuzi 36 $sm^2$. Agar uning hamma tomonini: 1) ikki marta uzaytirilsa; 2) uch marta kamaytirilsa; 3) 2 sm ga uzaytirilsa; 4) 1 sm ga qisqartirilsa, uning yuzi qanday o‘zgaradi?

**267.** Agar kvadratning hamma tomonini: 1) $n$ marta uzaytirilsa; 2) $k$ marta kamaytirilsa, uning yuzi qanday o‘zgaradi?

**268.** $ABCD$ kvadrat $AD$ tomonining davomida $D$ uchidan tashqarida $P$ nuqta shunday olinganki, unda $PC = 20$ sm va $\angle CPD = 30°$. Kvadratning yuzini toping.

**269.** Kvadratning yuzi 64 $dm^2$ ga teng. Shu kvadratning yuzi necha kvadrat millimetr, necha kvadrat santimetr, necha kvadrat metr?

**270.** $(2a)^2 = 4a^2$ ekanini ko‘rsatadigan shaklni chizing.

**271.** Yuzi: 1) 2,25 $sm^2$; 2) 0,81 $dm^2$; 3) 289 $mm^2$; 4) 5,76 $m^2$; 5) 144 $sm^2$; 6) 400 $dm^2$ ga teng bo‘lgan kvadratning perimetrini toping.

## 20- mavzu. TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKNING YUZI

Siz to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi uning tomonlari uzunliklari ko‘paytmasiga teng ekaniga doir masalalar yechgansiz.

Hozir bu bajarilgan amalning nazariy jihatdan to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatamiz.

**Teorema.**

**Tomonlari *a* va *b* bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi**

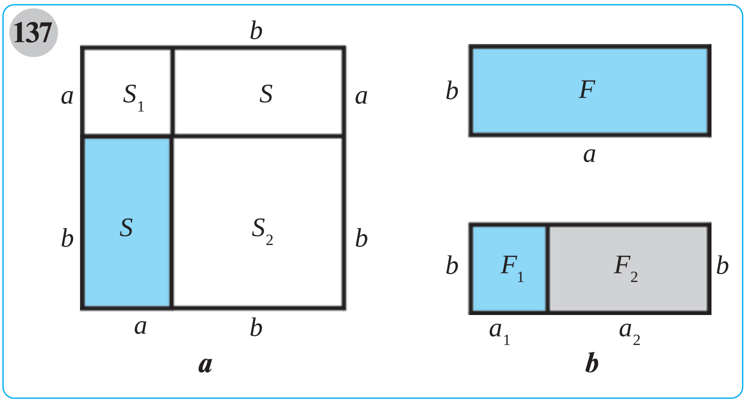
$$S = a \cdot b$$

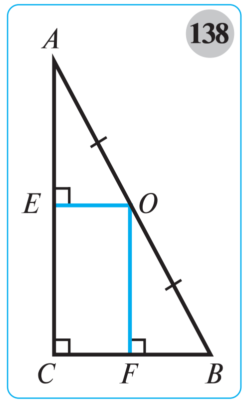
**formula bo‘yicha hisoblanadi.**

Isbot. Tomonlari $a$ va $b$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni olaylik, bunda $a$ va $b$ — ixtiyoriy musbat sonlar. $S = a \cdot b$ ekanini isbotlaymiz.

Teoremani isbot qilish uchun tomoni $(a + b)$ bo‘lgan kvadrat yasaymiz. Bu kvadratni 137-*a* rasmda ko‘rsatilgan shakldagidek bo‘laklarga ajratamiz. Bunda kvadratning yuzi tomoni $a$ va $b$ ga teng ikki kvadrat hamda tomonlari $a$ va $b$ bo‘lgan ikki to‘g‘ri to‘rtburchakdan tashkil topganini ko‘rish mumkin.

*To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi uning qo‘shni tomonlarining ko‘paytmasiga teng.*




Demak, tomoni $(a + b)$ bo‘lgan kvadrat yuzi $S_1 + 2S + S_2$ ga teng. Ikkinchi tomondan yuza haqidagi xossaga ko‘ra, bu yuza $(a + b)^2$ ga teng, ya’ni

$$S_1 + 2S + S_2 = (a + b)^2 \text{ yoki } S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Bu tenglikda $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$ ekanini hisobga olsak,

$$S = a \cdot b$$

ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

**$S_F = a \cdot b$ tenglikning isboti haqida.**

*ab* son haqiqatan ham, yuza haqidagi xossalarni (aksiomalarni) qanoatlantiradi. Buni isbotlaymiz. 1- va 3- xossalarning bajarilishi ravshan, ya’ni teng to‘g‘ri to‘rtburchaklar teng yuzga ega. Endi 2- xossa bajarilishini ko‘rsatamiz.

Tomonlari $a$ va $b$ bo‘lgan $F$ to‘g‘ri to‘rtburchakni tomonlari $a_1$ va $b$ hamda $a_2$ va $b$ bo‘lgan $F_1$ va $F_2$ to‘g‘ri to‘rtburchaklarga ajratamiz (137-*b* rasm). U holda $S_{F_1} = a_1 b$, $S_{F_2} = a_2 b$ va $S_F = ab$ bo‘ladi. Bundan tashqari, $a_1 + a_2 = a$. Shuning uchun $S_{F_1} + S_{F_2} = a_1 b + a_2 b = (a_1 + a_2)b = ab = S_F$.

Shunday qilib, to‘g‘ri to‘rtburchak uchun *ab* miqdor yuzning hamma xossalariga ega, ya’ni to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi bo‘ladi.

**1- masala.** To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 150 sm² ga teng, tomonlarining nisbati esa 3 : 2 kabi. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetrini toping.

Yechilishi. To‘g‘ri to‘rtburchakning kichik tomoni $b = 2x$ sm bo‘lsin. U holda katta tomonning uzunligi $a = 3x$ sm ga teng bo‘ladi. To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini hisoblash formulasidan foydalanib tenglama tuzamiz va uni yechamiz:

$S = 3x \cdot 2x$, ya’ni $S = 6x^2$. Bundan $x^2 = S : 6$, $x^2 = 150 : 6$, $x^2 = 25$, $x = 5$ (sm).

Va demak, to‘g‘ri to‘rtburchakning kichik tomoni: $b = 2 \cdot 5 = 10$ (sm) ga, katta tomoni esa $a = 3 \cdot 5 = 15$ (sm) ga teng. Endi uning perimetrini hisoblaymiz:

$$P = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (15 + 10) = 2 \cdot 25 = 50 \text{ (sm)}.$$

Javob: $P = 50$ sm.

*To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini hisoblashda tomonlar bir xil uzunlik birligida ifodalangan bo‘lishi shart!*

**2-masala.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari 12 sm va 24 sm ga teng. Gipotenuzaning o‘rtasidan uchburchakning katetlariga perpendikularlar o‘tkazilgan. Hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini toping.

Berilgan: to‘g‘ri burchakli $\triangle ABC$ da: $AO = OB$, $OE \perp AC$, $OF \perp CB$, $AC = 24$ sm, $BC = 12$ sm (138- rasm).

Topish kerak: $S_{CEOF}$.

Yechilishi. Bizga ma’lumki, bir to‘g‘ri chiziqqa o‘tkazilgan ikki perpendikular o‘zaro parallel bo‘ladi. Fales teoremasiga ko‘ra:

$$AE = EC = 0{,}5AC = 0{,}5 \cdot 24 = 12 \text{ (sm)} \quad \text{va} \quad CF = FB = 0{,}5BC = 0{,}5 \cdot 12 = 6 \text{ (sm)}.$$

Demak, $S_{CEOF} = CE \cdot CF = 12 \cdot 6 = 72$ (sm$^2$).

Javob: hosil bo‘lgan $CEOF$ to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 72 sm$^2$ ga teng.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**272.** 1) To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi nimaga teng?
2) To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi haqidagi teoremani isbotlashda qanday xossalardan foydalanildi?

**273.** To‘g‘ri to‘rtburchakning ikki tomoni: 1) 60 sm va 5,8 sm; 2) 3,4 dm va 6 sm; 3) 4 m va 1,4 m; 4) 2,5 dm va 1,2 dm. Uning yuzini toping.

**274.** Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi va tomonlaridan biri mos ravishda: 1) 270 sm$^2$ va 15 sm; 2) 142 dm$^2$ va 35,5 dm; 3) 16 m$^2$ va 400 sm; 4) 0,0096 km$^2$ va 300 m. Uning ikkinchi tomonini toping.

**275.** To‘g‘ri to‘rtburchakning perimetri 26 sm ga teng, tomonlaridan biri esa 9 sm. Shu to‘rtburchakning yuziga teng yuzli kvadratning tomonini toping.

**276.** To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 40 sm$^2$, tomonlarining nisbati 2 : 5 ga teng. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetrini toping.

**277.** To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yini $n$ marta va enini $k$ marta uzaytirilsa, uning yuzi qanday o‘zgaradi?

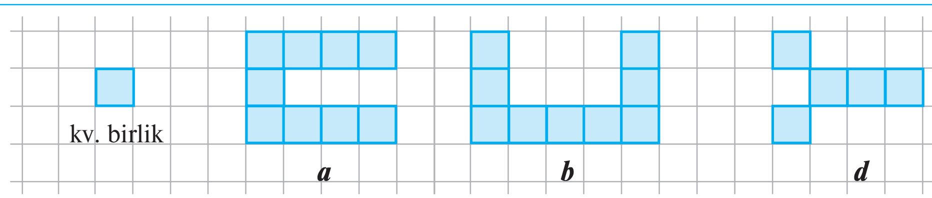
**278.** $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak $B$ burchagining bissektrisasi $AD$ tomonni $K$ nuqtada kesadi, $AK = 5$ sm va $KD = 7$ sm. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini toping.

**279.** To‘g‘ri to‘rtburchakning ikki tomoni: 1) 24 sm va 20 sm; 2) 3,5 dm va 8 sm; 3) 8 m va 4,5 m; 4) 3,2 dm va 1,5 dm. Uning yuzini toping.

**280.** To‘g‘ri to‘rtburchakning bir tomoni 36 dm, ikkinchisi esa 16 dm. Unga tengdosh kvadratning tomonini toping.

**281.** 139- rasmda tasvirlangan shakllarning perimetri va yuzini toping. Kvadratchaning o‘lchamini 1 kv. sm deb oling.

139



## 21- mavzu. PARALLELOGRAMMNING YUZI

Parallelogrammning istalgan tomonini uning *asosi* deb olish mumkin, u holda shu tomonning ixtiyoriy nuqtasidan qarama-qarshi tomongacha bo‘lgan masofa uning *balandligi* bo‘ladi. Balandlik tomonga yoki tomonning davomiga tushishi mumkin. 140- rasmda $BP$ va $CF$ — $ABCD$ parallelogrammning balandliklaridir.

**Teorema.**

**Parallelogrammning yuzi asosi bilan balandligining ko‘paytmasiga teng:**

$$\boldsymbol{S = a \cdot h.}$$

Isbot. $ABCD$ parallelogrammni ko‘rib chiqamiz (140-*a* rasm). Bu parallelogrammning asosi qilib $AD = a$ tomonini olamiz, balandligi esa $h$ ga teng bo‘lsin.

$S = a \cdot h$ ekanini isbot qilish talab etiladi.

Asosi parallelogrammning $BC$ tomoniga teng, balandligi esa $h$ dan iborat bo‘lgan $PBCF$ to‘g‘ri to‘rtburchak yasaymiz. $ABP$ va $DCF$ uchburchaklar teng (gipotenuzasi va o‘tkir burchagiga ko‘ra: $AB = DC$ — gipotenuzalar, $\angle 1 = \angle 2$ — mos burchaklar). $ABCD$ parallelogramm $PBCD$ trapetsiya bilan $ABP$ uchburchakdan, $PBCF$ to‘g‘ri to‘rtburchak esa o‘sha $PBCD$ trapetsiya bilan $ABP$ ga teng bo‘lgan $DCF$ uchburchakdan tuzilgan. Demak, $ABCD$ parallelogramm bilan yasalgan $PBCF$ to‘g‘ri to‘rtburchak teng tuzilgandir (ya’ni, tengdoshdir). Bundan, $ABCD$ parallelogrammning yuzi $PBCF$ to‘g‘ri to‘rtburchakning yuziga, ya’ni $ah$ teng, degan natija chiqadi.

Shunday qilib, asosi $a$ va unga tushirilgan balandligi $h$ bo‘lgan parallelogrammning $S$ yuzi quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$S = a \cdot h.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

**Natija.** Agar ikki parallelogramm bitta asosga ega va balandliklari teng bo‘lsa, ular teng tuzilgandir.

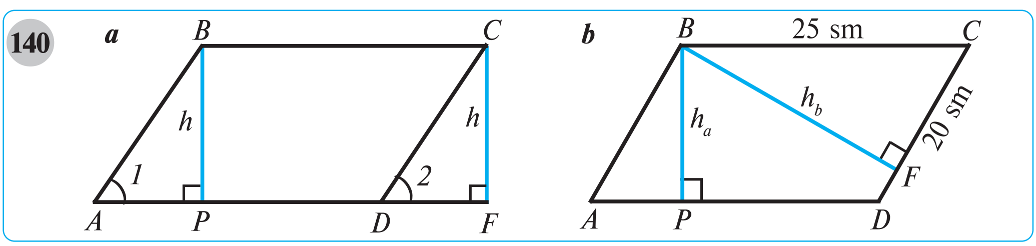
**1-masala.** Parallelogrammning tomonlari 25 sm va 20 sm, birinchi tomoniga tushirilgan balandlik esa 8 sm. Shu parallelogrammning ikkinchi tomoniga tushirilgan balandligini toping.

Yechilishi. $ABCD$ parallelogrammda: $AD = a = 25$ sm, $DC = b = 20$ sm, $h_a = 8$ sm (140-*b* rasm). $h_b = ?$

Birinchidan, $S = ah_a = 25 \cdot 8 = 200$ (sm$^2$).

Ikkinchidan, $S = bh_b$, ya’ni $200 = 20 \cdot h_b$. Bundan $h_b = 200 : 20 = 10$ (sm).

Javob: 10 sm.



**2-masala.** Berilgan: $ABCD$ – parallelogramm, $AD = 20$ sm, $BD = 16$ sm, $\angle BDA = 30°$.

Topish kerak: $S_{ABCD}$.

Yechilishi. 1) Berilgan parallelogrammning $BP$ balandligini o‘tkazamiz va $BDP$ uchburchakni ko‘rib chiqamiz (141- rasm). U to‘g‘ri burchakli, chunki $BP \perp AD$. $BP$ balandlikni topamiz. 30° li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng, shuning uchun $BP = 0{,}5BD = 0{,}5 \cdot 16 = 8$ (sm).

2) Shunday qilib, $ABCD$ parallelogrammning yuzi

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \text{ (sm}^2\text{)}$$

ga teng bo‘ladi.

Javob: $S = 160$ sm$^2$.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**282.** 1) Parallelogrammning asosi va balandligi deganda nimani tushunasiz?
2) Parallelogrammning yuzi haqidagi teoremani ifodalang.

**283.** $a$ – parallelogrammning asosi, $h$ – balandligi, $S$ – yuzi.
1) Agar $a = 60$ sm, $h = 0{,}5$ m bo‘lsa, $S$ ni; 2) agar $a = 250$ m, $S = 200$ m$^2$ bo‘lsa, $h$ ni; 3) agar $a = 0{,}25$ m, $h = 100$ sm bo‘lsa, $S$ ni; 4) agar $h = 2$ m, $S = 2\,000$ sm$^2$ bo‘lsa, $a$ ni toping.

**284.** Perimetri 80 sm ga teng bo‘lgan parallelogrammning tomonlari nisbati 2 : 3 ga, o‘tkir burchagi esa 30° ga teng. Parallelogrammning yuzini toping.

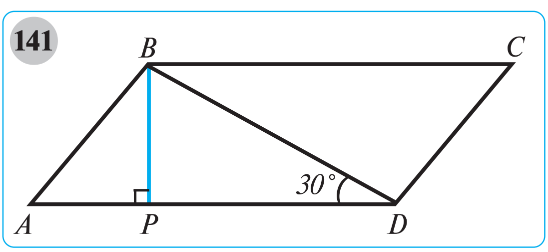
**285.** 1) Parallelogrammning yuzi 72 sm$^2$, balandliklari 4 sm va 6 sm. Parallelogrammning perimetrini toping.
2) Parallelogrammning tomonlari 12 sm va 16 sm, balandliklaridan biri esa 15 sm. Parallelogrammning ikkinchi balandligini toping. Masalaning nechta yechimi bor?

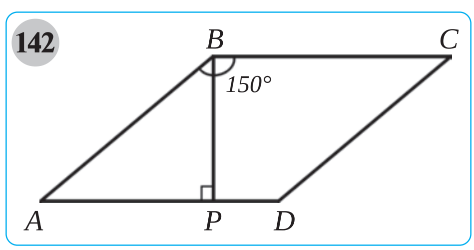
**286.** $BP$ – $ABCD$ parallelogrammning balandligi (142-rasm). Agar $AB = 13$ sm, $AD = 16$ sm va $\angle B = 150°$ bo‘lsa, $S_{ABCD}$ ni toping.

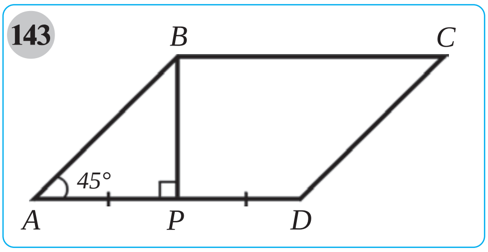
**287.** $BP$ – $ABCD$ parallelogrammning balandligi (143- rasm). Agar $AP = PD$, $BP = 6{,}4$ sm va $\angle A = 45°$ bo‘lsa, $S_{ABCD}$ ni toping.

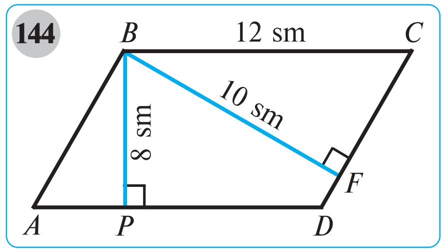
**288.** Yuzi 41 sm$^2$ bo‘lgan parallelogrammning tomonlari 5 sm va 10 sm. Uning ikkala balandligini toping.

**289.** 1) Parallelogrammning $a$ va $b$ tomonlari orasidagi burchak 30°. Shu parallelogrammning yuzini toping.
2) Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasidan o‘tgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq uni ikkita tengdosh qismga ajratadi. Shuni isbotlang.





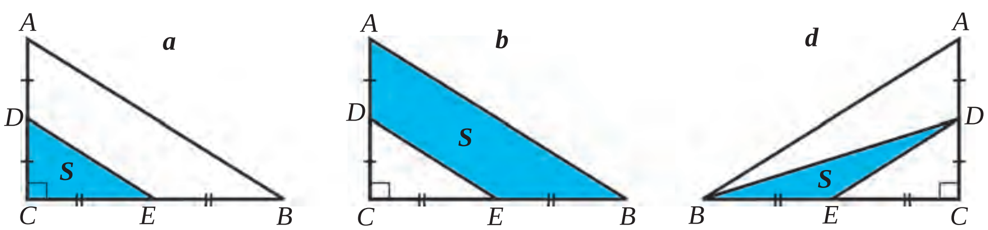

**290.** Parallelogrammning tomonlaridan biriga o'tkazilgan balandlik shu tomondan 3 marta kichik. Parallelogrammning yuzi 96 $sm^2$. Shu tomonni va balandlikni toping.

**291.** Parallelogrammning tomonlari 20 sm va 28 sm, ular orasidagi burchagi 30°. Uning yuzini toping.

**292.** 144- rasmda berilgan parallelogrammning perimetrini toping.

## 22- mavzu. UCHBURCHAKNING YUZI

*S shaklning yuzi ABC uchburchak yuzining qanday qismini tashkil qiladi? D, E — uchburchak tomonlarining o'rtalari.*




*S shaklning yuzini topishga harakat qiling!*

Uchburchak yuzini hisoblash formulasini topish uchun parallelogramm shakliga keltirish usulidan foydalanamiz.

**Teorema.**

**Uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng:**

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h.$$

I s b o t. $ABC$ — berilgan uchburchak bo'lsin (145- rasm). Bu uchburchakni rasmda ko'rsatilgandek $ABDC$ parallelogrammga to'ldiramiz. $ABC$ va $DCB$ uchburchaklar teng, chunki parallelogrammning diagonali uni teng ikki uchburchakka ajratadi. Va, demak, bu uchburchaklarning yuzlari teng. Shuning uchun $ABDC$ parallelogrammning yuzi $ABC$ uchburchak yuzining ikkilanganiga teng, ya'ni

$$2S = a \cdot h.$$

Bundan, $S = \frac{ah}{2}$. Teorema isbotlandi.

Uchburchakning yuzini hisoblash formulasini boshqacha ham o'qish mumkin:

***uchburchakning yuzi uning o'rta chizig'i bilan balandligining ko'paytmasiga teng:***

$$S = \frac{a}{2} \cdot h .$$

**1-natija.** *To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi katetlari ko'paytmasining yarmiga teng,* chunki bir katetni asos va ikkinchisini balandlik qilib olish mumkin.

**2-natija.** *Ikkita uchburchak yuzlarining nisbati asoslari bilan balandliklari ko'paytmasining nisbati kabidir.*

**3-natija.** *Asoslari teng bo'lgan ikki uchburchak yuzlarining nisbati balandliklarining nisbati kabidir.*

**4-natija.** *Balandliklari teng bo'lgan ikki uchburchak yuzlarining nisbati asoslarining nisbati kabidir.*

**5-natija.** *Asoslari va balandliklari teng bo'lgan uchburchaklar tengdoshdir.*

Yuqoridagi natijalarni mustaqil isbotlab, ishonch hosil qiling.

**1-masala.** Uchburchakning medianasi uni ikkita tengdosh uchburchakka bo'lishini isbot qiling.

Isbot. $BD$ — $ABC$ uchburchakning medianasi bo'lsin (146- rasm). $ABD$ va $CBD$ uchburchaklar teng $AD$ va $DC$ tomonlarga hamda umumiy $BP$ balandlikka ega, ya'ni uchburchaklar 5- natijaga ko'ra tengdoshdir:

$$S_{ABD} = S_{CBD}.$$

**2-masala.** Berilgan: $ABCD$ — to'g'ri to'rtburchak, $AC = 20$ sm, $BP = 12$ sm, $BP \perp AC$ (147- rasm).

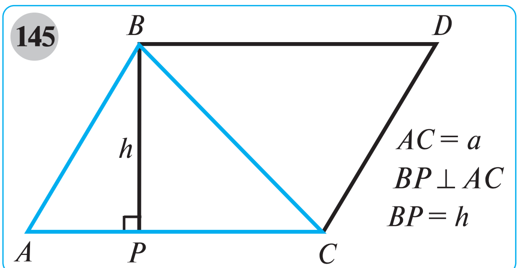
Topish kerak: $S_{ABCD}$.

Yechilishi. 1) $S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot BP = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$ (sm²).

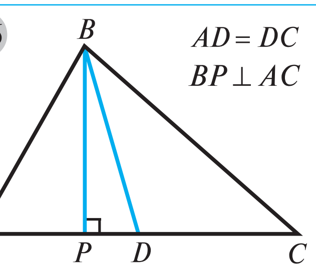
2) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$ (sm²).

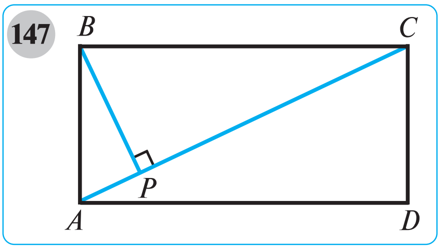
Javob: $S_{ABCD} = 240$ sm².

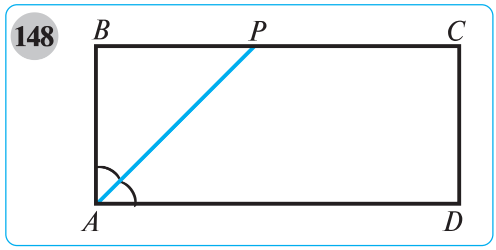
145




146






## *Savol, masala va topshiriqlar*

**293.** 1) Uchburchakning yuzi nimaga teng?
2) To‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzi qanday hisoblanadi?

**294.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 5 sm va 6 sm; 2) 2,4 dm va 45 sm. To‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzini toping.

**295.** Bir uchburchakning asosi 20 sm, balandligi 8 sm. Ikkinchi uchburchakning asosi 40 sm. Uchburchaklar tengdosh bo‘lishi uchun ikkinchi uchburchakning balandligi qanday bo‘lishi kerak?

**296.** $a$ – uchburchakning asosi, $h$ – asosiga o‘tkazilgan balandlik, $S$ – uchburchakning yuzi. Noma’lum miqdorlarni toping.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 8 sm | 0,6 dm | ? | 2,4 m | ? | 1,8 m |
| $h$ | 6 sm | ? | 28 sm | 4 dm | 3,6 sm | ? |
| $S$ | ? | 3 sm$^2$ | 75,6 sm$^2$ | ? | 10,8 mm$^2$ | 72 dm$^2$ |

**297.** $ABC$ uchburchakda $AB = 4AC$. Uchburchakning $B$ va $C$ uchlaridan o‘tkazilgan balandliklarining nisbati nimaga teng?

**298.** Berilgan uchburchakning yuzi $S$ bilan bu uchburchakdan uning istalgan o‘rta chizig‘i ajratgan uchburchak yuzi $S_1$ orasidagi munosabatni toping.

**299.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzi 96 sm$^2$ ga teng. Agar katetlaridan biri ikkinchisining $\frac{3}{4}$ qismiga teng bo‘lsa, shu uchburchakning katetlarini toping.

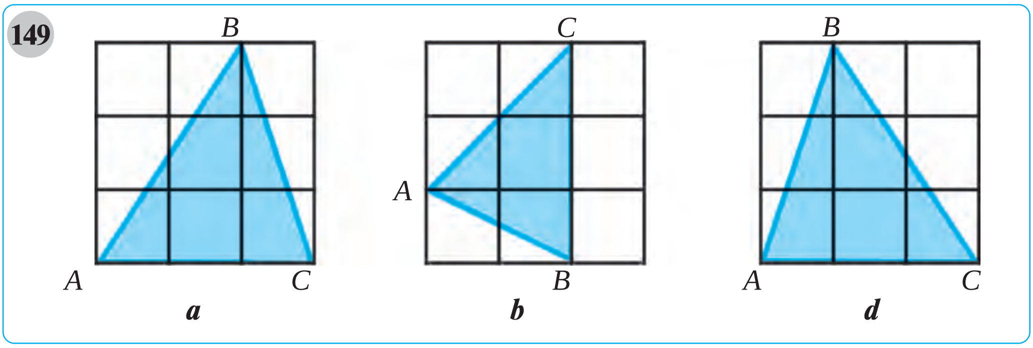
**300.** 1) $ABCD$ parallelogrammning diagonallari $O$ nuqtada kesishadi. Hosil bo‘lgan uchburchaklardan qaysilari tengdosh?

2) Berilgan: $ABCD$ – to‘g‘ri to‘rtburchak, $AP$ – $BAD$ burchakning bissektrisasi, $BP = 10$ sm, $PC = 15$ sm (148- rasm).

Topish kerak: $S_{APB}$, $S_{PCDA}$.

**301.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 12 sm va 18 sm; 2) 4,5 dm va 14 sm. Shu uchburchakning yuzini toping.

**302.** Uchburchakning ikki tomoni 6 sm va 5 sm ga teng. Uning yuzi 15 sm$^2$ ga teng bo‘lishi mumkinmi? Javobingizni izohlang.




**303.** Agar uchburchakning asosi va balandligi mos ravishda quyidagilarga teng bo‘lsa, uchburchakning yuzini toping: 1) 32 sm va 23 sm; 2) 5 dm va 4 m; 3) 3,3 dm va 13 sm; 4) 2,5 sm va 2,8 sm.

**304.** Tomoni 3 ga teng bo‘lgan kvadrat 9 ta teng kvadratchalarga bo‘lindi (149- rasm). *ABC* uchburchakning yuzi nimaga teng?

## 23- mavzu. ROMBNING YUZI

Romb – parallelogramm bo‘lgani uchun, tomoni $a$ va balandligi $h$ bo‘lgan rombning yuzi

$$S = ah$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Bizga ma‘lumki, rombning hamma balandliklari o‘zaro teng (69- masalaga q.).

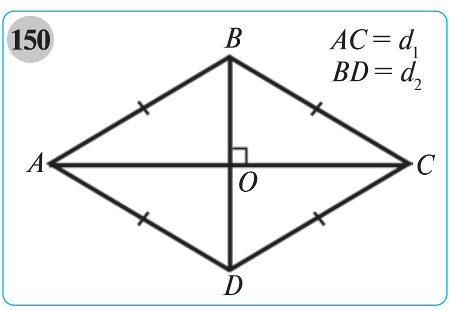
Bundan tashqari, rombning yuzini diagonallari orqali ham hisoblash mumkin.

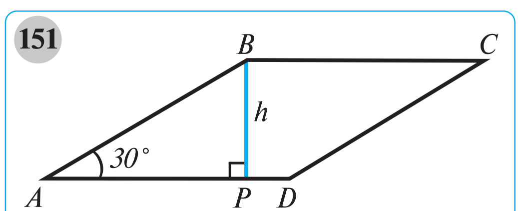
**Teorema.**

**Rombning yuzi uning diagonallari ko‘paytmasining yarmiga teng:**

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 .$$

Isbot. Ma’lumki, rombning $AC$ diagonali uni ikkita o‘zaro teng bo‘lgan teng yonli uchburchakka ajratadi (150- rasm). Ikkinchi diagonal esa birinchisiga perpendikular bo‘lib, hosil bo‘lgan uchburchaklar balandliklari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Shuning uchun rombning yuzi:




$a = AB = BC = CD = AD = 20$ sm,
$BP \perp AD$, $\angle A = 30°$.

$$S = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 + \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{4}(d_1 \cdot d_2 + d_1 \cdot d_2) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 .$$

Demak, $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$. Teorema isbotlandi.

**1-masala.** *ABCD* rombning tomoni 20 sm ga, o‘tkir burchagi esa 30° ga teng. Shu rombning yuzini toping (151- rasm).

Yechilishi. 1) $\triangle ABP$ – to‘g‘ri burchakli. $h = BP = 0{,}5a = 0{,}5 \cdot 20 = 10$ (sm) (30° li burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning yarmiga teng).

2) $S = ah = 20 \cdot 10 = 200$ (sm²).

Javob: $S = 200$ sm².

**2- masala.** Rombning diagonallaridan biri ikkinchisidan 1,5 marta katta, rombning yuzi esa 27 sm² ga teng. Shu rombning diagonallarini toping.

Berilgan: *ABCD* – romb; $S_{ABCD} = 27$ sm²; $AC = 1{,}5BD$ (150- rasmga q.)

Topish kerak: *AC*, *BD*.

Yechilishi. $BD = x$ sm bo‘lsin, u holda $AC = 1{,}5x$ sm bo‘ladi.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$, bunga belgilashlarni qo‘yamiz: $27 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5x \cdot x$. U holda $x^2 = 36$ bo‘ladi, bundan $x = 6$ (sm). Shunday qilib, $BD = 6$ sm va $AC = 1{,}5 \cdot 6 = 9$ (sm) ga teng.

Javob: 9 sm, 6 sm.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**305.** 1) Rombning yuzi tomoni va balandligi bo‘yicha qanday topiladi?
2) Rombning yuzi diagonallari orqali qanday topiladi? Uni ifodalang.

**306.** Rombning yuzi 40 sm², balandligi esa 5 sm ga teng. Shu rombning perimetrini toping.

**307.** Rombning balandligi 16 sm, o‘tkir burchagi esa 30° ga teng. Shu rombning yuzini toping.

**308.** Rombning tomoni 1,8 dm, o‘tkir burchagi esa 30° ga teng. Shu rombning yuzini toping.

**309.** Diagonallari: 1) 1,5 dm va 1,8 dm; 2) 24 sm va 15 sm; 3) 2,5 dm va 4 sm; 4) 3,2 sm va 0,5 dm bo‘lgan rombning yuzini toping.

**310.** Rombning tomoni 6 sm ga, yuzi esa 18 sm² ga teng. Shu rombning katta burchagini toping.

**311.** Romb burchaklarining nisbati 1 : 5 ga, tomoni esa *a* ga teng. Shu rombning yuzini toping.

**312.** Rombning tomoni 8 sm ga, o‘tkir burchagi 30° ga teng. Shu rombning diagonallari ko‘paytmasini toping.

**313.** Rombning yuzi 60 sm², diagonallaridan biri 10 sm ga teng. Shu rombning ikkinchi diagonalini toping.

**314.** Romb diagonallarining nisbati 1 : 2 ga, uning yuzi esa 32 sm² ga teng. Shu rombning tomonini toping.

**315.** Rombning yuzi 30 sm², perimetri 24 sm ga teng. Shu rombning balandligini toping.

## 24- mavzu. TRAPETSIYANING YUZI

Ma’lumki, har qanday ko‘pburchakni diagonallar o‘tkazish yo‘li bilan uchburchaklarga ajratish mumkin. Ixtiyoriy ko‘pburchakning yuzini hisoblash uchun uni avval uchburchaklarga ajratib olamiz. So‘ngra uchburchaklar yuzi hisoblanadi. Ko‘pburchak yuzi esa uni tashkil qilgan bir-birini qoplamaydigan uchburchaklar yuzlari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Trapetsiya yuzlarini hisoblashda shu usuldan foydalanamiz.

**Teorema.**

**Trapetsiyaning yuzi uning asoslari yig‘indisining yarmi bilan balandligi ko‘paytmasiga teng:**

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

I s b o t. Asoslari $AD=a$, $BC=b$ va balandligi $CE=h$ ($CE\perp AD$) bo‘lgan $ABCD$ trapetsiyani qaraylik (152- rasm).

Trapetsiyada $AC$ diagonalni o‘tkazamiz. Bunda $ABCD$ trapetsiya $ABC$ va $ACD$ uchburchaklarga ajraladi. Trapetsiya yuzi esa bu uchburchaklar yuzlari yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa o‘zgarmas bo‘lgani uchun $ABC$ va $ACD$ uchburchaklarning balandliklari o‘zaro teng.

Bundan, $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{1}{2}b\cdot h$ va $S_{ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CE=\frac{1}{2}a\cdot h$.

Trapetsiyaning yuzi $S=S_{ABC}+S_{ACD}$, ya’ni:

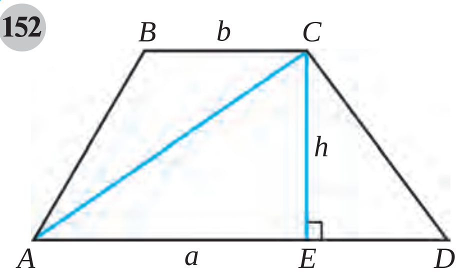
$$S=\frac{1}{2}a\cdot h+\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{a+b}{2}\cdot h.$$

Teorema isbot bo‘ldi.

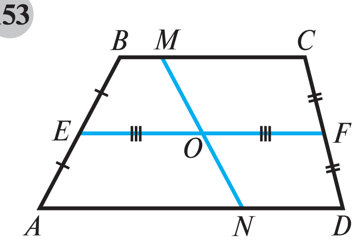
**Natija.** *Trapetsiyaning yuzi o‘rta chizig‘i bilan balandligining ko‘paytmasiga teng.*

Ushbu natija trapetsiyaning o‘rta chizig‘i asoslari yig‘indisining yarmiga tengligidan kelib chiqadi.

152




153



**1- masala.** Trapetsiyaning asoslari 15 sm va 30 sm ga, yuzi esa 225 sm² ga teng. Shu trapetsiyaning balandligini toping.

Yechilishi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i $\frac{a+b}{2} = \frac{15+30}{2} = 22,5$ (sm) ga teng. Demak, trapetsiyaning balandligi quyidagiga teng:

$$h = S_{\text{tr.}} : \frac{a+b}{2} = 225 : 22,5 = 2250 : 225 = 10 \text{ (sm)}.$$

Javob: $h = 10$ sm.

**2- masala.** Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i o‘rtasidan o‘tib, asoslarini kesuvchi to‘g‘ri chiziq bu trapetsiyani ikkita tengdosh bo‘lakka bo‘lishini isbot qiling.

Isbot. $ABCD$ – berilgan trapetsiya ($AD \parallel BC$), $EF$ – o‘rta chizig‘i, $MN$ esa o‘rta chiziqning $O$ o‘rtasi orqali o‘tuvchi hamda asoslarini $M$ va $N$ nuqtalarda kesuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lsin (153- rasm). $ABMN$ va $MNDC$ trapetsiyalar, mos ravishda, o‘zaro teng $EO$ va $OF$ o‘rta chiziqlarga hamda berilgan trapetsiyaning balandligiga teng balandlikka egalar. Demak, bu trapetsiyalarning yuzlari teng, ya’ni ular tengdoshdir:

$$S_{ABMN} = S_{MNDC}.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

**3- masala.** Teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘zaro perpendikular bo‘lsa, u holda trapetsiyaning balandligi uning o‘rta chizig‘iga, yuzi esa balandligining kvadratiga teng bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

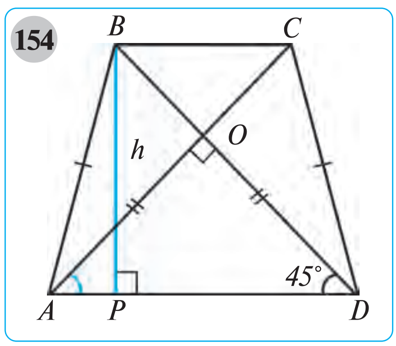
Berilgan: $ABCD$ – teng yonli trapetsiya ($AB = DC$), $AC \perp BD$, $AD = a$, $BC = b$, $BP \perp AD$, $BP = h$ bo‘lsin (154- rasm).

Isbot qilish kerak: 1) $h = \frac{a+b}{2}$; 2) $S_{\text{tr.}} = h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Isbot. 1) $\triangle AOD$ – teng yonli, to‘g‘ri burchakli; shuning uchun $\angle ADO = 45°$.

2) $BP \perp AD$ bo‘lgani uchun, $BPD$ uchburchak teng yonli va to‘g‘ri burchakli, chunki $\angle ADO = 45°$, va demak, $\angle PBD = 45°$. Bundan: $DP = BP$. Bizga ma’lumki, teng yonli trapetsiyaning kichik asosi uchidan o‘tkazilgan balandlikning xossasiga ko‘ra:

$$h = BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$




3) $S_{\text{tr.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ yoki $S_{\text{tr.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

## Savol, masala va topshiriqlar

**316.** 1) Trapetsiyaning yuzi nimaga teng?
2) O‘rta chizig‘i va balandligiga ko‘ra trapetsiyaning yuzi qanday topiladi?

**317.** Trapetsiyaning asoslari 14 sm va 21 sm ga, balandligi esa 8 sm ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

**318.** $ABCD$ trapetsiyaning $AD$ va $BC$ asoslari, mos ravishda, 10 sm va 8 sm ga teng. $ACD$ uchburchakning yuzi 30 sm$^2$ ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

**319.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning yuzi 30 sm$^2$, perimetri 28 sm, kichik yon tomoni esa 3 sm ga teng. Katta yon tomonini toping.

**320.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyada kichik asos 4 sm ga teng va kichik diagonali bilan 45° li burchak tashkil qiladi. Agar trapetsiyaning o‘tmas burchagi 135° ga teng bo‘lsa, uning yuzini toping.

**321.** Teng yonli trapetsiyaning o‘tmas burchagi 135° ga teng, o‘tmas burchagi uchidan asosiga tushirilgan balandlik esa asosini 2,8 sm va 6,8 sm li kesmalarga bo‘ladi. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

**322.** Trapetsiyaning asoslari 36 sm va 12 sm, 7 sm li yon tomoni asoslaridan biri bilan 150° burchak hosil qiladi. Uning yuzini toping.

**323.** $ABCD$ trapetsiyaning yuzi 120 sm$^2$ ga teng. $AC$ diagonali 20 sm ga teng. $D$ uchidan bu diagonaligacha bo‘lgan masofa $B$ uchidan ungacha bo‘lgan masofadan 2 marta katta. $ABC$ va $ACD$ uchburchaklarning yuzini toping (155- rasm).

**324.** $AD$ – $ABCD$ trapetsiyaning katta asosi. $ACD$ va $DCB$ uchburchaklarning yuzlari, mos ravishda, $S_1$ va $S_2$ ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

**325.** $ABCD$ to‘g‘ri burchakli trapetsiyada $AB = BC = 18$ sm, $\angle D = 45°$ (156- rasm). Trapetsiyaning yuzini toping. Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

*Yechilishi.* $CF \perp AD$ ni o‘tkazamiz. 1) $ABCF$ – kvadrat, chunki $ABCF$ to‘rtburchakning qo‘shni tomonlari $AB$ va ..., shuning uchun $AF = CF = ...$ (sm).

2) $\triangle CFD$ – to‘g‘ri burchakli, yasashga ko‘ra $\angle F = 90°$ va shartga ko‘ra $\angle D = 45°$, shuning uchun $\angle DCF = ...°$ va demak, $\triangle CFD$ – ... va $DF = ... = ...$ sm.

3) $AD = AF + ... = ... + ... = ...$ (sm) va $S_{ABCD} = ... \cdot ... = ... \cdot ... = ...$ (sm$^2$).

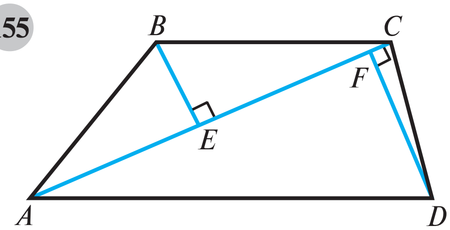
*Javob:* ... sm$^2$.

**326.** Teng yonli trapetsiyaning perimetri 32 sm, yon tomoni 5 sm va yuzi 44 sm$^2$ ga teng. Trapetsiyaning balandligini toping.

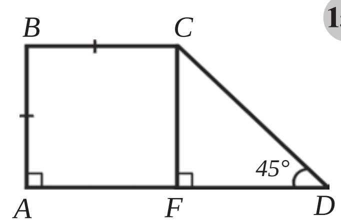
**327.** 1) Asoslari 16 va 24 ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘zaro perpendikular. Trapetsiyaning yuzi nechaga teng?

2) Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i 6 ga, balandligi esa 16 ga teng. Uning yuzini toping.

155

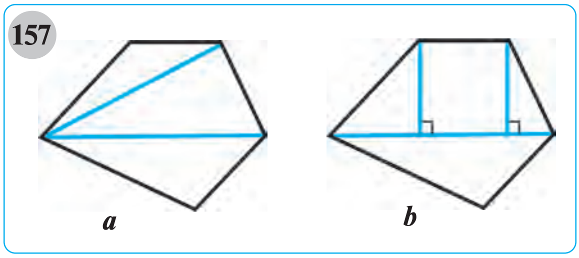



156



## 25- mavzu. KO'PBURCHAKNING YUZI

Ko'pburchakning yuzini hisoblash uchun uni o'zaro kesishmaydigan, ya'ni umumiy ichki nuqtalari bo'lmagan uchburchaklarga ajratish va ularning yuzlari yig'indisini topish mumkin. Qavariq ko'pburchakni uchburchaklarga ajratish uchun, masalan, uning bir uchidan diagonallar o'tkazish yetarli (157- *a* rasm). Ba'zan boshqacha ajratishlardan foydalanish qulay bo'ladi (157- *b* rasm).




**1-masala.** $ABCDE$ ko'pburchakda $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ ekani ma'lum (158-rasm). $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ ekanini isbotlang.

*Isbot.* Berilgan shaklning trapetsiya va uchburchakdan tashkil topganini ko'rish qiyin emas. Shu sababli yuzning 2-xossasiga ko'ra:

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0{,}5BD \cdot CO + 0{,}5(AE + BD) \cdot OP =$$
$$= 0{,}5(\underline{BD} \cdot CO + AE \cdot OP + \underline{BD} \cdot OP) = 0{,}5(BD \cdot (CO + OP) +$$
$$+ AE \cdot OP) = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP).$$

Demak, $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

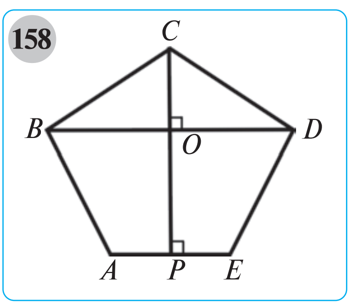
**2-masala.** $AC$ va $BD$ – $ABCD$ to'rtburchakning diagonallari, $O$ – diagonallarining kesishish nuqtasi (159- rasm) $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ va $S_{AOD} = S_4$ bo'lsa, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ekanini isbotlang.

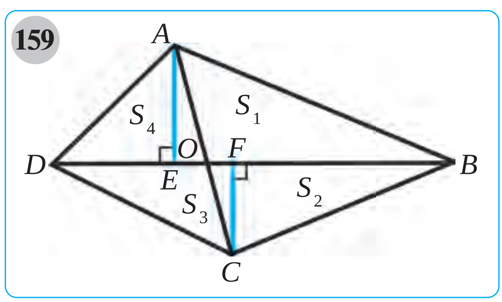
*Isbot.* 1) $AE \perp BD$ va $CF \perp BD$ larni o'tkazamiz.

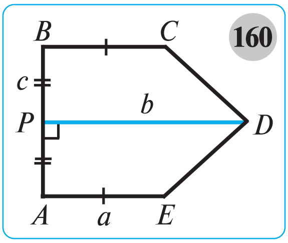
2) $\frac{S_1}{S_4} = \frac{0{,}5OB \cdot AE}{0{,}5OD \cdot AE} = \frac{OB}{OD}$ (1) va $\frac{S_2}{S_3} = \frac{0{,}5OB \cdot CF}{0{,}5OD \cdot CF} = \frac{OB}{OD}$. (2)

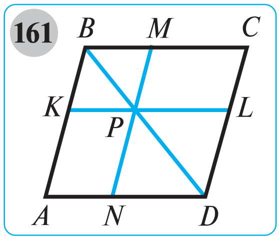
3) (1) va (2) dan topamiz:

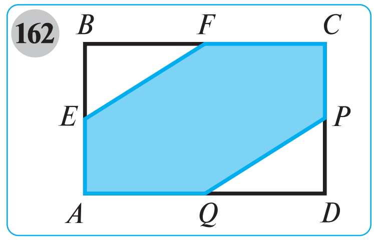
$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4.$$






## *Savol, masala va topshiriqlar*

**328.** 1) Matndagi 1- masalani boshqacha ham yechish mumkinmi?

2) To‘rtburchak diagonallari kesishishidan hosil bo‘lgan qarama-qarshi uchburchaklar yuzlarining ko‘paytmasi tengligini isbotlang.

**329.** 160- rasmda tasvirlangan shakl yuzini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring. Bunda $AE \parallel BC \parallel PD$, $AE = BC$, $AP = PB$, $PD \perp AB$.

**330.** 1) Diagonallari o‘zaro perpendikular bo‘lgan to‘rtburchakning yuzi diagonallari ko‘paytmasi yarmiga teng ekanini isbot qiling.

2) Diagonallari 6 sm va 7 sm teng bo‘lganda, uning yuzini hisoblang.

**331.** Berilgan: $ABCD$ — parallelogramm, $P \in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (161-rasm). Isbot qilish kerak: $S_{AKPN} = S_{PMCL}$.

**332.** Berilgan: $ABCD$ — to‘g‘ri to‘rtburchakda $AB = 12$ sm, $AD = 16$ sm; $E$, $F$, $P$ va $Q$ nuqtalar — mos tomonlarning o‘rtalari (162- rasm).

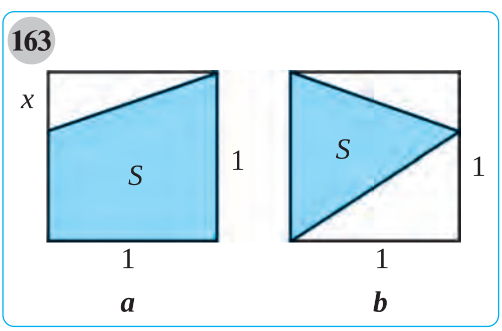
Topish kerak: $S_{EFCPQA}$.

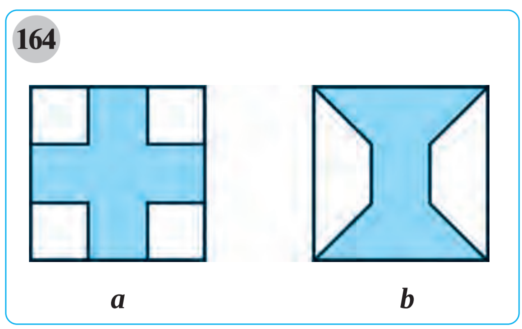
**333.** Tomoni 1 ga teng bo‘lgan kvadrat berilgan (163- rasm). Undan $S$ yuzli shakl qirqib olindi. Agar $x$ miqdor ma’lum bo‘lsa, $S$ yuzni hisoblash uchun formula yozing.

**334.** a) Kvadratning tomoni $a$ ga teng. Uning har bir tomoni teng uchga bo‘lingan. 164- rasmdagi bo‘yalgan yuzlarni toping.

b) Agar: 1) $a = 12$ sm; 2) $a = 3{,}6$ dm; 3) $a = 60$ mm; 4) $a = 4{,}8$ dm; 5) $a = 15$ sm; 6) $a = 27$ dm bo‘lsa, a) banddagi yuzlarni toping.

**335.** $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak $A$ burchagining bissektrisasi $BC$ tomonni $P$ nuqtada 10 sm va 15 sm ga teng bo‘laklarga bo‘ladi. $APCD$ trapetsiyaning yuzini toping.



# 26- mavzu. MASALALAR YECHISH

Bu mavzuda yuzlarni topishga doir ayrim tayanch masalalar hamda ularni yechishning turli usullari keltirilgan.

**1-masala.** $BC$ va $AD$ – $ABCD$ trapetsiyaning asoslari, $O$ – $AC$ va $BD$ diagonallarining kesishish nuqtasi (165- rasm). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ va $S_{AOD} = S_4$ bo'lsa, isbot qiling:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$.

Isbot. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Bizga $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ekani ma'lum. $S_1 = S_3$ ni e'tiborga olsak, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ kelib chiqadi. Masalaning birinchi qismi isbotlandi.

3) Trapetsiyaning yuzi to'rtta uchburchak yuzlarining yig'indisiga teng ekanini va yuqoridagi natijalarni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_{\text{tr.}} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$
$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2.$$

Demak, $S_{\text{tr.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$. Masalaning ikkinchi qismi isbotlandi.

**2-masala.** Parallelogramm bilan umumiy asosga va umumiy balandlikka ega bo'lgan uchburchakning yuzi parallelogramm yuzining yarmiga teng.

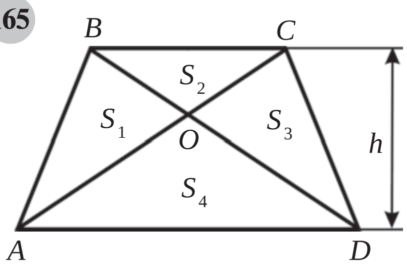
Isbot. $AD$ asos va $h$ balandlik – $ABCD$ parallelogramm va $APD$ uchburchak uchun umumiy (166- rasm). $S_{APD} = 0{,}5S_{ABCD}$ ekanini isbotlaymiz.

$S_{ABCD} = ah$ (1) va $S_{APD} = 0{,}5ah$ (2) ekani ma'lum. (2) tenglikdagi $ah$ o'rniga $S_{ABCD}$ ni qo'yib, topamiz:

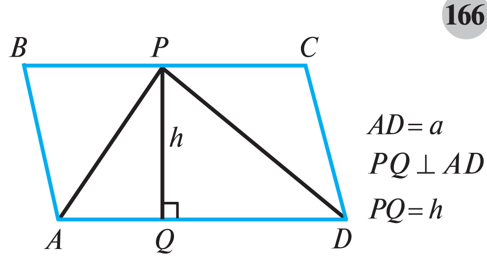
$$S_{APD} = 0{,}5ah = 0{,}5S_{ABCD}.$$

**Eslatma!** Yuqorida keltirilgan masalani quyidagicha ham o'qish mumkin: *uchburchak bilan umumiy asosga va umumiy balandlikka ega bo'lgan parallelogrammning yuzi uchburchak yuzidan ikki marta katta.*

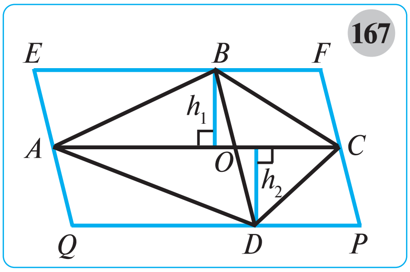
165




166



**3-masala.** Qavariq to‘rtburchakning uchlari orqali uning diagonallariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilsa, u holda hosil bo‘lgan parallelogrammning yuzi berilgan to‘rtburchak yuzidan ikki marta katta bo‘lishini isbotlang.




Yechilishi. $ABCD$ — berilgan qavariq to‘rtburchak, $O$ — $AC$ va $BD$ diagonallarning kesishish nuqtasi, $h_1$ va $h_2$ — to‘rtburchakning $B$ va $D$ uchlaridan $AC$ diagonalga tushirilgan balandliklar; $EFPQ$ — to‘rtburchakning uchlari orqali uning diagonallariga parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlar kesishishidan hosil bo‘lgan parallelogramm (167- rasm).

$S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$ ekanini isbotlaymiz.

Yasashga ko‘ra, parallelogrammning $EF$ va $QP$ tomonlari $AC$ diagonalga parallel hamda teng. Shuning uchun $AC$ diagonal hosil bo‘lgan $EFPQ$ parallelogrammni ikkita — $AEFC$ va $ACPQ$ parallelogrammlarga ajratadi.

Yuqorida keltirilgan eslatmadagi xulosani qo‘llab, $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$ tenglikni isbotlaymiz:

$$S_{EFPQ} = S_{AEFC} + S_{ACPQ} = 2S_{ABC} + 2S_{ADC} = 2(S_{ABC} + S_{ADC}) = 2S_{ABCD}.$$

Demak, $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$.

## Savol, masala va topshiriqlar

**336.** $ABCD$ parallelogrammning $AB$ tomonida shunday $P$ nuqta olinganki, unda $DP \perp AB$. $ABCD$ parallelogrammning yuzi $DP \cdot AB$ ga teng ekanini isbotlang.

**337.** To‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi yer maydonning yuzi 200 ga. Agar: 1) maydonning bo‘yi 10 km bo‘lsa; 2) maydon kvadrat shaklida bo‘lsa, uning perimetri qancha bo‘ladi?

**338.** Asoslari umumiy va uchlari asosga parallel to‘g‘ri chiziqda yotgan uchburchaklar tengdoshdir. Shuni isbot qiling.

**339.** 1) Kvadratning yuzi uning diagonali kvadratining yarmiga teng ekanini isbotlang.

2) Uchburchakning $a$ va $b$ tomonlariga o‘tkazilgan balandlik $h_a$ va $h_b$ bilan belgilangan. $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ ekanini isbotlang.

**340.** $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ trapetsiyada diagonallar o‘tkazilgan, ular kesishgan nuqta $O$ bilan belgilangan. Hosil bo‘lgan barcha tengdosh uchburchaklarni juft-jufti bilan ko‘rsating.

**341.** $ABC$ uchburchak chizing. $A$ uchi orqali ikkita to‘g‘ri chiziqni shunday o‘tkazingki, ular bu uchburchakni yuzlari teng bo‘lgan uchta uchburchakka bo‘lsin.

## 2- § ga doir qo'shimcha mashqlar

**342.** $ABCD$ to'rtburchakda $BD=12$ sm. $B$ uchi $AC$ to'g'ri chiziqdan 4 sm uzoqda. $ABC$ uchburchakning yuzini toping.

**343.** $ABC$ uchburchakda $\angle C=135°$, $AC=6$ dm, $BD$ balandlik 2 dm ga teng. $ABD$ uchburchakning yuzini toping.

**344.** Toshkent markazida qad rostlagan «O'zbekiston» anjumanlar saroyining bevosita foydalaniladigan maydoni 6,5 ming m$^2$ ni tashkil etadi. Shu yuza: 1) necha gektarni; 2) necha ar (sotix)ni tashkil etadi?

**345.** $AC$ va $BD$ — $ABCD$ to'rtburchakning diagonallari, $O$ — ularning kesishish nuqtasi. $S_{AOD}=12$, $S_{BOC}=8$, $S_{AOB}=6$. $S_{COD}$ ni toping.

**346.** To'g'ri burchakli uchburchakda katetlar ko'paytmasi gipotenuza bilan unga o'tkazilgan balandlik ko'paytmasiga tengligini isbotlang.

**347.** Ikkita uchburchakning asoslari teng. Ularning yuzlari shu tomonlarga o'tkazilgan balandliklar nisbati kabi ekanini isbotlang.

**348.** Gugurt cho'pining uzunligini 1 ga teng, deylik. 12 ta gugurt cho'pidan yuzi to'rt kvadrat birlikka teng bo'lgan ko'pburchak yasang.

**349.** Qavariq to'rtburchakning uchi orqali shunday to'g'ri chiziq o'tkazingki, u bu to'rtburchakni yuzlari teng bo'lgan ikkita shaklga bo'lsin.

**350.** Qavariq ko'pburchak diagonallari bilan yuzlari butun sonlarda ifodalanadigan to'rtta uchburchakka bo'lingan. Bu sonlarning ko'paytmasi to'liq kvadrat bo'lishini isbotlang.

**351.** Uzunligi 5 sm dan bo'lgan 30 ta gugurt cho'pidan eng katta yuzli to'g'ri to'rtburchak yasaldi. Uning yuzi qanchaga teng?

## 4- TEST

**1.** Agar to'g'ri to'rtburchakning tomonlari 4 marta orttirilsa, uning yuzi necha marta ortadi?

A) 4; B) 8; D) 16; E) 32.

**2.** To'g'ri to'rtburchakning yuzi 400 ga, tomonlarining nisbati 4 : 1 ga teng. Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

A) 10 km; B) 5 km; D) 2 km; E) 8 km.

**3.** To'g'ri to'rtburchakning uzunligi 25% ga orttirildi. Uning yuzi o'zgarmasligi uchun enini necha foizga kamaytirish kerak?

A) 20%; B) 16%; D) 25%; E) 18%.

**4.** Yuzi 144 sm$^2$, balandliklari 8 sm va 12 sm bo'lgan parallelogrammning perimetrini toping.

A) 40 sm; B) 30 sm; D) 80 sm; E) 60 sm.

**5.** $ABCD$ parallelogrammning $AC$ diagonaliga $BO$ perpendikular tushirilgan. $AO=8$, $OC=6$ va $BO=4$ bo'lsa, parallelogrammning yuzini toping.

A) 50; B) 28; D) 52; E) 56.

**6.** Qavariq to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro perpendikular hamda uzunliklari 7 sm va 8 sm ga teng. Shu to‘rtburchakning yuzini toping.

A) 56 sm$^2$;  B) 112 sm$^2$;  D) 28 sm$^2$;  E) 84 sm$^2$.

**7.** Rombning yuzi 40 sm$^2$ ga, uning perimetri esa 20 sm ga teng. Shu rombning balandligini toping.

A) 2 sm;  B) 8 sm;  D) 4 sm;  E) 16 sm.

**8.** Asoslari 5 sm va 9 sm ga teng bo‘lgan trapetsiyaning yuzi 35 sm$^2$ ga teng. Shu tarpetsiyaning balandligini toping.

A) 9 sm;  B) 8 sm;  D) 5 sm;  E) 10sm.

**9.** Asoslari 8 va 12 ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘zaro perpendikular. Trapetsiyaning yuzini toping.

A) 100;  B) 64;  D) 144;  E) 76.

**10.** Trapetsiyaning yuzi 30 sm$^2$ ga, balandligi 6 sm ga teng bo‘lsa, uning o‘rta chizig‘i qanchaga teng bo‘ladi?

A) 2,5 sm;  B) 5 sm;  D) 7,5 sm;  E) 4,5 sm.

**11.** *ABCD* teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘zaro perpendikular. Agar *AC* diagonal 6 sm ga teng bo‘lsa, uning yuzini toping.

A) 9 sm$^2$;  B) 36 sm$^2$;  D) 18 sm$^2$;  E) 27 sm$^2$.

## *Tarixiy ma’lumotlar*

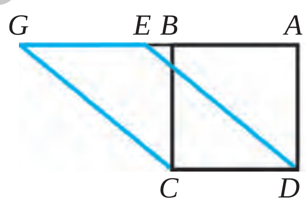
Ibn Sinoning «Donishnoma» asarining beshinchi bobi «To‘rtburchaklar, ularda joylashgan uchburchaklar va ularning munosabatlariga doir asosiy geometrik masalalar» mavzusiga bag‘ishlangandir.

**1-teorema. O‘zaro parallel ikki chiziq orasiga joylashgan, umumiy asosga ega va qarama-qarshi tomonlari parallel shakllar tengdosh bo‘ladi (ya’ni ularning yuzlari teng).** Masalan, asoslari *CD* bo‘lgan *ABCD* va *EGCD* tekis shakllar o‘zaro tengdosh bo‘ladi (168- rasm).

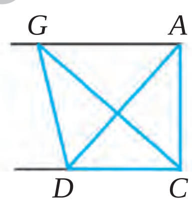
**2-teorema. O‘zaro parallel chiziqlar orasiga joylashgan va umumiy asosga ega bo‘lgan uchburchaklar tengdosh bo‘ladi.** Masalan, *CD* asosga ega bo‘lgan *ACD* va *GCD* uchburchaklar tengdosh bo‘ladi (169- rasm).

**3-teorema. O‘zaro parallel chiziqlar orasiga joylashgan va asoslari teng bo‘lgan to‘rtburchaklar tengdosh bo‘ladi.** Masalan, *ABCD* va *GEHF* to‘rtburchaklar tengdoshdir (170- rasm).

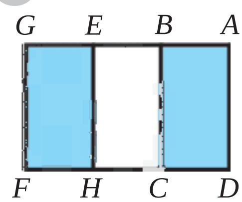
168

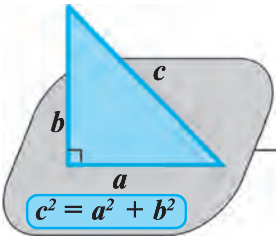



169




170






# 3- §. PIFAGOR TEOREMASI

## 27- mavzu. PIFAGOR VA UNING TEOREMASI HAQIDA

Buyuk yunon matematigi **Pifagor**ning hayoti haqidagi ma'lumotlar tarixda juda kam keltirilgan. U miloddan avvalgi VI asrning ikkinchi yarmida Egey dengizining Samos orolida tug'ilgan. Keyinchalik u Italiyaning janubidagi Kroton shahrida yashagan, shu yerda o'z maktabiga asos solgan. Pifagor maktabi shakllarni ajratish va to'g'ri chiziqli shakllarni tengdosh shakllarga almashtirishning geometrik usulidan teoremalarni isbot qilish va masalalar yechishda foydalanganligi yunon matematiklarining asarlaridangina bizga ma'lum. Xususan, geometriyaning fan sifatida tarkib topishiga Pifagor va uning maktabi katta hissa qo'shgan. Quyida keltiriladigan teorema Pifagor nomi bilan yuritiladi. Uning mazmuni quyidagicha:

**Teorema.**

(Pifagor teoremasi.) **To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati uning katetlari kvadratlarining yig'indisiga teng.**

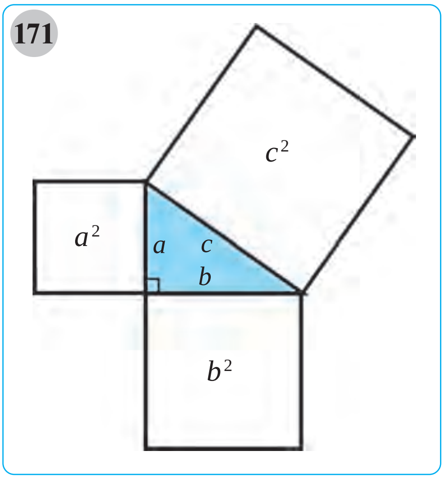
Bu teorema to'g'ri burchakli uchburchakka oid bo'lib, uchburchak tomonlariga teng kvadratlarning yuzlari orasidagi munosabatni ko'rsatadi. Pifagor bu teoremaning nazariy isbotini keltirgan. Pifagor teoremasi bilan aniqlangan geometrik munosabatning xususiy hollari Pifagordan oldin ham turli xalqlarda ma'lum edi, ammo teoremaning bu umumiy shakli Pifagor maktabiga nisbatan beriladi.

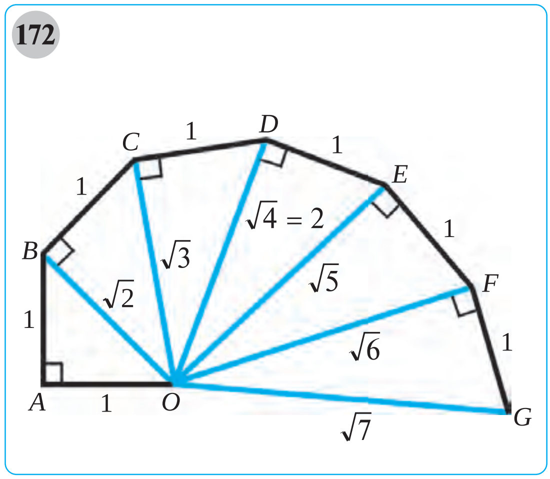
Katetlari $a$ va $b$, gipotenuzasi $c$ bo'lgan to'g'ri burchakli $ABC$ uchburchak berilgan bo'lsin, u holda Pifagor teoremasi

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

formula bilan ifodalanadi, bunda $a^2$, $b^2$, $c^2$ – tomonlari $a$, $b$, $c$ bo'lgan kvadratlarning yuzlariga teng. Shuning uchun bu tenglik tomoni gipotenuzaning uzunligiga teng kvadratning yuzi tomonlari katetlarga teng kvadratlarning yuzlari yig'indisiga teng ekanini ko'rsatadi (171- rasm).

Agar $a$, $b$ va $c$ butun musbat sonlar uchun $a^2 + b^2 = c^2$ tenglik bajarilsa, bu sonlar *Pifagor sonlari* yoki *Pifagor uchliklari* deb ataladi. Agar to'g'ri burchakli uchburchak katetlari va gipotenuzasining uzunliklari butun sonlar bilan ifodalansa, bu sonlar Pifagor uchligini hosil qiladi. Bunday uchlikka 3, 4 va 5 sonlari misol bo'la oladi. Haqiqatan, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Tomonlari 3, 4 va 5 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasashdan Misrda yer ustida to'g'ri burchak yasashda foydalanilgan. Shuning uchun bunday uchburchak ko'pincha «*misr uchburchagi*» deb ataladi.




Pifagor teoremasi to‘g‘ri burchakli uchburchakning istalgan ikki tomoniga ko‘ra uchinchi tomonini topish imkonini beradi.

Pifagor teoremasining tatbig‘iga misol tariqasida tomoni 1 birlikka teng bo‘lgan kvadratning diagonalini topamiz. Kvadratning diagonali har bir kateti 1 birlikdan bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasidan iborat. Pifagor teoremasiga asosan diagonalning kvadrati $1^2+1^2=2$, bundan esa diagonalning uzunligi $\sqrt{2}$ bo‘ladi.

Bu teorema tatbig‘ining ikkinchi misoli sifatida uzunligi $\sqrt{n}$ ga teng bo‘lgan kesma yasash usulini ko‘rsatamiz, bunda $n$ — ixtiyoriy natural son. Biror to‘g‘ri chiziqning $O$ nuqtasini olib, unda uzunligi 1 ga teng $OA$ kesma ajratamiz (172-rasm), $A$ nuqtadan bu to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va unda $AB=1$ kesma ajratamiz. $B$ nuqtani $O$ nuqta bilan tutashtirib, $BO=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ kesmani hosil qilamiz.

$B$ nuqtadan $OB$ ga perpendikular o‘tkazamiz va bu perpendikularda $BC=1$ kesmani ajratamiz. $C$ va $O$ nuqtalarni tutashtirib, $CO=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ kesmani hosil qilamiz va shunday yasashni davom ettirib, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ va h.k. ga teng kesmalarni hosil qilamiz.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ kesmalar uzunlik birligi uchun qabul qilingan $OA$ kesma bilan umumiy o‘lchovsiz ekanini qayd qilamiz, chunki ularning uzunliklari irratsional sonlar bilan ifodalanadi.

**Ma’lumot uchun.** Tomonlari butun sonli to‘g‘ri burchakli uchburchak tuzish qoidalaridan biri ham pifagorchilarga tegishli, chunonchi: $a$, $\frac{a^2-1}{2}$ va $\frac{a^2+1}{2}$ sonlari Pifagor uchlik sonlarini hosil qiladi, bunda $a$ — ixtiyoriy toq son. Yana boshqa bir qoida ham bor: $a$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2-1$ va $\left(\frac{a}{2}\right)^2+1$ sonlari Pifagor uchlik sonlarini hosil qiladi, bunda $a$ — juft son.

Bu qoidadan foydalanib, quyidagi namuna bo‘yicha Pifagor sonlari jadvalini tuzish mumkin:

| $a$ katet | $b$ katet | $c$ gipotenuza | $a$ katet | $b$ katet | $c$ gipotenuza |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 5 | 12 | 35 | 37 |
| 5 | 12 | 13 | 13 | 84 | 85 |
| 7 | 24 | 25 | 16 | 63 | 65 |
| 9 | 40 | 41 | 17 | 144 | 145 |
| 11 | 60 | 61 | 19 | 180 | 181 |

Agar $a$, $b$ va $c$ sonlar Pifagor uchlik sonlarini hosil qilsa, $ma$, $mb$ va $mc$ sonlari ham Pifagor sonlari bo‘lishi o‘z-o‘zidan ayon, bunda $m$ — butun musbat son. Demak, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$ va $2 \cdot 5$, ya’ni 6, 8 va 10 sonlari ham Pifagor uchlik sonlarini tashkil etadi yoki $3 \cdot 5$, $3 \cdot 12$ va $3 \cdot 13$, ya’ni 15, 36 va 39 sonlari ham Pifagor sonlari bo‘ladi.

Shuningdek, katetlari $a$, $b$ va gipotenuzasi $c$ bo‘lgan uchburchakning tomonlari $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ formulalar bilan ifodalanishini isbotlash mumkin, bunda $m$ va $n$ ixtiyoriy natural sonlar bo‘lib, unda $m > n$.

Masalan: $m = 2$ va $n = 1$ uchun $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$; $m = 3$ va $n = 1$ uchun $a = 8$, $b = 6$, $c = 10$; $m = 3$ va $n = 2$ uchun $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ bo‘ladi.

**1- masala.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari 2, 3 va 4 sonlariga proporsional bo‘lishi mumkinmi?

Yechilishi. Yo‘q. Agar to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari $2x$, $3x$ va $4x$ sonlari bilan ifodalansa, u holda Pifagor teoremasiga ko‘ra $4x^2 + 9x^2 = 16x^2$ tenglik bajarilishi kerak edi, ammo $13x^2 = 16x^2$ tenglik o‘rinli emas.

Javob: yo‘q, chunki to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari 2, 3 va 4 sonlariga proporsional emas.

**2- masala.** Diagonallari 10 sm va 24 sm ga teng bo‘lgan rombning tomonini toping.

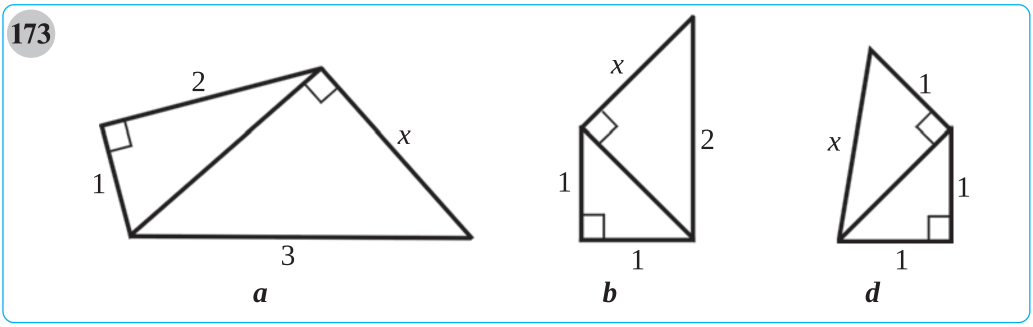
Yechilishi. Rombning diagonallari perpendikular va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linishidan foydalanamiz. U holda rombning tomoni katetlari 5 sm va 12 sm ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi bo‘ladi.

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, ya’ni $169 = 13^2$. Demak, rombning tomoni 13 sm ga teng ekan.

Javob: 13 sm.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**352.** 1) Pifagor haqida nimani bilasiz?
2) Siz Pifagor teoremasining qanday ifodasini bilasiz?
3) «Gipotenuzaning kvadrati», «katetning kvadrati» degan iboralarni qanday tushunasiz?




**353.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning $a$ va $b$ kateti berilgan. Agar: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 15$, $b = 8$; 3) $a = 1$, $b = 1$; 4) $a = 1{,}5$, $b = 2$; 5) $a = 0{,}5$, $b = 1{,}2$; 6) $a = 0{,}8$, $b = 0{,}6$ bo‘lsa, $c$ gipotenuzani toping.

N a m u n a. Masalan, $a = 4\sqrt{2}$ va $b = 7$ bo‘lsin. $c^2 = a^2 + b^2$, bundan

$$c = \sqrt{...^2 + ...^2} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + ...^2} = \sqrt{... + 49} = ... \, .$$

**354.** a) To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlarini bilgan holda uning diagonali qanday topiladi? Pifagor teoremasidan foydalanib, to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari tengligini isbotlang.

b) To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari: 1) 2,4 dm va 7 sm; 2) 20 dm va 12 dm; 3) 8 dm va 1,5 m. Uning diagonalini toping.

**355.** Kvadratning tomoni $a$ ga teng. Shu kvadratning diagonalini toping.

**356.** Noma’lum $x$ kesma uzunligini toping (173- rasm).

**357.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning katta diagonali 13 sm ga, katta asosi esa 12 sm ga teng. Agar trapetsiyaning kichik asosi 8 sm ga teng bo‘lsa, uning yuzini toping.

**358.** To‘g‘ri burchakli uchburchakda $a$ va $b$ – katetlar, $c$ – gipotenuza. Agar: 1) $a = 1{,}2$, $c = 1{,}3$; 2) $a = 7$, $c = 9$; 3) $a = 1{,}5$, $c = 1{,}7$; 4) $a = 2$, $c = 2{,}5$; 5) $a = 7$, $c = 24$ bo‘lsa, $b$ katetni toping.

N a m u n a. Masalan, $a = 3\sqrt{3}$ va $c = 5\sqrt{3}$ bo‘lsin. $b^2 = c^2 - a^2$, bundan

$$b = \sqrt{...^2 - ...^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - ...^2} = \sqrt{... - 27} = \sqrt{...} = ....$$

**359.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari 7, 24 va 25 sonlariga proporsional bo‘lishi mumkinmi?

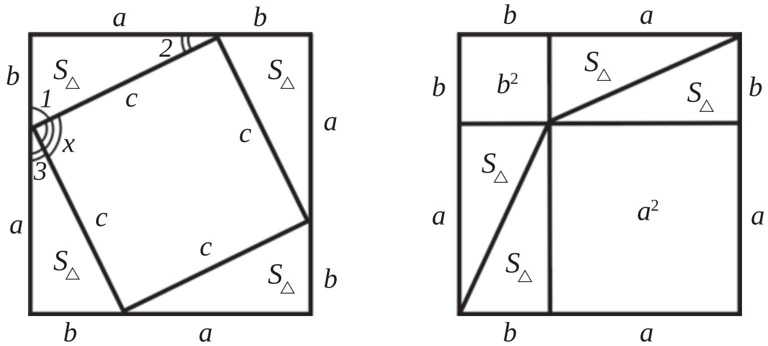
## 28- mavzu. PIFAGOR TEOREMASINING ISBOTI

Katetlari $a$, $b$ va gipotenuzasi $c$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak berilgan. Bu uchburchak uchun Pifagor teoremasi o‘rinli ekanini isbot qilamiz, ya’ni

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ekanini ko‘rsatamiz.

**174**




***a*** ***b***

Buning uchun tomoni berilgan to‘g‘ri burchakli uchburchak katetlari yig‘indisi $(a+b)$ ga teng bo‘lgan ikkita kvadrat yasaymiz. Kvadratlarni 174- rasmda ko‘rsatilgan usul bilan to‘g‘ri burchakli uchburchaklar va kvadratlarga ajratib chiqamiz. Chizmalardan birinchisida hosil bo‘lgan to‘rtburchak kvadrat ekanini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, avvalo bu to‘rtburchak romb, chunki uning tomoni katetlari $a$ va $b$ bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi $c$ ga teng. Chizmadagi $x$ burchakning kattaligini topish uchun $\angle x+\angle 1+\angle 3=180°$, $\angle 3=\angle 2$ va $\angle 1=90°-\angle 2$ ekanini e’tiborga olib topamiz: $\angle x= 90°$. Ma’lumki, to‘g‘ri burchakli romb — kvadratdir.

Qaralayotgan ikkala kvadrat tengdosh. Shuningdek, birinchi kvadrat yuzi $4S_\triangle+c^2$ ga teng, ikkinchi kvadratning yuzi $4S_\triangle+a^2+b^2$ ga teng. Shuning uchun

$$\underline{4S_\triangle}+\underline{\underline{c^2}}=\underline{4S_\triangle}+\underline{\underline{a^2+b^2}}.$$

Demak,

$$c^2=a^2+b^2.$$

Teorema isbotlandi.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**360.** 1) Pifagor teoremasining ifodasini bilasizmi? Uni isbotlang.
2) Nima uchun isbotlashda foydalanilgan ikkita kvadrat tengdosh?

**361.** Teng yonli uchburchakning tomonlari: 1) 6 sm, 5 sm va 5 sm; 2) 3,2 dm, 20 sm va 20 sm; 3) 48 sm, 40 sm va 40 sm; 4) 28 sm, 50 sm va 50 sm; 5) 48 sm, 25 sm va 25 sm ga teng. Shu uchburchakning yuzini va yon tomoniga o‘tkazilgan balandlikni toping.

**362.** Teng yonli $ABC$ uchburchakda: $AC$ — asos, $BD$ — balandlik. Agar: 1) $AC=16$ sm, $BD=6$ sm; 2) $AC=48$ sm, $BD=7$ sm bo‘lsa, shu uchburchakning yuzini va yon tomonini toping.

**363.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning yon tomonlari 15 sm va 9 sm, katta asosi esa 20 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

**364.** O‘tkir burchakli $ABC$ uchburchakda $BP$ — balandlik. $BC^2=AB^2+AC^2-2AC\cdot AP$ ekanini isbotlang.

**365.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi $c = 25$ va kateti $a = 7$ ga teng. Gipotenuzaga tushirilgan balandlikni toping.

Y e c h i l i s h i. 1) To‘g‘ri burchakli uchburchakning ikkinchi kateti $b$ bo‘lsin, u holda Pifagor teoremasiga ko‘ra:

$$b = \sqrt{c^2 - ...^2} = \sqrt{...^2 - 7^2} = \sqrt{625 - ...} = \sqrt{...} = ....$$

2) To‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzi $S = \frac{1}{2} a$ ... ga, ikkinchi tomondan esa $S = \frac{1}{2} c$ ... ga teng, shuning uchun $a ... = c...$ va bundan, $h_c = \frac{a \cdot ...}{c} = \frac{... \cdot 24}{...} = ...$ . J a v o b: ... kv. birlik.

**366.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning asoslari 9 sm va 18 sm, katta yon tomoni esa 15 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

**367.** $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakda: 1) agar $AB = 15$ va $AC = 39$ bo‘lsa, $AD$ ni; 2) agar $CD = 2{,}5$ va $AC = 6{,}5$ bo‘lsa, $BC$ ni toping.

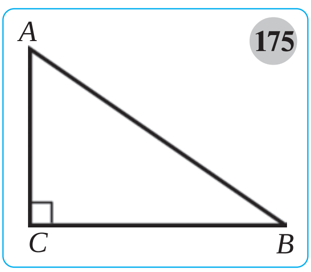
## 29- mavzu. PIFAGOR TEOREMASINING BA’ZI NATIJALARI. PIFAGOR TEOREMASIGA TESKARI TEOREMA

**1. Pifagor teoremasining ba’zi natijalari.** Pifagor teoremasining natijalari ichidan ikkitasining isbotini ko‘rib chiqamiz.

**1-natija.** ***To‘g‘ri burchakli uchburchakda katetlardan istalgani gipotenuzadan kichikdir.***

I s b o t. $\triangle ABC$ — to‘g‘ri burchakli, unda $\angle C = 90°$ bo‘lsin (175- rasm).

To‘g‘ri burchakli uchburchakning istalgan kateti gipotenuzasidan kichik bo‘lishini isbotlaymiz.




Haqiqatan ham, Pifagor teoremasiga ko‘ra katetlar uchun:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \quad \text{va} \quad BC^2 = AB^2 - AC^2$$

munosabatlar o‘rinli. Bundan

$$AC^2 < AB^2 \quad \text{va} \quad BC^2 < AB^2$$

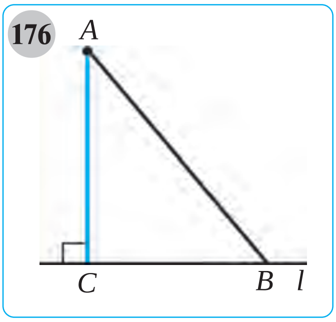
ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $AC < AB$ va $BC < AB$.

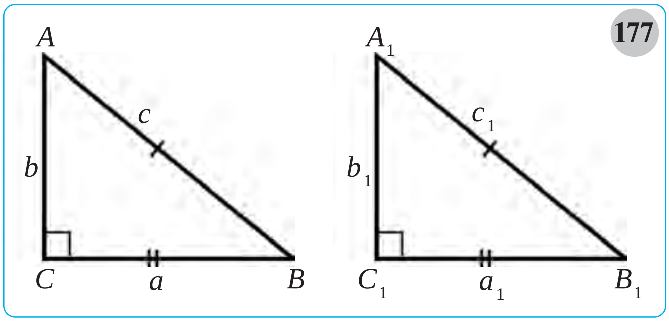
**Xulosa.** Agar $l$ to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan $A$ nuqta berilgan bo‘lsa, $A$ dan $l$ to‘g‘ri chiziqqacha eng qisqa masofa $A$ dan $l$ ga tushirilgan *perpendikular* bo‘ladi (176- rasm).

Haqiqatan ham, har qanday $B \in l$ uchun $\triangle ACB$ — to‘g‘ri burchakli hamda $AC$ katet va $AB$ gipotenuza bo‘ladi. Shuning uchun har doim $AB > AC$.

*To‘g‘ri burchakli uchburchakning istalgan kateti gipotenuzadan kichik.*




176




177

**2-natija.** (Gipotenuzasi va bir katetiga ko‘ra tenglik alomati.) ***To‘g‘ri burchakli bir uchburchakning gipotenuzasi va bir kateti ikkinchi to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va bir katetiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar teng bo‘ladi.***

Isbot. To‘g‘ri burchakli $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda gipotenuzalari $(c = c_1)$ va katetlaridan biri $(a = a_1)$ teng bo‘lsin (177- rasm). $b^2 = c^2 - a^2$ va $b_1^2 = c_1^2 - a_1^2$ ekanidan, $b^2 = b_1^2$ kelib chiqadi. Shuning uchun $b = b_1$ bo‘ladi. Shunday qilib, uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko‘ra, $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar teng ekan.

## 2. Pifagor teoremasiga teskari teorema.

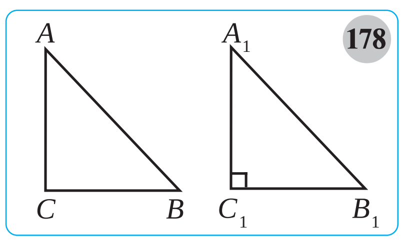
**Teorema.**

**Agar uchburchakda tomonlardan birining kvadrati uning qolgan ikki tomoni kvadratlarining yig‘indisiga teng bo‘lsa, u holda uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.**

Isbot. $ABC$ uchburchakda $AB^2 = AC^2 + BC^2$ bo‘lsin. $\angle C = 90°$ ekanini isbotlaymiz (178- rasm).

$C_1$ burchagi to‘g‘ri bo‘lgan yordamchi to‘g‘ri burchakli $A_1B_1C_1$ uchburchakni ko‘rib chiqamiz, unda $A_1C_1 = AC$ va $B_1C_1 = BC$. Pifagor teoremasiga ko‘ra, $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$ va demak, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

Ammo teorema shartiga ko‘ra, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ va demak, $A_1B_1^2 = AB^2$. Bundan topamiz: $A_1B_1 = AB$. Shunday qilib, $ABC$ va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar uch tomoniga ko‘ra teng. Shuning uchun $\angle C = \angle C_1$, ya’ni $ABC$ uchburchakning $C$ uchidagi burchagi to‘g‘ri burchak ekani kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.




178

**Masala.** Agar uchburchakning tomonlari: 1) $a = 5$, $b = 11$, $c = 12$; 2) $a = \sqrt{85}$, $b = 7$, $c = 6$ bo‘lsa, u to‘g‘ri burchakli uchburchak bo‘ladimi?

Yechilishi. 1) Ikkita kichik tomoni kvadratlari yig‘indisini hisoblaymiz:

$$5^2 + 11^2 = 25 + 121 = 146.$$

Katta tomoni kvadratini hisoblaymiz: $12^2 = 144$.

Olingan natijalarni taqqoslasak, $a^2 + b^2 \neq c^2$ munosabat kelib chiqadi. Va demak, uchburchak to‘g‘ri burchakli emas ekan.

J a v o b: $a = 5$, $b = 11$ va $c = 12$ bo‘lganda, uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘lmaydi.

2) Ikkita kichik tomoni kvadratlari yig‘indisini hisoblaymiz:

$$7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85.$$

Katta tomoni kvadratini hisoblaymiz: $\left(\sqrt{85}\right)^2 = 85$.

Demak, $85 = 85$ — o‘rinli. Natijada $b^2 + c^2 = a^2$ ga ega bo‘lamiz. Bundan uchburchakning to‘g‘ri burchakli ekani kelib chiqadi.

J a v o b: $a = \sqrt{85}$, $b = 7$ va $c = 6$ bo‘lganda uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**368.** 1) Katet gipotenuzadan kichik ekani to‘g‘rimi?
2) Pifagor teoremasiga teskari teoremani ifodalang.

**369.** 179- rasmdan bir juft teng to‘g‘ri burchakli uchburchaklarni ko‘rsating.

**370.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning: 1) tomonlari biror musbat songa ko‘paytirilsa; 2) har bir tomoniga 1 qo‘shilsa, hosil bo‘lgan kesmalar to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari bo‘ladimi?

**371.** Teng yonli trapetsiyaning asoslari 8 sm va 16 sm, balandligi esa 3 sm ga teng. Shu trapetsiyaning perimetrini toping.

**372.** Uchburchakning tomonlari: 1) $a = 11$, $b = 7$, $c = 72$; 2) $a = 30$, $b = 16$, $c = 34$. Shu uchburchaklar to‘g‘ri burchakli bo‘ladimi?

**373.** Kateti va ikkinchi katetga o‘tkazilgan medianasiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tengligini isbotlang.

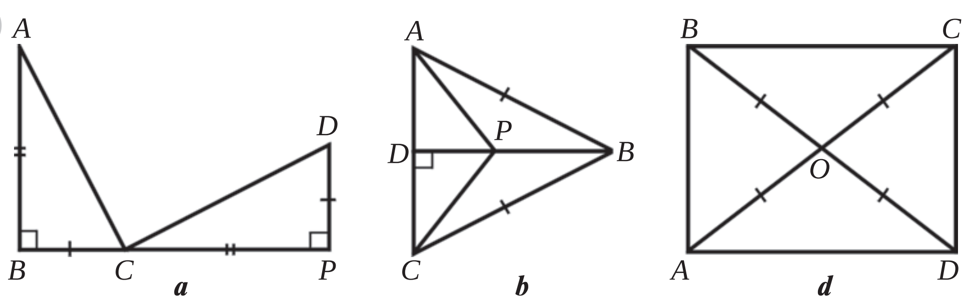
**374.** Kateti va shu katetga o‘tkazilgan medianasiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tengligini isbotlang.

**375.** Uchburchakning tomonlari: 1) $a = 12$, $b = 35$, $c = 37$; 2) $a = 11$, $b = 20$, $c = 25$. Shu uchburchaklar to‘g‘ri burchaklimi?

**376.** To‘g‘ri burchakli *ABCD* trapetsiyaning yon tomonlari 10 sm ga va 8 sm ga teng. Uning katta asosi esa 18 sm ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

**377.** Teng yonli uchburchakning yon tomoni 17 sm, asosi esa 16 sm ga teng. Asosiga tushirilgan balandlikni toping.

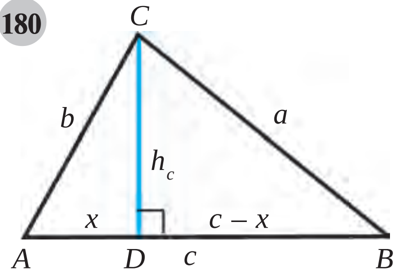
179



## 30*- mavzu. TOMONLARIGA KO'RA UCHBURCHAKNING BALANDLIGINI TOPISH

Berilgan $ABC$ uchburchakning tomonlari $a$, $b$ va $c$ bo'lsin. Uning $C$ uchidan $AB$ tomoniga tushirilgan $CD = h_c$ balandlikni topamiz (180- rasm).

180




Balandlik asosi $D$ nuqtaning $AB$ kesmaga nisbatan qanday joylashishiga ko'ra uch hol bo'ladi.

1- h o l. $D$ nuqta $AB$ kesmaning ichki nuqtasi bo'lsin. Agar $AD = x$ belgilash kiritsak, u holda $DB = c - x$ bo'ladi. $\triangle ADC$ va $\triangle BDC$ lar to'g'ri burchakli, Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \ (1) \quad \text{va} \quad h_c^2 = a^2 - (c - x)^2 \ (2).$$

Bulardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

Bu tenglikdan

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \quad \text{ya'ni} \quad b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

Bundan $x$ ni topamiz:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{yoki} \quad x^2 = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2}.$$

$x^2$ ning bu qiymatini (1) tenglikka qo'yib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Bu kasrning suratini ko'paytuvchilarga ajratib, quyidagini hosil qilamiz:

$$h_c^2 = \frac{\left(2bc - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right)\left(2bc + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right)}{4c^2} = \frac{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}{4c^2}.$$

Hosil qilingan ifodaning suratidagi ikkala ko'paytuvchining shaklini o'zgartiramiz:

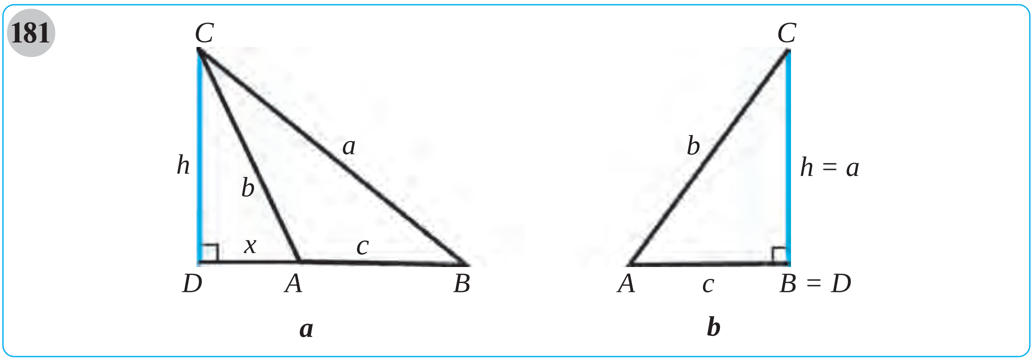
$$2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c)$$

va

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b + c)^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a).$$

U holda

$$h_c^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4c^2},$$




bundan

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Uchburchakning yarim perimetrini $p$ deb belgilasak, unda:

$a + b + c = 2p,$
$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$
$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$
$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$

Hosil qilingan ifodani ildiz ostidagi ifoda o‘rniga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Xuddi shuningdek,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{va} \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2-hol. $D$ nuqta $AB$ ning davomida yotadi, ya‘ni $DB = c + x$. Bunda ham qayd qilingan natija hosil bo‘ladi (181-*a* rasm).

3-hol. $D$ nuqta $B$ nuqta bilan, ya’ni $h = a$ — balandlik katet bilan ustma-ust tushadi. Uchburchak to‘g‘ri burchakli bo‘ladi (181-*b* rasm).

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**378.** Tomonlari: 1) 10 sm, 10 sm, 12 sm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 dm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 dm bo‘lgan uchburchakning balandliklarini toping.

**1.** *O‘quvchilar tomonlariga ko‘ra uchburchakning so‘ralayotgan balandligini topish formulasi bo‘yicha hisoblashni bajara olishlari shart. Formulani keltirib chiqarish iqtidorli o‘quvchilarga mo‘ljallangan.*

**2.** *Uchburchakda katta tomonga tushirilgan balandlik kichik bo‘ladi va, aksincha, kichik tomonga tushirilgan balandlik esa katta bo‘ladi:*

*agar* $a < b < c$ *bo‘lsa,* $h_a > h_b > h_c$ yoki *agar* $a > b > c$ *bo‘lsa,* $h_a < h_b < h_c$ *bo‘ladi.*

**379.** Uchburchakning tomonlari: 1) $a = 5$ sm, $b = 7$ sm, $c = 6$ sm; 2) $a = 13$ dm, $b = 14$ dm, $c = 15$ dm; 3) $a = 24$ sm, $b = 25$ sm, $c = 7$ sm ga teng. Katta tomonga tushirilgan balandlikni toping.

**380.** 1) Agar teng tomonli uchburchakning tomoni 12 sm ga teng bo‘lsa, uning balandligini; 2) agar teng tomonli uchburchakning balandligi 16 sm ga teng bo‘lsa, uning tomonini toping.

**381.** Balandligi $h$ ga teng bo‘lgan teng tomonli uchburchakning tomonini toping.

**382.** Uchburchakning tomonlari 16 sm, 12 sm va 8 sm ga teng. Shu uchburchakning kichik balandligini toping.

**383.** Uchburchakning tomonlari 8 sm, 10 sm va 12 sm ga teng. Shu uchburchakning eng katta va eng kichik balandliklarini toping.

**384.** Tomonlari: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8 ga teng bo‘lgan uchburchakning kichik balandligini toping.

## 31- mavzu. UCHBURCHAK YUZI UCHUN GERON FORMULASI

Ma’lumki, uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko‘paytmasining yarmiga teng:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c .$$

Balandlik o‘rniga uning uchburchak tomonlari orqali ifodasini qo‘yib, uni soddalashtirib ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

Bu formula milodning I asrida yashagan qadimgi yunon olimi iskandariyalik **Geron** tomonidan topilgan bo‘lib, u *Geron formulasi* deb ataladi.

Geron formulasi uchburchakning uchala tomoni uzunligi ma’lum bo‘lganda uning yuzini hisoblash uchun ishlatiladi.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**385.** Uchburchakning yuzi uchun Geron formulasini keltirib chiqaring. Uchburchakning yuzini yana qanday formulalar yordamida hisoblash mumkin? Ularning ifodasini keltiring.

**386.** Uchta tomoniga ko‘ra uchburchakning yuzini toping:

1) 17, 65, 80; 2) 15, 15, 18; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

**387.** Rombning tomoni 26 sm ga, diagonallaridan biri esa 48 sm ga teng. Shu rombning yuzini toping.

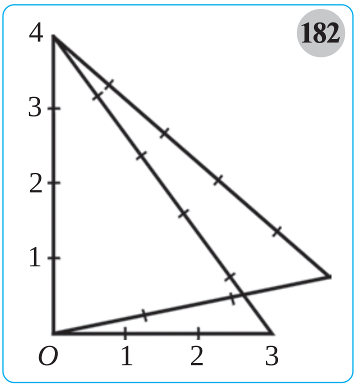
**388.** Teng tomonli uchburchakning yuzi $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ formula bo‘yicha hisoblanadi, bunda $a$ — uchburchakning tomoni. Shuni isbotlang.

**389.** Rombning diagonallari 18 dm va 24 dm. Shu rombning perimetri va parallel tomonlar orasidagi masofani toping.

**390.** Teng tomonli uchburchakning tomoni: 1) 15 sm; 2) 3,2 dm; 3) 20 sm; 4) $4\sqrt{2}$ sm; 5) 6 sm. Uchburchakning yuzini toping.

**391.** Tomonlari: 1) 39, 42, 45; 2) 35, 29, 8; 3) 8, 10, 14; 4) 45, 39, 12; 5) 20, 20, 32 ga teng bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

## 32- mavzu. MASALALAR YECHISH




Ushbu mavzuda Pifagor teoremasiga bog'liq amaliy masalalarni ko'rib chiqamiz.

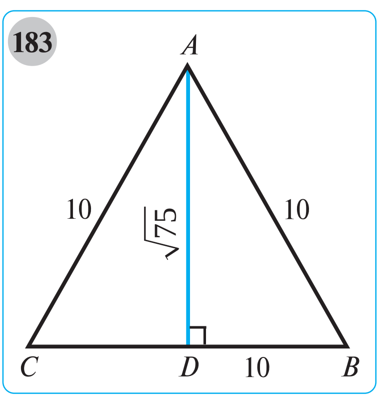
**1-masala.** Ustunni tik o'rnatish.

Yechilishi. Pifagor teoremasi amaliy masalalarni hal qilishda juda ko'p ishlatiladi. Ushbu masala ham shular jumlasidandir. Buning uchun 3, 4 va 5 sonlaridan iborat Pifagor uchligidan foydalanamiz. Bu sonlar uchun $3^2 + 4^2 = 5^2$ tenglik o'rinlidir. Bundan katetlari 3 va 4 uzunlik birligiga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 5 birlikka teng bo'ladi.

Ustunni tik o'rnatish uchun ustun uzunligini ip bilan o'lchaymiz. So'ngra bu ipni ikki marta teng ikkiga bo'lamiz. Bunda ustunga nisbatan bir uzunlik birligini hosil qilamiz. Ustun esa to'rt birlikka teng bo'ladi. Ustun asosidan boshlab uch birlik o'lchaymiz va bu nuqtadan ustun uchigacha masofani o'lchaymiz. Agar bu masofa besh birlikka teng bo'lsa, ustun tekislikka nisbatan tik turgan bo'ladi. Faqat bu ishni kamida ikki yo'nalishda bajarish lozim (182- rasm).

**2-masala.** Tomonining har biri 10 birlikka teng bo'lgan teng tomonli uchburchakning yuzi topilsin (183- rasm).

Yechilishi. Al-Xorazmiy uchburchakning yuzini asosi bilan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng ekanini, turli tomonli uchburchakda biror uchdan tushirilgan balandlik o'zi tushgan tomonni teng bo'laklarga bo'lmasligini, teng yonli va teng tomonli uchburchaklarda esa asos teng ikkiga bo'linishini aytadi, so'ngra teng tomonli uchburchakning yuzini quyidagi tartibda hisoblashni tavsiya qiladi, ya'ni masalani quyidagicha yechadi:




– uchburchakning balandligi:

$$h_x = \sqrt{100-25} = \sqrt{75},$$

– uchburchakning yuzi:

$$S = \frac{10}{2}AD = 5\cdot\sqrt{100-25} = 5\cdot\sqrt{75} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}3$$

yoki

$$S = \sqrt{25 \cdot 75} = \sqrt{1875} \approx 43,3 .$$

Bularning hammasi so'z bilan tushuntirilgan.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**392.** 1) Ustunning tik ekani qanday tekshiriladi?

2) Tomonlari 5, 6 va 9 birlikka teng bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

**393.** Teng yonli trapetsiyaning diagonali 25 sm ga, balandligi esa 15 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

**394.** $ABCD$ kvadratning tomoni 12 sm ga teng. Uning $AB$ tomonida $P$ nuqta shunday belgilanganki, unda $PC = 13$ sm. $APCD$ to'rtburchakning yuzini toping.

**395.** To'g'ri to'rtburchakning perimetri 62 sm, diagonallarining kesishish nuqtasidan tomonlardan birigacha bo'lgan masofa esa 12 sm ga teng. Shu to'g'ri to'rtburchakning diagonalini toping.

**396.** $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning $BC$ tomonida $P$ nuqta shunday belgilanganki, unda $AP = 15$ sm, $BA = 12$ sm, $PC = 6$ sm. $APCD$ to'rtburchakning yuzini toping.

**397.** Uchburchakning balandligi 36 sm, yon tomoni 85 sm va 60 sm. Shu uchburchakning yuzini toping (ikki holni ko'rib chiqing).

**398.** To'g'ri to'rtburchakning tomonlari 8 sm va 15 sm. Uning diagonalini toping.

**399.** Rombning diagonallari 14 sm va 48 sm. Rombning perimetrini va parallel tomonlar orasidagi masofani toping.

### *3- § ga doir qo'shimcha mashqlar*

**400.** $ABC$ uchburchakda $A$ burchak o'tmas, $BP$ — uchburchakning balandligi. $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AP \cdot AC$ ekanini isbotlang.

**401.** Tomonlari: 1) $\frac{25}{6}$, $\frac{25}{6}$, 6; 2) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$ ga teng bo'lgan uchburchakning eng katta balandligini toping.

**402.** Rombning tomoni 20 sm ga, diagonallaridan biri esa 24 sm ga teng. Shu rombning yuzini toping.

**403.** Biror trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan chiqqan diagonali va yon tomoni, mos ravishda, 26 sm va $\sqrt{577}$ sm ga, uning balandligi 24 sm, kichik asosi esa 7 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

**404.** Teng yonli trapetsiyaning asoslari 7 sm va 13 sm ga, o'tmas burchagi esa 135° ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

## 5- TEST

**1.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri 12 sm, gipotenuzasi esa ikkinchi katetdan 6 sm uzun. Gipotenuzaning uzunligini toping.

A) 15 sm; B) 25 sm; D) 26 sm; E) 18 sm.

**2.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 25 sm, katetlari o‘zaro 3 : 4 nisbatda. Shu uchburchakning kichik katetini toping.

A) 10 sm; B) 15 sm; D) 9 sm; E) 20 sm.

**3.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri 12 sm, ikkinchisi esa gipotenuzadan 8 sm qisqa. Shu uchburchakning gipotenuzasini toping.

A) 15 sm; B) 16 sm; D) 13 sm; E) 25 sm.

**4.** Tomonlari 13 sm, 14 sm va 15 sm bo‘lgan uchburchakning eng kichik balandligi necha santimetr?

A) 11,5 sm; B) 11,1 sm; D) 11 sm; E) 11,2 sm.

**5.** Rombning diagonallari 14 sm va 48 sm ga teng. Shu rombning perimetrini toping.

A) 60 sm; B) 100 sm; D) 80 sm; E) 120 sm.

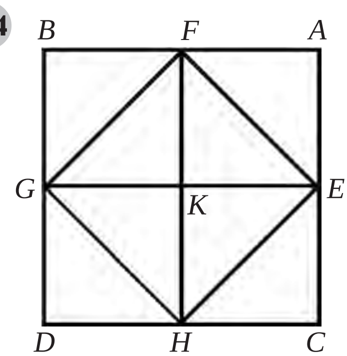
**6.** To‘g‘ri burchakli *ABCD* ($\angle D = 90°$) trapetsiyaning asoslari 17 sm va 9 sm, kichik yon tomoni esa 15 sm ga teng. *AB* tomonni toping.

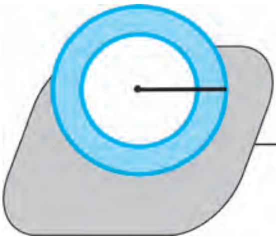
A) 15 sm; B) 17 sm; D) 9 sm; E) 8 sm.

### Tarixiy ma’lumotlar

*«Bilki,* — deb yozadi Xorazmiy, — *har bir to‘g‘ri burchakli uchburchak shundayki, agar kichik tomonlarining har biri o‘z-o‘ziga ko‘paytirilsa va bu ko‘paytmalar qo‘shilsa, bu katta tomonining o‘z-o‘ziga ko‘paytmasiga teng bo‘ladi».* Buni isbotlash uchun Xorazmiy *ABDC* kvadrat shakl yasaydi (184- rasm). Uning *AC* tomonini *E* nuqtada teng ikkiga bo‘lib, unga *EG* perpendikular o‘tkazadi. *AB* ni *F* nuqtada teng ikkiga bo‘lib, unga *FH* perpendikular o‘tkazadi. U holda *ABDC* shakl to‘rtta o‘zaro teng shakllardan iborat bo‘ladi. So‘ngra *EF*, *FG*, *GH*, *HE* chiziqlarni o‘tkazib, sakkizta o‘zaro teng uchburchaklar hosil qiladi. *AF* chiziqning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi bilan *AE* chiziqning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi birgalikda to‘rtta o‘zaro teng uchburchaklar yuzlarini hosil qiladi. *FE* chiziqning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi ham xuddi shunday o‘zaro teng uchburchaklar yuzlarini tashkil etadi. Isbot ana shundan iboratdir.

184





# 4- §. AYLANA

## 33- mavzu. AYLANA. MARKAZIY BURCHAK

### 1. Ayalana haqida boshlang‘ich ma’lumotlar.

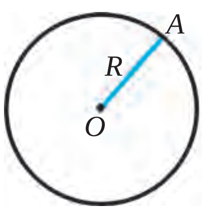
**Ta’rif.** *Tekislikning berilgan nuqtadan bir xil masofaga uzoqlashgan barcha nuqtalaridan iborat shakl* ***aylana*** *deyiladi.*

Aylana tekislikda berilgan $O$ nuqtadan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalardan tuzilgan. Berilgan $O$ nuqta *aylananing markazi* deyiladi.

Aylananing ixtiyoriy nuqtasini uning markazi bilan tutashtiruvchi kesma aylananing *radiusi* deyiladi. Aylana nuqtasini uning markazi bilan tutashtiruvchi har qanday kesma radius bo‘ladi. Odatda, $O$ markazli va $R$ radiusli aylana quyidagicha belgilanadi: $(O, R)$ (185-*a* rasm).

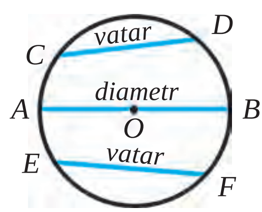
Aylananing ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma *vatar* deyiladi. Aylananing markazidan o‘tuvchi vatar uning *diametri* deyiladi (185-*b* rasm).

185




$O$ markazli, $R$ radiusli aylana, ya’ni $(O, R)$

**a**

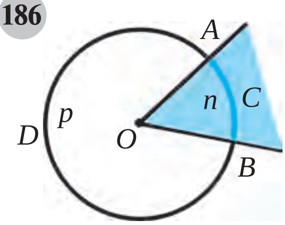



$CD$ va $EF$ – vatarlar, $AB$ – diametr

**b**

### 2. Markaziy burchak.

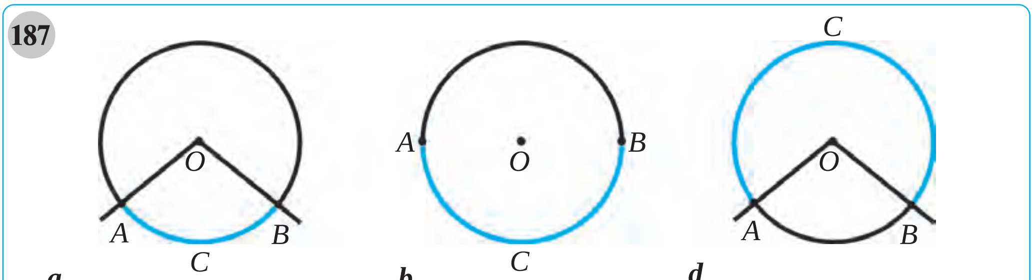
186




$\angle AOB$ – markaziy burchak

**Ta’rif.** *Uchi aylananing markazida bo‘lgan burchak* ***markaziy burchak*** *deb ataladi.*

Umumiy uchi aylananing $O$ markazida bo‘lgan ikki nur $OA$ va $OB$ ikkita markaziy burchakni belgilaydi. Aylanadagi $A$ va $B$ nurlar uni ikki yoyga ajratadi. Bu yoylarni bir-biridan farq qilish uchun har birida bittadan oraliq nuqta (yoyning uchlaridan farqli) yoki lotincha kichik harf bilan belgilanadi hamda $ACB$ (yoki $AnB$) va $ADB$ (yoki $ApB$) yoylar




*a* $\smile ACB = \angle AOB$ *b* $\smile ACB = 180°$ *d* $\smile ACB = 360° - \angle AOB$

haqida gapiriladi (186- rasm). Bu yoylarni bunday belgilash qabul qilingan: $\smile ACB$ (yoki $\smile AnB$) va $\smile ADB$ (yoki $\smile ApB$). Ayrim hollarda yoy oraliq nuqtasiz belgilanadi: $\smile AB$ (ikki yoydan qaysi biri haqida gap ketayotgani ma'lum bo'lganda).

Agar yoyning uchlarini tutashtiruvchi kesma aylana diametri bo'lsa, yoy *yarim aylana* deyiladi. 187-*b* rasmda ikkita yarim aylana tasvirlangan, ulardan biri alohida ajratib ko'rsatilgan.

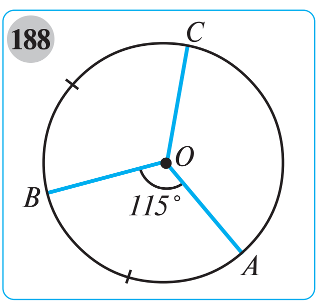
### 3. Aylana yoyining burchak kattaligi.

**Ta'rif.** ***Aylana yoyining burchak kattaligi*** *deb, aylananing shu yoyga mos markaziy burchagining kattaligiga aytiladi.*

Aylana yoyini graduslarda o'lchash mumkin. *Agar O markazli aylananing ACB yoyi yarim aylanadan kichik yoki yarim aylanaga teng bo'lsa, u holda uning gradus o'lchovi AOB markaziy burchak gradus o'lchoviga teng hisoblanadi* (187-*a*, *b* rasm). *Agar ACB yoy yarim aylanadan katta bo'lsa, u holda uning gradus o'lchovi* $360° - \angle AOB$ *ga teng hisoblanadi* (187-*d* rasm).

Bundan, *oxirlari umumiy bo'lgan aylana ikki yoyining gradus o'lchovlari yig'indisi 360° ga tengligi* kelib chiqadi.

Ma'lumki, ikki burchakning kattaliklari teng bo'lganda va faqat shundagina u burchaklar teng bo'ladi.




**Masala.** *O* nuqta – aylana markazi, $\angle AOB = 115°$, $\smile BC = \smile AB$ (188- rasm). *AOC* burchakni toping.

Yechilishi. *AOB* burchak aylananing markaziy burchagi, *AB* yoy yarim aylanadan kichik, shuning uchun $\smile AB = \angle AOB = 115°$. Masala shartiga ko'ra, $\smile BC = \smile AB$, va demak, *BC* yoy 115° ga teng. $\smile ABC = \smile AB + \smile BC = 230° > 180°$, ya'ni *ABC* yoy yarim aylanadan katta, shuning uchun

$$\angle AOC = 360° - \smile ABC = 360° - 230° = 130°.$$

Javob: $\angle AOC = 130°$.

*Aylana ikki yoyining burchak kattaliklari (ya'ni ularga mos markaziy burchaklar) teng bo'lganda va faqat shundagina bu yoylar teng bo'ladi.*

## Savol, masala va topshiriqlar

**405.** 1) Aylana nima? Uning markazi, radiusi nima?
2) Aylananing vatari nima? Qanday vatar diametr deb ataladi?
3) Markaziy burchak nima?
4) Aylana yoyi qanday belgilanadi? Aylana yoyining burchak kattaligi nima?

**406.** 1) Berilgan aylana yoyini teng ikkiga qanday qilib bo‘lish kerak?
2) Aylanani to‘rtta teng yoyga qanday qilib bo‘lish kerak?

**407.** Berilgan aylananing markazidan o‘tuvchi ikki to‘g‘ri chiziq bu aylanada nechta yoyni va nechta markaziy burchaklarni aniqlaydi?

**408.** Markaziy burchakka mos yoy aylananing: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ qismiga teng. Shu markaziy burchakni toping.

**409.** Aylana ikki nuqta bilan ikki yoyga bo‘linadi. Agar: 1) ulardan birining burchak kattaligi ikkinchisining burchak kattaligidan 40° ortiq bo‘lsa, har qaysi burchak kattaligi qanday bo‘ladi? 2) bu yoylarning burchak kattaliklari 2 va 7 sonlariga proporsional bo‘lsa-chi?

**410.** $A$, $B$, $C$ nuqtalar markazi $O$ nuqtada bo‘lgan aylanada yotadi. Agar $\smile ABC = 70°$ bo‘lsa, $AOC$ burchakni toping.

**411.** Aylananing: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$; 6) $\frac{1}{18}$; 7) $\frac{1}{45}$ qismini tashkil qiluvchi $AB$ yoyiga mos keluvchi markaziy burchaklar necha gradusli bo‘ladi? Bu hollarning har birida $AB$ yoyning burchak kattaligini belgilar yordamida yozing.

## 34- mavzu. AYLANA VATARI VA DIAMETRINING XOSSALARI

**1- teorema.**

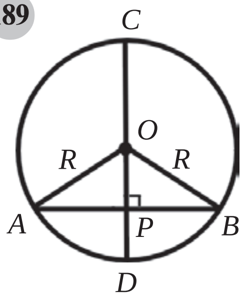
**Vatarga perpendikular diametr shu vatarni va unga tiralgan yoyni teng ikkiga bo‘ladi.**

I s b o t. Markazi $O$ nuqtada va radiusi $R$ bo‘lgan aylana berilgan. $AB$ — aylana vatari va $CD$ — vatarga perpendikular diametr bo‘lsin (189- rasm). $AP = PB$ va $\smile AD = \smile DB$ ekanini isbot qilishimiz kerak.

Buning uchun $OA$ va $OB$ radiuslarni o‘tkazamiz. Hosil bo‘lgan $AOB$ — teng yonli uchburchak, chunki $OA = OB = R$.

Demak, $OP$ — teng yonli uchburchak uchidan $AB$ asosga tushirilgan balandlik. Shuningdek, u uchburchakning medianasi va bissektrisasi bo‘ladi. $OP$ — mediana bo‘lgani uchun $AP = PB$. Uning bissektrisa ekanidan $\angle AOP = \angle BOP$ ni hosil qilamiz. Bu burchaklar tiralgan yoylar bo‘lgani uchun $\smile AD = \smile DB$. Teorema isbot bo‘ldi.

189



**2-teorema.**

**Aylana vatari uning diametridan katta bo‘lmaydi.**

I s b o t. $OPB$ uchburchak – to‘g‘ri burchakli (189- rasmga q.). Bu uchburchakda $OB$ – gipotenuza, $PB$ – katet. Ma’lumki, katet gipotenuzadan katta emas, ya’ni $PB \leqslant OB$. Bundan esa $2PB \leqslant 2\,OB$ hamda $2PB = AB$ va $2OB = 2R = D$ ekanidan $AB \leqslant D$ ekanligi kelib chiqadi.

**1-natija.** *Vatarning o‘rtasidan o‘tuvchi diametr shu vatarga perpendikulardir.*

**2-natija.** *Vatarning o‘rta perpendikulari aylananing diametri bo‘ladi.*

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**412.** 1) Vatarga perpendikular diametr qanday xossaga ega?
2) Aylana vatari diametridan katta emasligini isbotlang.

**413.** Aylana chizing hamda uning bir-biriga perpendikular ikkita $AB$ va $CD$ diametrlarini o‘tkazing. $A$, $B$, $C$ va $D$ nuqtalar ajratgan aylana yoylarining gradus o‘lchovini toping.

**414.** 8 sm li vatar aylanadan 90° li yoy ajratadi. Aylana markazidan vatargacha bo‘lgan masofani toping.

**415.** 1) Aylana diametri uning radiusidan 65 mm ga katta. Shu aylana diametrini toping.
2) (*Og‘zaki.*) Ikkita nuqta orqali nechta aylana o‘tishi mumkin?

**416.** Aylana ichida berilgan nuqtadan shu nuqtada teng ikkiga bo‘linadigan vatar o‘tkazing.

**417.** Aylanada undan 90° li yoy ajratuvchi ikkita parallel vatar o‘tkazilgan. Ulardan birining uzunligi 8 sm. Vatarlar orasidagi masofani toping.

**418.** Aylananing radiusi 13 sm ga teng. Shu aylanada 10 sm ga teng vatar o‘tkazilgan. Aylana markazidan vatargacha bo‘lgan masofani toping.

**419.** 1) Aylananing markazidan boshqa nuqtada kesishuvchi ikki vatari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linmasligini isbotlang.
2) Aylananing $AA_1$ diametri $BB_1$ vatarga perpendikular. $AB$ va $AB_1$ yoylarning gradus o‘lchovi yarim aylanadan kichik va teng ekanini isbotlang.

**420.** Aylanadagi $A$ nuqtadan aylananing radiusiga teng ikki vatar $AB$ va $AC$ o‘tkazilgan. $B$ va $C$ nuqtalar to‘g‘ri chiziq bilan tutashtirilgan. Aylananing radiusi 12 sm. Aylananing markazidan $BC$ vatargacha bo‘lgan masofani toping.

**421.** Aylanada undan 90° li yoy ajratuvchi ikkita parallel vatar o‘tkazilgan. Ulardan birining uzunligi 10 sm. Vatarlar orasidagi masofani toping.

**422.** Aylanada uchta teng vatar o‘tkazilgan. Markazdan vatarlardan birigacha bo‘lgan masofa 5 sm ga teng. Markazdan qolgan ikki vatargacha bo‘lgan masofani toping.

**35- mavzu.**

# TO‘G‘RI CHIZIQ BILAN AYLANANING O‘ZARO JOYLASHISHI. AYLANAGA URINMA

**1. To‘g‘ri chiziq bilan aylananing o‘zaro joylashishi.** Bu bandda tekislikda to‘g‘ri chiziq bilan aylananing o‘zaro joylashishini ko‘rib chiqamiz. Agar to‘g‘ri chiziq aylana markazidan o‘tsa, u holda u aylanani ikki nuqtada, ya’ni bu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi diametr uchlarida kesishi ravshan.

Berilgan $l$ to‘g‘ri chiziq bilan $(O, R)$ aylana nechta umumiy nuqtaga ega, degan savolga javob berish uchun aylananing markazi $O$ dan $l$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan $d$ masofani shu aylananing $R$ radiusi bilan taqqoslash kerak.

Aylananing markazidan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular *aylana markazidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa* deb ataladi.

Bunda uch hol bo‘lishi mumkin: 1) $d > R$; 2) $d = R$; 3) $d < R$. Endi bu hollarni ko‘rib chiqamiz.

1- h o l. *Agar aylananing markazidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aylananing radiusidan katta bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq bilan aylana umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi, ya’ni kesishmaydi.*

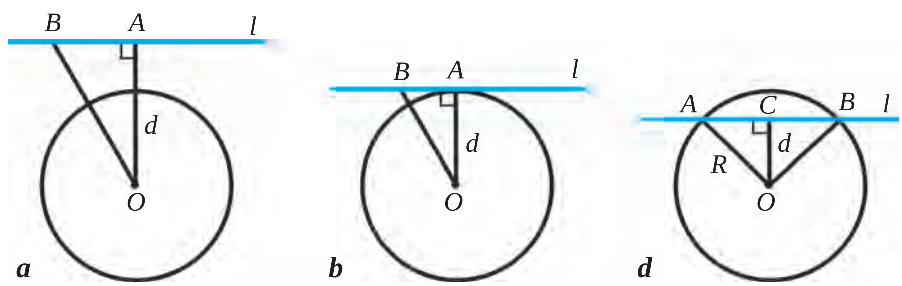
Haqiqatan ham, agar $d > R$ bo‘lsa (190-*a* rasm), $l$ to‘g‘ri chiziqning $O$ markazga eng yaqin nuqtasi (demak, bu to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasi ham) $(O, R)$ aylanaga tegishli bo‘lmaydi, chunki u markazdan aylana radiusidan katta masofada bo‘ladi. Demak, $l$ to‘g‘ri chiziq va aylana umumiy nuqtaga ega emas.

2- h o l. *Agar aylananing markazidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa aylananing radiusiga teng bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq bilan aylana bitta va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘ladi.*

Haqiqatan ham, agar $d = R$ bo‘lsa (190-*b* rasm), $l$ to‘g‘ri chiziqning $O$ markazga eng yaqin nuqtasi aylananing radiusiga teng masofada bo‘ladi, va demak, u nuqta ($A$) aylanaga ham tegishli bo‘ladi. $l$ to‘g‘ri chiziqning $A$ dan farqli $B$ nuqtasi aylanadan tashqarida yotadi, chunki $OB$ masofa $OA$ radiusdan katta bo‘ladi ($OB > OA$). Demak, $l$ to‘g‘ri chiziq va aylana bitta umymiy $A$ nuqtaga ega.

3- h o l. *Aylananing markazidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aylananing radiusidan kichik bo‘lsa* ($d < R$), *u holda to‘g‘ri chiziq bilan aylana ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘ladi.*

**190**




$OA = d > R$ $\quad$ $OA = d = R$ $\quad$ $OC = d < R$

To‘g‘ri chiziqning aylana ichidagi qismi vatar bo‘ladi (190-*d* rasm). Bu holda to‘g‘ri chiziq aylanaga nisbatan *kesuvchi* deyiladi.

Vatarning uzunligi $AB$ ni aylananing radiusi va markazidan to‘g‘ri chiziqqacha masofa $d$ orqali ifodalash mumkin:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}\ .$$

Bu tenglikni o‘zingiz isbot qiling.

**Xulosa.** ***To‘g‘ri chiziq bilan aylana umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasligi, bir yoki ikki umumiy nuqtaga ega bo‘lishi mumkin.***

### 2. Aylanaga urinma.

**Ta’rif.** *Aylana bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziq shu aylanaga* ***urinma*** *deyiladi, ularning umumiy nuqtasi esa* ***urinish nuqtasi*** *deyiladi.*

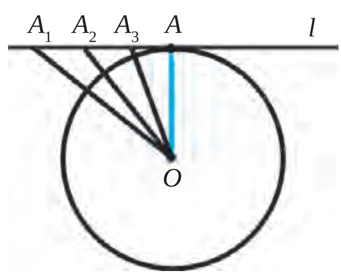
190-*b* rasmda $l$ to‘g‘ri chiziq $O$ markazli aylanaga urinma, $A$ — urinish nuqtasi. Aylana $l$ to‘g‘ri chiziqqa urinadi, deyish ham mumkin.

Urinmaning xossasi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

**1-teorema.**

**Aylanaga urinma shu aylananing urinish nuqtasiga o‘tkazilgan radiusga perpendikulardir.**

191




Isbot. $l$ to‘g‘ri chiziq aylanaga $A$ nuqtada o‘tkazilgan urinma bo‘lsin (191- rasm). $R = OA$ ning $l$ ga perpendikular bo‘lishini isbot qilamiz. Shartga ko‘ra, $l$ to‘g‘ri chiziqning $A$ nuqtasidan boshqa hamma nuqtalari aylanadan tashqarida yotadi. Shuning uchun bu to‘g‘ri chiziqning $A$ dan boshqa har qanday $A_1$ nuqtasi uchun $OA_1 > OA$. Demak, $OA$ masofa $O$ nuqtadan $l$ to‘g‘ri chiziqning nuqtalarigacha bo‘lgan masofalarning eng qisqasidir. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha eng qisqa masofa esa shu to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikular bo‘ladi. Bundan, $OA \perp l$ ekani kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Endi urinmaning xossasiga teskari teoremani isbotlaymiz (urinmaning alomati).

**2-teorema.**

**Radiusga perpendikular va uning aylanada yotgan uchidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq shu aylanaga urinmadir.**

Isbot. Agar aylana markazidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aylana radiusiga teng ($d = R$) bo‘lsa (190-*b* rasmga q.), u holda $A$ nuqta aylanaga tegishli va demak, u to‘g‘ri chiziq bilan aylananing umumiy nuqtasi bo‘ladi. $l$ to‘g‘ri chiziqning $A$ nuqtadan farqli ixtiyoriy $B$ nuqtasi aylanadan tashqarida yotadi, chunki $OB$ masofa $OA$ radiusdan katta bo‘ladi: $OB > OA$. Shartga ko‘ra, $OA \perp l$. Demak, $A$ nuqta $l$ to‘g‘ri chiziq bilan aylananing yagona umumiy nuqtasidir. Ta’rifga ko‘ra, $l$ to‘g‘ri chiziq aylanaga urinma bo‘ladi.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**423.** 1) Qanday to‘g‘ri chiziq aylanaga urinma to‘g‘ri chiziq deyiladi?
2) Urinmaning qanday xossasini va alomatini bilasiz?

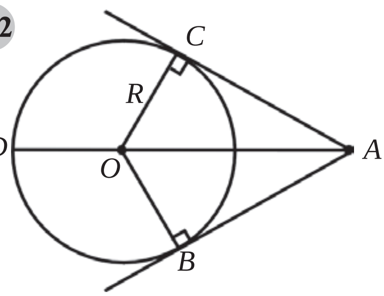
**424.** $d$ — $R$ radiusli aylananing markazidan $l$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa. Agar: 1) $R=8$ sm, $d=6$ sm; 2) $R=10$ sm, $d=8{,}4$ sm; 3) $R=14{,}4$ dm, $d=7{,}4$ dm; 4) $R=1{,}6$ dm, $d=24$ sm; 5) $R=4$ sm, $d=40$ mm; 6) $R=60$ sm, $d=7$ dm bo‘lsa, $l$ to‘g‘ri chiziq bilan aylana o‘zaro qanday joylashgan bo‘ladi?

**425.** 1) Berilgan $(O, R)$ aylanaga berilgan $A$ nuqtadan o‘tuvchi nechta urinma o‘tkazish mumkin?
2) Berilgan aylanaga berilgan nuqtadan o‘tuvchi urinma yasang.

**426.** $ABCD$ kvadratning tomoni 8 sm ga va markazi $A$ nuqtada bo‘lgan aylananing radiusi 7 sm ga teng. $AB$, $BC$, $CD$ va $BD$ to‘g‘ri chiziqlardan qaysi biri shu aylanaga nisbatan kesuvchi bo‘ladi?

**427.** Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan unga ikkita urinma o‘tkazilsa, ularning o‘sha nuqtadan urinish nuqtalarigacha bo‘lgan kesmalari teng bo‘ladi. Shuni isbotlang.

192




I s b o t . $A$ nuqtadan markazi $O$ nuqtada, aylanaga $B$ va $C$ nuqtalarda urinuvchi ikkita urinmani ko‘rib chiqamiz (192- rasm). $AOB$ va $AOC$ uchburchaklar — to‘g‘ri burchakli hamda ular teng (kateti va gipotenuzasiga ko‘ra), chunki $AO$ gipotenuza umumiy va $OB = OC = R$. Uchburchaklarning tengligidan $AB = AC$ ekani kelib chiqadi.

**428.** Bir aylanaga o‘tkazilgan $AB$ va $AC$ urinmalar orasidagi $BAC$ burchak 60°, $BAC$ siniq chiziqning uzunligi 1 m. $B$ va $C$ urinish nuqtalari orasidagi masofani toping.

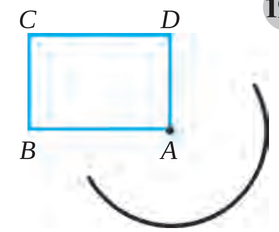
**429.** Radiusi $R$ bo‘lgan aylanadan tashqaridagi nuqtadan shu aylanaga o‘zaro perpendikular ikki urinma o‘tkazilgan. Har qaysi urinmaning uzunligini toping.

**430.** To‘g‘ri burchakli $ACB$ ($\angle C = 90°$) uchburchakda $AB = 10$ sm, $\angle ABC = 30°$. Markazi $A$ nuqtada bo‘lgan aylana o‘tkazilgan. Bu aylananing radiusi qanday bo‘lganda aylana: 1) $BC$ to‘g‘ri chiziqqa urinadi; 2) $BC$ to‘g‘ri chiziq bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi; 3) $BC$ to‘g‘ri chiziq bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo‘ladi?

**431.** $A$ nuqtadan aylana markazigacha bo‘lgan masofa radiusdan kichik. $A$ nuqta orqali o‘tuvchi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq berilgan aylanaga nisbatan kesuvchi bo‘lishini isbot qiling.

**432.** $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan, unda $AB = 16$ sm, $AD = 12$ sm (193-rasm). $AC$, $BC$, $CD$ va $BD$ to‘g‘ri chiziqlardan qaysi biri radiusi 12 sm li $A$ markazli aylanaga urinma bo‘ladi?

Y e c h i l i s h i. Aylana bilan faqat ... nuqtaga ega bo‘lgan ... shu ... urinma deyiladi. Agar ... markazidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa aylana ... teng bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq bilan aylana faqat bitta ... nuqtaga ega bo‘ladi. Bu shartlar ... to‘g‘ri chiziq uchun bajariladi, demak, ... to‘g‘ri chiziq berilgan ... urinma bo‘ladi.



193

J a v o b: ... to‘g‘ri chiziq urinma bo‘ladi.

**433.** Bir aylanaga o‘tkazilgan $AB$ va $AC$ urinmalar orasidagi $BAC$ burchak $60°$, $BAC$ siniq chiziqning uzunligi 22,5 dm. $B$ va $C$ urinish nuqtalari orasidagi masofani toping.

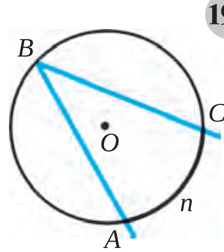
**434.** To‘g‘ri burchakli $ACB$ ($\angle C = 90°$) uchburchakning katetlari $AC = 3$ sm va $BC = 4$ sm. Markazi $C$ nuqtada bo‘lgan radiusi 2,4 sm ga teng aylana o‘tkazilgan. Bu aylana bilan $AB$ to‘g‘ri chiziq o‘zaro qanday holatda bo‘ladi?

**435.** $O$ markazli va radiusi 8 sm bo‘lgan aylanaga $A$ nuqtadan $AB$ urinma o‘tkazilgan. $A$ va $B$ nuqtalar orasidagi masofa 16 sm ga teng. $AOB$ burchakni toping.

## 36- mavzu. AYLANAGA ICHKI CHIZILGAN BURCHAK

**T a’ r i f.** *Uchi aylanada yotuvchi, tomonlari esa shu aylanani kesib o‘tuvchi burchak* ***aylanaga ichki chizilgan burchak*** *deyiladi.*

194- rasmda $ABC$ burchak aylanaga ichki chizilgan, $AnC$ yoy shu burchakning ichiga joylashgan. Bunday holda *ichki chizilgan $ABC$ burchak $AnC$ yoyga tiralgan,* deb ham aytiladi.



194

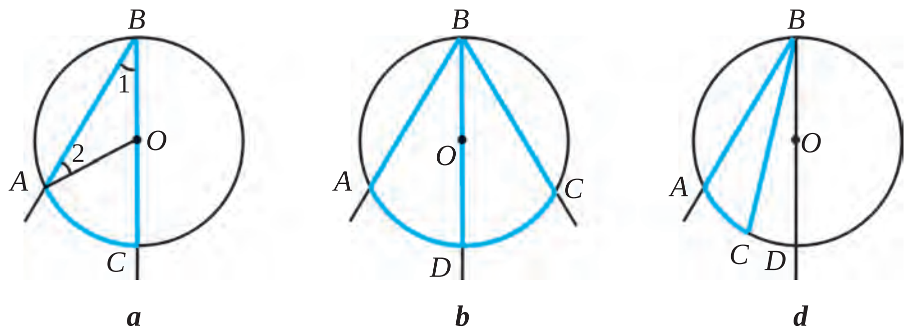
**T e o r e m a.**

**Aylanaga ichki chizilgan burchak o‘zi tiralgan yoyning yarmi bilan o‘lchanadi:**

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

I s b o t. $\angle ABC$ — $O$ markazli aylananing $AC$ yoyiga tiralgan ichki chizilgan burchak bo‘lsin (195- rasm). Aylana markazining shu ichki chizilgan burchakka nisbatan joylashishining uch holini ko‘rib chiqamiz.

**195**




1-h o l. *Aylana markazi ichki chizilgan burchakning tomonlaridan biri, masalan, BC tomonda yotadi* (195-*a* rasm). $OA$ radiusni o‘tkazamiz va $AOB$ uchburchakni qaraymiz. U teng yonli, chunki $OA = OB = R$. Demak, $\angle OBA = \angle OAB$ (teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklari bo‘lgani uchun). Ammo $AOC$ burchak $BOA$ uchburchakning tashqi burchagidir. Uchburchak tashqi burchagining xossasiga ko‘ra: $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$ yoki $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Ammo $AOC$ — markaziy burchak, uning kattaligi shu burchakka mos $AC$ yoyning burchak kattaligiga teng (32-mavzu). Bu holda $AC$ yoy yarim aylanadan kichik, shuning uchun markaziy burchak xossasiga ko‘ra: $\angle AOC = \cup AC$ (2).

(1) va (2) tengliklardan ega bo‘lamiz: $2\angle ABC = \cup AC$, ya’ni $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC$.

Teorema 1- hol uchun isbotlandi.

2-h o l. *Aylananing markazi O ichki chizilgan burchak tomonlari orasida yotadi.* $BO$ nurni o‘tkazamiz, u $AC$ yoyni biror $D$ nuqtada kesadi (195-*b* rasm). $D$ nuqta $AC$ yoyni ikkita $\cup AD$ va $\cup DC$ yoyga bo‘ladi. Demak, isbot qilinganga ko‘ra (1- hol): $\angle ABD = \frac{1}{2}\cup AD$ va $\angle DBC = \frac{1}{2}\cup DC$. Bu tengliklarni hadma-had qo‘shib, hosil qilamiz:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}\cup AD + \frac{1}{2}\cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2}\cup AC.$$

3-h o l. *Aylananing markazi O ichki chizilgan burchakdan tashqarida yotadi.* Bu holning isbotini 195-*d* rasmdan foydalanib, o‘zingiz mustaqil bajaring.

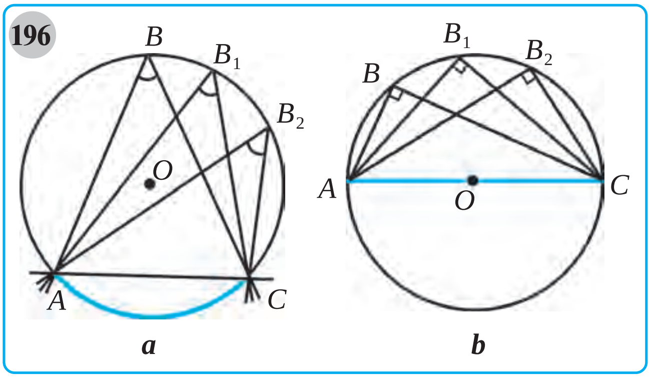
**1-n a t i j a.** *Bir yoyga tiralgan hamma ichki chizilgan burchaklar o‘zaro tengdir* (196-*a* rasm):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \frac{1}{2}\cup AC.$$

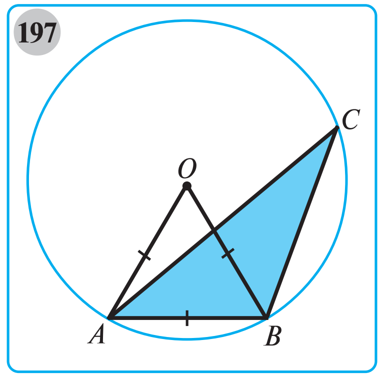
**2-n a t i j a.** *Diametrga (yarim aylanaga) tiralgan hamma ichki chizilgan burchaklar to‘g‘ri burchakdir* (196-*b* rasm):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = 90^\circ.$$

**M a s a l a.** Aylananing radiusiga teng vatar o‘tkazilgan. Shu vatar: 1) aylana markazidan; 2) berilgan vatar uchlaridan farqli aylananing ixtiyoriy nuqtasidan qanday burchak ostida ko‘rinadi?



196



197

Y e c h i l i s h i. $AB$ — $O$ markazli aylananing radiusiga teng vatar bo‘lsin (197- rasm). U holda $AOB$ uchburchak — teng tomonli, va demak, markaziy burchak (aylana markazidan $AB$ vatar ko‘rinadigan burchak) 60° ga teng. $A$ va $B$ nuqtalardan farqli aylananing ixtiyoriy $C$ nuqtasidan ichki chizilgan $ACB$ burchak ($C$ nuqtadan $AB$ vatar ko‘rinadigan burchak) markaziy burchakning yarmiga, ya’ni 30° ga teng.

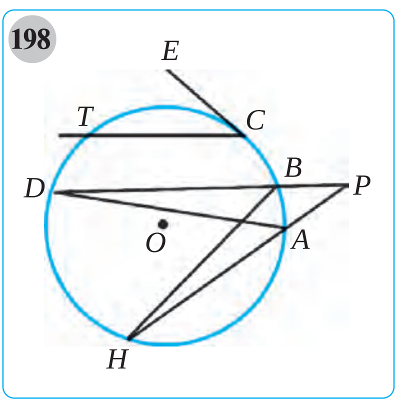
J a v o b: 1) 60°; 2) 30°.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**436.** 1) Qanday burchak aylanaga ichki chizilgan burchak deyiladi?
2) Ichki chizilgan burchak qanday o‘lchanadi?
3) Yarim aylanaga tiralgan ichki chizilgan burchak nimaga teng?

**437.** $AB$ va $AC$ — aylana vatarlari, $\angle BAC = 70°$, $\smile AB = 120°$. $AC$ yoyning gradus miqdorini toping.

**438.** $HAD$, $HBD$, $TCE$ va $HPD$ burchaklardan qaysi biri ichki chizilgan burchak bo‘ladi (198- rasm)? Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.



198

Y e c h i l i s h i. Ichki chizilgan burchak deb, uchi ... yotadigan, tomonlari esa aylanani ... burchakka aytiladi.

$A$ nuqta aylanada yotadi, $HAD$ burchakning tomonlari aylanani ... . Demak, ... burchak ichki ... .

$B$ nuqta ... yotadi, $HBD$ burchakning tomonlari aylanani ... . Demak, ... burchak ... .

$C$ nuqta ..., $TCE$ burchakning $CE$ tomoni aylanani ... . Demak, $TCE$ ichki ... burchak emas.

$P$ nuqta ..., demak, $HPD$ burchak ichki ... emas.

J a v o b: ... va ... ichki chizilgan burchaklardir.

**439.** Aylanada $AB$ diametr va $AC$ vatar o‘tkazilgan. Agar $AC$ va $CB$ yoylarning gradus o‘lchovi 7 : 2 kabi nisbatda bo‘lsa, $BAC$ burchakni toping.

**440.** 199- rasmda $O$ nuqta – aylana markazi, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$ ni toping. Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

Y e c h i l i s h i. $AOB$ burchak berilgan aylananing ... burchagi bo‘ladi va ...° ga teng. Demak, $\smile ADB = ...°$. $ACB$ burchak ... chizilgan burchak bo‘ladi va ... yoyga tiraladi, shuning uchun $\angle ACB = \frac{1}{2}\smile ... = ...°$.

J a v o b: $\angle ACB = ...°$.

**441.** $AB$ va $BC$ – markazi $O$ nuqtada bo‘lgan aylananing vatarlari, $\angle ABC = 30°$. Agar aylana radiusi 10 sm ga teng bo‘lsa, $AC$ vatarning uzunligini toping.

**442.** 200- rasmda $\smile CAB = 130°$. $\angle CAB$ ni toping.

Y e c h i l i s h i. $CAB$ burchak aylanaga **ichki** chizilgan burchak bo‘ladi va $\smile \boldsymbol{CDB}$ yoyga tiralgan. $\smile CDB = 360° - \smile \boldsymbol{CAB} = 360° - \mathbf{130°} = \mathbf{230°}$,

$$\angle CAB = \frac{1}{2}\smile \boldsymbol{CDB} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{230°} = \mathbf{115°}.$$

J a v o b: $\angle CAB = \mathbf{115°}$.

**443.** $A$, $B$ va $C$ nuqtalar markazi $O$ nuqtada bo‘lgan aylanada yotadi. Agar: 1) $\angle ABC = 70°$; 2) $\angle ABC = 180°$; 3) $\angle ABC = 210°$ bo‘lsa, aylananing markazi $AC$ kesmada yotadimi?

**444.** Vatar aylanani ikki yoyga bo‘ladi. Agar bu yoylar burchak kattaliklarining nisbati: 1) $5:4$; 2) $7:3$ kabi bo‘lsa, vatar aylana nuqtasidan qanday burchak ostida ko‘rinadi?

**445.** 201- rasmda $\angle APE = 46°$, $\angle BCE = 34°$. $\angle AEP$ ni toping.

Y e c h i l i s h i. $PAB$ va $BCP$ ichki chizilgan burchaklar bitta $BP$ ..., demak, $\angle PAB = \angle ... = ...$ . $AEP$ uchburchakdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

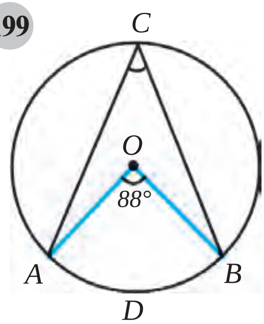
$$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ... .$$

J a v o b: $\angle AEP = ...$ .

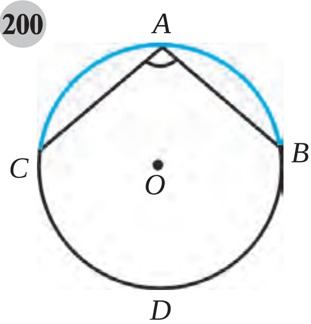
**446.** Aylana beshta teng yoyga bo‘lingan: $\smile AB = \smile BC = \smile CD = \smile DE = \smile EA$. Shu aylanaga ichki chizilgan $BAC$, $BAD$, $BAE$, $CAE$ va $DAE$ burchaklarning kattaliklarini toping.

**447.** Aylanani $3:5$ nisbatda bo‘luvchi vatarning biror uchidan o‘tkazilgan diametr bilan tashkil etgan burchakni toping.

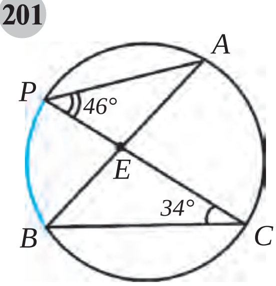
**199**




**200**

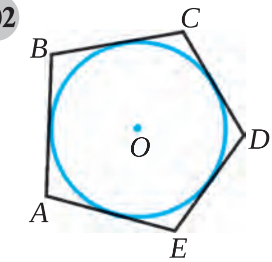



**201**



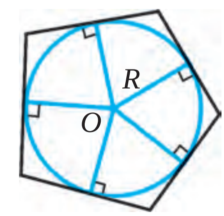
## 37- mavzu. ICHKI CHIZILGAN AYLANA

### 1. Aylanaga tashqi chizilgan ko‘pburchaklar.




**Ta’rif.** *Agar ko‘pburchakning hamma tomonlari aylanaga urinsa, ko‘pburchak **aylanaga tashqi chizilgan** deyiladi, aylana esa shu ko‘pburchakka **ichki chizilgan aylana** deyiladi* (202- rasm).

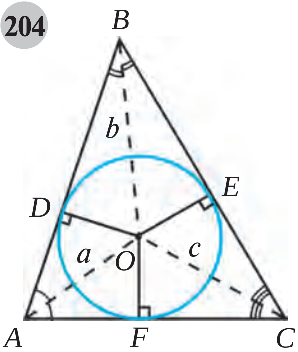
Ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana markazidan uning tomonlarigacha bo‘lgan masofa aylana radiusiga teng. Demak, uning markazi ko‘pburchakning hamma tomonlaridan teng masofada joylashgan (203- rasm).




### 2. Uchburchakka ichki chizilgan aylana.

**Teorema.**

**Har qanday uchburchakka ichki aylana chizish mumkin.**



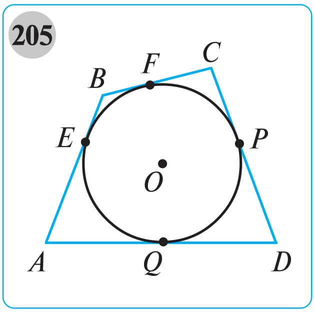

I s b o t . $ABC$ ucburchakni ko‘rib chiqamiz. Uning $A$ va $B$ uchlaridan mos ravishda $a$ va $b$ bissektrisalarini o‘tkazamiz (204- rasm). Ular biror $O$ nuqtada kesishadi. $O$ nuqta – ichki chizilgan aylananing markazi ekanini isbotlaymiz. Buning uchun $ABC$ uchburchakning tomonlariga tushirilgan $OD$, $OF$ va $OE$ perpendikularlarning tengligini yoki $O$ nuqta uchburchak tomonlaridan teng uzoqlikda yotganini ko‘rsatish yetarlidir. Haqiqatan ham, $O \in a$ bo‘lgani uchun, $OD = OF$ bo‘ladi, shuningdek, $O \in b$ bo‘lgani uchun $OD = OE$ bo‘ladi. Demak, $O$ nuqta $ABC$ uchburchakning hamma tomonlaridan teng uzoqlikda yotadi. Shuning uchun, $OF = OE$ bo‘ladi, bundan $O$ nuqta – $C$ burchakning bissektrisasi $c$ da ham yotishi kelib chiqadi. Shunday qilib, uchala bissektrisa bitta $O$ nuqtada kesishar ekan. Markazi $O$ nuqtada va $R = OD = OF = OE$ radiusli aylana izlanayotgan ichki chizilgan yagona aylana bo‘ladi. Bissektrisalar yolg‘iz bitta nuqtada kesishgani uchun bundan boshqa ichki chizilgan aylana bo‘lishi mumkin emas.

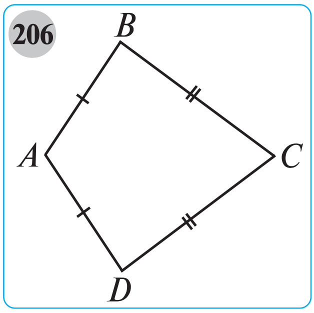
*Har qanday uchburchakka faqat bitta ichki aylana chizish mumkin. Bu aylananing markazi uchburchak bissektrisalari kesishgan nuqta bo‘ladi.*

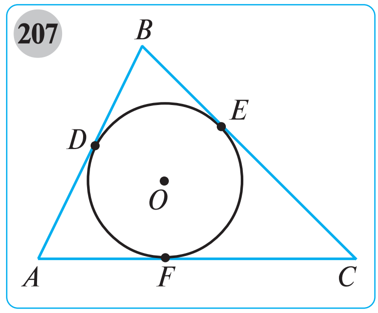
### 3. Aylanaga tashqi chizilgan to‘rtburchak.

**Teorema.**

**Tashqi chizilgan to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlarining yig‘indilari o‘zaro teng.**




I s b o t. $ABCD$ to‘rtburchakka ichki chizilgan aylana uning tomonlariga mos ravishda $E$, $F$, $P$ va $Q$ nuqtalarda urinadi, deylik (205- rasm). $AB + CD = AD + BC$ ekanini isbotlaymiz. U holda bir nuqtadan aylanaga o‘tkazilgan urinma kesmalarining xossasiga ko‘ra quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$AE = AQ, \quad BE = BF, \quad CP = CF, \quad DP = DQ.$$

Bu tengliklarni hadma-had qo‘shib, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$AB + CD = AD + BC.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

*Agar qavariq to‘rtburchak qarama-qarshi tomonlarining yig‘indilari teng bo‘lsa, u holda bu to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin* (206- rasm).

**M a s a l a.** $ABC$ uchburchakka ichki chizilgan aylana $AC$ tomonni urinish nuqtasida $AF = 5$ sm va $FC = 6$ sm li ikkita kesmaga bo‘ladi. $BC = 10$ sm ekani ma’lum. $ABC$ uchburchakning perimetrini toping.

Y e c h i l i s h i. $D$, $E$ va $F$ — $ABC$ uchburchakka ichki chizilgan aylananing urinish nuqtalari bo‘lsin (207- rasm). U holda $FC = EC = 6$ sm, va demak, $BE = BC - EC = 10 - 6 = 4$ (sm). $BD = BE = 4$ sm, $AD = AF = 5$ sm. Bulardan $AB = AD + BD = 5 + 4 = 9$ (sm) va $AC = AF + FC = 5 + 6 = 11$ (sm) kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan uchburchakning perimetri:

$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 9 + 10 + 11 = 30 \text{ (sm)}.$$

J a v o b: $P_{ABC} = 30$ sm.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**448.** 1) Qanday aylana ko‘pburchakka ichki chizilgan deyiladi?
2) Har qanday uchburchakka ichki aylana chizish mumkinmi?
3) Ichki chizilgan aylananing markazi qayerda bo‘ladi?
4) Har qanday qavariq to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkinmi?

**449.** (*Og‘zaki.*) Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi uchburchakdan tashqarida bo‘lishi mumkinmi?

**450.** Biror uchburchak yasang va unga ichki aylana chizing.

**451.** Teng tomonli uchburchakning balandligi $h$ ga teng. Unga ichki chizilgan aylananing radiusi $r = \frac{h}{3}$ ga teng ekanini isbotlang.

**452.** Agar teng tomonli uchburchakning:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) balandligi: | 1) 30 sm; | 2) 4,2 m; | 3) 5 sm; | 4) 3,6 sm; | 5) 11,1 sm; |
| b) medianasi: | 1) 21 sm; | 2) 0,9 m; | 3) 7 dm; | 4) 5,4 sm; | 5) 37,2 sm; |
| d) bissektrisasi: | 1) 54 mm; | 2) 8 m; | 3) 72 sm; | 4) 9,6 sm | |

bo‘lsa, unga ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

**453.** Teng yonli uchburchakka ichki chizilgan aylana uchburchak yon tomonlaridan birini urinish nuqtasida uchidan boshlab hisoblaganda: 1) 8 sm va 5 sm li; 2) 14 sm va 11 sm li kesmalarga ajratadi. Shu uchburchakning perimetrini toping.

**454.** Teng yonli uchburchakning asosi 10 sm ga teng. Unga ichki chizilgan aylana yon tomonlaridan birini urinish nuqtasida asosiga qarama-qarshi uchidan boshlab hisoblaganda 7 : 5 nisbatda bo‘ladi. Shu uchburchakning perimetrini toping.

**455.** 1) To‘g‘ri to‘rtburchak; 2) parallelogramm; 3) romb; 4) kvadrat; 5) deltoidga (206- rasm) ichki aylana chizish mumkinmi? Javobingizni asoslang.

**456.** Umumiy asosli ikkita teng yonli uchburchak asosga nisbatan turli tomonda joylashgan. Ulardan hosil bo‘lgan qavariq to‘rtburchakka ichki aylana chizish mumkin? Javobingizni asoslang.

**457.** Aylanaga trapetsiya tashqi chizilgan bo‘lib, uning perimetri 18 sm ga teng. Shu trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

**458.** Ichki aylana chizish mumkin bo‘lgan to‘rtburchakning ketma-ket uchta tomonlari 6 sm, 8 sm va 9 sm ga teng. Shu to‘rtburchakning to‘rtinchi tomoni va perimetrini toping.

**459.** Perimetri 56 sm ga teng bo‘lgan trapetsiyaga aylana ichki chizilgan. Trapetsiyaning ketma-ket uchta tomoni nisbati 2 : 7 : 12 kabi. Shu trapetsiyaning tomonlarini toping.

**460.** Katetlari $a$ va $b$, gipotenuzasi $c$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi $r = \frac{a + b - c}{2}$, shu uchburchakning perimetri esa $P = 2(c + r)$ formula bilan hisoblanadi. Shuni isbotlang.

**461.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 40 sm va 30 sm; 2) 9 dm va 40 dm; 3) 0,5 m va 1,2 m; 4) 0,7 dm va 24 sm; 5) 0,9 sm va 1,2 sm; 6) 12 sm va 16 sm ga teng. Shu uchburchakning perimetri va unga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

**462.** Teng yonli uchburchakka ichki chizilgan aylana yon tomonlaridan birini urinish nuqtasida uchidan boshlab hisoblaganda: 1) 10 sm va 7 sm li; 2) 9 sm va 6 sm li kesmalarga ajratadi. Shu uchburchakning perimetrini toping.

**463.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 5 sm va 12 sm; 2) 1,5 dm va 20 sm; 3) 14 sm va 48 sm ga teng. Shu uchburchakning perimetri va ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

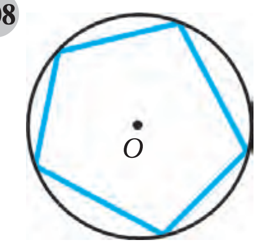
**464.** Aylanaga trapetsiya tashqi chizilgan bo‘lib, uning perimetri 24 sm ga teng. Shu trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

**465.** Aylanaga tashqi chizish mumkin bo‘lgan to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari 7 sm va 10 sm ga teng. Shu ma’lumotlarga ko‘ra to‘rtburchakning perimetrini topish mumkinmi?

## 38- mavzu. TASHQI CHIZILGAN AYLANA

### 1. Aylanaga tashqi chizilgan ko'pburchaklar.

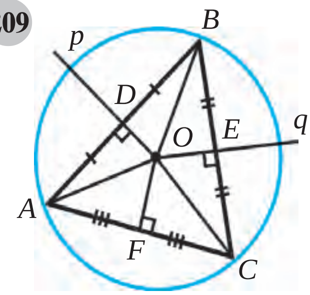
**Ta'rif.** *Agar ko'pburchakning hamma uchlari aylanada yotsa, bunday ko'pburchak* ***aylanaga ichki chizilgan*** *deyiladi, aylana esa shu ko'pburchakka* ***tashqi chizilgan aylana*** *deyiladi* (208- rasm).

208



### 2. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana.

**Teorema.**

**Har qanday uchburchakka tashqi aylana chizish mumkin.**

209


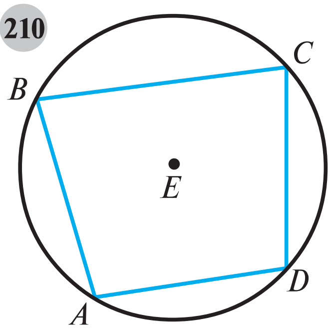

Isbot. $ABC$ uchburchak berilgan bo'lsin. Uning $AB$ va $BC$ tomonlariga $p$ va $q$ o'rta perpendikularlar o'tkazamiz (209- rasm). Ular biror $O$ nuqtada kesishadi (kesishuvchi to'g'ri chiziqlarga perpendikular to'g'ri chiziqlar kesishadi). $O \in p$ bo'lgani uchun $OA = OB$ bo'ladi, shuningdek, $O \in q$ bo'lgani uchun, $OB = OC$ bo'ladi. Shuning uchun $OA = OC$, ya'ni $AC$ tomonning o'rta perpendikulari ham $O$ nuqtadan o'tadi. Shunday qilib, $O$ nuqta $ABC$ uchburchakning uchala uchidan teng uzoqlashgan bo'ladi: $OA = OB = OC$. Demak, $ABC$ uchburchakka markazi $O$ nuqtada va radiusi $R = OA$ bo'lgan tashqi aylana chizish mumkin. O'rta perpendikularlar yagona bitta nuqtada kesishgani uchun bundan boshqa tashqi chizilgan aylana bo'lishi mumkin emas.

*Har qanday uchburchakka faqat bitta tashqi aylana chizish mumkin. Bu aylananing markazi uchburchak tomonlarining o'rta perpendikularlarining kesishish nuqtasida bo'ladi.*

### 3. To'rtburchakka tashqi chizilgan aylana.

**Teorema.**

**Ichki chizilgan to'rtburchak qarama-qarshi burchaklarining yig'indisi 180° ga teng.**

210



Isbot. Faraz qilaylik, $ABCD$ to'rtburchak aylanaga ichki chizilgan bo'lsin (210- rasm). $\angle A + \angle C = 180°$ ekanini isbotlaymiz. Haqiqatan ham, bu burchaklar ($A$ va $C$) ichki chizilgan va ularga tiralgan ($BCD$ va $BAD$) yoyning yarmi bilan o'lchanadi, ya'ni:

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD \quad \text{va} \quad \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD.$$

Demak, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \smile BCD + \frac{1}{2} \smile DAB = \frac{1}{2} (\smile BCD + \smile DAB).$

Ammo $BCD$ va $DAB$ yoylarning yig'indisi aylanadir. Demak, $A$ va $C$ burchaklar kattaliklarining yig'indisi yarim aylananing burchak kattaligiga teng, ya'ni:

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\smile BCD + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ, \text{ yoki } \angle A + \angle C = 180^\circ.$$

Xuddi shunga o'xshash, $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ekani isbotlanadi.

*Agar to'rtburchak qarama-qarshi burchaklarining yig'indilari 180° ga teng bo'lsa, u holda bu to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.*

**1-masala.** Uchburchakning ikkita burchagi 70° va 60° ga teng. Uning tomonlari tashqi chizilgan aylana markazidan qanday burchak ostida ko'rinadi?

Yechilishi. Uchburchakning uchinchi burchagi $180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$.

Uchburchakning burchaklari ichki chizilgan burchaklar, izlanayotgan burchaklar esa markaziy burchak bo'ladi. Shuning uchun ular, mos ravishda, 140°, 120° va 100° ga teng bo'ladi.

Javob: 140°, 120°, 100°.

**2-masala.** Ketma-ket olingan burchaklarining nisbati: 1) 3, 3, 4, 4; 2) 2, 5, 3, 4 sonlarning nisbati kabi bo'lgan to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinmi?

Yechilishi. Burchaklar uchun umumiy o'lchov $x$ bo'lsin.

1) $3x + 4x = 3x + 4x$, ya'ni $7x = 7x$ — o'rinli. Shuning uchun ushbu shartda to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.

2) $2x + 3x = 5x + 4x$, ya'ni $5x \neq 9x$. Shuning uchun ushbu shartda to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin emas.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**466.** 1) Qanday ko'pburchak aylanaga ichki chizilgan deyiladi?
2) Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi qayerda bo'ladi?
3) Har qanday uchburchakka tashqi aylana chizish mumkinmi?
4) Har qanday qavariq to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinmi?

**467.** Berilgan uchburchakka tashqi aylana chizing.

**468.** (*Og'zaki.*) Uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi: 1) uchburchak ichida; 2) uchburchakning tomonida; 3) uchburchakdan tashqarida bo'lishi mumkinmi? Misollar keltiring.

**469.** a) $O$ markazli aylana to'g'ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan. $O$ nuqta gipotenuzaning o'rtasi ekanini isbotlang.
b) Gipotenuzasi: 1) 25 sm; 2) 41 dm; 3) 130 mm; 4) 61 sm ga teng bo'lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusini toping.

**470.** Yon tomoni 50° li yoyni tortib turgan aylanaga ichki chizilgan teng yonli uchburchakning burchaklarini toping.

**471.** Uchburchakning burchaklari 40°, 55° va 85° ga teng. Uchburchakning qaysi tomoni tashqi chizilgan aylana markazidan uzoqda joylashgan?

**472.** Agar teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga o‘tkazilgan balandlik: 1) 12 sm; 2) 1,5 dm; 3) 32 mm ga teng bo‘lsa, shu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusini toping.

**473.** 1) To‘g‘ri to‘rtburchak; 2) parallelogramm; 3) romb; 4) kvadrat; 5) teng yonli trapetsiyaga tashqi aylana chizish mumkinmi? Javobingizni asoslang.

**474.** Teng yonli uchburchakning yon tomoni 2 sm, uchidagi burchagi esa 120° ga teng. Tashqi chizilgan aylananing diametrini toping.

**475.** Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakning ikkita burchagi 65° va 80° ga teng. To‘rtburchakning qolgan ikki burchagini toping.

**476.** Teng tomonli uchburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalarning markazlari ustma-ust tushadi. Bunda tashqi chizilgan aylananing radiusi ichki chizilgan aylana radiusidan ikki marta katta bo‘lishini isbotlang.

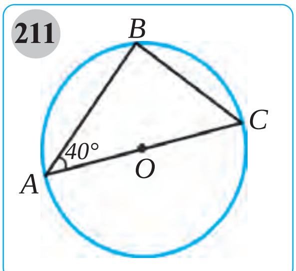
**477.** Teng yonli trapetsiyaning yon tomoni kichik asosiga teng, asosidagi burchak 60° ga teng. Shu trapetsiyaga tashqi chizilgan aylananing markazi qayerda joylashgan?

**478.** Aylananing radiusi $R$ ga teng. Shu aylanaga ichki chizilgan teng tomonli uchburchak medianasining uzunligini toping.

**479.** Tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning tomonida yotsa, u qanday uchburchak bo‘ladi?

**480.** $ABC$ uchburchakda $\angle A = 40°$. Agar unga tashqi chizilgan aylananing markazi $AC$ tomonda yotsa, uchburchakning qolgan burchaklarini toping (211- rasm). Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

211




Y e c h i l i s h i. $A$, $B$ va ... nuqtalar berilgan ... yotadi, uning markazi $O$ nuqta esa ... kesmada yotadi, u holda $AC$ — berilgan aylananing ..., $B$ burchak esa bu aylanaga ... va u ... tiralgan. Shuning uchun $\angle B = ...$, $\angle C = 180° - (40° + ...) = ... - ... = ...$ .

J a v o b: $\angle B = ...$, $\angle C = ...$ .

**481.** Aylananing radiusi: 1) 10 sm; 2) 2,4 sm. Shu aylanaga ichki chizilgan teng tomonli uchburchak medianasining uzunligini toping.

**482.** To‘g‘ri burchakli $ABC$ ($\angle B = 90°$) uchburchakka tashqi aylana chizilgan. Agar: 1) $AB = 12$ sm, $BC = 16$ sm; 2) $AB = 20$ sm, $\angle C = 30°$; 3) $BC = 8$ sm, $\angle C = 60°$ bo‘lsa, shu aylananing radiusini toping.

**483.** Ketma-ket olingan burchaklarining nisbati: 1) 3, 5, 3, 1; 2) 4, 7, 6, 1 sonlarning nisbati kabi bo‘lgan to‘rtburchakka tashqi aylana chizish mumkinmi?

**484.** To‘g‘ri to‘rtburchakning kichik tomoni 6 sm, diagonallari orasidagi burchak esa 60° ga teng. Tashqi chizilgan aylana radiusini toping.

**485.** Aylanaga ichki chizilgan to‘rtburchakning ikkita burchagi 70° va 95° ga teng. To‘rtburchakning qolgan ikki burchagini toping.

**39- mavzu.** 

# AYLANANI KESUVCHI TO‘G‘RI CHIZIQLARDAN HOSIL BO‘LGAN BURCHAKLARNI O‘LCHASH

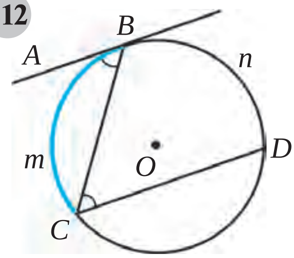
## 1. Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak.

**1- teorema.**

**Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak o‘z ichiga olgan yoyning yarmi bilan o‘lchanadi.**

Isbot. $AB$ urinma va $BC$ vatar bo‘lsin. $\angle ABC = 0{,}5 \smile BmC$ ekanini isbot qilamiz (212- rasm). Buning uchun $C$ uchidan $CD \parallel AB$ ni o‘tkazsak, $\angle ABC = \angle BCD$, chunki ular ichki almashinuvchi burchaklar. Ammo $\angle C = 0{,}5 \smile BnD$ va $CD \parallel AB$ bo‘lgani uchun $\smile BnD = \smile BmC$ va $\angle B = \angle C = 0{,}5 \smile BnD = 0{,}5 \smile BnD = 0{,}5 \smile BmC$.

212

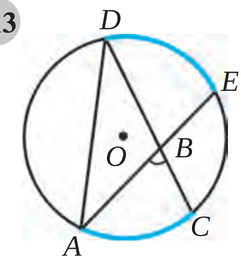



## 2. Ikkita vatarning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklar.

**2- teorema.**

**Ixtiyoriy ikkita vatarning kesishishidan hosil bo‘lgan har qaysi vertikal burchak ularning tomonlari tiralgan yoylar yig‘indisining yarmiga teng.**

213




Isbot. $\angle ABC$ – $CD$ va $AE$ vatarlarning kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan bittasi bo‘lsin (213- rasm). $\angle ABC = 0{,}5\,(\smile AC + \smile DE)$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun $A$ va $D$ nuqtalarni birlashtiramiz, u holda $\angle ABC$ – $\triangle ABD$ ga nisbatan tashqi burchak bo‘ladi. Demak, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Ammo $\angle ADC = 0{,}5 \smile AC$ va $\angle DAE = 0{,}5 \smile DE$. Shuning uchun

$$\angle ABC = 0{,}5 \smile AC + 0{,}5 \smile DE = 0{,}5\,(\smile AC + \smile DE).$$

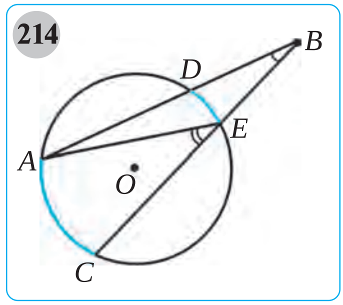
$\angle ABD = \angle CBE = 0{,}5\,(\smile AD + \smile CE)$ ekani xuddi yuqoridagidek isbotlanadi. Bu o‘zingizga havola qilinadi.

## 3. Aylananing tashqarisidagi bir nuqtadan unga o‘tkazilgan ikki kesuvchi orasidagi burchak.

**3- teorema.**

**Aylananing tashqarisidagi bir nuqtadan unga o‘tkazilgan ikki kesuvchi orasidagi burchak ($ABC$) kesuvchilar orasidagi yoylar ($AC$ va $DE$) ayirmasining yarmiga teng.**

Isbot. $B$ – aylana tashqarisidagi nuqta, $BA$ va $BC$ kesuvchilar bo‘lsin. $\angle B = 0{,}5\,(\smile AC - \smile DE)$ bo‘lishini isbotlaymiz. Buning uchun $A$ va $E$ nuqtani birlashtiramiz (214- rasm). $\angle AEC$ burchak $\triangle AEB$ ga tashqi burchak bo‘ladi. Demak, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, bundan $\angle B = \angle AEC - \angle DAE$. Ammo bu tenglikning o‘ng tomonidagi burchaklar ularga mos $AC$ va $DE$ yoylarning yarmi bilan o'lchanadi, ya'ni $\angle AEC = 0{,}5 \smile AC$ va $\angle DAE = 0{,}5 \smile DE$. Va demak, $ABC$ burchak ham bu yoylarning yarmi bilan o'lchanadi:




$$\angle B = 0{,}5 \smile AC - \smile DE = 0{,}5\,(\smile AC - \smile DE).$$

Demak, $\angle B = 0{,}5\,(\smile AC - \smile DE)$.

Shuni isbotlash talab qilingan edi.

**4. Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan unga o'tkazilgan ikki urinma orasidagi burchak.**

**4- teorema.**

**Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan unga o'tkazilgan ikki urinma orasidagi burchak 180° bilan urinish nuqtalarini o'z ichiga olgan yoylardan kichigining ayirmasiga teng bo'ladi.**

Isbot. Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan o'tkazilgan ikki kesuvchi orasidagi burchakni o'lchash haqidagi 3-teoremaga asosan (192- rasmga q.):

$$\angle A = 0{,}5\,(\smile BDC - \smile BC) = 0{,}5\,(360^\circ - \smile BC - \smile BC) = 180^\circ - \smile BC,$$

demak, $\angle A = 180^\circ - \smile BC$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**486.** 1) Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak qanday o'lchanadi? Ikki vatarning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklar-chi?
2) Ikki kesishuvchi vatar orasidagi burchak nimaga teng?
3) Bir nuqtadan o'tkazilgan ikki urinma orasidagi burchak nimaga teng?

**487.** Aylana radiusiga teng $AB$ vatar $A$ nuqtada o'tkazilgan urinma bilan qanday burchaklar hosil qiladi?

**488.** $AB$ vatar 56° li yoyni tortib turadi. Shu vatarning uchlaridan aylanaga o'tkazilgan urinmalar bilan vatardan hosil bo'lgan burchaklarni toping.

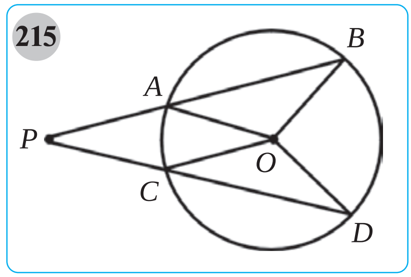
**489.** $AB$ kesma aylananing diametri, $BC$ va $AD$ vatarlar esa o'zaro parallel. $CD$ vatar diametr bo'lishini isbotlang.

**490.** Aylanadan tashqaridagi nuqtadan o'tkazilgan ikki urinmaning urinish nuqtalari aylanani: 1) 1 : 9; 2) 4 : 15; 3) 7 : 11; 4) 3 : 7 nisbatdagi ikkita yoyga ajratadi. Urinmalar orasidagi burchakni toping.

**491.** Aylanani kesuvchi ikki vatari orasidagi burchaklardan biri 70° ga teng. Shu burchakka qo'shni bo'lgan burchaklarning yig'indisini toping.

**492.** $O$ markazli aylananing $AB$ va $CD$ vatarlarining davomi $P$ nuqtada kesishadi (215- rasm). $\angle P = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle AOC)$ ekanini isbotlang.

**493.** 216- rasmlarda tasvirlangan $x$ noma'lum burchakni toping.




**494.** $AB$ va $CD$ — bir aylananing vatarlari, $P$ — ularning kesishish nuqtasi. Agar $BPD$ burchak $BPC$ burchakdan 4 marta katta, $CDA$ burchak esa $BPC$ dan $26°$ ga katta bo'lsa, $CBP$ burchakni toping.

**495.** Aylananing $A$, $B$ va $C$ nuqtalari uni: 1) $11:3:4$; 2) $14:6:4$; 3) $13:12:5$; 4) $17:10:9$ nisbatdagi yoylarga bo'ladi. $A$, $B$ va $C$ nuqtalardan urinmalar o'tkazilib, bir-biri bilan kesishguncha davom ettirilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning burchaklarini toping.

**496.** 1) $52°$; 2) $74°$; 3) $104°$ li markaziy burchak tashkil etgan ikki radiusning uchlariga o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchakni toping.

**497.** Aylanani: 1) $2:7$; 2) $4:5$ nisbatda bo'luvchi vatarning uchlaridan ikkita urinma o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning burchaklarini toping.

**498.** $B$ nuqtadan aylanaga o'tkazilgan $BA$ va $BC$ urinmalar aylanani urinish nuqtalarida: 1) $5:4$; 2) $12:6$; 3) $9:6$; 4) $13:7$; 5) $2:3$ nisbatda ikki yoyga bo'ladi. $ABC$ burchakning miqdorini toping.

## *4- § ga doir qo'shimcha mashqlar*

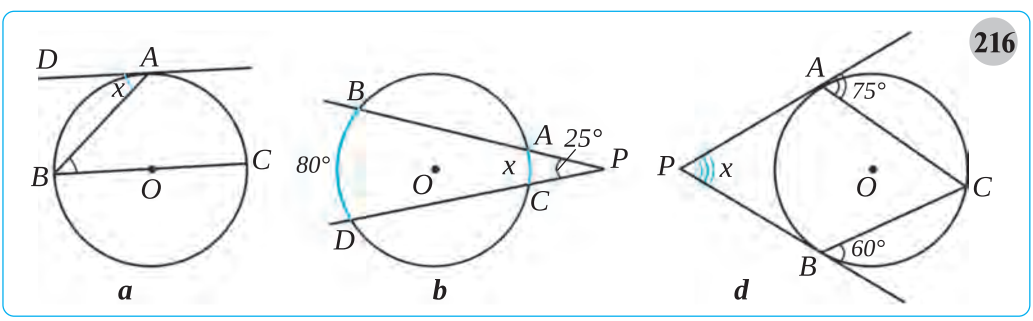
**499.** $M$, $N$, $P$ nuqtalar markazi $O$ nuqtada bo'lgan aylanada yotadi. Agar $\smile MNP=96°$ bo'lsa, $MNP$ burchakni toping.

**500.** $O$ markazli aylananing radiusi 20 ga teng. Agar: 1) $\angle AOB=60°$; 2) $\angle AOB=90°$; 3) $\angle AOB=180°$ bo'lsa, $AB$ vatarni toping.

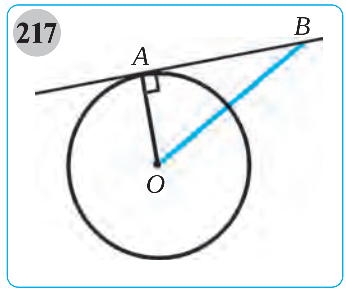
**501.** $O$ markazli aylananing $AB$ va $CD$ vatarlari teng. 1) Oxirlari $A$ va $B$ da bo'lgan ikkita yoy mos ravishda oxirlari $C$ va $D$ da bo'lgan ikkita yoyga teng ekanini isbotlang. 2) Agar $\angle AOB=130°$ bo'lsa, oxirlari $C$ va $D$ da bo'lgan yoyni toping.

**502.** 1) $AB$ yarim aylanada $C$ va $D$ nuqtalar shunday olinganki, unda $\smile AC=35°$, $\smile BD=25°$. Agar aylana radiusi 12 sm ga teng bo'lsa, $CD$ vatarni toping.

2) Aylananing $AB$ va $CD$ vatarlari $P$ nuqtada kesishadi. Agar $\smile AD=56°$ va $\smile BC=70°$ bo'lsa, $BPC$ burchakni toping.



**503.** $AB$ to‘g‘ri chiziq $O$ markazli aylananing $A$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma. Agar $AB = 24$ sm, aylananing radiusi esa 7 sm ga teng bo‘lsa, $OB$ kesmaning uzunligini toping (217- rasm).




Y e c h i l i s h i. Masala shartiga ko‘ra, $AB$ to‘g‘ri chiziq berilgan aylanaga ..., va demak, u urinish ... o‘tkazilgan $OA$ radiusga ... . Shuning uchun $AOB$ uchburchak — ... . Pifagor teoremasiga ko‘ra:

$$OB^2 = OA^2 + \ldots^2 = \ldots^2 + 24^2 = \ldots,$$

bundan $OB = \ldots$ sm.

J a v o b: $OB = \ldots$ sm.

**504.** $AB$ — $O$ markazli aylananing vatari, $BC$ — unga urinma.

$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOB$ yoki $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOB$ ekanini isbotlang.

## 6- TEST

**1.** Teng tomonli uchburchakning balandligi 9 sm. Shu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

A) 3 sm; B) 4,5 sm; D) 6 sm; E) 2,5 sm.

**2.** Uchburchak uchlaridan unga ichki chizilgan aylananing urinish nuqtalarigacha bo‘lgan masofalar, mos ravishda, 2; 3 va 5 ga teng. Shu uchburchakning perimetrini toping.

A) 19; B) 18; D) 24; E) 20.

**3.** Katetlari 40 va 30 ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

A) 10; B) 7; D) 6,5; E) 8.

**4.** Radiusi $R$ ga teng bo‘lgan aylanadagi nuqtadan uzunliklari $R$ ga teng bo‘lgan ikkita vatar o‘tkazildi. Vatarlar orasidagi burchakni toping.

A) 120°; B) 110°; D) 135°; E) 40°.

**5.** Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga ikkita urinma o‘tkazilgan. Agar urinmalar orasidagi burchak 72° bo‘lsa, aylananing urinish nuqtalari orasidagi katta yoyini toping.

A) 248°; B) 240°; D) 252°; E) 236°.

**6.** Aylanani kesuvchi ikki vatari orasidagi burchaklardan biri 80° ga teng. Shu burchakka qo‘shni bo‘lgan burchaklarning yig‘indisini toping.

A) 200°; B) 90°; D) 100°; E) 160°.

## *Tarixiy ma'lumotlar*

**Abul Vafo Buzjoniy** 940- yili Xuroson viloyatining Hirot va Nishopur shaharlari orasidagi Buzjon shahrida (hozirgi Turkmanistonning Kushka shahri atrofida) tug'ilgan. U Bog'dodda o'qigan va ijod qilgan.

Abul Vafo Buzjoniyning «Hunarmandlar geometrik yasashlardan nimalarni bilishlari zarur?» degan kitobining birinchi va ikkinchi boblari chizg'ich va sirkul yordamidagi yasashlarga bag'ishlangan. Biz sizga Abul Vafoning aylananing markazini topish masalasini keltiramiz.

*«Agar «Aylananing markazi qanday topiladi?» deb so'ralsa, uning aylanasida A va B nuqtalarni belgilab hamda AB masofa bilan A va B nuqtalarni markaz qilib ikkita teng aylana yasaymiz, ular C va D nuqtalarda kesishadi (218- rasm). CD chiziqni o'tkazamiz va uni aylana bilan E va F nuqtalarda kesishguncha davom ettiramiz, so'ngra EF chiziqni O nuqtada teng ikkiga bo'lamiz. U holda O nuqta aylananing markazi bo'ladi».*

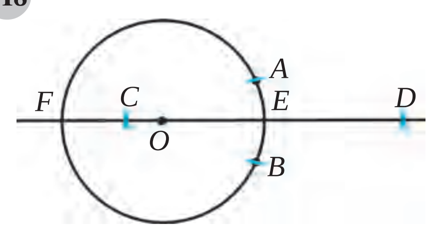
Abul Vafoning bu usuli $A$ va $B$ nuqtalarni markaz qilib yoy chizilganda ularning kesishgan nuqtalarini tutashtiruvchi $CD$ to'g'ri chiziq berilgan aylananing markazidan o'tib, uning $AB$ vatariga perpendikular bo'lishiga asoslangan.

Hozir bu masala quyidagicha yechiladi: faraz qilaylik, bizga markazi belgilanmagan aylana berilgan va uning markazini aniqlash talab qilingan (219- rasm).

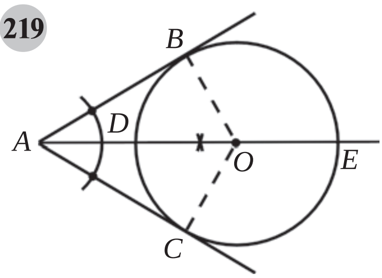
$A$ nuqtadan bu aylanaga $AB$ va $AC$ urinmalarni o'tkazamiz hamda $BAC$ burchakning bissektrisasini yasaymiz. Bissektrisa aylanani $D$ va $E$ nuqtalarda kesadi. $DE$ ni teng ikkiga bo'lsak, bo'linish nuqtasi $O$ aylananing markazi bo'ladi. Yoki $B$ nuqtada $AB$ urinmaga perpendikular o'tkazsak, u bissektrisani $O$ nuqtada kesadi. $O$ nuqta aylana markazi bo'ladi.

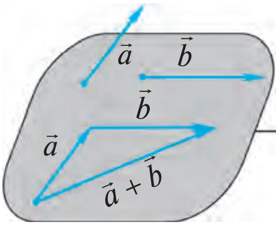
Shu bilan bir qatorda Abul Vafo yuqorida nomi keltirilgan asarida yoyiq yoyni to'liq aylanaga to'ldirish, aylanaga uning tashqarisidagi nuqtadan urinma o'tkazish, aylanaga uning aylanasida yotgan nuqtadan urinma o'tkazish kabi yasash usullarini ham bergan.

218




219






# 5- §. VEKTORLAR

## 40- mavzu. VEKTOR TUSHUNCHASI

**1. Vektor kattaliklar. Vektor.** Sizga ma'lum bo'lgan kattaliklar ikki ko'rinishda bo'lishi mumkin. Shunday kattaliklar borki, ular o'zlarining son qiymatlari bilan (berilgan o'lchov birligida) to'la aniqlanadi. Masalan, uzunlik, yuza, og'irlik shular jumlasidandir.

**1-ta'rif.** *Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklar **skalar kattaliklar** deyiladi.*

Yana shunday kattaliklar borki, ularni to'la bilish uchun bu kattaliklarni ifodalovchi son qiymatlaridan tashqari, ularning yo'nalishlarini ham bilish zarur bo'ladi. Masalan, tezlik, kuch va bosim shular jumlasidandir.

*Vektor* – geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u son (uzunlik) va yo'nalishi bilan to'la aniqlanadi. Ko'rgazmali bo'lishi uchun uni yo'naltirilgan kesma ko'rinishida tasavvur qilish mumkin. Aslida vektorlar haqida gapirilganda, hammasi o'zaro parallel bir xil uzunlik va bir xil yo'nalishga ega bo'lgan yo'naltirilgan kesmalarning butun bir sinfini nazarda tutish to'g'riroq bo'ladi.

**2-ta'rif.** *Son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanadigan (tavsiflanadigan) kattaliklar **vektor kattaliklar** yoki **vektorlar** deb ataladi.*

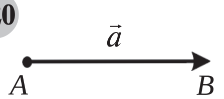
Fizika, mexanika va matematikaning son bilangina emas, balki yo'nalishi bilan tavsiflanadigan miqdorlarni tekshiruvchi turli masalalari vektor tushunchasiga olib keladi. Masalan, kuch, tezlik – bular vektorlardir.

Vektor kattaliklarni biz juda ko'p hollarda uchratamiz. Masalan, transportda ketayotganingizda harakat tezligi, burilish yoki to'xtash bilan bog'liq vektor kattaliklarni ko'rishingiz mumkin. Tabiatni o'rganuvchi fanlarda bular – tezlanish, inersiya kuchi, markazdan qochma kuch va shunga o'xshash nomlar bilan ataladi.

Biz vektor kattaliklarni tabiiy ma'nosini hisobga olmagan holda uning matematik tabiatini o'rganamiz. Albatta, vektor kattalikning matematik xossalari o'zining tabiiy ma'nosiga ega bo'ladi.

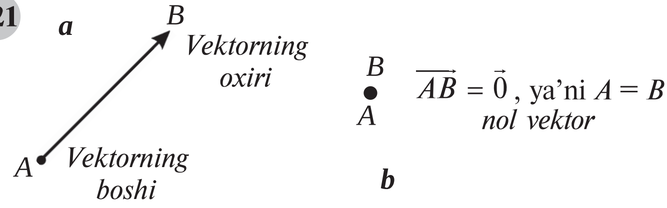
Vektor kattalikning son miqdorini kesma orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, har qanday kesmaning ikki uchi bor. Ulardan birini vektorning *boshi* deb, ikkinchi uchini vektor kattalik yo'nalishiga mos yo'naltiramiz va strelka bilan belgilaymiz. Buni vektorning *uchi* deymiz.

220




*Vektor A nuqtadan qo'yilgan*

221




**3- t a ' r i f.** ***Vektor*** *(vektor kattalik) deb yo'nalishga ega bo'lgan kesmaga aytiladi.*

Vektor kattalik yo'nalishi ko'rsatilgan kesma sifatida tasvirlanadi. Vektorni ifodalovchi kesma uchlari $A$ va $B$ nuqtada bo'lsa, $A$ nuqtadan $B$ nuqtaga yo'nalgan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Shuningdek, vektorlar $\vec{a}$, $\vec{b}$ (lotin alifbosining kichik harflari) shaklida ham belgilanishi mumkin (220- rasm).

O' q i l i s h i: $\overrightarrow{AB}$ vektor yoki $\vec{a}$ vektor.

1) Vektorning yo'nalishi uning boshi va oxirini ko'rsatish bilan aniqlanadi. Bunda vektor boshi birinchi o'ringa qo'yiladi (221-*a* rasm).

$AB$ nurning aniqlab bergan yo'nalishi $\overrightarrow{AB}$ *vektorning yo'nalishi* deyiladi. Boshi va oxiri ustma-ust tushgan vektor *nol vektor* deb ataladi. $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ tenglik $A$ va $B$ nuqtalarning ustma-ust tushganini bildiradi (221-*b* rasm).

2) Vektorni ifodalovchi kesmaning uzunligi vektorning *moduli* yoki *absolut qiymati* deb ataladi.

Vektorning moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi (222- rasm).

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning moduli $AB$ kesmaning uzunligi hisoblanadi: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Shuning uchun geometriyada vektorning moduli yoki absolut qiymati uning *uzunligi* ham deb ataladi.

Nol vektorning uzunligi (moduli) nolga teng deb hisoblanadi): $|\vec{0}| = 0$.

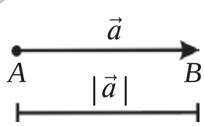
**2. Vektorlarning tengligi.**

**4- t a ' r i f.** *Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar* ***kollinear vektorlar*** *deyiladi.*

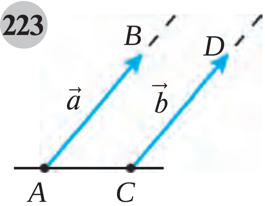
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a} \parallel \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Agar ikki vektor ularning boshi orqali o'tgan: 1) to'g'ri chiziqdan bir tomonda yotsa, *yo'nalishdosh vektorlar* deyiladi (223- rasm); 2) to'g'ri chiziqqa nisbatan turli tomonda yotsa, *qarama-qarshi yo'nalgan vektorlar* deyiladi (224- rasm).

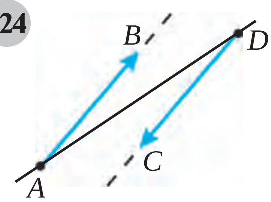
222




223




224



$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar: 1) *yo'nalishdosh* bo'lsa, ular $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ kabi; 2) *qarama-qarshi yo'nalgan* bo'lsa, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ kabi belgilanadi.

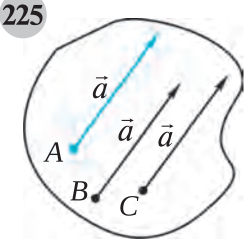
Nol vektor istalgan vektorga kollinear deb hisoblanadi.

**5- ta'rif.** *Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning uzunliklari teng va yo'nalishlari bir xil bo'lsa, bu vektorlar **teng vektorlar** deb ataladi.*

Shunday qilib, agar $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ va $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng bo'ladi. Vektorlarning tengligi $\vec{a} = \vec{b}$ shaklida yoziladi.

Vektorlarning tengligi uning boshi tekislikning ixtiyoriy nuqtasida bo'la olishini ko'rsatadi (225-rasm), ya'ni vektorning modulini o'zgartirmay, yo'nalishini saqlagan holda uning boshini tekislikning istalgan nuqtasiga ko'chirish mumkin. Buni *vektorni parallel ko'chirish xossasi* deb ataladi.

225




**Masala.** *ABCD* parallelogramm uchlari juftligi nechta turli vektorni beradi (226- rasm)?

Javob: sakkizta turli vektorni beradi: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$.

## Savol, masala va topshiriqlar

**505.** 1) Vektor nima? Vektorlar qanday belgilanadi?

2) Qanday vektorlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalgan vektorlar deyiladi? Vektorning moduli nima?

3) Qanday ikki vektor teng deyiladi?

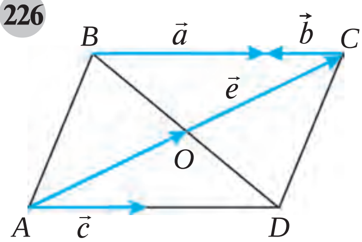
**506.** *ABCD* to'g'ri to'rtburchak berilgan. Uning uchlari bilan berilgan barcha vektorlarni yozing. Ular ichidan qaysilari: 1) *AC* to'g'ri chiziqda yotadi? 2) *CD* to'g'ri chiziqqa parallel?

**507.** *ABCD* parallelogrammning diagonallari *O* nuqtada kesishadi. Uning uchlari va diagonallari kesishish nuqtasi bilan belgilangan vektorlarni yozing. Ular ichidan qaysilari: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{BO}$ vektorlarga kollinear?

**508.** *ABCD* parallelogrammda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning tengligini isbotlang.

**509.** *ABCD* – parallelogramm. 226- rasmda tasvirlangan vektorlar ichidan: 1) kollinear; 2) yo'nalishdosh; 3) qarama-qarshi yo'nalgan; 4) teng uzunliklarga ega bo'lgan vektorlar juftlarini ko'rsating.

226



**510.** *ABCD* — to‘g‘ri to‘rtburchak. Quyidagi yozuvlardan qaysi biri ma’noga ega:

1) $\overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AC}$;  3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$;  5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

2) $|\overrightarrow{AD}| < |\overrightarrow{AC}|$;  4) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$;  6) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$?

**511.** Agar: 1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ va $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$; 2) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar esa nokollinear bo‘lsa, *ABCD* to‘rtburchakning turini aniqlang.

**512.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ekanligi ma’lum. Ushbu tasdiqlar to‘g‘rimi:

1) $AB \parallel CD$;  2) $|AB| = |CD|$?

**513.** *ABCD* parallelogrammning diagonallari *O* nuqtada kesishadi. 1) $\overrightarrow{AB}$ vektor bilan yo‘nalishdosh; 2) $\overrightarrow{AC}$ vektorga yo‘nalishdosh; 3) $\overrightarrow{DO}$ vektor bilan qarama-qarshi yo‘nalgan vektorlarni yozing.

**514.** *ABCD* to‘g‘ri to‘rtburchakda $AB = 3$ sm, $BC = 4$ sm, *E* — *AB* tomonning o‘rtasi. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning uzunliklarini toping.

**515.** $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ vektorlarning yo‘nalishi haqida nima deyish mumkin?

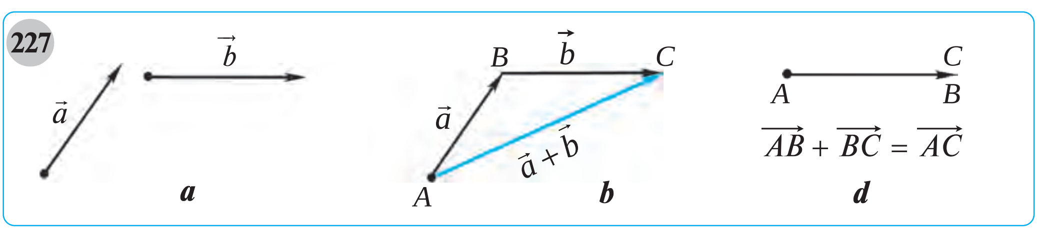
## 41- mavzu. VEKTORLARNI QO‘SHISH VA AYIRISH

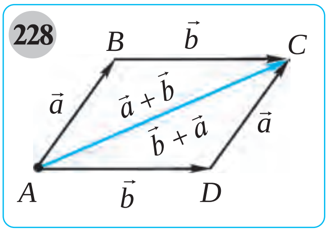
**1. Vektorlarni qo‘shish.** Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsin (227- *a* rasm). Ixtiyoriy *A* nuqtani belgilaymiz va bu nuqtadan $\vec{a}$ vektorga teng $\overrightarrow{AB}$ vektorni qo‘yamiz. So‘ngra *B* nuqtadan $\vec{b}$ vektorga teng $\overrightarrow{BC}$ vektorni qo‘yamiz.

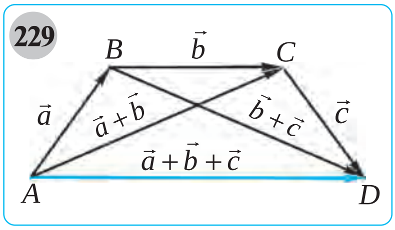
Endi $\vec{a}$ vektorning boshi *A* nuqtadan $\vec{b}$ vektor uchi *C* ga yo‘nalgan vektor o‘tkazamiz (227-*b* rasm). $\overrightarrow{AC}$ *vektor* $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlarning yig‘indisi* deyiladi. Vektorlarni qo‘shishning bu qoidasi «*ucburchak* (*uch nuqta*) *qoidasi*» deyiladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi $\vec{a} + \vec{b}$ kabi belgilanadi.

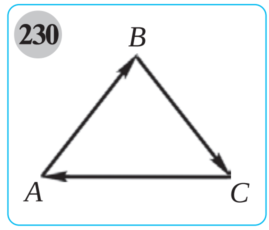
Uchburchak qoidasini quyidagicha ifodalasak ham bo‘ladi:
*agar A, B va C ixtiyoriy nuqtalar bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli:*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$






Uchburchak qoidasi istalgan $A$, $B$ va $C$ nuqtalar uchun, shu bilan bir qatorda ulardan ikkitasi yoki uchtasi ustma-ust tushganda ham o‘rinli bo‘ladi (227- *d* rasm).

**2. Vektorlarni qo‘shish qonunlari.** Ma’lumki, parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari o‘zaro teng va parallel. Agar yo‘nalishlari bir xil bo‘lsa, parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng vektorlarni ifodalaydi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ – nokollinear vektorlar bo‘lsin. Ixtiyoriy $A$ nuqtadan $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ vektorlarni qo‘yamiz hamda tomonlari shu vektordan tuzilgan $ABCD$ parallelogrammni yasaymiz (228- rasm). Uchburchak qoidasiga ko‘ra:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b} \text{ va } \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Bulardan $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ kelib chiqadi.

Demak, vektorlar yig‘indisi ularning qanday tartibda ketma-ket joylashishiga bog‘liq emas, ya’ni *istalgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun quyidagi tenglik o‘rinli:*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Bunga vektorlarni qo‘shishning *o‘rin almashtirish qonuni* deyiladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan $ABCD$ parallelogrammda yig‘indi $\overrightarrow{AC}$ vektor qo‘shiluvchi vektorlarning umumiy boshidan chiquvchi diagonaldan iborat. Odatda, vektorlarni bunday qo‘shish vektorlarni qo‘shishning «*parallelogramm qoidasi* (*usuli*)» deyiladi (228- rasm).

Endi uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar yig‘indisini ko‘raylik. Ixtiyoriy $A$ nuqtadan $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ vektorni, $B$ nuqtadan $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vektorni, $C$ nuqtadan esa $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ vektorni qo‘yamiz (229-rasm). Uchburchak qoidasini qo‘llab, ega bo‘lamiz:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Bundan, *istalgan* $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ *vektorlar uchun*

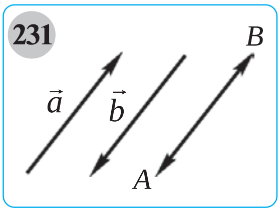
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

*tenglik o‘rinli ekani kelib chiqadi.* Bu vektorlarni qo‘shishning *guruhlash qonuni* (*xossasi*)*dir.*

Vektorlarning har biri noldan farqli bo‘lganda ularning yig‘indisi nol vektor bo‘lishi mumkin. Masalan, $ABC$ uchburchakni qaraylik (230- rasm). Bunda $\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CA}$ vektorlar yig‘indisi nol vektor bo‘ladi, ya’ni: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, chunki birinchi vektorning boshi bilan uchinchi vektorning uchi ustma-ust tushdi. Demak, yig‘indi vektor nol vektor – nuqta bo‘ldi.

**1-ta’rif.** *Ikki vektorning yig‘indisi nol vektor bo‘lsa, ular* ***qarama-qarshi vektorlar*** *deb ataladi.*




Demak, agar $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ bo‘lsa, u holda $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$ vektor $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorga (va aksincha) *qarama-qarshi vektor* deyiladi va $\vec{b}=-\vec{a}$, $\vec{a}=-\vec{b}$ kabi yoziladi (231-rasm). Agar qarama-qarshi vektorlarni (uchburchak qoidasi bo‘yicha) qo‘shsak, u holda nol vektor kelib chiqadi. Bunda $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo‘lib, turli tomonga yo‘nalgan bo‘ladi. Demak, *har bir $\vec{a}$ vektor uchun unga qarama-qarshu $-\vec{a}$ vektor mavjud (ya’ni $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$) bo‘ladi.* Yuqoridagi mulohazalardan quyidagi xulosa kelamiz:

*agar nol bo‘lmagan ikki vektorning uzunliklari teng va ular qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lsa, ular* ***qarama-qarshi vektorlar*** *deyiladi.*

*Nol vektor o‘ziga-o‘zi qarama-qarshi vektor hisoblanadi.*

**3. Vektorlarni ayirish.** Vektorlarni ayirish xuddi sonlarni ayirish kabi qo‘shishga teskari amaldir.

**2-ta’rif.** *$\vec{a}$* ***va*** *$\vec{b}$* ***vektorlarning ayirmasi*** *deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, uning $\vec{b}$ vektor bilan yig‘indisi $\vec{a}$ vektorni beradi: $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.*

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi xuddi sonlarning ayirmasi kabi belgilanadi: $\vec{a}-\vec{b}$. Ikki vektorning ayirmasi birinchi vektorga ikkinchi vektorga qarama-qarshi vektorni qo‘shish sifatida aniqlanadi va u $\vec{a}+(-\vec{b})$ vektorga teng (232-*b* rasm).

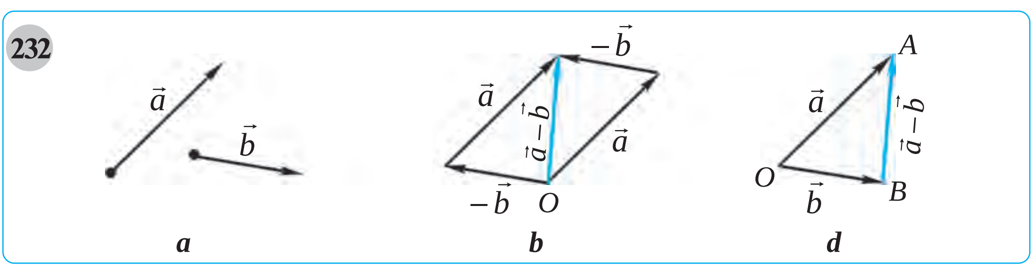
Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsin (232-*a* rasm). $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi bo‘lgan $(-\vec{b})$ vektorning yig‘indisini ko‘raylik.

*Istalgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ tenglik o‘rinli.*

Haqiqatan ham, $(\vec{a}+(-\vec{b}))+\vec{b}=\vec{a}+((-\vec{b})+\vec{b})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

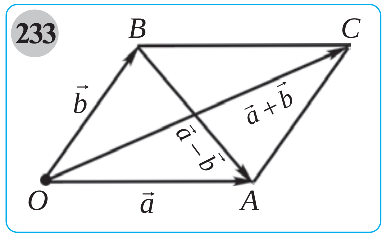
Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bitta $O$ nuqtadan qo‘yilgan bo‘lsa, u holda $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani topish uchun quyidagi qoidadan foydalanish qulay (232, *d* rasm):

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$




**a** **b** **d**

Yuqoridan ko'rinadiki, *ayriluvchi* vektorning *oxiri ayirma* vektorning *boshi*, *kamayuvchi* vektorning *oxiri* esa *ayirma* vektorning *oxiri* vazifasini o'tar ekan. Qoidani esda saqlash qulay bo'lishini ta'minlash maqsadida u sxematik tarzda ko'rsatildi.




Vektorni qo'shishda parallelogramm usulidan foydalansak (233- rasm), ayirma vektor parallelogrammning ikkinchi diagonalidan iborat bo'ladi.

**Masala.** $ABC$ uchburchak berilgan. Quyidagi: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ vektorlarni $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ vektorlar orqali ifodalang.

Yechilishi. 1) $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{AB}$ – qarama-qarshi vektorlar, shuning uchun

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB} \quad \text{yoki} \quad \overrightarrow{BA}=-\vec{a}.$$

2) Uchburchak qoidasiga ko'ra: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Lekin $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, shuning uchun

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$$

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**516.** 1) Uchburchak va parallelogramm qoidasiga ko'ra vektorlar yig'indisi qanday topiladi?
2) Berilgan vektorga qarama-qarshi vektor deb nimaga aytiladi?
3) Ikki vektor ayirmasi deb nimaga aytiladi?

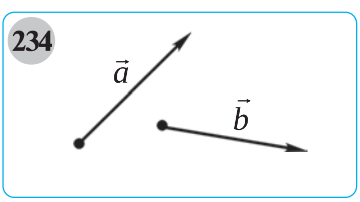
**517.** 234- rasmda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar tasvirlangan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorni ikki usul bilan yasang.

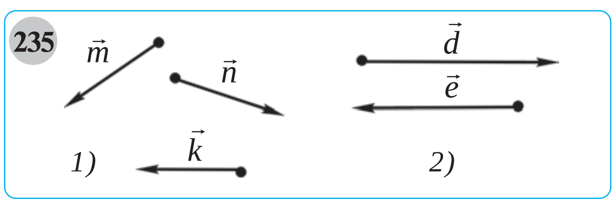
**518.** 235- rasmda $\vec{m}$, $\vec{n}$ va $\vec{k}$ hamda $\vec{d}$ va $\vec{e}$ vektorlar tasvirlangan. Vektorlarni yasang: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

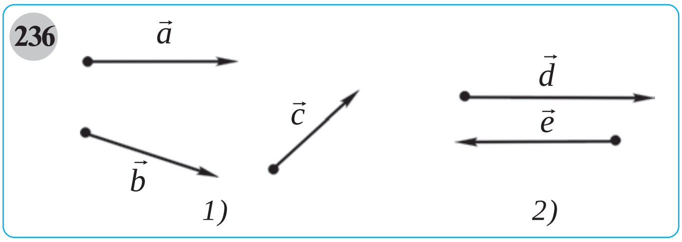
**519.** 236- rasmda $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ hamda $\vec{d}$ va $\vec{e}$ vektorlar tasvirlangan. Vektorlarni yasang: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

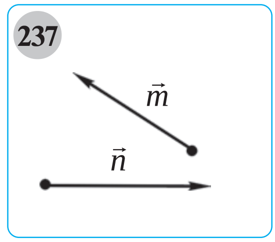
**520.** *ABCD* parallelogramm berilgan. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ tenglik bajariladimi? Tekshirib ko'ring.

**521.** *ABCD* rombda: $AD=20$ sm, $BD=24$ sm, $O$ – diagonallarining kesishish nuqtasi. $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}\right|$ ni toping.





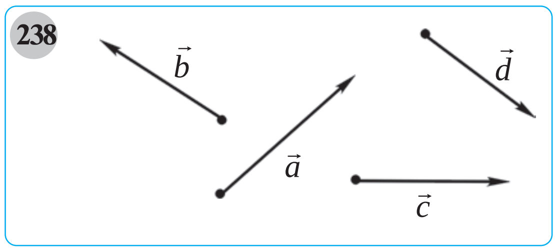

**522.** *ABCD* parallelogrammda: $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

**523.** *E* va *F* – *ABC* uchburchakning *AB* va *AC* tomonlarining o‘rtalari. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ vektorlar orqali ifodalang.

**524.** *ABCD* – ixtiyoriy to‘rtburchak. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ekanini isbotlang.

**525.** 1) 237- rasmda $\vec{m}$ va $\vec{n}$ vektorlar tasvirlangan. $\vec{m} + \vec{n}$ vektorni ikki usul bilan yasang.

2) 238- rasmda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ hamda $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar tasvirlangan. $\vec{b} - \vec{a}$ va $\vec{c} + \vec{d}$ vektorlarni yasang.



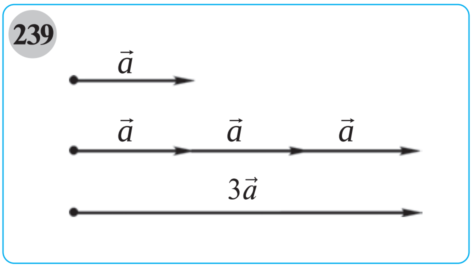

**526.** *ABCD* rombda: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

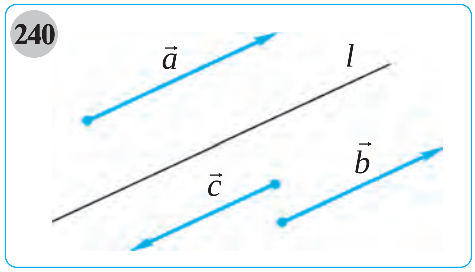
## 42- mavzu. VEKTORNI SONGA KO‘PAYTIRISH

Biror $\vec{a}$ vektorni olamiz va $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ yig‘indini topamiz (239- rasm). Bunday yig‘indini $3 \cdot \vec{a}$ deb belgilaymiz va bu ifodani $\vec{a}$ vektorning 3 soniga ko‘paytmasi deb atashimiz tabiiydir.

**Ta’rif.** *Nol bo‘lmagan $\vec{a}$ vektorning k songa ko‘paytmasi deb, shunday $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ vektorga aytiladiki, bunda uning uzunligi $|k| \cdot |\vec{a}|$ songa teng bo‘lib, yo‘nalishi $k \geq 0$ bo‘lganda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yo‘nalishi bilan bir xil, $k < 0$ bo‘lganda esa yo‘nalishlari qarama-qarshi bo‘ladi.*

*Nol vektorning ixtiyoriy songa ko‘paytmasi nol vektor deb hisoblanadi.*




$\vec{a}$ vektorning $k$ songa ko‘paytmasi $k\vec{a}$ kabi belgilanadi (son ko‘paytuvchi chap tomonga yoziladi). Ta’rifga ko‘ra: $|k\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}|$.

Vektorning songa ko‘paytmasi ta’rifidan bevosita quyidagilar kelib chiqadi: 1) *istalgan vektorning nolga ko‘paytmasi nol vektor bo‘ladi; 2) istalgan son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}$ va $k\vec{a}$ vektorlar kollinear.*

Endi vektorni songa ko‘paytirishning asosiy xossalarini sanab o‘tamiz.

*Istalgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar va istalgan k, l sonlar uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:*

1°. $(k\cdot l)\vec{a} = k\cdot(l\vec{a})$ — *guruhlash qonuni.*

2°. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ — *birinchi taqsimot qonuni.*

3°. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — *ikkinchi taqsimot qonuni.*

4°. $k\cdot\vec{0} = 0\cdot\vec{a} = \vec{0}$.

*Parallel to‘g‘ri chiziqlarqa yoki bir to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ikki vektorni* ***kollinear vektorlar*** *deb atalishini yana bir bor eslatib o‘tamiz.*

$l$ to‘g‘ri chiziq va unga parallel bo‘lgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo‘lsin (240- rasm). Ta’rifga ko‘ra, $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar kollinear vektorlar bo‘ladi. Bu yerda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo‘nalgan, $\vec{c}$ vektor esa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga nisbatan qarama-qarshi yo‘nalgan.

Ma’lumki, vektorni songa ko‘paytirganda ko‘paytma vektorning yo‘nalishi berilgan vektorga parallel bo‘ladi. Bundan quyidagi muhim xulosani hosil qilamiz:

*vektorning songa ko‘paytmasi shu vektorga kollinear vektordir.*

**Teorema.**

**Vektor o‘zining moduliga teng songa bo‘linsa, shu vektorga kollinear birlik vektor hosil bo‘ladi.**

Isbot. $\vec{a}$ vektorning moduli $|\vec{a}|$ bo‘lsin. $\vec{a}$ vektorning $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ songa ko‘paytmasini qaraylik:

$$|k\vec{a}| = |k|\cdot|\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = 1\,.$$

Demak, ko'paytma vektor moduli bir birlikka teng.

Moduli birga teng vektorni *birlik vektor* deb ataymiz. Agar $\vec{a}$ vektor bo'yicha yo'nalgan birlik vektorni $\vec{e}$ deb belgilasak, teoremaga ko'ra: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ yoki bu tenglikni $|\vec{a}|$ songa ko'paytirsak: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Natijada biz vektorlarni o'rganishda katta ahamiyatga ega bo'lgan tenglikni hosil qildik, ya'ni *har qanday vektor shu vektor moduli bilan o'ziga kollinear birlik vektorning ko'paytmasiga teng ekan.*

## Savol, masala va topshiriqlar

**527.** 1) Berilgan vektorning songa ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2) Vektorni songa ko'paytirishning xossalarini ayting.
3) Birlik vektor deganda nima tushuniladi?

**528.** Uzunligi 2 sm ga teng bo'lgan $\vec{a}$ vektorni chizing. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$ vektorlarni yasang.

**529.** $k$ ning qanday qiymatlarida $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ va $k\vec{a}$ vektorlar: 1) yo'nalishdosh; 2) qarama-qarshi yo'nalgan; 3) teng bo'ladi?

**530.** Ifodalarni soddalashtiring: 1) $-0{,}5 \cdot (12\vec{a})$; 2) $3(\vec{a} + \vec{b})$; 3) $3\vec{b} - \vec{b}$.

**531.** $ABCD$ parallelogrammda $O$ — diagonallarning kesishish nuqtasi, $K$ nuqta — $CD$ tomonning o'rtasi. $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{AK}$ vektorlarni $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

**532.** 1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; 2) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ tengliklar ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun to'g'ri. Shuni isbotlang.

I s b o t . 1- h o l. Agar $\vec{a} = \vec{0}$ bo'lsa, u holda har qaysi tenglikning ikkala qismi nol vektorlar bo'ladi. Shuning uchun tengliklar o'rinli.

2- h o l. $\vec{a} \neq \vec{0}$ bo'lsin.

1) Vektorni songa ko'paytirish ta'rifiga ko'ra:

$$|1 \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| .$$

1 soni esa musbat, shuning uchun $1 \cdot \vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlarning yo'nalishi bir xil. Teng vektorlarning ta'rifiga ko'ra, $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ekani kelib chiqadi.

2) Vektorni ... ko'paytirish ta'rifiga ko'ra:

$$|(-1) \cdot \vec{a}| = |\ldots| \cdot |\ldots| = \ldots \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| .$$

$-1 < 0$, shuning uchun $(-1) \cdot \vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar — qarama-qarshi ... bo'ladi. Qarama-qarshi vektorlarning ta'rifiga ko'ra: $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$ va $-\vec{a} \uparrow\downarrow \ldots$ . Va demak, $|(-1) \cdot \vec{a}|$ ... $|-\vec{a}|$ va $(-1)\vec{a} \uparrow\uparrow$ ... , ya'ni $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ekan.

**533.** $k$ ning qanday qiymatlarida quyidagi mulohazalar to‘g‘ri bo‘ladi: 1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > |\vec{a}|$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$ (bu yerda $\vec{a}$ — nol bo‘lmagan vektor)?

**534.** $ABCD$ — parallelogramm, $P$ — diagonallarining kesishish nuqtasi, $N$ nuqta $BC$ tomonning o‘rtasi. $\overrightarrow{DP}$ va $\overrightarrow{DN}$ vektorlarni $\overrightarrow{DA} = \vec{p}$ va $\overrightarrow{DC} = \vec{m}$ vektorlar orqali ifodalang.

**535.** 1) Uzunligi 3 sm ga teng bo‘lgan $\vec{a}$ vektorni chizing. $2{,}5\vec{a}$, $-4\vec{a}$, $-0{,}5\vec{a}$ vektorlarni yasang.

2) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a}$. $2\vec{m} + 3\vec{n}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

**536.** Agar: 1) $\vec{a} = \vec{0}$; 2) $k = 0$ bo‘lsa, $k\vec{a}$ ko‘paytma nimaga teng?

## 43- mavzu. VEKTORLARNING MASALALARNI YECHISHGA TATBIG‘I

Geometrik masalalarni yechishda va teoremalarni isbotlashda vektorlardan keng foydalaniladi.

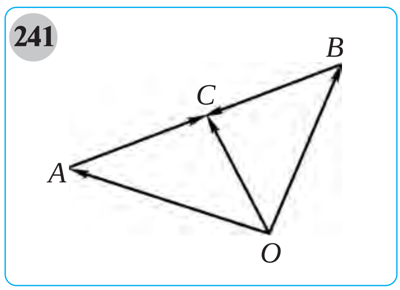
**1. Masala.** $C$ nuqta $AB$ kesmaning o‘rtasi, $O$ nuqta esa tekislikning ixtiyoriy nuqtasi. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ekanini isbot qiling (241- rasm).

Yechilishi. 1-usul. Uchburchak qoidasiga ko‘ra:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{va} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Bu ikki tenglikni qo‘shib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

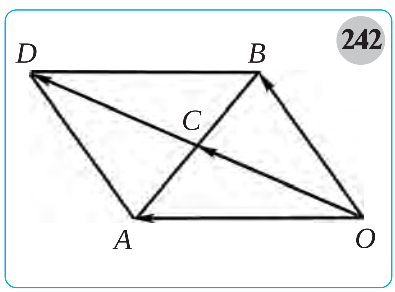



$C$ nuqta $AB$ kesmaning o‘rtasi bo‘lganligidan, u holda $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, chunki qarama-qarshi vektorlarning yig‘indisi nol vektorga teng.

Shunday qilib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{yoki} \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

2-usul. $OAB$ uchburchakni parallelogrammga to‘ldiramiz (242- rasm). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (parallelogramm qoidasiga ko‘ra). Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi, shuning uchun $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ va $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.




Demak, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Bundan:

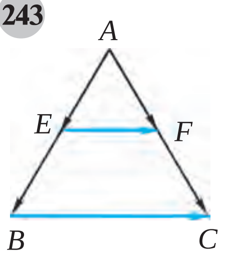
$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

### 2. Uchburchakning o‘rta chizig‘i haqidagi teorema.

**Teorema.**

**Uchburchakning o‘rta chizig‘i uning uchinchi tomoniga parallel, uning uzunligi esa bu tomon uzunligining yarmiga teng.**

243




I s b o t. $EF$ kesma $ABC$ uchburchakning o‘rta chizig‘i (243- rasm). $EF \parallel AC$ va $EF = \frac{1}{2}BC$ ekanini isbotlaymiz.

Dastlab teoremani vektor ko‘rinishida yozamiz. $E$ nuqta $ABC$ uchburchak $AB$ tomonining o‘rtasi, $F$ esa $AC$ tomonining o‘rtasi bo‘lsin (243- rasm). Unda $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Bular teorema shartining vektor ko‘rinishidagi yozuvidir.

Endi uni isbotlashga o‘tamiz.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Shunday qilib, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ vektor tenglikni hosil qildik. Endi uni geometrik talqin qilish qoldi, xolos.

B i r i n c h i d a n, bu tenglikdan $\overrightarrow{EF}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlar yo‘nalishdosh ekani kelib chiqadi, va demak, $EF \parallel BC$.

I k k i n c h i d a n, bu tenglikdan $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$ kelib chiqadi. Bundan esa $EF$ — o‘rta chiziq $BC$ tomonning yarmiga tengligi ravshan. Shunday qilib, uchburchakning o‘rta chizig‘i haqidagi har ikkala tasdiqni isbotladik.

Keltirilgan isbotdan ko‘rinib turibdiki, masala va teoremalarni vektor usuli bilan yechish masalalarni algebraik yechishga o‘xshaydi. Bu masalani yechishning bir tomonidir va u uch bosqichdan iborat.

*Birinchi bosqich.* Masala (teorema) shartini vektor ko‘rinishida yozish va qulay vektorlarni kiritish (o‘xshashlik — noma’lumlarni kiritish va algebraik tenglamani tuzish).

*Ikkinchi bosqich.* Vektor algebrasining vositalari orqali masala sharti shunday almashtiriladiki, masalani vektor ko‘rinishida yechish imkoniyati bo‘lsin (o‘xshashlik — algebraik tenglamani yechish).

*Uchinchi bosqich.* Olingan vektor munosabat dastlabki atamalarda talqin qilinadi (o‘xshashlik — tenglamani algebraik yechgandan so‘ng, javobni yozish).

## Savol, masala va topshiriqlar

**537.** $C$ nuqta $AB$ tomonning o'rtasi. Ifodalang:

1) $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\overrightarrow{CB}$ vektor orqali; 2) $\overrightarrow{AB}$ vektorni $\overrightarrow{CB}$ vektor orqali;

3) $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\overrightarrow{BA}$ vektor orqali.

**538.** $C$ nuqta $AB$ kesmani $A$ uchidan boshlab hisoblaganda $1:3$ nisbatda bo'ladi. Ifodalang: 1) $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\overrightarrow{CB}$ vektor orqali; 2) $\overrightarrow{AB}$ vektorni $\overrightarrow{CA}$ vektor orqali; 3) $\overrightarrow{CB}$ vektorni $\overrightarrow{BA}$ vektor orqali.

**539.** $AB$ va $CD$ kesmalar: 1) $AB = CD$; 2) $AB = 2CD$ ekani vektor tilida qanday yoziladi?

**540.** $AA_1$, $BB_1$ va $CC_1$ kesmalar — $ABC$ uchburchakning medianalari. $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ vektorlar orqali ifodalang.

**541.** Ifodalarni soddalashtiring:

1) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}\right)$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

**542.** $AB$ va $CD$ kesmalar $O$ nuqtada kesishadi. $AO = 2OB$ va $OD = 2OC$. Vektordan foydalanib, $BC \parallel AD$ va $BC = \frac{1}{2}AD$ ekanini isbot qiling.

**543.** $ABCD$ — parallelogramm va uning diagonallari kesishgan $O$ nuqta berilgan. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ ekanini isbotlang.

**544.** $ABCD$ — parallelogramm va shu parallelogrammdan tashqarida yotuvchi ixtiyoriy $O$ nuqta berilgan.

1) $\overrightarrow{OD}$ vektorni $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ va $\overrightarrow{OC}$ vektorlar orqali ifodalang.

2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ ekanini isbotlang.

**545.** $E$ va $F$ nuqtalar $ABCD$ to'rtburchakning $AC$ va $BD$ diagonallarining o'rtasi. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$ ekanini isbotlang.

**546.** $ABCD$ parallelogramm diagonallari $O$ nuqtada kesishadi, $P$ nuqta $OB$ ning o'rtasi. $\overrightarrow{AP}$ vektorni $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

**547.** $ABCD$ rombda $N$ nuqta $CD$ tomonning o'rtasi. $\overrightarrow{AN}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar orqali ifodalang.

**548.** $ABC$ uchburchakda $AA_1$ — mediana, $O$ — $AA_1$ ning o'rtasi. $\overrightarrow{BO}$ vektorni $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ vektorlar orqali ifodalang.

## 44- mavzu. VEKTORNING KOORDINATALARI

Tekislikda $xOy$ Dekart koordinatalar sistemasi, ya'ni koordinatalar boshi $O$ nuqta, koordinata o'qlarining yo'nalishi va masshtab birligi – birlik kesma berilgan bo'lsin. Bunda tekislikdagi ixtiyoriy $A$ nuqta o'zining abssissasi $x$ va ordinatasi $y$ ga ega bo'ladi: $A(x;\ y)$. Moduli bir birlikka ega bo'lgan hamda yo'nalishi $Ox$ o'qi bo'yicha yo'nalgan birlik vektorni $\vec{i}$ bilan, xuddi shuningdek, $Oy$ o'qi bo'yicha yo'nalgan birlik vektorni $\vec{j}$ bilan belgilaymiz (244- rasm).

Tekislikda koordinatalari $(x;\ y)$ bo'lgan $A$ nuqta berilgan bo'lsin. $OA_xA$ uchburchakni qaraylik. Bu uchburchakda $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Ammo $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ bo'ladi. Bundan

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (1)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu (1) tenglik vektorning *koordinata ifodasi* deb ataladi.

Demak, boshi koordinatalar boshida, uchi $A(x;\ y)$ nuqtada bo'lgan vektorni koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar orqali (1) ko'rinishda yozish mumkin ekan.

Bunda $(\vec{i};\ \vec{j})$ vektorlar juftligi *bazis vektorlar*, $x$ va $y$ sonlar esa $\vec{a}$ vektorning *koordinatalari* deb ataladi.

Agar vektorning (1) koordinata ifodasi ma'lum bo'lsa, vektor koordinatalari bilan berilgan deyiladi va qisqacha $\vec{a}(x;\ y)$ shaklida yoziladi:

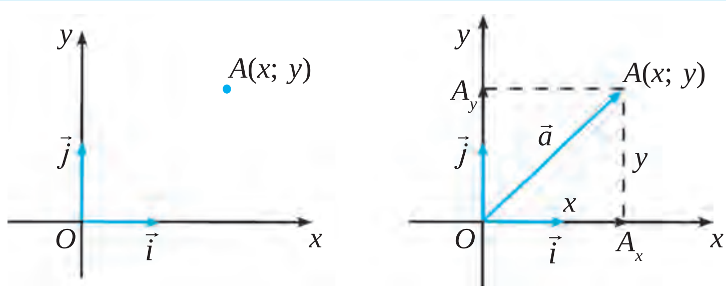
$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\,. \qquad (2)$$

**Ta'rif.** *Agar $A_1(x_1;\ y_1)$ va $A_2(x_2;\ y_2)$ bo'lsa, $x_2 - x_1$ va $y_2 - y_1$ sonlar $\overrightarrow{A_1A_2}$ vektorning koordinatalari deyiladi* (245- rasm).

Belgilanishi: $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

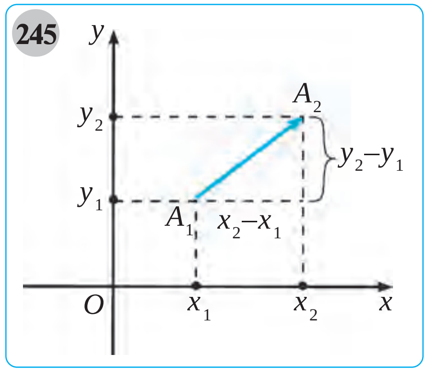
**Qoida.** *Vektorning koordinatalarini topish uchun uning oxirining koordinatalaridan boshining mos koordinatalarini ayirish kifoya.*

244




***a*** ***b***

Masalan, $\overline{OA}$ vektorning koordinatalari vektor oxiri $A$ ning koordinatalari bilan to‘la aniqlanadi, ya’ni vektor oxirining koordinatalariga teng bo‘ladi.




Agar $A(x;\ y)$ bo‘lsa, $\overline{OA}(x;\ y)$ bo‘ladi.

**1-xulosa.** Agar vektor oxirining koordinatalari vektorning koordinatalari bilan teng bo‘lsa, u holda berilgan vektorning boshi koordinatalar boshida bo‘ladi (244-b rasm).

**2-xulosa.** Agar $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektor bilan uning oxiri bo‘lgan $B(x_2;\ y_2)$ nuqtasi koordinatalari berilgan bo‘lsa, u holda vektor boshi $A(x_1;\ y_1)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun $B$ nuqtaning koordinatalaridan $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektorning mos koordinatalarini ayirish kifoya:

$$x_1 = x_2 - a_1;\quad y_1 = y_2 - a_2.$$

**3-xulosa.** Agar $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektor bilan uning boshi bo‘lgan $A(x_1;\ y_1)$ nuqtasi koordinatalari berilgan bo‘lsa, u holda vektor oxiri $B(x_2;\ y_2)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun $A$ nuqtaning koordinatalariga $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektorning mos koordinatalarini qo‘shish kifoya:

$$x_2 = x_1 + a_1;\quad y_2 = y_1 + a_2.$$

**Masala.** $A(-1;\ 5)$ nuqta $\vec{a}(2;\ -3)$ vektorning boshi bo‘lsa, bu vektor oxiri $B$ ning koordinatalarini toping.

Yechilishi. Berilgan ma’lumotlarni so‘nggi munosabatlarga qo‘yib, izlanayotgan koordinatalarni topamiz: $x_2 = -1 + 2 = 1$, $y_2 = 5 + (-3) = 2$.

Javob: $B(1;\ 2)$.

## *Savol, masala va topshiriqlar*

**549.** 1) Koordinatalar o‘qidagi birlik vektorlar qanday belgilanadi?
2) Boshi koordinatalar boshida bo‘lgan vektorning koordinatalari nimaga teng?

**550.** Vektorlarning koordinatalarini yozing:
1) $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$; 2) $\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$; 3) $\vec{b} = -7\vec{j}$; 4) $\vec{c} = -3\vec{i}$.

**551.** 1) $A(2;\ 5)$ va $B(4;\ 2)$; 2) $A(3;\ -4)$ va $B(1;\ -6)$; 3) $A(-5;\ -3)$ va $B(-1;\ 3)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

**552.** 1) $A(-3;\ 0)$ va $B(5;\ -4)$; 2) $A(0;\ -4)$ va $B(7;\ -2)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{AB}$ vektorlarning koordinatalarini toping.

**553.** Berilgan: $A(1;\ -1)$, $B(2;\ 0)$, $C(-1;\ 3)$. Agar: 1) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ bo‘lsa, $D$ nuqtaning koordinatalarini toping.

**554.** $A(5;\ -3)$ nuqta $\vec{a}(-7;\ -8)$ vektorning boshi bo‘lsa, bu vektor oxiri ($B$) ning koordinatalarini toping.

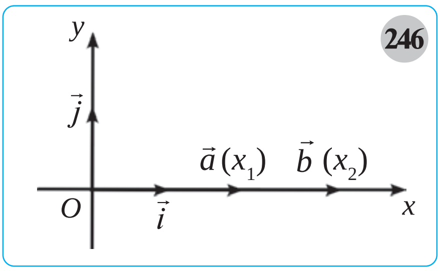
**555.** $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ va $D(5;\ 2)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{DB}$ vektorlar tengmi?

**556.** Agar: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ bo‘lsa, $\overrightarrow{BA}$ vektorning koordinatalari nimaga teng bo‘ladi?

## 45- mavzu. KOORDINATALARI BERILGAN VEKTORLAR USTIDA AMALLAR

Bizga $\vec{a}(x_1,\ y_1)$ va $\vec{b}(x_2,\ y_2)$, ya’ni vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo‘lsin. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo‘shish, ayirish va songa ko‘paytirish amallari bilan tanishamiz.

### 1. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo‘shish.




Avval sodda holni qaraylik. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar $Ox$ o‘qiga kollinear bo‘lsin. Bunda $y_1 = y_2 = 0$, $\vec{a}(x_1) = x_1 \cdot \vec{i}$ va $\vec{b}(x_2) = x_2 \cdot \vec{i}$ (246- rasm).

Bu yerda $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari yig‘indisiga teng bo‘ladi va $\vec{a} + \vec{b}$ vektor ham $Ox$ o‘qiga kollinear. Shuning uchun

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i}\,.$$

Demak, yig‘indi vektor $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning koordinatasi qo‘shiluvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning mos koordinatalari yig‘indisiga teng ekan. Kollinear vektorlarni qo‘shish uchun ularning mos koordinatalarini qo‘shish kifoya.

Endi ixtiyoriy $\vec{a}(x_1,\ y_1)$ va $\vec{b}(x_2,\ y_2)$ vektorlar yig‘indisini ko‘raylik:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}) + (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}) = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} =$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}\,.$$

Demak, $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning koordinatalari $(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$ ga teng.

Shunday qilib, *vektorlarni qo‘shish uchun ularning mos koordinatalarini qo‘shish kifoya ekan.*

**1- masala.** $\vec{a}(3;\ 5)$ va $\vec{b}(2,\ 7)$ vektorlar yig‘indisini toping.

Yechilishi. $\vec{a}(3;\ 5) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{b}(2;\ 7) = 2\vec{i} + 7\vec{j}$;

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + 2)\vec{i} + (5 + 7)\vec{j} = 5\vec{i} + 12\vec{j}\,.$$

Demak, $\vec{a}+\vec{b}$ vektorning koordinatalari (5; 12) ga teng.

Bu masala yechimini koordinatalar tekisligida tekshirib ko‘ring.

### 2. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni ayirish.

*Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni ayirish uchun ularning mos koordinatalarini ayirish kifoya, ya’ni:*

$$\vec{a}(x_1; y_1) - \vec{b}(x_2; y_2) = \vec{c}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2).$$

**2-masala.** $\vec{a}(-3;\ 5)$ va $\vec{b}(3;\ -3)$ vektorlar ayirmasini toping.

Yechilishi. $\vec{a}(-3; 5) - \vec{b}(3; -3) = \vec{c}(-3-3;\ 5-(-3)) = \vec{c}(-6;\ 8)$.

### 3. Koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko‘paytirish.

Koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko‘paytirish amali bilan tanishamiz.

$\vec{a}(x_1,\ y_1)$ vektorning $k$ songa ko‘paytmasi $\vec{b}=k\vec{a}$ ni topamiz:

$$\vec{b} = k\cdot\vec{a} = k\cdot(x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = kx_1\vec{i} + ky_1\vec{j} = \vec{b}(kx_1;\ \ ky_1).$$

Demak, *vektorni songa ko‘paytirish uchun uning koordinatalarini shu songa ko‘paytirish yetarli ekan.*

**3-masala.** $\vec{a}(3;\ 5)$ vektorga qarama-qarshi $\vec{b}$ vektorni toping.

Yechilishi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi $\vec{b}$ vektor quyidagiga teng:

$$\vec{b} = -\vec{a} = (-1)\vec{a} = -1\cdot\vec{a}(3;\ 5) = \vec{b}(-1\cdot 3;\ -1\cdot 5) = \vec{b}(-3;\ -5).$$

Demak, $\vec{a}(3;\ 5)$ va $\vec{b}(-3;\ -5)$ vektorlar qarama-qarshi vektorlardir.

Umuman: $\vec{b} = -\vec{a} = -(x_1\cdot\vec{i} + y_1\cdot\vec{j}) = -x_1\cdot\vec{i} - y_1\cdot\vec{j} = \vec{b}(-x_1;\ -y_1)$.

**4-masala.** Agar $\vec{a}(-3;\ 4)$ bo‘lsa, $\vec{b}=4\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechilishi. $\vec{b} = 4\vec{a} = 4\cdot\vec{a}(-3;\ 4) = \vec{b}(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4) = \vec{b}(-12;\ 16)$.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**557.** 1) Vektorning koordinatalari deganda nimani tushunasiz?
2) Koordinatalari berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar qanday bajariladi?

**558.** Agar $\vec{a}(-4;\ 8)$ va $\vec{b}(1;\ -4)$ bo‘lsa, shu vektorlar: 1) yig‘indisining; 2) ayirmasinining koordinatalarini toping.

**559.** $\vec{a}(-2;\ 6)$ va $\vec{b}(-2;\ 4)$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

**560.** $\vec{a}(2;\ 3)$ va $\vec{b}(-1;\ 0)$ vektorlar berilgan. 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-2\vec{b}-4\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

**561.** $\vec{a}(2;-3)$ va $\vec{b}(-2;-3)$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

**562.** $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ va $\vec{b}=-2\vec{j}$ vektorlar berilgan.

1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

**563.** $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ va $\vec{b}=3\vec{i}$ vektorlar berilgan.

1) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

**564.** $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ va $\vec{b}=2\vec{j}$ vektorlar berilgan.

1) $\vec{c}=-\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

## 46- mavzu. VEKTORLARNING SKALAR KO‘PAYTMASI

**1. Ikki vektor skalar ko‘paytmasining ta’rifi.** Vektor moduli va yo‘nalishi bilan to‘la aniqlanadigan kattalik ekanini yana bir bor eslatamiz. Vektorlarning ko‘paytmasi tushunchasi ko‘paytirish natijasida hosil bo‘ladigan natijaning qanday bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi. Ko‘paytirish natijasi vektor yoki son bo‘lishi mumkin. Biz vektorni ko‘paytirish natijasi son bo‘ladigan hol bilan tanishamiz. Natija skalar (son) bo‘lgani uchun bu ko‘paytma vektorlarning *skalar ko‘paytmasi* deb nomlangan.

**Ta’rif.** *$\vec{a}(x_1;\, y_1)$ va $\vec{b}(x_2;\, y_2)$ vektorlarning* ***skalar ko‘paytmasi*** *deb, $x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$ songa aytiladi.*

Shunday qilib, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2 .$$

Bu koordinatalari bilan berilgan *ikki vektorning skalar ko‘paytmasini hisoblash* formulasidir.

**2. Vektor uzunligini topish.** Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalar ko‘paytmasini hisoblash formulasi yordamida vektorlarga oid turli kattaliklarni aniqlash mumkin.

Bizga $\vec{a}(x_1;\, y_1)$ vektor berilgan bo‘lsin. Vektorlarning skalar ko‘paytmasini yozishda ham sonlarning ko‘paytmasi kabi yozuvdan foydalaniladi. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ skalar ko‘paytma $\vec{a}^2$ kabi belgilanadi va *skalar kvadrat* deb ataladi. Ravshanki, $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$. Bundan

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}, \qquad (1)$$

ya'ni vektorning moduli o'zini-o'ziga skalar ko'paytmasidan (vektor kvadratidan) olingan arifmetik kvadrat ildizga teng ekanligi kelib chiqadi.

Vektor koordinatalari bilan berilgani uchun:

$$\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2. \tag{2}$$

(1) va (2) tengliklardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \tag{3}$$

Bu *vektorning uzunligini hisoblash* formulasidir.

**Masala.** $\vec{a}(-12; 5)$ vektorning modulini toping.

Yechilishi. $|\vec{a}| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

> *Vektorlar koordinatalari bilan berilganda ularning skalar ko'paytmasi va modulini hisoblash mumkin.*

Vektorlarning skalar ko'paytmasi ta'rifidan $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2)$ va $\vec{c}(x_3; y_3)$ vektorlar uchun

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

tenglik o'rinli ekani kelib chiqadi. Buni mustaqil isbot qiling.

### *Savol, masala va topshiriqlar*

**565.** 1) Vektorlarning skalar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2) Vektorning uzunligi qanday topiladi?

**566.** Vektorlarning skalar ko'paytmasini toping:
1) $\vec{a}(2; -3)$ va $\vec{b}(-2; 3)$;
2) $\vec{a}(-3; -4)$ va $\vec{b}(5; -6)$;
3) $\vec{m}(-1; 5)$ va $\vec{n}(-2; 4)$;
4) $\vec{m}(7; 2)$ va $\vec{n}(-4; -3)$.

**567.** 1) $A(2; 4)$, $B(3; 6)$ va $C(6; 14)$ nuqtalar berilgan. $|\overline{AB} + \overline{AC}|$ ni toping.
2) $B(1; 2)$ va $C(-2; 6)$ nuqtalar orasidagi masofaning yarmini toping.

**568.** 1) $\vec{a}(7; 2)$, $\vec{b}(0; -1)$; 2) $\vec{a}(-4; -6)$, $\vec{b}(2; -1)$; 3) $\vec{a}(5; -8)$, $\vec{b}(-4; 2)$ vektorlar berilgan. $2\vec{a} + 4\vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

**569.** Agar: 1) $\vec{a}(-4; x)$ vektorning moduli 5 ga; 2) $\vec{a}(12; -x)$ vektorning moduli 13 ga teng bo'lsa, $x$ ning qiymatini toping.

**570.** Vektorlarning skalar ko'paytmasini toping:
1) $\vec{a}(4; 5)$ va $\vec{b}(3; 7)$;
2) $\vec{a}(-3; -5)$ va $\vec{b}(7; -4)$;
3) $\vec{m}(-2; 0)$ va $\vec{n}(8; -9)$;
4) $\vec{m}(6; 2)$ va $\vec{n}(-3; 9)$.

**571.** $\vec{a}(-1;\ -4)$ va $\vec{b}(-2;\ 3)$ vektorlar berilgan. $-2\vec{a}+\vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

**572.** $\vec{a}(5;\ 1)$ va $\vec{b}(-2;\ 3)$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}+\vec{b}|$ ni hisoblang.

## 47- mavzu. VEKTORLARNING FIZIK VA GEOMETRIK TALQINLARI

**1.** Jismga ta'sir etadigan kuch (qo'yilgan kuch)ni yo'nalishi ta'sir etish yo'nalishi bilan bir xil, absolut qiymati esa kuch miqdoriga proporsional vektor bilan tasvirlash qulay. Amaliyot shuni ko'rsatadiki, kuchlarni bunday tasvirlash usulida jismga bir nuqtada ta'sir qiluvchi ikki yoki bir nechta kuchning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarga mos vektorlarning yig'indisi bilan tasvirlanadi. 247-rasmda jismga $A$ nuqtada $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan tasvirlangan ikkita kuch ta'sir etadi. Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$

vektor bilan tasvirlanadi.

Kuchni berilgan ikki yo'nalishda ta'sir etuvchi kuchlarning yig'indisi shaklida tasvirlash *kuchni yo'nalishlar bo'yicha yoyish (ajratish)* deyiladi.

**2.** Fizikada jismning *ilgarilama harakati* deb shunday harakatga aytiladiki, bunda jismning barcha nuqtalari bir xil vaqt oralig'ida, bir xil yo'nalishda bir xil masofaga siljiydi. Shunday qilib, fizikadagi *siljish vektori* darsligimizda qabul qilingan ma'nodagi vektor ekan. Farq shundaki, geometriya darsligida faqat tekislikdagi vektorlar to'g'risidagina gap yuritiladi, fiziklar esa boshidanoq fazodagi vektorlar (kollej va akademik litseylarda tanishasiz) to'g'risida ham mulohaza yuritadilar.

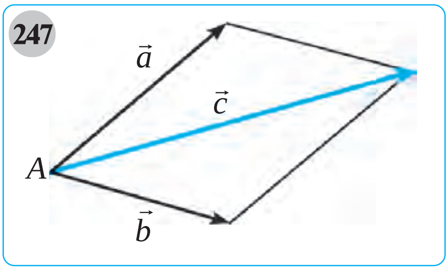
**3.** Fizikada «vektor» so'zi ancha keng ma'noda ishlatiladi. Masalan, tezlik vektor deb yuritiladi. Ammo geometrik vektorning uzunligi metrlarda, tezlikning absolut qiymati esa sekundiga metrlar (m/s)da o'lchanishining o'zidanoq tezlikning geometriyada qabul qilingan ma'nodagi vektor emasligi ko'rinib turibdi. Biz geometriyada tezlikni vektor emas, balki *vektor kattalik* deymiz.

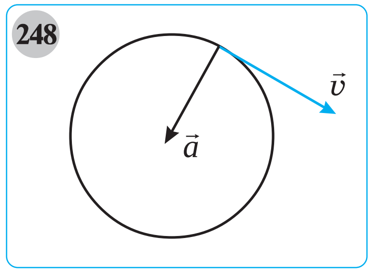
Umuman, vektor kattaliklar, o'zlarining modulidan tashqari, yo'nalishi bilan aniqlanadi. Ma'lum masshtab tanlab olinganda vektor kattaliklar geometrik vektorlar bilan tasvirlanadi.

Bunda vektor kattaliklarni qo'shishga ularni tasvirlovchi geometrik vektorlarni qo'shish, vektor kattaliklarni sonlarga ko'paytirishga esa ularni tasvirlovchi geometrik vektorlarni o'sha sonlarga ko'paytirish mos keladi.

Bir misol ko'raylik. 248- rasmda $\vec{v}$ vektor aylanma harakatning tezligini, $\vec{a}$ vektor esa tezlanishni ifodalashi mumkin. Biroq bu vektorlarni fizika nuqtayi nazaridan qo'shish ma'noga ega emas.

Shunday bo'lsa-da, fizikada tezlik yoki tezlanishlarni vektorlar deb to'g'-ridan-to'g'ri aytiladi. Gap nima to'g'risida ketayotganligi aniq tasavvur qilinsa, bunday so'z erkinligi umumiylikka hech bir ziyon keltirmaydi. Xuddi shunga o'xshash biz o'z vaqtida uchburchak tomonining uzunligini, qisqalik uchun, oddiygina qilib uning tomoni deb aytishga kelishib olgan edik va hokazo.




## 5- § ga doir qo'shimcha mashqlar

**573.** Quyidagi da'vo to'g'rimi: ixtiyoriy ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ tenglikni qanoatlantiradigan $k$ son mavjud bo'lganda va faqat shundagina kollinear bo'ladi?

**574.** Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslariga parallel va ular uzunligining yarmiga teng ekanini isbot qiling.

**575.** $ABC$ uchburchak berilgan. $A_1$, $B_1$, $C_1$ – uchburchak $BC$, $AC$ va $AB$ tomonlarining o'rtalari, $O$ – tekislikning ixtiyoriy nuqtasi. Quyidagi tenglikni isbotlang: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$.

**576.** $D$ va $E$ nuqtalar $ABC$ uchburchak $AB$ va $BC$ tomonlarining o'rtalari. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$ ekanini isbotlang.

**577.** $K$ nuqta $ABCD$ parallelogramm $AD$ tomonining o'rtasi. $\overrightarrow{KC}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar orqali ifodalang.

**578.** $B$ (4; 2) nuqta $\vec{a}(-2; 3)$ vektorning oxiri bo'lsa, bu vektor boshi ($A$) ning koordinatalarini toping.

**579.** $A(-2;\ 3)$ nuqta $\vec{a}(-3;\ 8)$ vektorning boshi bo'lsa, bu vektor oxiri ($B$) ning koordinatalarini toping.

**580.** Agar: 1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$; 2) $A(-2;\ 1)$, $B(-4;\ 3)$ bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalari nimaga teng bo'ladi?

**581.** $\vec{a}(-4;\ 4)$ va $\vec{b}(-4;\ 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

**582.** $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ va $C(6;\ 14)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektorning koordinatalarini toping.

**583.** $\vec{a} = -5\vec{i} - \vec{j}$ va $\vec{b} = -1,5\vec{j}$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b}$; 2) $\vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

**584.** Agar: 1) $\vec{a}(2;\ 1)$ va $\vec{b}(-3;\ 4)$; 2) $\vec{a}(2;\ -0,5)$ va $\vec{b}(3;\ 2)$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar skalar ko'paytmasini toping.

**585.** Tekislikda to‘rtta $A$, $B$, $C$ va $D$ nuqtalarni belgilang. Isbotlang: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$. Xuddi shunga o‘xshash tenglik tuzing.

**586.** Agar: 1) $A(0; 1)$ va $B(1; 0)$; 2) $A(-2; 1)$ va $B(-4; 2)$; 3) $A(-3; -1)$ va $B(-3; -12)$; 4) $A(p; q)$ va $B(-p; -q)$ bo‘lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini va uzunligini toping.

**587.** $\vec{a}(1; 3)$, $\vec{b}(-2; 4)$, $\vec{c}(-1; -3)$, $\vec{d}(-4; 4)$, $\vec{p}(3; 9)$, $\vec{q}(-1; 2)$ vektorlar berilgan. Shular ichidan: 1) yo‘nalishdosh vektorlarni; 2) bir juft qarama-qarshi yo‘nalgan vektorlarni toping.

## 7- TEST

**1.** $ABCD$ — parallelogramm. $O$ — $AC$ va $BD$ diagonallarning kesishish nuqtasi. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$ ni toping.

A) $\overrightarrow{OC}$; B) $\overrightarrow{BO}$; D) $\overrightarrow{OB}$; E) $\overrightarrow{CO}$.

**2.** $MKPC$ — parallelogramm. $E$ — $MP$ va $KC$ diagonallarning kesishish nuqtasi. $\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{EP}$ ni toping.

A) $\overrightarrow{MK}$; B) $\overrightarrow{KC}$; D) $\overrightarrow{CE}$; E) $\overrightarrow{EK}$.

**3.** $PE$ kesma — $MPK$ uchburchakning medianasi. $\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{MP}$ ni toping.

A) $\overrightarrow{PK}$; B) $\overrightarrow{PE}$; D) $\overrightarrow{EP}$; E) $\overrightarrow{KP}$.

**4.** $AD$ — $ABC$ uchburchakning medianasi. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DB}$ ni toping.

A) $\overrightarrow{BA}$; B) $\overrightarrow{AB}$; D) $\overrightarrow{DA}$; E) $\overrightarrow{AD}$.

**5.** $\vec{a}(7; 3)$ va $\vec{b}(5; 2)$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}+\vec{b}|$ ni hisoblang.

A) 9; B) 5; D) 8; E) 13.

**6.** $A(2; 4)$, $B(3; 6)$ va $C(6; 14)$ nuqtalar berilgan. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$ ni hisoblang.

A) 14; B) 12; D) 10; E) 13.

**7.** $\vec{a}(-3; 1)$ va $\vec{b}(5; -6)$ vektorlar berilgan. $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) (14; −9); B) (4; −3); D) (14; −3); E) (9; 3).

**8.** $A(-3; 0)$ va $B(-5; 4)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{BA}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) (–8; –4); B) (–8; 4); D) (2; –4); E) (8; –4).

**9.** $\vec{a}(2; -3)$ va $\vec{b}(-2; -3)$ vektorlar berilgan. $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) (–3; 6); B) (6; 3); D) (2; –3); E) (–2; –9).

**10.** $\vec{a}(3;2)$ va $\vec{b}(0;-1)$ vektorlar berilgan. $-2\vec{a}+4\vec{b}$ vektorning modulini toping.

A) 10; B) 6; D) 8; E) 3.

**11.** Ifodani soddalashtiring: $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}$.

A) $\vec{O}$; B) $\overrightarrow{DA}$; D) $2\overrightarrow{AC}$; E) $\overrightarrow{CA}$.

**12.** Ifodani soddalashtiring: $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{KC}$.

A) $\vec{O}$; B) $\overrightarrow{AB}$; D) $2\overrightarrow{KC}$; E) $\overrightarrow{AC}$.

**13.** Ifodani soddalashtiring: $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}$.

A) $\vec{O}$; B) $\overrightarrow{BC}$; D) $2\overrightarrow{CB}$; E) $\overrightarrow{CA}$.

**14.** Ifodani soddalashtiring: $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

A) $\vec{O}$; B) $\overrightarrow{CA}$; D) $\overrightarrow{AC}$; E) $\overrightarrow{BA}$.

## *Tarixiy ma'lumotlar*

Vektor tushunchasi XIX asrning o'rtalarida bir vaqtda bir nechta matematikning ishlarida uchraydi. Tekislikda vektorlar bilan ish ko'rishni ilk bor 1835-yili italiyalik olim **Bellivitis** (1803–1880) boshlab berdi. Bundan tashqari, **K. Gauss** (1777–1855) 1831- yili «Bikvadratik solishtirmalar nazariyasi» nomli asarida hamda **Y. Argan** (1768–1822) va **K. Vessel** (1745–1818)ning kompleks sonlarni geometrik tasvirlashga doir ishlarida vektor tushunchasi aytib o'tilgan. Nihoyat, **V. Gamilton** (1805–1865) va **R. Grassman** (1854–1901)larning vektorlar ustida amallar bajarishga doir ishlari vujudga keldi. Birinchi bo'lib Gamilton vektor va skalar kattaliklarni farq qilishni tushuntirdi. Gamiltonning o'sha ishida «skalar», «vektor» atamalari yuzaga keldi. «Vektor» atamasini Gamilton lotincha *vehere* – «tashimoq», «sudramoq» so'zidan hosil qilgan (1845), *vektor* – «tashuvchi», «eltuvchi» demakdir.

1806- yili Argan yo'nalgan kesmalarni harf ustiga chiziq qo'yish bilan belgilagan. Vektorlarning boshi va oxirini ko'rsatish uchun **A. Myobius** (1790–1868) uni $AB$ ko'rinishda belgilagan. Grassman vektorlarni «kesmalar» deb atagan, u koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan $e_1$, $e_2$ birlik vektorlarni va vektorlarni $x_1e_1+x_2e_2$ ko'rinishida tasvirlashni tavsiya qilgan. Gamilton va **J. Gibbs** (1839–1903) vektorlarni yunoncha harflar bilan belgilagan. Vektorlarni qora harflar bilan belgilashni 1891- yili **A. Xevisayd** (1850–1925) taklif etgan.

Vektorning uzunligini $|AB|$ ko'rinishda belgilashni 1905- yili **R. Gans** (1880) kiritgan. «Modul» so'zini 1814- yili lotincha *modulus* – «o'lchov» so'zidan Argan hosil qilgan. Keyinchalik uni **A. Koshi** (1789–1857) ishlatgan. Bu atama XX asrda keng qo'llanila boshlangan.

## 8- SINFDA O‘TILGAN MAVZULARNI TAKRORLASH UCHUN MASHQLAR

**588.** $ABCD$ parallelogrammda: 1) agar $BC$ tomon $AB$ dan 8 sm uzun, perimetri esa 64 sm ga teng bo‘lsa, tomonlarni; 2) agar $\angle A = 55°$ bo‘lsa, burchaklarni toping.

**589.** Agar parallelogrammning perimetri 2 m ga teng va: 1) qo‘shni tomonlari ayirmasi 1 sm ga teng; 2) qo‘shni tomonlarining nisbati 2 ga teng; 3) ikkita teng yonli uchburchaklardan tashkil topgan bo‘lsa, parallelogramm tomonlari nimaga teng?

**590.** $ABCD$ parallelogramm $A$ burchagining bissektrisasi $BC$ tomonni $P$ nuqtada kesadi va shu bilan birga $BP = PC$. Agar parallelogrammning perimetri 42 sm ga teng bo‘lsa, uning tomonlarini toping.

**591.** Ikkitta $ABCD$ va $ANCP$ parallelogrammni yasang.

1) $AC$, $BD$ va $NP$ kesmalar bir nuqtada kesishishini isbotlang.

2) $BNDP$ to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

**592.** Agar to‘rtburchakning ikki juft teng tomonlari bo‘lsa, bu to‘rtburchak har doim ham parallelogramm bo‘ladimi?

**593.** Parallelogramm burchaklaridan birining bissektrisasi o‘zi kesib o‘tadigan tomonni 7 sm va 9 sm li kesmalarga bo‘ladi. Shu parallelogrammning perimetrini toping.

**594.** To‘g‘ri to‘rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga o‘tkazilgan perpendikularlar, mos ravishda, 5 sm va 7 sm ga teng. Bu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetri va yuzini toping.

**595.** To‘g‘ri to‘rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga o‘tkazilgan perpendikularlar, mos ravishda, 4 sm va 6 sm ga teng. Bu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetrini va yuzini toping.

**596.** 1) $ABCD$ parallelogrammda $\angle A = 75°$. Parallelogrammning qolgan burchaklari nimaga teng?

2) Parallelogrammning ikkita qarama-qarshi burchaklarining yig‘indisi 220° ga teng. Shu parallelogrammning burchaklari nimaga teng?

**597.** Agar $ABCD$ rombda $\angle B = 100°$ va $AB = 15$ sm bo‘lsa, uning perimetri va burchaklarini toping.

**598.** To‘g‘ri to‘rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga o‘tkazilgan perpendikularlar, mos ravishda, 4 sm va 11 sm ga teng. Bu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini toping.

**599.** $ABCD$ romb berilgan. $AC$ va $BD$ diagonallar, mos ravishda, 30 sm va 12 sm ga teng. Rombning yuzini toping.

**600.** 1) $ABCD$ teng yonli trapetsiyada $BC = 20$ sm, $AB = 24$ sm va $\angle D = 60°$ bo‘lsa, uning $AD$ asosini toping.

2) Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 105° ga teng. Trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

**601.** Trapetsiyaning ketma-ket olingan burchaklarining nisbati quyidagicha bo‘lishi mumkinmi: 1) 7 : 4 : 3 : 5; 2) 8 : 7 : 13 : 14?

**602.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning asoslari $a$ va $b$ ga, burchaklaridan biri esa $\alpha$ ga teng. Agar: 1) $a=7$ sm, $b=4$ sm, $\alpha=60°$ bo‘lsa, katta yon tomonni toping; 2) $a=15$ sm, $b=10$ sm, $\alpha=45°$ bo‘lsa, kichik yon tomonni toping.

**603.** Parallelogrammning yuzi 40 sm$^2$ ga, tomonlari esa 10 sm va 8 sm ga teng. Shu parallelogrammning ikkala balandligini toping.

**604.** $ABCD$ rombning diagonallari 15 sm va 36 sm ga teng. $AC$ diagonalida $P$ nuqta shunday olinganki, unda $AP:PC=4:1$ nisbatda. $APD$ uchburchakning yuzini toping.

**605.** Teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 20 sm ga teng. Shu uchburchakning yuzini toping.

**606.** Teng yonli trapetsiyaning perimetri 32 sm ga, yon tomoni 5 sm ga, yuzi esa 44 sm$^2$ ga teng. Trapetsiyaning balandligini toping.

**607.** To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning yuzi 120 sm$^2$ ga, perimetri 56 sm ga, kichik yon tomoni esa 6 sm ga teng. Katta yon tomonini toping.

**608.** $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak $C$ uchining bissektrisasi $AD$ tomonni $P$ nuqtada kesadi. Agar $AP=10$ sm, $PD=14$ sm ga teng bo‘lsa, shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini toping.

**609.** To‘g‘ri to‘rtburchak bilan parallelogramm bir asosga va bir xil perimetrga ega. Shu parallelogramm bilan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzlarini taqqoslang.

**610.** Uchburchakning tomonlari 21, 72 va 75 ga teng. Shu uchburchakning yuzini toping.

**611.** $\triangle ABC$ da $AE$ va $BD$ — balandliklar. $AC=20$ sm, $BD=16$ sm va $BC=32$ sm. $AE$ ni toping.

**612.** Teng yonli trapetsiyaning diagonali 50 sm ga, balandligi esa 30 sm ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

**613.** Aylanaga ichki chizilgan $BAC$ burchak 45° ga teng, u $BC$ yoyga tiraladi. $BOC$ burchakni toping, bunda $O$ — aylana markazi.

**614.** To‘g‘ri burchakli $ABC$ uchburchakda ($\angle C=90°$) $\angle A=30°$, $AC=2\sqrt{3}$. Markazi $A$ nuqtada va radiusi 2,2 ga teng bo‘lgan aylana o‘tkazilgan. Shu aylana $BC$ tomon bilan nechta umumiy nuqtaga ega?

**615.** Tashqi chizilgan to‘rtburchakning ikkita qarama-qarshi tomonlarining yig‘indisi 35 sm ga teng. Shu to‘rtburchakning perimetrini toping.

**616.** Biror $ABCD$ parallelogrammni chizing. Vektorlarni yasang:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

**617.** Quyidagi vektorlar kollinearmi: 1) $\vec{a}(-2;\ 1)$ va $\vec{b}(4;\ -2)$; 2) $\vec{a}(1;\ -3)$ va $\vec{b}(1;\ 3)$; 3) $\vec{a}(3;\ -2)$ va $\vec{b}(-3;\ 2)$; 4) $\vec{a}(0;\ -1)$ va $\vec{b}(1;\ 0)$?

**618.** Vektorlar yig‘indisini toping: $\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HK}+\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{MT}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{PQ}$.

**619.** $\overrightarrow{FK}$ vektorni $\overrightarrow{EF}$ va $\overrightarrow{EK}$ vektorlar orqali ifodalang.

**620.** $A(-1;\,2)$, $B(-4;\,-2)$, $C(-1;\,3)$, $D(-4;\,-2)$ bo‘lsin. Hisoblang:

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DB}$.

## 8- TEST

**1.** To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari 6 va 8 ga teng. Uning gipotenuzasiga tushirilgan balandligini toping.

A) 4,8; B) 5; D) 4,5; E) 4,7.

**2.** To‘rtburchakning burchaklari o‘zaro 3 : 5 : 4 : 6 nisbatda. To‘rtburchakning kichik burchagini toping.

A) 80°; B) 30°; D) 60°; E) 40°.

**3.** Qavariq to‘rtburchakning diagonallari uni nechta uchburchakka ajratadi?

A) 4; B) 5; D) 6; E) 8.

**4.** To‘g‘ri to‘rtburchakning eni 5 ga teng, bo‘yi undan 7 ga ortiq. To‘g‘ri to‘rtburchakning perimetrini hisoblang.

A) 32; B) 34; D) 24; E) 26.

**5.** Har bir ichki burchagi 156° bo‘lgan qavariq ko‘pburchakning nechta tomoni bor?

A) 10; B) 15; D) 6; E) 12.

**6.** To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi 20% va eni 10% ga orttirilsa, uning yuzi necha foiz ortadi?

A) 20%; B) 35%; C) 27%; D) 32%.

**7.** Rombning yuzi 24 ga, diagonallaridan biri esa 6 ga teng. Uning tomonini toping.

A) 10; B) 5; C) 8; D) 4,8.

**8.** Rombning balandligi 5 ga, diagonallarining ko‘paytmasi 80 ga teng. Uning perimetrini toping.

A) 32; B) 16; C) 24; D) 28.

**9.** $\vec{a}(2;\,-3)$ va $\vec{b}\,(-2;\,-3)$ vektor berilgan. $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) (−6; −3); B) (−3; 6); C) (−2; −9); D) (2; −3).

**10.** $\vec{a}(3;\,2)$ va $\vec{b}\,(0;\,-1)$ vektor berilgan. $2\vec{a}-4\vec{b}$ vektorning modulini toping.

A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

# JAVOBLAR

**7- sinfda o‘tilganlarni takrorlash.** **2.** 85° dan. **3.** $\angle AOC = 110°$. **5.** 1) 80°; 2) 38°; 3) 2°. **6.** 1) 72° va 108°; 3) 36° va 144°; 4) 90° va 90°. **7.** 1) 70°, 110°, 70°, 110°. **8.** 104°. **9.** Yo‘q. **11.** $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COD = 60°$, $\angle COE = 110°$. **12.** Ha, teng. **18.** 3. **19.** 9. **20.** 8 sm, 8 sm, 12 sm. **21.** $BC = 12$ sm. **22.** 16 sm, 24 sm, 32 sm. **24.** 9. **25.** $P = (3x - 3)$ sm. **30.** Ha, teng. **31.** 52°, 65°. **42.** 1) 115°. **43.** 58°.

**1- §.** **3.** 1) 3 ta; 2) 4 ta. **4.** $(n - 2)$ ta. **6.** 1) 8 ta, 44 ta; 2) 27 ta, 405 ta. **7.** 8. **9.** 12 sm, 36 sm. **12.** 3 sm. **13.** 21 ta tomon va 189 ta diagonal. **14.** 1) 3 ta; 2) 9 ta. **15.** 18 sm. **20.** 36°, 72°, 108°, 144°. **22.** 1) $n = 8$; 3) $n = 24$. **23.** a) 1) $n = 10$ ta; 3) $n = 36$ ta; b) 2) $n = 15$ ta; 3) $n= 6$ ta. Ko‘rsatma. Ichki burchaklari teng bo‘lgan $n$ burchakning har bir burchagi $180°(n - 2) : n$ ga teng. **24.** $n = 14$. **25.** 1) $n \geq 5$ da o‘tmas burchak; 2) $n = 4$ da to‘g‘ri burchak (to‘g‘ri to‘rtburchak, kvadrat); 3) $n = 3$ da o‘tkir burchak (uchburchak) bo‘lishi mumkin. **26.** 180°. **27.** $n = 5$. **29.** 1) $n = 36$; 2) $n = 30$. **32.** 2) 60 sm. **34.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°. **35.** 70°, 110°, 70°, 110°. **36.** 12 sm, 15 sm, 12 sm. **37.** $\angle C = 30°$, $\angle D = 150°$. **38.** 16 sm, 4 sm. **41.** 10 sm, 15 sm, 10 sm, 15 sm. **42.** $P_{ABO}= 20$ sm, $P_{BOC} = 24$ sm. **51.** $ABCD$ to‘rtburchak parallelogramm bo‘ladi. **53.** 12 sm, 15 sm. **54.** 72 sm. **57.** 12 sm. **61.** $AB = DC = 4$ sm, $BC = AD = 8$ sm. **64.** 1) Ikkita teng: teng tomonli uchburchakdan yoki teng yonli uchburchakdan; 2) to‘rtta teng to‘g‘ri burchakli uchburchakdan romb yasash mumkin. **73.** $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = \angle D = 140°$. **74.** 64 sm. **77.** 1) 10 sm. **81.** 57 sm. **83.** 18 dm 4 sm. **88.** 1) 8 sm; 2) 12,3 sm. **89.** $P_{DEF} = 60$ sm, $DE = 25$ sm, $EF = 15$ sm, $DF = 20$ sm. **90.** $m + n$; 16 dm. **92.** 2) $A_1B_1 = 60$ sm, $B_1C_1 = 24$ sm, $A_1C_1 = 48$ sm. **93.** 1) 6 sm. **95.** 7,3 sm. **96.** 28 sm. **100.** Mumkin. **101.** 150°. **103.** 70°, 81°. **104.** 1) 20 sm; 2) 50°. **105.** 23 sm. **108.** 108°; 94°. **109.** 48 sm. **110.** 90°, 90°, 110°, 70°. **113.** 132 sm. **114.** 33,5 sm, 9,5 sm. **119.** 60°, 120°, 120°, 60°. **120.** 55°, 125°, 125°, 55°. **122.** 3,4 dm. **124.** 1) 14 sm. **125.** 20 sm. **126.** 12 sm. **127.** 40 sm. **131.** 24 sm, 12 sm. **133.** $AE = 2$ sm, $EF = 8$ sm, $FD = 2{,}5$ sm, $AD = 10$ sm. **134.** 30 sm, 10 sm. **135.** 4 sm, 10 sm. **136.** 22 sm, 10 sm. **138.** 4 sm, 2 sm. **140.** $\angle C = 45°$, $\angle D = 135°$. **144.** 44 sm. **145.** 55°, 125°, 55°. **148.** 25 sm, 15 sm. **151.** $AC = 5$ sm. **152.** $OB_1 = 3{,}2$ sm, $OB_2 = 4{,}8$ sm, $OB_3 = 6{,}4$ sm. **154.** 4,5 sm, 9 sm, 13,5 sm. **155.** 18 sm, 21 sm. **157.** $p$. **159.** Ha, parallel bo‘ladi. **161.** 18 sm. **163.** 1) $AC : BD = 0{,}5$; $BD : AC = 2$; 2) o‘zgarmaydi. **165.** 2) 6,25 sm. **166.** 1) Ha, chunki $1{,}6 \cdot 1{,}8 = 0{,}6 \cdot 4{,}8$; 2) yo‘q, chunki $\frac{5}{6} \neq \frac{10}{9{,}5}$. **170.** $AB = CA \cdot EF : CF$. $AB = 600$ m. **172.** 1) 20 sm, 15 sm. **180.** 42 sm, 38 sm, 34 sm. **181.** 5 dm. **182.** 1) 16 sm. **189.** $A_1(a; -b)$ va $A_2(-a; b)$. **196.** $ABCD$ kvadrat $AC$ o‘qqa nisbatan simmetriyada o‘ziga-o‘zi o‘tadi. **197.** $A_1(-4; -4)$ va $A_2(4; 4)$. **198.** $C(0; -2)$. **200.** 1) 2 ta, rombning diagonallari; 2) 4 ta, o‘rta perpendikular va kvadrat diagonallari yotgan to‘g‘ri chiziqlar; 4) 1 ta, asosiga o‘tkazilgan medianasi yotgan to‘g‘ri chiziq teng yonli ucburchakning simmetriya o‘qi bo‘ladi. **201.** 1) 12 sm. **206.** 1) 6 sm, 14 sm, 14 sm; 2) 5 sm, 10 sm, 10 sm; 3) 24 sm, 21 sm, 21 sm yoki 21 sm, 24 sm, 24 sm. **207.** 1) A, B, C, D, E, M, T, U, V, W, Y; 2) H, I, O, X. **209.** $P_{EBCF}= 55$ sm, $P_{ABCD} = 70$ sm. **210.** $AB = BC = 16{,}5$ sm; $AC = 13$ sm. **211.** Agar u o‘q simmetriyasiga parallel bo‘lsa. **216.** 2) $A_1(2; -2)$, $B_1(-2; 1)$. **219.** 3) Ko‘rsatma. Koordinatalar boshiga nisbatan simmetriyada nuqtaning koordinatalari ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi. 4) Ko‘rsatma. Koordinatalar burchaklari bissektrisasiga nisbatan simmetriyada nuqta koordinatalari o‘z o‘rinlarini almashtiradi. **222.** 6 raqami 9 raqamiga o‘tadi. **223.** H, I, N, O, S, X, Z. **225.** 1) $A_1(1; -1)$, $B_1(-2; 0)$, $C_1(2; -3)$, $D_1(0; -1)$, $E_1(-3; -4)$, $F_1(-2; 2)$. **226.** 1) $A$ va $C$; 2) $A$ va $E$; 3) $B$ va $D$. **234.** 1) $Ox$ o‘qiga nisbatan simmetriyada: $A(2; -2)$, $B(-2; 0)$, $C(3; -4)$, $D(0; -2)$, $E(-2; 2)$, $F(-4; -2)$, $K(3; 2)$, $L(-3; 3)$; $Oy$ o‘qiga nisbatan simmetriyada: $A(-2; 2)$, $B(2; 0)$, $C(-3; 4)$, $D(0; 2)$, $E(2; -2)$, $F(4; 2)$, $K(-3; -2)$, $L(3; -3)$; 2) $O(0; 0)$ ga nisbatan simmetriyada: $A(-2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-3; -4)$, $D(0; -2)$, $E(2; 2)$, $F(4; -2)$, $K(-3; 2)$, $L(3; 3)$. **246.** 1) $A$ va $D$.

**2-§.** **254.** 2 ta, ulardan teng yonli uchburchak va parallelogramm yasash mumkin. **257.** 1) Yo‘q; 2) ha. **266.** 1) 4 marta ortadi. **267.** 1) $n^2$ marta ortadi. **270.** Tomoni $a_1 = 2a$ bo‘lgan kvadrat. **271.** 1) 6 sm; 2) 3,6 dm; 4) 9,6 m. **275.** 6 sm. **278.** 60 sm². **280.** 24 dm. **286.** 104 sm². **287.** 81,92 sm². **289.** $0{,}5ab$. **291.** 280 sm². **292.** 43,2 sm. **295.** $h = 4$ sm. **297.** 1 : 4 kabi. **298.** $S = 4S_1$. **299.** 16 sm, 12 sm. **300.** 2) $S_{APB}= 50$ sm²; $S_{PCDA}= 200$ sm². **301.** 1) 108 sm²; 2) 3,15 dm². **302.** Ha, bo‘lishi mumkin, ya’ni $a_1 = 6$ sm, $h_1 = 5$ sm yoki $a_1 = 5$ sm, $h_1 = 6$ sm. Bu hollarda uchburchakning o‘tkir burchagi 30° ga teng bo‘lishi kerak. **304.** *a*) $S_{ABC}= 4{,}5$ kv. birlik; *b*) $S_{ABC} = 3$ kv. birlik. **306.** 32 sm.

**307.** 512 sm$^2$. **308.** 1,62 dm$^2$. **309.** 4) 8 sm$^2$. **310.** 150°. **311.** $0,5a^2$. **315.** 5 sm. **318.** 54 sm$^2$. **319.** 5 sm. **320.** 24 sm$^2$. **322.** 84 sm$^2$. **324.** $S_1+S_2$. **326.** 4 sm. **327.** 1) 400 kv. birlik; 2) 96 kv. birlik. **329.** $S_{ABCDE}=0,5(AE+PD)AP=(a+b)c$. **330.** 2) 21 sm$^2$. **332.** $S_{EFCPQA}=$ 144 sm$^2$. **333.** a) $(1-0,5x)$ kv. birlik; b) 0,5 kv. birlik. **334.** a) $(5a^2):9$. **335.** 200 sm$^2$ yoki 262,5 sm$^2$. **337.** 1) 20,4 km. **343.** 8 dm$^2$. **345.** $S_{COD}=16$. **351.** 1400 sm$^2$.

**3-§.** **354.** b) 2) 16 dm; 3) 1,7 m. **356.** a) $x=2$; b) $x=\sqrt{2}$; d) $x=\sqrt{3}$. **357.** 50 sm$^2$. **359.** Ha, mumkin: $7^2+24^2=25^2$. **361.** 1) 12 sm$^2$, 4,8 sm; 2) 192 sm$^2$, 19,2 sm; 3) 768 sm$^2$, 38,4 sm; 4) 672 sm$^2$, 26,88 sm; 5) 168 sm$^2$, 13,44 sm. **362.** 1) 48 sm$^2$, 10 sm; 2) 168 sm$^2$, 25 sm. **363.** 126 sm$^2$. **366.** 162 sm$^2$. **367.** 1) $AD=36$; 2) $BC=6$. **371.** 34 sm. **376.** 120 sm$^2$. **377.** 15 sm. **379.** 1) $\frac{12}{7}\sqrt{6}$ sm. **381.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **382.** $1,5\sqrt{15}$ sm. **386.** 4) 60. **387.** 480 sm$^2$. **389.** 60 dm, 14,4 dm. **394.** 114 sm$^2$. **397.** 1530 sm$^2$ yoki 1080 sm$^2$. **398.** 17 sm. **399.** 100 sm, 13,44 sm. **402.** 384 sm$^2$.

**4-§.** **406.** 2) Aylananing perpendikular diametrlarini o‘tkazish yetarli. **409.** 1) 200°; 160°; 2) 80°; 280°. **410.** $\angle AOC=70°$. **418.** 12 sm. **420.** 6 sm. **421.** 10 sm. **426.** $AB$ va $BD$ kesuvchi. **430.** 1) $R=AC=5$ sm, demak, $AC$ – urinma; 2) $R<5$ sm da; 3) $R>5$ da. **434.** $AB$ urinma. **435.** 60°. **437.** 100°. **439.** 20°. **441.** $AC=10$ sm. **444.** 1) 100°, 80°. **446.** 36°, 72°, 108°, 72°, 36°. **452.** Ko‘rsatma. 451- masala natijasidan foydalaning. **453.** 1) 36 sm. **461.** Ko‘rsatma. Dastlab gipotenuza uzunligini toping, so‘ngra 460- masaladagi formuladan foydalaning. **471.** 40° li burchak qarshisidagi tomonda joylashgan. **472.** 1) 12 sm; 3) 32 mm. **484.** 6 sm. **487.** 30° yoki 150°. **490.** 1) 18°. **494.** 62°. **495.** 1) 80°, 60°, 40°. **497.** 1) 40°, 40°, 100°. **499.** 132°.

**5-§.** **506.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$. 1) $AC$ to‘g‘ri chiziqda faqat $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{CA}$ vektorlar yotadi; 2) $CD$ to‘g‘ri chiziqqa $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar parallel. **507.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$. 1) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar $\overrightarrow{AB}$ bilan kollinear; 2) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{DA}$ vektorlar $\overrightarrow{BC}$ vektor bilan kollinear; 3) $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$ va $\overrightarrow{DO}$ vektorlar $\overrightarrow{BO}$ vektor bilan kollinear. **510.** 1) Ma’noga ega emas, chunki vektorlar faqat modullari bo‘yicha taqqoslanadi; 2) tengsizlik to‘g‘ri; 3) $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{BD}$ vektorlar kollinear emas, shuning uchun tenglik ma’noga ega emas; 4) tenglik o‘rinli, chunki to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro teng; 5) tenglik to‘g‘ri, chunki $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ va $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$; 6) tenglik to‘g‘ri, chunki to‘g‘ri to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari o‘zaro teng. **511.** 1) Romb; 2) trapetsiya. **529.** 1) $k>0$ da $\vec{a}\uparrow\uparrow k\vec{a}$; 2) $k<0$ da $\vec{a}\uparrow\downarrow k\vec{a}$; 3) $k=1$ da $\vec{a}=k\vec{a}$. **531.** $\overrightarrow{OA}=-0,5\vec{a}-0,5\vec{b}$; $\overrightarrow{AK}=\vec{b}+0,5\vec{a}$. **536.** 1) $\vec{0}$; 2) $\vec{0}$. **538.** 1) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **546.** $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **548.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$. **550.** 1) (4; −5); 3) (0; −7); 4) (−3; 0). **551.** 1) (2; −3). **552.** 1) $\overrightarrow{AB}(8;\ -4)$, $\overrightarrow{BA}(-8;\ 4)$. **553.** 1) $D(0;\ 4)$; 2) $D(-2;\ 2)$. **554.** $B(-2;\ -11)$. **555.** $\overrightarrow{AC}(-2;\ 2)$, $\overrightarrow{DB}(-3;\ -6)$, $\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{DB}$. **556.** 1) (1; −2); 2) $(2m;\ 2n)$. **561.** 1) (6; 3); 2) (−6; 3). **566.** 1) −13; 4) −34. **567.** 1) 13. **568.** 1) 14. **569.** 1) $x=\pm3$. **570.** 2) −1; 4) 0. **571.** 11. **572.** 5. **578.** $A(6;\ -1)$. **579.** $B(-5;\ 11)$. **580.** 2) (−2; 2). **581.** (0; −1). **582.** (5; 12). **583.** 1) (−5; −7). **584.** 1) −2; 2) 5. **586.** 1) (1; −1), $\sqrt{2}$. **589.** 3) 0,5 m dan. **593.** 46 sm. **595.** 40 sm; 96 sm$^2$. **597.** 60 sm; $\angle A=\angle C=80°$, $\angle B=\angle C=100°$. **598.** 176 sm$^2$. **599.** 180 sm$^2$. **600.** 1) 44 sm; 2) 105°, 75°, 75°. **601.** 1) yo‘q; 2) ha. **602.** 1) 6 sm; 2) 5 sm. **603.** 4 sm, 5 sm. **604.** 108 sm$^2$. **605.** 100 sm$^2$. **607.** 10 sm. **608.** 336 sm$^2$. **610.** 756 kv. birlik. **611.** 10 sm. **612.** 1200 sm$^2$. **615.** 70 sm.

## MUNDARIJA

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV,
MUYASSAR ABDUVAHOBOVNA TO'XTAXO'JAYEVA

# GEOMETRIYA

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

Uzviylashtirilgan dasturga mos qayta ishlangan 3-nashri

**Toshkent – «Yangiyo'l Poligraph Service» – 2014**

**Nashriyot litsenziyasi AI №185, 10.05.2011-y.**

Muharrir **B. Azimov**
Maxsus muharrir **L. Ten**
Texnik muharrir **M. Rixsiyev**
Musahhih **M. Rixsiyeva**
Sahifalovchi va rassom **Sh. Rahimqoriyev**

Bosishga ruxsat etildi .2014. Bichimi $70\times100^{1}/_{16}$.
Kegli 10,5. TimesUz garniturasi. Ofset bosma usulida bosildi.
Bosma t. 10. Shartli b. t. 11,7. Jami nusxasi
Buyurtma №

«Yangiyo'l Poligraph Service» MChJ bosmaxonasida chop etildi.
112001, Toshkent viloyati, Yangiyo'l tumani, Samarqand ko'chasi, 44- uy.

**Ijaraga berilgan darslik holatini ko‘rsatuvchi jadval**

| T/r | O‘quvchining ismi, familiyasi | O‘quv yili | Darslikning olingandagi holati | Sinf rahbarining imzosi | Darslikning topshirilgan-dagi holati | Sinf rahbarining imzosi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Darslik ijaraga berilib, o‘quv yili yakunida qaytarib olinganda yuqoridagi jadval sinf rahbari tomonidan quyidagi baholash mezonlariga asosan to‘ldiriladi:

| | |
|---|---|
| Yangi | Darslikning birinchi marotaba foydalanishga berilgandagi holati. |
| Yaxshi | Muqova butun, darslikning asosiy qismidan ajralmagan. Barcha varaqlari mavjud, yirtilmagan, ko‘chmagan, betlarida yozuv va chiziqlar yo‘q. |
| Qoniqarli | Muqova ezilgan, birmuncha chizilib chetlari yedirilgan, darslikning asosiy qismidan ajralish holati bor, foydalanuvchi tomonidan qoniqarli ta’mirlangan. Ko‘chgan varaqlari qayta ta’mirlangan, ayrim betlariga chizilgan. |
| Qoniqarsiz | Muqovaga chizilgan, yirtilgan, asosiy qismidan ajralgan yoki butunlay yo‘q, qoniqarsiz ta’mirlangan. Betlari yirtilgan, varaqlari yetishmaydi, chizib, bo‘yab tashlangan. Darslikni tiklab bo‘lmaydi. |