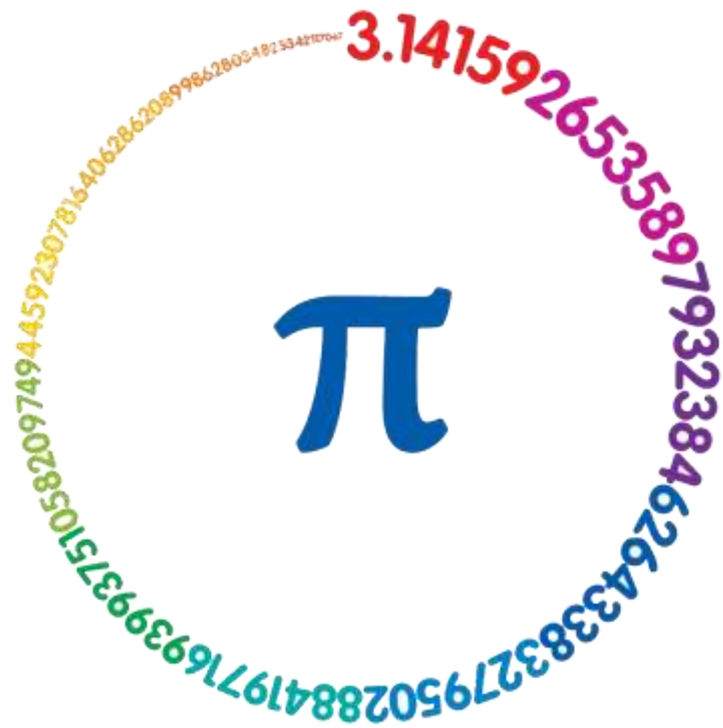
Matematika fanidan qo`llanma

Funksiya qiymatlarining o`zgarishi
Funksiya grafigining asimptotalari



TUZUVCHILAR: V.JO`RAYEV

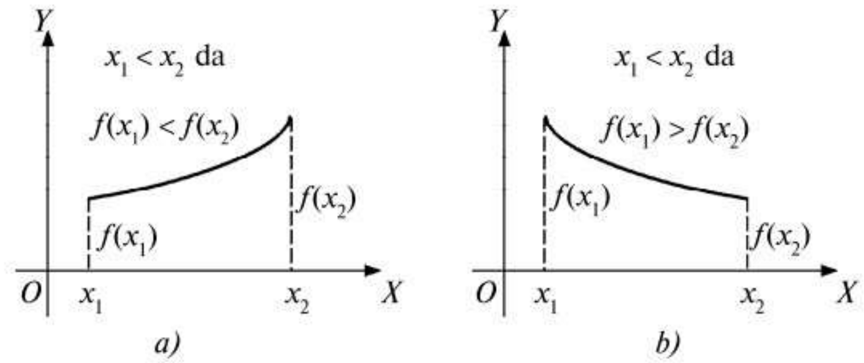
D.JUMANAZAROV

Farg`ona -2018

FUNKSIYA QIYMATLARINING O‘ZGARISHI

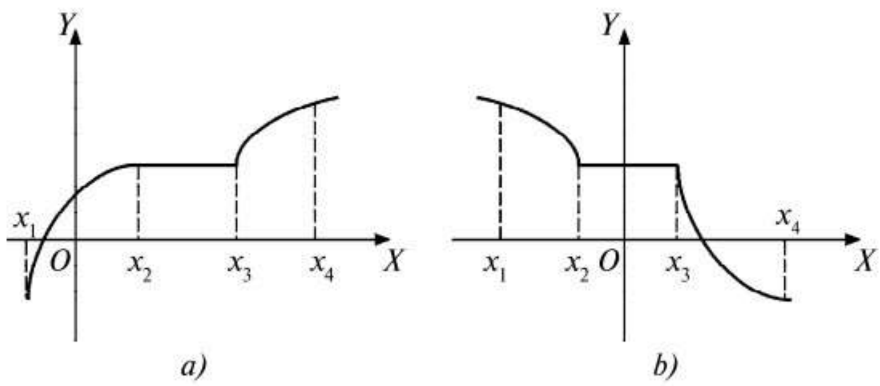
Agar X to‘plamda x argument qiymatining ortishi bilan f funksiyaning qiymatlari ham ortsa (kamaysa), funksiya shu to‘plamda o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi.

Boshqacha aytganda, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ qiymatlarda $f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ bo‘lsa, f funksiya X to‘plamda o‘suvchi, agar $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$ bo‘lsa, funksiya kamayuvchi bo‘ladi (1-a, b rasm).



1- rasm.

Agar $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ da $f\left(x_1\right) \leq f\left(x_2\right)$ (mosh ravishda $f\left(x_1\right) \geq f\left(x_2\right)$) bo‘lsa, f funksiyaga X to‘plamda ***noqat’iy o‘suvchi*** (mos ravishda ***noqat’iy kamayuvchi***) deyiladi. Bunday funksiyalar grafigi o‘sish (kamayish) oraliqlaridan tashqari gorizontallik oraliqlariga ham ega bo‘lishlari mumkin (2-a, b rasm).



2 - rasm.

X to‘plamda o‘suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar shu to‘plamda ***monoton***, noqat’iy o‘suvchi yoki noqat’iy kamayuvchi funksiyalar shu X to‘plamda ***noqat’iy monoton*** funksiyalar deyiladi.

$y = x^2$ funksiya $(-\infty; 0]$ oraliqda monoton, chunki unda kamayuvchi, $[0; +\infty)$ oraliqda ham monoton, unda o‘sadi, lekin $(-\infty; +\infty)$da monoton emas, chunki unda kamayuvchi ham emas, o‘suvchi ham emas.

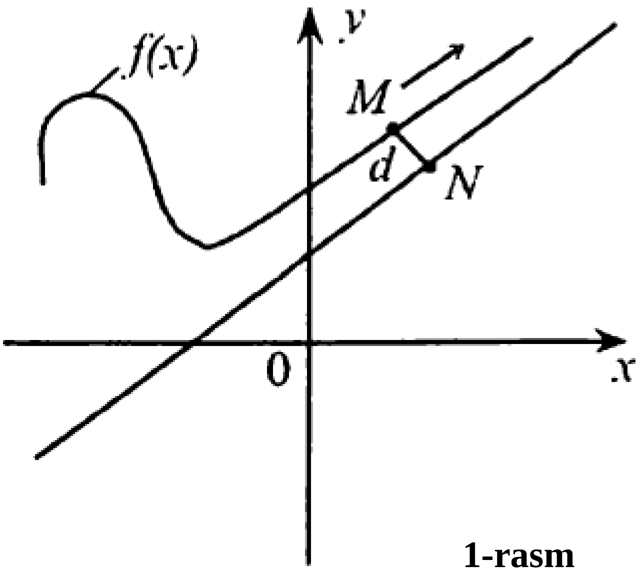
Funksiyalarning monotonligini isbotlashda quyidagi ta’kidlardan foydalanish mumkin:

1. agar X to‘plamda f funksiya o‘suvchi bo‘lsa, har qanday c sonida $f + c$ funksiya ham X da o‘sadi;
2. agar f funksiya X to‘plamda o‘suvchi va $c > 0$ bo‘lsa, cf funksiya ham X da o‘sadi;
3. agar f funksiya X to‘plamda o‘ssa, $-f$ funksiya unda kamayadi;
4. agar f $(f(x) \neq 0)$ funksiya X to‘plamda o‘ssa va o‘z ishorasini saqlasa, $\frac{1}{f}$ funksiya shu to‘plamda kamayadi;
5. agar f va g funksiyalar X to‘plamda o‘suvchi bo‘lsa, ularning $f + g$ yig‘indisi ham shu to‘plamda o‘sadi;
6. agar f va g funksiyalar X to‘plamda o‘suvchi va nomanfiy bo‘lsa, ularning $f \cdot g$ ko‘paytmasi ham shu to‘plamda o‘suvchi bo‘ladi;
7. agar f funksiya X to‘plamda o‘suvchi va nomanfiy, n esa natural son bo‘lsa, f^n funksiya ham shu to‘plamda o‘suvchi bo‘ladi;
8. agar f funksiya X to‘plamda o‘suvchi, g funksiya esa f funksiyaning $E(f)$ qiymatlari to‘plamida o‘suvchi bo‘lsa, bu funksiyalarning $g \cdot f$ kompozitsiyasi ham X da o‘suvchi bo‘ladi.

FUNKSIYA GRAFIGINING ASIMPTOTALARI

Funksiyani tekshirayotganda uning grafigi koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda, yoki boshqacha aytganda, uning o'zgaruvchan nuqtasi cheksizlikka intilganda grafikning ko‘rinishini bilib olish muhim.

Ta’rif: Agar o‘zgaruvchi $M(x;y)$ nuqta funksiya grafigi bo‘yicha koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda $y=f(x)$ funksiya grafigidagi o'zgaruvchi $M(x;y)$ nuqtadan to‘g‘ri chiziqdagi $N(x_1;y_1)$ nuqtagacha bo‘lgan $d=MN$ masofa nolga intilsa, bu to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***asimptotasi*** deyiladi (1-rasm).



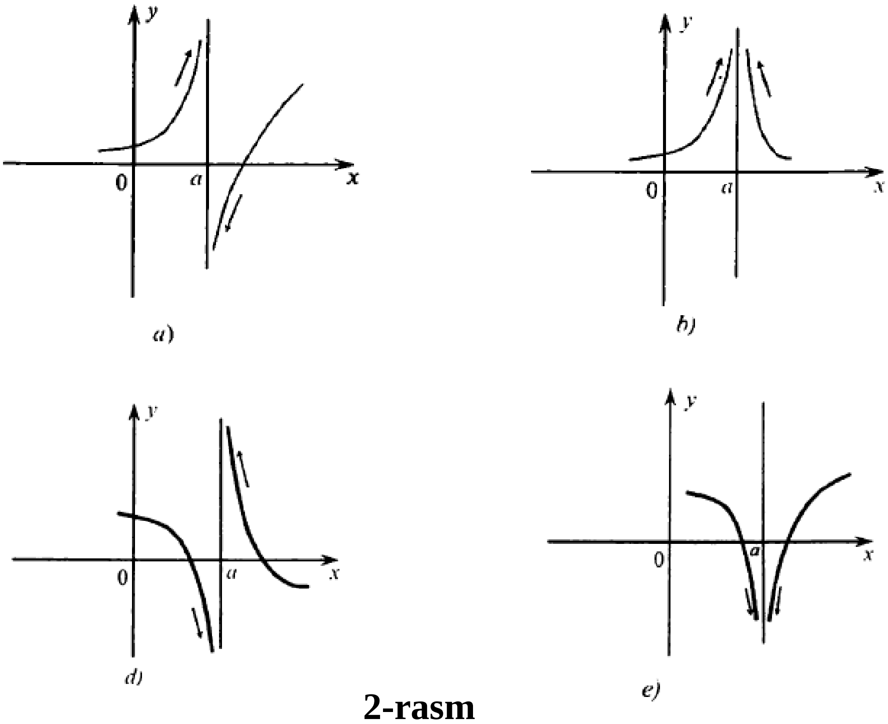
1-rasm

Oy va Ox o‘qlarga parallel hamda koordinata o`qlariga parallel bo‘lmagan asimptotalami qaraymiz.

Vertikal asimptota

$y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $\varepsilon>0$ atrofida aniqlangan, ya‘ni $x\in U_{\varepsilon}(a)$ bo‘lsin.

Ta’rif: Agar $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ lardan biri yoki ularning ikkalasi ham cheksiz bo`lsa, $x=a$ to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining ***vertikal*** yoki Oy ***o‘qqa parallel asimptotasi*** deyiladi (2- a, b, d, e rasm).



2-rasm

Demak, $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotalarini izlash uchun funksiyaning qiymatini cheksizlikka aylantiradigan (cheksiz uzilishga ega bo`lgan) $x = a$ nuqtani topish kerak ekan. Bunda $x = a$ to`g`ri chiziq vertikal asimptota bo`ladi.

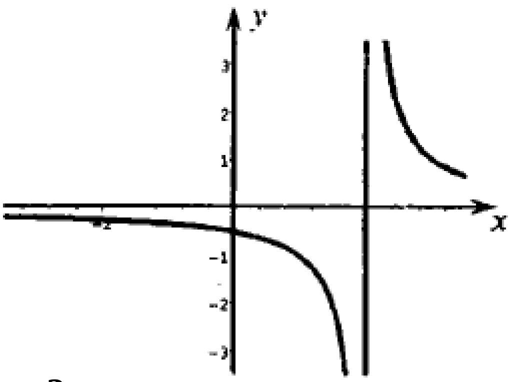
Eslatma: Umuman aytganda, $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bir nechta vertikal asimptotalarga ega bo`lishi ham mumkin.

Misol: $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $x \in [-2; 3]$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

Yechilishi: Berilgan funksiyaning maxraji $x = 2$ nuqtada nolga aylanadi. $x \to 2 \pm 0$ da berilgan funksiyaning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

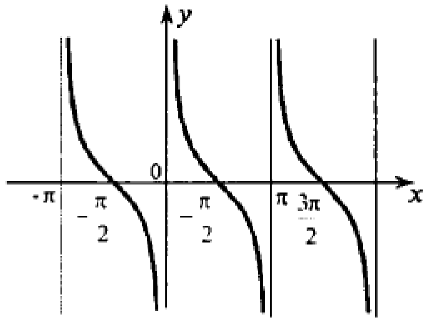
Demak, ta'rifga ko`ra berilgan funksiyaning grafigi uchun $x = 2$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo`ladi (3-rasm).



3-rasm

Misol: $f(x) = ctgx$ funksiya grafigining vertikal asimptotasini toping.

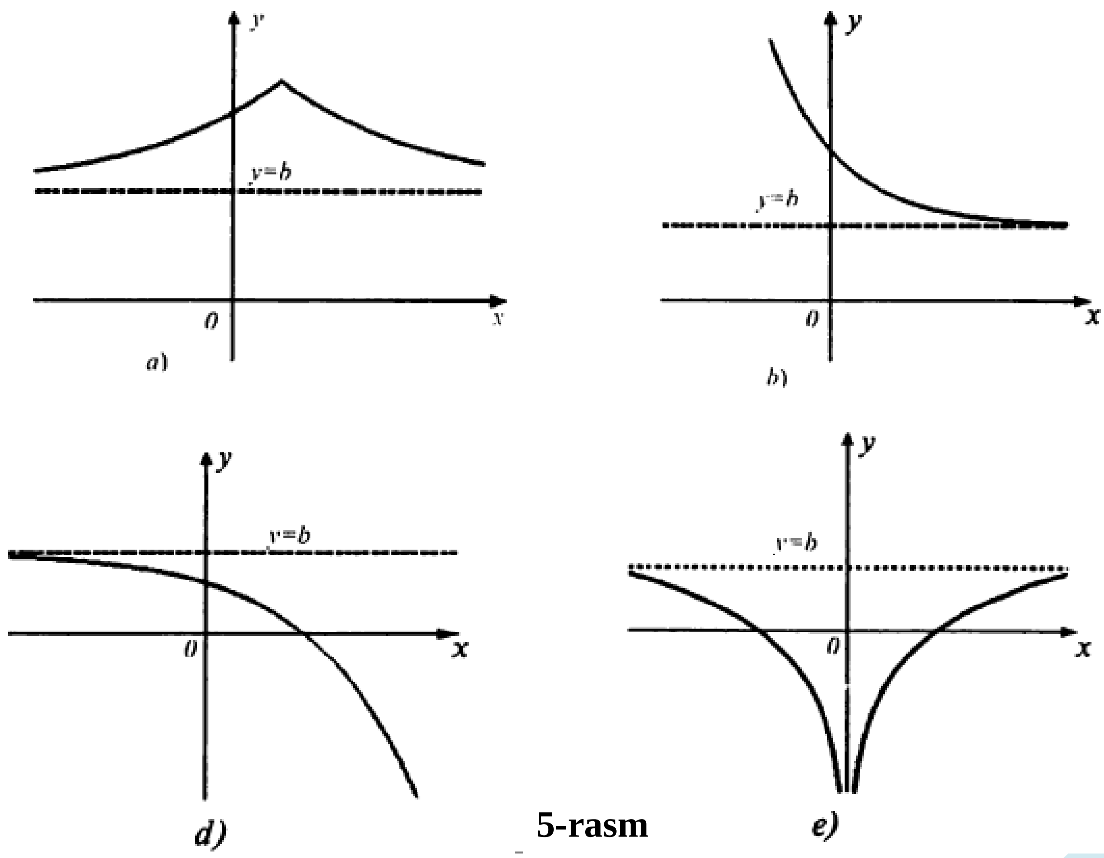
Yechilishi: Berilgan funksiya $x = \pi n \ (n \in Z)$ nuqtalarda 2 - tur uzilishga ega. $x \to \pi n \pm 0 \ (n \in Z)$ da berilgan funksiyaning limiti $\pm\infty$ ga aylanadi. Shuning uchun, 2 – ta'rifga asosan, funksiyaning grafigi cheksiz ko`p vertikal asimptotalarga ega (4-rasm): $x = 0$, $x = \pm 2\pi$, ... $x = \pm \pi n$.



4-rasm

Gorizontal asimptotalar

Ta'rif: Agar $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \quad (b \in R^1)$ bo`lsa, $y = b$ to'g'ri chiziq $x \to +\infty \ (x \to -\infty)$ da $y = f(x)$ funksiya grafigining gorizontal yoki $OX$ ***o`qqa parallel asimptotasi*** deyiladi. (5- a, b, d, e rasmlar)



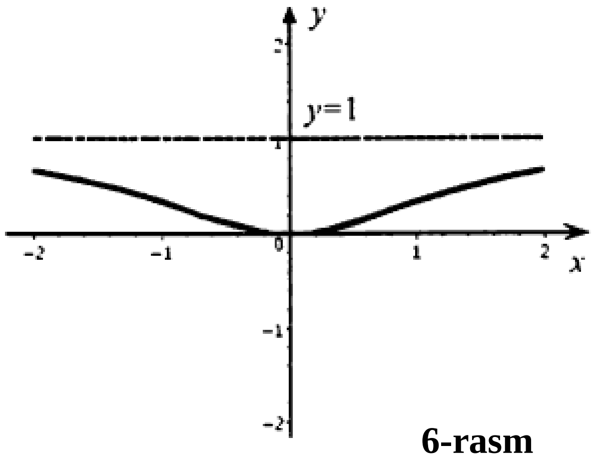
5-rasm

Misol: $f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{x^2+2}$ funksiya grafigining gorizontal asimptotasini toping.

Yechilishi: Berilgan funksiya R^1 da aniqlangan. $x\to\pm\infty$ da berilgan funksiyaning limitini hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2+2}=\lim\frac{1}{1+\dfrac{2}{x^2}}=1$$

Demak, ta'rifga ko\`ra, berilgan funksiyaning grafigi uchun $y=1$ to\`g\`ri chiziq gorizontal asimptota bo\`ladi. (6-rasm)

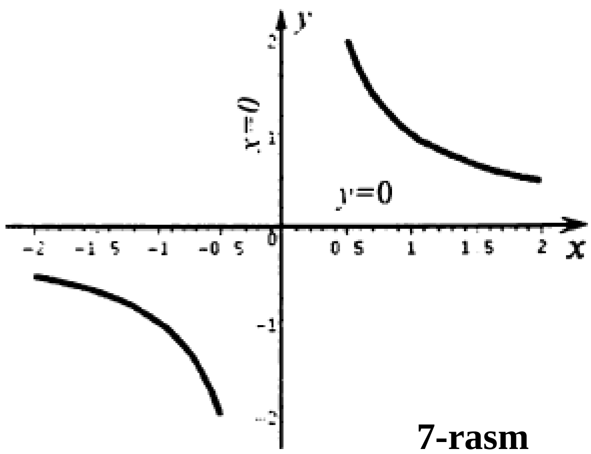


6-rasm

Misol: $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ funksiya grafigining vertikal va gorizontal asimptotalarini toping.

Yechilishi: Ravshanki, $\dfrac{1}{x}$ funksiyaning grafigi uchun $x=0$ va $y=0$ to\`g\`ri chiziqlar, mos ravishda, vertikal va gorizontal asimptotalar bo\`ladi:

$$\lim_{x\to0\pm0} f\left(x\right)=\lim_{x\to0\pm0}\frac{1}{x}=\pm\infty \quad \lim_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{(7-rasm)}$$



7-rasm