TO'PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

106-§. To'plamlar va qism to'plamlar

To'plam eng muhim matematik tushunchalardan biridir. Bu tushuncha matematika faniga to'plamlar nazariyasining asoschisi bo'lgan nemis matematigi Georg Kantor (1845—1918) tomonidan kiritilgan.

To'plam ta'riflanmaydigan matematik tushuncha bo'lib, ba'zi bir narsalar, buyumlar, obyektlarni birgalikda qarash natijasida vujudga keladi. Masalan, barcha natural sonlarni birgalikda qarash natural sonlar to'plamini, to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtalarni birgalikda qarash shu to'g'ri chiziq nuqtalari to'plamini beradi.

1-ta'rif. To'plamni tashkil etuvchi obyektlar shu to'plamning *elementlari* deyiladi.

2-ta'rif. x element X to'plamga *tegishli* ekanligi $x \in X$ ko'rinishda, tegishli emasligi esa $x \notin X$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan, barcha natural sonlar to'plami N bo'lsa, 4, 5, $\frac{3}{4}$, π sonlari uchun $4 \in N$, $5 \in N$, $\frac{3}{4} \notin N$, $\pi \notin N$ munosabatlar o'rinlidir.

3-ta'rif. Sonli to'plam deyilganda, barcha elementlari sonlardan iborat bo'lgan har qanday to'plam tushuniladi.
Bunga $N-$ natural sonlar to'plami, $Z-$ butun sonlar to'plami, $Q-$ ratsional sonlar to'plami, $R-$ haqiqiy sonlar to'plami misol bo'ladi.

To'plam o'z elementlarining to'liq ro'yxatini ko'rsatish yoki shu to'plamga tegishli bo'lgan elementlarnigina qanoatlantiradigan shartlar sistemasini berish bilan to'liq aniqlanishi mumkin. To'plamga tegishli bo'lgan elementlargina qanoatlantiradigan shartlar sistemasi shu to'plamning *xarakteristik xossasi* deb ataladi. Barcha x elementlari biror b xossaga ega bo'lgan to'plam $X = \{x \mid b(x)\}$ kabi yoziladi.

Masalan, ratsional sonlar to'plamini $Q = \{r \mid r = \frac{p}{q},\ p \in Z,\ q \in N\}$

ko‘rinishda, $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglama ildizlari to‘plamini esa $X = \{x \mid ax^2 + bx + c = 0\}$ ko‘rinishda yozish mumkin.

4-ta’rif. Elementlari soniga bog‘liq holda to‘plamlar chekli va cheksiz to‘plamlarga ajratiladi. Elementlari soni chekli bo‘lgan to‘plam *chekli to‘plam*, elementlari soni cheksiz bo‘lgan to‘plam *cheksiz to‘plam* deyiladi.

1-misol. $A = \{x \mid x \in N, x^2 > 7\}$ qanday to‘plam?

Yechilishi. $A = \{x \mid x \in N, x^2 > 7\}$ to‘plam 2 dan katta bo‘lgan barcha natural sonlardan tuzilgan, ya’ni $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$. Bu to‘plam – cheksiz to‘plamdir.

5-ta’rif. A to‘plamning har bir elementi B to‘plamda mavjud bo‘lsa, va aksincha, B to‘plamning har bir elementi A da mavjud bo‘lsa, A va B to‘plamlar *o‘zaro teng* (bir xil) deyiladi va bu to‘plamlarning tengligi:

$$A = B$$

orqali belgilanadi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, ikkita to‘plamning tengligi aslida ularning bitta to‘plam ekanligini bildiradi.

6-ta’rif. Ayni bir xil elementlardan tuzilgan to‘plamlar *teng to‘plamlar* deyiladi.

2-misol. $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 3\}$ va $Y = \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ to‘plamlar tengmi?

Yechilishi. $X = \{x \mid x \in N,\ x \le 3\}$ va $Y = \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ to‘plamlarning har biri faqat 1, 2, 3 sonlaridan tuzilgan. Shuning uchun bu to‘plamlar tengdir: $X = Y$.

3-misol. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \frac{4}{2}, \sqrt{9}, 2^2\}$ to‘plamlar tengmi?

Yechilishi. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, \frac{4}{2}, \sqrt{9}, 2^2\}$ bo‘lsa,

$B = \{1, \frac{4}{2}, \sqrt{9}, 2^2\} = \{1, 2, 3, 4\} = A$. Bundan ko‘rinadiki, $A \subset B$, $B \subset A$ bo‘ladi. Demak, $A = B$

Eslatma. Natural, butun, ratsional va haqiqiy sonlar to'plamlarini mos ravishda N, Z, Q va R orqali belgilaylik. Unda mazkur to'plamlar uchun $N \subset Z \subset Q \subset R$ munosabatlar o'rinlidir.

7-ta'rif. B to'plamning har bir elementi A to'plamda mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning *qism to'plami* deyiladi va B ning qism to'plam ekanligi $B \subseteq A$ ko'rinishda belgilanib, $\subseteq$ belgi *saqlanishlik belgisi* deb yuritiladi.

8-ta'rif. B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga A da yana B ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning *xos qism to'plami* deyiladi.

Xos qism to'plam $B \subset A$ orqali belgilanadi.

9-ta'rif. $A = B$ bo'lsa, $A \subset B$, $B \subset A$ va aksincha, $A \subset B$, $B \subset A$ bo'lsa, $A = B$ bo'ladi.

4-misol. Agar $A = \{3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$ bo'lsa, $B \subset A$ to'g'rimi?

Yechilishi. $A = \{3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\} =$
$= \{x \mid (x-3)\cdot(x-4) = 0\} = \{3,\ 4\}$ bo'lgani uchun $\{3,\ 4\} \subset \{3,\ 4,\ 5\} \Rightarrow$
$B \subset A$ bo'ladi. Demak, $B \subset A$ to'g'ri.

5-misol. A – ikki xonali sonlar to'plami, B – ikki xonali juft sonlar to'plami bo'lsin. $A \subset B$ to'g'rimi?

Yechilishi. Har bir ikki xonali juft son ikki xonali sonlar to'plamda ham mavjud. Demak, $B \subset A$. $A \subset B$ noto'g'ri.

10-ta'rif. Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi. Bo'sh to'plam $\varnothing$ orqali belgilanadi. Bo'sh to'plam ham chekli to'plam hisoblanadi.

Masalan: $x^2 + 3x + 2 = 0$ tenglamaning ildizlari $X = \{-2;\ -1\}$ chekli to'plamni tashkil etadi. $x^2 + 3x + 3 = 0$ tenglama esa haqiqiy ildizlarga ega emas, ya'ni uning haqiqiy yechimlar to'plami $\varnothing$ dir.

11-ta'rif. A to'plamning o'zi va Ø to'plam shu A to'plamning xosmas *qism to'plami* deyiladi.

12-ta'rif. Istalgan n ta elementli to'plamning barcha qism to'plamlari soni 2^n ga teng.

6-misol. $A = \{a,\ b,\ c\}$ to'plamning qism to'plamlari nechta?

Yechilishi. $A=\{a, b, c\}$ to'plamning barcha qism to'plamlari, u uchta elementdan tashkil topganligi uchun $2^3=8$ taga teng.

$A=\{a, b, c\}$ ning barcha qism to'plamlari quyidagilar:

$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

7-misol. $A=\{a, b, c\}$ to'plamning xos qism to'plamlari nechta?

Yechilishi. $A=\{a, b, c\}$ to'plamning xos qism to'plamlari, u uchta elementdan tashkil topganligi uchun $2^3-2=6$ taga teng.

$A=\{a, b, c\}$ ning xos qism to'plamlari quyidagilar:

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$

8-misol. $A=\{a, b, c\}$ to'plamning xosmas qism to'plamlarini toping.

Yechilishi. $A=\{a, b, c\}$ to'plamning xosmas qism to'plamlari: $\{\varnothing$, $\{a, b, c\}$

9-misol. $\{a, b, c, d\}$ to'plamning barcha qism to'plamlarini toping.

Yechilishi. $\{a, b, c, d\}$ to'plamning barcha qism to'plamlarini yozamiz: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$ jami 16 ta. Bu misolda $2^4=16$ bo'lmoqda. Umuman, k ta elementli to'plamning qism to'plamlari soni 2^k ta bo'ladi.

13-ta'rif. X chekli to'plam elementlari sonini $n(X)$ orqali belgilanadi. k ta elementli X to'plamni k *elementli to'plam* deb ataladi.

10-misol. X to'plam 10 dan kichik tub sonlar to'plami. Uning elementlari sonini toping.

Yechilishi. 10 dan kichik tub sonlar: 2, 3, 5, 7. Demak, $X=\{2, 3, 5, 7\}$ va $n(X)=4$.

Misollar.

1. Barcha juft natural sonlar to'plami cheksiz to'plam bo'ladi. Bu tasdiqni isbotlash uchun istalgan p natural songa $2p$ juft natural sonni mos qo'yish kifoya.

2. Istalgan $n\neq 1$ natural sonning tub bo'luvchilari to'plami chekli to'plamdir.

3. $0\le x<7$ tengsizlikni qanoatlantiradigan butun sonlar to'plamini quyidagi ikki xil usulda yozish mumkin:

a) $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $A=\{0\le x<7 | x\in Z\}$

4. 5 ga bo'linib, 10 ga bo'linmaydigan butun sonlar to'plami $B=\{10k+5 | k\in Z\}$ cheksiz to'plam bo'ladi.

107-§. To'plamlar ustida amallar

1-ta'rif. A va B to'plamlarning kamida bittasiga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tuzilgan C to'plam shu to'plamlarning *birlashmasi* deyiladi va $A\bigcup B$ ko'rinishda belgilanadi.

Yuqoridagi ta'rifga ko'ra C to'plamni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin: $C = AU\,B=\{\,x | x\in A \;\; yoki \;\; x\in B\,\}$

Masalan: $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsa, u holda $A\bigcup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ bo'ladi.

To'plamlar birlashmasi tushunchasini istalgan chekli sondagi to'plamlar uchun ham kiritish mumkin. n ta $A_1, A_2, \ldots.., A_n$ to'plamning birlashmasi:

$$A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots..\bigcup A_n=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

2-ta'rif. A va B to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plam shu to'plamlar *kesishmasi* deyiladi va u $A\bigcap B$ ko'rinishda belgilanadi:

$$A\bigcap B=\{x \,|\, x\in A \text{ va } x\in B\}.$$

Masalan: $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bo'lsa, u holda $A\bigcap B=\{1, 3, 5\}$ bo'ladi.

p ta $A_1, A_2, \ldots.., A_n$ to'plamning kesishmasi

$$A_1\bigcap A_2\bigcap \ldots..\bigcap A_n=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

3-ta'rif. A to'plamdan B to'plamning *ayirmasi* deb A ga tegishli, lekin B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi va u A\B ko'rinishda belgilanadi.

A va B to'plamlarning ayirmasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$A\backslash B=\{x | x\in A \;\; va \;\; x\notin B\}, \quad B\backslash A=\{x | x\notin A \;\; va \;\; x\in B\}$$

Masalan: A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5, 6} bo'lsa, u holda A\B = {7} bo'ladi.

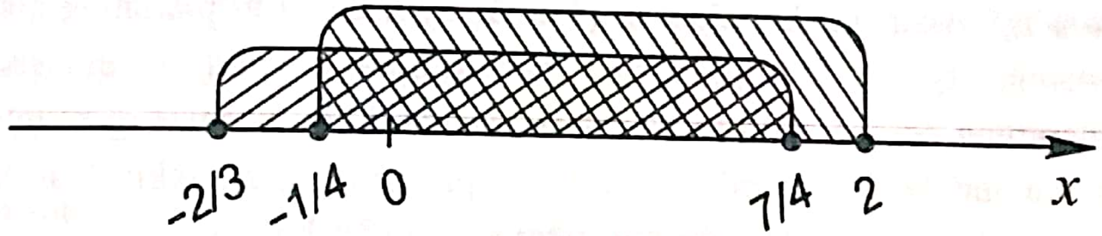
Masalan: A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5, 6} bo'lsa, u holda B\A = {2, 4, 6} bo'ladi.

1-misol. $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $B = \{b, d, e, g, h\}$ to‘plamlar berilgan. Ularning kesishmasi va birlashmasini toping.

Yechilishi. b, d, e elementlari A va B to‘plamlar uchun umumiy, shunga ko‘ra $A \cap B = \{b, d, e\}$. Bu to‘plamlarning birlashmasi esa $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h\}$ dan iborat.

2-misol. $A = \{x \mid -\frac{2}{3} \le x \le \frac{7}{4}\}$, $B = \{x \mid -\frac{1}{4} \le x \le 2\}$ to‘plamlarning kesishmasi, birlashmasi va ayirmasini toping.

Yechilishi. Buning uchun sonlar o‘qida $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$, 2 nuqtalarni belgilaymiz. $A \cap B = \{x \mid -\frac{1}{4} \le x \le \frac{7}{4}\}$, $A \cup B = \{x \mid -\frac{2}{3} \le x \le 2\}$, $A \setminus B = \{x \mid -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{4}\}$.



3-misol. $A = \{0; 2; 3\}$, $C = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ to‘plamlar uchun $A' = C \setminus A$ ni toping.

Yechilishi. $A \subset C$ bo‘lgani uchun $A' = C \setminus A =$
$= \{0; 1; 2; 3; 4\} \setminus \{0; 2; 3\} = \{1; 4\}$ bo‘ladi.

4-ta’rif. A ning B da hamda B ning A da bo‘lmagan elementlari to‘plami shu to‘plamlarning ***simmetrik ayirmasi*** deyiladi va u A Δ B ko‘rinishda belgilanadi.

A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin: $A \Delta B = \{x \mid x \in A \ va \ x \notin B\} \cup \{x \mid x \notin A \ va \ x \in B\}$,

A Δ B= $A \setminus B + B \setminus A$

Masalan: A = {1, 3, 5, 7}, B= {1, 2, 3, 4, 5, 6) bo‘lsa, A Δ B = {2, 4, 6, 7} bo‘ladi.

5-ta’rif. B to‘plam A ning qism to‘plami bo‘lganda $A \setminus B$ to‘plam B ni A gacha ***to‘ldiruvchi*** to‘plam deyiladi va $\overline{B}$ yoki $C_A B$ orqali yoziladi. Masalan: B = {1, 2, 3}, A = {1, 2, 3, 4, 5} bo‘lganda $\overline{B}=\{4,\ 5\}$ bo‘ladi.

Yuqoridagi ta’rifga asosan $B\cup\overline{B}=A$ bo‘ladi. Agar A to‘plam boshqa to‘plamning xos qism to‘plami deb qaralmasa, u holda uning to‘ldiruvchisi Ø bo‘lib, Ø ning to‘ldiruvchisi esa A bo‘ladi.

To‘plamlar ustida bajariladigan amallarning xossalari sonlar ustida bajariladigan amallarning xossalariga o‘xshash. Har qanday X, Y va Z to‘plamlar uchun:

1) $X\cup Y=Y\cup X$;

1′) $X\cap Y=Y\cap X$;

2) $(X\cup Y)\cup Z=X\cup(Y\cup Z)=(X\cup Z)\cup Y$;

2′) $(X\cap Y)\cap Z=(X\cap Z)\cap Y=X\cap(Y\cap Z)$;

3) $(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$;

3′) $(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$ tengliklar bajariladi.

6-ta’rif. Agar qaralayotgan to‘plamlar ayni bir U to‘plamning qism to‘plamlari bo‘lsa, U to‘plam *universal* to‘plam deyiladi. U universal to‘plamning barcha qism to‘plamlari orasida ikkita xosmas qism to‘plam mavjud bo‘lib, ulardan biri U to‘plamning o‘zi, ikkinchisi esa bo‘sh to‘plam, qolganlari esa xos qism to‘plamlar bo‘ladi.

4-misol. $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{1,5,9\}$ to‘plamlar berilgan. $D=\{1,2,3,4,5,9\}$ to‘plam universal to‘plam bo‘ladimi? $E=\{1,2,3,4,5,9,15\}$ va $M=\{1,3,4,5,9\}$ to‘plamlarchi?

Yechilishi. $A\subset D$, $B\subset D$, $C\subset D$ bo‘lgani uchun D to‘plam universal to‘plam bo‘ladi. $D\subset E$ bo‘lgani uchun E to‘plam ham universal to‘plam bo‘ladi. $B\subset M$, $C\subset M$, lekin $A\not\subset M$ bo‘lgani uchun M to‘plam universal to‘plam bo‘la olmaydi.

5-misol. $x\in N$ bo‘lganda $A=\{x|x\geq 5\}$, $B=\{x|x\leq 7\}$ lar uchun $A\cup B$ ni toping.

Yechilishi. $A=\{x|x\geq 5\}=\{5,6,7,.........\}$,

$$B=\{x|x\leq 7\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$A\cup B=\{5,6,7,.........\}\cup\{1,2,3,4,5,6,7\}=N\Rightarrow A\cup B=N$$

6-misol. $x \in N$ bo'lganda $A = \{x | x \geq 5\}$, $B = \{x | x \leq 7\}$ lar uchun $A \cap B$ ni toping.

Yechilishi. $A = \{x | x \geq 5\} = \{5, 6, 7, ...\}$,

$B = \{x | x \leq 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{5, 6, 7, ...\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{5, 6, 7\} \Rightarrow$

$A \cap B = \{5, 6, 7\}$

7-misol. $x \in N$ bo'lganda $A = \{x | x \geq 5\}$ uchun N ga nisbatan $\overline{A}$ ni toping.

Yechilishi. $A = \{x | x \geq 5\} = \{5, 6, 7, ...\}$,

$\overline{A} = N \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7........\} \setminus \{5, 6, 7........\} = \{1, 2, 3, 4\}$

8-misol. $x \in N$ bo'lganda $A = \{x | x \geq 5\}$, $B = \{x | x \leq 7\}$ lar uchun $\overline{A} \cup B$ ni toping.

Yechilishi. $A = \{x | x \geq 5\} = \{5, 6, 7, ...\}$,

$B = \{x | x \leq 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\overline{A} = N \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7........\} \setminus \{5, 6, 7........\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{A} \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = B \Rightarrow$

$\overline{A} \cup B = B$

9-misol. $x \in N$ bo'lganda $A = \{x | x \geq 5\}$, $B = \{x | x \leq 7\}$ lar uchun $\overline{A} \cap \overline{B}$ ni toping.

Yechilishi:

$\overline{A} = N \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7........\} \setminus \{5, 6, 7........\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\overline{B} = N \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7........\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{8, 9, 10, 11, ...\}$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{8, 9, 10, 11, ...\} = \varnothing \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$

10-misol. $A = \{3k | k \in N\}$, $B = \{2k | k \in N\}$ bo'lsa, $A \cap B$ ni toping.

Yechilishi: $A = \{3k | k \in N\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$

$B = \{2k | k \in N\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...\}$

$A \cap B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...\} =$

$= \{6, 12, 18, ...\} = \{6k | k \in N\}$

11-misol. $A = \{x | (x-4) \cdot (x-3) = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2x + 1 = 0\}$ bo'lsa, $A \cup B$ ni toping.

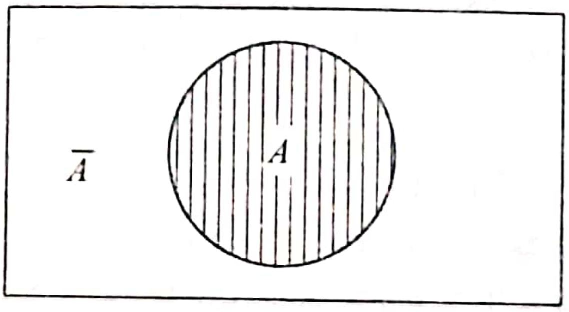
Yechilishi: $A = \{x | (x-4) \cdot (x-3) = 0\} = \{3, 4\}$,

$$B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 = 0\} = \{x \mid (x-1)^2 = 0\} = \{1\}$$
$$A \cup B = \{3, 4\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4\}$$

108-§. Eyler-Venn diagrammalari. To‘plam elementlar soni bilan bog‘liq masalalar

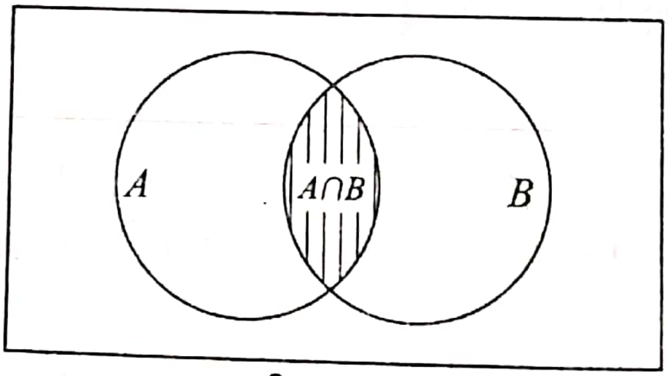
U universal to‘plamni to‘g‘ri to‘rtburchak bilan va uning xos qism to‘plamlarini shu to‘rtburchak ichidagi doiralar bilan tasvirlashni qabul qilamiz. Bu holda to‘rtburchakning shtrixlangan (1-rasm) bo‘lagi A qism to‘plam bo‘lsa, shtrixlanmagan bo‘lagi $\overline{A}$ to‘ldiruvchi to‘plam bo‘ladi. Bundan 1-rasmga asosan quyidagilarni yoza olamiz:

1) $\overline{A} \cup A = U$, 2) $\overline{A} \cap A = \varnothing$



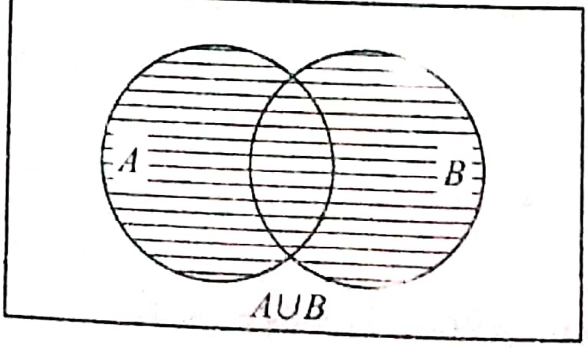
1-rasm

A va ***B*** qism to‘plamlarning $A \cap B$ kesishmasi 2- rasmda tasvirlangan. Bu kesishma to‘rtburchakning shtrixlangan bo‘lagidan iborat.



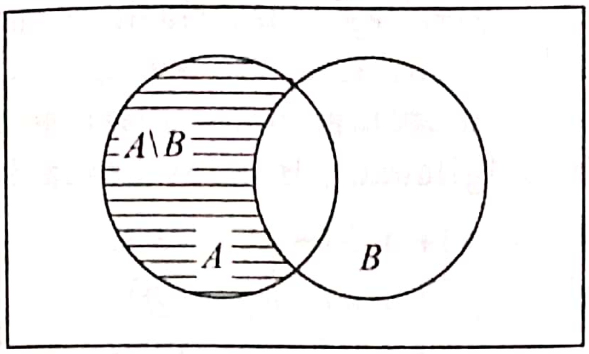
2-rasm

A va B ning birlashmasi 3-rasmdagi to‘rtburchakning barcha shtrixlangan bo‘lagini tashkil qiladi.



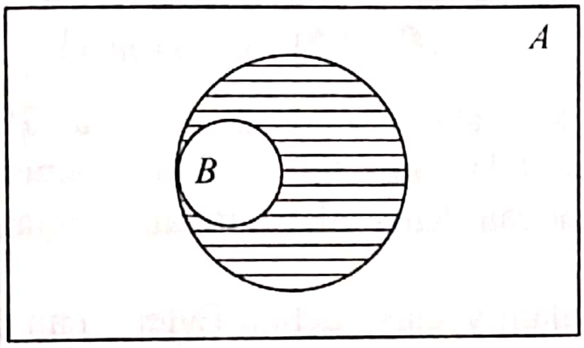
3-rasm

A to'plamdan ***B*** ning ayirmasi 4-rasmda berilgan. Bu ayirma to'rtburchakning shtrixlangan bo'lagidir.



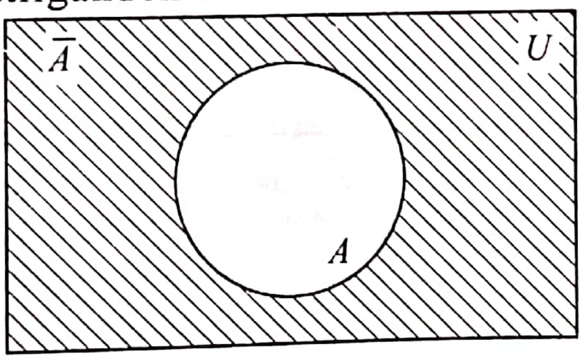
4-rasm

B to'plamni ***A*** gacha to'ldiruvchi to'plam 5-rasmda ko'rsatilgan.



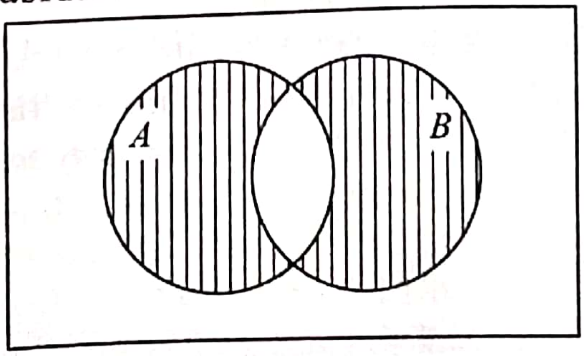
5-rasm

A to'plamni ***U*** universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam 6- rasmda ko'rsatilgandek bo'ladi.



6-rasm

7-rasmdagi shtrixlangan qism *A* va *B* to'plamlarning simmetrik ayirmasidir.



7-rasm

Mana shu usulda uchta, to‘rtta va h. k. qism to‘plamlarning kesishmasi va birlashmasini Eyler-Venn doiralari orqali tasvirlash mumkin. Bunday tasvirlash odatda *Eyler-Venn diagrammalari* deb yuritiladi. A va B to‘plamlar chekli to‘plamlar bo‘lganda ularning elementlari soni mos ravishda $n(A)$ va $n(B)$ kabi belgilanadi. Bunday holda 3-rasmga asosan

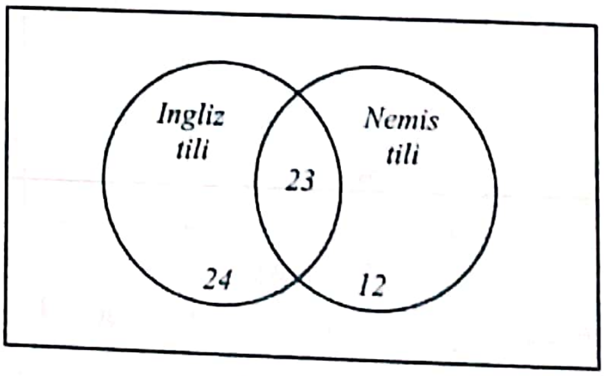
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B),$$
$$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$

Kesishmaydigan A va B chekli to‘plamlarning birlashmasidagi ($A\cap B=\varnothing$) elementlar soni A va B to‘plamlar elementlari sonlarining yig‘indisiga teng:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

1-misol. Matematika fakultetining 1 kursida 75 talaba o‘qiydi. Ulardan 47 tasi maktabda ingliz tilini, 35 tasi nemis tilini, 23 tasi esa har ikkala tilni o‘rgangan. Kurs talabalaridan nechtasi ikkala tilni ham bilmaydi?

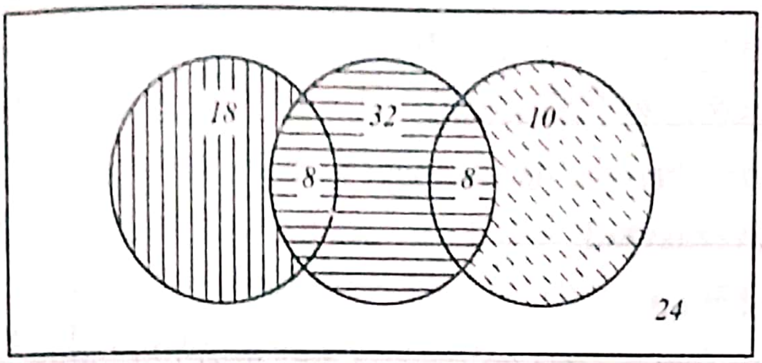
Yechilishi. Bu masalani yechish uchun Eyler-Venn diagrammalaridan foydalanamiz (8-rasm). To‘g‘ri to‘rtburchak sifatida 1 kurs talabalari to‘plamini olamiz. Bu yerda ikkita to‘plam kesishmasi 23 ta elementdan iborat bo‘lgani uchun faqat ingliz tilini o‘rganganlar soni 47 – 23 = 24 ta, faqat nemis tilini o‘rganganlar soni 35 – 23=12 ta va nihoyat, har ikkala tilni bilmaydiganlar soni esa 75 – (24 + 23+12) = 16 tadan iborat.



8-rasm

2-misol. Matematika fakultetidan 100 talabani tekshirib ko‘rilganda ularning 18 tasi faqat nemis tilini, 8 tasi nemis va fransuz tilini, 48 tasi fransuz tilini, 8 tasi fransuz hamda ispan tilini o‘rganishi va nihoyat 24 tasi hech qanday tilni o‘rganmaganligi aniqlandi. a) Qancha talaba ispan tilini o‘rganadi? b) Qancha talaba fransuz tilini o‘rganmaslik sharti bilan nemis va ispan tilini o‘rganadi? c) Qancha talaba ispan tilini o‘rganmaganda va faqat shundagina fransuz tilini o‘rganadi?

Yechilishi. Avvalo Eyler-Venn diagrammasini tuzib olamiz (9-rasm). Bu yerda har bir doira nemis, fransuz va ispan tilini o'rganuvchi talabalar to'plamini, to'g'ri to'rtburchak esa tekshirilgan talabalar to'plamini ifodalaydi. Uchta chet tilidan kamida bitta tilni o'rganuvchi talabalar soni 100 – 24 = 76 tadir.



9-rasm

a) Qancha talaba ispan tilini o'rganishini aniqlash uchun til o'rganuvchi barcha talabalar soni (76) dan nemis tili (26) hamda faqat fransuz tili (48 – 8 – 8) o'rganuvchi talabalar sonini ayirib tashlaymiz, unda 76 – 26 – 32 = 76 – 58=18 hosil bo'ladi.

b) Fransuz tilini o'rganmasdan ispan tilini o'rganuvchi talabalar sonini topish uchun til o'rganuvchi talabalar sonidan fransuz va faqat nemis tilini o'rganuvchi talabalar sonini ayiramiz. Unda 76–48–18=10 hosil bo'ladi.

c) Ispan tilini o'rganmaganda va faqat shundagina fransuz tilini o'rganuvchi talabalar sonini topish uchun esa til o'rganuvchi barcha talabalar sonidan faqat nemis tili (18) va fransuz hamda ispan tilini o'rganuvchi talabalar soni (8), faqat ispan tilini o'rganuvchilar soni (10) ning yig'indisini ayirish kerak (9-rasmga qarang). Demak, bunday talabalar soni 76 – (18+8+10) =40 ekan.

109-§. Matematik mantiq elementlari

Matematik mantiq matematikaning bir bo'limi bo'lib, unda "mulohaza"lar va ular ustidagi mantiqiy amallar o'rganiladi.

1-ta'rif. *Chin* yoki *yolg'onligi* haqida fikr yuritish mumkin bo'lgan har qanday darak gap *mulohaza* deyiladi.

Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar maxsus belgilar yordamida ifodalanadi. Bu belgilar hozirgi zamon matematikasining barcha bo'limlarida qo'llaniladi.

Bu belgilar quyidagilardir:

1) $\Rightarrow$ – agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi,

$P \Rightarrow Q$ – agar P bo'lsa, Q bo'ladi (P dan Q kelib chiqadi);

2) $\Leftrightarrow$ – teng kuchlilik,

$P \Leftrightarrow Q - P$ va Q teng kuchli (P dan Q kelib chiqadi va aksincha);

3) $\vee$ – dizyunktsiya ("yoki" amali);

4) $\wedge$ – konyunktsiya ("va" amali);

5) $\forall$ – ixtiyoriy, barcha, har qanday;

6) $\exists$ – shunday, mavjud;

7) $\nexists$ – mavjud emas.

Bu amallarni (belgilarni) qo'llashga doir misollar keltiramiz.

$P = \{a$ coni 15 ga bo'linadi$\}$ va $Q = \{a$ soni 5 ga bo'linadi$\}$ mulohazalari quyidagicha bog'langan:

2-ta'rif. P mulohazaning chinligidan Q mulohazaning chinligi kelib chiqadi. Mulohazalarning bunday bog'lanishi *mantiqiy kelib chiqish* deyiladi va $\Rightarrow$ belgi yordamida yoziladi: $P \Rightarrow Q$.

Bu yerda "*a* soni 15 ga bo'linadi" sharti *a* sonining 5 ga bo'linishi uchun *yetarlidir*. Shu bilan birga, "*a* soni 5 ga bo'linadi" sharti uning 15 ga bo'linishi uchun yetarli emas, u *zaruriy* shart xolos, chunki *a* soni 5 ga bo'linmasa, uning 15 ga bo'linishi mumkin emas.

Umuman, P mulohazaning chinligidan Q mulohazaning chinligi kelib chiqsa $(P \Rightarrow Q)$, P mulohaza Q mulohaza uchun *yetarli shart* va Q mulohaza P mulohaza uchun *zaruriy shart* deyiladi.

3-ta'rif. Agar $A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow A$ bo'lsa, B mulohaza A mulohaza uchun zaruriy va etarli shartdir. Bu esa quyidagicha yoziladi: $A \Leftrightarrow B$. "$\Leftrightarrow$" – mantiqiy teng kuchlilik belgisidir.

A – "a soni juft son" mulohazasi bo'lsin.

B – "a^2 – juft son" mulohazasi bo'lsin.

Bu mulohazalar teng kuchli mulohazalar bo'ladi, ya'ni $A \Leftrightarrow B$.

Boshqacha aytganda, sonning kvadrati juft son bo'lishi uchun sonning o'zi juft bo'lishi zarur va yetarli.

4-ta'rif. Biror A mulohazaning *inkori* deb, A chin bo'lganda yolg'on, A yolg'on bo'lganda esa chin bo'ladigan mulohazaga aytiladi va $\overline{A}$ bilan belgilanadi.

A – "yetti – murakkab son", u holda $\overline{A}$ "yetti – murakkab son emas". Bu yerda A – yolg'on, $\overline{A}$ – chin mulohazadir.

5-ta'rif. A va B mulohazalarning *dizyunktsiyasi* deb, A va B mulohazalardan kamida bittasi chin bo'lganda chin bo'ladigan yangi mulohazaga aytiladi va $A \vee B$ bilan belgilanadi.

Masalan, A–"$6 \cdot 4 = 24$", B–"$6 \cdot 4 = 25$" bo'lsa, $A \vee B$ mulohaza "$6 \cdot 4$ ko'paytma 24 yoki 25 ga teng".

6-ta'rif. A va B mulohazalarning *konyunktsiyasi* deb, bu ikkala mulohaza ham chin bo'lgandagina chin bo'ladigan yangi mulohazaga aytiladi va $A \wedge B$ bilan belgilanadi.

Masalan, C – "13 soni toq va tubdir" mulohazasi quyidagi ikkita mulohazaning konyunktsiyasidir. A – "13 soni – toq", B – "13 soni – tub". Demak, $C = A \wedge B$.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz.

1-misol. Agar $a > b$ va $b > c$ bo'lsa, $a > c$ bo'ladi.
$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$.

2-misol. $a > b$ bo'lsa, $a + c > b + c$ bo'ladi. $(a > b) \Rightarrow (a + c > b + c)$.

3-misol. $a = 0$ yoki $b = 0$ bo'lsa, $ab = 0$ bo'ladi va aksincha, $ab = 0$ bo'lsa, $a = 0$ yoki $b = 0$ bo'ladi. $(ab = 0) \Leftrightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$.

4-misol. $a > 0$ va $b > 0$ bo'lsa, $ab > 0$ bo'ladi.
$(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (ab > 0)$.

5-misol. Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $|x| \geq x$. $\forall x \in R : |x| \geq x$.

6-misol. Ixtiyoriy $a \geq 0$ son uchun, shunday $x \in R$ son mavjudki, $x^2 = a$ bo'ladi, ya'ni $\forall a \geq 0, \exists\, x \in R : x^2 = a$.

110-§. To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlariga doir masalalar

1. $-5 < x < 3$ tengsizlikning butun sonlar to'plamini yozing.
2. Biror butun sonning barcha butun bo'luvchilari va butun bo'linuvchilari to'plami chekli bo'ladimi?
3. 3 ga bo'linib, 9 ga bo'linmaydigan butun sonlar to'plami cheklimi yoki cheksizmi?

4. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ to'plamning xos qism to'plamlari nechta?

5. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ to'plamning barcha xosmas qism to'plamlarini yozing.

6. $A=\{a,\ b,\ c,\ \}$, $B=\{d,\ e,\ f,\ g\}$ va $C=\{a,\ c,\ f,\ g,\ e\}$ to'plamlar berilgan. Quyidagilarni toping:

a) $A\cup B$, b) $A\cup C$, c) $B\cup C$, d) $A\cup B\cup C$

7. $B=\{10;\ 12\frac{3}{4};\ 17{,}3-7;\ 136\}$ to'plam berilgan. Qaysi natural sonlar bu to'plamga kiradi? Shu to'plamga tegishli bo'lmagan uchta son ayting. Javobni $\in$, $\notin$ belgilari yordamida yozing.

8. S to'plam $-3;\ -2;\ -1;\ 4$ elementlaridan tuzilgan. Shu to'plamni yozing. Shu sonlarga qarama-qarshi sonlarning S_1 to'plamini tuzing.

9. "Bo'sh vaqtdan unumli foydalan" jumlasidagi harflar to'plamini tuzing.

10. Quyidagi yozuvlarni o'qing va har bir to'plamning elementlarini ko'rsating:

a) $E=\{x\mid x\in N, -1<x<5\}$; b) $F=\{x\mid 5x=x-7\}$;

c) $Q=\{x\mid x(x+12)=0\}$; d) $U=\{x\mid x\in R, x^2=2\}$;

e) $V=\{x\mid x\in N, x^2<9\}$; f) $W=\{x\mid x\in N, x^2\le 9\}$.

11. Quyidagi to'plamlarni son o'qida belgilang:

a) $\{x\mid x\in N, x\le 3\}$; b) $\{x\mid x\in Z, -2\le x\le 2\}$;

d) $\{x\mid x\in R, x>4{,}1\}$; e) $\{x\mid x\in R, -2{,}7\le x\le 1\}$;

f) $\{x\mid x\in R, x<6\}$; g) $\{x\mid x\in R,\ 3,\ 4<x\le 8\}$;

h) $\{x\mid x\in R, -3\frac{1}{4}\le x\le -1\}$; i) $\{x\mid x^2=4\}$;

j) $\{x\mid (x^2-1)(x^2-4)=0\}$.

12. Quyidagi to'plamlardan qaysilari bo'sh to'plam:

a) simmetriya markaziga ega bo'lmagan kvadratlar to'plami;

b) $\{x\mid x^2+1=0\}$;

d) $\{x\mid x\in R, |x|=3\}$;

e) $\{x\mid x\in R,\ x^3=1\}$?

13. Quyidagi to'plamning nega bo'sh to'plam ekanligini tushuntiring:

a) $\{x \mid x \in N, x < -1\}$; b) $\{x \mid x \in N, 15 < x < 16\}$;

d) $\{x \mid x \in N, x = \frac{3}{5}\}$; e) $\{x \mid x > 7, x < 5\}$.

14. Tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plamini toping. Bu to'plamlarning qaysilari bo'sh to'plam ekanligini aniqlang:

a) $3x + 15 = 4(x - 8)$; b) $2x + 4 = 4$;

d) $2(x - 5) = 3x$; e) $x^2 - 4 = 0$;

f) $x^2 + 16 = 0$; g) $(2x + 7)(x - 2) = 0$.

15. Quyidagi to'plam elementlarini va elementlar sonini ko'rsating:

a) $\{l, f, g\}$; b) $\{a\}$; d) $\{\{a\}\}$; e) $\varnothing$;

f) $\{\varnothing\}$; g) $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$; h) $\{\{a, b, c\}, a\}$.

16. 5 ta elementi bor bo'lgan to'plam tuzing.

17. 5 ta natural son qatnashgan sonli to'plam tuzing.

18. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, k\}$, $B = \{a, l, k\}$, $C = \{b, d, g, k, t\}$, $D = \{a, l\}$, $E = \{e, f, k, g\}$ to'plamlar berilgan.

a) Ularning qaysilari A to'plamning xos qism to'plami bo'ladi?

b) D to'plam C to'plamning qism to'plamimi?

c) B to'plam qaysi to'plamning qism to'plami bo'ladi?

d) $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$, $n(D)$, $n(E)$ sonlarni o'sish tartibida joylashtiring.

19. $A = \{3, 6, 9, 12\}$ to'plamning barcha qism to'plamlarini tuzing.

20. To'plamlar jufti berilgan:

a) A = {Navoiy, Bobur, Furqat, Nodirabegim} va B – barcha shoir va shoiralar to'plami;

b) C – qavariq to'rtburchaklar to'plami va D – to'rtburchaklar to'plami;

c) E – Samarqand olimlari to'plami, F – O'zbekiston olimlari to'plami;

d) K – barcha tub sonlar to'plami, M – manfiy sonlar to'plami.

Juftlikdagi to'plamlardan qaysi biri ikkinchisining qism-to'plami bo'lishini aniqlang.

21. Quyidagi to'plamlar uchun $A \subset B$ yoki $B \subset A$ munosabatlardan qaysi biri o'rinli:

a) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d\}$;

b) $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c, d\}$;

d) $A = \varnothing$, $B = \varnothing$;

e) $A = \varnothing$, $B = \{a, b, c\}$;

f) $A = \varnothing$, $B = \{\varnothing\}$;

g) $A = \{\{a\}, a, \varnothing\}$, $B = \{a\}$;

h) $A = \{\{a, b,\}, \{c, d\}, c, d\}$, $B = \{\{a, b\}, c\}$;

i) $A = \{\{0\},0\}$, $B = \{\varnothing, \{\{0\}, 0\}\}$?

22. Munosabatning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlang:

a) $\{1; 2\} \subset \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$;

b) $\{1; 3\} \subset \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$;

c) $\{1; 3\} \in \{\{1; 2; 3\}; \{1; 3\}; 1; 2\}$.

23. Quyidagi to‘plamlar tengmi:

a) $A = \{2; 4; 6\}$ va $B = \{6; 4; 2\}$;

b) $A = \{1; 2; 3\}$ va $B = \{1; 11; 111\}$;

d) $A = \{\{1; 2\},\{2; 3\}\}$ va $B = \{2; 3; 1\}$;

e) $A = \{\sqrt{256}; \sqrt{81}; \sqrt{16}\}$ va $B = \{2^2; 3^2; 4^2\}$?

24. $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ va $A\{2; 3\}$ to‘plamlar tengmi?

25. $A = \{x - 12 \geq 7 \mid x \in N\}$ va $B = \{x + 13 \leq 17 \mid x \in N\}$ to‘plamlar uchun: a) $A \cap B$; b) $A \cup B$.

c) N ga nisbatan $A \cap \overline{B}$ d) $A \Delta B$ lar topilsin.

26. $A = \{7k \mid k \in Z\}$, $B = \{3 + k > 5 \mid k \in Z\}$, $C = \{7 - k \geq 3 \mid k \in Z\}$ to‘plamlar uchun: a) $A \cup B \cup C$, b) $A \cap (B \cup C)$, c) $A \cup (B \cap C)$, d) $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$ to‘plamlarni tuzing.

27. $A = \{2, 4, 6, \}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ va $C = \{4, 7, 8, 9, 11\}$ to‘plamlar berilgan. Quyidagilarni toping: a) $(A \cap B) \cup C$, b) $(A \cup C) \cap B$, c) $(B \cup C) \cup B$, d) $A \cap B \cap C$

28. $A = \{2, 4, 6, \}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6,7,8, 9\}$ va $C = \{4, 7, 8, 9, 11\}$ to‘plamlar berilgan. Quyidagilarni toping: a) $(A \setminus B) \cup C$,

b) $(A \setminus C) \cap B$, c) $(B \setminus C) \cup B$, d) $A \Delta B$

29. $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13\}$ uchun $C = \{4, 7, 8, 9\}$ qism to‘plam bo‘lsa, $\overline{C}$ ni toping.

30. $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...\}$ natural sonlar to‘plami uchun $B = \{3, 6, 9, ...3n, ...\}$ qism to‘plam. $\overline{B}$ ni toping.

31. U universal to‘plamning $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{b, c, d, f, g\}$ qismlari uchun $(A \setminus B) \cap C$ ni aniqlang.

32. N universal to‘plamning $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 6\}$, $C = \{3, 4, 7, 8\}$ qismlari berilgan. $(A \cap B) \setminus C$ ni aniqlang.

33. $M = \{36;\ 29;\ 15;\ 68,\ 27\}$, $P = \{4;\ 15;\ 27;\ 47;\ 36;\ 90\}$, $Q = \{90;\ 4;\ 47\}$ to‘plamlar berilgan. $M \cap P$, $M \cap Q$, $P \cap Q$, $M \cap P \cap Q$ larni toping.

34. $A - 18$ ning hamma natural bo‘luvchilari to‘plami, $B - 24$ ning hamma natural bo‘luvchilari to‘plami. $A \cap B$ to‘plam elementlarini ko‘rsating.

35. P ikki xonali natural sonlar to‘plami, S barcha toq natural sonlar to‘plami bo‘lsa, $K = P \cap S$ to‘plamga qaysi sonlar kiradi?

a) $21 \in K$; b) $32 \in K$; d) $7 \notin K$; e) $17 \notin K$ deyish to‘g‘rimi?

36. “Matematika” va “grammatika” so‘zlaridagi harflar to‘plamini tuzing. Bu to‘plamlar kesishmasini toping.

37. [1; 5] va [3; 7] kesmalarning kesishmasini toping.

38. $P = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $E = \{a, g, z, e, k\}$ to‘plamlar birlashmasini toping.

39. $A = \{n \mid n \in N,\ n < 5\}$ va $B = \{n \mid n \in N,\ n > 7\}$ to‘plamlar birlashmasini toping. a) $4 \in A \cup B$; b) $-3 \in A \cup B$; d) $6 \in A \cup B$ deyish to‘g‘rimi?

40. Agar a) $A = \{x \mid x = 8k,\ k \in Z,\ B = \{x \mid x = 8l - 4,\ l \in Z\}$;

b) $A = \{x \mid x = 6k - 1,\ k \in Z\}$, $B = \{x \mid x = 6l + 4,\ l \in Z\}$ bo‘lsa, $A \cup B$ ni toping.

41. $A=\{2; 4; 6; 8;...; 40\}$, $B=\{1; 3; 5; 7; ...; 37\}$, $C=\{\{a;b\}, \{c;d\}, \{e;f\}, g, h\}$ to‘plamlarning har biridagi elementlar sonini aniqlang. $A\bigcup B$ da nechta element mavjud?

42. $A=\{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 10\}$, $B=\{3;5;\ 7;\ 9\}$, $C=\{4; 9, 11\}$ bo‘lsin. Quyidagi to‘plamlarda nechtadan element mavjud:

a) $A\bigcup(B\bigcup B)$; b) $(C\bigcup B)\bigcup A$; d) $A\bigcap(B\bigcup C)$; e) $A\bigcup(B\bigcap C)$;
f) $A\bigcap(B\bigcap C)$; g) $B\bigcap(A\bigcup C)$?

43. $A=\{x\,|\,x\in N-5\le x\le 10\}$, $B=\{x\,|\,x\in N,\ 3\le x\le 15\}$ bo‘lsin. $A\setminus B$ va $B\setminus A$ to‘plam elementlarini toping.

44. $N-$ natural sonlar to‘plami, $Z-$ butun sonlar to‘plami, $Q-$ ratsional sonlar to‘plami, $R-$ haqiqiy sonlar to‘plami Q^+- manfiymas ratsional sonlar to‘plami, Z^+- manfiymas butun sonlar to‘plami bo‘lganda quyidagilarni aniqlang:

a) $Z^+\bigcup Q^+$; b) $Z^+\bigcup N$; c) $N\bigcup R\bigcup Q$;
d) $N\bigcup Z$; e) $Z^+\bigcap Q^+$; f) $Z^+\bigcap N$
g) $(N\bigcap Q)\bigcup Z^+$ h) $Q\bigcap R$ j) $(R\setminus Q)\bigcup N$

45. $A=\{x\,|\,x=2k+1,\ k\in Z\}$ to‘plamning Z to‘plamga to‘ldiruvchisini toping.

46. $A=\{x\,|\,x=3k,\ k\in Z\}$ to‘plamning Z to‘plamga to‘ldiruvchisini toping.

47. Agar $A\subset U$, $B\subset U$ bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘lishini isbotlang:

a) $(A\bigcup B)'=A'\bigcap B'$, b) $(A\bigcap B)'=A'\bigcup B'$.

48. Agar A to‘plam $x^2-7x+6=0$ tenglamaning yechimlari to‘plami va $B=\{1;\ 6\}$ bo‘lsa, $A=B$ bo‘lishini isbotlang.

49. $A\setminus B=A\setminus(A\bigcap B)$ tenglikni isbotlang.

50. $A\bigcap(B\setminus A)=\varnothing$ tenglikni isbotlang.

51. $A\subset U$, $B\subset U$, $A\bigcap B=\varnothing$ bo‘lsin. Quyidagilarni Eyler – Venn diagrammalari yordami bilan tasvirlang va ulardan tenglarini ko‘rsating:

1) $(A'\bigcap B)'$; 2) $A'\bigcap B'$; 3) $A'\bigcap B$;

4) $A\bigcup B'$; 5) $(A'\bigcup B)'$; 6) $A'\bigcup B'$.

52. Munosabatlarni isbot qiling:

1) $(A\bigcup B)\setminus B = A$;

2) $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$;

3) $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;

4) $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$;

53. A va B lar U universal to‘plamning qism-to‘plamlari. Isbot qiling:

1) $(A\bigcap B)' = A'\bigcup B'$; 2) $(A\bigcap B) = A\setminus(A\bigcap B')$.

54. Ifodalarni soddalashtiring:

1) $B\bigcap(A\bigcup B)$; 2) $(A\bigcap B)\bigcap(A'\bigcap B)$.

55. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

a) $A\bigcup B = B\bigcup A$; b) $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup(B\bigcup C)$;

d) Agar $A\subset B$ bo‘lsa, $A\bigcup B = B$;

e) $A\bigcup\varnothing = A$; f) $A\bigcup A = A$.

56. Quyidagi tengliklarni isbotlang:

a) $A\bigcap B = B\bigcap A$; b) $(A\bigcap B)\bigcap C = A\bigcap(B\bigcap C)$;

d) $A\bigcap A = A$; e) $A\bigcap\varnothing=\varnothing$.

57. Ayirish va to‘ldirish amallarining quyidagi xossalarini isbotlang ($A\subset B,\ B\subset C,\ C\subset U$ deb hisoblang):

a) $A'\bigcap A=\varnothing$; e) $\varnothing' = U$;

b) $A'\bigcup A = U$; f) $U' = \varnothing$;

d) $(A\bigcap B)' = A'\bigcup B'$; g) $(A\setminus B)\setminus C = A\setminus(B\bigcup C)$.

58. $\varnothing, \bigcup, \bigcap, \subset$ belgilardan foydalanib, to‘plamlar orasidagi munosabatni yozing:

a) $X_1 = \{-5;\ 6\}$, $X_2 = \{x \mid x\in Z, -5\le x\le 6\}$,

$X_3 = \{x \mid x\in Z, -5 < x < 6\}$, $X_4 = \{x \mid x\in Q, -5\le x\le 6\}$

b) $A=\{1;\ 3;\ 5;\ 7\}, B=\{1;\ 5;\ 7\}$; d) $A=\{\{0\};\ 1;\ 3\}$, $B=\{1;\ 3\}$;

e) $A=\varnothing$, $B=\{k, l, m\}$; f) $A=\{x,\ y,\ z\}$, $B=\{y,\ z,\ x\}$;

g) $A=\{0\}$, $B=\varnothing$; h) $A=\{\{x\}, x, \varnothing\}$, $B=\{x\}$;

i) $A=\{\{1;\ 3\};\{2;\ 4\};\ 2;\ 4\}$, $B=\{\{1;\ 3\},\ 2\}$;

j) $A=\{\{3\},3,\varnothing\}$, $B=\varnothing$.

59. $A=\{2n-1\mid n\in N\}$, $B=\{4n+1\mid n\in N\}$, $C=\{3n+1\mid n\in N\}$ bo‘lsin Ushbu to‘plamlarni toping:

1) $A\cap B$; 2) $A\cap C$; 3) $A\cap B\cap C$; 4) $(A\cap B)\cup C$;

60. Quyidagi munosabatlar to‘g‘rimi:

1) $\{a,c\}\subset\{\{a,b,c\},\{a,c\},a,b\}$

2) $\{a,b,c\}\in\{\{a,b,c,d\},\{a,c\},a,b\}$;

3) $\{1,2,3\}\subset\{\{1,2,3,4\},\{1;3\},1,2\}$?

61. Sonli to‘plamlarni toping:

1) $\{(-1)^n-1\mid n\in N\}$; 2) $\{1-(-1)^n\cdot 2\mid n\in N\}$;

62. Agar $A=\{-2;-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $B=\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, $C=\{-3;-2;-1;0;2;\ 3\}$, $D=\{2;3;4;5;6;7\}$, $M=\{5\le x-10\le 12\mid x\in N\}$, $K=\{x+10\le 30\mid x\in N\}$ bo‘lsa, quyidagi to‘plamlar elementlarini ko‘rsatib yozing:

1) $(A\cup B)\cap(C\cup D)$; 2) $(A\cap B\cap C)\cup D$;

3) $(A\cap B)\cup(C\cap D)\cup M$; 4) $(A\cup C)\cap(A\cup B)$;

5) $(B\setminus A)\cup(A\setminus B)$; 6) $D'_B\cup(C\setminus D)$;

7) $M\cap K$; 8) $M\cup K$.

63. Yozuvlarning ma’nosini tushuntiring:

1) $\bigcup_{i=3}^{8}A_i$; 2) $\bigcap_{j=2}^{8}A_j$; 3) $\bigcup_{k=1}^{4}A_{3k+1}$; 4) $\bigcap_{k=1}^{6}A_{2k-1}$.

64. Hodisalar ifodasini qisqaroq yozing:

1) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{60}$; 2) $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{50}$;

3) $A_{41}\cup A_{48}\cup\ldots\cup A_{55}$; 4) $A_1\cap A_3\cap\ldots\cap A_{107}$.

65. Sinfdagi bir necha o‘quvchi marka yig‘dilar. 15 o‘quvchi O‘zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O‘zbekiston markalarini, ham chet el markalarini yig‘di. Sinfda necha o‘quvchi marka to‘plagan?

66. 32 o'quvchining 12 tasi voleybol sektsiyasiga, 15 tasi basketbol sektsiyasiga, 8 kishi esa ikkala sektsiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi nechta o'quvchi hech bir sektsiyaga qatnashmaydi?

67. 30 o'quvchidan 18 tasi matematikaga, 17 tasi esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni nechta bo'lishi mumkin? (Ko'rsatma. Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o'quvchilar soni $k \in \{0,1,2,3,...,12\}$).

68. 100 odamdan iborat sayyohlar guruhida 10 kishi nemis tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi, 75 tasi nemis tilini, 83 tasi esa fransuz tilini biladi. Ikkala tilni ham biladigan sayyohlar sonini toping.

69. 26 o'quvchining 14 tasi shaxmatga, 16 tasi shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar nechta?

70. 100 ta talaba tekshirib ko'rilganda quyidagilar aniqlandi: ulardan 28 tasi ispan tilini, 30 tasi nemis tilini, 42 tasi fransuz tilini, 8 tasi ispan va nemis tilini, 10 tasi ispan va fransuz tilini, 5 tasi nemis va fransuz tilini va nihoyat 3 tasi har uchala tilni o'rganar ekan. Quyidagilarni aniqlang:

a) Qancha talaba birorta ham chet tilini bilmaydi?
b) Qancha talaba faqat fransuz tilini o'rganadi?
s) Qancha talaba fransuz tilini o'rganganda va faqat shundagina nemis tilini o'rganadi?

71. Quyidagi to'plamlar kesishmasini va birlashmasini toping. Eyler – Venn diagrammasi yordamida grafik talqin qiling.

a) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\quad B = \{8, 9, 10, 11\}$;

b) $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in N$, $\quad B = \{x \mid x = \frac{n+1}{2},\ n \in N\}$;

d) $A = \{x \mid x = 5n,\ n \in N$, $\quad B = \{x \mid x = 2n,\ n \in N\}$;

e) $A = \{x \mid x = \frac{1}{n},\ n \in N\}$, $\quad B = \{x \mid x = \frac{2}{n},\ n \in N\}$.

72. P va Q to'plamlar kesishmasi va birlashmasini sonlar to'g'ri chizig'ida tasvirlang:

a) $P = \{x \mid \frac{10}{3} < x < \sqrt{8}\}$, $\quad Q = \{x \mid \frac{26}{47} < x < 3,2\}$;

b) $P = \{x \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\}$, $\quad Q = \{x \mid \sqrt{2} < x \leq \frac{40}{27}\}$;

d) $P=\{x \mid \frac{11}{4} \le x \le \frac{19}{3}\}$, $Q=\{x \mid \frac{19}{7} < x \le \frac{32}{5}\}$;

e) $P=\{x \mid \frac{4}{11} \le x < \frac{18}{5}\}$, $Q=\{x \mid \sqrt{2} < x < 10\}$.

73. Quyidagilarni $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\forall$, $\exists$, $\nexists$ belgilar yordamida yozing.

1) Ixtiyoriy $a \ge 0$ uchun, $\sqrt{a} = x$ tenglik o‘rinli bo‘ladigan x haqiqiy son mavjud bo‘ladi.

2) $a<0$ va $b>0$ bo‘lsa, $ab<0$ bo‘ladi.

3) Har qanday a, b haqiqiy sonlar uchun $a+b=b+a$ bo‘ladi.

4) Agar a butun son 9 ga bo‘linsa, u holda bu son 3 ga ham bo‘linadi.

5) 2 ga ham, 3 ga ham bo‘linadigan butun son 6 ga ham bo‘linadi va aksincha, 6 ga bo‘linadigan butun son 2 ga ham, 3 ga ham bo‘linadi.

6) Agar $a^2+b^2+c^2=0$ bo‘lsa, $a=b=c=0$ bo‘ladi va aksincha, $a=b=c=0$ bo‘lsa, $a^2+b^2+c^2=0$ bo‘ladi.

7) Ixtiyoriy natural son n ni olmaylik, $n=2k-1$ yoki $n=2k$ bo‘ladigan k natural son mavjud bo‘ladi.

8) Ixtiyoriy n natural son uchun $n^2+n^3 \in N$ bo‘ladi.

9) Ixtiyoriy n, k natural sonlari uchun n^2-k^3 soni butun son bo‘ladi.

10) $a<0$ bo‘lsa, $x^2=a$ tenglik to‘g‘ri bo‘ladigan haqiqiy x son mavjud emas.

74. $D_1(f)$ to‘plamda $f(x)$ va $D_2(g)$ to‘plamda $g(x)$ funksiyalari berilgan bo‘lsa, quyidagi qaysi sohada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar ko‘paytmasi aniqlangan bo‘ladi?

A) $D_1(f) \cup D_2(g)$ to‘plamda berilgan, bunda $D_1(f) \cap D_2(g) \ne \emptyset$;

B) $D_1(f) \cap D_2(g)$ to‘plamda berilgan, bunda $D_1(f) \cap D_2(g) \ne \emptyset$;

C) $D_1(f) \cup D_2(g)$ to‘plamda berilgan, bunda $D_1(f) \cap D_2(g) = \emptyset$;

D) $D_1(f) \cap D_2(g)$ to‘plamda berilgan, bunda $D_1(f) \cap D_2(g) = \emptyset$.

74. $\{x \mid x \in N,\ 2 \le x^2 \le 40\}$ to‘plamning nechta qism to‘plami bor?

To‘plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlariga doir masalalar javobi

1. -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2. **2.** butun bo‘luvchilari to‘plami chekli va butun bo‘linuvchilari to‘plami cheksiz **4.** 30 ta **8.** $S = \{-3, -2, -1, 4\}$ $S_1 = \{3, 2, 1, -4\}$ **9.** {a, b, d, f, i, l, m, n, o, q, t, u, sh, o‘, v, y}

10. a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, b) $F = \{-\frac{7}{4}\}$, c) $Q = \{-12, 0\}$, d) $U = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$; e) $V = \{1, 2\}$, f) $W = \{1, 2, 3\}$ **18.** a) $E \subset A$, b) $D \not\subset C$ c) hech qaysi d) $n(D) < n(B) < n(E) < n(C) < n(A)$

20. a) $A \subset B$, b) $C \subset D$, c) $E \subset F$, d) $K \not\subset M$, $M \not\subset K$ **22.** a) to‘g‘ri b) noto‘g‘ri c) noto‘g‘ri **23.** a) $A = B$, b) $A \neq B$, d) $A \neq B$, e) $A = B$ **24.** teng **28.** a) $\{2, 4, 7, 8, 9, 11\}$ b) $\{6\}$ c) B d) $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ **29.** $\overline{C} = \{1, 3, 5, 6, 13\}$ **31.** $\{d\}$ **32.** $\{1, 2\}$ **34.** $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ **37.** [3; 5] **38.** $P \cup E = \{a, b, c, d, e, f, g, k, z\}$

39. a) to‘g‘ri b) noto‘g‘ri d) noto‘g‘ri **40.** a) $A \cup B = \{x \mid x = 4k, k \in Z\}$ **41.** $n(A \cup B) = 39$ **42.** a)7 b)8 d)4 e)7 f) Ø g) B **43.** $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$

45 $\overline{A} = \{x \mid x = 2k, k \in Z\}$ **46.** $\overline{A} = \{x \mid x = 3k \pm 1, k \in Z\}$ **54.** 1) B 2) Ø **62.** 1) $\{-2; -1; 0; 2; 3; 4; 5; 6\}$, 2) D 3) $\{2 \le x \le 5, 15 \le x \le 27, \mid x \in N\}$ 4) A 5) $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 6\}$, 6) $\{-3; -2; -1; 0; 2; 7\}$, 7) $\{15 \le x \le 20 \mid x \in N\}$, 8) $\{x \le 27 \mid x \in N\}$,

64. 1) $\bigcup_{i=1}^{60} A_i$; 2) $\bigcap_{j=1}^{50} A_j$; 3) $\bigcup_{i=6}^{8} A_{7i-1}$; 4) $\bigcap_{j=1}^{54} A_{2j-1}$; **65.** 20 kishi **66.** 13 kishi **68.** 68 kishi **69.** 4 kishi **70.** a) 20 b) 30 s) 5 **74.** B **75.** 32