ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ для поступающих В ВУЗЫ

группа А

Под редакцией
М. И. СКАНАВИ

Москва
«Мир и Образование»
Минск
«Харвест»
2003

УДК 51(076.1)
ББК 22.11
П51

Полный сборник решений задач для поступающих в вузы.
П51 Группа А / Под ред. М. И. Сканави. — М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: Мн.: ООО «Харвест», 2003 . — 912 с.: ил.

ISBN 5-9466-033-0 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-1189-8 (ООО «Харвест»)

Впервые в помощь абитуриентам публикуется полный сборник задач с решениями под редакцией М. И. Сканави по всем группам сложности.

Книги помогут учащимся научиться решать экзаменационные задачи различного уровня сложности любого вуза.

Условия и нумерация всех задач полностью соответствуют изданию «Сборник задач по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканави, 6-е издание (М.: ОНИКС 21 век, Мир и Образование).

УДК 51(076.1)
ББК 22.11

ISBN 5-9466-033-0
(ООО «Издательство «Мир и Образование»)
ISBN 985-13-1189-8
(ООО «Харвест»)

Решения к главе 1

Вычислить **(1.001—1.040):**

1.001. $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\dfrac{5}{16}\right):\dfrac{169}{24}}$.

Решение.

$$\frac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}=\frac{0{,}65:6{,}5+9{,}9}{\left(\frac{1}{30}+\frac{24}{5}-\frac{21}{16}\right)\cdot\frac{24}{169}}=\frac{0{,}1+9{,}9}{\frac{169}{48}\cdot\frac{24}{169}}=$$

$$=\frac{10}{\frac{1}{2}}=20.$$

Ответ: 20.

1.002. $\left(\left(\dfrac{7}{9}-\dfrac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\dfrac{6}{7}-\dfrac{17}{28}\right):(0{,}358-0{,}108)\right)\cdot1{,}6-\dfrac{19}{25}$.

Решение.

$$\left(\left(\frac{7}{9}-\frac{47}{72}\right):1{,}25+\left(\frac{6}{7}-\frac{17}{28}\right):(0{,}358-0{,}108)\right)\cdot1{,}6-\frac{19}{25}=$$

$$=\left(\frac{56-47}{72}\cdot\frac{4}{5}+\frac{24-17}{28}:0{,}25\right)\cdot1{,}6-\frac{19}{25}=(0{,}1+1)\cdot1{,}6-\frac{19}{25}=1{,}76-0{,}76=1.$$

Ответ: 1.

1.003. $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$.

Решение.

$$\frac{\left(0{,}5:1{,}25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}=\frac{\left(\frac{2}{5}+\frac{49}{55}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{55}}=\frac{168}{55}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{55}{3}=32.$$

Ответ: 32.

1.004. $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}}+0{,}125\right):2\dfrac{1}{2}+0{,}43$.

Решение.

$$\left(\frac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\frac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\frac{3}{70}}+0{,}125\right):2\frac{1}{2}+0{,}43=\left(\frac{\frac{19}{10}\cdot\frac{7}{3}}{\frac{38}{10}\cdot\frac{70}{3}}+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{2}{5}+0{,}43=$$

$$=\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{20}+0{,}43=0{,}02+0{,}05+0{,}43=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

1.005. $\dfrac{2\dfrac{3}{4}:1{,}1+3\dfrac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\dfrac{1}{3}}:\dfrac{5}{7}-\dfrac{\left(2\dfrac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\dfrac{1}{2}}$.

Решение.

$$\frac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\frac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{10}{3}}{\frac{5}{2}-\frac{4}{3}}\cdot\frac{7}{5}-\frac{\frac{20}{3}\cdot\frac{3}{8}}{1{,}25}=7-2=5.$$

Ответ: 5.

1.006. $\dfrac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\dfrac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}$.

Решение.

$$\frac{\left(13{,}75+9\frac{1}{6}\right)\cdot 1{,}2}{\left(10{,}3-8\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{9}}+\frac{\left(6{,}8-3\frac{3}{5}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{\left(3\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-27\frac{1}{6}=\frac{\left(\frac{55}{4}+\frac{55}{6}\right)\cdot\frac{6}{5}}{(2{,}3-0{,}5)\cdot\frac{5}{9}}+\frac{\left(\frac{34}{5}-\frac{18}{5}\right)\cdot\frac{35}{6}}{\left(\frac{4}{6}-\frac{1}{6}\right)\cdot 56}-$$

$$-\frac{163}{6}=\frac{11\left(1+\frac{3}{2}\right)}{\frac{18}{10}\cdot\frac{5}{9}}+\frac{\frac{16}{5}\cdot\frac{35}{6}}{28}-\frac{163}{6}=\frac{55}{2}+\frac{2}{3}-\frac{163}{6}=\frac{169}{6}-\frac{163}{6}=1.$$

Ответ: 1.

1.007. $\dfrac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}$.

Решение.

$$\frac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+0{,}1-\frac{1}{15}\right)\cdot 2{,}52}{\left(0{,}5-\frac{1}{3}+0{,}25-\frac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}=\frac{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\right):\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{63}{25}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{7}{13}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{63}{25}}{\frac{13}{60}\cdot 12\cdot\frac{7}{13}}=\frac{21}{5}\cdot\frac{5}{7}=3.$$

Ответ: 3.

1.008. $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right).$

Решение.

$$\left(\frac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\frac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)=$$

$$=\left(\frac{\frac{10}{3}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{4}{3}}\cdot\frac{\frac{23}{5}-\frac{7}{3}}{\frac{23}{5}+\frac{7}{3}}\cdot\frac{26}{5}\right):\left(\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}+\frac{57}{10}\right)=$$

$$=\left(\frac{35}{7}\cdot\frac{34}{104}\cdot\frac{26}{5}\right):\left(\frac{28}{10}+\frac{57}{10}\right)=\frac{17}{2}\cdot\frac{2}{17}=1.$$

Ответ: 1.

1.009. $\dfrac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90.$

Решение.

$$\frac{0{,}4+8\left(5-0{,}8\cdot\frac{5}{8}\right)-5:2\frac{1}{2}}{\left(1\frac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\frac{2}{3}\right)\right)\cdot 34\frac{2}{5}}\cdot 90=\frac{\left(0{,}4+40-4-5\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot 90}{\left(\frac{15}{8}\cdot 8-\frac{89}{10}+\frac{13}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{172}{5}}=$$

$$=\frac{34{,}4\cdot 90}{\left(\frac{150}{10}-\frac{89}{10}+\frac{39}{10}\right)\cdot\frac{172}{5}}=\frac{344\cdot 9}{2\cdot 172}=9.$$

Ответ: 9.

1.010. $\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}.$

Решение.

$$\dfrac{\left(5\dfrac{4}{45}-4\dfrac{1}{6}\right):5\dfrac{8}{15}}{\left(4\dfrac{2}{3}+0{,}75\right)\cdot 3\dfrac{9}{13}}\cdot 34\dfrac{2}{7}+\dfrac{0{,}3:0{,}01}{70}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{\left(\dfrac{229}{45}-\dfrac{25}{6}\right):\dfrac{83}{15}}{\left(\dfrac{14}{3}+\dfrac{3}{4}\right)\cdot\dfrac{48}{13}}\cdot\dfrac{240}{7}+\dfrac{30}{70}+\dfrac{2}{7}=$$

$$=\dfrac{\dfrac{83}{90}\cdot\dfrac{15}{83}}{\dfrac{65}{12}\cdot\dfrac{48}{13}}\cdot\dfrac{240}{7}+\dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{6\cdot 20}\cdot\dfrac{240}{7}+\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{7}=1.$$

Ответ: 1.

1.011. $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0{,}05.$

Решение.

$$\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-0{,}005\right):0{,}1}{30{,}5+\dfrac{1}{6}+3\dfrac{1}{3}}+\dfrac{6\dfrac{3}{4}+5\dfrac{1}{2}}{26:3\dfrac{5}{7}}-0{,}05=$$

$$=\dfrac{(0{,}6+0{,}42)\cdot 10}{\dfrac{61}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{10}{3}}+\dfrac{12\dfrac{1}{4}\cdot 26}{26\cdot 7}-0{,}05=$$

$$=\dfrac{10{,}2}{34}+\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{7}{4}-\dfrac{1}{20}=2.$$

Ответ: 2.

1.012. $\dfrac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\dfrac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}.$

Решение.

$$\frac{3\frac{1}{3}\cdot 1{,}9+19{,}5:4\frac{1}{2}}{\frac{62}{75}-0{,}16}:\frac{3{,}5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}{0{,}5\left(1\frac{1}{20}+4{,}1\right)}=\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{19}{10}+\frac{39}{2}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{62}{75}-\frac{4}{25}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{21}{20}+\frac{41}{10}\right)}{\frac{7}{2}+\frac{14}{3}+\frac{32}{15}}=$$

$$=\frac{\frac{19}{3}+\frac{13}{3}}{\frac{2}{3}}\cdot\frac{\frac{103}{40}}{\frac{103}{10}}=\frac{16}{4}=4.$$

Ответ: 4.

1.013. $\dfrac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\dfrac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25.$

Решение.

$$\frac{\left(1\frac{1}{5}:\left(\frac{17}{40}+0{,}6-0{,}005\right)\right)\cdot 1{,}7}{\frac{5}{6}+1\frac{1}{3}-1\frac{23}{30}}+\frac{4{,}75+7\frac{1}{2}}{33:4\frac{5}{7}}:0{,}25=$$

$$=\frac{\frac{6}{5}:\left(\frac{17}{40}+\frac{3}{5}-\frac{1}{200}\right)\cdot\frac{17}{10}}{\frac{5}{6}+\frac{4}{3}-\frac{53}{30}}+\frac{\frac{19}{4}+\frac{15}{2}}{33\cdot\frac{7}{33}}\cdot 4=\frac{\frac{6}{5}:\frac{51}{50}\cdot\frac{17}{10}}{\frac{2}{5}}+\frac{49}{4\cdot 7}\cdot 4=5+7=12.$$

Ответ: 12.

1.014. $$\frac{\left(4,5\cdot 1\frac{2}{3}-6,75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0,3+5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right):2\frac{2}{3}}+\frac{1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,3-0,96}{\left(0,2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1,6}.$$

Решение.

$$\frac{\left(4,5\cdot 1\frac{2}{3}-6,75\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(3\frac{1}{3}\cdot 0,3+5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right):2\frac{2}{3}}+\frac{1\frac{4}{11}\cdot 0,22:0,3-0,96\cdot}{\left(0,2-\frac{3}{40}\right)\cdot 1,6}=\frac{\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{3}-\frac{27}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{3}{8}}+$$

$$+\frac{\frac{15}{11}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{3}-\frac{24}{25}}{\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{40}\right)\cdot\frac{8}{5}}=\frac{\left(\frac{30}{4}-\frac{27}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{8}}+\frac{1-\frac{24}{25}}{\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{5}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}+\frac{1}{5}=1.$$

Ответ: 1.

1.015. $$\frac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}.$$

Решение.

$$\frac{\left(1,88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{3}{16}}{0,625-\frac{13}{18}:\frac{26}{9}}+\frac{\left(\frac{0,216}{0,15}+0,56\right):0,5}{\left(7,7:24\frac{3}{4}+\frac{2}{15}\right)\cdot 4,5}=\frac{(1,88+2,12)\cdot\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}}+$$

$$+\frac{\left(\frac{216}{150}+\frac{56}{100}\right)\cdot 2}{\left(\frac{77}{10}\cdot\frac{4}{99}+\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{9}{2}}=\frac{4\cdot\frac{3}{16}}{\frac{5}{8}-\frac{1}{4}}+\frac{\left(\frac{72}{50}+\frac{28}{50}\right)\cdot 2}{\left(\frac{14}{45}+\frac{6}{45}\right)\cdot\frac{9}{2}}=4\cdot\frac{3}{16}\cdot\frac{8}{3}+\frac{4}{2}=4.$$

Ответ: 4.

1.016. $\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}$.

Решение.

$$\left(16\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{18}{33}+2{,}2\left(\frac{8}{33}-\frac{1}{11}\right)+\frac{2}{11}=\left(\frac{33}{2}-\frac{124}{9}\right)\cdot\frac{6}{11}+$$
$$+\frac{22}{10}\left(\frac{8}{33}-\frac{3}{33}\right)+\frac{2}{11}=\frac{49}{18}\cdot\frac{6}{11}+\frac{1}{3}+\frac{2}{11}=\frac{49}{33}+\frac{17}{33}=2.$$

Ответ: 2.

1.017. $\frac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\frac{5}{6}\cdot1{,}2+0{,}8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot3{,}6}{0{,}505\cdot\frac{2}{5}-0{,}002}$.

Решение.

$$\frac{0{,}128:3{,}2+0{,}86}{\frac{5}{6}\cdot1{,}2+0{,}8}\cdot\frac{\left(1\frac{32}{63}-\frac{13}{21}\right)\cdot3{,}6}{0{,}505\cdot\frac{2}{5}-0{,}002}=\frac{0{,}04+0{,}86}{1+0{,}8}\cdot\frac{\left(\frac{95}{63}-\frac{39}{63}\right)\cdot\frac{18}{5}}{0{,}202-0{,}002}=$$
$$=\frac{9}{18}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{18}{0{,}2\cdot5}=8.$$

Ответ: 8.

1.018. $\frac{3\frac{1}{3}:10+0{,}175:0{,}35}{1{,}75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1{,}4}{\left(0{,}5-\frac{1}{9}\right)\cdot3}$.

Решение.

$$\frac{3\frac{1}{3}:10+0{,}175:0{,}35}{1{,}75-1\frac{11}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\left(\frac{11}{18}-\frac{1}{15}\right):1{,}4}{\left(0{,}5-\frac{1}{9}\right)\cdot3}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{\frac{7}{4}-\frac{28}{17}\cdot\frac{51}{56}}-\frac{\frac{49}{90}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{7}{18}\cdot3}=$$
$$=\frac{5}{6\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\right)}-\frac{7\cdot18}{18\cdot7\cdot3}=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}=3.$$

Ответ: 3.

1.019. $\dfrac{0{,}125:0{,}25+1\dfrac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\dfrac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5.$

Решение.

$$\frac{0{,}125:0{,}25+1\frac{9}{16}:2{,}5}{(10-22:2{,}3)\cdot 0{,}46+1{,}6}+\left(\frac{17}{20}+1{,}9\right)\cdot 0{,}5=\frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{8}}{\left(10-\frac{220}{23}\right)\cdot\frac{23}{50}+\frac{8}{5}}+\frac{17}{40}+\frac{19}{20}=$$

$$=\frac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{5}+\frac{8}{5}}+\frac{17}{40}+\frac{38}{40}=\frac{5}{8}+\frac{11}{8}=2.$$

Ответ: 2.

1.020. $\left(\left(1\dfrac{1}{7}-\dfrac{23}{49}\right):\dfrac{22}{147}-\left(0{,}6:3\dfrac{3}{4}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}+3{,}75:1\dfrac{1}{2}\right):2{,}2.$

Решение.

$$\left(\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}-\left(0{,}6:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+3{,}75:1\frac{1}{2}\right):2{,}2=$$

$$=\left(\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right)\frac{147}{22}-0{,}16\cdot 2{,}5+2{,}5\right):2{,}2=\left(\frac{33}{49}\cdot\frac{147}{22}-0{,}4+2{,}5\right):2{,}2=$$

$$=(4{,}5-0{,}4+2{,}5)\cdot\frac{10}{22}=3.$$

Ответ: 3.

1.021. $\left(2:3\dfrac{1}{5}+\left(3\dfrac{1}{4}:13\right):\dfrac{2}{3}+\left(2\dfrac{5}{18}-\dfrac{17}{36}\right)\cdot\dfrac{18}{65}\right)\cdot\dfrac{1}{3}.$

Решение.

$$\left(2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}+\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\left(2\cdot\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}+\frac{65}{36}\cdot\frac{18}{65}\right)\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

1.022. $\dfrac{0,5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0,125}{\frac{1}{3}+0,4+\frac{14}{15}}+\dfrac{(3,75-0,625)\frac{48}{125}}{12,8\cdot 0,25}$.

Решение.

$$\frac{0,5+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+0,125}{\frac{1}{3}+0,4+\frac{14}{15}}+\frac{(3,75-0,625)\frac{48}{125}}{12,8\cdot 0,25}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{14}{15}}+\frac{3,125\cdot 48}{3,2\cdot 125}=$$

$$=\frac{25}{24}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1,2}{3,2}=0,625+0,375=1.$$

Ответ: 1.

1.023. $\left(26\frac{2}{3}:6,4\right)\cdot\left(19,2:3\frac{5}{9}\right)-\dfrac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0,5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\dfrac{1}{18}$.

Решение.

$$\left(26\frac{2}{3}:6,4\right)\cdot\left(19,2:3\frac{5}{9}\right)-\frac{8\frac{4}{7}:2\frac{26}{77}}{0,5:18\frac{2}{3}\cdot 11}-\frac{1}{18}=\left(\frac{80}{3}\cdot\frac{5}{32}\right)\cdot\left(\frac{96}{5}\cdot\frac{9}{32}\right)-$$

$$-\frac{\frac{60}{7}\cdot\frac{77}{180}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{56}\cdot 11}-\frac{1}{18}=\frac{25}{6}\cdot\frac{27}{5}-\frac{11\cdot 112}{3\cdot 33}-\frac{1}{18}=\frac{45}{2}-\frac{112}{9}-\frac{1}{18}=$$

$$=\frac{1}{18}(45\cdot 9-112\cdot 2-1)=10.$$

Ответ: 10.

1.024. $\dfrac{0,725+0,6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0,128\cdot 6\frac{1}{4}-0,0345:\frac{3}{25}}\cdot 0,25$.

Решение.

$$\frac{0{,}725+0{,}6+\frac{7}{40}+\frac{11}{20}}{0{,}128\cdot 6\frac{1}{4}-0{,}0345:\frac{3}{25}}\cdot 0{,}25=\frac{1{,}325+\frac{29}{40}}{0{,}128\cdot 6{,}25-0{,}0345:0{,}12}\cdot 0{,}25=$$

$$=\frac{1{,}325+0{,}725}{0{,}8-0{,}2875}\cdot 0{,}25=\frac{2{,}05}{0{,}5125}\cdot 0{,}25=1.$$

Ответ: 1.

1.025. $\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217\cdot 2\frac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right).$

Решение.

$$\left((520\cdot 0{,}43):0{,}26-217\cdot 2\frac{3}{7}\right)-\left(31{,}5:12\frac{3}{5}+114\cdot 2\frac{1}{3}+61\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\left(223{,}6:0{,}26-217\cdot\frac{17}{7}\right)-\left(\frac{63}{2}\cdot\frac{5}{63}+114\cdot\frac{7}{3}+\frac{123}{2}\right)=$$

$$=(860-527)-\left(\frac{5}{2}+266+\frac{123}{2}\right)=333-330=3.$$

Ответ: 3.

1.026. $\dfrac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0{,}5\left(2+\dfrac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right).$

Решение.

$$\frac{(3{,}4-1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85}+6\frac{2}{17}\right)}+0{,}5\left(2+\frac{12{,}5}{5{,}75+\frac{1}{2}}\right)=\frac{2{,}125\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\left(\frac{92}{85}+\frac{104}{17}\right)}+\frac{1}{2}\left(2+\frac{12{,}5}{6{,}25}\right)=$$

$$=\frac{\frac{17}{8}\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\frac{612}{85}}+1+1=1+2=3.$$

Ответ: 3.

1.027. $\left(\dfrac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\dfrac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\dfrac{10}{11}$.

Решение.

$$\left(\frac{3{,}75+2\frac{1}{2}}{2\frac{1}{2}-1{,}875}-\frac{2\frac{3}{4}+1{,}5}{2{,}75-1\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{10}{11}=\left(\frac{3{,}75+2{,}5}{2{,}5-1{,}875}-\frac{2{,}75+1{,}5}{2{,}75-1{,}5}\right)\cdot\frac{10}{11}=$$

$$=\left(\frac{6{,}25}{0{,}625}-\frac{4{,}25}{1{,}25}\right)\cdot\frac{10}{11}=\left(10-\frac{17}{5}\right)\cdot\frac{10}{11}=\frac{33}{5}\cdot\frac{10}{11}=6.$$

Ответ: 6.

1.028. $((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}$.

Решение.

$$((21{,}85:43{,}7+8{,}5:3{,}4):4{,}5):1\frac{2}{5}+1\frac{11}{21}=\left((0{,}5+2{,}5):4\frac{1}{2}\right):\frac{7}{5}+\frac{32}{21}=$$

$$=\left(3\cdot\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{5}{7}+\frac{32}{21}=\frac{10}{21}+\frac{32}{21}=\frac{42}{21}=2.$$

Ответ: 2.

1.029. $\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35$.

Решение.

$$\left(1\frac{2}{5}+3{,}5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3{,}4:2\frac{1}{8}-0{,}35=$$
$$=(1{,}4+3{,}5:1{,}25):2{,}4+3{,}4:2{,}125-0{,}35=(1{,}4+2{,}8):2{,}4+$$
$$+1{,}6-0{,}35=4{,}2:2{,}4+1{,}25=1{,}75+1{,}25=3.$$

Ответ: 3.

1.030. $\dfrac{\left(0{,}3275-\left(2\dfrac{15}{88}+\dfrac{4}{33}\right):12\dfrac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}$.

Решение.

$$\frac{\left(0{,}3275-\left(2\frac{15}{88}+\frac{4}{33}\right):12\frac{2}{9}\right):0{,}07}{(13-0{,}416):6{,}05+1{,}92}=\frac{\left(0{,}3275-\left(\frac{191}{88}+\frac{4}{33}\right)\cdot\frac{9}{110}\right):0{,}07}{12{,}584:6{,}05+1{,}92}=$$

$$=\frac{\left(\frac{131}{400}-\frac{605}{264}\cdot\frac{9}{110}\right)\cdot\frac{100}{7}}{2{,}08+1{,}92}=\frac{\left(\frac{131}{400}-\frac{3}{16}\right)\cdot\frac{100}{7}}{4}=\frac{7}{50}\cdot\frac{100}{7}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

1.031. $\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{21}{45}}{1\dfrac{5}{6}}\cdot\dfrac{1{,}125+1\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}}{0{,}59}$.

Решение.

$$\frac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\frac{1{,}125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0{,}59}=\frac{\frac{5}{6}-\frac{7}{15}}{\frac{11}{6}}\cdot\frac{\frac{9}{8}+\frac{7}{4}-\frac{5}{12}}{\frac{59}{100}}=\frac{11}{30}\cdot\frac{6}{11}\cdot\frac{59}{24}\cdot\frac{100}{59}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{6}=\frac{5}{6}.$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

1.032. $\dfrac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\dfrac{7}{9}}\right)^{-2}:0{,}25}{\dfrac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot0{,}64$.

Решение.

$$\frac{\left(3^{-1}-\sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2}:0{,}25}{\frac{37}{300}:0{,}0925}+12{,}5\cdot 0{,}64=\frac{\left(\frac{1}{3}-\sqrt{\frac{16}{9}}\right)^{-2}\cdot 4}{\frac{37}{300}\cdot\frac{400}{37}}+8=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)^{-2}\cdot 4}{\frac{4}{3}}+8=3(-1)^{-2}+8=3+8=11.$$

Ответ: 11.

1.033. $\dfrac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0{,}5.$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}\cdot 0{,}5=\frac{\left(\frac{5}{8}+\frac{65}{24}\right)\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{13}{10}+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}=\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{401}{165}\cdot\frac{110}{401}}=\frac{2}{3}:\frac{2}{3}=1.$$

Ответ: 1.

1.034. $\dfrac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{4}}:0{,}125.$

Решение.

$$\frac{((7-6{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1\frac{5}{6}\right)\cdot 1\frac{1}{4}}:0{,}125=\frac{(0{,}65:6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{5}{64}\cdot 8}{\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{36}+\frac{6}{5}\cdot 4-\frac{11}{6}\right)\cdot\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{(0{,}1+9{,}9)\cdot\frac{5}{8}}{\left(\frac{1}{30}+\frac{24}{5}-\frac{11}{6}\right)\cdot\frac{5}{4}}=\frac{10\cdot\frac{1}{2}}{\frac{90}{30}}=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

1.035. $$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5.$$

Решение.

$$\frac{\left(2\frac{38}{45}-\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(18\frac{1}{2}-13\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot 0{,}5=\frac{\frac{25}{9}\cdot\frac{9}{125}+\frac{198}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(\frac{37}{2}-\frac{124}{9}\right)\cdot\frac{2}{85}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{5}+\frac{52}{65}}{\frac{85}{18}\cdot\frac{2}{85}}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9.$$

Ответ: 9.

1.036. $$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

Решение.

$$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):\frac{2}{3}-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}=$$

$$=\frac{3\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{2}:\frac{15}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{8}{7}-\frac{23}{49}\right)\cdot\frac{147}{22}}{2\cdot\frac{5}{16}+\left(\frac{13}{4}:13\right)\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{41}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}=\frac{\frac{5}{2}+1+\frac{33}{49}\cdot\frac{147}{22}}{\frac{5}{8}+\frac{3}{8}-\frac{65}{36}\cdot\frac{18}{65}}=$$

$$=\frac{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{8}{\frac{1}{2}}=16.$$

Ответ: 16.

1.037. $$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2}-0{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{12}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}=$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{37}{8}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{9}+2:6{,}75\right)\cdot\frac{68}{121}}{0{,}125:0{,}125+0{,}25:(0{,}358-0{,}108)}=\frac{\left(\frac{35}{18}+2:\frac{27}{4}\right)\frac{68}{121}}{1+0{,}25:0{,}25}=$$

$$=\frac{121}{54}\cdot\frac{68}{121}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17}{27}.$$

Ответ: $\frac{17}{27}$.

1.038. $$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\left(3\frac{7}{12}-2\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot 1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot 1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(5\frac{13}{42}-2\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}=$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{43}{12}-\frac{47}{18}+\frac{49}{24}\right)\cdot\frac{36}{31}-\frac{3}{52}\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot\frac{20}{13}}{\frac{19}{84}:\left(\frac{223}{42}-\frac{69}{28}+\frac{5}{24}\right)+\frac{29}{27}-\frac{4}{27}}=\frac{\left(\frac{217}{72}\cdot\frac{36}{31}-\frac{3}{52}\cdot\frac{13}{3}\right)\cdot\frac{20}{13}}{\frac{19}{84}:\frac{171}{56}+\frac{25}{27}}=$$

$$=\frac{\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{20}{13}}{\frac{2}{27}+\frac{25}{27}}=\frac{13}{4}\cdot\frac{20}{13}=5.$$

Ответ: 5.

1.039. $\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124.$

Решение.

$$\left(\frac{(3{,}2-1{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot 4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right)\cdot 1{,}5}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124=$$

$$=\left(\frac{1{,}5:0{,}003}{\frac{14}{35}\cdot 4\cdot 5}-\frac{\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{2}}{4\cdot\frac{1}{8}}\right):\frac{1241}{20}+11=\left(\frac{500}{8}-\frac{9}{40}\cdot 2\right)\cdot\frac{20}{1241}+11=$$

$$=\left(\frac{125}{2}-\frac{9}{20}\right)\cdot\frac{20}{1241}+11=\frac{1241}{20}\cdot\frac{20}{1241}+11=12.$$

Ответ: 12.

1.040. $5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right)$.

Решение.

$$5\frac{4}{7}:\left(8{,}4\cdot\frac{6}{7}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot 7}{8\cdot 0{,}0125+6{,}9}\right)-20{,}384:1{,}3\right)=$$

$$=\frac{39}{7}:\left(\frac{42}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(6-\frac{(2{,}3+0{,}8)\cdot 7}{0{,}1+6{,}9}\right)-15{,}68\right)=\frac{39}{7}:\left(\frac{36}{5}\left(6-\frac{3{,}1\cdot 7}{7}\right)-15{,}68\right)=$$

$$=\frac{39}{7}:\left(\frac{36}{5}\cdot 2{,}9-15{,}68\right)=\frac{39}{7}:(7{,}2\cdot 2{,}9-15{,}68)=\frac{39}{7}:(20{,}88-15{,}68)=$$

$$=\frac{39}{7}:5{,}2=\frac{39}{7}:\frac{26}{5}=\frac{15}{14}.$$

Ответ: $\frac{15}{14}$.

Найти X из пропорции **(1.041 — 1.045):**

1.041. $\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16}{X}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}}$.

Решение.

$$X=\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0{,}16\cdot\left(41\frac{23}{84}-40\frac{49}{60}\right)}{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}=$$

$$=\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(\frac{15}{7}-\frac{6}{5}\right)\right):0{,}16\cdot\frac{16}{35}}{\frac{23}{7}-\frac{9}{7}}=\frac{\left(4-\frac{7}{2}\cdot\frac{33}{35}\right):\frac{4}{25}\cdot\frac{16}{35}}{2}=$$

$$=\frac{\left(4-\frac{33}{10}\right):\frac{4}{25}\cdot\frac{16}{35}}{2}=\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{25}{4}\cdot\frac{16}{35}}{2}=1.$$

Ответ: 1.

1.042. $\dfrac{1,2:0,375-0,2}{6\dfrac{4}{25}:15\dfrac{2}{5}+0,8}=\dfrac{0,016:0,12+0,7}{X}$.

Решение.

$$X=\frac{(0,016:0,12+0,7)\left(6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0,8\right)}{1,2:0,375-0,2}=\frac{\left(\frac{2}{125}\cdot\frac{3}{25}+\frac{7}{10}\right)\left(\frac{154}{25}\cdot\frac{77}{5}+\frac{4}{5}\right)}{3,2-0,2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2}{15}+\frac{7}{10}\right)\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right)}{3}=\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}}{3}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

1.043. $\dfrac{0,125X}{\left(\dfrac{19}{24}-\dfrac{21}{40}\right)\cdot 8\dfrac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\dfrac{28}{63}-\dfrac{17}{21}\right)\cdot 0,7}{0,675\cdot 2,4-0,02}$.

Решение.

$$X=\frac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0,7\cdot\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}{(0,675\cdot 2,4-0,02)\cdot 0,125}=\frac{\left(\frac{91}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{135}{16}}{(1,62-0,02)\cdot 0,125}=$$

$$=\frac{\frac{40}{63}\cdot\frac{63}{40}}{1,6\cdot 0,125}=\frac{1}{0,2}5.$$

Ответ: 5.

1.044. $\dfrac{X}{10,5\cdot 0,24-15,15:7,5}=\dfrac{9\left(1\dfrac{11}{20}-0,945:0,9\right)}{1\dfrac{3}{40}-4\dfrac{3}{8}:7}$.

Решение.

$$X=\frac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)\cdot(10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}=$$

$$=\frac{9\cdot\left(\frac{31}{20}-\frac{21}{20}\right)\cdot(2{,}52-2{,}02)}{\frac{43}{40}-\frac{35}{8}:7}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{43}{40}-\frac{5}{8}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{20}}=5.$$

Ответ: 5.

1.045. $\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{X}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}.$

Решение.

$$X=\frac{(15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7)\cdot\left(3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)\right)}{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}=$$

$$=\frac{(3{,}8-3{,}3)\cdot(3{,}2+0{,}8\cdot 2{,}25)}{\left(\frac{5}{44}-\frac{5}{66}:\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{6}{5}}=\frac{0{,}5\cdot(3{,}2+1{,}8)}{\left(\frac{5}{44}-\frac{1}{33}\right)\cdot\frac{6}{5}}=\frac{0{,}5\cdot 5}{\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}}=25.$$

Ответ: 25.

Вычислить наиболее рациональным способом **(1.046 — 1.048):**

1.046. $\frac{\sqrt{6{,}3\cdot 1{,}7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6{,}3}{1{,}7}}-\sqrt{\frac{1{,}7}{6{,}3}}\right)}{\sqrt{(6{,}3+1{,}7)^2-4\cdot 6{,}3\cdot 1{,}7}}.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2-4\cdot 6,3\cdot 1,7}}=\frac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\cdot\left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}}-\sqrt{\frac{1,7}{6,3}}\right)}{\sqrt{6,3^2+2\cdot 6,3\cdot 1,7+1,7^2-4\cdot 6,3\cdot 1,7}}=$$

$$=\frac{\sqrt{6,3\cdot 1,7}\cdot\frac{\sqrt{6,3^2}-\sqrt{1,7^2}}{\sqrt{6,3\cdot 1,7}}}{\sqrt{6,3^2-2\cdot 6,3\cdot 1,7+1,7^2}}=\frac{6,3-1,7}{\sqrt{(6,3-1.7)^2}}=\frac{6,3-1,7}{6,3-1,7}=1.$$

Ответ: 1.

1.047. $\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0,15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}.$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0,15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}+4\sqrt{10}\right):\frac{1}{3}\sqrt{40}=\left(\frac{\sqrt{(561+459)(561-459)}}{\frac{30}{7}\cdot\frac{3}{20}+\frac{30}{7}\cdot\frac{3}{20}}+4\sqrt{10}\right)\times$$

$$\times\frac{3}{2\sqrt{10}}=\left(\frac{\sqrt{1020\cdot 102}}{\frac{9}{7}}+4\sqrt{10}\right)\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{102^2\cdot 10}+36\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=$$

$$=\frac{714\sqrt{10}+36\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{750\sqrt{10}}{9}\cdot\frac{3}{2\sqrt{10}}=\frac{375}{3}=125.$$

Ответ: 125.

1.048. $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2.$

Решение.

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}\right)^2=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Вычислить:

1.049. $\dfrac{2^{-2}+5^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75.$

Решение.

$$\frac{2^{-2}+5^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75=\frac{\frac{1}{2^2}+1}{\frac{1}{(0,5)^2}-\frac{5}{(-2)^2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+4,75=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{0,25}-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+4,75=\frac{\frac{5}{4}}{4+1}+4,75=\frac{1}{4}+4\frac{3}{4}=5.$$

Ответ: 5.

1.050. $\dfrac{(0,6)^0-(0,1)^{-1}}{\left(3:2^3\right)^{-1}\cdot(1,5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}.$

Решение.

$$\frac{(0,6)^0-(0,1)^{-1}}{\left(3:2^3\right)^{-1}\cdot(1,5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}=\frac{1-10}{\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-3}=\frac{-9}{\frac{8}{3}\cdot\frac{27}{8}-3}=\frac{-9}{9-3}=\frac{-9}{6}=-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\frac{3}{2}$.

Решения к главе 2

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ПОНЯТИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ. ТОЖДЕСТВО И ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Алгебраическим выражением называется совокупность конечного количества чисел, обозначенных буквами или цифрами, соединенных между собой знаками алгебраических действий и знаками последовательности этих действий (скобками).

Алгебраическое выражение, в котором указаны только действия сложения, вычитания, умножения и возведения в степень с натуральным показателем, называют *целым рациональным выражением*. Если кроме указанных действий, входит действие деления, то выражения называют *дробно-рациональным*.

Целые рациональные и дробно-рациональные выражения вместе называются *рациональными*. Если входит еще и действие извлечения корня, то такое выражение называют *иррациональным*.

Числовым значением алгебраического выражения при заданных числовых значениях букв называют тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения указанных в выражении действий.

Областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраического выражения называют множество всех допустимых совокупностей значений букв, входящих в это выражение.

Действия над степенями

Действия над степенями производятся по нижеследующим правилам:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \qquad (2.1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}\ ; \tag{2.2}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{mn}\ ; \tag{2.3}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n\ ; \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\ . \tag{2.5}$$

Одночлен

Одночленом называется алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями — умножением и возведением в натуральную степень.

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его членами. Одночлен есть частный случай многочлена.

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\ ; \tag{2.6}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\ ; \tag{2.7}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\ ; \tag{2.8}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\ ; \tag{2.9}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2\ ; \tag{2.10}$$

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) = a^3 - b^3\ ; \tag{2.11}$$

$$(a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = a^3 + b^3\ ; \tag{2.12}$$

$$(a-b)\left(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3\right) = a^4 - b^4\ ; \tag{2.13}$$

$$(a-b)\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right) = a^5 - b^5\ ; \tag{2.14}$$

$$(a+b)\left(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4\right) = a^5 + b^5\ ; \tag{2.15}$$

$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+a^5)=a^6-b^6; \quad (2.16)$$

$$(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)=a^7-b^7; \quad (2.17)$$

$$(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)=a^7+b^7; \quad (2.18)$$

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=a^n-b^n, \quad (2.19)$$

где n — любое целое число;

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-a^{n-4}b^3+\ldots+b^{n-1})=a^n+b^n, \quad (2.20)$$

где $n=2k+1$, k — натуральное число;

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc; \quad (2.21)$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc; \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\\&+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd;\end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}(a+b-c-d)^2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\\&+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd;\end{aligned} \quad (2.24)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2+bx+c, \quad (2.25)$$

где x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

Формулы (2.16) — (2.24) остаются верными, если вместо одночленов a, b, c, d подставить любые выражения.

Многочлен $P_n(x)$ относительно переменной x вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_0,$$

где a_0, a_1, a_2, ... a_n — действительные числа и $a_0\neq 0$, называется *многочленом, расположенным по убывающим степеням x*, или многочленом, представленным в *каноническом виде*.

Числа a_0, a_1, a_2, ... a_n называются его коэффициентами, одночлен a_0x^n — его *старшим членом*, a_0 — *свободным членом*, число n — *степенью многочлена* (n — натуральное число).

Корнями многочлена $P_n(x)$ будем называть такие значения переменной x, при которых многочлен $P_n(x)$ превращается в нуль.

Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ ($m\le n$) значит найти два таких многочлена $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, чтобы $P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x)$ и степень многочлена $R_k(x)$ была меньше степени делителя $Q_m(x)$, т.е. $k<m$. При этом многочлен $S_{n-m}(x)$ называют частным, а многочлен $R_k(x)$ — остатком.

Для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ ($m \le n$ и $Q_m(x) \ne 0$) всегда найдется, и притом единственная пара многочленов $S_{n-m}(x)$ и $R_k(x)$, удовлетворяющая тождеству

$$P_n(x)=Q_m(x)S_{n-m}(x)+R_k(x) \qquad (k<m),$$

т.е. если делитель не нуль — многочлен, то действие деления многочленов всегда выполнимо.

Теорема Безу. Если многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ разделить на двучлен $x-a$, то в остатке получим число R, равное значению данного многочлена при $x=a$, т.е. $R=P_n(a)$.

Схема сокращенного деления многочлена на двучлен. При делении многочлена $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$, расположенного по убывающим степеням x, на двучлен $x-a$ применяется метод сокращенного деления, называемый *схемой Горнера.*

Имеют место следующие формулы для нахождения коэффициентов частного $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ и остатка R:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1+aa_0,\\
b_2 &= a_2+ab_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_{n-1} &= a_{n-1}+ab_{n-2},\\
R &= a_n+ab_{n-1}.
\end{aligned}$$

Практически вычисление коэффициентов частного $Q_{n-1}(x)$ и остатка R проводится по следующей схеме (схеме Горнера).

Пусть требуется разделить многочлен $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+$ $+\ldots+a_0$ на двучлен $x-a$.

Значение a двучлена, коэффициенты многочлена ($b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$) и остаток запишем в следующей форме:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + {}$ $+ ab_{n-1}$	$b_{n-3} = a_{n-2} + {}$ $+ ab_{n-2}$	...	$b_0 = a_1 + ab_1$	$R = a_0 + ab_0$

Отсюда записываем частное

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0,$$

если $R = 0$, и результат деления

$$P_n(x) : (x-a) \equiv Q_{n-1}(x) + \frac{R}{x-a} \text{ или } P_n(x) \equiv (x-a)Q_{n-1}(x) + R,$$

если $R \neq 0$.

Понятие корня. Основные свойства корня

Алгебраические выражения, содержащие операцию извлечения корня, называются *иррациональными*.

Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a ($n \geq 2$). Обозначается $\sqrt[n]{a}$, где a — подкоренное выражение (или число), n — показатель корня ($n \geq 2$; $n \in N$).

По определению $\sqrt[n]{a} = b$, если $b^n = a$, или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Основные свойства корня

Если корни рассматривать в множестве действительных чисел, то:

а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Действие, посредством которого отыскивается корень n-й степени из данного числа a, называется извлечением корня n-й степени из числа a, а результат извлечения корня в виде $\sqrt[n]{a}$ называют *радикалом.*

Таким образом, множество действительных чисел не замкнуто относительно извлечения корня четной степени, а результат этого действия (корень) не однозначен.

Заметим, что множество действительных чисел замкнуто относительно извлечения корня нечетной степени, а результат этого действия однозначен.

Арифметический корень и его свойства

Арифметическим значением корня или арифметическим корнем степени n ($n \geq 2; n \in N$) из положительного числа a называется положительное значение корня. Корень из нуля, равный нулю, также будет называться арифметическим корнем, т.е. $\sqrt[n]{a} = b$ есть арифметический корень, где $a \geq 0, b \geq 0$ и $b^n = a$.

Множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно извлечения арифметического корня, а результат этого действия однозначен. Это значит, что для любого неотрицательного числа a и натурального числа n ($n > 1$) всегда найдется, и при том только одно, такое неотрицательное число b, что $b^n = a$.

Правила действий над корнями

Для любых действительных чисел a, b и c и натуральных n и k имеют место следующие правила действий над корнями:

$$\sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c} = \sqrt[2n+1]{abc} \ , \tag{2.26}$$

$$\sqrt[2n+1]{abc} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b} \cdot \sqrt[2n+1]{c} \ , \tag{2.27}$$

$$\frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0), \tag{2.28}$$

$$\sqrt[2n+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}} \quad (b \neq 0), \tag{2.29}$$

$$\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k = \sqrt[2n+1]{a^k}\ , \tag{2.30}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^k} = \left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^k , \tag{2.31}$$

$$\sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}} = \sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a}\ , \tag{2.32}$$

$$\sqrt[(2m+1)(2n+1)]{a} = \sqrt[2m+1]{\sqrt[2n+1]{a}}\ , \tag{2.33}$$

$$\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}\cdot\sqrt[2n]{c} = \sqrt[2n]{abc} \quad (a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0), \tag{2.34}$$

$$\sqrt[2n]{abc} = \sqrt[2n]{|a|}\cdot\sqrt[2n]{|b|}\cdot\sqrt[2n]{|c|} \quad (abc \ge 0), \tag{2.35}$$

$$\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}} = \sqrt[2n]{\frac{a}{b}} \quad (a \ge 0, b > 0), \tag{2.36}$$

$$\sqrt[2n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}} \quad \left(\frac{a}{b} \ge 0, b \ne 0\right), \tag{2.37}$$

$$\sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[2nk]{a} \quad (a \ge 0), \tag{2.38}$$

$$\sqrt[2nk]{a} = \sqrt[2n]{\sqrt[k]{a}} \quad (a \ge 0), \tag{2.39}$$

$$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^k = \sqrt[2n]{a^k} \quad (a \ge 0), \tag{2.40}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2k}} = \left(\sqrt[2n]{|a|}\right)^{2k} \ (a \text{ — любое действительное число}). \tag{2.41}$$

Во множестве действительных чисел рассматриваются корни нечетной степени из любых действительных чисел и корни четной степени из неотрицательных чисел, причем берутся арифметические значения корней.

Замена дробного выражения, у которого числитель или знаменатель (или оба) иррациональны, тождественно равным ему выражением с рациональным числителем (знаменателем) называется исключением иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения.

При исключении иррациональности из числителя (знаменателя) дробного выражения числитель и знаменатель этого выражения умножают на множитель, сопряженный с числителем (знаменателем).

Сопряженным множителем относительно иррационального выражения A называют всякое не равное тождественно нулю выражение B, которое в произведении с A не содержит знака корня, т.е. AB рационально.

Рассмотрим основные случаи исключения иррациональности из знаменателей дробных выражений (аналогично выполняется исключение иррациональности из числителей):

1. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}}$, где $n > k,\ a > 0$, A — некоторое выражение; в качестве множителя, сопряженного со знаменателем, можно взять $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, так как $\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}} = a$.

Умножив числитель и знаменатель этой дроби на $\sqrt[n]{a^{n-k}}$, получим

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a^k}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^k} \cdot \sqrt[n]{a^{n-k}}} = \frac{A\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a} \quad (a > 0).$$

2. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

Выражения $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ взаимно сопряженные, так как $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$, поэтому

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{a - b} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A\sqrt{a}}{2a} = \frac{A\sqrt{b}}{2b}, \text{ если } a > 0, a = b;$$

$$\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = \frac{A\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{a - b} \text{ при } a \geq 0, b \geq 0, a \neq b.$$

3. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}}$ и $\frac{A}{\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

Выражения $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$, а также $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ и $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ взаимно сопряжены, так как их произведения $(a + b)$ и $(a - b)$ рациональны. Поэтому исключить иррациональность из знаменателей указанных дробей можно следующим образом:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a+b\neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a\neq b$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)}{a+b};$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a+b\neq 0$.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{a-b},$$

где a и b — любые действительные числа, причем $a\neq b$.

4. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$ и $\dfrac{A}{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}$.

Для выражения $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)=x^n-y^n.$$

Если принять $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\sqrt[n]{b}$, то получим

$$\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)=a-b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}=\frac{A\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b},$$

где $a \neq b$ ($a \geq 0, b \geq 0$, если n — четное; a, b — любые действительные числа, если n — нечетное).

Для выражения $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ сопряженный множитель можно определить из тождества

$$(x+y)\left(x^{n-1} - x^{n-2}y + \ldots + x(-y)^{n-2} + (-y)^{n-1}\right) = x^n + (-1)^n y^n .$$

Если принять $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$, то

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)\left(\sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \ldots + (-1)^{n-2}\sqrt[n]{ab^{n-2}} + (-1)^{n-1}\sqrt[n]{b^{n-1}}\right) = a + (-1)^{n-1}b.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[2k]{a} + \sqrt[2k]{b}} = \frac{A\left(\sqrt[2k]{a^{2k-1}} - \sqrt[2k]{a^{2k-2}b} + \ldots + \sqrt[2k]{ab^{2k-2}} - \sqrt[2k]{b^{2k-1}}\right)}{a-b}$$

при $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$;

$$\frac{A}{\sqrt[2k+1]{a} + \sqrt[2k+1]{b}} = \frac{A\left(\sqrt[2k+1]{a^{2k}} - \sqrt[2k+1]{a^{2k-1}b} + \ldots - \sqrt[2k+1]{ab^{2k-1}} - \sqrt[2k+1]{b^{2k}}\right)}{a+b},$$

где a и b — любые действительные числа и $a + b \neq 0$.

5. Дроби вида $\dfrac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$.

Умножив знаменатель на $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$, получим

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right) = a + b - c + 2\sqrt{ab} .$$

Умножив последнее выражение на $a + b - c - 2\sqrt{ab}$, найдем

$$\left((a+b-c) + 2\sqrt{ab}\right)\left((a+b-c) - 2\sqrt{ab}\right) = (a+b-c)^2 - 4ab .$$

Таким образом, множителем, сопряженным со знаменателем данной дроби, является $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right) \times \left(a + b - c - 2\sqrt{ab}\right)$. Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{A\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)\left(a + b - c - 2\sqrt{ab}\right)}{(a+b-c)^2 - 4ab},$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, (a+b-c)^2 - 4ab \neq 0$.

Аналогично исключают иррациональность из знаменателей дробей

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}}.$$

Если знаменатель дроби — сумма четырех квадратных корней $\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$, причем $ab=cd$, то исключить иррациональность из знаменателя этой дроби можно так:

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\frac{A\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2}=\frac{A\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{d}\right)}{a+b-c-d},$$

где $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0, d\geq 0, a+b\neq c+d$.

6. Дроби вида $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

Найдем сопряженный со знаменателем множитель. Для этого воспользуемся тождеством

$$(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Если принять $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$, то

$$\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)=a+b+c-3\sqrt[3]{abc}.$$

Умножив полученное выражение на

$$B=(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{(abc)^2},$$

получим

$$\left(a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\right)\cdot B=(a+b+c)^3-27abc.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{A\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)\cdot B}{(a+b+c)^3-27abc}$$

при $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0, (a+b+c)^3\neq 27abc$.

Преобразование сложного квадратного корня (радикала)

Выражения вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ называются сложными квадратными корнями (радикалами). Для их преобразования пользуются формулой

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

где $A > 0, B > 0$ и $A^2 - B > 0$; знаки берутся либо только верхние, либо только нижние. В правильности этой формулы можно убедиться, возведя обе части формулы в квадрат. Эта формула упрощает сложный радикал, если $A^2 - B$ — точный квадрат.

Упростить выражения и вычислить их, если даны числовые значения параметров **(2.001—2.124)**:

2.001. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}{1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} \cdot \frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}{1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-1\right)}{1} = x-1.$$

Ответ: $x-1$.

2.002. $\left(\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^{-2}+\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^{-2}\right) : \dfrac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}$.

Решение.

ОДЗ: $p \neq q$.

$$\left(\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^{-2}+\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^{-2}\right):\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{p-q}=\left(\frac{1}{\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^2}\right)\times$$

$$\times\frac{p-q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=\frac{\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^2+\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^2}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}=$$

$$=\frac{\sqrt{p}+2\sqrt[4]{pq}+\sqrt{q}+\sqrt{p}-2\sqrt[4]{pq}+\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}=\frac{2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2}{p-q}.$$

Ответ: $\frac{2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2}{p-q}$.

2.003. $\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2\right)\quad(a>b>0)$

Решение.

Пусть $X=\frac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^3b}}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{a\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)}-\sqrt{a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}\right)^2}{2a\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right)^2}{2a\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{a\left(a+\sqrt{a^2-b^2}-2\sqrt{a^2-a^2+b^2}+a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}{2a\sqrt{ab}}=\frac{2a-2b}{2\sqrt{ab}}=\frac{a-b}{\sqrt{ab}};$$

$$Y=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-2=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}.$$

Тогда $\quad X:Y=\frac{a-b}{\sqrt{ab}}:\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{ab}}=\frac{(a-b)\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a-b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}=$

$$=\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\right)^2}=\frac{(a-b)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{(a-b)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}.$$

Ответ: $\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$.

2.004. $\left(\frac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}:\left(\frac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6};\quad b=0{,}04.$

Решение.

ОДЗ: $a\neq -b=-0{,}04$.

Пусть $\quad X=\left(\frac{(a+b)^{-n/4}\cdot c^{1/2}}{a^{2-n}b^{-3/4}}\right)^{4/3}=\frac{(a+b)^{-n/3}\cdot c^{2/3}}{a^{(8-4n)/3}b^{-1}}=\frac{b\cdot c^{2/3}}{a^{(8-4n)/3}\cdot(a+b)^{n/3}};$

$$Y=\left(\frac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{1/6}=\frac{b^{1/2}\cdot c^{2/3}}{(a+b)^{n/3}\cdot a^{(8-4n/3)}}.$$

Тогда $\quad X:Y=\frac{b\cdot c^{2/3}}{a^{(8-4n)/3}\cdot(a+b)^{n/3}}:\frac{b^{1/2}\cdot c^{2/3}}{(a+b)^{n/3}\cdot a^{(8-4n)/3}}=$

$$=\frac{b\cdot c^{2/3}\cdot(a+b)^{n/3}\cdot a^{(8-4n)/3}}{a^{(8-4n)/3}\cdot(a+b)^{n/3}\cdot b^{1/2}\cdot c^{2/3}}=b^{1/2}=(0{,}04)^{1/2}=\sqrt{0{,}04}=0{,}2.$$

Ответ: 0,2.

2.005. $\dfrac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 1, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$$\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{2x^{-1/3}}{x^{-1/3}(x-3)}-$$

$$-\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}(x-1)}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{2x-2-x+3-x-1}{(x-1)(x-3)}=\frac{0}{(x-1)(x-3)}=0.$$

Ответ: 0.

2.006. $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq b, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-4b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{3}{\sqrt{a}}\right)}/$$

$$\frac{\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2}{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}}=\frac{a+2\sqrt{ab}-3b}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right):\frac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}}:\frac{\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2\sqrt{ab}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{(a+2\sqrt{ab}-3b)(\sqrt{a}+3\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}-3b}{ab(a-\sqrt{ab}+3\sqrt{ab}-3b)}=\frac{1}{ab}.$$

Ответ: $\frac{1}{ab}$.

2.007. $\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq n, \\ m>0, \\ n>0. \end{cases}$

$$\frac{(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n})^2+(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}:\frac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3\sqrt{mn}=$$

$$=\frac{\sqrt{m}+2\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}+\sqrt{m}-2\sqrt[4]{mn}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})\left((\sqrt{m})^2+\sqrt{mn}+(\sqrt{n})^2\right)}{1}-3\sqrt{mn}=$$

$$=\frac{2(\sqrt{m}+\sqrt{n})(\sqrt{m}-\sqrt{n})\left((\sqrt{m})^2+\sqrt{mn}+(\sqrt{n})^2\right)}{2(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}-3\sqrt{mn}=$$

$$=(\sqrt{m})^2+\sqrt{mn}+(\sqrt{n})^2-3\sqrt{mn}=(\sqrt{m})^2-$$

$$-2\sqrt{mn}+(\sqrt{n})^2=(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2.$$

Ответ: $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$.

2.008. $\left(\left(\dfrac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5$.

Решение.

ОДЗ: $\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}\neq 0, \Leftrightarrow y\neq-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^5$.

$$\left(\left(\frac{2^{3/2}+27y^{3/5}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{32y^2}-2\right)\cdot 3^{-2}\right)^5=$$

$$=\left(\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(3\sqrt[5]{y}\right)^3}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt{2}\sqrt[5]{y}-2\right)\cdot\frac{1}{9}\right)^5=$$

$$=\left(\left(\frac{\left(\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}\right)\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-3\sqrt{2}\sqrt[5]{y}+\left(3\sqrt[5]{y}\right)^2\right)}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt{2}\sqrt[5]{y}-2\right)\cdot\frac{1}{9}\right)^5=$$

$$=\left(\left(2+9\sqrt[5]{y^2}-2\right)\cdot\frac{1}{9}\right)^5=\left(9\sqrt[5]{y^2}\cdot\frac{1}{9}\right)^5=\left(\sqrt[5]{y^2}\right)^5=y^2.$$

Ответ: y^2.

2.009. $\dfrac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}$.

Решение.

ОДЗ: $0<t\neq 1$.

$$\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-2+t\right)}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-2+t\right)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t}\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-2t+t^2}{t}}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-2t+t^2}{t}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{\sqrt{t}}}=\frac{2\sqrt{\frac{4t+1-2t+t^2}{4t}}}{\sqrt{\frac{4t+1-2t+t^2}{4t}}-\frac{1-t}{2\sqrt{t}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1+2t+t^2}{t}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2t+t^2}{t}}-\frac{1-t}{2\sqrt{t}}}=\frac{\frac{1+t}{\sqrt{t}}}{\frac{1+t}{2\sqrt{t}}-\frac{1-t}{2\sqrt{t}}}=\frac{\frac{1+t}{\sqrt{t}}}{\frac{1+t-1+t}{2\sqrt{t}}}=\frac{\frac{1+t}{\sqrt{t}}}{\frac{2t}{2\sqrt{t}}}=\frac{1+t}{t}.$$

Ответ: $\frac{1+t}{t}$.

2.010. $t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} t+4>0, \\ 2-\sqrt{t+4}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>-4, \\ t\neq 0. \end{cases}$

$$t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}=t\cdot\frac{\frac{\sqrt{t+4}+2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\frac{\left(\sqrt{t+4}\right)^2+4}{\sqrt{t+4}}=$$

$$=t\cdot\frac{\sqrt{t+4}+2}{\sqrt{t+4}\left(2-\sqrt{t+4}\right)}+\frac{\left(\sqrt{t+4}\right)^2+4}{\sqrt{t+4}}=$$

$$=\frac{t\left(\sqrt{t+4}+2\right)\left(2+\sqrt{t+4}\right)}{\sqrt{t+4}\left(2-\sqrt{t+4}\right)\left(2+\sqrt{t+4}\right)}+\frac{\left(\sqrt{t+4}\right)^2+4}{\sqrt{t+4}}=$$

$$=\frac{t\left(\sqrt{t+4}+2\right)^2}{\sqrt{t+4}(4-t-4)}+\frac{\left(\sqrt{t+4}\right)^2+4}{\sqrt{t+4}}=$$

$$=\frac{-\left(t+4+4\sqrt{t+4}+4\right)}{\sqrt{t+4}}+\frac{t+4+4}{\sqrt{t+4}}=$$

$$=\frac{-t-4\sqrt{t+4}-8+t+8}{\sqrt{t+4}}=-\frac{4\sqrt{t+4}}{\sqrt{t+4}}=-4.$$

Ответ: -4.

2.011. $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

Решение.

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases}1+x\geq 0,\\ x\geq 0,\\ 1-\sqrt{x}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{\sqrt{1+x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right)^2=\left(\frac{1+2\sqrt{x}+x-1-x}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{1-2\sqrt{x}+x-1-x}{\sqrt{1+x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^2-$$

$$-\left(\frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}\left(1-\sqrt{x}\right)}\right)^2=\frac{4x}{\left(\sqrt{1+x}\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^2}-$$

$$-\frac{4x}{(\sqrt{1+x}(1-\sqrt{x}))^2}=\frac{4x((1-\sqrt{x})^2-(1+\sqrt{x})^2)}{(\sqrt{1+x}(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}))^2}=$$

$$=\frac{4x(1-2\sqrt{x}+x-1-2\sqrt{x}-x)}{(1+x)(1-x)^2}=\frac{-16x\sqrt{x}}{(1+x)(1-x)(1-x)}=\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}.$$

Ответ: $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$.

2.012. $\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}=\frac{(x^{1/2}-1)(x^{1/2}+1)}{x+x^{1/2}+1}\cdot\frac{(x^{1/2})^3-1}{x^{1/2}+1}+\frac{2}{\frac{1}{x^{1/2}}}=$$

$$=\frac{(x^{1/2}-1)(x^{1/2}-1)(x+x^{1/2}+1)}{x+x^{1/2}+1}+2x^{1/2}=(x^{1/2}-1)^2+2x^{1/2}=x-2x^{1/2}+$$

$+1+2x^{1/2}=x+1$.

Ответ: $x+1$.

2.013. $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right):\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\geq 0, \\ \sqrt{a}-\sqrt{a-1}\neq 0, \\ \frac{a+1}{a-1}\geq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\geq 0, \\ a>1 \end{cases}\Leftrightarrow a>1.$

Пусть X — выражение в первых скобках, Y — во вторых:

$$X=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})}=$$

$$=\frac{2\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{a+\sqrt{a(a+1)}-\sqrt{a(a-1)}-\sqrt{(a-1)(a+1)}};$$

$$Y=1+\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}=\frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}}.$$

Тогда $X:Y=\dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}{a+\sqrt{a(a+1)}-\sqrt{a(a-1)}-\sqrt{(a-1)(a+1)}}:\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}{\sqrt{a-1}}=$

$$=\frac{\sqrt{a-1}(2\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})}{a\sqrt{a+1}+a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a\sqrt{a-1}-\sqrt{a-1}+a\sqrt{a-1}-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-a\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a-1}(2\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1})}{2\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}.$$

Ответ: $\sqrt{a-1}$.

2.014. $\dfrac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\dfrac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ x\ne y. \end{cases}$

$$\frac{x-y}{x^{3/4}+x^{1/2}y^{1/4}}\cdot\frac{x^{1/2}y^{1/4}+x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/4}y^{-1/4}}{x^{1/2}-2x^{1/4}y^{1/4}+y^{1/2}}=$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2}\sqrt[4]{y}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x^2}\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{y^2}}=$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^2}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}=$$

$$=\frac{x-y}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}=\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$.

2.015. $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq\pm n, \\ y\neq 0, \\ y>0 \text{ при } m=2k. \end{cases}$

$$\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}=y^{\frac{2n}{n(m-n)}}:y^{\frac{m^2-2mn+n^2+4mn}{m(m+n)(m-n)}}=$$

$$=y^{\frac{2}{m-n}}:y^{\frac{m^2+2mn+n^2}{m(m+n)(m-n)}}=y^{\frac{2}{m-n}}:y^{\frac{(m+n)^2}{m(m+n)(m-n)}}=y^{\frac{2}{m-n}}:y^{\frac{m+n}{m(m-n)}}=$$

$$=y^{\frac{2}{m-n}-\frac{m+n}{m(m-n)}}=y^{\frac{2m-m-n}{m(m-n)}}=y^{\frac{m-n}{m(m-n)}}=y^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{y}.$$

Ответ: $\sqrt[m]{y}$.

2.016. $\left(\frac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $z\neq 0,\ p\neq 0,\ q\neq 0$.

$$\left(\frac{(z^{2/p}+z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p}-z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}=\left(\frac{(z^{2/p})^2+2z^{2/p+2/q}+(z^{2/q})^2-4z^{2/p+2/q}}{(z^{1/p})^2-2z^{1/p+1/q}+(z^{1/q})^2+4z^{1/p+1/q}}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{(z^{2/p})^2-2z^{2/p+2/q}+(z^{2/q})^2}{(z^{1/p})^2+2z^{1/p+1/q}+(z^{1/q})^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{(z^{2/p}-z^{2/q})^2}{(z^{1/p}+z^{1/q})^2}\right)^{1/2}=\left|\frac{z^{2/p}-z^{2/q}}{z^{1/p}+z^{1/q}}\right|=$$

$$=\left|\frac{(z^{1/p}-z^{1/q})(z^{1/p}+z^{1/q})}{z^{1/p}+z^{1/q}}\right|=\left|z^{1/p}-z^{1/q}\right|.$$

Ответ: $\left|z^{1/p}-z^{1/q}\right|$.

2.017. $\dfrac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\dfrac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

$$\frac{x-1}{x^{3/4}+x^{1/2}}\cdot\frac{x^{1/2}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1=\frac{(x^{1/2}-1)(x^{1/2}+1)}{x^{3/4}+x^{2/4}}\cdot\frac{x^{2/4}+x^{1/4}}{x^{1/2}+1}\cdot x^{1/4}+1=$$

$$=\frac{x^{1/2}-1}{x^{2/4}(x^{1/4}+1)}\cdot\frac{x^{1/4}(x^{1/4}+1)}{1}\cdot x^{1/4}+1=x^{1/2}-1+1=x^{1/2}=\sqrt{x}.$$

Ответ: $\sqrt{x}$.

2.018. $\left(\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\dfrac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot(5-2x^2);\ x=\sqrt{3{,}92}.$

Решение.

$$\left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2}+2-\frac{1-x+x^2}{2x-x^2}\right)^{-1}\cdot(5-2x^2)=$$

$$=\left(\frac{1+x+x^2}{x(2+x)}+2-\frac{1-x+x^2}{x(2-x)}\right)^{-1}\cdot(5-2x^2)=$$

$$=\left(\frac{(2-x)(1+x+x^2)+2x(2+x)(2-x)-(2+x)(1-x+x^2)}{x(2+x)(2-x)}\right)^{-1}\cdot(5-2x^2)=$$

$$=\left(\frac{2+2x+2x^2-x-x^2-x^3+8x-2x^3-2+2x-2x^2-x+x^2-x^3}{x(4-x^2)}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(5-2x^2\right)=\left(\frac{10x-4x^3}{x\left(4-x^2\right)}\right)^{-1}\cdot\left(5-2x^2\right)=\left(\frac{2x\left(5-2x^2\right)}{x\left(4-x^2\right)}\right)^{-1}\cdot\left(5-2x^2\right)=$$

$$=\frac{\left(4-x^2\right)\left(5-2x^2\right)}{2\left(5-2x^2\right)}=\frac{4-x^2}{2}.$$

Отсюда при $x=\sqrt{3{,}92}$ имеем

$$\frac{4-\left(\sqrt{3{,}92}\right)^2}{2}=\frac{4-3{,}92}{2}=\frac{0{,}08}{2}=0{,}04.$$

Ответ: 0,04.

2.019. $\dfrac{\left(x^2-y^2\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$ $x=64$.

Решение.

ОДЗ: $z=\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}\neq 0$.

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x-y)(x+y)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{y^3}\right)-\sqrt[3]{y^2}\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{y^3}\right)}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x-y)(x+y)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^2}(x+y)-\sqrt[3]{y^2}(x+y)}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x-y)(x+y)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{(x+y)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}\right)}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{(x-y)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=$$

$$=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{y}\right)^3}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{y^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{y^2}=$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{64^2}=$$

$$=\sqrt[3]{4^{3\cdot 2}}=4^2=16.$$

Ответ: 16.

2.020. $\sqrt{\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4+8/a+4/a^2}{\sqrt{2}}}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}\ge 0,\\ a\ne 0,\\ a\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow a>0.$$

$$\sqrt{\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4+8/a+4/a^2}{\sqrt{2}}}=\sqrt[6]{\left(\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}\right)^3}\times$$

$$\times\sqrt[6]{\left(\frac{4+8/a+4/a^2}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(1+a)^3(1+a)}}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{4a^2+8a+4}{a^2\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(1+a)^4}}\cdot\sqrt[6]{\frac{16(a+1)^4}{2a^4}}=\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(1+a)^4}\cdot\frac{8(1+a)^4}{a^4}}=\sqrt[6]{\frac{64}{a}}=\frac{2\sqrt[6]{a^5}}{a}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt[6]{a^5}}{a}$.

2.021. $\dfrac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1\neq 0,\\ x^2-1\geq 0.\end{cases}$

$$\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-1}=\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1\right)^2-1}=$$

$$=\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1\right)^2-1}=$$

$$=\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1-1\right)\left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-1+1\right)}=$$

$$=\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}-2\right)\left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{2\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}-1\right)2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\left(x^2-1\right)+x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2.022. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 2$.

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x^2+4x+4-8x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^2-4x-4}}{x-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}\sqrt{\left(x^2-2\right)^2}}{x-2}=\frac{\sqrt{x}\cdot|x-2|}{x-2};$$

Отсюда:

1) для $x<2, -\sqrt{x}$;

2) для $x\in(2;+\infty), \sqrt{x}$.

Ответ: $-\sqrt{x}$ для $x\in(0;2)$; $\sqrt{x}$ для $x\in(2;\infty)$.

2.023. $\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

$$\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}=\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{\sqrt{6x}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[4]{\left(\sqrt{6x}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right)^2}=\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[4]{6x\left(5-2\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot 6x\left(5-2\sqrt{6}\right)}=\sqrt[4]{36x^2(25-24)}=\sqrt[4]{36x^2}=\sqrt{6x}.$$

Ответ: $\sqrt{6x}$.

2.024. $\sqrt[6]{4x\left(11+4\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

$$\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}=\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{x}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})}=$$
$$=\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[6]{(2\sqrt{x}(2\sqrt{2}-\sqrt{3}))^2}=\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[6]{4x(11-4\sqrt{6})}=$$
$$=\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})\cdot 4x(11-4\sqrt{6})}=\sqrt[6]{16x^2(121-96)}=\sqrt[6]{400x^2}=\sqrt[3]{20x}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{20x}$.

2.025. $\dfrac{a^3-a-2b-b^2/a}{\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{b}{a^2}}\right)\cdot(a+\sqrt{a+b})}:\left(\dfrac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a-b}\right);$

$a=23; b=22.$

Решение.

$$\frac{a^3-a-2b-b^2/a}{\left(1-\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{b}{a^2}}\right)\cdot(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^3+a^2+ab+a^2b}{a^2-b^2}+\frac{b}{a-b}\right)=$$
$$=\frac{\frac{a^4-a^2-2ab-b^2}{a}}{\left(1-\sqrt{\frac{a+b}{a^2}}\right)\cdot(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a^2(a+1)+ab(a+1)}{(a-b)(a+b)}+\frac{b}{a-b}\right)=$$
$$=\frac{a^4-(a^2+2ab+b^2)}{(a-\sqrt{a+b})(a+\sqrt{a+b})}:\left(\frac{a(a+1)(a+b)}{(a-b)(a+b)}+\frac{b}{a-b}\right)=$$
$$=\frac{a^4-(a+b)^2}{a^2-a-b}:\left(\frac{a(a+1)}{a-b}+\frac{b}{a-b}\right)=$$
$$=\frac{(a^2-a-b)(a^2+a+b)}{a^2-a-b}:\frac{a^2+a+b}{a-b}=$$
$$=\frac{(a^2+a+b)(a-b)}{a^2+a+b}=a-b=23-22=1$$

Ответ: 1.

2.026. $\dfrac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2 b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(\sqrt[5]{a^{4/3}}\right)^{3/2}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3} \cdot \frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2 b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6} = \frac{\left(a^{4/15}\right)^{3/2}}{\left(a^{4/5}\right)^3} \cdot \frac{\left(\sqrt{a \cdot a^{2/3} \cdot b^{1/3}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a \cdot b^{1/2}}\right)^6} = \frac{a^{(4/15)\cdot(3/2)}}{a^{(4/5)\cdot 3}} \times$$

$$\times \frac{\left(\sqrt{a^{1+2/3} \cdot b^{1/3}}\right)^4}{\left(a^{1/4} \cdot b^{1/8}\right)^6} = \frac{a^{2/5}}{a^{12/5}} \cdot \frac{\left(a^{5/6} \cdot b^{1/6}\right)^4}{a^{6/4} \cdot b^{6/8}} = a^{2/5-12/5} \cdot \frac{a^{(5/6)\cdot 4} \cdot b^{(1/6)\cdot 4}}{a^{3/2} \cdot b^{3/4}} =$$

$$= a^{-10/5} \cdot \frac{a^{10/3} \cdot b^{2/3}}{a^{3/2} \cdot b^{3/4}} = a^{-2} \cdot a^{10/3-3/2} \cdot b^{2/3-3/4} = a^{-2} \cdot a^{(20-9)/6} \cdot b^{(8-9)/12} =$$

$$= a^{-2} \cdot a^{11/6} \cdot b^{-1/12} = a^{-2+11/6} \cdot \frac{1}{b^{1/12}} = \frac{a^{(-12+11)/6}}{b^{1/12}} = \frac{a^{-1/6}}{b^{1/12}} =$$

$$= \frac{1}{a^{1/6} \cdot b^{1/12}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^2 b}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^2 b}}$.

2.027. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}} \cdot \sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 1-x\sqrt{2-x^2} \ge 0, \\ 1-x^2 \ne 0. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\sqrt[6]{\left(x+\sqrt{2-x^2}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x^2+2x\sqrt{2-x^2}+2-x^2}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{2\left(1+x\sqrt{2-x^2}\right)}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\sqrt[6]{2\left(1+x\sqrt{2-x^2}\right)\left(1-x\sqrt{2-x^2}\right)}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{2\left(1-x^2\left(2-x^2\right)\right)}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\sqrt[6]{2\left(1-2x^2+x^4\right)}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\sqrt[6]{2\left(1-x^2\right)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[6]{\left(1-x^2\right)^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\sqrt[6]{2}\cdot\left|\sqrt[3]{1-x^2}\right|}{\sqrt[3]{1-x^2}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[6]{2}\cdot\left(-\sqrt[3]{1-x^2}\right)}{\sqrt[3]{1-x^2}}=-\sqrt[6]{2}\ \text{при}\ \sqrt[3]{1-x^2}<0;\\[2ex] \dfrac{\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\sqrt[6]{2}\ \text{при}\ \sqrt[3]{1-x^2}>0.\end{cases}$$

Ответ: $-\sqrt[6]{2}$ при $\sqrt[3]{1-x^2}<0$; $\sqrt[6]{2}$ при $\sqrt[3]{1-x^2}>0$.

2.028. $\dfrac{x\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\dfrac{a^2\sqrt{x+a}}{x-\left(x^2-a^2\right)^{1/2}}+\dfrac{1}{x^2-ax}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x^2-a^2>0,\\ x-a>0,\\ x\neq0,\\ x-\sqrt{x^2-a^2}\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>a,\\ x\neq0,\\ a\neq0.\end{cases}$

$$\frac{x\left(x^2-a^2\right)^{-1/2}+1}{a(x-a)^{-1/2}+(x-a)^{1/2}}:\frac{a^2\sqrt{x+a}}{x-\left(x^2-a^2\right)^{1/2}}+\frac{1}{x^2-ax}=$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+1}{\dfrac{a}{\sqrt{x-a}}+\sqrt{x-a}}:\frac{a^2\sqrt{x+a}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{1}{x(x-a)}=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{(x+a)(x-a)}}}{\dfrac{a+\left(\sqrt{x-a}\right)^2}{\sqrt{x-a}}}\times$$

$$\times\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2\sqrt{x+a}}+\frac{1}{x(x-a)}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x+a)(x-a)}\cdot(a+x-a)}\times$$

$$\times\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a^2\sqrt{x+a}}+\frac{1}{x(x-a)}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)}{a^2x(x+a)}+$$

$$+\frac{1}{x(x-a)}=\frac{x^2-x^2+a^2}{a^2x(x+a)}+\frac{1}{x(x-a)}=$$

$$=\frac{1}{x(x+a)}+\frac{1}{x(x-a)}=\frac{x-a+x+a}{x(x+a)(x-a)}=\frac{2x}{x\left(x^2-a^2\right)}=\frac{2}{x^2-a^2}.$$

Ответ: $\frac{2}{x^2-a^2}$.

2.029. $\frac{\left(\sqrt[3]{\left(r^2+4\right)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{\left(r^2-4\right)\cdot\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} r\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} r\geq 2, \\ r\leq -2. \end{array}\right. \end{cases}$

$$\frac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}-\sqrt[3]{(r^2-4)\cdot\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}=\frac{\left(\sqrt[3]{(r^2+4)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}-$$

$$-\frac{2\sqrt[3]{(r^2+4)\cdot\sqrt{1+\frac{4}{r^2}}\cdot(r^2-4)\cdot\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}}{r^2-\sqrt{r^4-16}}+\frac{\left(\sqrt[3]{(r^2-4)\cdot\sqrt{1-\frac{4}{r^2}}}\right)^2}{r^2-\sqrt{r^4-16}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(r^2+4)^2\cdot\frac{r^2+4}{r^2}}-2\sqrt[3]{(r^4-16)\cdot\sqrt{\frac{(r^2+4)(r^2-4)}{r^4}}}+\sqrt[3]{(r^2-4)^2\cdot\frac{r^2-4}{r^2}}}{r^2-\sqrt{r^4-16}}=$$

$$=\frac{\frac{r^2+4}{\sqrt[3]{r^2}}-\frac{2\sqrt[3]{(r^4-16)\sqrt{r^4-16}}}{\sqrt[3]{r^2}}+\frac{r^2-4}{\sqrt[3]{r^2}}}{r^2-\sqrt{r^4-16}}=\frac{2\left(r^2-\sqrt[3]{(r^4-16)^{3/2}}\right)}{\sqrt[3]{r^2}\left(r^2-\sqrt{r^4-16}\right)}=$$

$$=\frac{2\left(r^2-\sqrt{r^4-16}\right)}{\sqrt[3]{r^2}\left(r^2-\sqrt{r^4-16}\right)}=\frac{2}{\sqrt[3]{r^2}}=\frac{2\sqrt[3]{r}}{r}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt[3]{r}}{r}$.

2.030. $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, \\ a\neq\sqrt{2}. \end{cases}$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}=\sqrt{\frac{a^2+2a\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{a\sqrt{2}}}-$$

$$-\frac{a^2\cdot 2^{1/4}-2\cdot a^{1/2}}{a^{3/2}\cdot 2^{1/2}-2^{3/4}\cdot a}=\frac{\sqrt{\left(a+\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{a\sqrt{2}}}-\frac{2^{1/4}\cdot a^{1/2}\cdot\left(a^{3/2}-2^{3/4}\right)}{2^{1/2}\cdot a\cdot\left(a^{1/2}-2^{1/4}\right)}=$$

$$=\frac{a+\sqrt{2}}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}}-\frac{2^{1/4}\cdot a^{1/2}\cdot\left(\left(a^{1/2}\right)^3-\left(2^{1/4}\right)^3\right)}{2^{1/2}\cdot a\cdot\left(a^{1/2}-2^{1/4}\right)}=\frac{a+2^{1/2}}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}}-$$

$$-\frac{\left(a^{1/2}-2^{1/4}\right)\left(a+2^{1/4}\cdot a^{1/2}+2^{1/2}\right)}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdot\left(a^{1/2}-2^{1/4}\right)}=\frac{a+2^{1/2}}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}}-\frac{a+2^{1/4}\cdot a^{1/2}+2^{1/2}}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}}=$$

$$=\frac{a+2^{1/2}-a-2^{1/4}\cdot a^{1/2}-2^{1/2}}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}}=\frac{-2^{1/4}\cdot a^{1/2}}{a^{1/2}\cdot 2^{1/4}}=-1.$$

Ответ: -1.

2.031. $\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a>0,\\ a\neq 1.\end{cases}$

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}-1\right)\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}+1\right)}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt[4]{a}+1\right)\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}+1\right)}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{a-\sqrt{a^3}}=\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}+1+\sqrt[4]{a}\right)^{1/2}\cdot\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}+1-\sqrt[4]{a^2}\right)\cdot\frac{1}{a-\sqrt{a^3}}=$$

$$=\left(\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}+1\right)^{1/2}\cdot\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\cdot\frac{1}{a-\sqrt{a^3}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}+1\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)}{a\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)}=\frac{1}{a}.$$

Ответ: $\frac{1}{a}$.

2.032. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{abc+4}{a}+4\sqrt{\dfrac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2}$; $\quad a=0{,}04.$

Решение.

ОДЗ: $bc\geq 0$.

$$\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc}+2}=\frac{\sqrt{\frac{abc+4}{a}+\frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{abc}+2}=\frac{\sqrt{\frac{abc+4\sqrt{abc}+4}{a}}}{\sqrt{abc}+2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{\left(\sqrt{abc}+2\right)^2}{a}}}{\sqrt{abc}+2}=\frac{\sqrt{abc}+2}{\sqrt{a}\left(\sqrt{abc}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}04}}=\frac{1}{0{,}2}=5.$$

Ответ: 5.

2.033. $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$.

Решение.

ОДЗ: $p\geq\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1}\right)\left(\left(\sqrt{2p+1}\right)^2-\sqrt{2p+1}\cdot\sqrt{2p-1}+\left(\sqrt{2p-1}\right)^2\right)}{\sqrt{2p+1+2\sqrt{4p^2-1}+2p-1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1}\right)\left(2p+1-\sqrt{4p^2-1}+2p-1\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2p+1}\right)^2+2\sqrt{4p^2-1}+\left(\sqrt{2p-1}\right)^2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})(4p-\sqrt{4p^2-1})}{\sqrt{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})^2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1})(4p-\sqrt{4p^2-1})}{\sqrt{2p+1}+\sqrt{2p-1}}=4p-\sqrt{4p^2-1}.$$

Ответ: $4p-\sqrt{4p^2-1}$.

2.034. $1-\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\dfrac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$.

Решение.

ОДЗ: $a>1$.

$$1-\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}=1-\frac{\dfrac{1-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a-1}}}{\dfrac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{(a+1)(a-1)}}}:$$

$$:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{(a-1)(a+1)}}{\sqrt{(a-1)(a+1)}(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1})}=1-\frac{(1-\sqrt{a^2-1})\sqrt{(a+1)(a-1)}}{\sqrt{a-1}(\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1})}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}=1-1+\sqrt{a^2-1}=\sqrt{a^2-1}.$$

Ответ: $\sqrt{a^2-1}$.

2.035. $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a>0,\\ a\neq 2.\end{cases}$

$$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=$$

$$=\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})}+\frac{2}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=$$

$$=\frac{(a+2)(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})-a\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{2})+2\sqrt{2}(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{\sqrt{2a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}=$$

$$=\frac{a^2-4-a^2+a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+4}{\sqrt{2a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})}\cdot\frac{1}{a+2}=\frac{\sqrt{2a}(a+2)}{\sqrt{2a}(\sqrt{a}+\sqrt{2})(a+2)}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$.

2.036. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} mn\geq 0, \\ np\geq 0, \\ m\neq 0, \\ p\neq 0, \\ mp\geq 0. \end{cases}$

$$\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+m\sqrt{\frac{3n}{m}}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-p\sqrt{\frac{3n}{p}}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+(\sqrt{3mn}+\sqrt{3np})\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-(\sqrt{3mn}+\sqrt{3np})\right)=$$

$$=\left(\sqrt[4]{36mn^2p}\right)^2-(\sqrt{3mn}+\sqrt{3np})^2=$$

$$=\sqrt{36mn^2p}-3mn-2\sqrt{9mn^2p}-3np=-3n(m+p).$$

Ответ: $-3n(m+p)$.

2.037. $\dfrac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\dfrac{2}{x^{3/2}}+\dfrac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}+\frac{\frac{1}{x^2}-x}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}-x}{\frac{(\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}}}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{x-1}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}=$$

$$=-\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x^3}}=\frac{-\sqrt{x}\sqrt{x^3}-2}{\sqrt{x^3}}=\frac{-\sqrt{x^4}-2}{\sqrt{x^3}}=\frac{-x^2-2}{\sqrt{x^3}}=$$

$$=-\frac{x^2+2}{x\sqrt{x}}=-\frac{(x^2+2)\sqrt{x}}{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=-\frac{(x^2+2)\sqrt{x}}{x^2}=-\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$$

Ответ: $-\sqrt{x}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$

2.038. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$

Решение.

ОДЗ: $0<a\neq 1$.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)=\left(\frac{(\sqrt{a})^2-1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\frac{(\sqrt{a}-1)^2-(\sqrt{a}+1)^2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=$$

$$=\frac{(a-1)^2}{4a}\cdot\frac{a-2\sqrt{a}+1-a-2\sqrt{a}-1}{a-1}=\frac{(a-1)^2(-4\sqrt{a})}{4a(a-1)}=-\frac{a-1}{\sqrt{a}}=\frac{1-a}{\sqrt{a}}.$$

Ответ: $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$.

2.039. $$\frac{9b^{4/3}-\frac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}};\quad b=4.$$

Решение.

$$\frac{9b^{4/3}-\frac{a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{a^{3/2}b^{-2}+6a^{3/4}b^{-1/3}+9b^{4/3}}}\cdot\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}=\frac{\frac{9b^{4/3}\cdot b^2-a^{3/2}}{b^2}}{\sqrt{\frac{a^{3/2}}{b^2}+\frac{6a^{3/4}}{b^{+1/3}}+9b^{4/3}}}\times$$

$$\times\frac{b^2}{a^{3/4}-3b^{5/3}}=\frac{9b^{10/3}-a^{3/2}}{\sqrt{\frac{a^{3/2}+6a^{3/4}b^{5/3}+9b^{10/3}}{b^2}}\cdot\left(a^{3/4}-3b^{5/3}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(\left(a^{3/4}\right)^2-\left(3b^{5/3}\right)^2\right)}{\sqrt{\frac{\left(a^{3/4}\right)^2+6a^{3/4}b^{5/3}+\left(3b^{5/3}\right)^2}{b^2}}\cdot\left(a^{3/4}-3b^{5/3}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(a^{3/4}-3b^{5/3}\right)\left(a^{3/4}+3b^{5/3}\right)}{\frac{\sqrt{\left(a^{3/4}+3b^{5/3}\right)^2}}{b}\cdot\left(a^{3/4}-3b^{5/3}\right)}=\frac{-\left(a^{3/4}+3b^{5/3}\right)b}{a^{3/4}+3b^{5/3}}=-b=-4.$$

Ответ: –4.

2.040. $$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc};$$

$a=0{,}02;\ b=-11{,}05;\ c=1{,}07.$

Решение.

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc}=\frac{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\times$$

$$\times\frac{abc}{a-b-c}=\frac{(b+c-a)a(b+c)}{a(b+c)(b+c+a)}\cdot\frac{\left(b^2+2bc+c^2\right)-a^2}{2bc}\cdot\frac{abc}{a-b-c}=$$

$$=\frac{b+c-a}{b+c+a}\cdot\frac{(b+c)^2-a^2}{2}\cdot\frac{ab}{a-b-c}=\frac{-(a-b-c)(b+c+a)(b+c-a)a}{2(b+c+a)(a-b-c)}=$$

$$=\frac{-(b+c-a)a}{2}=\frac{(a-b-c)a}{2}=\frac{(0{,}02+11{,}05-1{,}07)\cdot 0{,}02}{2}=0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

2.041. $\frac{1}{2\left(1+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\sqrt{a}\right)}-\frac{a^2+2}{1-a^3}.$

Решение.

ОДЗ: $0\le a\ne 1$.

$$\frac{1}{2\left(1+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{2\left(1-\sqrt{a}\right)}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{1-\sqrt{a}+1+\sqrt{a}}{2\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)}-\frac{a^2+2}{1-a^3}=\frac{2}{2(1-a)}-$$

$$-\frac{a^2+2}{(1-a)\left(1+a+a^2\right)}=\frac{1}{1-a}-\frac{a^2+2}{(1-a)\left(1+a+a^2\right)}=\frac{1+a+a^2-a^2-2}{(1-a)\left(1+a+a^2\right)}=$$

$$=\frac{-(1-a)}{(1-a)\left(1+a+a^2\right)}=\frac{-1}{a^2+a+1}.$$

Ответ: $\frac{-1}{a^2+a+1}$.

2.042. $\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2};$

$a=0{,}32;\ x=0{,}08.$

Решение.

$$\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-\left(\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}(x-a)}{2x-a}-$$

$$-\left(\frac{x}{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)^2}+\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}(x-a)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)}-$$

$$-\left(\frac{x+2\sqrt{a}\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)^2}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}(x-a)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)}-$$

$$-\left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{2ax}+\left(\sqrt{2a}\right)^2}{\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)^2}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}(x-a)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)}-$$

$$-\frac{\left(\left(\sqrt{x}+\sqrt{2a}\right)^2\right)^{1/2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{2}(x-a)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2a}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}(x-a)-\left(\sqrt{x}+\sqrt{2a}\right)\left(\sqrt{2x}-\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{2x}+\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\frac{x\sqrt{2}-a\sqrt{2}-x\sqrt{2}+\sqrt{ax}-2\sqrt{ax}+a\sqrt{2}}{2x-a}=$$

$$=\frac{-\sqrt{ax}}{2x-a}=\frac{-\sqrt{0{,}32\cdot 0{,}08}}{2\cdot 0{,}08-0{,}32}=\frac{-0{,}16}{-0{,}16}=1.$$

Ответ: 1.

2.043. $\dfrac{\left(m^2-\dfrac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\dfrac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\dfrac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\dfrac{1}{n}\right)^{m-n}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m\neq 0, \\ n\neq 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(m^2-\frac{1}{n^2}\right)^m\cdot\left(n+\frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2-\frac{1}{m^2}\right)^n\cdot\left(m-\frac{1}{n}\right)^{m-n}}=\frac{\left(\frac{m^2n^2-1}{n^2}\right)^m\cdot\left(\frac{mn+1}{m}\right)^{n-m}}{\left(\frac{m^2n^2-1}{m^2}\right)^n\cdot\left(\frac{mn-1}{n}\right)^{m-n}}=$$

$$=\frac{\dfrac{(mn-1)^m(mn+1)^m}{n^{2m}}\cdot\dfrac{(mn+1)^{n-m}}{m^{n-m}}}{\dfrac{(mn-1)^n(mn+1)^n}{m^{2n}}\cdot\dfrac{(mn-1)^{m-n}}{n^{m-n}}}=$$

$$=\frac{(mn-1)^m\cdot(mn+1)^n\cdot m^{2n}\cdot n^{m-n}}{(mn-1)^m\cdot(mn+1)^n\cdot m^{n-m}\cdot n^{2m}}=\frac{m^{2n}\cdot\dfrac{n^m}{n^n}}{\dfrac{m^n}{m^m}\cdot n^{2m}}=$$

$$=\frac{m^{2n}\cdot n^m\cdot m^m}{m^n\cdot n^{2m}\cdot n^n}=\frac{m^n\cdot m^m}{n^m\cdot n^n}=\frac{m^{m+n}}{n^{m+n}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}.$$

Ответ: $\left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}$.

2.044. $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1};\quad x>a>0.$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{\left(\sqrt{x-a}\right)^2}{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right)}\right):\sqrt{\frac{x^2-a^2}{a^2}}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right)+\sqrt{x-a}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}\right)\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}\right)}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2-a^2}-x+a+\sqrt{x^2-a^2}+x-a}{x+a-x+a}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{2\sqrt{x^2-a^2}\cdot a}{2a\sqrt{x^2-a^2}}=1.$$

Ответ: 1.

2.045. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq1$.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}=\left(\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt[4]{x^2}-1\right)}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\times$$

$$\times\left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\right)^{-1/2}=\left(\frac{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(-\sqrt[4]{x}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\left(\frac{-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}.$$

Ответ: $\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$.

2.046. $\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\neq0,\\-1\leq x<1.\end{cases}$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\times$$

$$\times\left(\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\frac{1-x+2\sqrt{1-x^2}+1+x}{1+x-1+x}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\cdot\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{2x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}{x^2}=\frac{1-x^2-1}{x^2}=\frac{-x^2}{x^2}=-1.$$

Ответ: -1.

2.047. $$\frac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right).$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}a\neq\pm\dfrac{b}{2},\\ 2a^2+ab-b^2\neq 0,\\ a\neq 0,\\ b\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq\pm\dfrac{b}{2},\\ a\neq -b,\\ a\neq 0,\\ b\neq 0.\end{cases}$$

$$\frac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)=\frac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{(a+b)(2a-b)}}{\dfrac{\left(2b^2+a\right)^2}{2b^2+a}}\times$$

$$\times\left(b^2+b+ab+a\right)=\frac{\dfrac{(a-b)(a+b)-a^2-b^2-a}{(a+b)(2a-b)}}{2b^2+a}\cdot\left(b^2+b+ab+a\right)=$$

$$=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2-a}{(a+b)(2a-b)(2b^2+a)}\cdot(b(b+1)+a(b+1))=$$

$$=\frac{-(2b^2+a)}{(a+b)(2a-b)(2b^2+a)}\cdot(b+1)(a+b)=\frac{-(b+1)}{2a-b}=\frac{b+1}{b-2a}.$$

Ответ: $\frac{b+1}{b-2a}$.

2.048. $\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$; $p=0{,}78; q=7/25$.

Решение.

$$\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}=\frac{4p^2-4pq+q^2+2q^2-3pq}{\frac{2}{p}+q^2}\times$$

$$\times\frac{2+pq^2}{p(4p-3q)}=\frac{(4p^2-7pq+3q^2)p}{2+pq^2}\cdot\frac{2+pq^2}{p(4p-3q)}=\frac{(p-q)(4p-3q)}{4p-3q}=$$

$$=p-q=0{,}78-\frac{7}{25}=0{,}78-0{,}28=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

2.049. $\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)$

Решение.

ОДЗ: $p+q>0\Leftrightarrow p>-q$.

$$\left(\frac{pq^3}{(p+q)^{5/2}}-\frac{2pq^2}{(p+q)^{3/2}}+\frac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\left(\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}-\frac{p^2q}{(p+q)^{7/2}}\right)=$$

$$=\frac{pq}{(p+q)^{1/2}}\cdot\left(\frac{q^2}{(p+q)^2}-\frac{2q}{p+q}+1\right):\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}\cdot\left(1-\frac{q}{p+q}\right)=$$

$$=\frac{pq}{(p+q)^{1/2}}\cdot\left(\frac{q^2-2q(p+q)+(p+q)^2}{(p+q)^2}\right):\frac{p^2}{(p+q)^{5/2}}\cdot\left(\frac{p+q-q}{p+q}\right)=$$

$$=\frac{pq\left(q^2-2pq-2q^2+p^2+2pq+q^2\right)}{(p+q)^{1/2}\cdot(p+q)^2}\cdot\frac{(p+q)^{5/2}\cdot(p+q)}{p^2\cdot p}=$$

$$=\frac{p^3\cdot q}{(p+q)^{5/2}}\cdot\frac{(p+q)^{5/2}(p+q)}{p^3}=q(p+q).$$

Ответ: $q(p+q)$.

2.050. $\dfrac{2\left(x^4+4x^2-12\right)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}$.

Решение.

$$\frac{2\left(x^4+4x^2-12\right)+x^4+11x^2+30}{x^2+6}=\frac{2\left(x^2+6\right)\left(x^2-2\right)+\left(x^2+6\right)\left(x^2+5\right)}{x^2+6}=$$

$$=\frac{\left(x^2+6\right)\left(2\left(x^2-2\right)+x^2+5\right)}{x^2+6}=2x^2-4+x^2+5=3x^2+1=1+3x^2.$$

Ответ: $1+3x^2$.

2.051. $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b}\right)}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:\dfrac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}}$;

$a=4{,}91$; $b=0{,}09$.

Решение.

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{b}\right)}{a\sqrt[3]{b}+a\sqrt{a}-b\sqrt[3]{b}-\sqrt{ab^2}}:\frac{a^3-b}{a\sqrt[3]{b}-\sqrt[6]{a^3b^2}-\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt{a}}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)-b\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)}:\frac{a^3-b}{a\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)-\sqrt[3]{b}\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)(a-b)}:\frac{a^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a-\sqrt[3]{b}\right)}=$$

$$=\frac{(a+b)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a-\sqrt[3]{b}\right)}{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=$$

$$=a+b=4{,}91+0{,}09=5.$$

Ответ: 5.

2.052. $\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2}+1+\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}1-x^2>0,\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1,\\ x\neq 0.\end{cases}$

$$\left(\left(1-x^2\right)^{-1/2}+1+\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{-1/2}-1}\right)^{-2}:\left(2-x^2-2\sqrt{1-x^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}\right)^{-2}:\left(1-2\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^{-2}:\left(1-2\sqrt{1-x^2}+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}\right)^{-2}:\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2+\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}\right)^{-2}:\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\right)^2}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}=$$

$$=1-x^2.$$

Ответ: $1-x^2$.

2.053. $\left(\left(1-p^2\right)^{-1/2}-\left(1+p^2\right)^{-1/2}\right)^2+2\left(1-p^4\right)^{-1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $-1<p<1$.

$$\left(\left(1-p^2\right)^{-1/2}-\left(1+p^2\right)^{-1/2}\right)^2+2\left(1-p^4\right)^{-1/2}=\left(\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\right)^2+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{1-p^4}}=\left(\frac{\sqrt{1+p^2}-\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1-p^4}}\right)^2+\frac{2}{\sqrt{1-p^4}}=\frac{1+p^2-2\sqrt{1-p^4}+1-p^2}{1-p^4}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{1-p^4}}=\frac{2-2\sqrt{1-p^4}}{1-p^4}+\frac{2}{\sqrt{1-p^4}}=\frac{2-2\sqrt{1-p^4}+2\sqrt{1-p^4}}{1-p^4}=\frac{2}{1-p^4}.$$

Ответ: $\frac{2}{1-p^4}$.

2.054. $\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq\pm\frac{a}{3}, \\ x\neq -a. \end{cases}$

$$\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-2+10\cdot\frac{ax-3x^2}{a^2-9x^2}=\frac{-(x+a)(x-3a)}{(3x+a)(a+x)}-2+$$

$$+10\cdot\frac{x(a-3x)}{(a-3x)(a+3x)}=\frac{-x+3a}{3x+a}-2+\frac{10x}{3x+a}=$$

$$=\frac{-x+3a-6x-2a+10x}{3x+a}=\frac{3x+a}{3x+a}=1.$$

Ответ: 1.

2.055. $\left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right).$

Решение.

ОДЗ: $x\neq\pm y$.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\frac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-y}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x+y}}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x+y}\right)^2-2\sqrt[3]{(x+y)(x-y)}+\left(\sqrt[3]{x-y}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}:\frac{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2-y^2}}{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}=\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$.

2.056. $\left(\frac{4}{a+\frac{1}{b+1/c}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}a+\dfrac{1}{b+\frac{1}{c}}\neq 0,\\ a+\dfrac{1}{b}\neq 0,\\ b(abc+a+c)\neq 0.\end{cases}$$

$$\left(\frac{4}{a+\frac{1}{b+1/c}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{4}{a+\frac{c}{bc+1}}:\frac{b}{ab+1}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{4bc+4}{abc+a+c}\cdot\frac{ab+1}{b}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{4ab^2c+4bc+4ab+4}{b(abc+a+c)}-\frac{4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{4ab^2c+4bc+4ab+4-4}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}=\left(\frac{4b(abc+a+c)}{b(abc+a+c)}\right)^{-1/2}=$$

$$=(4)^{-1/2}=\frac{1}{4^{1/2}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2.057. $\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq\pm y, \\ x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

$$\left(\left(\frac{x}{y-x}\right)^{-2}-\frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy}\right)^2\cdot\frac{x^4}{x^2y^2-y^4}=$$

$$=\left(\frac{(y-x)^2}{x^2}-\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{x(x-y)}\right)^2\times$$

$$\times\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=\left(\frac{y^2-2xy+x^2}{x^2}-\frac{x^2-2xy+y^2}{x(x-y)}\right)^2\times$$

$$\times\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=\left(\frac{y^2-2xy+x^2}{x^2}-\frac{(x-y)^2}{x(x-y)}\right)^2\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=$$

$$=\left(\frac{y^2-2xy+x^2}{x^2}-\frac{x-y}{x}\right)^2\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=$$

$$=\left(\frac{y^2-2xy+x^2-x^2+xy}{x^2}\right)^2\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=\left(\frac{y^2-xy}{x^2}\right)^2\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=$$

$$=\frac{y^2(y-x)^2}{x^4}\cdot\frac{x^4}{y^2(x^2-y^2)}=\frac{(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x-y}{x+y}.$$

Ответ: $\frac{x-y}{x+y}$.

2.058. $\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

$a=1\frac{33}{40}$; $b=0{,}625$; $c=3{,}2$.

Решение.

$$\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{a(b+c)}:\frac{-a+b+c}{a(b+c)}\right):\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=$$

$$=\left(\frac{a+b+c}{a(b+c)}\cdot\frac{a(b+c)}{-a+b+c}\right):\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{a+b+c}{-a+b+c}\cdot\frac{2bc}{(b+c)^2-a^2}=\frac{2(a+b+c)bc}{(-a+b+c)(b+c-a)(b+c+a)}=$$

$$=\frac{2bc}{(-a+b+c)^2}=\frac{2\cdot 0{,}625\cdot 3{,}2}{\left(-1\frac{33}{40}+0{,}625+3{,}2\right)^2}=\frac{4}{(-1{,}825+3{,}825)^2}=\frac{4}{4}=1.$$

Ответ: 1.

2.059. $\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+y/x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x \neq -y. \end{cases}$

$$\left(\left(\frac{x^2}{y^3}+\frac{1}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)\right):\frac{(x-y)^2+4xy}{1+y/x}=$$

$$=\left(\frac{x^3+y^3}{xy^3}:\frac{x^2-xy+y^2}{xy^2}\right):\frac{-\left(x^2-2xy+y^2+4xy\right)x}{x+y}=$$

$$=\left(\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{xy^3}\cdot\frac{xy^2}{x^2-xy+y^2}\right):\frac{(x+y)^2x}{x+y}=$$

$$=\frac{x+y}{y}\cdot\frac{1}{(x+y)x}=\frac{1}{xy}.$$

Ответ: $\frac{1}{xy}$.

2.060. $\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq \pm\frac{y}{2}, \\ x \neq \frac{5y}{2}. \end{cases}$

$$\left(\frac{3}{2x-y}-\frac{2}{2x+y}-\frac{1}{2x-5y}\right):\frac{y^2}{4x^2-y^2}=\left(\frac{3(2x+y)-2(2x-y)}{(2x-y)(2x+y)}-\frac{1}{2x-5y}\right)/$$

$$\frac{y^2}{4x^2-y^2}=\left(\frac{6x+3y-4x+2y}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x-5y}\right)\cdot\frac{4x^2-y^2}{y^2}=$$

$$=\left(\frac{2x+5y}{4x^2-y^2}-\frac{1}{2x-5y}\right)\cdot\frac{4x^2-y^2}{y^2}=\frac{(2x+5y)(2x-5y)-4x^2+y^2}{(4x^2-y^2)(2x-5y)}\times$$

$$\times\frac{4x^2-y^2}{y^2}=\frac{4x^2-25y^2-4x^2+y^2}{(4x^2-y^2)(2x-5y)}\cdot\frac{4x^2-y^2}{y^2}=\frac{-24y^2}{(2x-5y)y^2}=$$

$$=\frac{-24}{2x-5y}=\frac{24}{5y-2x}.$$

Ответ: $\frac{24}{5y-2x}$.

2.061. $\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right);\quad x=7,(3).$

Решение.

$$\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right)=$$

$$=\frac{3x^3+6x^2+x^2+2x-11x+2}{3x+1}:\frac{3x^2+3x+x+1-2x^2-x-2}{3x+1}=$$

$$=\frac{3x^3+7x^2-9x+2}{3x+1}\cdot\frac{3x+1}{x^2+3x-1}=\frac{3x^3+7x^2-9x+2}{x^2+3x-1}=$$

$$=\frac{3x^3+9x^2-3x-2x^2-6x+2}{x^2+3x-1}=\frac{3x(x^2+3x-1)-2(x^2+3x-1)}{x^2+3x-1}=$$

$$=\frac{(x^2+3x-1)(3x-2)}{x^2+3x-1}=3x-2=3\cdot7,(3)-2=3\cdot7\frac{3}{9}-2=3\cdot7\frac{1}{3}-2=$$

$$=3\cdot\frac{22}{3}-2=22-2=20.$$

Ответ: 20.

2.062. $\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)$

Решение.

ОДЗ: $a\neq-1$.

$$\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)=$$

$$=\frac{(a+1)(6a^2+5a-1)+a+4}{a+1}:\frac{(a+1)(3a-2)+3}{a+1}=\frac{6a^3+11a^2+5a+3}{a+1}\times$$

$$\times\frac{a+1}{3a^2+a+1}=\frac{6a^3+2a^2+2a+9a^2+3a+3}{3a^2+a+1}=$$

$$=\frac{2a(3a^2+a+1)+3(3a^2+a+1)}{3a^2+a+1}=\frac{(3a^2+a+1)(2a+3)}{3a^2+a+1}=2a+3.$$

Ответ: $2a+3$.

2.063. $\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq \frac{1}{2}. \end{cases}$

$$\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\cdot\frac{x^2}{4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{\frac{1}{x^6}-64}{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{\frac{4x^2-4x+1}{x^2}}-$$

$$-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{\frac{1-64x^6}{x^6}}{\frac{4x^2+2x+1}{x^2}}\cdot\frac{x^4}{(2x-1)^2}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{1-(4x^2)^3}{x^4(4x^2+2x+1)}\times$$

$$\times\frac{x^4}{(2x-1)^2}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{(1-4x^2)(1+4x^2+16x^4)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)^2}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=$$

$$=\frac{(1-2x)(1+2x)(1+4x^2+16x^4)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)^2}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{(1+2x)(1+4x^2+16x^4)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)}-$$

$$-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{(1+2x)(1+4x^2+16x^4)-4x^2(2x+1)(4x^2+2x+1)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)}=$$

$$=\frac{(1+2x)(1+4x^2+16x^4-16x^4-8x^3-4x^2)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)}=\frac{(1+2x)(1-8x^3)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)}=$$

$$=\frac{(1+2x)(1-2x)(1+2x+4x^2)}{(4x^2+2x+1)(1-2x)}=1+2x.$$

Ответ: $1+2x$.

2.064. $\dfrac{2b+a-\dfrac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\dfrac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} b\neq 0, \\ b\neq -3a, \\ b\neq \pm a. \end{cases}$

$$\frac{2b+a-\frac{4a^2-b^2}{a}}{b^3+2ab^2-3a^2b}\cdot\frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2}=\frac{\frac{2ab-a^2-4a^2+b^2}{a}}{b(b^2+2ab-3a^2)}\times$$

$$\times\frac{ab(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a^2+2ab+b^2)-4a^2}{ab(b+3a)(b-a)}\cdot\frac{ab(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+b)^2-4a^2}{-(b+3a)(a+b)}=\frac{(a+b-2a)(a+b+2a)}{-(b+3a)(a+b)}=$$

$$=\frac{(b-a)(b+3a)}{-(b+3a)(a+b)}=-\frac{b-a}{a+b}=\frac{a-b}{a+b}.$$

Ответ: $\dfrac{a-b}{a+b}$.

2.065. $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ x\neq y. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4}y-\sqrt[4]{x^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4})-\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4})}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}\cdot(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})=$$

$$=\frac{(\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}=\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[4]{y^4}=x+y.$$

Ответ: $x+y$.

2.066. $\dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ x\neq y. \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y}-\sqrt{y^3}}{\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^5}}=\frac{(\sqrt{x^3}+\sqrt{xy^2})-(\sqrt{x^2y}+\sqrt{y^3})}{(\sqrt[4]{y^5}+\sqrt[4]{x^4y})-(\sqrt[4]{xy^4}+\sqrt[4]{x^5})}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})-\sqrt{y}(\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2})}{\sqrt[4]{y}(\sqrt[4]{y^4}+\sqrt[4]{x^4})-\sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{y^4}+\sqrt[4]{x^4})}=\frac{\sqrt{x}(x+y)-\sqrt{y}(x+y)}{\sqrt[4]{y}(x+y)-\sqrt[4]{x}(x+y)}=$$

$$=\frac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(x+y)(\sqrt[4]{y}-\sqrt[4]{x})}=\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}{-(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})}=-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}).$$

Ответ: $-(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})$.

2.067. $\dfrac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\dfrac{a}{\sqrt[3]{b}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} b \neq 0, \\ a \geq 0, \\ b^{2/3}-a^{1/6}b^{1/3}+a^{1/3} \neq 0. \end{cases}$

$$\frac{a^{1/2}+ab^{-1}}{a^{-1/3}-a^{-1/6}b^{-1/3}+b^{-2/3}}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt{a}+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt[3]{a}}-\frac{1}{\sqrt[6]{ab^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}}-\frac{a}{\sqrt[3]{b}}=$$

$$=\frac{\frac{b\sqrt[6]{a^3}+a}{b}}{\frac{1}{\sqrt[6]{a^2}}-\frac{1}{\sqrt[6]{ab^2}}+\frac{1}{\sqrt[6]{b^4}}}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=\frac{\frac{b\sqrt[6]{a^3}+a}{b}}{\frac{\sqrt[6]{b^4}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2b^4}}}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=$$

$$=\frac{\left(b\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{a^6}\right)\sqrt[6]{a^2b^4}}{b\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{b^4}\right)}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=\frac{\left(\sqrt[6]{b^6a^3}+\sqrt[6]{a^6}\right)\sqrt[6]{a^2b^4}}{\sqrt[6]{b^6}\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{b^4}\right)}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{a^5b^4}\left(\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{b^6}\right)}{\sqrt[6]{b^6}\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{b^4}\right)}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=\frac{\sqrt[6]{a^5}\left(\left(\sqrt[6]{a}\right)^3+\left(\sqrt[6]{b}\right)^3\right)}{\sqrt[6]{b^2}\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{b^4}\right)}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{a^5}\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b^2}\right)\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{b^4}\right)}{\sqrt[6]{b^2}\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{ab^2}+\sqrt[6]{b^4}\right)}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=\frac{\sqrt[6]{a^5}\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b^2}\right)}{\sqrt[6]{b^2}}-\frac{\sqrt[6]{a^6}}{\sqrt[6]{b^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{a^5}\left(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b^2}-\sqrt[6]{a}\right)}{\sqrt[6]{b^2}}=\frac{\sqrt[6]{a^5}\sqrt[6]{b^2}}{\sqrt[6]{b^2}}=\sqrt[6]{a^5}=a^{5/6}.$$

Ответ: $a^{5/6}$.

2.068. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}-\dfrac{4c^2}{a^2b^2}}$; $\quad a=7{,}4;\ b=\dfrac{5}{37}$.

Решение.

$$\frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2c}{ab}\right)(a+b+2c)}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}-\frac{4c^2}{a^2b^2}}=\frac{\frac{a+b-2c}{ab}\cdot(a+b+2c)}{\frac{a^2+2ab+b^2-4c^2}{a^2b^2}}=$$

$$=\frac{\frac{(a+b-2c)(a+b+2c)}{ab}}{\frac{(a+b)^2-(2c)^2}{a^2b^2}}=\frac{(a+b-2c)(a+b+2c)a^2b^2}{\left((a+b)^2-(2c)^2\right)ab}=$$

$$=\frac{(a+b-2c)(a+b+2c)ab}{(a+b-2c)(a+b+2c)}=ab=7{,}4\cdot\frac{5}{37}=\frac{37}{5}\cdot\frac{5}{37}=1.$$

Ответ: 1.

2.069. $\dfrac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\neq 0,\\ a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b\neq 0.\end{cases}$

$$\frac{a^{7/3}-2a^{5/3}b^{2/3}+ab^{4/3}}{a^{5/3}-a^{4/3}b^{1/3}-ab^{2/3}+a^{2/3}b}:a^{1/3}=\frac{a^{3/3}\left(a^{4/3}-2a^{2/3}b^{2/3}+b^{4/3}\right)}{a^{2/3}\left(a^{3/3}-a^{2/3}b^{1/3}-a^{1/3}b^{2/3}+b^{3/3}\right)}\times$$

$$\times\frac{1}{a^{1/3}}=\frac{\left(a^{2/3}-b^{2/3}\right)^2}{\left(a^{3/3}-a^{2/3}b^{1/3}\right)-\left(a^{1/3}b^{2/3}-b^{3/3}\right)}=\frac{\left(a^{2/3}-b^{2/3}\right)^2}{a^{2/3}\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)-b^{2/3}\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^{2/3}-b^{2/3}\right)^2}{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{2/3}-b^{2/3}\right)}=\frac{a^{2/3}-b^{2/3}}{a^{1/3}-b^{1/3}}=\frac{\left(a^{1/3}-b^{1/3}\right)\left(a^{1/3}+b^{1/3}\right)}{a^{1/3}-b^{1/3}}=a^{1/3}+b^{1/3}.$$

Ответ: $a^{1/3}+b^{1/3}$.

2.070. $\dfrac{\left(a^2-b^2\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}$.

Решение.

ОДЗ: $a \neq \pm b$.

$$\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}=\frac{(a+b)(a-b)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{b^3}\right)-\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[3]{b^3}\right)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a-b)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{(a+b)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}=a-b.$$

Ответ: $a-b$.

2.071. $\dfrac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m>0, \\ n\geq 0, \\ \sqrt{mn}+n+m-1\neq 0. \end{cases}$

$$\frac{(m-1)\sqrt{m}-(n-1)\sqrt{n}}{\sqrt{m^3n}+mn+m^2-m}=\frac{m\sqrt{m}-\sqrt{m}-n\sqrt{n}+\sqrt{n}}{m\sqrt{mn}+mn+m^2-m}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}\right)-\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m\left(\sqrt{mn}+n+m-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m^2}+\sqrt{mn}+\sqrt{n^2}\right)-\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m\left(\sqrt{mn}+n+m-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(m+\sqrt{mn}+n-1\right)}{m\left(\sqrt{mn}+n+m-1\right)}=\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m}$.

2.072. $\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}$.

Решение.

ОДЗ: $a\neq 0$.

$$\frac{\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{a^2}\right)+\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-\sqrt[3]{a^3b}}\cdot\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\frac{-\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)+\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}\cdot\sqrt[3]{a^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}$.

2.073. $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{\sqrt{3-2\sqrt{3\cdot 2}+2}}{\left(\sqrt[4]{3}\right)^2-\left(\sqrt[4]{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=1.$$

Ответ: 1.

2.074. $\dfrac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, \text{ если } m \text{ и } n \text{ — четные числа}, \\ a\neq 0, \\ a\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{2/m}-a^{2/n})(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}})}=$$

$$=\frac{a^{2/m}-2a^{1/m}a^{1/n}+a^{2/n}+4a^{(m+n)/(mn)}}{(a^{1/m}-a^{1/n})(a^{1/m}+a^{1/n})(a^{(m+1)/m}+a^{(n+1)/n}}=$$

$$=\frac{a^{2/m}-2a^{(1/m)+(1/n)}+a^{2/n}+4a^{(1/m)+(1/n)}}{(a^{1/m}-a^{1/n})(a^{1/m}+a^{1/n})(a^{1+1/m}+a^{1+1/n})}=$$

$$=\frac{a^{2/m}+2a^{(1/m)+(1/n)}+a^{2/n}}{(a^{1/m}-a^{1/n})(a^{1/m}+a^{1/n})(a\cdot a^{1/m}+a\cdot a^{1/n})}=$$

$$=\frac{(a^{1/m}+a^{1/n})^2}{(a^{1/m}-a^{1/n})(a^{1/m}+a^{1/n})a(a^{1/m}+a^{1/n})}=\frac{1}{a(a^{1/m}-a^{1/n})}=\frac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{a(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a})}$.

2.075. $\dfrac{(x^{2/m}-9x^{2/n})(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/(mn)}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \text{ если } m \text{ и } n \text{ — четные числа}, \\ x\neq 0, \\ x\neq 3^{mn/(m-n)} \end{cases}$

$$\frac{(x^{2/m}-9x^{2/n})(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/(mn)}}=$$

$$=\frac{((x^{1/m})^2-(3x^{(1/n)})^2)(x^{(1-m)/m}-3x^{(1-n)/n})}{x^{2/m}+6x^{1/m}x^{1/n}+9x^{2/n}-12x^{(1/m)+(1/n)}}=$$

$$=\frac{(x^{1/m}-3x^{1/n})(x^{1/m}+3x^{1/n})(x^{(1/m)-1}-3x^{(1/n)-1})}{x^{2/m}-6x^{(1/m)+(1/n)}+9x^{2/n}}=$$

$$=\frac{(x^{1/m}-3x^{1/n})(x^{1/m}+3x^{1/n})(\frac{x^{1/m}}{x}-\frac{3x^{1/n}}{x})}{(x^{1/m}-3x^{1/n})^2}=$$

$$=\frac{(x^{1/m}-3x^{1/n})(x^{1/m}+3x^{1/n})\cdot\frac{1}{x}(x^{1/m}-3x^{1/n})}{(x^{1/m}-3x^{1/n})^2}=\frac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}.$$

Ответ: $\frac{x^{1/m}+3x^{1/n}}{x}$.

2.076. $\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2{,}4}(\sqrt{15}+3)$.

Решение.

$$\frac{3\sqrt{12}}{\sqrt{45}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{2{,}4}(\sqrt{15}+3)=\frac{3\sqrt{4\cdot3}}{\sqrt{3\cdot15}-4\sqrt{3}}+5\sqrt{\frac{12}{5}}(\sqrt{15}+3)=$$

$$=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}-4\sqrt{3}}+\frac{5\sqrt{4\cdot3}}{\sqrt{5}}(\sqrt{15}+3)=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{15}-4)}+2\sqrt{15}(\sqrt{15}+3)=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{15}-4}+30+6\sqrt{15}=\frac{6(\sqrt{15}+4)}{(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)}+30+6\sqrt{15}=$$

$$=\frac{6(\sqrt{15}+4)}{15-16}+30+6\sqrt{15}=-6\sqrt{15}-24+30+6\sqrt{15}=6.$$

Ответ: 6.

2.077. $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\dfrac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1};\quad a=1-\sqrt{2};\, b=1+\sqrt{2}.$

Решение.

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}:\frac{a^2b^2}{a^2+2ab+b^2-3ab}\times$$

$$\times\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{a^3+b^3}{a^3b^3}}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=-\frac{(a-b)a^3b^3}{ab(a+b)(a^2-ab+b^2)}\times$$

$$\times\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a-b)}=-\frac{ab}{(a+b)^2}=-\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2})^2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2.078. $\left(\dfrac{1}{t^2+3t+2}+\dfrac{2t}{t^2+4t+3}+\dfrac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\dfrac{(t-3)^2+12t}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} t\neq-3, \\ t\neq-2, \\ t\neq-1. \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\frac{(t-3)^2+12t}{2}=$$

$$=\left(\frac{1}{(t+2)(t+1)}+\frac{2t}{(t+3)(t+1)}+\frac{1}{(t+3)(t+2)}\right)^2\cdot\frac{t^2-6t+9+12t}{2}=$$

$$=\left(\frac{t+3+2t(t+2)+t+1}{(t+1)(t+2)(t+3)}\right)^2\cdot\frac{t^2+6t+9}{2}=\left(\frac{2(t+2)+2t(t+2)}{(t+1)(t+2)(t+3)}\right)^2\cdot\frac{(t+3)^2}{2}=$$

$$=\frac{(2(t+2)(t+1))^2(t+3)^2}{2((t+1)(t+2)(t+3))^2}=\frac{4(t+2)^2(t+1)^2(t+3)^2}{2(t+2)^2(t+1)^2(t+3)^2}=2.$$

Ответ: 2.

2.079. $\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt[4]{\frac{m^2}{4}}.$

Решение.

ОДЗ: $m\geq 3$.

$$\left(\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}+\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}}\right)^2\cdot\sqrt[4]{\frac{m^2}{4}}=$$

$$=\left(\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}+2\sqrt{\left(\sqrt{m}-\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}\right)}+\sqrt{m}+\sqrt{\frac{m^2-9}{m}}\right)\times$$

$$\times\sqrt{\frac{m}{2}}=\left(2\sqrt{m}+2\sqrt{m-\frac{m^2-9}{m}}\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{2}}=\left(2\sqrt{m}+\frac{6}{\sqrt{m}}\right)\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}=$$

$$=m\sqrt{2}+\frac{6}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(m+3).$$

Ответ: $\sqrt{2}(m+3)$.

2.080. $\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a\neq b,\\ a\neq -b.\end{cases}$

$$\frac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\frac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}=\frac{a^2-2ab+b^2+ab}{a^2+2ab+b^2-ab}:$$

$$:\frac{(a^5+a^2b^3)+(a^3b^2+b^5)}{((a^3+b^3)+(a^2b+ab^2))(a^3-b^3)}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\times$$

$$\times\frac{((a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b))(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2(a^3+b^3)+b^2(a^3+b^3)}=$$

$$=\frac{(a^2-ab+b^2)(a+b))(a^2+b^2)(a-b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2)}=a-b.$$

Ответ: $a-b$.

2.081. $\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}.$

Решение.

ОДЗ: $t>2$.

$$\left(\frac{t\sqrt{t+2}}{\sqrt{t-2}}-\frac{2\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}-\frac{4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}:\sqrt[4]{t^2-4}=\left(\frac{t(t+2)-2(t-2)-4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}/$$

$$\sqrt[4]{t^2-4}=\left(\frac{t^2+2t-2t+4-4t}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t^2-4}}=\left(\frac{t^2-4t+4}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t^2-4}}=$$

$$=\left(\frac{(t-2)^2}{\sqrt{t^2-4}}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t^2-4}}=\frac{t-2}{\sqrt[4]{t^2-4}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{t^2-4}}=\frac{t-2}{\sqrt{t^2-4}}=\frac{t-2}{\sqrt{(t-2)(t+2)}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{t-2}\right)^2}{\sqrt{t-2}\cdot\sqrt{t+2}}=\frac{\sqrt{t-2}}{\sqrt{t+2}}=\frac{\sqrt{t-2}\cdot\sqrt{t+2}}{\sqrt{t+2}\cdot\sqrt{t+2}}=\frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{t^2-4}}{t+2}$.

2.082. $\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+1/c}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} b\neq 0, \\ abc+a+c\neq 0, \\ bc\neq -1, \\ ab\neq -1. \end{cases}$

$$\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+1/c}}:\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{c}{bc+1}}:\frac{b}{ab+1}=$$

$$=\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{bc+1}{abc+a+c}\cdot\frac{ab+1}{b}=\frac{1-(bc+1)(ab+1)}{b(abc+a+c)}=$$

$$=\frac{1-ab^2c-ab-bc-1}{b(abc+a+c)}=\frac{-b(abc+a+c)}{b(abc+a+c)}=-1.$$

Ответ: -1.

2.083. $\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right).$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 1$.

$$\left(2-x+4x^2+\frac{5x^2-6x+3}{x-1}\right):\left(2x+1+\frac{2x}{x-1}\right)=$$

$$=\frac{(4x^2-x+2)(x-1)+5x^2-6x+3}{x-1}:\frac{(2x+1)(x-1)+2x}{x-1}=$$

$$=\frac{4x^3-3x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2x^2+x-1}=\frac{(x^3+1)+(3x^3-3x)}{(x^2-1)+(x^2+x)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1)+3x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)+x(x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x^2-x+1+3x^2-3x)}{(x+1)(x-1+x)}=\frac{4x^2-4x+1}{2x-1}=\frac{(2x-1)^2}{2x-1}=2x-1.$$

Ответ: $2x-1$.

2.084. $\left(\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right);$

$a=\sqrt{2}+0{,}8;\ b=\sqrt{2}-0{,}2.$

Решение.

$$\left(\frac{2-b}{b-1}+2\cdot\frac{a-1}{a-2}\right):\left(b\cdot\frac{a-1}{b-1}+a\cdot\frac{2-b}{a-2}\right)=\frac{(2-b)(a-2)+2(a-1)(b-1)}{(b-1)(a-2)}/$$

$$\frac{b(a-1)(a-2)+a(2-b)(b-1)}{(b-1)(a-2)}=\frac{ab-2}{(b-1)(a-2)}\cdot\frac{(b-1)(a-2)}{a^2b-ab^2-2a+2b}=$$

$$=\frac{ab-2}{ab(a-b)-2(a-b)}=\frac{ab-2}{(a-b)(ab-2)}=\frac{1}{a-b}=\frac{1}{\sqrt{2}+0{,}8-\sqrt{2}+0{,}2}=1.$$

Ответ: 1.

2.085. $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0, \\ a \ne b. \end{cases}$

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}\right)^2=\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a^2}-\sqrt{ab}+\sqrt{b^2})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)^2=\left(\sqrt{a^2}-2\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}\right)\cdot\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=1.$$

Ответ: 1.

2.086. $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a^2-b^2 \ge 0, \\ b \ne 0. \end{cases}$

$$\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right):\frac{4\sqrt{a^4-a^2b^2}}{(5b)^2}=$$

$$=\frac{(a-\sqrt{a^2-b^2})^2-(a+\sqrt{a^2-b^2})^2}{(a+\sqrt{a^2-b^2})(a-\sqrt{a^2-b^2})}\cdot\frac{25b^2}{4\sqrt{a^2(a^2-b^2)}}=$$

$$=\frac{a^2-2a\sqrt{a^2-b^2}+a^2-b^2-a^2-2a\sqrt{a^2-b^2}-a^2+b^2}{a^2-a^2+b^2}\cdot\frac{25b^2}{4\cdot|a|\cdot\sqrt{a^2-b^2}}=$$

$$=-\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\cdot\frac{25b^2}{4\cdot|a|\cdot\sqrt{a^2-b^2}}=-\frac{25a}{|a|}=\begin{cases}-25, \text{ если } a>0,\\ 25, \text{ если } a<0.\end{cases}$$

Ответ: -25, если $a>0$; 25, если $a<0$.

2.087. $\dfrac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\dfrac{3}{a}}-\sqrt{\dfrac{3}{c}}}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}a>0,\\ c>0,\\ 2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2\neq 0.\end{cases}$

$$\frac{\sqrt{3}(a-b^2)+\sqrt{3}b\sqrt[3]{8b^3}}{\sqrt{2(a-b^2)^2+(2b\sqrt{2a})^2}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}=\frac{\sqrt{3}(a-b^2)+2\sqrt{3}b^2}{\sqrt{2(a-b^2)^2+8ab^2}}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{2}(\sqrt{a}-\sqrt{c})}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}}}=\frac{\sqrt{3}(a-b^2+2b^2)}{\sqrt{2}\sqrt{a^2-2ab^2+b^4+4ab^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{a}-\sqrt{c})\sqrt{ac}}{\sqrt{3}(\sqrt{c}-\sqrt{a})}=$$

$$=\frac{a+b^2}{\sqrt{a^2+2ab^2+b^4}}\cdot\frac{-\sqrt{ac}}{1}=\frac{-(a+b^2)\sqrt{ac}}{\sqrt{(a+b^2)^2}}=\frac{-(a+b^2)\sqrt{ac}}{a+b^2}=-\sqrt{ac}.$$

Ответ: $-\sqrt{ac}$.

2.088. $\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $-1<x\le 1$.

$$\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right)=\left(\sqrt{1-x^2}+1\right):\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1+x}.$$

Ответ: $\sqrt{1+x}$.

2.089. $\dfrac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\cdot\dfrac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} n\ne\pm 8, \\ n\ne 0. \end{cases}$

$$\frac{8-n}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\frac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\cdot\frac{4-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}=$$

$$=\frac{2^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{2+\sqrt[3]{n}}:\frac{4+2\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}-\frac{\sqrt[3]{n^2}-2\sqrt[3]{n}+2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\times$$

$$\times\frac{\left(2-\sqrt[3]{n}\right)\left(2+\sqrt[3]{n}\right)}{\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n}+2\right)}=\frac{\left(2-\sqrt[3]{n}\right)\left(4+2\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}{2+\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{2+\sqrt[3]{n}}{4+2\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}}+$$

$$+\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2-\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}=2-\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}=2.$$

Ответ: 2.

2.090. $\dfrac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\dfrac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq b, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$

$$\frac{(a-b)^3(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3(\sqrt{ab}-b)}{a-b}=$$

$$=\frac{\dfrac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=$$

$$=\frac{(a-b)^3+(2a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^3(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}+\frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{3a^3+9a^2b+9ab^2+3b^3+9a^2\sqrt{ab}+9b^2\sqrt{ab}+6ab\sqrt{ab}}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2\sqrt{ab}+3b^2\sqrt{ab}+2ab\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{3(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2\sqrt{ab}+3b^2\sqrt{ab}+2ab\sqrt{ab})}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2\sqrt{ab}+3b^2\sqrt{ab}+2ab\sqrt{ab}}=3.$$

Ответ: 3.

2.091. $\dfrac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\dfrac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x \neq \pm y. \end{cases}$

$$\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{1/2}+x^{1/3}y^{1/6}}\cdot\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2-4\sqrt[3]{xy}}{x^{5/6}y^{1/3}-x^{1/2}y^{2/3}}+2x^{-2/3}y^{-1/6}=\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{3/6}+x^{2/6}y^{1/6}}\times$$

$$\times\frac{(x^{2/6}+y^{2/6})-4x^{2/6}y^{2/6}}{x^{5/6}y^{2/6}-x^{3/6}y^{4/6}}+\frac{2}{x^{2/3}y^{1/6}}=\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{2/6}(x^{1/6}+y^{1/6})}\times$$

$$\times\frac{x^{4/6}+2x^{2/6}y^{2/6}+y^{4/6}-4x^{2/6}y^{2/6}}{x^{3/6}y^{2/6}\left(x^{2/6}-y^{2/6}\right)}+\frac{2}{x^{4/6}y^{1/6}}=\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{2/6}\left(x^{1/6}+y^{1/6}\right)}\times$$

$$\times\frac{x^{4/6}-2x^{2/6}y^{2/6}+y^{4/6}}{x^{3/6}y^{2/6}\left(x^{2/6}-y^{2/6}\right)}+\frac{2}{x^{4/6}y^{1/6}}=\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{2/6}\left(x^{1/6}+y^{1/6}\right)}\cdot\frac{\left(x^{2/6}-y^{2/6}\right)^2}{x^{3/6}y^{2/6}\left(x^{2/6}-y^{2/6}\right)}+$$

$$+\frac{2}{x^{4/6}y^{1/6}}=\frac{x^{1/6}-y^{1/6}}{x^{2/6}\left(x^{1/6}+y^{1/6}\right)}\cdot\frac{x^{2/6}-y^{2/6}}{x^{3/6}y^{2/6}}+\frac{2}{x^{4/6}y^{1/6}}=\frac{\left(x^{1/6}-y^{1/6}\right)}{x^{2/6}\left(x^{1/6}+y^{1/6}\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(x^{1/6}-y^{1/6}\right)\left(x^{1/6}+y^{1/6}\right)}{x^{3/6}y^{2/6}}+\frac{2}{x^{4/6}y^{1/6}}=\frac{\left(x^{1/6}-y^{1/6}\right)^2}{x^{5/6}y^{2/6}}+\frac{2}{x^{4/6}y^{1/6}}=$$

$$=\frac{x^{2/6}-2x^{1/6}y^{1/6}+y^{2/6}+2x^{1/6}y^{1/6}}{x^{5/6}y^{2/6}}=\frac{x^{2/6}+y^{2/6}}{x^{5/6}y^{2/6}}=\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{\sqrt[6]{x^5y^2}}.$$

Ответ: $\frac{x^{1/3}+y^{1/3}}{\sqrt[6]{x^5y^2}}$.

2.092. $\left(x\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}\right)^{-3/5}:\left(x^2-1\right)^{4/5}$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq\pm1$.

$$\left(x\sqrt[3]{\frac{x-1}{(x+1)^2}}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}\right)^{-3/5}:\left(x^2-1\right)^{4/5}=$$

$$=\left(\frac{x\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+\frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}\right)^{-3/5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=$$

$$=\left(\frac{x\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}+\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)^{-3/5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=\left(\frac{x\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)^{-3/5}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=\left(\frac{\sqrt[3]{x-1}(x+1)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)^{-3/5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=\left(\frac{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^3}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)^{-3/5}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=\left(\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}\right)^{-3/5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^2-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{\left(x^2-1\right)^5}}=\frac{1}{x^2-1}.$$

Ответ: $\frac{1}{x^2-1}$.

2.093. $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} t>0, \\ t\neq\left(\sqrt{3}-1\right)^2. \end{cases}$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{t}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{t}}\right)\cdot\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+2\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{3}+\sqrt{t}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{t}\right)}{\left(\sqrt{t}+1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{t}+1-\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{t}\right)^2-2+2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3t}}{\sqrt{(t+1)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}}\cdot\frac{t+2\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}}=\frac{2\sqrt{3}\left(t+2\sqrt{t}-2\right)}{t+2\sqrt{t}-2}=2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

2.094. $\frac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$.

Решение.

ОДЗ: $m\neq 0$.

$$\frac{m^{4/3}-27m^{1/3}\cdot n}{m^{2/3}+3\sqrt[3]{mn}+9n^{2/3}}:\left(1-3\sqrt[3]{\frac{n}{m}}\right)-\sqrt[3]{m^2}=\frac{m^{1/3}(m-27n)}{m^{2/3}+3m^{1/3}n^{1/3}+9n^{2/3}}/$$

$$\frac{\sqrt[3]{m}-3\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}}-m^{2/3}=\frac{m^{1/3}\left(\left(m^{1/3}\right)^3-\left(3n^{1/3}\right)^3\right)}{m^{2/3}+3m^{1/3}n^{1/3}+9n^{2/3}}\cdot\frac{m^{1/3}}{m^{1/3}-3n^{1/3}}-m^{2/3}=$$

$$=\frac{m^{1/3}\left(m^{1/3}-3n^{1/3}\right)\left(m^{2/3}+3m^{1/3}n^{1/3}+9n^{2/3}\right)}{m^{2/3}+3m^{1/3}n^{1/3}+9n^{2/3}}\cdot\frac{m^{1/3}}{m^{1/3}-3n^{1/3}}-m^{2/3}=$$

$$=m^{2/3}-m^{2/3}=0.$$

Ответ: 0.

2.095. $z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<z\neq 1,\\ p\neq 0,\\ p\neq \pm 3.\end{cases}$

$$z^{\frac{p-3}{p^2+3p}}:z^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot z^{\frac{3}{3p-p^2}}=z^{\frac{p-3}{p^2+3p}-\frac{12}{9-p^2}+\frac{3}{3p-p^2}}=$$

$$=z^{\frac{p-3}{p(p+3)}+\frac{12}{(p-3)(p+3)}-\frac{3}{p(p-3)}}=z^{\frac{(p-3)^2+12p-3(p+3)}{p(p+3)(p-3)}}=$$

$$=z^{\frac{p^2-6p+9+12p-3p-9}{p(p+3)(p-3)}}=z^{\frac{p^2+3p}{p(p+3)(p-3)}}=z^{\frac{p(p+3)}{p(p+3)(p-3)}}=z^{\frac{1}{p-3}}.$$

Ответ: $z^{\frac{1}{p-3}}$.

2.096. $\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x\geq a^2,\\ a\neq 0.\end{cases}$

$$\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2})(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2})}=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\frac{(x-2\sqrt{x(x-a^2)}+x-a^2-x-2\sqrt{x(x-a^2)}-x+a^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{x-a^2})^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}:\frac{-4\sqrt{x(x-a^2)}}{x-x+a^2}=\frac{\sqrt{x}\cdot a^2}{\sqrt{x-a^2}\cdot(-4\sqrt{x(x-a^2)})}=$$

$$=-\frac{a^2}{4(x-a^2)}=\frac{a^2}{4(a^2-x)}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{4(a^2-x)}$.

2.097. $$\frac{(\sqrt{x}+2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\frac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$$

Решение.

ОДЗ: $x>0, x\neq 2.$

$$\frac{(\sqrt{x}+2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)-\frac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\sqrt{\frac{2}{x}+1}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{(\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{(\sqrt{x}-2)(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{8}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x+2}):\left(\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}=$$

$$=\frac{-\frac{2x}{\sqrt{x}}}{\frac{(2-\sqrt{x+2})\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-2}}=2.$$

Ответ: 2.

2.098. $\frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} t>0, \\ t\neq\frac{1}{2}. \end{cases}$

$$\frac{1-\sqrt{2t}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\sqrt[4]{\frac{1}{2t}}}-\sqrt{2t}\right)^{-1}=\frac{1-\sqrt[4]{4t^2}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt[4]{4t^2}}\times$$

$$\times\left(\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{2t}}+\sqrt[4]{4t^2}}{1+\frac{1}{\sqrt[4]{2t}}}-\sqrt[4]{4t^2}\right)^{-1}=\frac{1-\sqrt[4]{4t^2}}{\frac{1-\sqrt[4]{8t^3}-\sqrt[4]{4t^2}+\sqrt[4]{8t^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}}\cdot\left(\frac{\frac{1+\sqrt[4]{8t^3}}{\sqrt[4]{2t}}}{\frac{\sqrt[4]{2t}+1}{\sqrt[4]{2t}}}-\sqrt[4]{4t^2}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt[4]{4t^2})(1-\sqrt[4]{2t})}{1-\sqrt[4]{4t^2}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt[4]{8t^3}}{1+\sqrt[4]{2t}}-\sqrt[4]{4t^2}\right)^{-1}=(1-\sqrt[4]{2t})\times$$

$$\times\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{2t}\right)\left(1-\sqrt[4]{2t}+\sqrt[4]{4t^2}\right)}{1+\sqrt[4]{2t}}-\sqrt[4]{4t^2}\right)^{-1}=\left(1-\sqrt[4]{2t}\right)\times$$

$$\times\left(1-\sqrt[4]{2t}+\sqrt[4]{4t^2}-\sqrt[4]{4t^2}\right)^{-1}=\left(1-\sqrt[4]{2t}\right)\left(1-\sqrt[4]{2t}\right)^{-1}=$$

$$=\left(1-\sqrt[4]{2t}\right)\cdot\frac{1}{1-\sqrt[4]{2t}}=1.$$

Ответ: 1.

2.099. $\dfrac{\left(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0, \\ x\neq 8y. \end{cases}$

$$\frac{\left(x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^4}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)=\frac{x^{2/3}+2x^{1/3}y^{1/3}+4y^{2/3}}{\left(x^{4/3}-8yx^{1/3}\right):x^{1/3}y^{1/3}}\cdot\left(2-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}\right)=$$

$$=\frac{x^{2/3}+2x^{1/3}y^{1/3}+4y^{2/3}}{\dfrac{x^{1/3}(x-8y)}{x^{1/3}y^{1/3}}}\cdot\frac{2\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}=\frac{\left(x^{2/3}+2x^{1/3}y^{1/3}+4y^{2/3}\right)y^{1/3}}{\left(x^{1/3}\right)^3-\left(2y^{1/3}\right)^3}\times$$

$$\times\frac{2\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}=\frac{\left(x^{2/3}+2x^{1/3}y^{1/3}+4y^{2/3}\right)y^{1/3}}{\left(x^{1/3}-2y^{1/3}\right)\left(x^{2/3}+2x^{1/3}y^{1/3}+4y^{2/3}\right)}\cdot\frac{2y^{1/3}-x^{1/3}}{y^{1/3}}=$$

$$=-\frac{y^{1/3}}{2y^{1/3}-x^{1/3}}\cdot\frac{2y^{1/3}-x^{1/3}}{y^{1/3}}=-1.$$

Ответ: -1.

2.100. $\dfrac{\left(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{z}\right)^2}{z-2+\dfrac{1}{z}}-z\sqrt{z}\sqrt{\dfrac{4}{z}+4+z}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} z>0, \\ z\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{\left(z-z\sqrt{z}+2-2\sqrt{z}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{z}\right)^2}{z-2+\dfrac{1}{z}}-z\sqrt{z}\sqrt{\frac{4}{z}+4+z}=$$

$$=\frac{\left(z\left(1-\sqrt{z}\right)+2\left(1-\sqrt{z}\right)\right)^2\left(1+\sqrt{z}\right)^2}{\dfrac{z^2-2z+1}{z}}-z\sqrt{z}\sqrt{\frac{4+4z+z^2}{z}}=$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{z}\right)^2(z+2)^2\left(1+\sqrt{z}\right)^2\cdot z}{(z-1)^2}-\frac{z\sqrt{z}\sqrt{(2+z)^2}}{\sqrt{z}}=$$

$$=\frac{\left(\left(1-\sqrt{z}\right)\left(1+\sqrt{z}\right)\right)^2(z+2)^2z}{(z-1)^2}-z(2+z)=\frac{(1-z)^2(z+2)^2z}{(z-1)^2}-$$

$$-z(2+z)=(z+2)^2z-z(2+z)=(z+2)z(z+2-1)=z(z+1)(z+2).$$

Ответ: $z(z+1)(z+2)$.

2.101. $\left(\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{a}\right)^{-1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq -\sqrt{2}. \end{cases}$

$$\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+2\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{a^3+\left(\sqrt{2}\right)^3}\right)/$$

$$\times\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a+\sqrt{2}}-\frac{a^2+4}{(a+\sqrt{2})(a^2-\sqrt{2}a+2}\right)\cdot\frac{a^2-\sqrt{2}a+2}{2a}=$$

$$=\frac{a^2-\sqrt{2}a+2-a^2-4}{(a+\sqrt{2})(a^2-\sqrt{2}a+2)}\cdot\frac{a^2-\sqrt{2}a+2}{2a}=\frac{-\sqrt{2}a-2}{a+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2a}=$$

$$=\frac{-\sqrt{2}(a+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}a}=-\frac{\sqrt{2}}{2a}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2a}$.

2.102. $\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq \pm 1. \end{cases}$

$$\left(\frac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\frac{1+a(a-2)}{a^2-a+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{(a+1)^2}}=\left(\frac{\frac{1}{a-1}}{\frac{1}{a^3}}-\frac{1}{1-a}\right)\times$$

$$\times\frac{1+a^2-2a}{a^2-a+1}\cdot\frac{1}{|a+1|}=\left(\frac{a^3}{a-1}+\frac{1}{a-1}\right)\cdot\frac{a^2-2a+1}{a^2-a+1}\cdot\frac{1}{|a+1|}=\frac{a^3+1}{a-1}\times$$

$$\times\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}\cdot\frac{1}{|a+1|}=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)}{(a^2-a+1)\cdot|a+1|}=\frac{(a+1)(a-1)}{|a+1|}=$$

$$=\begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{-(a+1)}=1-a, \text{ если } a+1<0, \text{ или } a<-1; \\ \frac{(a+1)(a-1)}{a+1}=a-1, \text{ если } a+1>0, \text{ или, учитывая ОДЗ,} \\ \qquad a>-1, a\neq 0 \text{ и } a\neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $1-a$ для $a\in(-\infty;-1)$; $a-1$ для $a\in(-1;0)\cup(0;1)(1;\infty)$.

2.103. $\left(\sqrt{ab}-ab\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-1}\right):\left(2\left((ab)^{1/2}-b\right)\cdot(a-b)^{-1}\right).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} ab>0, \\ a\neq b. \end{cases}$

$$\left(\sqrt{ab}-ab\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-1}\right):\left(2\left((ab)^{1/2}-b\right)\cdot(a-b)^{-1}\right)=\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)/$$
$$\frac{2\left(\sqrt{ab}-b\right)}{a-b}=\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right):\frac{2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$
$$=\left(\sqrt{ab}-\frac{\sqrt{a}b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}=\sqrt{ab}\left(1-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}=$$
$$=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}=\frac{a}{2}.$$

Ответ: $\frac{a}{2}$.

2.104. $\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}}+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\frac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ b\neq 0. \end{cases}$

$$\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{b-\frac{4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b}{a^6}-\frac{4}{b^3}}+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3b^4-4a^9}\right):\frac{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}{b^2}=$$
$$=\left(\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4-4a^6}{b^3}}-a^2\sqrt[3]{\frac{b^4-4a^6}{a^6b^3}}+\frac{2}{ab}\sqrt[3]{a^3\left(b^4-4a^6\right)}\right)\cdot\frac{b^2}{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}=$$
$$=\left(\frac{a\sqrt[3]{b^4-4a^6}}{b^2}-\frac{a^2\sqrt[3]{b^4-4a^6}}{a^2b}+\frac{2a\sqrt[3]{b^4-4a^6}}{ab}\right)\cdot\frac{b^2}{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{b^4-4a^6}\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{2}{b}\right)\cdot\frac{b^2}{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}=\frac{\sqrt[3]{\left(b^2-2a^3\right)\left(b^2+2a^3\right)}(a+b)}{b^2}\times$$

$$\times\frac{b^2}{\sqrt[3]{b^2-2a^3}}=(a+b)\sqrt[3]{b^2+2a^3}.$$

Ответ: $(a+b)\sqrt[3]{b^2+2a^3}$.

2.105. $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}-1<x<1,\\ x\neq 0.\end{cases}$

$$\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}+1\right)}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}\left(\sqrt{1+x}-1\right)}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\frac{1+x-2\sqrt{1-x^2}+1-x}{1-x^2}\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}=$$

$$=\frac{2\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}{1-x^2}\cdot\frac{x^2-1}{2}-\sqrt{1-x^2}=$$

$$=-1+\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}=-1.$$

Ответ: -1.

2.106. $\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\cdot\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}}$;

$a=4/3$; $b=0{,}25$.

Решение.

$$\frac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}\cdot\sqrt{a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}}=$$

$$=\frac{(2a-b)(2a+b)}{(a^2)^3-(2b^2)^3}\cdot\frac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{(2a+b)^2}\times$$

$$\times\sqrt{\left(a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}\right)\left(a^2+2b\sqrt{a^2-b^2}\right)}=$$

$$=\frac{(2a-b)(a^4+2a^2b^2+4b^4)}{(a^2-2b^2)(a^4+2a^2b^2+4b^4)(2a+b)}\cdot\sqrt{a^4-4b^2(a^2-b^2)}=$$

$$=\frac{(2a-b)(a^4-2a^2b^2+4b^4)}{(a^2-2b^2)(2a+b)}=\frac{(2a-b)\sqrt{(a^2-2b^2)^2}}{(a^2-2b^2)(2a+b)}=\frac{(2a-b)(a^2-2b^2)}{(a^2-2b^2)(2a+b)}=$$

$$=\frac{2a-b}{2a+b}=\frac{2\cdot\frac{4}{3}-0{,}25}{2\cdot\frac{4}{3}+0{,}25}=\frac{\frac{8}{3}-0{,}25}{\frac{8}{3}+0{,}25}=\frac{8-0{,}75}{8+0{,}75}=\frac{7{,}25}{8{,}75}=\frac{29}{35}.$$

Ответ: $\frac{29}{35}$.

2.107. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$; $\quad x=\frac{1}{a-1}$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}a\ne 1,\\ a\ne 0,\\ x\ne 0,\\ x\ne -a,\\ x\ne 1-a.\end{cases}$$

$$\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-\left(a^2+x^2\right)}{2ax}\right)=\frac{1+\frac{1}{a+x}}{1-\frac{1}{a+x}}\cdot\frac{2ax-1+a^2+x^2}{2ax}=\frac{\frac{a+x+1}{a+x}}{\frac{a+x-1}{a+x}}\times$$

$$\times\frac{a^2+2ax+x^2-1}{2ax}=\frac{a+x+1}{a+x-1}\cdot\frac{(a+x)^2-1}{2ax}=\frac{(a+x+1)(a+x+1)(a+x-1)}{(a+x-1)2ax}=$$

$$=\frac{(a+x+1)^2}{2ax}=\frac{\left(a+\frac{1}{a-1}+1\right)^2}{\frac{2a}{a-1}}=\frac{\left(\frac{a^2-a+1+a-1}{a-1}\right)^2}{\frac{2a}{a-1}}=$$

$$=\frac{a^4}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{2a}=\frac{a^3}{2(a-1)}.$$

Ответ: $\frac{a^3}{2(a-1)}$.

2.108. $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right);$

$a=0{,}75;\ b=4/3.$

Решение.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2a}-\frac{b}{a+b}\right):\left(\left(a+2b+\frac{b^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right)\right)=$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}\cdot\frac{a^2+2ab+b^2-2ab}{2a(a+b)}:\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{a}\cdot\frac{a^2-ab+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}\right)=$$

$$=\frac{(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)}{2a^2b(a+b)}:\frac{(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)}{a(a+b)(a-b)}=\frac{(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)}{2a^2b(a+b)}\cdot\frac{a(a+b)(a-b)}{(a+b)^2\left(a^2+b^2\right)}=$$

$$=\frac{a-b}{2ab}=\frac{0{,}75-\frac{4}{3}}{2\cdot 0{,}75\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}{2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{7}{12}}{2}=-\frac{7}{24}.$$

Ответ: $-\frac{7}{24}$.

2.109. $\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+\left(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}}\right)^2+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3$;

$a=3\frac{4}{7}$; $x=0{,}28$.

Решение.

$$\left(-4a\sqrt[3]{\frac{\sqrt{ax}}{a^2}}\right)^3+\left(-10a\sqrt{x}\cdot\sqrt{(ax)^{-1}}\right)^2+\left(-2\left(\sqrt[3]{a\sqrt[4]{\frac{x}{a}}}\right)^2\right)^3=$$

$$=\frac{-64a^3\sqrt{ax}}{a^2}+\frac{100a^2x}{ax}-\frac{8a^2\sqrt{x}}{\sqrt{a}}=-64a\sqrt{ax}+100a-8a\sqrt{ax}=$$

$$=100a-72a\sqrt{ax}=100\cdot3\frac{4}{7}-72\cdot3\frac{4}{7}\cdot\sqrt{3\frac{4}{7}\cdot0{,}28}=$$

$$=100\cdot\frac{25}{7}-72\cdot\frac{25}{7}\cdot\sqrt{\frac{25}{7}\cdot\frac{7}{25}}=\frac{2500}{7}-\frac{1800}{7}=\frac{700}{7}=100.$$

Ответ: 100.

2.110. $\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right)$; $c=2; d=1/4$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\left(\sqrt{\frac{c-d}{c+d}}+\sqrt{\frac{c^2+cd}{c^2-cd}}\right)=\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\left(\frac{\sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d}}+\sqrt{\frac{c(c+d)}{c(c-d)}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\left(\frac{\sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d}}+\frac{\sqrt{c+d}}{\sqrt{c-d}}\right)=\frac{\sqrt{c-d}}{c^2\sqrt{2c}}\cdot\frac{c-d+c+d}{\sqrt{c+d}\cdot\sqrt{c-d}}=\frac{2c}{c^2\cdot\sqrt{2c}\cdot\sqrt{c+d}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{c\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{c+d}}=\frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{c^2+cd}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{4+2\cdot\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

2.111. $\dfrac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ b \neq 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}=\frac{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\cdot\left(\frac{b-a}{ab}\right)^2}{\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}-\frac{a^2+b^2}{ab}}=\frac{\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)(b-a)^2}{a^3b^3}}{\frac{a^4+b^4-a^3b-ab^3}{a^2b^2}}=$$

$$=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)(a-b)^2}{a^3b^3}\cdot\frac{a^2b^2}{\left(a^4-a^3b\right)-\left(ab^3-b^4\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)(a-b)^2}{ab\left(a^3(a-b)-b^3(a-b)\right)}=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)(a-b)^2}{ab(a-b)\left(a^3-b^3\right)}=$$

$$=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)(a-b)^2}{ab(a-b)(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}=\frac{1}{ab}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{ab}$.

2.112. $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{t}}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} t \geq 0, \\ t \neq 2. \end{cases}$

$$\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^5+2t^4+4t^3}{4-4t+t^2}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{t}}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{2^3-t^3}+\sqrt[3]{\frac{t^3(t^2+2t+4)}{(2-t)^2}}\right):\left(\frac{\sqrt{t}+\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{t}}{(\sqrt{2}-\sqrt{t})(\sqrt{2}+\sqrt{t})}\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{(2-t)(4+2t+t^2)}+\frac{t\sqrt[3]{t^2+2t+4}}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}\right):\frac{2\sqrt{2}}{2-t}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(2-t)^3(4+2t+t^2)}+t\sqrt[3]{4+2t+t^2}}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}\cdot\frac{2-t}{2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4+2t+t^2}\cdot(2-t+t)}{\sqrt[3]{(2-t)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2-t)^3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{(2-t)(4+2t+t^2)}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[3]{8-t^3}}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{8-t^3}}{\sqrt{2}}$.

2.113. $\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} p\neq 0, \\ q\neq 0, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$

$$\frac{x^{3/p}-x^{3/q}}{(x^{1/p}+x^{1/q})^2-2x^{1/q}(x^{1/q}+x^{1/p})}+\frac{x^{1/p}}{x^{(q-p)/pq}+1}=$$

$$=\frac{(x^{1/p}-x^{1/q})(x^{2/p}+x^{1/p}x^{1/q}+x^{2/q})}{(x^{1/p}+x^{1/q})(x^{1/p}+x^{1/q}-2x^{1/q})}+\frac{x^{1/p}}{x^{1/p-1/q}+1}=$$

$$=\frac{(x^{1/p}-x^{1/q})(x^{2/p}+x^{1/p}x^{1/q}+x^{2/q})}{(x^{1/p}+x^{1/q})(x^{1/p}-x^{1/q})}+\frac{x^{1/p}}{\frac{x^{1/p}}{x^{1/q}}+1}=$$

$$=\frac{x^{2/p}+x^{1/p}x^{1/q}+x^{2/q}}{x^{1/p}+x^{1/q}}+\frac{x^{1/p}x^{1/q}}{x^{1/p}+x^{1/q}}=$$

$$=\frac{x^{2/p}+2x^{1/p}x^{1/q}+x^{2/q}}{x^{1/p}+x^{1/q}}=\frac{(x^{1/p}+x^{1/q})^2}{x^{1/p}+x^{1/q}}=x^{1/p}+x^{1/q}=\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}.$$

Ответ: $\sqrt[p]{x}+\sqrt[q]{x}$.

2.114. $\left(\dfrac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ a\neq -3, \\ a\neq -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

$$\left(\frac{9-4a^{-2}}{3a^{-1/2}+2a^{-3/2}}-\frac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{a^{-1/2}+3a^{-3/2}}\right)^4=\left(\frac{9-\frac{4}{a^2}}{\frac{3}{a^{1/2}}+\frac{2}{a^{3/2}}}-\frac{1+\frac{1}{a}-\frac{6}{a^2}}{\frac{1}{a^{1/2}}+\frac{3}{a^{3/2}}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\frac{9a^2-4}{a^2}}{\frac{3a+2}{a^{3/2}}}-\frac{\frac{a^2+a-6}{a^2}}{\frac{a+3}{a^{3/2}}}\right)^4=\left(\frac{9a^2-4}{a^2}\cdot\frac{a^{3/2}}{3a+2}-\frac{a^2+a-6}{a^2}\cdot\frac{a^{3/2}}{a+3}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{(3a+2)(3a-2)}{a^{1/2}(3a+2)}-\frac{(a+3)(a-2)}{a^{1/2}(a+3)}\right)^4=\left(\frac{3a-2}{a^{1/2}}-\frac{a-2}{a^{1/2}}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{3a-2-a+2}{a^{1/2}}\right)^4=\left(\frac{2a}{a^{1/2}}\right)^4=(2a^{1/2})^4=16a^2.$$

Ответ: $16a^2$.

2.115. $$4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)\cdot a^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a>0, \\ b>0. \end{cases}$

$$4ab+\frac{\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)\cdot a^3}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}}-\frac{\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}=$$

$$=4ab+\frac{\left(1+\frac{b^3}{a^3}\right)a^3}{a+2\sqrt{ab}+b-2\sqrt{ab}}-\frac{\frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{2b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{2}{a+\sqrt{ab}}+\frac{2}{b+\sqrt{ab}}}=4ab+\frac{a^3+b^3}{a+b}-$$

$$-\frac{\frac{2b\sqrt{a}+2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{2b+2\sqrt{ab}+2a+2\sqrt{ab}}{\left(a+\sqrt{ab}\right)\left(b+\sqrt{ab}\right)}}=4ab+\frac{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}{a+b}-\frac{2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{2\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2\right)}=4ab+a^2-ab+b^2-\sqrt{ab}\cdot\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=$$

$$=a^2+3ab+b^2-ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

Ответ: $(a+b)^2$.

2.116. $\left(\left(\sqrt{mn}-\dfrac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\left(\dfrac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} m>1, \\ n>0, \\ m\neq n. \end{cases}$

$$\left(\left(\sqrt{mn}-\frac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\frac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}-\left(\frac{m}{\sqrt{m^4-1}}\right)^{-2}=$$

$$=\left(\sqrt{mn}\left(1-\frac{\sqrt{mn}}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})\sqrt{m}}\right):\frac{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}-m\sqrt{n}\right)^2:\sqrt{mn}-$$

$$-\frac{m^4-1}{m^2}=\left(\sqrt{mn}\left(1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right):\frac{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)}{\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)(\sqrt{m}+\sqrt{n})}-m\sqrt{n}\right)^2\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{mn}}-\frac{m^4-1}{m^2}=\left(\frac{\sqrt{mn}(\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{n})}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}:\frac{\sqrt[4]{n}}{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)(\sqrt{m}+\sqrt{n})}-m\sqrt{n}\right)^2\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{mn}}-\frac{m^4-1}{m^2}=\left(\frac{\sqrt{mn}\cdot\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)(\sqrt{m}+\sqrt{n})}{\sqrt[4]{n}}-m\sqrt{n}\right)^2\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{mn}}-\frac{m^4-1}{m^2}=\left(m\sqrt[4]{n}\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)-m\sqrt{n}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{mn}}-\frac{m^4-1}{m^2}=$$

$$=m^2\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}-\sqrt[4]{n}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{mn}}-\frac{m^4-1}{m^2}=\frac{m^2\sqrt{mn}}{\sqrt{mn}}-\frac{m^4-1}{m^2}=$$

$$=m^2-\frac{m^4-1}{m^2}=\frac{m^4-m^4+1}{m^2}=\frac{1}{m^2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{m^2}$.

2.117. $\left(\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)^{-1}\left(a^{3/2}-b^{3/2}\right)-\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}}\right):\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+$

$+\dfrac{1}{1+\left(a\left(1-a^{2}\right)^{-1/2}\right)^{2}}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} a\neq b, \\ a>0, \\ b>0, \\ -1<a<1. \end{cases}$$

$$\left(\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)^{-1}\left(a^{3/2}-b^{3/2}\right)-\frac{1}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}}\right):\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}+$$

$$+\frac{1}{1+\left(a\left(1-a^{2}\right)^{-1/2}\right)^{2}}=\left(\frac{a^{3/2}-b^{3/2}}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}\right):\sqrt{ab}+\frac{1}{1+\dfrac{a^{2}}{1-a^{2}}}=$$

$$=\left(\frac{\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)\left(a+a^{1/2}b^{1/2}+b\right)}{a^{1/2}-b^{1/2}}-a-2a^{1/2}b^{1/2}-b\right)\cdot\frac{1}{a^{1/2}b^{1/2}}+\frac{1-a^{2}}{1-a^{2}+a^{2}}=$$

$$=\left(a+a^{1/2}b^{1/2}+b-a-2a^{1/2}b^{1/2}-b\right)\cdot\frac{1}{a^{1/2}b^{1/2}}+1-a^{2}=$$

$$=-a^{1/2}b^{1/2}\cdot\frac{1}{a^{1/2}b^{1/2}}+1-a^{2}=-1+1-a^{2}=-a^{2}.$$

Ответ: $-a^{2}$.

2.118. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}.$

Решение.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}+\frac{3\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}+\frac{15\left(3+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=$$

$$=\left(\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}+\frac{3\left(\sqrt{3}+2\right)}{-1}+\frac{15\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}-10+15+5\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\frac{\sqrt{3}+5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+5}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2.119. $\dfrac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}=\frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{27\cdot 2}+15\sqrt[3]{64\cdot 2}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{16\cdot 2}}+\sqrt[3]{9\sqrt[4]{81\cdot 2}}}=\frac{\sqrt[4]{7\cdot 3\sqrt[3]{2}+15\cdot 4\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{4\cdot 2\sqrt[4]{2}}+\sqrt[3]{9\cdot 3\sqrt[4]{2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{21\sqrt[3]{2}+60\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{8\sqrt[4]{2}}+\sqrt[3]{27\sqrt[4]{2}}}=\frac{\sqrt[4]{81\sqrt[3]{2}}}{2\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}+3\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}}=\frac{3\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}}{2\sqrt[12]{2}+3\sqrt[12]{2}}=\frac{3\sqrt[12]{2}}{5\sqrt[12]{2}}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{5}$.

2.120. $\dfrac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}$.

Решение.

$$\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}=\frac{5\sqrt[3]{4\sqrt[3]{64\cdot 3}}+7\sqrt[3]{18\sqrt[3]{27\cdot 3}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{8\cdot 3}+6\sqrt[3]{125\cdot 3}}}=$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{4\cdot 4\sqrt[3]{3}}+7\sqrt[3]{18\cdot 3\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{12\cdot 2\sqrt[3]{3}+6\cdot 5\sqrt[3]{3}}}=\frac{5\sqrt[3]{16\sqrt[3]{3}}+7\sqrt[3]{54\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{24\sqrt[3]{3}+30\sqrt[3]{3}}}=$$

$$=\frac{5\sqrt[3]{8\cdot 2\sqrt[3]{3}}+7\sqrt[3]{27\cdot 2\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{54\sqrt[3]{3}}}=\frac{5\cdot 2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}+7\cdot 3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[3]{27\cdot 2\sqrt[3]{3}}}=$$

$$=\frac{10\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}+21\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}=\frac{31\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}{3\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}}=\frac{31}{3}.$$

Ответ: $\frac{31}{3}$.

2.121. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

$$\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{2^5\cdot 2^{2/3}}+\sqrt[4]{2^6\cdot 2^{-1/3}}-3\sqrt[3]{2\cdot 2^{1/4}}=$$

$$=2^{17/12}+2^{17/12}-3\cdot 2^{5/12}=2\cdot 2^{17/12}-3\cdot 2^{5/12}=2^{5/12}(4-3)=2^{5/12}=$$

$$=\sqrt[12]{2^5}=\sqrt[12]{32}.$$

Ответ: $\sqrt[12]{32}$.

2.122. $5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$.

Решение.

$$5\sqrt{48\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{32\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}=5\sqrt{16\cdot 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+\sqrt{16\cdot 2\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-$$

$$-11\sqrt[3]{12\cdot 2\sqrt{2}}=5\cdot 4\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}+4\sqrt{2\sqrt[3]{\frac{9}{4}}}-11\sqrt[3]{8\cdot 3\sqrt{2}}=$$

$$=20\sqrt{\sqrt[3]{\frac{27\cdot 2}{3}}}+4\sqrt{\sqrt[3]{\frac{8\cdot 9}{4}}}-11\cdot 2\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=20\sqrt{\sqrt[3]{18}}+4\sqrt{\sqrt[3]{18}}-$$

$$-22\sqrt[3]{\sqrt{9\cdot 2}}=24\sqrt{\sqrt[3]{18}}-22\sqrt{\sqrt[3]{18}}=24\sqrt[6]{18}-22\sqrt[6]{18}=2\sqrt[6]{18}.$$

Ответ: $2\sqrt[6]{18}$.

2.123. $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$.

Решение.

$$2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}=$$
$$=2\sqrt{40\sqrt{4\cdot3}}+3\sqrt{5\sqrt{16\cdot3}}-2\sqrt[4]{25\cdot3}-4\sqrt{15\sqrt{9\cdot3}}=$$
$$=2\sqrt{40\cdot2\sqrt{3}}+3\sqrt{5\cdot4\sqrt{3}}-2\sqrt{\sqrt{25\cdot3}}-4\sqrt{15\cdot3\sqrt{3}}=$$
$$=2\sqrt{80\sqrt{3}}+3\cdot2\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-4\sqrt{45\sqrt{3}}=$$
$$=2\sqrt{16\cdot5\sqrt{3}}+6\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-4\sqrt{9\cdot5\sqrt{3}}=$$
$$=2\cdot4\sqrt{5\sqrt{3}}+6\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-4\cdot3\sqrt{5\sqrt{3}}=$$
$$=8\sqrt{5\sqrt{3}}+6\sqrt{5\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-12\sqrt{5\sqrt{3}}=14\sqrt{5\sqrt{3}}-14\sqrt{5\sqrt{3}}=0.$$

Ответ: 0.

2.124. $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$.

Решение.

$$5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}=$$
$$=5\sqrt[3]{6\sqrt{16\cdot2}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{81\cdot2}}-11\sqrt[6]{9\cdot2}+2\sqrt[3]{75\sqrt{25\cdot2}}=$$
$$=5\sqrt[3]{6\cdot4\sqrt{2}}-3\sqrt[3]{9\cdot9\sqrt{2}}-11\sqrt[3]{\sqrt{9\cdot2}}+2\sqrt[3]{75\cdot5\sqrt{2}}=$$
$$=5\sqrt[3]{24\sqrt{2}}-3\sqrt[3]{81\sqrt{2}}-11\sqrt[3]{3\sqrt{2}}+2\sqrt[3]{375\sqrt{2}}=$$
$$=5\sqrt[3]{8\cdot3\sqrt{2}}-3\sqrt[3]{27\cdot3\sqrt{2}}-11\sqrt[3]{3\sqrt{2}}+2\sqrt[3]{125\cdot3\sqrt{2}}=$$
$$=5\cdot2\sqrt[3]{3\sqrt{2}}-3\cdot3\sqrt[3]{3\sqrt{2}}-11\sqrt[3]{3\sqrt{2}}+2\cdot5\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=$$
$$=10\sqrt[3]{3\sqrt{2}}-20\sqrt[3]{3\sqrt{2}}+10\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=0.$$

Ответ: 0.

Проверить справедливость равенств (**2.125—2.134**):

2.125. $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=10\sqrt[4]{1{,}5}:\left(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)$.

Решение.

Преобразуем отдельно левую и правую части равенства:

а) $4:\left(0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)=4:\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{3^{2/3}}{3}\right)=4:\frac{3^{2/3}}{5}=20\cdot3^{-2/3}$;

б) $10\sqrt[4]{1{,}5}:\left(0{,}25\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}\right)=10\sqrt[4]{\frac{3}{2}}:\left(\frac{1}{4}\cdot\sqrt[4]{2^3\cdot3^3\cdot3^{2/3}}\right)=$

$$=\frac{10\cdot3^{1/4}\cdot2^{3/4}}{2}:\frac{2^{3/4}\cdot3^{11/12}}{2^2}=\frac{5\cdot3^{1/4}\cdot2^{3/4}\cdot2^2}{2^{3/4}\cdot3^{11/12}}=20\cdot3^{-2/3}.$$

Получили, что $20\cdot3^{-2/3}=20\cdot3^{-2/3}$.

2.126. $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

Решение.

Возведем обе части равенства в квадрат. Тогда

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^2\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2\left(4-\sqrt{15}\right)=4,$$

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)\left(10-2\sqrt{60}+6\right)=4,$$

$$\left(4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2\right)\left(4+\sqrt{15}\right)\left(16-2\sqrt{60}\right)=4,$$

$$\left(16-15\right)\left(4+\sqrt{15}\right)\cdot2\cdot\left(8-\sqrt{60}\right)=4,\quad \left(4+\sqrt{15}\right)\left(8-\sqrt{4\cdot15}\right)=2,$$

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(8-2\sqrt{15}\right)=2,\quad \left(4+\sqrt{15}\right)\cdot2\cdot\left(4-\sqrt{15}\right)=2,$$

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)=1,\quad 4^2-\left(\sqrt{15}\right)^2=1,\quad 16-15=1,\quad 1=1.$$

2.127. $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=8$.

Решение.

Возведем обе части равенства в квадрат. Тогда

$$\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2\left(3+\sqrt{5}\right)^2\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)^2=64,$$

$$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2\cdot 2(\sqrt{5}-1)^2=64,$$

$$(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(5-2\sqrt{5}+1)=32,$$

$$\left(3^2-(\sqrt{5})^2\right)(3+\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})=32,$$

$$(9-5)(3+\sqrt{5})\cdot 2\cdot(3-\sqrt{5})=32,\quad 8(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=32,$$

$$8\left(3^2-(\sqrt{5})^2\right)=32,\quad 8(9-5)=32,\quad 8\cdot 4=32,\quad 32=32.$$

2.128. $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}.$

Решение.
Преобразуем левую часть равенства:

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{(3+2\sqrt{18}+6)(9-6\sqrt{2})}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\frac{\sqrt[6]{(9+6\sqrt{2})(9-6\sqrt{2})}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{9^2-(6\sqrt{2})^2}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\frac{\sqrt[6]{81-72}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}=\frac{\sqrt[6]{3^2}-\sqrt[6]{3^2\cdot 2}}{\sqrt[6]{2}-1}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{3^2}\left(1-\sqrt[6]{2}\right)}{\sqrt[6]{2}-1}=-\sqrt[3]{3}.$$

Итак, $-\sqrt[3]{3}=-\sqrt[3]{3}$.

2.129. $\dfrac{25\cdot\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{5}+\dfrac{5}{\sqrt{2}}+2}=-1.$

Решение.
Положим

$$X=\frac{25\cdot\sqrt[4]{2}+2\sqrt{5}}{\sqrt{250}+5\sqrt[4]{8}}=\frac{\sqrt[4]{5^8\cdot 2}+\sqrt[4]{5^2\cdot 2^4}}{\sqrt[4]{5^6\cdot 2^2}+\sqrt[4]{5^4\cdot 2^3}}=\frac{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}\left(\sqrt[4]{5^6}+\sqrt[4]{2^3}\right)}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}\cdot\sqrt[4]{5^2\cdot 2}\left(\sqrt[4]{5^2}+\sqrt[4]{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{5^2}\right)^3+\left(\sqrt[4]{2}\right)^3}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}\left(\sqrt[4]{5^2}+\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt[4]{5^2}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\left(\sqrt[4]{5^2}\right)^2-\sqrt[4]{5^2\cdot 2}+\left(\sqrt[4]{2}\right)^2\right)}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}\left(\sqrt[4]{5^2}+\sqrt[4]{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{5^4}-\sqrt[4]{5^2\cdot 2}+\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}};$$

$$Y=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{5}{\sqrt{2}}+2}=\sqrt{\frac{2+2\cdot 5\sqrt{2}+25}{5\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(5+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{5^2\cdot 2}}}=\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}}.$$

Отсюда

$$X-Y=\frac{5-\sqrt[4]{5^2\cdot 2}+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}}-\frac{5+\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}}=\frac{5-\sqrt[4]{5^2\cdot 2}+\sqrt{2}-5-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}}=$$

$$=\frac{-\sqrt[4]{5^2\cdot 2}}{\sqrt[4]{5^2\cdot 2}}=-1.$$

Получили $-1=-1$.

2.130. $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}}=\sqrt{2}.$$

Решение.

Возведем обе части равенства в квадрат. Тогда

$$\frac{\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{27}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)\left(\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)}+\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{3}-1}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=2,$$

$$\frac{2\sqrt[4]{27}-2\sqrt{\left(\sqrt[4]{27}\right)^2-\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}\right)^2}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=2,\quad \frac{\sqrt[4]{27}-\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{3}+1}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=1,$$

$$\frac{\sqrt[4]{27}-\sqrt{3\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=1, \quad \frac{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}{\sqrt[4]{27}-\sqrt{2\sqrt{3}+1}}=1, \quad 1=1.$$

2.131. $\left(\frac{4}{3-\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{6-5\sqrt{6}}{5-\sqrt{6}}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}.$

Решение.

$$\frac{16}{9-6\sqrt{5}+5}-\left(-\frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}-5)}{\sqrt{6}-5}\right)^2=2\sqrt{61+24\sqrt{5}},$$

$$\frac{16}{14-6\sqrt{5}}-6=2\sqrt{61+24\sqrt{5}}, \quad \frac{8}{7-3\sqrt{5}}-6=2\sqrt{61+24\sqrt{5}},$$

$$\frac{4}{7-3\sqrt{5}}-3=\sqrt{61+24\sqrt{5}}, \quad \frac{4-21+9\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{61+24\sqrt{5}},$$

$$\frac{9\sqrt{5}-17}{7-3\sqrt{5}}=\sqrt{61+24\sqrt{5}}, \quad \frac{(9\sqrt{5}-17)(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}=\sqrt{61+24\sqrt{5}},$$

$$\frac{12\sqrt{5}+16}{7^2-(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{61+24\sqrt{5}}, \quad \frac{12\sqrt{5}+16}{4}=\sqrt{61+24\sqrt{5}},$$

$$3\sqrt{5}+4=\sqrt{61+24\sqrt{5}}.$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат. Тогда

$$(3\sqrt{5}+4)^2=61+24\sqrt{5}, \quad 45+24\sqrt{5}+16=61+24\sqrt{5},$$

$$61+24\sqrt{5}=61+24\sqrt{5}.$$

2.132. $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$

Решение.

Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное ее знаменателю, имеем

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7}-\sqrt{6})(\sqrt{7}+\sqrt{6})}=\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}+\frac{4(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})},$$

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{7-6}=\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{6-3}+\frac{4\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}{7-3},\quad \sqrt{7}+\sqrt{6}=\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{3},$$
$$\sqrt{6}=\sqrt{6}.$$

2.133. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}.$

Решение.

Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное ее знаменателю, имеем

$$\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}+\frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)},$$
$$\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}+\frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{7-2}=\frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5},\quad \sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{7}-\sqrt{2}=\sqrt{7}+\sqrt{5},$$
$$\sqrt{7}+\sqrt{5}=\sqrt{7}+\sqrt{5}.$$

2.134. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$

Решение.

Умножая числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное ее знаменателю, имеем

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\sqrt[3]{\frac{\left(10-7\sqrt{2}\right)\left(10-7\sqrt{2}\right)}{\left(10+7\sqrt{2}\right)\left(10-7\sqrt{2}\right)}},\quad \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2-1}=\sqrt[3]{\frac{\left(10-7\sqrt{2}\right)^2}{100-98}},$$
$$2-2\sqrt{2}+1=\sqrt[3]{\frac{100-140\sqrt{2}+98}{2}},\quad 3-2\sqrt{2}=\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}.$$

Возведем обе части последнего равенства в куб. Имеем

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^3=99-70\sqrt{2},\quad 27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2}=99-70\sqrt{2},$$
$$99-70\sqrt{2}=99-70\sqrt{2}.$$

Сделать указанную подстановку и результат упростить **(2.135—2.145):**

2.135. $\frac{x^3 - a^{-2/3} \cdot b^{-1}\left(a^2 + b^2\right)x + b^{1/2}}{b^{3/2} \cdot x^2}$; $\quad x = a^{2/3} b^{-1/2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ b \neq 0. \end{cases}$

$$\frac{\left(a^{2/3} b^{-1/2}\right)^3 - a^{2/3} \cdot b^{-1}\left(a^2 + b^2\right)a^{2/3} b^{-1/2} + b^{1/2}}{b^{3/2} \cdot \left(a^{2/3} b^{-1/2}\right)^2} =$$

$$= \frac{a^2 b^{-3/2} - a^0 b^{-3/2}\left(a^2 + b^2\right) + b^{1/2}}{b^{3/2} a^{4/3} b^{-1}} =$$

$$= \frac{\frac{a^2}{b^{3/2}} - \frac{a^2 + b^2}{b^{3/2}} + b^{1/2}}{b^{1/2} a^{4/3}} = \frac{\frac{a^2 - a^2 - b^2 + b^2}{b^{3/2}}}{b^{1/2} a^{4/3}} = 0.$$

Ответ: 0.

2.136. $\frac{1-b}{\sqrt{b}} \cdot x^2 - 2x + \sqrt{b}$; $\quad x = \frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < b \neq 1$.

$$\frac{1-b}{\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} + \sqrt{b} = \frac{\left(1-\sqrt{b}\right)\left(1+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}} \cdot \frac{b}{\left(1-\sqrt{b}\right)^2} - \frac{2\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} +$$

$$+ \sqrt{b} = \frac{\left(1+\sqrt{b}\right)\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} + \sqrt{b} = \frac{\sqrt{b} + b}{1-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} + \sqrt{b} =$$

$$= \frac{\sqrt{b} + b - 2\sqrt{b} + \sqrt{b} - b}{1-\sqrt{b}} = 0.$$

Ответ: 0.

2.137. $\left(\frac{x+2b}{x-2b} + \frac{x+2a}{x-2a}\right) : \frac{x}{2}$; $\quad x = \frac{4ab}{a+b}$.

Решение.

ОДЗ: $a \neq -b \neq 0$.

$$\left(\frac{\frac{4ab}{a+b}+2b}{\frac{4ab}{a+b}-2b}+\frac{\frac{4ab}{a+b}+2a}{\frac{4ab}{a+b}-2a}\right):\frac{4ab}{2(a+b)}=$$

$$=\left(\frac{4ab+2ab+b^2}{a+b}:\frac{4ab-2ab-2b^2}{a+b}+\frac{4ab+2a^2+2ab}{a+b}:\frac{4ab-2a^2-2ab}{a+b}\right)\times$$

$$\times\frac{a+b}{2ab}=\left(\frac{2b(3a+b)}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2b(a-b)}+\frac{2b(3b+a)}{a+b}\cdot\frac{a+b}{2b(b-a)}\right)\cdot\frac{a+b}{2ab}=$$

$$=\left(\frac{3a+b}{a-b}+\frac{3b+a}{b-a}\right)\cdot\frac{a+b}{2ab}=\left(\frac{3a+b}{a-b}-\frac{3b+a}{a-b}\right)\cdot\frac{a+b}{2ab}=$$

$$=\frac{3a+b-3b-a}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2ab}=\frac{2a-2b}{a-b}\cdot\frac{a+b}{2ab}=\frac{2(a-b)(a+b)}{2(a-b)ab}=\frac{a+b}{ab}.$$

Ответ: $\frac{a+b}{ab}$.

2.138. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4);\quad x=\frac{\sqrt{7}-5}{2}$.

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+3\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+4\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+4\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}+3\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)^2+5\cdot\frac{\sqrt{7}-5}{2}+4\right)\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)^2+5\cdot\frac{\sqrt{7}-5}{2}+6\right)=$$

$$=\left(\left(\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)^2+5\cdot\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)+4\right)\cdot\left(\left(\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)^2+5\cdot\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)+6\right)=$$

$$=\left(\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)^2+\frac{5(\sqrt{7}-5)}{2}\right)^2+10\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{7}-5}{2}\right)^2+\frac{5(\sqrt{7}-5)}{2}\right)+24=$$

$$=\left(\frac{32-10\sqrt{7}}{4}+\frac{5\sqrt{7}-25}{2}\right)^2+10\cdot\left(\frac{32-10\sqrt{7}}{4}+\frac{5\sqrt{7}-25}{2}\right)+24=$$

$$=\left(\frac{16-5\sqrt{7}}{2}+\frac{5\sqrt{7}-25}{2}\right)^2+10\cdot\left(\frac{16-5\sqrt{7}}{2}+\frac{5\sqrt{7}-25}{2}\right)+24=$$

$$=\left(\frac{-9}{2}\right)^2+10\cdot\left(\frac{-9}{2}\right)+24=-\frac{3}{4}.$$

Ответ: $-\frac{3}{4}$.

2.139. $\frac{(z-1)(z+2)(z-3)(z+4)}{23}$; $\quad z=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Решение.

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+4\right)}{23}=$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2\right)\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-12\right)}{23}=$$

$$=\frac{\left(\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)-2\right)\cdot\left(\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)-12\right)}{23}=$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2-14\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+24}{23}=$$

$$=\frac{\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2-14\cdot\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+24}{23}=$$

$$=\frac{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2-14\cdot\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+24}{23}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-14\cdot\frac{1}{2}+24}{23}=\frac{\frac{1}{4}-7+24}{23}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

2.140. $\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}$; $\quad x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$.

Решение.

$$\frac{\frac{\sqrt{5}-3}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+2\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+3\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+4\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{5}-3}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+3\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+2\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}+4\right)}=$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2+3\cdot\frac{\sqrt{5}-3}{2}+2\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}-1\right)^2+3\cdot\frac{\sqrt{5}-3}{2}-4}=$$

$$=\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2+\frac{3(\sqrt{5}-3)}{2}\right)^2+2\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^2+\frac{3(\sqrt{5}-3)}{2}\right)}{\frac{14-6\sqrt{5}}{4}+\frac{3\sqrt{5}-9}{2}-4}=$$

$$=\frac{\left(\frac{14-6\sqrt{5}}{4}+\frac{3\sqrt{5}-9}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{14-6\sqrt{5}}{4}+\frac{3\sqrt{5}-9}{2}\right)}{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}-9}{2}-4}=$$

$$=\frac{\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}-9}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}+\frac{3\sqrt{5}-9}{2}\right)}{\frac{7-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-9}{2}-4}=$$

$$=\frac{\left(\frac{7-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-9}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{7-3\sqrt{5}+3\sqrt{5}-9}{2}\right)}{-1-4}=\frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

2.141. $\frac{(1-y)(y+2)}{y^2(y+1)^2}$; $\quad y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Решение.

$$\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1\right)^2}=\frac{-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}+1\right)\right)^2}=$$

$$=-\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=-\frac{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2}{\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}-2}{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=-\frac{\frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2}-2}{\left(\frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=6.$$

Ответ: 6.

2.142. $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}}}$; $\quad x=\sqrt{6}$.

Решение.

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}+\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}}}{\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}-\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}-2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}-2\right)}+\sqrt{\left(3+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}}{\sqrt{\left(3-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}-2\right)}-\sqrt{\left(3+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}+2\right)}}=\frac{\sqrt{5\sqrt{6}-12}+\sqrt{5\sqrt{6}+12}}{\sqrt{5\sqrt{6}-12}-\sqrt{5\sqrt{6}+12}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5\sqrt{6}-12}+\sqrt{5\sqrt{6}+12}\right)\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{6}-12}+\sqrt{5\sqrt{6}+12}\right)}{\left(\sqrt{5\sqrt{6}-12}-\sqrt{5\sqrt{6}+12}\right)\cdot\left(\sqrt{5\sqrt{6}-12}+\sqrt{5\sqrt{6}+12}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5\sqrt{6}-12}+\sqrt{5\sqrt{6}+12}\right)^2}{\left(\sqrt{5\sqrt{6}-12}\right)^2-\left(\sqrt{5\sqrt{6}+12}\right)^2}=$$

$$=\frac{5\sqrt{6}-12+2\sqrt{\left(5\sqrt{6}-12\right)\left(5\sqrt{6}+12\right)}+5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12-5\sqrt{6}-12}=$$

$$=\frac{10\sqrt{6}+2\sqrt{\left(5\sqrt{6}\right)^2-12^2}}{-24}=\frac{5\sqrt{6}+\sqrt{150-144}}{-12}=\frac{5\sqrt{6}+\sqrt{6}}{-12}=-\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

2.143. $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\quad x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$; $\quad a>b>0.$

Решение.

$$\frac{2b\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2-1}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2-1}}=$$

$$=\frac{2b\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2-1}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2-1}}=\frac{2b\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}-1}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}-1}}=$$

$$=\frac{2b\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4ab}}}=\frac{2b\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}}}=$$

$$=\frac{2b\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4ab}}}=\frac{2b\cdot\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}-\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}}=\frac{b(a-b)}{\sqrt{ab}}:\left(\frac{a+b-a+b}{2\sqrt{ab}}\right)=$$

$$=\frac{b(a-b)}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{2b}=a-b.$$

Ответ: $a-b$.

2.144. $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$; $\quad x=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, $\quad a>0, b>0.$

Решение.

$$\frac{2a\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)^2}}=\frac{2a\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{\sqrt{ab}}+\sqrt{1+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2}}=$$

$$=\frac{2a\sqrt{1+\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\sqrt{1+\frac{a^2-2ab+b^2}{4ab}}}=\frac{2a\sqrt{\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{4ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{4ab+a^2-2ab+b^2}{4ab}}}=$$

$$=\frac{2a\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4ab}}}=\frac{2a\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}}=\frac{\frac{2a(a+b)}{2\sqrt{ab}}}{\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}+\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}}=$$

$$=\frac{a(a+b)}{\sqrt{ab}}:\left(\frac{a-b+a+b}{2\sqrt{ab}}\right)=\frac{a(a+b)}{\sqrt{ab}}:\frac{2a}{2\sqrt{ab}}=\frac{a(a+b)}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a}=a+b.$$

Ответ: $a+b$.

2.145. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\cdot\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}$; $\quad x=\dfrac{1}{a}\cdot\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}$; $\quad 0<\dfrac{b}{2}<a<b.$

Решение.

$$\frac{1-a\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+a\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}\cdot\sqrt{\frac{1+b\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1-b\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}}=\frac{1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{1+\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{b^2(2a-b)}{b}}}{1-\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{b^2(2a-b)}{b}}}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}}}{1+\frac{\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}}}\cdot\sqrt{\frac{\frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{a}}{\frac{a-\sqrt{b(2a-b)}}{a}}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{a-\sqrt{b(2a-b)}}}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}\right)}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{b(2a-b)}\right)\left(a+\sqrt{b(2a-b)}\right)}{\left(a-\sqrt{b(2a-b)}\right)\left(a+\sqrt{b(2a-b)}\right)}}=\frac{b-2\sqrt{b(2a-b)}+2a-b}{b-2a+b}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{b(2a-b)}\right)^2}{a^2-b(2a-b)}}=\frac{2a-2\sqrt{b(2a-b)}}{2b-2a}\cdot\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{b(2a-b)}\right)^2}{a^2-2ab+b^2}}=$$

$$=\frac{a-\sqrt{b(2a-b)}}{b-a}\cdot\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{a-b}\right)^2}=\frac{a-\sqrt{b(2a-b)}}{b-a}\cdot\frac{a+\sqrt{b(2a-b)}}{b-a}=$$

$$=\frac{a^2-b(2a-b)}{(b-a)^2}=\frac{a^2-2ab+b^2}{(b-a)^2}=\frac{(b-a)^2}{(b-a)^2}=1.$$

Ответ: 1.

Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби **(2.146—2.151):**

2.146. $\frac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$.

Решение.

$$\frac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}=\frac{14}{\sqrt[8]{9}+\sqrt[8]{2}}=$$

$$=\frac{14\left(\sqrt[8]{9^7}-\sqrt[8]{9^6\cdot 2}+\sqrt[8]{9^5\cdot 2^2}-\sqrt[8]{9^4\cdot 2^3}+\sqrt[8]{9^3\cdot 2^4}-\sqrt[8]{9^2\cdot 2^5}+\sqrt[8]{9\cdot 2^6}-\sqrt[8]{2^7}\right)}{\left(\sqrt[8]{9}+\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[8]{9^7}-\sqrt[8]{9^6\cdot 2}+\sqrt[8]{9^5\cdot 2^2}-\sqrt[8]{9^4\cdot 2^3}+\sqrt[8]{9^3\cdot 2^4}-\sqrt[8]{9^2\cdot 2^5}+\sqrt[8]{9\cdot 2^6}-\sqrt[8]{2^7}\right)}=$$

$$=\frac{14\left(\sqrt[8]{9^3}-\sqrt[8]{9^2\cdot 2}+\sqrt[8]{9\cdot 2^2}-\sqrt[8]{2^3}\right)\left(\sqrt[8]{9^4}+\sqrt[8]{2^4}\right)}{9-2}=$$

$$=\frac{14\left(\sqrt[8]{9}+\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[8]{9^2}+\sqrt[8]{2^2}\right)\left(\sqrt[8]{9^4}+\sqrt[8]{2^4}\right)}{7}=$$

$$=2\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $2\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right).$

2.147. $\dfrac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

Решение.

$$\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}=\frac{4\left(\sqrt[4]{13^3}+\sqrt[4]{13^2\cdot 9}+\sqrt[4]{13\cdot 9^2}+\sqrt[4]{9^3}\right)}{\left(\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt[4]{13^2\cdot 9}+\sqrt[4]{13\cdot 9^2}+\sqrt[4]{9^3}\right)}=$$

$$=\frac{4\left(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt[4]{13^2}+\sqrt[4]{9^2}\right)}{13-9}=\left(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt{13}+3\right)$$

Ответ: $\left(\sqrt[4]{13}+\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt{13}+3\right)$

2.148. $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Решение.

$$\frac{\left(3+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(3+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)}{\left(3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(3+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)}=\frac{\left(3+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)^2}{3^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{9+6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{9-\left(2+2\sqrt{6}+3\right)}=\frac{9+6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+2+2\sqrt{6}+3}{9-5-2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{14+6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+2\sqrt{6}}{4-2\sqrt{6}}=\frac{7+3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{\left(7+3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)}{\left(2-\sqrt{6}\right)\left(2+\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\frac{14+6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+2\sqrt{6}+7\sqrt{6}+3\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}\right)+6}{4-6}=$$

$$=\frac{14+6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+9\sqrt{6}+6\sqrt{3}+9\sqrt{2}+6}{-2}=\frac{20+12\sqrt{3}+15\sqrt{2}+9\sqrt{6}}{-2}=$$

$$=-\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(5+3\sqrt{3}\right)}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)\left(5+3\sqrt{3}\right)}{2}$.

2.149. $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

Решение.

$$\frac{6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=\frac{6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{2+3-5+2\sqrt{2\cdot 3}}=\frac{6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{6}}=\frac{3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}\right)}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{30}}{2}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}$.

2.150. $\frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Решение.

Представим заданную дробь в виде $\frac{\sqrt{4}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. Умножим эту дробь на $\left(\sqrt{4}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4+2-3-2\sqrt{4\cdot 2}\right)$ и, применив равенство $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(a+b-c-2\sqrt{ab}\right)=\left(a+b+c\right)^2-4ab,$ где $a\geq 0, b\geq 0$ и $c\geq 0$, получим

$$\frac{\left(\sqrt{4}-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4+2-3-2\sqrt{4\cdot 2}\right)}{\left(\sqrt{4}+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4}+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(4+2-3-2\sqrt{4\cdot 2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\left(\sqrt{4}\right)^2-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\right)\left(3-4\sqrt{2}\right)}{(4+2-3)^2-4\cdot4\cdot2}=\frac{\left(4-\left(2+2\sqrt{6}+3\right)\right)\left(3-4\sqrt{2}\right)}{9-32}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{6}+1\right)\left(3-4\sqrt{2}\right)}{23}.$$

Ответ: $\dfrac{\left(2\sqrt{6}+1\right)\left(3-4\sqrt{2}\right)}{23}$.

2.151. $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}$.

Решение.

ОДЗ: $0<a\neq1$.

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{a}}=$$

$$=\frac{(a-1)\left(\sqrt[6]{a^{15}}+\sqrt[6]{a^{12}\cdot a^2}+\sqrt[6]{a^9\cdot a^4}+\sqrt[6]{a^6\cdot a^6}+\sqrt[6]{a^3\cdot a^8}+\sqrt[6]{a^{10}}\right)}{\left(\sqrt[6]{a^3}-\sqrt[6]{a^2}\right)\left(\sqrt[6]{a^{15}}+\sqrt[6]{a^{12}\cdot a^2}+\sqrt[6]{a^9\cdot a^4}+\sqrt[6]{a^6\cdot a^6}+\sqrt[6]{a^3\cdot a^8}+\sqrt[6]{a^{10}}\right)}=$$

$$=\frac{(a-1)\left(\sqrt[6]{a^{15}}+\sqrt[6]{a^{14}}+\sqrt[6]{a^{13}}+\sqrt[6]{a^{12}}+\sqrt[6]{a^{11}}+\sqrt[6]{a^{10}}\right)}{a^3-a^2}=$$

$$=\frac{(a-1)a\left(\sqrt[6]{a^9}+\sqrt[6]{a^8}+\sqrt[6]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[6]{a^4}\right)}{a^2(a-1)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[6]{a^9}+\sqrt[6]{a^8}\right)+\left(\sqrt[6]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}\right)+\left(\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[6]{a^4}\right)}{a}=$$

$$=\frac{\sqrt[6]{a^8}\left(\sqrt[6]{a}+1\right)+\sqrt[6]{a^6}\left(\sqrt[6]{a}+1\right)+\sqrt[6]{a^4}\left(\sqrt[6]{a}+1\right)}{a}=\frac{\left(\sqrt[6]{a}+1\right)\left(\sqrt[6]{a^8}+\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{a^4}\right)}{a}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[6]{a}+1\right)\sqrt[6]{a^2}\left(\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{a^4}+\sqrt[6]{a^2}\right)}{a}=\frac{\left(\sqrt[6]{a^3}+\sqrt[6]{a^2}\right)\left(\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[6]{a^4}+\sqrt[6]{a^2}\right)}{a}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\right)}{a}.$$

Ответ: $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)\left(a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}\right)}{a}$.

2.152. Показать, что если $z=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}$, то $z^3+3bz-2a=0$.

Решение.

$$z^3=\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^3}-a}\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}\right)^3=$$

$$=\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}\right)^3+3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)^2\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)^2}+\left(\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}\right)^3=$$

$$=a+\sqrt{a^2+b^3}+3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)}+a-\sqrt{a^2+b^3}=$$

$$=2a+3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a^2-\left(\sqrt{a^2+b^3}\right)^2\right)}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(a^2-\left(\sqrt{a^2+b^3}\right)^2\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)}=$$

$$=2a+3\sqrt[3]{\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)\left(a^2-a^2-b^3\right)}+3\sqrt[3]{\left(a^2-a^2-b^3\right)\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)}=$$

$$=2a+3\sqrt[3]{-b^3\left(a+\sqrt{a^2+b^3}\right)}+3\sqrt[3]{-b^3\left(a-\sqrt{a^2+b^3}\right)}=$$

$$=2a-3b\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}-3b\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}=$$

$$=2a-3b\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}\right)=2a-3bz.$$

Тогда $z^3+3bz-2a=2a-3bz+3bz-2a=0$, что и требовалось доказать.

2.153. Если $\sqrt{8-a}+\sqrt{5+a}=5$, то чему равен $\sqrt{(8-a)(5+a)}$?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 8-a\geq 0, \\ 5+a\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5\leq a\leq 8.$

Возведя обе части равенства в квадрат, имеем

$8-a+2\sqrt{(8-a)(5+a)}+5+a=25$, или $\sqrt{(8-a)(5+a)}=6$.

Ответ: 6.

2.154. Чему равна сумма $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, если известно, что разность $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}=2$ (величину x находить не нужно)?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 25-x^2\geq 0, \\ 15-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{15}\leq x\leq \sqrt{15}.$

Умножив обе части равенства на $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}$, имеем

$$\left(\sqrt{25-x^2}-\sqrt{15-x^2}\right)\left(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25-x^2-15+x^2=2\left(\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}\right),$$

откуда $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{15-x^2}=5.$

Ответ: 5.

2.155. Преобразовать $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ так, чтобы получилось $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

Решение.

Раскрывая скобки, получим $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$. Прибавим и вычтем выражение $2abcd$. Тогда

$$a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

2.156. Вычислить сумму кубов двух чисел, если их сумма и произведение соответственно равны 11 и 21.

Решение.

Пусть $a+b=11$ и $ab=21$. Тогда

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left((a+b)^2-3ab\right)=11\left(11^2-3\cdot 21\right)=$$
$$=11(121-63)=638.$$

Ответ: 638.

2.157. Вычислить значение выражения:

а) $\dfrac{z^3}{3}-z, \quad z=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}};$

б) $x^3+3x, \quad x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}.$

Решение.

$$\text{а) } \frac{z^3}{3}-z=\frac{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^3}{3}-\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}-$$
$$-\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}}{3}-$$
$$-\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)=$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{(3-2)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}+3\sqrt[3]{(3-2)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}-3\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-3\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{3}=$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+3\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-3\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-3\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{б) } x^3+3x=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)=$$
$$=\sqrt{5}+2-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2\left(\sqrt{5}-2\right)}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)^2}-\sqrt{5}+2+$$

$$+3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=4-3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+$$

$$+3\sqrt[3]{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=$$

$$=4-3\sqrt[3]{(5-4)(\sqrt{5}+2)}+3\sqrt[3]{(5-4)(\sqrt{5}-2)}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=$$

$$=4-3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=4.$$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) 4.

Решения к главе 3

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{3.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z; \tag{3.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z \tag{3.6}$$

(здесь и в дальнейшем запись $n \in Z$ означает, что n — любое целое число).

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Аргумент (α, градусы, радианы)	**Функция**			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$0°\ (0)$	0	1	0	∞ (не определен)
$15°\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18°\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36°\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54°\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75°\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Знаки функций по четвертям

Таблица 3.2

Четверти	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ ; \tag{3.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ ; \tag{3.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ ; \tag{3.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ ; \tag{3.10}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\ ; \tag{3.11}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\ ; \tag{3.12}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\ ; \tag{3.13}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\ . \tag{3.14}$$

Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ; \tag{3.15}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\ ; \tag{3.16}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z\ ; \tag{3.17}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi k}{2}, k\in Z, \alpha\neq\pi n, n\in Z\ ; \tag{3.18}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\ ; \tag{3.19}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\ ; \tag{3.20}$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1), n\in Z\ ; \tag{3.21}$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{3}, n\in Z\ . \tag{3.22}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\ ; \tag{3.23}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\ ; \tag{3.24}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi(2n+1), n\in Z\ ; \tag{3.25}$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq 2\pi n, n\in Z\ ; \tag{3.26}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z\ ; \tag{3.27}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq\pi n, n\in Z\ ; \tag{3.28}$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.29)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.30)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad (3.31)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}; \qquad (3.32)$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha); \qquad (3.33)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha); \qquad (3.34)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z; \qquad (3.35)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1), n\in Z; \qquad (3.36)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (3.37)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z; \qquad (3.38)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z; \qquad (3.39)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \beta\neq\pi n, n\in Z; \qquad (3.40)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z; \qquad (3.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z; \qquad (3.42)$$

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3.43)$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad (3.44)$$

$$1+\sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (3.45)$$

$$1-\sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \qquad (3.46)$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.47)$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.48)$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.49)$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.50)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1 = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.51)$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.52)$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.53)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.54)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}, \quad \alpha,\beta \neq \pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.55)$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.56)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \qquad (3.57)$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right); \tag{3.58}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right); \tag{3.59}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right); \tag{3.60}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{3.61}$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{3.62}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right); \tag{3.63}$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right). \tag{3.64}$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.65}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in Z; \tag{3.66}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha,\ \frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{3.67}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \tag{3.68}$$

Формулы приведения

$$\left.\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\end{array}\right\} \tag{3.69}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\\ \cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\end{array}\right\} \tag{3.70}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ \operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ \operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z;\end{array}\right\} \tag{3.71}$$

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z,\\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z,\\ \operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z.\end{array}\right\} \tag{3.72}$$

Обратные тригонометрические функции

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.73}$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.74}$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.75}$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.76}$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.77}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{3.78}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.79}$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{3.80}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \tag{3.81}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0; \tag{3.82}$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \tag{3.83}$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x < 0, \ 0 < x \le 1; \tag{3.84}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x; \tag{3.85}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \ne 0; \tag{3.86}$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \le x \le 0, \ 0 < x \le 1; \tag{3.87}$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1; \tag{3.88}$$

$$\arcsin x=\begin{cases}\arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0\le x\le 1,\\ -\arccos\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.89}$$

$$\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1; \tag{3.90}$$

$$\arcsin x=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } 0<x\le 1,\\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi, \text{ если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.91}$$

$$\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } 0\le x\le 1,\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, \text{ если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.92}$$

$$\arccos x=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } 0<x\le 1,\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ если } -1\le x<0;\end{cases} \tag{3.93}$$

$$\arccos x=\operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1; \tag{3.94}$$

$$\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ -\infty<x<\infty; \tag{3.95}$$

$$\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x\ge 0,\\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x<0;\end{cases} \tag{3.96}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.97}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x > 0, \\ \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.98}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x \geq 0, \\ -\arccos\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.99}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \text{ если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, \text{ если } x < 0; \end{cases} \tag{3.100}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1; \tag{3.101}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < \infty; \tag{3.102}$$

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } xy \leq 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leq 1; \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \\ \text{если } x < 0, y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1; \end{cases} \tag{3.103}$$

$$\arcsin x-\arcsin y=\begin{cases}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \text{если } xy\ge 0 \text{ или } x^2+y^2\le 1;\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \text{если } x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1;\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \text{если } x<0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;\end{cases} \quad (3.104)$$

$$\arccos x+\arccos y=\begin{cases}\arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x+y\ge 0;\\ 2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x+y<0;\end{cases} \quad (3.105)$$

$$\arccos x-\arccos y=\begin{cases}-\arccos\left(xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x\ge y;\\ \arccos\left(xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right),\\ \text{если } x<y;\end{cases} \quad (3.106)$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } xy<1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x>0 \text{ и } xy>1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, \text{ если } x<0 \text{ и } xy>1;\end{cases} \quad (3.107)$$

$$\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{если } xy>-1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{если } x>0 \text{ и } xy<-1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, \text{если } x<0 \text{ и } xy<-1;\end{cases} \quad (3.108)$$

Доказать тождества **(3.001—3.062):**

3.001. $(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha.$

Решение.

$$(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha-1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{((\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)+1)((\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)-1)}{\cos^2 2\alpha}=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2-1}{\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha-1}{\cos^2 2\alpha}=\frac{1+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha-1}{\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha.$$

Получили $2\operatorname{tg}2\alpha=2\operatorname{tg}2\alpha.$

3.002. $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)=1.$

Решение.

$$\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+2\alpha\right)\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-\alpha\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\cos 2\alpha}+\operatorname{ctg}\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha\right)\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}=\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}2\alpha\right)\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{1-2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}{(1-\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=1.$$

Получили 1=1.

3.003. $\dfrac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right).$

Решение.

$$\frac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{1-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-\cos 2\alpha}{1-\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}==-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)$$

Получили $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)$.

3.004. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}3\beta}{\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}+\frac{\cos 3\beta}{\sin 3\beta}}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 3\beta}{\cos 3\beta}}=\frac{\frac{\sin 2\alpha\sin 3\beta+\cos 2\alpha\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\sin 3\beta}}{\frac{\cos 2\alpha\cos 3\beta+\sin 2\alpha\sin 3\beta}{\sin 2\alpha\cos 3\beta}}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\sin 3\beta+\cos 2\alpha\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\sin 3\beta}\cdot\frac{\sin 2\alpha\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\cos 3\beta+\sin 2\alpha\sin 3\beta}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos 3\beta}{\cos 2\alpha\sin 3\beta}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos 3\beta}{\sin 3\beta}=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{ctg}3\beta=\operatorname{tg}2\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}.$$

Получили $\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}3\beta}$.

3.005. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$.

Решение.

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=(\cos\alpha+\cos 7\alpha)+(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)=$$

$$=2\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha=2\cos 4\alpha(\cos 3\alpha+\cos 2\alpha)=$$

$$=2\cos 4\alpha\cdot 2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

Получили $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$.

3.006. $\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21\alpha}{2}$.

Решение.

$$\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=$$
$$=(\sin 9\alpha+\sin 12\alpha)+(\sin 10\alpha+\sin 11\alpha)=$$
$$=2\sin\frac{21\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\sin\frac{21\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{21\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\sin\frac{21\alpha}{2}\cdot 2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{21\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.007. $\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}$.

Решение.

$$(\cos 2\alpha+\cos 5\alpha)-(\cos 3\alpha+\cos 4\alpha)=$$
$$=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{7\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{7\alpha}{2}\cdot\left(-2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.008. $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}$.

Решение.

$$\sin 4\alpha+\sin 7\alpha-(\sin 5\alpha+\sin 6\alpha)=$$
$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{11\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cdot\left(-2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{11\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.009. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos3\alpha+\sin3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)$.

Решение.

$$\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos3\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)=$$
$$=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)=$$
$$=2\cos\frac{\pi}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)\right)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\cos\alpha=$$
$$=2\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=2\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right).$$

Тождество доказано.

3.010. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha+\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin6\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin3\alpha}{\cos3\alpha}+\frac{\cos3\alpha}{\sin3\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\sin^2 3\alpha+\cos^2 3\alpha}{\sin3\alpha\cos3\alpha}=$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{1}{\sin3\alpha\cos3\alpha}=\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{2}{2\sin3\alpha\cos3\alpha}=$$
$$=\frac{2}{\sin2\alpha}+\frac{2}{\sin6\alpha}=\frac{2\sin6\alpha+2\sin2\alpha}{\sin2\alpha\sin6\alpha}=\frac{2(\sin6\alpha+\sin2\alpha)}{\sin2\alpha\sin6\alpha}=$$
$$=\frac{2\cdot2\sin4\alpha\cos2\alpha}{\sin2\alpha\sin6\alpha}=\frac{4\sin4\alpha\cos2\alpha}{\sin2\alpha\sin6\alpha}=\frac{4\cdot2\sin2\alpha\cos2\alpha\cos2\alpha}{\sin2\alpha\sin6\alpha}=$$
$$=\frac{8\sin2\alpha\cos^2 2\alpha}{\sin2\alpha\sin6\alpha}=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin6\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.011. $(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$

Решение.

$$(\sin\alpha)^{-1}+(\operatorname{tg}\alpha)^{-1}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Тождество доказано.

3.012. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{3}{2}\alpha\right).$

Решение.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)}{1-\sin(3\alpha-\pi)}=\frac{\cos 3\alpha}{1+\sin 3\alpha}=\frac{\cos\left(2\cdot\frac{3}{2}\alpha\right)}{1+\sin\left(2\cdot\frac{3}{2}\alpha\right)}=\frac{\cos^2\frac{3\alpha}{2}-\sin^2\frac{3\alpha}{2}}{1+2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{3\alpha}{2}+\sin^2\frac{3\alpha}{2}+2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)}{\left(\cos\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\cos\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right).$$

Тождество доказано.

3.013. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$

Решение.

$$\frac{(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)-\sin 3\alpha}{(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)-\cos 3\alpha}=\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha}{2\cos 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha}=\frac{\sin 3\alpha(2\cos\alpha-1)}{\cos 3\alpha(2\cos\alpha-1)}=$$

$$=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha.$$

Тождество доказано.

3.014. $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cos^2(5\pi+2\alpha)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi-8\alpha\right).$

Решение.

Применяя формулы понижения степени $\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$ и $\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$, представляем левую часть в виде

$$2\cdot\frac{(1-\cos(6\pi-4\alpha))(1+\cos(10\pi+4\alpha))}{4}=\frac{1}{2}(1-\cos(6\pi-4\alpha))(1+\cos(10\pi+4\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 4\alpha)(1+\cos 4\alpha)=\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 4\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\cos 8\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8\alpha\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-8\alpha\right).$$

Тождество доказано.

3.015. $\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha)+\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right).$

Решение.

Обозначив

$$X=\sin 2\alpha(1+\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha)=\sin 2\alpha\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha(\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha)}{\cos 2\alpha\cos\alpha}$$

и применив формулу $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)$, представим это выражение в виде

$$X=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Пусть $Y=\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{1+\sin\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1-\sin\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2}\right)}$.

Поскольку $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то

$$Y=\frac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

Разделив числитель и знаменатель выражения в скобках на $\cos\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$

и применив формулу $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}=\operatorname{tg}(x+y)$, где $x,\ y,\ x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$,

запишем

$$Y=\left(\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2=\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогда $X+Y=\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Тождество доказано.

3.016. $1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=0.$

Решение.

$$1-\sin 4\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)\cos 4\alpha=$$

$$=\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha-\sin(2\cdot 2\alpha)+\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2\alpha\right)}\cdot\cos(2\cdot 2\alpha)=$$

$$=\cos^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\sin^2 2\alpha+\frac{\cos\frac{3\pi}{4}\cos 2\alpha+\sin\frac{3\pi}{4}\sin 2\alpha}{\sin\frac{3\pi}{4}\cos 2\alpha-\cos\frac{3\pi}{4}\sin 2\alpha}\times$$

$$\times\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)=(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2+\frac{-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\times$$

$$\times(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2-$$

$$-\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=$$

$$=(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)^2=0.$$

Тождество доказано.

3.017. $\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$

Решение.

Пусть $X=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3.$

Используя формулы понижения степени $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ и $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, получаем

$$X=\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^3-\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^3=\frac{1-3\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\cos^3\alpha}{8}-$$

$$-\frac{1+3\cos\alpha+3\cos^2\alpha+\cos^3\alpha}{8}=\frac{1}{8}\left(-6\cos\alpha-2\cos^3\alpha\right)=$$

$$=\frac{2\cos\alpha}{8}\left(-3-\cos^2\alpha\right)=\frac{\cos\alpha}{4}\left(-3-\left(1-\sin^2\alpha\right)\right)=$$

$$=\frac{\cos\alpha}{4}\left(-3-1+\sin^2\alpha\right)=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha.$$

Тождество доказано.

3.018. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$
$=4\cos2\alpha\cos4\alpha\sin6\alpha.$

Решение.

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)=$$
$$=\sin4\alpha+\sin8\alpha+\sin12\alpha=2\sin6\alpha\cos2\alpha+2\sin6\alpha\cos6\alpha=$$
$$=2\sin6\alpha(\cos2\alpha+\cos6\alpha)=2\sin6\alpha\cdot2\cos4\alpha\cos2\alpha=$$
$$=4\cos2\alpha\cos4\alpha\sin6\alpha.$$

Тождество доказано.

3.019. $\dfrac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha.$

Решение.

$$\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\frac{\sin6\alpha-\sin4\alpha+\sin\alpha}{\cos6\alpha+\cos4\alpha+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos5\alpha\sin\alpha+\sin\alpha}{2\cos5\alpha\cos\alpha+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(2\cos5\alpha+1)}{\cos\alpha(2\cos5\alpha+1)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Тождество доказано.

3.020. $\dfrac{1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$

Решение.

$$\frac{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\dfrac{\sin2\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos2\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{\cos2\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos2\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{2\cos2\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.021. $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{14}{3}\pi\right)+\sin\left(\alpha-\dfrac{8}{3}\pi\right)=0.$

Решение.

$$\sin\alpha+\sin\left(\frac{14}{3}\pi+\alpha\right)-\sin\left(\frac{8}{3}\pi-\alpha\right)=\sin\alpha+\sin\left(\frac{15\pi-\pi}{3}+\alpha\right)-$$

$$-\sin\left(\frac{9\pi-\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\alpha+\sin\left(5\pi+\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right)-\sin\left(3\pi-\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=\sin\alpha-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}-$$

$$-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=$$

$$=\sin\alpha-\sin\alpha=0.$$

Тождество доказано.

3.022. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

Решение.

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}=\frac{\sin^2\beta\cos^2\alpha+\cos^2\beta\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)(\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta+\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\frac{1}{2}(\cos2\alpha-\cos2\beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(2\cos^2\alpha-1-2\cos^2\beta+1\right)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Тождество доказано.

3.023. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$

Решение.

$$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=$$

$$=\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+\left(\cos^2\beta+\sin^2\beta\right)-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$=2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\left(2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=2-2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=2-2+4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тождество доказано.

3.024. $\frac{\left(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha\right)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\left(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha\right)}=1.$

Решение.

$$\frac{\left(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha\right)(\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\left(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha\right)}=\frac{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\left(\cos+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}\cdot\frac{(\sin\alpha-1)\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\cos\alpha(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha}}=1.$$

Тождество доказано.

3.025. $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$.

Решение.

$$\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{1+2\cos^2 2\alpha-1}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right).$$

Тождество доказано.

3.026. $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ)$.

Решение.

$$\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+1)}{\cos^2\alpha}=\frac{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ).$$

Тождество доказано.

3.027. $\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}$.

Решение.

$$\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{1-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}=\frac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}.$$

Тождество доказано.

3.028. $\frac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{tg}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}=\frac{\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{1}{\cos 2\beta}-\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}\cdot\frac{1}{\cos 2\alpha}}{\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{1}{\cos 2\beta}}=$$

$$=\frac{\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}}{\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}}=\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}=\frac{2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

Тождество доказано.

3.029. $2\left(\sin^{-1}4\alpha-\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha.$

Решение.

$$2\left(\frac{1}{\sin 4\alpha}-\operatorname{tg}\left(\frac{6\pi+\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}(5\pi+\alpha)=$$

$$=2\left(\frac{1}{\sin 4\alpha}-\operatorname{tg}\left(3\pi+\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha\right)=2\left(\frac{1}{\sin 4\alpha}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+4\alpha\right)\right)+\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=2\left(\frac{1}{\sin 4\alpha}+\operatorname{ctg}4\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha=2\left(\frac{1}{\sin 4\alpha}+\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\right)+\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{2(1+\cos 4\alpha)}{\sin 4\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=2\cdot\frac{1}{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}+\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тождество доказано.

3.030. $\sin^2\left(\frac{15}{8}\pi-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17}{8}-2\alpha\right)=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$.

Решение.

Используя формулы понижения степени $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ и $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, представляем левую часть равенства в виде

$$\frac{1-\cos\left(\frac{15\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}-\frac{1+\cos\left(\frac{17\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(\frac{16\pi-\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}-$$

$$-\frac{1+\cos\left(\frac{16\pi+\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(4\pi-\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)}{2}-\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{\cos\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)}{2}=-\frac{\cos\left(4\pi-\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)}{2}-\frac{\cos\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)}{2}=$$

$$=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)}{2}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{4}\cos 4\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4\alpha=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Тождество доказано.

3.031. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta)$.

Решение.

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta-\sin^2\beta=$$
$$=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\left(\cos^2\beta-\sin^2\beta\right)-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$$
$$=\cos 2\alpha+\cos 2\beta-2\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1)=2\cos(\alpha+\beta)\left(\cos\left(2\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-1\right)=$$

$$=2\cos(\alpha+\beta)\left(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1\right)=-4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\cos(\alpha+\beta).$$

Тождество доказано.

3.032. $\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$

Решение.

$$\frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{9\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(\frac{8\pi-\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}-4\alpha\right)}{2}=$$

$$=-\frac{\cos\left(2\Pi-\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)}{2}+\frac{\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\right)-\cos\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin(-4\alpha)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Тождество доказано.

3.033. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha.$

Решение.

$$\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha-\cos 2\alpha\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin(-2\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$$

$$=-1=2\cos^2\alpha-1-2\cos^2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.034. $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}.$

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(\frac{8\pi-\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\pi+\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)-\cos\left(2\pi+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}.$$

Тождество доказано.

3.035. $\cos 4\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha-\sin 4\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}.$

Решение.

$$\cos 4\alpha\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\sin 4\alpha=\frac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha-\cos 2\alpha\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin(-2\alpha)}{\cos 2\alpha}=-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}.$$

Тождество доказано.

3.036. $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}.$

Решение.

$$\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1-\cos 4\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{\cos 4\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\cos 4\alpha}{2}+\frac{\cos 4\alpha}{2}=\frac{1}{4}.$$

Тождество доказано.

3.037. $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}.$

Решение.

Используя формулы

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$$

и

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y)),$$

представляем левую часть равенства в виде

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha+\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2\alpha}{2}+\frac{\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Тождество доказано.

3.038. $\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=1.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}=\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{1-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 3\alpha}}{\frac{1}{\operatorname{tg}3\alpha}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}{\operatorname{tg}^2 3\alpha}\cdot\operatorname{tg}3\alpha=\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}{\operatorname{tg}3\alpha}=1.$$

Тождество доказано.

3.039. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=-1$.

Решение.

$$\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cos 4\alpha-\cos 2\alpha\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin(-2\alpha)}{\sin 2\alpha}=\frac{-\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha}=-1.$$

Тождество доказано.

3.040. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2.$

Решение.

$$\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=\frac{1-\cos 4\alpha}{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\frac{1}{\sin^2 2\alpha}-1}=$$

$$=\frac{(1-\cos 4\alpha)\cos^2 2\alpha}{1-\cos^2 2\alpha}+\frac{(1+\cos 4\alpha)\sin^2 2\alpha}{1-\sin^2 2\alpha}=\frac{(1-\cos 4\alpha)\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+$$

$$+\frac{(1+\cos 4\alpha)\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=\frac{\left(1-\left(1-\sin^2 2\alpha\right)\right)\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+\frac{\left(1+2\cos^2 2\alpha-1\right)\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+\frac{2\cos^2 2\alpha\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=2\cos^2 2\alpha+2\sin^2 2\alpha=$$

$$=2\left(\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha\right)=2.$$

Тождество доказано.

3.041. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}}{\cos\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha(\sin\alpha-1)}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha-1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha(\sin\alpha-1)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\alpha.$$

Тождество доказано.

3.042. $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha.$

Решение.

Используя формулы

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$$

и

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y)),$$

представляем левую часть равенства в виде

$$\frac{1+\cos(90^\circ-2\alpha)}{2}-\frac{1+\cos(120^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{1}{2}(\sin(-2\alpha)+\sin(150^\circ-2\alpha))=$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos(90^\circ-2\alpha)-1-\cos(120^\circ+2\alpha)+\sin 2\alpha-\sin(150^\circ-2\alpha)).$$

Так как

$$\cos(90^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha,\quad \cos(120^\circ+2\alpha)=\cos 120^\circ\cos 2\alpha-\sin 120^\circ\sin 2\alpha=$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha$$

и

$$\sin(150^\circ-2\alpha)=\sin 150^\circ\cos 2\alpha-\cos 150^\circ\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha,$$

то

$$\frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\alpha=\sin 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.043. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$

Решение.

Используя формулы

$$1-2\sin^2 x=\cos 2x,\ \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

и

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

представляем левую часть равенства в виде

$$X=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}.$$

Применяя формулу $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, имеем

$$X=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на $\cos\alpha\neq 0$, получим

$$X=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.044. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha.$

Решение.

$$\frac{\sin 2\alpha+(\sin 5\alpha-\sin 3\alpha)}{\cos\alpha+(1-2\sin^2 2\alpha)}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos 4\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\cos 4\alpha)}{\cos\alpha+\cos 4\alpha}=2\sin\alpha.$$

Тождество доказано.

3.045. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha=\sin 8\alpha.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha=\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 2\alpha}-1}{\dfrac{2}{\operatorname{tg}2\alpha}}-\cos 8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha=$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{\mathrm{tg}^2 2\alpha}\cdot\frac{\mathrm{tg}2\alpha}{2}-\cos 8\alpha\,\mathrm{ctg}4\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{2\,\mathrm{tg}2\alpha}-\cos 8\alpha\,\mathrm{ctg}4\alpha=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}4\alpha}-\cos 8\alpha\,\mathrm{ctg}4\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}4\alpha}-\cos 8\alpha\frac{1}{\mathrm{tg}4\alpha}=\frac{1}{\mathrm{tg}4\alpha}(1-\cos 8\alpha)=$$

$$=\frac{1}{\frac{1-\cos 8\alpha}{\cos 8\alpha}}\cdot(1-\cos 8\alpha)=\frac{\sin 8\alpha(1-\cos 8\alpha)}{1-\cos 8\alpha}=\sin 8\alpha.$$

Тождество доказано.

3.046. $\frac{\cos 4\alpha+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha.$

Решение.

$$\frac{\cos 4\alpha+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\cos 4\alpha+1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos 4\alpha+1}{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{(\cos 4\alpha+1)\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 4\alpha+1)2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}=\frac{(\cos 4\alpha+1)\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha}=\frac{\cos 4\alpha+1}{2}\cdot\mathrm{tg}2\alpha=$$

$$=\frac{\cos 4\alpha+1}{2}\cdot\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha.$$

Тождество доказано.

3.047. $\mathrm{ctg}(45^\circ+2\alpha)=\frac{\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}.$

Решение.

Пусть $X=\mathrm{ctg}(45^\circ+2\alpha)=\frac{1}{\mathrm{tg}(45^\circ+2\alpha)}.$

Применяя к выражению $\mathrm{tg}(45^\circ+2\alpha)$ формулу $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$, где $x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$, имеем

$$X=\frac{1}{\frac{1-\cos(90^\circ+4\alpha)}{\sin(90^\circ+4\alpha)}}=\frac{\sin(90^\circ+4\alpha)}{1-\cos(90^\circ+4\alpha)}=\frac{\cos 4\alpha}{1+\sin 4\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.048. $\frac{(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)(\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1)}{(\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1)(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=1.$

Решение.

$$\frac{(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha+1)(\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1)}{(\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+1)(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1)}=$$

$$=\frac{\left(\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1\right)\left(\cos^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1\right)}{\left(\cos^2\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1\right)\left(\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1\right)}=$$

$$=\frac{\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=1.$$

Тождество доказано.

3.049. $\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos a}\right)^2=\frac{2}{\sin 2\alpha}.$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\frac{\operatorname{tg}\alpha+2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.050. $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin 2\alpha.$

Решение.

$$\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin 15^\circ\cos(15^\circ+2\alpha)=$$
$$=\frac{1-\cos(90^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{1-\cos(60^\circ-2\alpha)}{2}-\frac{1}{2}(\sin(-2\alpha)+\sin(30^\circ+2\alpha))=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\cos(90^\circ+2\alpha)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos(60^\circ-2\alpha)}{2}+\frac{\sin 2\alpha}{2}-\frac{\sin(30^\circ+2\alpha)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(-\cos(90^\circ+2\alpha)+\cos(60^\circ-2\alpha)+\sin 2\alpha-\sin(30^\circ+2\alpha))=$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\cos 60^\circ\cos 2\alpha+\sin 60^\circ\sin 2\alpha+\sin 2\alpha-\sin 30^\circ\cos 2\alpha-\cos 30^\circ\sin 2\alpha)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(2\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\alpha=\sin 2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.051. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$

Решение.

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=(\sin^2\alpha)^3+(\cos^2\alpha)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=((\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha)+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=\left(\left((\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$=(1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1.$$

Тождество доказано.

3.052. $\dfrac{\operatorname{tg} 3a}{\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{(1-\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{\left(1-\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+1\right)}{\left(1-\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2+1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.053. $\sin\alpha\sin(x-\alpha)+\sin^2\left(\frac{x}{2}-\alpha\right)=\sin^2\frac{x}{2}.$

Решение.

Используя формулы

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))$$

и

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2},$$

представляем левую часть равенства в виде

$$X=\frac{1}{2}(\cos(2\alpha-x)-\cos x)+\frac{1-\cos(x-2\alpha)}{2}=\frac{\cos(x-2\alpha)}{2}-\frac{\cos x}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{\cos(x-2\alpha)}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-1+2\sin^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\sin^2\frac{x}{2}=\sin^2\frac{x}{2}.$$

Тождество доказано.

3.054. $\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha\cos2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

Решение.

$$\cos^2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos^2\alpha-(\sin2\alpha)^2=\cos^2\alpha-(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=$$

$$=\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(1-4\sin^2\alpha)=$$

$$=\cos^2\alpha\left(1-2\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha\right)=\cos^2\alpha\left(\cos2\alpha-2\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\cos^2\alpha\cos2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Тождество доказано.

3.055. $\dfrac{\sin7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha)-1=0.$

Решение.

$$\frac{\sin7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha)-1=$$

$$=\frac{\sin(6\alpha+\alpha)}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha-2\cos4\alpha-2\cos6\alpha-1=$$

$$=\left(\frac{\sin(6\alpha+\alpha)}{\sin\alpha}-2\cos6\alpha\right)-2\cos2\alpha-2\cos4\alpha-1=$$

$$=\left(\frac{\sin6\alpha\cos\alpha+\cos6\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos6\alpha\right)-2\cos2\alpha-2\cos4\alpha-1=$$

$$=\frac{\sin6\alpha\cos\alpha+\cos6\alpha\sin\alpha-2\cos6\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha-2\cos4\alpha-1=$$

$$=\frac{\sin6\alpha\cos\alpha-\cos6\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha-2\cos4\alpha-1=$$

$$=\left(\frac{\sin5\alpha}{\sin\alpha}-2\cos4\alpha\right)-2\cos2\alpha-1=\left(\frac{\sin(4\alpha+\alpha)}{\sin\alpha}-2\cos4\alpha\right)-2\cos2\alpha-1=$$

$$=\left(\frac{\sin4\alpha\cos\alpha+\cos4\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos4\alpha\right)-2\cos2\alpha-1=$$

$$=\frac{\sin4\alpha\cos\alpha+\cos4\alpha\sin\alpha-2\cos4\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha-1=$$

$$=\frac{\sin4\alpha\cos\alpha-\cos4\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha-1=\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha-1=$$

$$=\left(\frac{\sin(2\alpha+\alpha)}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha\right)-1=\left(\frac{\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-2\cos2\alpha\right)-1=$$

$$=\frac{\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha-2\cos2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-1=\frac{\sin2\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}-1=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}-1=1-1=0.$$

Тождество доказано.

3.056. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

Решение.

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$
$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$

Тождество доказано.

3.057. $\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}\sin^2 2x-1=\sin(y+x)\sin(y-x)$.

Решение.

$$\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}\sin^2 2x-1=\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}(\sin 2x)^2-1=$$
$$=\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2-1=$$
$$=\cos^4 x+\sin^2 y+\frac{1}{4}\cdot4\sin^2 x\cos^2 x-1=$$
$$=\cos^4 x+\sin^2 y+\sin^2 x\cos^2 x-1=$$
$$=\left(\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x\right)+\sin^2 y-1=$$
$$=\cos^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\left(1-\sin^2 y\right)=$$
$$=\cos^2 x-\cos^2 y=(\cos x-\cos y)(\cos x+\cos y)=$$
$$=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\cdot2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=$$
$$=-\left(2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right)\left(2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)=$$
$$=-\sin(x+y)\sin(x-y)=\sin(x+y)\sin(y-x).$$

Тождество доказано.

3.058. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(2\pi-2\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}-$

$$-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение.

Используя формулу $\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$ и формулы приведения, перепишем левую часть равенства в виде

$$X=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{3}\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{3}\cos 2\alpha=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha}-\sqrt{3}\cos 2\alpha=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\left(2-1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}-\sqrt{3}\cos 2\alpha=$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\sqrt{3}\cos 2\alpha=\sin 2\alpha-\sqrt{3}\cos 2\alpha=2\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha\right)=$$

$$=2\left(\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Тождество доказано.

3.059. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+2\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}+$

$$+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$$

Решение.

Используя формулу $\cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$ и формулы приведения, перепишем левую часть равенства в виде

$$X=\frac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot(-\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}+\cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}+\cos 2\alpha=$$

$$=\frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}+\cos 2\alpha=-\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\cos 2\alpha=-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=$$

$$=\cos 2\alpha-\sin 2\alpha=\cos 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right).$$

Тождество доказано.

3.060. $\operatorname{tg}4\alpha+\cos^{-1}4\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}4\alpha+\cos^{-1}4\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}+\frac{1}{\cos 4\alpha}=\frac{1+\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2}{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)}=\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}.$$

Тождество доказано.

3.061. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-tg\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\cos^{-2}\alpha.$

Решение.

Так как $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$ и $\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$, где $x, y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, то левую часть равенства можно записать в виде

$$X=\frac{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}}+\frac{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+2\operatorname{tg}^2\alpha=$$

$$=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{2\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+2\operatorname{tg}^2\alpha=2\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{2}{\cos^2\alpha}=2\cos^{-1}\alpha.$$

Тождество доказано.

3.062. $1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$

Решение.

$$1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos2\alpha=1-\frac{1}{4}(\sin2\alpha)^2+\cos2\alpha=$$

$$=1-\frac{1}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{4}\cdot4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+$$

$$+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\left(1+\cos^2\alpha\right)=$$

$$=\left(1+\cos^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)=\left(1+\cos^2\alpha\right)\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha.$$

Тождество доказано.

Упростить выражения **(3.063—3.113):**

3.063. $1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}.$

Решение.

$$1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1+\sin\left(3\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{4}\right)=2\sin^2\frac{\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{\alpha}{4}\right)=2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\sin\frac{\alpha}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha+\pi}{4}\right).$

3.064. $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha.$

Решение.

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\pi-2\alpha)\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)\right)}+\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{1+\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi+\pi}{4}-\alpha\right)}+\cos^2\alpha=-\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)}+\cos^2\alpha=$$

$$=-\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}+\cos^2\alpha=-\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha\cdot\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}+\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{-(\cos\alpha+\sin\alpha)^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}+\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{-(\cos\alpha+\sin\alpha)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}+\cos^2\alpha=-1+\cos^2\alpha=$$

$$=-(1-\cos^2\alpha)=-\sin^2\alpha.$$

Ответ: $-\sin^2\alpha$.

3.065. $\dfrac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}.$

Решение.

$$\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\right)}{\sin^{-1}\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\left(\mathrm{tg}^2\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\mathrm{tg}^2\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2\left(1+\left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\right)^2\right)}{\frac{1}{\sin\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\left(\left(\mathrm{tg}\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2-\left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{7}{2}\pi\right)\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2\left(1+\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)\sin\left(\frac{9}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\mathrm{tg}\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2-\left(-\mathrm{tg}\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{3\alpha}{4}\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2\left(1+\left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)\sin\left(\frac{8\pi+\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\mathrm{tg}\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2-\left(\mathrm{tg}\left(\frac{6\pi+\pi}{2}-\frac{3\alpha}{4}\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2\left(1+\left(\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\alpha\right)\right)^2\right)\sin\left(4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\left(\mathrm{tg}\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)\right)^2-\left(\mathrm{tg}\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{4}\right)\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(-\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2\left(1+\left(\mathrm{ctg}\frac{3\alpha}{4}\right)^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)^2-\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{4}\right)\right)^2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\mathrm{ctg}^2\frac{3\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{4}-\mathrm{ctg}^2\frac{3\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\frac{\cos^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}-\frac{\cos^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\sin^2\frac{3\alpha}{4}+\cos^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{\sin^2\frac{3\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}-\cos^2\frac{3\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}-\cos^2\frac{3\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\left(\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}+\cos\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{8\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{8\sin\alpha}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

3.066. $\dfrac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{4}-3\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(2\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(3\pi-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\frac{\alpha}{4}}{-\cos\frac{\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\sin\frac{\alpha}{4}}=-\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}-\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}+\sin\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=-\frac{\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}-\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}}{\frac{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}+\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}{\sin\frac{\alpha}{8}}}=-\frac{\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}-\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}+\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{8}}=$$

$$=-\frac{\sin\frac{\alpha}{8}}{\cos\frac{\alpha}{8}}=-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}.$$

Ответ: $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}$.

3.067. $\cos\alpha\left(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)$

Решение.

$$\cos\alpha\left(1+\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(1-\cos^{-1}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\right)=$$

$$=\cos\alpha\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\cos\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha-1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{((\cos\alpha+\sin\alpha)+1)((\cos\alpha+\sin\alpha)-1)}{\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-1}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha-1}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2\sin\alpha.$$

Ответ: $2\sin\alpha$.

3.068. $\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

Решение.

$$\sin^2\alpha(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=$$

$$=\sin^2\alpha\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha+1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha-1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=((\sin\alpha+\cos\alpha)+1)((\sin\alpha+\cos\alpha)-1)=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=$$

$$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha.$$

Ответ: $\sin2\alpha$.

3.069. $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}=\frac{1-\cos(3\pi-8\alpha)}{\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}-\dfrac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}}=\frac{(1-\cos(3\pi-8\alpha))\sin2\alpha\cos2\alpha}{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}=$$

$$=-\frac{(1-\cos(3\pi-8\alpha))\cdot2\sin2\alpha\cos2\alpha}{2(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha)}=-\frac{(1+\cos8\alpha)\sin4\alpha}{2\cos4\alpha}=$$

$$=-\frac{(1+2\cos^2 4\alpha-1)\sin4\alpha}{2\cos4\alpha}=-\frac{2\cos^2 4\alpha\sin4\alpha}{2\cos4\alpha}=\frac{-2\sin4\alpha\cos4\alpha}{2}=$$

$$=-\frac{\sin8\alpha}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{\sin8\alpha}{2}$.

3.070. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$

Решение.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\sin\frac{\alpha}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2}+$$
$$+\frac{1}{4}\left(\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{3}{2}\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\alpha.$

3.071. $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right).$

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=\frac{1-\cos(\alpha+4\beta)}{2}-\frac{1-\cos(\alpha-4\beta)}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{\cos(\alpha+4\beta)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos(\alpha-4\beta)}{2}=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-4\beta)-\cos(\alpha+4\beta))=$$
$$=-\sin\alpha\sin(-4\beta)=\sin\alpha\sin 4\beta.$$

Ответ: $\sin\alpha\sin 4\beta.$

3.072. $\dfrac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\dfrac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.$

Решение.

$$\frac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{1+\cos 4x}+\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos 2x}+\sin 2x\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{1+\cos 4x}+\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}}=$$

$$=\frac{\frac{1+\sin^2 2x}{\cos 2x}}{1+\cos 4x}+\frac{1}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1+\sin^2 2x}{\cos 2x(1+\cos 4x)}+$$

$$+\frac{1}{4\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{1+\sin^2 2x}{\cos 2x\left(1+2\cos^2 2x-1\right)}+\frac{1}{2\cos 2x}=$$

$$=\frac{1+\sin^2 2x}{2\cos^3 2x}+\frac{1}{2\cos 2x}=\frac{1+\sin^2 2x+\cos^2 2x}{2\cos^3 2x}=\frac{1+1}{2\cos^3 2x}=$$

$$=\frac{2}{2\cos^3 2x}=\frac{1}{\cos^3 2x}=\cos^{-3} 2x.$$

Ответ: $\cos^{-3} 2x$.

3.073. $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

Решение.

$$\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1=\frac{1+\cos(2\alpha+4\beta)}{2}+$$

$$+\frac{1-\cos(2\alpha-4\beta)}{2}-1=\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\alpha+4\beta)}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\alpha-4\beta)}{2}-1=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos(2\alpha+4\beta)-\cos(2\alpha-4\beta))=-\sin 2\alpha\sin 4\beta.$$

Ответ: $-\sin 2\alpha\sin 4\beta$.

3.074. $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

Решение.

$$\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1=\frac{1-\cos(2\alpha+4\beta)}{2}+$$

$$+\frac{1-\cos(2\alpha-4\beta)}{2}-1=\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\alpha+4\beta)}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\alpha-4\beta)}{2}-1=$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos(2\alpha+4\beta)+\cos(2\alpha-4\beta))=-\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2\alpha\cos 4\beta=-\cos 2\alpha\cos 4\beta.$$

Ответ: $-\cos 2\alpha\cos 4\beta$.

3.075. $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$.

Решение.

$$(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2=$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos 2\beta+\cos^2 2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin 2\beta+\sin^2 2\beta=$$
$$=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta)-2(\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta)=$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta)=2-2\cos(\alpha+2\beta)=$$
$$=2-2\cos\left(2\cdot\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)=2-2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}\right)=2-2+4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}=$$
$$=4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}.$$

Ответ: $4\sin^2\frac{\alpha+2\beta}{2}$.

3.076. $\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

Решение.

$$\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos(45^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}=\frac{(1-1+2\sin^2\alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}\sin^2\alpha(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)}{-2\sin 2\alpha(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)}=\frac{\sqrt{2}\sin^2\alpha}{-2\sin 2\alpha}=-\frac{\sqrt{2}\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{4\cos\alpha}=$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{tg}\alpha$.

3.077. $\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11}{8}\pi+\frac{\alpha}{4}\right)$.

Решение.

$$\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11}{8}\pi+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}-\frac{1+\cos\left(\frac{11}{4}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{1+\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}-\frac{1+\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(3\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)-\cos\left(3\pi-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

3.078. $\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{\cos\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(135^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(90^\circ+\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha}{2\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ: $2\operatorname{tg}\alpha$.

3.079. $\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

Решение.

$$\frac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1+\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{2+\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2}}{\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}}=\frac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{2}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$.

3.080. $\frac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin n\alpha-\sin m\alpha}=-\frac{\cos m\alpha-\cos n\alpha}{\sin m\alpha-\sin n\alpha}=-\frac{-2\sin\frac{m+n}{2}\alpha\sin\frac{m-n}{2}\alpha}{2\cos\frac{m+n}{2}\alpha\sin\frac{m-n}{2}\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\frac{m+n}{2}\alpha}{\cos\frac{m+n}{2}\alpha}=\operatorname{tg}\frac{m+n}{2}\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{m+n}{2}\alpha$.

3.081. $\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

Решение.

$$\sin^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^{-2}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\left(\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\cos^2\alpha\left(1-\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}\cdot\frac{1}{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2}}=$$

$$=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\alpha-1+\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{2}{1+\sin 2\alpha}=2.$$

Ответ: 2.

3.082. $1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

Решение.

$$1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(2\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}}=$$

$$=1-\frac{1}{1-\frac{1}{-\cos 2\alpha}}=1-\frac{1}{1+\frac{1}{\cos 2\alpha}}=1-\frac{1}{\frac{\cos 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}}=1-\frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+1}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha+1-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha+1}=\frac{1}{\cos 2\alpha+1}=\frac{1}{2\cos^2\alpha-1+1}=\frac{1}{2\cos^2\alpha}.$$

Ответ : $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$.

3.083. $\dfrac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\cos^{-1}\alpha+\cos^{-1}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\cos^{-1}\beta+\operatorname{tg}\beta\cos^{-1}\alpha}=\frac{\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\beta}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

3.084. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=-\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{\operatorname{ctg}^3\left(\dfrac{4\pi+\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{\operatorname{ctg}^3\left(2\pi+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}}=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\left(1-\operatorname{ctg}^2\alpha\right)}{\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^3\alpha}}=\operatorname{ctg}^4\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^4\alpha$.

3.085. $1-\dfrac{1}{1-\sin^{-1}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

Решение.

$$1-\frac{1}{1-\sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{\cos\alpha}}=1-\frac{1}{\frac{\cos\alpha-1}{\cos\alpha}}=$$

$$=1-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}=\frac{\cos\alpha-1\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha-1}=-\frac{1}{\cos\alpha-1}=-\frac{1}{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}=\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $0{,}5\sin^{-2}\dfrac{\alpha}{2}$.

3.086. $\dfrac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}$.

Решение.

$$\frac{1-\operatorname{tg}(\pi-2\alpha)\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{2\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha}{2}$.

3.087. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\left(\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)^2\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}{\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2-\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}=\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{\sin^4\alpha}{\sin^4\alpha}=1.$$

Ответ: 1.

3.088. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(270^\circ-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\alpha-180^\circ\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(360^\circ-\alpha\right)-1}{\operatorname{ctg}\left(180^\circ+\alpha\right)}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{ctg}\left(270^\circ-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\alpha-180^\circ\right)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\left(360^\circ-\alpha\right)-1}{\operatorname{ctg}\left(180^\circ+\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\times$$

$$\times\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=1.$$

Ответ: 1.

3.089. $\dfrac{\cos^2\left(\alpha-270^\circ\right)}{\sin^{-2}\left(\alpha+90^\circ\right)-1}+\dfrac{\sin^2\left(\alpha+270^\circ\right)}{\cos^{-2}\left(\alpha-90^\circ\right)-1}$.

Решение.

$$\frac{\cos^2(\alpha-270^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+90^\circ)-1}+\frac{\sin^2(\alpha+270^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-90^\circ)-1}=\frac{(\cos(270^\circ-\alpha))^2}{\frac{1}{(\sin(90^\circ+\alpha))^2}-1}+$$

$$+\frac{(\sin(270^\circ+\alpha))^2}{\frac{1}{(\cos(90^\circ-\alpha))^2}-1}=\frac{\sin^2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\frac{\cos^2\alpha}{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}=\frac{\sin^2\alpha}{\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{\cos^2\alpha}{\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Ответ: 1.

3.090. $\dfrac{(1+\operatorname{tg}^2(\alpha-90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1)}{(1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+270^\circ))\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}$.

Решение.

$$\frac{(1+\operatorname{tg}^2(\alpha-90^\circ))(\sin^{-2}(\alpha-270^\circ)-1)}{(1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+270^\circ))\cos^{-2}(\alpha+90^\circ)}=$$

$$=\frac{\left(1+(\operatorname{tg}(\alpha-90^\circ))^2\right)\cdot\left(\frac{1}{(\sin(\alpha-270^\circ))^2}-1\right)}{\left(1+(\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha))^2\right)\cdot\frac{1}{(\cos(90^\circ+\alpha))^2}}=$$

$$=\frac{\left(1+(-\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha))^2\right)\cdot\left(\frac{1}{(\sin(270^\circ-\alpha))^2}-1\right)}{\left(1+(\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha))^2\right)\cdot\frac{1}{(\cos(90^\circ+\alpha))^2}}=$$

$$=\frac{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha.$$

Ответ: $\sin^2\alpha$.

3.091. $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2}{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}=\frac{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\frac{4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{4}=\frac{\sin^2 2\alpha}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sin^2 2\alpha}{4}$.

3.092. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}=\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\alpha.$$

Ответ: $-\cos\alpha$.

3.093. $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}$.

Решение.

$$\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha+1}{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{\cos^2\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1}{\sin^2\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}=$$

$$=\frac{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^2\alpha$.

3.094. $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2a-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$.

Решение.

$$\frac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}=$$

$$=\frac{(\cos(90^\circ-2\alpha))^2+(\mathrm{ctg}(90^\circ+2\alpha))^2+1}{(-\sin(270^\circ-2\alpha))^2+(\mathrm{tg}(270^\circ+2\alpha))^2+1}=\frac{\sin^2 2\alpha+\mathrm{tg}^2 2\alpha+1}{\cos^2 2\alpha+\mathrm{ctg}^2 2\alpha+1}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha+\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+1}{\cos^2 2\alpha+\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}+1}=\frac{\dfrac{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{\dfrac{\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}=\mathrm{tg}^2 2\alpha.$$

Ответ: $\mathrm{tg}^2 2\alpha$.

3.095. $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\mathrm{tg}\left(\dfrac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}=\frac{\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)^2}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2 4\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{ctg}2\alpha}=\frac{\cos^2 4\alpha}{\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}=\frac{\cos^2 4\alpha}{\dfrac{\sin^2 2\alpha-\cos^2 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}}=$$

$$=-\frac{\cos^2 4\alpha\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=-\frac{\cos^2 4\alpha\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos 4\alpha}=$$

$$=-\frac{\cos 4\alpha\cdot 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2}=-\frac{\cos 4\alpha\sin 4\alpha}{2}=$$

$$=-\frac{2\cos 4\alpha\sin 4\alpha}{4}=-\frac{\sin 8\alpha}{4}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{4}\sin 8\alpha$.

3.096. $$\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}.$$

Решение.

$$\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1-\cos(4\alpha-\pi)}{\sin^3 2\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)\sin^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{1}{2\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2}+$$

$$+\frac{1-\cos(\pi-4\alpha)}{\sin^3 2\alpha}-\frac{1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\left(-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^3 2\alpha}-\frac{1}{-2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha}=\frac{1}{\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\alpha}+$$

$$+\frac{1+2\cos^2 2\alpha-1}{\sin^3 2\alpha}+\frac{1}{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin^3 2\alpha}+$$

$$+\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin^3 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha+2\cos^2 2\alpha}{\sin^3 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\left(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)}{\sin^3 2\alpha}=\frac{2}{\sin^3 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sin^3 2\alpha}$.

3.097. $\dfrac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\dfrac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}$.

Решение.

$$\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2(\alpha-\pi)}{\cos^3(\alpha-4\pi)}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2(\alpha+\pi)}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+2(-\sin(\pi-\alpha))^2}{(\cos(4\pi-\alpha))^3}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+(\sin(\pi+\alpha))^2}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+$$

$$+\frac{1+4\sin\alpha}{\cos\alpha(4\sin\alpha+1)}=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^3\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}=\frac{2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\frac{2}{\cos^3\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2}{\cos^3\alpha}$.

3.098. $\sin\left(2\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\dfrac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi+2\alpha\right)$.

Решение.

Пусть

$$X=\sin\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)+\cos\left(2\alpha-\frac{8}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right)=$$

$$=-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(\frac{8}{3}\pi-2\alpha\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right).$$

$$-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)=\cos2\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{8}{3}\pi-2\alpha\right)=\cos\left(\frac{9\pi-\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(3\pi-\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)\right)=$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=-\cos\frac{\pi}{3}\cos2\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin2\alpha=-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi+2\alpha\right)=\cos\frac{2}{3}\pi\cos 2\alpha-\sin\frac{2}{3}\pi\sin 2\alpha=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha.$$

$$X=\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=0.$$

Ответ: 0.

3.099. $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}=\frac{4(-\sin(5\pi-\alpha))^2-(\sin(\pi+2\alpha))^2}{\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)\right)^2-4+4\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha-4+4\sin^2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4+4(1-\cos^2\alpha)}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha)}{4(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha-4+4-4\cos^2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha-4\cos^4\alpha-4\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^4\alpha}=-\operatorname{tg}^4\alpha.$$

Ответ: $-\operatorname{tg}^4\alpha$.

3.100. $\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17}{8}\pi-\alpha\right)$.

Решение.

$$\sin^2\left(\frac{9}{8}\pi+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17}{8}\pi-\alpha\right)=\left(\sin\left(\frac{8\pi+\pi}{8}+\alpha\right)\right)^2-\left(\sin\left(\frac{16\pi+\pi}{8}-\alpha\right)\right)^2=$$

$$=\left(\sin\left(\pi+\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\right)\right)^2-\left(\sin\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\right)\right)^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\right)=\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{\pi}{4}\sin(-2\alpha)\right)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sin 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha.$

3.101. $\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9}{4}\pi-2\alpha\right)\right).$

Решение.

$$\operatorname{ctg}(4\alpha-\pi)\left(\cos^4\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9}{4}\pi-2\alpha\right)\right)=$$

$$=-\operatorname{ctg}(\pi-4\alpha)\left(\left(\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{4}-2\alpha\right)\right)^4-\left(\sin\left(\frac{8\pi+\pi}{4}-2\alpha\right)\right)^4\right)=$$

$$=-\operatorname{ctg}(\pi-4\alpha)\left(\left(\cos\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)\right)^4-\left(\sin\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)\right)^4\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}4\alpha\left(\cos^4\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}4\alpha\left(\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)^2-\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)\right)^2\right)=$$

$$=\operatorname{ctg}4\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)=\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha}\cdot\sin 4\alpha=\cos 4\alpha.$$

Ответ: $\cos 4\alpha.$

3.102. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\cos^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5}{4}\pi-2\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(2\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-4\alpha\right)}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}=\frac{\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-4\alpha\right)}{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}{2\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{2\sin4\alpha}{\sin2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin2\alpha\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=4\cos2\alpha.$$

Ответ: $4\cos2\alpha$.

3.103. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)(1+\sin2\alpha)}{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}.$

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5}{4}\pi-\alpha\right)(1+\sin2\alpha)}{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi+\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin2\alpha)}{\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\pi+\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}\cdot(1+\sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}\cdot(1+\sin 2\alpha)}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

3.104. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha-\operatorname{tg} 2\alpha}=\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\dfrac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}-\operatorname{tg} 2\alpha}=\frac{\operatorname{tg} 2\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}{\operatorname{tg} 2\alpha\left(2-1+\operatorname{tg}^2 2\alpha\right)}=\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}=$$

$$=\frac{1-\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}{\dfrac{\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}}=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha.$$

Ответ: $\cos 4\alpha$.

3.105. $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos(6\alpha-\pi)}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos(\pi-6\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 6\alpha\cos 2\alpha-\cos 6\alpha\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha}=2.$$

Ответ: 2.

3.106. $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}$.

Решение.

$$\frac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)}=\frac{1+\cos(2\pi-4\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)}{1+\cos(\pi+4\alpha)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)}=$$

$$=\frac{1+\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}{1-\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}=\frac{1+2\cos^2 2\alpha-1+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{1-\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

3.107. $\dfrac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}$.

Решение.

$$\frac{\sin(2\alpha+2\pi)+2\sin(4\alpha-\pi)+\sin(6\alpha+4\pi)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(4\alpha-\pi)+\cos(6\alpha-4\pi)}=$$

$$=\frac{\sin(2\pi+2\alpha)-2\sin(\pi-4\alpha)+\sin(4\pi+6\alpha)}{\cos(6\pi-2\alpha)+2\cos(\pi-4\alpha)+\cos(4\pi-6\alpha)}=\frac{\sin 2\alpha-2\sin 4\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha-2\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 4\alpha\cos 2\alpha-2\sin 4\alpha}{2\cos 4\alpha\cos 2\alpha-2\cos 4\alpha}=\frac{2\sin 4\alpha(\cos 2\alpha-1)}{2\cos 4\alpha(\cos 2\alpha-1)}=\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}=\operatorname{tg} 4\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg} 4\alpha$.

3.108. $\dfrac{4\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Решение.

$$\frac{4\sin\left(\frac{5}{2}\pi+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{4\sin\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+\alpha\right)}{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}=$$

$$=\frac{4\sin\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)}{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4\cos\alpha}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\cos\alpha}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{4\cos\alpha}{\dfrac{\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\sin^2\alpha.$$

Ответ: $\sin^2\alpha$.

3.109. $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}$.

Решение.

$$\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin(2\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos(2\alpha-\beta)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi+2\alpha\right)}=\frac{2\sin2\alpha\cos\beta+\sin2\alpha}{2\cos2\alpha\cos\beta+\cos2\alpha}=$$

$$=\frac{\sin2\alpha(2\cos\beta+1)}{\cos2\alpha(2\cos\beta+1)}=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\mathrm{tg}\,2\alpha.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,2\alpha$.

3.110. $\dfrac{\cos3\alpha+\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin3\alpha+\sin4\alpha+\sin5\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\cos3\alpha+\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin3\alpha+\sin4\alpha+\sin5\alpha}=\frac{2\cos4\alpha\cos\alpha+\cos4\alpha}{2\sin4\alpha\cos\alpha+\sin4\alpha}=\frac{\cos4\alpha(2\cos\alpha+1)}{\sin4\alpha(2\cos\alpha+1)}=$$

$$=\frac{\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=\mathrm{ctg}\,4\alpha.$$

Ответ: $\mathrm{ctg}\,4\alpha$.

3.111. $\dfrac{\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}$.

Решение.

$$\frac{\cos^2\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+4\cos^2\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)-4}{1+\cos(4\alpha-\pi)-8\sin^2(5\pi-\alpha)}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-2\alpha\right)\right)^2+4\left(\cos\left(\frac{6\pi+\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2-4}{1+\cos(\pi-4\alpha)-8(\sin(5\pi-\alpha))^2}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)\right)^2+4\left(\cos\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\right)^2-4}{1+\cos(\pi-4\alpha)-8(\sin(5\pi-\alpha))^2}=$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)^2+4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2-4}{1-\cos 4\alpha-8\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-\cos 4\alpha-8\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\left(1-\sin^2\alpha\right)}{1-\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)-8\sin^2\alpha}=\frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha}{2\sin^2 2\alpha-8\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)}{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha}=\frac{-4\cos^2\alpha\cos^2\alpha}{8\sin^2\alpha\left(\cos^2\alpha-1\right)}=\frac{-4\cos^4\alpha}{-8\sin^2\alpha\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^4\alpha}{2\sin^4\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha.$

3.112. $$\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}.$$

Решение.

$$\frac{\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\left(2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\cdot\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha\right)}=\frac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha\right)}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

3.113. $\frac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

Решение.

$$\frac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{1+\cos2\alpha+(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{1+\cos2\alpha+2\cos2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=\frac{1+2\cos^2\alpha-1+2(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{2\cos\alpha(\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}=2\cos\alpha.$$

Ответ: $2\cos\alpha$.

Преобразовать в произведение **(3.114—3.147):**

3.114. $\sin4\alpha-2\cos^2 2\alpha+1$.

Решение.

$$\sin4\alpha-\cos4\alpha=\sin4\alpha-\sin(90^\circ-4\alpha)=2\cos45^\circ\sin(4\alpha-45^\circ)=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(4\alpha-45^\circ)=\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ).$$

Ответ: $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$.

3.115. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2.$

Решение.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+2=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}+2=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+2=\frac{2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}+2=\frac{2}{\sin\alpha}+2=\frac{2+2\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{2\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{2\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}=4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha.$$

Ответ: $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-1}\alpha.$

3.116. $\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha.$

Решение.

$$\cos^{-4}\alpha-\sin^{-4}\alpha=\frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\sin^4\alpha}=\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha\sin^4\alpha}=$$

$$=\frac{-16\left(\cos^4\alpha-\sin^4\alpha\right)}{16\sin^4\alpha\cos^4\alpha}=\frac{-16\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\sin^4 2\alpha}=$$

$$=\frac{-16\cos 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}=-16\cdot\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{1}{\sin^3 2\alpha}=-16\operatorname{ctg}2\alpha\sin^{-3}2\alpha.$$

Ответ: $-16\operatorname{ctg}2\alpha\sin^{-3}2\alpha.$

3.117. $\dfrac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}^4\alpha}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}^4\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^4\alpha}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}^4\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}^4\alpha=\operatorname{tg}^8\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}^8\alpha$.

3.118. $1-3\operatorname{tg}^2\left(\alpha+270^\circ\right)$.

Решение.

$$1-3\operatorname{tg}^2\left(\alpha+270^\circ\right)=1-3\left(\operatorname{tg}\left(270^\circ+\alpha\right)\right)^2=1-3\operatorname{ctg}^2\alpha=4\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=4\cdot\frac{\dfrac{1}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\dfrac{1}{2}\sin\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{4\left(\sin\alpha\cos60^\circ-\cos\alpha\sin60^\circ\right)\left(\sin\alpha\cos60^\circ+\cos\alpha\sin60^\circ\right)}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin\left(\alpha-60^\circ\right)\sin\left(\alpha+60^\circ\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $4\sin\left(\alpha-60^\circ\right)\sin\left(\alpha+60^\circ\right)\sin^{-2}\alpha$.

3.119. $1-3\operatorname{tg}^2\left(\alpha-180^\circ\right)$.

Решение.

$$1-3\operatorname{tg}^2\left(\alpha-180^\circ\right)=1-3\left(-\operatorname{tg}\left(180^\circ-\alpha\right)\right)^2=$$

$$=1-3\operatorname{tg}^2\alpha=4\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\alpha\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)=$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4(\sin 30^\circ\cos\alpha-\cos 30^\circ\sin\alpha)(\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Ответ: $4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)\cos^{-2}\alpha.$

3.120. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right).$

Решение.

$$\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\left(-\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\right)^2=$$

$$=\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}.$$

Ответ: $4\cos 2\alpha\sin^{-2}2\alpha.$

3.121. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ).$

Решение.

$$3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)=3(-\sin(270^\circ-\alpha))^2-(\cos(270^\circ+\alpha))^2=$$

$$=3(\sin(270^\circ-\alpha))^2-(\cos(270^\circ+\alpha))^2=3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$$

$$=4\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha-\frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=$$
$$=4(\cos 30^\circ\cos\alpha-\sin 30^\circ\sin\alpha)(\cos 30^\circ\cos\alpha+\sin 30^\circ\sin\alpha)=$$
$$=4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha).$$

Ответ: $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$

3.122. $\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)$

Решение.

$$\sin^2(\alpha+90^\circ)-3\cos^2(\alpha-90^\circ)=(\sin(90^\circ+\alpha))^2-3(\cos(90^\circ-\alpha))^2=$$
$$=\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=4\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha\right)=$$
$$=4\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=$$
$$=4(\sin 30^\circ\cos\alpha-\cos 30^\circ\sin\alpha)(\sin 30^\circ\cos\alpha+\cos 30^\circ\sin\alpha)=$$
$$=4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha).$$

Ответ: $4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)$.

3.123. $\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)$.

Решение.

$$\sin^2\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)=\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)^2-\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=$$
$$=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)^2-\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2=\cos^2\beta-\sin^2\alpha=$$
$$=\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{1-\cos 2\alpha}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\beta}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\alpha}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)=\frac{1}{2}\cdot 2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Ответ: $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

3.124. $3-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$.

Решение.

$$3-4\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=3-4\cdot\frac{1+\cos(3\pi-2\alpha)}{2}=$$
$$=3-2-2\cos(3\pi-2\alpha)=1-2\cos(3\pi-2\alpha)=$$
$$=1+2\cos2\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos2\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\cos2\alpha\right)=$$
$$=2\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right).$$

Ответ: $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

3.125. $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Решение.

$$3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=3-4\cdot\frac{1-\cos(\pi-2\alpha)}{2}=$$
$$=3-2+2\cos(\pi-2\alpha)=1+2\cos(\pi-2\alpha)=1-2\cos2\alpha=$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\cos2\alpha\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos2\alpha\right)=$$
$$=2\cdot\left(-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)=-4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=$$
$$=4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ответ: $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

3.126. $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right)$.

Решение.

$$1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5}{2}\pi+3\alpha\right)=$$

$$=1-\sin 3\alpha+\cos 3\alpha-\operatorname{tg}3\alpha=1-\sin 3\alpha+\cos 3\alpha-\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 3\alpha-\sin 3\alpha)\cos 3\alpha+\cos 3\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=\frac{(\cos 3\alpha-\sin 3\alpha)(\cos 3\alpha+1)}{\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\cos 3\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)\right)(\cos 3\alpha+\cos 2\pi)}{\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cos\left(\pi+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\pi-\frac{3\alpha}{2}\right)}{\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\cdot\left(-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)\left(-\cos\frac{3\alpha}{2}\right)}{\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}$.

3.127. $1+\cos(2\alpha+270^\circ)+\sin(2\alpha+450^\circ)$.

Решение.

$$1+\cos(2\alpha+270^\circ)+\sin(2\alpha+450^\circ)=1+\cos(270^\circ+2\alpha)+\sin(450^\circ+2\alpha)=$$

$$=1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$$

$$=(\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=$$

$$=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=$$

$$=(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha)=$$
$$=2(\cos\alpha+\sin\alpha)\cos\alpha=2(\cos\alpha+\cos(90^\circ-\alpha))\cos\alpha=$$
$$=2\cdot 2\cos 45^\circ\cos(\alpha-45^\circ)\cos\alpha=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha-45^\circ)\cos\alpha=$$
$$=2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(\alpha-45^\circ)=2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$.

3.128. $1-\cos(2\alpha-270^\circ)+\sin(2\alpha+270^\circ)$.

Решение.

$$1-\cos(2\alpha-270^\circ)+\sin(2\alpha+270^\circ)=1-\cos(270^\circ-2\alpha)+\sin(270^\circ+2\alpha)=$$
$$=1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=$$
$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+$$
$$+(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha)=$$
$$=2(\sin\alpha+\cos\alpha)\sin\alpha==2(\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha))\sin\alpha=$$
$$=2\cdot 2\sin 45^\circ\cos(\alpha-45^\circ)\sin\alpha=4\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\cos(\alpha-45^\circ)=$$
$$=2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(\alpha-45^\circ)=2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$.

3.129. $\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-1$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(2\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-1=\sin\left(\frac{5}{2}\pi-2\alpha\right)+2\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-2\alpha\right)-1=$$
$$=\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha-1=\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=2\cos 3\alpha\cos\alpha=$$
$$=2\cos\alpha\cos 3\alpha.$$

Ответ: $2\cos\alpha\cos 3\alpha$.

3.130. $1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)$.

Решение.

$$1-\cos(2\alpha-\pi)-\cos(4\alpha+\pi)+\cos(6\alpha-2\pi)=$$
$$=1-\cos(\pi-2\alpha)-\cos(\pi+4\alpha)+\cos(2\pi-6\alpha)=$$
$$=1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha=1+2\cos^2\alpha-1+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha=$$
$$=2\cos^2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha=2\cos^2\alpha+2\cos 5\alpha\cos\alpha=$$
$$=2\cos\alpha(\cos\alpha+\cos 5\alpha)=2\cos\alpha\cdot 2\cos\frac{\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-5\alpha}{2}=$$
$$=4\cos\alpha\cos 3\alpha\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$$

Ответ: $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha.$

3.131. $1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right).$

Решение.

$$1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\sin^{-1}\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)=1+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-4\alpha\right)+\frac{1}{\sin\left(\frac{5}{2}\pi+4\alpha\right)}=$$
$$=1+\operatorname{tg}4\alpha+\frac{1}{\cos 4\alpha}=1+\frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha}+\frac{1}{\cos 4\alpha}=\frac{\cos 4\alpha+\sin 4\alpha+1}{\cos 4\alpha}=$$
$$=\frac{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha+2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\cos 4\alpha}=$$
$$=\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)+(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)^2}{\cos 4\alpha}=$$
$$=\frac{(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)}{\cos 4\alpha}=\frac{2(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)\cos 2\alpha}{\cos 4\alpha}=$$
$$=\frac{2\cos 2\alpha\left(\cos 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)}{\cos 4\alpha}=\frac{2\cos 2\alpha\cdot 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 4\alpha}=$$
$$=\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 4\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}.$

3.132. $\dfrac{\sin\alpha-2\cos3\alpha-\sin5\alpha}{\cos\alpha-2\sin3\alpha-\cos5\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin\alpha-2\cos3\alpha-\sin5\alpha}{\cos\alpha-2\sin3\alpha-\cos5\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\sin5\alpha)-2\cos3\alpha}{(\cos\alpha-\cos5\alpha)-2\sin3\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos3\alpha\sin(-2\alpha)-2\cos3\alpha}{-2\sin3\alpha\sin(-2\alpha)-2\sin3\alpha}=\frac{-2\cos3\alpha\sin2\alpha-2\cos3\alpha}{2\sin3\alpha\sin2\alpha-2\sin3\alpha}=$$

$$=\frac{-2\cos3\alpha(\sin2\alpha+1)}{2\sin3\alpha(\sin2\alpha-11)}=-\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{\sin2\alpha+1}{\sin2\alpha-1}=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{1+\sin2\alpha}{1-\sin2\alpha}=$$

$$=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}+\sin2\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}-\sin2\alpha}=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$$

$$=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\mathrm{ctg}3\alpha\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\mathrm{ctg}3\alpha\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Ответ: $\mathrm{ctg}3\alpha\,\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

3.133. $2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1$.

Решение.

$$2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1=$$

$$=2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)-1=$$

$$=2\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\sin\alpha-1=1-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha-1=$$

$$=-\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=-2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=$$

$$=-2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=-2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$$

Ответ: $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$.

3.134. $\dfrac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sin 4\alpha+\sin 5\alpha+\sin 6\alpha}{\cos 4\alpha+\cos 5\alpha+\cos 6\alpha}=\frac{(\sin 4\alpha+\sin 6\alpha)+\sin 5\alpha}{(\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)+\cos 5\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin 5\alpha\cos\alpha+\sin 5\alpha}{2\cos 5\alpha\cos\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{\sin 5\alpha(2\cos\alpha+1)}{\cos 5\alpha(2\cos\alpha+1)}=\frac{\sin 5\alpha}{\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}5\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg}5\alpha$.

3.135. $-\cos 5\alpha\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

Решение.

$$-\cos 5\alpha\cos 4\alpha-\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha=$$

$$=-\cos 4\alpha(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha)+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha=$$

$$=-\cos 4\alpha\cdot 2\cos 4\alpha\cos\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha=$$

$$=-2\cos^2 4\alpha\cos\alpha+2\cos^2 2\alpha\cos\alpha=-2\cos\alpha(\cos^2 4\alpha-\cos^2 2\alpha)=$$

$$=-2\cos\alpha(\cos 4\alpha-\cos 2\alpha)(\cos 4\alpha+\cos 2\alpha)=$$

$$=-2\cos\alpha(-2\sin 3\alpha\sin\alpha)\cdot 2\cos 3\alpha\cos\alpha=$$

$$=2\cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin 3\alpha\cos 3\alpha)=2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha.$$

Ответ: $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$.

3.136. $\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha$.

Решение.

$$\sin 10\alpha\sin 8\alpha+\sin 8\alpha\sin 6\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha.=$$

$$=\sin 8\alpha(\sin 10\alpha+\sin 6\alpha)-\sin 4\alpha\sin 2\alpha=$$

$$=2\sin 8\alpha\sin 8\alpha\cos 2\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha=$$

$$=2\sin^2 8\alpha\cos 2\alpha-\sin 4\alpha\sin 2\alpha=$$
$$=2\sin^2 8\alpha\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\sin 2\alpha=$$
$$=2\sin^2 8\alpha\cos 2\alpha-2\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha=2\cos 2\alpha\left(\sin^2 8\alpha-\sin^2 2\alpha\right)=$$
$$=2\cos 2\alpha(\sin 8\alpha-\sin 2\alpha)(\sin 8\alpha+\sin 2\alpha)=$$
$$=2\cos 2\alpha\cdot 2\cos 5\alpha\sin 3\alpha\cdot 2\sin 5\alpha\cos 3\alpha=$$
$$=2\cos 2\alpha(2\sin 3\alpha\cos 3\alpha)(2\sin 5\alpha\cos 5\alpha)=2\cos 2\alpha\sin 6\alpha\sin 10\alpha.$$

Ответ: $2\cos 2\alpha\sin 6\alpha\sin 10\alpha.$

3.137. $\dfrac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha-\cos 9\alpha+\cos 10\alpha}{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha-\sin 9\alpha+\sin 10\alpha}=\frac{(\cos 10\alpha+\cos 7\alpha)-(\cos 9\alpha+\cos 8\alpha)}{(\sin 10\alpha+\sin 7\alpha)-(\sin 9\alpha+\sin 8\alpha)}=$$
$$=\frac{2\cos\frac{17\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\cos\frac{17\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{17\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{17\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{17\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{17\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$
$$=\frac{\cos\frac{17\alpha}{2}}{\sin\frac{17\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{17\alpha}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{ctg}\dfrac{17\alpha}{2}.$

3.138. $\sin 5\alpha-\sin 6\alpha-\sin 7\alpha+\sin 8\alpha.$

Решение.

$$\sin 5\alpha-\sin 6\alpha-\sin 7\alpha+\sin 8\alpha=(\sin 8\alpha+\sin 5\alpha)-(\sin 7\alpha+\sin 6\alpha)=$$
$$=2\sin\frac{13\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}-2\sin\frac{13\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{13\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\sin\frac{13\alpha}{2}\left(-2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}.$$

Ответ: $-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\dfrac{13\alpha}{2}.$

3.139. $\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha.$

Решение.

$$\cos 3\alpha - \cos 4\alpha - \cos 5\alpha + \cos 6\alpha = (\cos 6\alpha + \cos 3\alpha) - (\cos 5\alpha + \cos 4\alpha) =$$
$$= 2\cos\frac{9\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} - 2\cos\frac{9\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{9\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$
$$= 2\cos\frac{9\alpha}{2}\cdot\left(-2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right) = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}.$$

Ответ: $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{9\alpha}{2}.$

3.140. $\dfrac{\sin 13\alpha + \sin 14\alpha + \sin 15\alpha + \sin 16\alpha}{\cos 13\alpha + \cos 14\alpha + \cos 15\alpha + \cos 16\alpha}.$

Решение.

$$\frac{\sin 13\alpha + \sin 14\alpha + \sin 15\alpha + \sin 16\alpha}{\cos 13\alpha + \cos 14\alpha + \cos 15\alpha + \cos 16\alpha} =$$
$$= \frac{(\sin 16\alpha + \sin 13\alpha) + (\sin 15\alpha + \sin 14\alpha)}{(\cos 16\alpha + \cos 13\alpha) + (\cos 15\alpha + \cos 14\alpha)} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{29\alpha}{2}\cos\frac{3}{2}\alpha + 2\sin\frac{29\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{29\alpha}{2}\cos\frac{3}{2}\alpha + 2\cos\frac{29\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{29\alpha}{2}\left(\cos\frac{3}{2}\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{29\alpha}{2}\left(\cos\frac{3}{2}\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{29\alpha}{2}}{2\cos\frac{29\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{29\alpha}{2}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{29\alpha}{2}.$

3.141. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha.$

Решение.

$$\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha. = (\sin 2\alpha + \sin 4\alpha) + \sin 2(3\alpha) =$$
$$= 2\sin 3\alpha\cos\alpha + 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha = 2\sin 3\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha) =$$
$$= 2\sin 3\alpha\cdot 2\cos 2\alpha\cos\alpha = 4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha.$$

Ответ: $4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha.$

3.142. $\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha.$

Решение.

$$\sin 5\alpha+\sin 6\alpha+\sin 7\alpha+\sin 8\alpha=(\sin 5\alpha+\sin 6\alpha)+(\sin 7\alpha+\sin 8\alpha)=$$
$$=2\sin\frac{11\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{15\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{11\alpha}{2}+\sin\frac{15\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{13\alpha}{2}\cos\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}.$$

Ответ: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{13\alpha}{2}.$

3.143. $\cos 5\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 12\alpha.$

Решение.

$$\cos 5\alpha+\cos 8\alpha+\cos 9\alpha+\cos 12\alpha=(\cos 5\alpha+\cos 8\alpha)+(\cos 9\alpha+\cos 12\alpha)=$$
$$=2\cos\frac{13\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{21\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}=2\cos\frac{3\alpha}{2}\left(\cos\frac{13\alpha}{2}+\cos\frac{21\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\cos\frac{3\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{17\alpha}{2}\cos 2\alpha=4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos 2\alpha\cos\frac{17\alpha}{2}.$$

Ответ: $4\cos\frac{3\alpha}{2}\cos 2\alpha\cos\frac{17\alpha}{2}.$

3.144. $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha.$

Решение.

$$3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha=3+4(2\cos^2 2\alpha-1)+2\cos^2 4\alpha-1=$$
$$=3+8\cos^2 2\alpha-4+2(2\cos^2 2\alpha-1)^2-1=$$
$$=8\cos^2 2\alpha+2(4\cos^4 2\alpha-4\cos^4 2\alpha+1)-2=$$
$$=8\cos^2 2\alpha+8\cos^4 2\alpha-8\cos^2 2\alpha+2-2=8\cos^4 2\alpha.$$

Ответ: $8\cos^4 2\alpha.$

3.145. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha},\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$

Решение.

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha(1+\cos\alpha)}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha(1-\cos\alpha)}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha(1+\cos\alpha)}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha(1-\cos\alpha)}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos\alpha}=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}\right)=$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(\sqrt{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}-\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right)=$$

$$=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\sqrt{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$

$$=\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\left(-2\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\sin\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-2\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)=2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

3.146. $1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.

Решение.

$$1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 2\alpha-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)-(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)(1-\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\cos 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)\right)(\cos 2\pi-\cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{-2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)(-2\sin(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha))}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)(-2\sin^2\alpha)}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\sin^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}.$

3.174. $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha.$

Решение.

$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 2(3\alpha)=$

$=2\sin 3\alpha\cos\alpha-2\sin 3\alpha\cos 3\alpha=2\sin 3\alpha(\cos\alpha-\cos 3\alpha)=$

$=2\sin 3\alpha\cdot(-2\sin 2\alpha\sin(-\alpha))=4\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha.$

Ответ: $4\sin 3\alpha\sin 2\alpha\sin\alpha.$

Доказать справедливость равенств **(3.148—3.152):**

3.148. $(\sin 160°+\sin 40°)(\sin 140°+\sin 20°)+(\sin 50°-\sin 70°)\times$
$\times(\sin 130°-\sin 110°)=1.$

Решение.

$(\sin 160°+\sin 40°)(\sin 140°+\sin 20°)+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 130°-\sin 110°)=$

$=(\sin(180°-20°)+\sin 40°)(\sin(180°-40°)+\sin 20°)+$

$=(\sin 50°-\sin 70°)(\sin(180°-50°)-\sin(180°-70°))=$

$=(\sin 20°+\sin 40°)(\sin 40°+\sin 20°)+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 50°-\sin 70°)=$

$=(\sin 20°+\sin 40°)^2+(\sin 50°-\sin 70°)^2=(2\sin 30°\cos 10°)^2+$

$+(2\cos 60°\sin 10°)^2=\left(2\cdot\frac{1}{2}\cos 10°\right)^2+\left(2\cdot\frac{1}{2}\sin 10°\right)^2=\cos^2 10°+\sin^2 10°=1.$

Равенство справедливо.

3.149. $(\cos 34°)^{-1}+(\mathrm{tg}\,56°)^{-1}=\mathrm{ctg}\,28°.$

Решение.

$$\left(\cos 34^\circ\right)^{-1}+\left(\operatorname{tg}56^\circ\right)^{-1}=\frac{1}{\cos 34^\circ}+\operatorname{ctg}56^\circ=\frac{1}{\cos\left(90^\circ-56^\circ\right)}+\operatorname{ctg}56^\circ=$$

$$=\frac{1}{\sin 56^\circ}+\frac{\cos 56^\circ}{\sin 56^\circ}=\frac{1+\cos 56^\circ}{\sin 56^\circ}=\frac{1+\cos 2\left(28^\circ\right)}{\sin 2\left(28^\circ\right)}=\frac{1+2\cos^2 28^\circ-1}{2\sin 28^\circ\cos 28^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos^2 28^\circ}{2\sin 28^\circ\cos 28^\circ}=\frac{\cos 28^\circ}{\sin 28^\circ}=\operatorname{ctg}28^\circ.$$

Равенство справедливо.

3.150. $\dfrac{\cos 28^\circ\cos 56^\circ}{\sin 2^\circ}+\dfrac{\cos 2^\circ\cos 4^\circ}{\sin 28^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}\sin 38^\circ}{4\sin 2^\circ\sin 28^\circ}.$

Решение.

$$\frac{\cos 28^\circ\cos 56^\circ}{\sin 2^\circ}+\frac{\cos 2^\circ\cos 4^\circ}{\sin 28^\circ}=\frac{\sin 28^\circ\cos 28^\circ\cos 56^\circ+\sin 2^\circ\cos 2^\circ\cos 4^\circ}{\sin 2^\circ\sin 28^\circ}=$$

$$=\frac{4\sin 28^\circ\cos 28^\circ\cos 56^\circ+4\sin 2^\circ\cos 2^\circ\cos 4^\circ}{4\sin 2^\circ\cos 28^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 56^\circ\cos 56^\circ+2\sin 4^\circ\cos 4^\circ}{4\sin 2^\circ\cos 28^\circ}=\frac{\sin 112^\circ+\sin 8^\circ}{4\sin 2^\circ\cos 28^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 60^\circ\cos 52^\circ}{4\sin 2^\circ\cos 28^\circ}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(90^\circ-38^\circ\right)}{4\sin 2^\circ\cos 28^\circ}=\frac{\sqrt{3}\sin 38^\circ}{4\sin 2^\circ\sin 28^\circ}.$$

Равенство справедливо.

3.151. $1-2\sin 50^\circ=0{,}5\cos^{-1}160^\circ.$

Решение.

$$1-2\sin 50^\circ=\frac{\left(1-2\sin 50^\circ\right)\cdot 2\cos 160^\circ}{2\cos 160^\circ}=\frac{2\cos 160^\circ-4\sin 50^\circ\cos 160^\circ}{2\cos 160^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos 160^\circ-2\left(\sin\left(-110^\circ\right)+\sin 210^\circ\right)}{2\cos 160^\circ}=$$

$$=-1-2\sin 50^\circ=\frac{\left(1-2\sin 50^\circ\right)\cdot 2\cos 160^\circ}{2\cos 160^\circ}=\frac{2\cos 160^\circ-4\sin 50^\circ\cos 160^\circ}{2\cos 160^\circ}=$$

$$=\frac{(2\cos160^\circ-2(\sin(-110^\circ)+\sin210^\circ)}{2\cos160^\circ}=\frac{2\cos160^\circ+2\sin110^\circ-2\sin210^\circ}{2\cos160^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos(180^\circ-20^\circ)+2\sin(90^\circ+20^\circ)-2\sin(180^\circ+30^\circ)}{2\cos160^\circ}=$$

$$=\frac{-2\cos20^\circ+2\cos20^\circ+2\sin30^\circ}{2\cos160^\circ}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{2\cos160^\circ}=\frac{1}{2\cos160^\circ}.$$

Равенство справедливо.

3.152. $(\cos70^\circ+\cos50^\circ)(\cos310^\circ+\cos290^\circ)+(\cos40^\circ+\cos160^\circ)\times$
$\times(\cos320^\circ-\cos380^\circ)=1.$

Решение.

$(\cos70^\circ+\cos50^\circ)(\cos310^\circ+\cos290^\circ)+(\cos40^\circ+\cos160^\circ)\times$

$\times(\cos320^\circ-\cos380^\circ)=(\cos70^\circ+\cos50^\circ)(\cos(360^\circ-50^\circ)+\cos(360^\circ-70^\circ))+$

$+(\cos(90^\circ-50^\circ)+\cos(90^\circ+70^\circ))(\cos(270^\circ+50^\circ)-\cos(450^\circ-70^\circ))=$

$=(\cos70^\circ+\cos50^\circ)(\cos70^\circ+\cos50^\circ)+(\sin50^\circ-\sin70^\circ)(\sin50^\circ-\sin70^\circ)=$

$=(\cos70^\circ+\cos50^\circ)^2+(\sin50^\circ-\sin70^\circ)^2=(2\cos60^\circ\cos10^\circ)^2+$

$$+(2\cos60^\circ\sin(-10^\circ))^2=\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos10^\circ\right)^2+\left(-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin10^\circ\right)^2=$$

$=\cos^2 10^\circ+\sin^2 10^\circ+1.$

Равенство справедливо.

Вычислить **(3.153—3.166):**

3.153. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}.$

Решение.

$$\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=$$

$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}+\frac{1-\cos\frac{5\pi}{4}}{2}+\frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}=$$

$$=\frac{4-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{4\pi-\pi}{4}-\cos\frac{4\pi+\pi}{4}+\cos\frac{8\pi-\pi}{4}}{2}=$$

$$=\frac{4-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{2}=$$

$$=\frac{4-\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: 2.

3.154. $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$.

Решение.

$$\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ=\operatorname{tg}(450^\circ-15^\circ)+\operatorname{tg}(360^\circ+15^\circ)=$$

$$=\operatorname{ctg}15^\circ+\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}+\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}{\sin15^\circ\cos15^\circ}=$$

$$=\frac{1}{\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{2}{2\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{2}{\sin30^\circ}=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4.$$

Ответ: 4.

3.155. $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$.

Решение.

$$\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ=\operatorname{tg}(270^\circ-15^\circ)-\operatorname{tg}(180^\circ+15^\circ)=$$

$$=\operatorname{ctg}15^\circ-\operatorname{tg}15^\circ=\frac{\cos15^\circ}{\sin15^\circ}-\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ}{\sin15^\circ\cos15^\circ}=$$

$$=\frac{\cos30^\circ}{\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{2\cos30^\circ}{2\sin15^\circ\cos15^\circ}=\frac{2\cos30^\circ}{\sin30^\circ}=2\operatorname{ctg}30^\circ=2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

3.156. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$

Решение.

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=-\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)=-\left(2\cos^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)-1\right)=$$

$$=1-2\left(\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)\right)^2=1-2\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}\right)^2=1-2\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^2=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}.$$

Ответ: $\frac{7}{25}$.

3.157. $\operatorname{ctg}\frac{13}{12}\pi-\operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi.$

Решение.

$$\operatorname{ctg}\frac{13}{12}\pi-\operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi=\operatorname{ctg}\frac{12\pi+\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{5}{12}\pi=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\frac{\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}-\frac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\frac{\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{4\pi}{12}}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{12}-\cos\frac{6\pi}{12}\right)}=\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-0}=2\sqrt{3}.$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

3.158. $\sin\left(2\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

Решение.

$$\sin\left(2\alpha+\frac{5}{4}\pi\right)=\sin\left(\frac{4\pi+\pi}{4}+2\alpha\right)=\sin\left(\pi+\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)=-\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\frac{4}{9}-\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{9}}=-\frac{17\sqrt{2}}{26}.$$

Ответ: $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

3.159. $\cos\left(2\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

Решение.

$$\cos\left(2\alpha+\frac{7}{4}\pi\right)=\cos\left(\frac{8\pi-\pi}{4}+2\alpha\right)=\cos\left(2\pi+\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{1+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha+2\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{9}+1}=\frac{7\sqrt{2}}{26}.$$

Ответ: $\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

3.160. $\dfrac{5}{6+7\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

Решение.

$$\frac{5}{6+7\sin 2\alpha} = \frac{5}{6+\dfrac{14\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{5+5\operatorname{tg}^2\alpha}{6+6\operatorname{tg}^2\alpha+14\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{5+5\cdot 0{,}04}{6+6\cdot 0{,}04+14\cdot 0{,}2} = \frac{65}{113}.$$

Ответ: $\dfrac{65}{113}$.

3.161. $\dfrac{2}{3+4\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$.

Решение.

$$\frac{2}{3+4\cos 2\alpha} = \frac{2}{3+\dfrac{4-4\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{2+2\operatorname{tg}^2\alpha}{3+3\operatorname{tg}^2\alpha+4-4\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2+2\operatorname{tg}^2\alpha}{7-\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{2+2\cdot 0{,}04}{7-0{,}04} = \frac{26}{87}.$$

Ответ: $\dfrac{26}{87}$.

3.162. $\sin\alpha$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2} = 1{,}4$.

Решение.

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2} = 1{,}4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1{,}96, \quad \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha = 1{,}96,$$

$1+\sin\alpha = 1{,}96.$

Тогда $\sin\alpha = 1{,}96-1 = 0{,}96.$

Ответ: $\sin\alpha = 0{,}96$.

3.163. $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = p$.

Решение.

$\sin\alpha - \cos\alpha = p \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = p^2, \quad 1 - \sin 2\alpha = p^2,$

откуда $\sin 2\alpha = 1 - p^2$.

Ответ: $1 - p^2$.

3.164. $2 - 13\cos 2\alpha + \sin^{-1} 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{5}$.

Решение.

$$2 - 13\cos 2\alpha + \sin^{-1} 2\alpha = 2 - 13\cos 2\alpha + \frac{1}{\sin 2\alpha} = 2 - \frac{13 - 13\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = 2 - \frac{13 - 13\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} = 2 - \frac{13 - \dfrac{13}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}} + \frac{1 + \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\dfrac{2}{\operatorname{ctg}\alpha}} =$$

$$= 2 - \frac{13\operatorname{ctg}^2\alpha - 13}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} + \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = 2 - \frac{\dfrac{13}{25} - 13}{\dfrac{1}{25} + 1} + \frac{\dfrac{1}{25} + 1}{-\dfrac{2}{5}} =$$

$$= 2 - \frac{13 - 325}{1 + 25} - \frac{1 + 25}{2 \cdot 5} = 2 + \frac{312}{26} - \frac{26}{10} = 2 + 12 - \frac{13}{5} = \frac{57}{5}.$$

Ответ: $\frac{57}{5}$.

3.165. $1 + 5\sin 2\alpha - 3\cos^{-1} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

Решение.

$$1 + 5\sin 2\alpha - 3\cos^{-1} 2\alpha = 1 + 5\sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha} = 1 + \frac{10\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{3}{\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$=1+\frac{10\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{3+3\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=1+\frac{10(-2)}{1+4}-\frac{3+3(-2)^2}{1-4}=$$

$$=1-\frac{20}{5}+\frac{15}{3}=1-4+5=2.$$

Ответ: 2.

3.166. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+2\alpha\right)=\frac{9}{11}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi+\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi+\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\pi+\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\operatorname{tg}\left(\pi-\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\sin 2\alpha}{\cos\frac{\pi}{2}+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2}{\operatorname{ctg}2\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+2\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{6\pi+\pi}{2}+2\alpha\right)=\operatorname{tg}\left(3\pi+\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=$$

$$=-\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{9}{11},\quad \operatorname{ctg}2\alpha=-\frac{9}{11};$$

$$\frac{2}{\operatorname{ctg}2\alpha}=\frac{2}{-\frac{9}{11}}=-\frac{22}{9}.$$

Ответ: $-\frac{22}{9}$.

3.167. Найти число $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{12}{5}$.

Решение.

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{12}{5},\quad \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{12}{5}=0\quad\Rightarrow$$

$\Rightarrow 6\operatorname{tg}^2\alpha - 5\operatorname{tg}\alpha - 6 = 0$, откуда $(\operatorname{tg}\alpha)_1 = \frac{3}{2}$, что не подходит к решению задачи, так как по условию угол принадлежит 2-й четверти и его тангенс отрицателен, и $(\operatorname{tg}\alpha)_2 = -\frac{2}{3}$.

Отсюда, $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ n \in Z$. Так как $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi$.

Ответ: $\pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

3.168. Доказать, что если A и B — острые углы некоторого прямоугольного треугольника, то $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B$.

Решение.

$\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin A\cos A + 2\sin B\cos B = 4\sin A\sin B$.

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.

Отсюда $A + B = 90°$, $B = 90° - A$, и

$2\sin A\cos A + 2\sin(90° - A)\cos(90° - A) = 4\sin A\sin(90° - A) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin A\cos A + 2\cos A\sin A = 4\sin A\cos A$,

$4\sin A\cos A = 4\sin A\cos A$,

что и требовалось доказать.

3.169. Найти число $\beta\left(\frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$, если известно, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{9}{19}$ и $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

Решение.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{9}{19}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha = -4$, то $\frac{-4 + \operatorname{tg}\beta}{1 + 4\operatorname{tg}\beta} = \frac{9}{19}$, $tg\beta = -4$, откуда

$\beta=-\operatorname{arctg}5+\pi n, n\in Z$. С учетом того, что $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, получим $\beta=\pi-\operatorname{arctg}5$.

Ответ: $\beta=\pi-\operatorname{arctg}5$.

3.170. Найти $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$, если известно, что $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Решение.

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Возведя обе части равенства $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ в квадрат, получим

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{1}{4},$$

откуда

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8},\ \sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{9}{64}.$$

Подставив это значение $\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ в исходное равенство, получим

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\cdot\frac{9}{64}=1-\frac{9}{32}=\frac{32-9}{32}=\frac{23}{32}.$$

Ответ: $\frac{23}{32}$.

3.171. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}, \operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Найти $\alpha+\beta$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{3}{4}+\frac{1}{7},\quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{25}{28},$$

$$\frac{\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{25}{28}.$$

По условию $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}, \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3}{4}, \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{9}{16}, \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{9}{16}$, откуда

$\sin^2\alpha = \frac{16}{25}$ и, так как $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}; \ \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7}, \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{49}, \frac{1-\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{1}{49},$$

откуда

$\sin^2\beta = \frac{49}{50}$ и, так как $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Подставляя полученные значения, получаем

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}} = \frac{25}{28}, \ \sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\alpha+\beta = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; и учитывая ограничения на α, β, имеем $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$.

Ответ: $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$.

3.172. Найти $\operatorname{ctg}2\alpha$, если известно, что $\sin(\alpha-90^\circ) = -\frac{2}{3}$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Решение.

$$\sin(\alpha-90^\circ) = -\frac{2}{3}, \quad -\sin(90^\circ-\alpha) = -\frac{2}{3}, \quad \sin(90^\circ-\alpha) = \frac{2}{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos^2\alpha = \frac{4}{9},$$

$$1-\sin^2\alpha = \frac{4}{9}, \quad \sin^2\alpha = \frac{5}{9}.$$

С учетом того, что $x\in(270°;360°)$, имеем $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$. Учитывая найденные значения, получим

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}=\frac{1}{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{4}{9}-\frac{5}{9}}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{20}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{20}$.

3.173. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, то $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha(1-\operatorname{tg}^2\beta)+2\operatorname{tg}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha(1-\operatorname{tg}^2\beta)-2\sin\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Так как $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}},\ \cos^2\alpha=\frac{49}{50},\ 1-\sin^2\alpha=\frac{49}{50},\ \sin^2\alpha=\frac{1}{50},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}}.$$

Учитывая значения $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{50}}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, имеем

$$\frac{\sin\alpha(1-\mathrm{tg}^2\beta)+2\,\mathrm{tg}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha(1-\mathrm{tg}^2\beta)-2\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{50}}\left(1-\frac{1}{9}\right)+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{\sqrt{50}}}{\frac{7}{\sqrt{50}}\left(1-\frac{1}{9}\right)-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{50}}}=1.$$

Отсюда $\mathrm{tg}(\alpha+2\beta)=1$, т.е. $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$ (при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$), что и требовалось доказать.

3.174. Найти $\mathrm{tg}\,2\alpha$, если известно, что $\cos(\alpha-90°)=0{,}2$ и $90°<\alpha<180°$.

Решение.

$\cos(\alpha-90°)=\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha=0{,}2, \sin^2\alpha=0{,}04,$

$1-\cos^2\alpha=0{,}04, \cos^2\alpha=0{,}96=\frac{24}{25},$

$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{24}{25}}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ при $\alpha\in(90°;180°)$.

Далее, $\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)}{\frac{24}{25}-\frac{1}{25}}=-\frac{4\sqrt{6}}{23}.$

Ответ: $-\frac{4\sqrt{6}}{23}$.

3.175. Доказать, что если α и β удовлетворяют неравенствам $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$ и $\mathrm{tg}\,\alpha=5$, $\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{2}{3}$, то $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$.

Решение.

$\mathrm{ctg}\beta=\frac{2}{3}, \frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{2}{3}, \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}=\frac{4}{9}, \frac{1-\sin^2\beta}{\sin^2\beta}=\frac{4}{9}, \sin^2\beta=\frac{9}{13},$

откуда при $0\le\beta\le\frac{\pi}{2}$ имеем

$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{13}};\ \mathrm{tg}\alpha=5;\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=5;\ \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=25;\ \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=25;\ \cos^2\alpha=\frac{1}{26}.$

Отсюда при $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ находим $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$. Тогда

$$\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3} - 5 = -\frac{13}{3},$$

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cos\alpha} = -\frac{13}{3}.$$

Использовав найденные значения $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$, имеем

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}}} = -\frac{13}{3}, \quad \frac{13\sqrt{2}\cos(\alpha+\beta)}{3} = -\frac{13}{3},$$ откуда

$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, отсюда $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$, что и требовалось доказать.

3.176. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{5}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найти $\alpha+\beta$.

Решение.

$$\operatorname{ctg}\alpha = 4, \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 4, \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 16, \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 16,$$

откуда $\sin^2\alpha = \frac{1}{17}$, отсюда при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}; \ \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{5}{3}, \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{25}{9}, \frac{1-\sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{25}{9},$$

откуда $\sin^2\beta = \frac{9}{34}$, следовательно, при $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

Тогда $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = 4 + \frac{5}{3} = \frac{17}{3}$.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{17}{3}.$$

Использовав найденные значения $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$, имеем

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}} = \frac{17}{3}, \quad \frac{17\sqrt{2}\sin(\alpha+\beta)}{3} = \frac{17}{3},$$

откуда $\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отсюда $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$ для $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$.

3.177. Вычислить $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, если $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$.

Решение.

$$(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta) = \left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right) = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}\times$$

$$\times\frac{\sin\beta+\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))} = \frac{2\left(\cos(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cos(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2.$$

Ответ: 2.

3.178. Вычислить $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, если $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$.

Решение.

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) = \left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}\times$$

$$\times\frac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))}=\frac{2\left(\cos(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cos(\alpha-\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}}=2.$$

Ответ: 2.

3.179. Доказать, что если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{14}$ и α,β — острые углы, то $\alpha+\beta=60^\circ$.

Решение.

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{21}}{7}, \sin^2\alpha=\frac{21}{49}, 1-\cos^2\alpha=\frac{21}{49}, \cos^2\alpha=\frac{28}{49};$$

так как $\alpha\alpha$ — острый угол, то $\cos\alpha=\sqrt{\frac{28}{49}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$;

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{14}, \sin^2\beta=\frac{21}{196}, 1-\cos^2\beta=\frac{21}{196}, \cos^2\beta=\frac{175}{196};$$

так как $\beta\beta$ — острый угол, то $\cos\beta=\sqrt{\frac{175}{196}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. Тогда

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{21}}{7}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{14}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\alpha+\beta=60^\circ$, что и требовалось доказать.

3.180. Показать, что выражение $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$ неотрицательно в области определения.

Решение.

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{\dfrac{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{8\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\left(\frac{\sqrt{8}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2\geq 0,$$

что и требовалось доказать.

3.181. *Исключить* α *из равенств* $x=\operatorname{tg}^2\alpha$, $y=\sin^2\alpha$.

Решение.

$$x=\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{y}{\cos^2\alpha} \text{ и } \frac{y}{x}=\cos^2\alpha.$$

Отсюда

$$y+\frac{y}{x}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha,\ y+\frac{y}{x}=1,\ xy+y=x,\ x-y=xy.$$

Ответ: $x-y=xy$.

3.182. Доказать, что $\cos 2-\cos 8<0$.

Решение.

$\cos 2-\cos 8=-2\sin 5\sin(-3)=2\sin 5\sin 3$.

Так как $\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$, то $\sin 5<0$; $3<\pi$, поэтому $\sin 3>0$. Тогда $2\sin 5\sin 3<0$ и $\cos 2-\cos 8<0$, что и требовалось доказать.

3.183. Величины α, β, γ в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что $\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta$.

Решение.

Согласно свойству членов арифметической прогрессии

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},\ k=2,3,\ldots,n-1,$$

поэтому

$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\beta,$$

что и требовалось доказать.

3.184. Дана дробь $\frac{5}{1+\sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ-10-8\sqrt{3}}}$. Преобразовать подкоренное выражение к более простому виду, после чего дробь сократить.

Решение.

$$\frac{5}{1+\sqrt[3]{32\cos^4 15^\circ-10-8\sqrt{3}}}=\frac{5}{1+\sqrt[3]{32(\cos^2 15^\circ)^2-10-8\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{5}{1+\sqrt[3]{32\left(\frac{1+\cos 30^\circ}{2}\right)^2-10-8\sqrt{3}}}=\frac{5}{1+\sqrt[3]{8\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-10-8\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{5}{1+\sqrt[3]{2(2+\sqrt{3})^2-10-8\sqrt{3}}}=\frac{5}{1+\sqrt[3]{2(4+4\sqrt{3}+3)-10-8\sqrt{3}}}=\frac{5}{1+\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\frac{5(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{(1+\sqrt[3]{4})(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}=\frac{5(1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16})}{1+4}=1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}.$$

Ответ: $1-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}$.

3.185. Выразить $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$ через m, где $m=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение.

$$\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha=\left((\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha\right)^2-2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha=$$
$$=\left((\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-2\right)^2-2=\left(m^2-2\right)^2-2=m^4-4m^2+4-2=$$
$$=m^4-4m^2+2.$$

Ответ: m^4-4m^2+2.

Решения к главе 4

ПРОГРЕССИИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называемым *разностью прогрессии*.

Если заданы первый член a_1 и разность арифметической прогрессии d, то n-й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1), \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) называется *формулой общего члена арифметической прогрессии*.

Свойства членов арифметической прогрессии

1. Каждый средний член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \; k = 2, 3, \ldots, n-1. \qquad (4.2)$$

2. В конечной арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны сумме крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-k+1} = \ldots = 2a_1 + d(n-1). \qquad (4.3)$$

Сумма n первых членов арифметической прогрессии

Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \tag{4.4}$$

Учитывая (4.3), т.е что $a_1 + a_n = 2a_1 + d(n-1)$, формулу (4.4) можно записать в виде

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \tag{4.5}$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность, у которой задан первый член b_1, а каждый следующий член, начиная со второго,равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же постоянное для данной последовательности число q, называемое *знаменателем прогрессии.*

Если заданы первый член b_1 и знаменатель геометрической прогрессии q,то *n-й член геометрической прогрессии вычисляется по формуле*

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) называется *формулой общего члена геометрической прогрессии.*

Свойства членов геометрической прогрессии

1. Квадрат каждого среднего члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов, т.е.

$$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1},\ k = 2,3,\dots,n-1. \tag{4.7}$$

2. В конечной геометрической прогессии произведения членов, равноотстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = \dots = b_k \cdot b_{n-k+1} \dots = b_1^2 \cdot q^{n-1}. \tag{4.8}$$

3. Произведение n первых членов геометрической прогрессии с по-

ложительными членами равно корню квадратному из n-й степени произведения ее крайних членов:

$$P_n = \sqrt{(b_1 \cdot b_n)^n}. \tag{4.9}$$

В общем случае

$$|P_n| = \sqrt{|b_1 \cdot b_n|^n}.$$

Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии

Сумма n первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} \, (q \neq 1). \tag{4.10}$$

Учитывая (4.6), т.е. что $b_n = b_1 q^{n-1}$, формулу (4.10) можно представить в виде

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \tag{4.11}$$

Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

Бесконечный числовой ряд, образованный из членов геометрической прогрессии $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots$, при $|q| < 1$ сходится, и его сумма S равна

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \tag{4.12}$$

Формулу (4.12) называют также *формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.*

4.001. За изготовление и установку самого нижнего железобетонного кольца заплатили 2600 руб., а за каждое следующее заплатили на 200 руб. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 4000 руб. Средняя стоимость изготовления и установки одного кольца оказалась равной $2244\frac{4}{9}$ руб. Сколько колец было установлено?

Решение.

Пусть $a_1 = 2600$ — первый член арифметической прогрессии, $d = -200$ — разность этой прогрессии, n — количество членов.

Тогда по формуле (4.5) получаем $\dfrac{\dfrac{2\cdot 2600+(n-1)(-200)}{2}\cdot n+4000}{n}=2244\frac{4}{9}$,

$9n^2-41n-360=0$, откуда $n_1=9; n_2=-\frac{40}{9}$ (не подходит).

Ответ: $n=9$.

4.002. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвертого ее членов равно 65/72. Найти сумму 17 первых членов этой прогрессии.

Решение.

Имеем $\begin{cases} a_1+a_5=\frac{5}{3}, \\ a_3\cdot a_4=\frac{65}{72}. \end{cases}$

Используя формулу (4.1), находим

$$\begin{cases} a_1+a_1+4d=\frac{5}{3}, \\ (a_1+2d)(a_1+3d)=\frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+4d=\frac{5}{3}, \\ (a_1+2d)(a_1+3d)=\frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1+2d=\frac{5}{6}, \\ (a_1+2d)((a_1+2d)+d)=\frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+2d=\frac{5}{6}, \\ \frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}+d\right)=\frac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=\frac{5}{6}-2d, \\ d=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=\frac{5}{6}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}, \\ d=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

По формуле (4.5) получаем $S_{17} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot 16}{2}\cdot 17 = \dfrac{119}{3}$.

Ответ: $\dfrac{119}{3}$.

4.003. В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, а за каждый последующий — на $1/2$ очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

Решение.

Пусть $a_1 = 1$ — первый член арифметической прогрессии, $d = \dfrac{1}{2}$ — ее разность, $S_n = 7$ — сумма n членов этой прогрессии, где n — количество членов. По формуле (4.5) имеем

$$\frac{2+(n-1)\cdot\frac{1}{2}}{2}\cdot n = 7,\ n^2+3n-28=0,$$

откуда $n_1 = -7$ (не подходит); $n_2 = 4$. Отсюда: стрелок попал в цель 21 раз.

Ответ: 21 раз.

4.004. Найти три первых члена a_1, a_2, a_3 арифметической прогрессии, если известно, что $a_1 + a_3 + a_5 = -12$ и $a_1a_3a_5 = 80$.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = -12, \\ a_1\cdot a_3\cdot a_5 = 80. \end{cases}$

Используя формулу (4.1), получим

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d = -12, \\ a_1(a_1+2d)(a_1+4d) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = -4, \\ a_1(a_1+2d)(a_1+2d+2d) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ a_1 \cdot (-4)(-4+2d) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ a_1(d-2) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ (-4-2d)(d-2) = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ d^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ d = \pm 3. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ d = -3 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1 = -4-2d, \\ d = 3, \end{cases}$

т.е.

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ d = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1 = -10, \\ d = 3. \end{cases}$$

Тогда

$$a_1' = 2, a_2' = 2-3 = -1, a_3' = 2-6 = -4;$$

или

$$a_1'' = -10, a_2'' = -10+3 = -7, a_3'' = -10+6 = -4.$$

Ответ: 1) 2, –1, –4; 2) –10, –7, –4.

4.005. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Написать три первых члена этой прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} (a_1+d)d = 30, \\ (a_1+2d)+(a_1+4d) = 32 \end{cases}$ $S_n = 112 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 = 16-3d, \quad (16-2d)d = 30, \quad 2d^2 - 16d + 30 = 0$$

или

$$d^2 - 8d + 15 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d' = 3, \\ a_1' = 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} d'' = 5 \\ a_1'' = 1 \end{cases}.$$

Для каждого из решений воспользуемся формулой (4.5).

1) При $a_1' = 7,\ d' = 3$ получим

$$112 = \frac{14 + 3(n-1)}{2}n, \quad 3n^2 + 11n - 224 = 0,$$

откуда $n_1 = 7$, $n_2 = -\frac{32}{3}$ (не подходит). В этом случае имеем

$$a_1' = 7, a_2' = 10, a_3' = 13.$$

2) При $a_1'' = 1,\ d'' = 5$ имеем $112 = \frac{2 + 5(n-1)}{2}n, \quad 5n^2 - 3n - 224 = 0,$

откуда $n = 7$, $n = -6{,}4$ (не подходит). В этом случае три члена таковы: $a_1'' = 1, a_2'' = 6, a_3'' = 11$.

Ответ: 7; 1) 7, 10,13; 2) 1, 6, 11.

4.006. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту, на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

Решение.

Пусть $a_1 = 800$ — первый член арифметической прогрессии, $d = -25$ — разность, $S_n = 5700$ — сумма n членов этой прогрессии. Используя формулу (4.5), получим

$$\frac{1600 - (n-1)25}{2}n = 5700, \quad n^2 - 65n + 456 = 0,$$

отсюда $n_1 = 8$, $n_2 = 57$ (не подходит).

Ответ: за 8 часов.

4.007. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_9 = 5a_2, \\ a_{13} = 2a_6 + 5. \end{cases}$

Используя формулу (4.1), получим

$$\begin{cases} a_1 + 8d = 5(a_1 + d), \\ a_1 + 12d = 2(a_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a_1 = 3d, \\ a_1 = 2d - 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4(2d-5)=3d, \\ a_1=2d-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=4, \\ a_1=3. \end{cases}$$

Ответ: 3; 4.

4.008. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна –49, а сумма средних членов равна 14.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} b_1+b_4=-49, \\ b_2+b_3=14. \end{cases}$

Используя формулу (4.6), получим

$$\begin{cases} b_1+b_1q^3=-49, \\ b_1q+b_1q^2=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q^3)=-49, \\ b_1q(1+q)=14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q)(1-q+q^2)=-49, \\ b_1q(1+q)=14. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{b_1(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q(1+q)}=-\frac{49}{14}, \quad \frac{q^2-q+1}{q}+\frac{49}{14}=0, \quad 14q^2+35q+14=0;$$

$2q^2+5q+2=0$ т.е. $q'=-2,\ q''=-\frac{1}{2},\ b_1'=7,\ b_1''=-56$.

Тогда получим:

1) $b_1'=7,\ b_2'=-14,\ b_3'=28,\ b_4'=-56$;

2) $b_1''=-56,\ b_2''=28,\ b_3''=-14,\ b_4''=7$.

Ответ: 1) 7, –14, 28, –56; 2) –56, 28, –14, 7.

4.009. Найти третий член бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q|<1$, сумма которой равна 8/5, второй член равен –1/2.

Решение.

Используя формулы $S=\frac{b_1}{1-q}$ и $b_n=b_1q^{n-1}$, получим $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q}=\frac{8}{5}, \\ b_1q=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 = \frac{8-5q}{5}$, $16q^2 - 16q - 5 = 0$, откуда найдем $q_1 = -\frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{5}{4} > 1$ (не подходит). Тогда $b_3 = b_1 q^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

4.010. Найти три первых члена бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна 93/16.

Решение.

Используя формулы $S = \frac{b_1}{1-q}$ и (4.11), получим

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 6, \\ \frac{b_1\left(1-q^5\right)}{1-q} = \frac{93}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 6(1-q), \\ \frac{6(1-q)\left(1-q^5\right)}{1-q} = \frac{93}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 6(1-q), \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 6\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Тогда $b_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $b_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Ответ: $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$.

4.011. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна 14/9. Найти эти числа.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{14}{9}. \end{cases}$

Используя формулу (4.1), получим

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 2, \\ a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = \dfrac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = \dfrac{2}{3}, \\ a_1^2 + \dfrac{4}{9} + \left(\dfrac{2}{3} + d\right)^2 = \dfrac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \dfrac{2 - 3a_1}{3}, \\ 3a_1^2 - 4a_1 + 1 = 0. \end{cases}$$ Отсюда имеем: 1) $\begin{cases} a_1' = 1, \\ d' = -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a_1'' = \dfrac{1}{3}, \\ d'' = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Тогда

1) $a_1' = 1,\ a_2' = \dfrac{2}{3},\ a_3' = \dfrac{1}{3}$; 2) $a_1'' = \dfrac{1}{3},\ a_2'' = \dfrac{2}{3},\ a_3'' = 1$.

Ответ: 1) $1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1$.

4.012. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму 11 первых членов этой прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $a_3 + a_9 = 8$. По формуле (4.1) получаем $a_1 + 2d + a_1 + 8d = 8$, $2a_1 + 10d = 8$, а по формуле (4.5), находим $S_{11} = \dfrac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = 44$.

Ответ: 44.

4.013. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему члену прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найти сумму 10 первых членов арифметической прогрессии.

Решение.

Из условия имеем: $a_1 - 1$, $a_1 + d - 1$, $a_1 + 2d + 1$ — три последовательных члена геометрической прогрессии. По формуле (4.5) находим $S_3 = \dfrac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 15$ или $a_1 + d = 5$. По формуле (4.7) получаем $(a_1 + d - 1)^2 = (a_1 - 1)(a_1 + 2d + 1)$. Подставляя в это уравнение значение

$a_1=5-d$, получим $16=(4-d)(6+d)$, $d^2+2d-8=0$. Отсюда $d_1=-4$, $d_2=2$. Тогда $a_1'=9$, $a_2'=5$, $a_3'=1$; $a_1''=3$, $a_2''=5$, $a_3''=7$. Учитывая, что по условию $a_1<a_2<a_3$, получим $a_1=3$, $d=2$. Тогда

$$S_{10}=\frac{2\cdot3+2\cdot9}{2}\cdot10=120.$$

Ответ: 120.

4.014. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=4n^2-3n$. Найти три первых члена этой прогрессии.

Решение.

Пусть n=2 и n=3. По формуле (4.4), находим

$$\begin{cases} S_2=\dfrac{a_1+a_2}{2}\cdot2=4\cdot(2)^2-3\cdot2=10, \\ S_3=\dfrac{a_1+a_3}{2}\cdot3=4\cdot(3)^2-3\cdot3=18 \end{cases}$$

или по формуле (4.1) получаем

$$\begin{cases} a_1+a_1+d=10, \\ a_1+a_1+2d=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+d=10, \\ a_1+d=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1, \\ d=8. \end{cases}$$

Тогда $a_2=a_1+d=9$, $a_3=a_1+2d=17$.

Ответ: 1, 9, 17.

4.015. Вычислить

$$\left(1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+\ldots+199^2\right)-\left(2^2+4^2+6^2+(2n)^2+\ldots+200^2\right).$$

Решение.

Из условия имеем

$$1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2+\ldots+199^2-2^2-4^2-6^2-(2n)^2-\ldots-200^2=$$
$$=(1-2)^2+\left(3^2-4^2\right)+\left(5^2-6^2\right)+\ldots+\left((2n-1)^2-(2n)^2\right)+\ldots+\left(199^2-200^2\right)=$$
$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+\ldots+(2n-1-2n)(2n-1+2n)+$$
$$+\ldots+(199-200)(199+200)=-3-7-11-\ldots-(4n-1)-\ldots-399.$$

Отсюда $a_1=-3$, $d=-4$, $a_n=-399$. Используя формулы (4.4) и $n=\dfrac{a_n-a_1}{d}+1$, получим

$$S_n=\frac{-3-399}{2}\left(\frac{-399+3}{-4}+1\right)=-20100.$$

Ответ: -20100.

4.016. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} b_1-b_2=35, \\ b_3-b_4=560. \end{cases}$

По формуле (4.6) получаем

$$\begin{cases} b_1-b_1q=35, \\ b_1q^2-b_1q^3=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1-q)=35, \\ b_1q^2(1-q)=560 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-q}{q^2(1-q)}=\frac{35}{560} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q^2=16, q_1=-4, q_2=4$. Подставляя $q_1=-4$, получим

$b_1'=7, b_2'=-28, b_3'=112, b_4'=-448$. Подставляя $q_2=4$, получим

$b_1''=-\dfrac{35}{3}$, $b_2''=-\dfrac{140}{3}$, $b_3''=-\dfrac{560}{3}$, $b_4''=-\dfrac{2240}{3}$.

Ответ: 1) $7, -28, 112, -448$; 2) $-\dfrac{35}{3}, -\dfrac{140}{3}, -\dfrac{560}{3}, -\dfrac{2240}{3}$.

4.017. Найти четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, у которой третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} b_3-b_1=9, \\ b_2-b_4=18. \end{cases}$

По формуле (4.6) получаем

$$\begin{cases} b_1q^2-b_1=9, \\ b_1q-b_1q^3=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^2-1)=9, \\ -b_1q(q^2-1)=18 \end{cases} \Rightarrow \frac{q^2-1}{-q(q^2-1)}=\frac{9}{18} \Rightarrow$$

$\Rightarrow q=-2$. Подставляя $q=-2$, получаем $b_1=\dfrac{9}{q^2-1}=\dfrac{9}{4-1}=3$. Тогда

$b_2=-6, b_3=12, b_4=-24$.

Ответ: $3, -6, 12, -24$.

4.018. Знаменатель геометрической прогрессии равен 1/3, четвертый член этой прогрессии равен 1/54, а сумма всех ее членов равна 121/162. Найти число членов прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} b_4 = \dfrac{1}{54}, \\ S_n = \dfrac{121}{162}. \end{cases}$

По формулам (4.6) и (4.11) получаем

$$b_4 = b_1 q^3 = b_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3; \ \frac{b_1}{27} = \frac{1}{54}, \ b_1 = \frac{1}{2};$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}; \ \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162} \Rightarrow 243(3^n - 1) = 242 \cdot 3^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ 3^n = 243, \ n = 5.$

Ответ: $n = 5$.

4.019. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что $b_4 - b_2 = -45/32$ и $b_6 - b_4 = -45/512$.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} b_4 - b_2 = -\dfrac{45}{32}, \\ b_6 - b_4 = -\dfrac{45}{512}. \end{cases}$

Используя формулу (4.6), получим

$$\begin{cases} b_1 q^3 - b_1 q = -\dfrac{45}{32}, \\ b_1 q^5 - b_1 q^3 = -\dfrac{45}{512} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q(q^2 - 1) = -\dfrac{45}{32}, \\ b_1 q^3 (q^2 - 1) = -\dfrac{45}{512} \end{cases} \Rightarrow \frac{q(q^2-1)}{q^3(q^2-1)} = \frac{512}{32} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ q^2=\frac{1}{16},\ q_1=-\frac{1}{4},\ q_2=\frac{1}{4}$. Подставляя эти значения q_1 и q_2, найдем $b_1'=-6$ и $b_1''=6$.

Ответ: 1) $-6,-\frac{1}{4}$; 2) $6,\frac{1}{4}$.

4.020. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что ее знаменатель равен 3, а сумма шести первых членов равна 1820.

Решение.

Из условия имеем $q=3,\ S_6=1820$.

По формуле (4.11) получаем $\frac{b_1\left(1-3^6\right)}{1-3}=1820,\ b_1=5$.

Используя формулу (4.6), найдем $b_5=b_1q^4=5\cdot(3)^4=405$.

Ответ: 5, 405.

4.021. Арифметическая прогрессия обладает следующим свойством: при любом n сумма ее n первых членов равна $5n^2$. Найти разность этой прогрессии и три первых ее члена.

Решение.

Пусть $n=2$ и $n=3$. По формуле (4.5) находим

$$\begin{cases}\frac{2a_1+d}{2}\cdot 2=5\cdot 2^2,\\ \frac{2a_1+2d}{2}\cdot 3=5\cdot 3^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a_1+d=20,\\ a_1+d=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=10,\\ a_1=5.\end{cases}$$

Тогда $a_2=15,\ a_3=25$.

Ответ: 10; 5, 15, 25.

4.022. Произведение трех первых членов геометрической прогрессии равно 1728, а их сумма равна 63. Найти первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases}b_1\cdot b_2\cdot b_3=1728,\\ b_1+b_2+b_3=63.\end{cases}$

Используя формулу (4.6), получим

$$\begin{cases} b_1 \cdot b_1q \cdot b_1q^2 = 1728, \\ b_1 + b_1q + b_1q^2 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b_1q)^3 = 1728, \\ b_1 + b_1q + (b_1q)q = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q = 12, \\ b_1 + 12 + 12q = 63 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1q = 12, \\ b_1 + 12q = 51. \end{cases} \Rightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0,$$

$q = 4$ или $q = \frac{1}{4}$.

Отсюда получаем $\begin{cases} q = 4, \\ b_1 = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} q = \frac{1}{4}, \\ b_1 = 48. \end{cases}$

Ответ: 1) 3, 4; 2) 48, $\frac{1}{4}$.

4.023. Решить уравнения:

а) $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = 13/6$, где $|x| < 1$;

б) $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{7}{2}$, где $|x| < 1$.

Решение.

а) $2x + 1 + (x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots) = \frac{13}{6}$.

По формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ получаем

$$2x + 1 + \frac{x^2}{1+x} = \frac{13}{6} \Rightarrow 18x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{7}{9};$$

б) $\frac{1}{x} + (x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots) = \frac{7}{2}$.

По формуле (4.12) получаем

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{7}{2},\ 9x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Ответ: а) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{9}$; б) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

4.024. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна –22. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

Решение.

Из условия имеем $a_1 = 429,\ d = -22,\ S_n = 3069$.

По формуле (4.5) получаем

$$\frac{2\cdot 429 - 22(n-1)}{2}\cdot n = 3069,\ (429 - 11(n-1))n = 3069,$$

$$n^2 - 40n + 279 = 0 \Rightarrow n_1 = 9,\ n_2 = 31.$$

Ответ: 9 или 31.

4.025. Сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $|q| < 1$ равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 153,6. Найти четвертый член и знаменатель прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = 16, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots = 153{,}6, \end{cases}$

По формуле (4.6) получаем

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots = 16, \\ b_1^2 + b_1^2 q^2 + b_1^2 q^4 + \ldots = 153{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1 + q + q^2 + \ldots) = 16, \\ b_1^2(1 + q^2 + q^4 + \ldots) = 153{,}6. \end{cases}$$

По формуле (4.12) получаем

$$\begin{cases} b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q} = 16, \\ b_1^2 \cdot \dfrac{1}{1-q^2} = 153{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_1 = 16(1-q) \Rightarrow (16(1-q))^2 \cdot \dfrac{1}{1-q^2} = 153{,}6$, откуда $q = \dfrac{1}{4}$. Тогда $b_1 = 16\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = 12$. По формуле (4.6) получаем $b_4 = b_1 q^3 = 12 \cdot \dfrac{1}{64} = \dfrac{3}{16}$.

Ответ: $\dfrac{3}{16}, \dfrac{1}{4}$.

4.026. Найти натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию, если произведение трех и четырех первых ее членов равны соответственно 6 и 24 .

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_1(a_1+d)(a_2+d)=6, \\ a_1(a_1+d)(a_1+2d)(a_1+3d)=24 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a_1(a_1+d)(a_2+d)}{a_1(a_1+d)(a_2+d)(a_1+3d)}=\frac{6}{24} \Rightarrow a_1+3d=4, a_1=4-3d.$$

Получаем уравнение

$$3d^3-22d^2+48d-29=0 \Leftrightarrow 3d^3-3d^2-19d^2+19d+29d-29=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (d-1)(3d^2-19d+29)=0 \Rightarrow d_1=1, d_{2,3}=\frac{19\pm\sqrt{13}}{6} \text{ (не подходят).}$$

$$d=1 \Rightarrow a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=4.$$

Ответ: 1,2,3,4, ...

4.027. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 6, их произведение равно 135/16. Найти сумму 15 первых членов этой прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_3+a_9=6, \\ a_3\cdot a_9=\frac{135}{16}. \end{cases}$

По формуле (4.1) получаем

$$\begin{cases} a_1+2d+a_1+8d=6, \\ (a_1+2d)(a_1+8d)=\frac{135}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+5d=3, \\ (a_1+2d)(a_1+8d)=\frac{135}{16} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=3-5d \Rightarrow (3-5d+2d)(3-5d+8d)=\frac{135}{16},$$

$$d^2=\frac{1}{16}, d_1=-\frac{1}{4}, d_2=\frac{1}{4}.$$

Тогда $a_1'=\frac{17}{4}$ и $a_1''=\frac{7}{4}$.

По формуле (4.5) получаем

$$S_{15}' = \frac{\frac{17}{2} - \frac{1}{4} \cdot 14}{2} \cdot 15 = 37{,}5 \text{ или } S_{15}'' = \frac{\frac{7}{2} + \frac{1}{4} \cdot 14}{2} \cdot 15 = 52{,}5.$$

Ответ: 37,5 или 52,5.

4.028. Найти число членов конечной геометрической прогрессии, у которого первый, второй и последний члены соответственно равны 3, 12 и 3072.

Решение.

Из условия имеем $b_1 = 3, b_2 = 12, \ldots, b_n = 3072$.

По формуле (4.6) получаем

$$\begin{cases} b_1 = 3, \\ b_1 q = 12, \\ b_1 q^{n-1} = 3072 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 3, \\ q = 4, \\ 4^{n-1} = 1024 \end{cases} \Rightarrow 4^{n-1} = 4^5 \Leftrightarrow n-1 = 5 \Rightarrow n = 6.$$

Ответ: 6.

4.029. Найти сумму всех положительных четных двузначных чисел, делящихся на 3 нацело.

Решение.

Из условия имеем $a_1 = 12, a_n = 96, d = 12$.

По формулам (4.4) и (4.5) получаем

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1; \; n = \frac{96 - 12}{6} + 1 = 15, \; S_n = \frac{12 + 96}{2} \cdot 15 = 810.$$

Ответ: 810.

4.030. Найти знаменатель q бесконечной геометрической прогрессии $(|q| < 1)$, у которой каждый член в четыре раза больше суммы всех ее последующих членов.

Решение.

Из условия имеем $b_1 = 4(S - b_1)$.

По формуле (4.12) получаем

$$b_1 = 4\left(\frac{b_1}{1-q} - b_1\right), \; b_1 = \frac{4b_1(1 - 1 + q)}{1-q}, \; 1 - q = 4q, \; q = \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

4.031. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью в 5°. Определить число сторон многоугольника.

Решение.

Из условия имеем $a_1 = 120°$, $d = 5°$. Используя формулы суммы членов арифметической прогрессии (4.5) и суммы внутренних углов n-угольника $S_n = 180°(n-2)$, получим

$$\frac{240° + (n-1)5°}{2} \cdot n = 180°(n-2), n^2 - 25n + 144 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n_1 = 9, n_2 = 16$ (не подходит, так как в этом случае

$\Rightarrow a_{16} = 120° + 5° \cdot 15 = 195°$, а внутренний угол выпуклого n-угольника всегда меньше $180°$).

Ответ: 9.

4.032. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти первый член и разность прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_3 \cdot a_6 = 406, \\ a_9 = 2a_4 + 6. \end{cases}$ По формуле (4.1) получаем

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = 406, \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 3d) + 6. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 2d - 6 \text{ и } 14d^2 - 33d - 185 = 0,$$

откуда найдем

$d_1 = -\frac{37}{14}, d_2 = 5$. Тогда $a_1' = 2\left(-\frac{37}{14}\right) - 6 = -\frac{79}{7}$ (не подходит) или

$a_1'' = 2 \cdot 5 - 6 = 4.$

Ответ: 4 и 5.

4.033. В бесконечной геометрической прогрессии с положительными членами и со знаменателем $|q|<1$ сумма трех первых членов равна 10,5, а сумма прогрессии 12. Найти прогрессию.

Решение.

По формулам (4.6) и (4.12) получаем:

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=10{,}5, \\ b_1=12(1-q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=10{,}5, \\ b_1=12(1-q). \end{cases}$$

Отсюда $12(1-q)(1+q+q^2)=10{,}5,\ \ 12(1-q^3)=10{,}5,\ \ q=0{,}5.$

Тогда $b_1=12(1-0{,}5)=6,\ b_2=3,\ b_3=\dfrac{3}{2}.$

Ответ: $6, 3, \dfrac{3}{2}, \ldots.$

4.034. Найти три первых члена арифметической прогрессии, у которой сумма любого числа членов равна утроенному квадрату этого числа.

Решение.

Пусть $n=2$ и $n=3$. Из условия имеем

$$\begin{cases} a_1+a_2=3\cdot 2^2, \\ a_1+a_2+a_3=3\cdot 3^2. \end{cases}$$

По формуле (4.1) получаем

$$\begin{cases} a_1+a_1+d=12, \\ a_1+a_1+d+a_1+2d=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+d=12, \\ a_1+d=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=6, \\ a_1=3. \end{cases}$$

Тогда $a_2=9, a_3=15.$

Ответ: 3, 9, 15.

4.035. При делении тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член в частном получается 3, а при делении восемнадцатого члена на седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Определить разность и первый член прогрессии.

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} a_{13}=3a_3, \\ a_{18}=2a_7+8. \end{cases}$

Используя формулу (4.1), получим

$$\begin{cases} a_1+12d=3(a_1+2d), \\ a_1+17d=2(a_1+6d)+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=3d, \\ a_1=5d-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=12, \\ d=4. \end{cases}$$

Ответ: 4, 12.

Решения к главе 6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Для любых a, b и c верны равенства:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,; \tag{6.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,; \tag{6.2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\,; \tag{6.3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,; \tag{6.4}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\,; \tag{6.5}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right); \tag{6.6}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right); \tag{6.7}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0\,. \tag{6.8}$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнением с одним неизвестным называется равенство

$$f_1(x) = g_1(x), \tag{6.9}$$

где $f_1(x)$ и $g_1(x)$ — некоторые заданные функции переменной x над числовым множеством M.

Решением (корнем) уравнения (6.9) с одним неизвестным называется такое численное значение неизвестного, взятое из множества чисел, указанных в условии уравнения, которое обращает данное уравнение в тождество (верное равенство).

Решить уравнение — это значит найти множество всех его решений или показать, что решений нет.

Областью допустимых значений неизвестного (ОДЗ) уравнения (6.9), называется множество всех значений, взятых из числового множества, над которым задано уравнение, при которых существуют обе функции(части уравнения) $f_1(x)$ и $g_1(x)$.

Пусть в результате преобразования уравнения (6.9) получено уравнение

$$f_2(x) = g_2(x) \tag{6.10}$$

Если все решения уравнения (6.9) являются решениями уравнения (6.10), то уравнение (6.10) называется следствием уравнения (6.9).

Два уравнения (6.9) и (6.10) с одним и тем же неизвестным называются равносильными (эквивалентными), если уравнение (6.10) является следствием уравнения (6.9) и, наоборот, уравнение (6.9) является следствием уравнения (6.10) или если оба уравнения решений не имеют.

При преобразованиях уравнения область его допустимых значений может изменяться, полученное уравнение в общем случае неравносильно данному. Если при некоторых преобразованиях ОДЗ уравнения расширяется, то полученное уравнение может иметь корни, *посторонние* для данного уравнения.

Если обе части данного уравнения возвести в одну и ту же степень, то все его корни будут корнями полученного уравнения, т.е. полученное уравнение всегда будет следствием данного, обратное утверждение не всегда имеет место.

Всякое *целое рациональное алгебраическое уравнение n-й степени с одним неизвестным* может быть записано в виде

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{6.11}$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — заданные числа (коэффициенты уравнения), x — неизвестное, n — натуральное число.

Коэффициенты a_n и a_0 называются соответственно *старшим коэффициентом* и *свободным членом* уравнения (6.11).

Уравнение первой степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение первой степени называют просто *уравнением первой степени*.

Любое уравнение первой степени с одним неизвестным может быть приведено к каноническому виду

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0). \tag{6.12}$$

Уравнение (6.12) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить $n = 1$, $a_1 = 1$ и $a_0 = b$.

Уравнение $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ в множестве действительных чисел всегда имеет решение, и притом только одно:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Уравнение второй степени с одним неизвестным

Целое рациональное алгебраическое уравнение второй степени называется *уравнением второй степени*, или *квадратным уравнением*.

Всякое квадратное уравнение с одним неизвестным можно привести к каноническому виду

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{6.13}$$

Уравнение (6.13) является частным случаем уравнения (6.11), если в последнем положить $n = 2$, $a_2 = a$, $a_1 = b$ и $a_0 = c$.

Квадратное уравнение (6.13), записанное в канонической форме, называется *неполным*, если хотя бы один из его коэффициентов, кроме старшего a, равен нулю.

Если все коэффициенты квадратного уравнения, записанного в каноническом виде, отличны от нуля, то оно называется *полным*.

Полное квадратное уравнение, старший коэффициент которого равен 1 ($a = 1$), называется *приведенным квадратным уравнением*; оно имеет вид

$$x^2 + px + q = 0. \tag{6.14}$$

Формулы корней полного квадратного уравнения

Если $D = b^2 - 4ac \geq 0$ (*дискриминант* уравнения), то уравнение (6.13) в множестве действительных чисел имеет два и только два действительных корня, которые определяются по формулам

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (6.15)$$

Если $b^2 - 4ac > 0$, то $x_1 \neq x_2$, а если $b^2 - 4ac = 0$, то $x_1 \equiv x_2$. Если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение (6.13) действительных решений не имеет.

В частном случае, когда b — четное число, т.е. $b = 2k$, уравнение (6.13) принимает вид $ax^2 + 2kx + c = 0$, а формулы (6.15) преобразуются в следующую:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (6.16)$$

Если уравнение приведенное, т.е. имеет вид $x^2 + px + q = 0$, то для определения его корней получим

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (6.17)$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

Выражение $ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ называется *квадратным трехчленом.*

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом квадратного трехчлена.*

Если $D \geq 0$, то квадратный трехчлен разлагается на множители с действительными коэффициентами:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad (6.18)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, определяемые по формулам нахождения корней полного квадратного уравнения.

Биквадратные уравнения

Биквадратным уравнением называется целое рациональное алгебраическое уравнение четвертой степени, которое может быть приведено к каноническому виду

$$ax^4+bx^2+c=0 \quad (a\neq 0). \tag{6.19}$$

Заменив x^2 на t, получим $at^2+bt+c=0$, из которого находим

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ t_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если $t_1>0$ и $t_2>0$ ($a>0, c>0, b^2-4ac\geq 0, b<0$ или $a<0, c<0, b^2-4ac\geq 0, b>0$), то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения

Уравнения, содержащие взаимно обратные выражения и имеющие вид

$$a\cdot\frac{f_1(x)}{f_2(x)}+b\cdot\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=c, \tag{6.20}$$

решаются с помощью подстановки

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=t. \tag{6.21}$$

Тогда $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=\frac{1}{t}$ и относительно t получается уравнение

$$at+b\cdot\frac{1}{t}=c \text{ или } at^2-ct+b=0 \quad (t\neq 0).$$

Теорема Виета

Корни уравнения $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0 \quad (a_n\neq 0)$ с его коэффициентами связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Например, для уравнений четвертой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ теорема Виета имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}; \end{cases}$$

для кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}; \end{cases}$$

для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется алгебраическое уравнение, если хотя бы один из членов которого иррационален относительно неизвестного, т.е. это есть уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Общий метод решения иррациональных уравнений заключается в следующем: сначала изолируется один радикал, затем обе части уравнения возводят в степень, потом снова изолируют радикал и т.д. При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень получается уравнение, в общем случае неравносильное данному; поэтому проверка найденных значений неизвестного по условию исходного уравнения обязательна, т.е. является составной частью решения.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в четную степень n, то корнями полученного уравнения $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ будут все корни исходного уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ и уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

При переходе от уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ к уравнению $(f_1(x))^n = (f_2(x))^n$ потери корней не произойдет, но могут появиться посторонние корни, а именно: корни сопряженного с исходным уравнения $f_1(x) = -f_2(x)$.

Если обе части уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ возвести в нечетную степень k, то получим уравнение $(f_1(x))^k = (f_2(x))^k$, равносильное исходному в множестве действительных чисел.

При возведении в нечетную степень обеих частей уравнения, рассматриваемого в множестве действительных чисел, посторонние корни не появляются.

Приступая к решению иррационального уравнения, целесообразно предварительно определить ОДЗ, так как может оказаться, что это уравнение *не определено в области действительных чисел.*

При решении иррациональных уравнений следует иметь в виду, что не принадлежащие к ОДЗ значения неизвестного всегда посторонние для решаемого уравнения; их можно отбросить без проверки по условию. Найденные значения неизвестного из области допустимых обязательно следует проверить по условию уравнения, так как они также могут оказаться посторонними.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Системой n уравнений с m неизвестными называется n уравнений, в каждом из которых неизвестные, обозначенные одной и той же буквой, означают одну и ту же неизвестную величину.

Решением системы n уравнений с m неизвестными называется всякая упорядоченная совокупность из m таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, обращают каждое уравнение системы в тождество.

Решить систему уравнений — значит найти множество всех ее решений или показать, что она решений не имеет.

Если система не имеет решений, то ее называют *несовместной* или *противоречивой*, в противном случае — *совместной*.

Система $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ может либо иметь единственное решение, либо иметь бесконечно много решений, либо не иметь решений. При графическом способе решения каждому уравнению данной системы ставится в соответствие некоторая прямая на плоскости XOY; таким образом, данной системе на плоскости соответствует пара прямых. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо совпадать, либо не иметь общих точек.

При пересечении прямых данная система имеет единственное решение; при совпадении прямых данная система имеет бесконечно много решений; если прямые не имеют ни одной общей точки, то данная система решений не имеет.

Решить уравнения **(6.001 — 6.066)**:

6.001. $\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq -3,\ x \neq 4$.

$$\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=23 \Leftrightarrow \frac{16x^2-25x-275}{(x-4)(x+3)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2-25x-275=0 \Rightarrow x_1=-\frac{55}{16},\ x_2=5.$$

Ответ: $x_1=-\frac{55}{16},\ x_2=5$.

6.002. $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq a,\ x \neq b$.

$$\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=2 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2}{(x-a)(x-b)}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-3(a+b)x+(a+b)^2=0 \Rightarrow x_1=\frac{a+b}{2},\ x_2=a+b.$$

Ответ: $x_1=\frac{a+b}{2},\ x_2=a+b$.

6.003. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, x \neq \frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

Пусть $\frac{x^2+x-5}{x}=z$, тогда $z+\frac{1}{z}+4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2+4z+3=0, \Rightarrow z_1=-3,\ z_2=-1$.

Чтобы найти x, решим два уравнения:

$$\frac{x^2+x-5}{x}=-3 \text{ или } \frac{x^2+x-5}{x}=-1.$$

Решая каждое из них, находим:

$x_1=-5,\ x_2=1,\ x_3=-1-\sqrt{6},\ x_4=-1+\sqrt{6}.$

Ответ: $x_1=-5,\ x_2=1,\ x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}.$

6.004. $x^4-\dfrac{50}{2x^4-7}=14.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq\pm\sqrt[4]{\dfrac{7}{2}}.$

Пусть $2x^4-7=z$, тогда $\dfrac{z+2}{2}-\dfrac{50}{z}=14\Rightarrow$

$\Rightarrow z^2-21z-100=0\Leftrightarrow z_1=-4,\ z_2=25.$

Чтобы найти x, решим два уравнения $2x^4-7=-4$ или $2x^4-7=25$, решив которые, получим $x_1=-\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}},\ x_2=\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}},\ x_3=-2,\ x_4=2.$

Ответ: $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}},\ x_{3,4}=\pm 2.$

6.005. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0, x\neq -1, x\neq -2.$

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+2x}-\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{12}.$$

Пусть $x^2+2x=z$, тогда

$$\frac{z^2+z+12}{z(z+1)}=0\Rightarrow z^2+z+12=0\Rightarrow z_1=-4,\ z_2=3.$$

Чтобы найти x, решим два уравнения:

$x^2+2x=-4$ или $x^2+2x=3.$

Решая их, находим: $x_{1,2}\in\varnothing\ (D<0),\ x_3=-3,\ x_4=1.$

Ответ: $x_{1,2}\in\varnothing, x_3=-3, x_4=1.$

6.006. $x+\frac{1}{x}=2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, m \neq \pm n$.

$$x+\frac{1}{x}=2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} \Leftrightarrow x^2-2\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}x+1=0,$$

корни $x_1=\frac{m+n}{m-n}$, $x_2=\frac{m-n}{m+n}$.

Ответ: $x_1=\frac{m+n}{m-n}, x_2=\frac{m-n}{m+n}$, где $m \neq |n|$.

6.007. $\frac{x^2}{a^3}+\frac{b^3}{x^2}=\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0, a \neq 0$.

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{b^3}{x^2}=\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{x^4-\left(a^2b+ab^2\right)x^2+a^3b^3}{a^3x^2}=0$$

или $x^4-\left(a^2b+ab^2\right)x^2+a^3b^3=0,\ ax \neq 0$.

Уравнение является биквадратным относительно x. Пусть $x^2=y$, тогда наше уравнение принимает вид

$$y^2-\left(a^2b+ab^2\right)y+a^3b^3=0,$$

откуда

$$y_{1,2}=\frac{a^2b+ab^2 \pm \sqrt{\left(a^2b+ab^2\right)^2-4a^3b^3}}{2}=$$

$$=\frac{a^2b+ab^2 \pm \sqrt{a^4b^2+2a^3b^3+a^2b^4-4a^3b^3}}{2}=$$

$$=\frac{a^2b+ab^2 \pm \sqrt{a^4b^2-2a^3b^3+a^2b^4}}{2}=\frac{a^2b+ab^2 \pm \sqrt{\left(a^2b-ab^2\right)^2}}{2}=$$

$$=\frac{a^2b+ab^2 \pm \left(a^2b-ab^2\right)}{2};\ y_1=ab^2,\ y_2=a^2b.$$

Чтобы найти x, нужно решить два квадратных уравнения:

$x^2 = ab^2$ или $x^2 = a^2 b$.

$x_{1,2} = \pm\sqrt{ab^2} = \pm b\sqrt{a}$, где с учетом ОДЗ $a > 0$;

$x_{3,4} = \pm\sqrt{a^2 b} = \pm a\sqrt{b}$, где $b \ge 0$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm b\sqrt{a}$, где $a > 0$; $x_{3,4} = \pm a\sqrt{b}$, где $b \ge 0$.

6.008. $\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2}$.

Решение.

ОДЗ: $x \ne \pm 1, x \ne \pm 2$.

$$\frac{x-3}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = \frac{x+6}{x+2} + \frac{x-6}{x-2} \Leftrightarrow \frac{2x^2-6}{x^2-1} = \frac{2x^2-24}{x^2-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x^2-1} = \frac{x^2-12}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{6x^2}{(x^2-1)(x^2-4)} = 0,$$

отсюда $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

6.009. $\frac{5a}{y+a} + \frac{4a}{y+2a} + \frac{3a}{y+3a} = 8$.

Решение.

ОДЗ: $y \ne -a, y \ne -2a, y \ne -3a$.

$$\frac{5a}{y+a} + \frac{4a}{y+2a} + \frac{3a}{y+3a} = 8 \Leftrightarrow \frac{8y^3 + 36ay^2 + 38a^2 y}{(y+a)(y+2a)(y+3a)} = 0$$

или

$$\begin{cases} y(4y^2 + 18ay + 19a^2) = 0, \\ y \ne -a, \\ y \ne -2a, \\ y \ne -3a \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 0$ или $4y^2 + 18ay + 19a^2 = 0$.

Отсюда $y_{1,2} = \frac{-9a \pm \sqrt{81a^2 - 76a^2}}{4} = \frac{-9a \pm a\sqrt{5}}{4} = \frac{a(-9 \pm \sqrt{5})}{4}$.

Ответ: $y_1 = 0,\ y_{2,3} = \frac{a(-9 \pm \sqrt{5})}{4}$.

6.010. $\frac{1}{x^3+2} - \frac{1}{x^3+3} = \frac{1}{12}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -\sqrt[3]{2},\ x \neq -\sqrt[3]{3}$.

$$\frac{1}{x^3+2} - \frac{1}{x^3+3} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{x^6+5x^3-6}{12(x^3+2)(x^3+3)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6+5x^3-6=0, \\ (x^3+2)(x^3+3) \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $x^3 = y$. Получаем квадратное уравнение относительно y:

$y^2+5y-6=0$. Отсюда $y_1=-6,\ y_2=1$.

Отсюда $x^3=-6$ или $x^3=1$ и $x_1=-\sqrt[3]{6}$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=-\sqrt[3]{6},\ x_2=1$.

6.011. $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm 1,\ x \neq \pm 3$.

Из условия имеем $\left(\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1}\right) - \left(\frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3}\right) = -\frac{28}{15} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1} - \frac{x^2-12}{x^2-9} = -\frac{14}{15} \Leftrightarrow \frac{2x^2+6}{(x^2-1)(x^2-9)} = -\frac{14}{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2-9)} = -\frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{(x^2-1)(x^2-9)} + \frac{7}{15} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x^4-55x^2+108}{(x^2-1)(x^2-9)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^4-55x^2+108=0, \\ (x^2-1)(x^2-9)\neq 0. \end{cases}$$

Пусть $x^2 = y$, откуда

$$7y^2-55y+108=0;\ y_1=4,\ y_2=\frac{27}{7}.$$

Чтобы найти x, решим два уравнения: $x^2=4$, $x_{1,2}=\pm 2$ или

$$x^2=\frac{27}{7},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{27}{7}}.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm 2, x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{27}{7}}.$

6.012. $(x-1)(x^2-3)+(2x-1)(x^2+2)=3.$

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

Имеем

$$x^3-x^2-3x+3+2x^3-x^2+4x-2=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^3-2x^2+x-2=0\Leftrightarrow 3x^3-3x^2+x^2-x+2x-2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2(x-1)+x(x-1)+2(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+x+2)=0$$

$x-1=0, x_1=1$ или $3x^2+x+2=0, x_{2,3}\in\varnothing$ $(D<0)$.

Ответ: $x=1$.

6.013. $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

$$3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow\frac{3(x^3+1)-7(x+1)x}{x^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x+1)(x^2-x+1)-7(x+1)x}{x^2}=0\Leftrightarrow\frac{(x+1)(3(x^2-x+1)-7x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(3x^2-10x+3)}{x^2}=0.$$

Имеем $(x+1)(3x^2-10x+3)=0$. Отсюда $x+1=0$, $x_1=-1$ или $3x^2-10x+3=0$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=3$.

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=3$.

6.014. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2.$

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

$$\frac{2x^4+9x^2}{(x^2+4)(x^2+5)}=0 \Leftrightarrow 2x^4+9x^2=0 \Leftrightarrow x^2(2x^2+9)=0,$$

$x^2=0, x_1=0$ или $2x^2+9=0$, $x_{2,3}\in\varnothing$.

Ответ: $x=0$.

6.015. $\frac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq\frac{7}{2}$, $x\neq-2$, $x\neq6$.

Из условия получаем $\frac{11x^3-93x^2+190x}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=0$. С учетом ОДЗ это уравнение равносильно

$$11x^3-93x^2+190x=0 \Leftrightarrow x(11x^2-93x+190)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=0 \text{ или } 11x^2-93x+190=0,\ x_2=5,\ x_3=\frac{38}{11}.$$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=5$, $x_3=\frac{38}{11}$.

6.016. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2{,}9.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Пусть $\frac{x^2+1}{x}=y$, тогда $y+\frac{1}{y}-2{,}9=0 \Leftrightarrow \frac{y^2-2{,}9y+1}{y}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2{,}9y+1=0, \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow y_1=\frac{5}{2}, y_2=\frac{2}{5}.$$

Отсюда $\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$ или $\frac{x^2+1}{x}=\frac{2}{5}$.

Первое уравнение имеет корни $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$, а второе уравнение решений не имеет $(D<0)$.

Ответ: $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$.

6.017. $\frac{x+n}{m+n}-\frac{m-n}{x-n}=\frac{x+p}{m+p}-\frac{m-p}{x-p}.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq n, x \neq p, m \neq -n, m \neq -p$.

Из условия получаем

$$\frac{(x+n)(x-n)-(m-n)(m+n)}{(m+n)(x-n)}=\frac{(x+p)(x-p)-(m-p)(m+p)}{(m+p)(x-p)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-n^2-m^2+n^2}{(m+n)x-n(m+n)}=\frac{x^2-p^2-m^2+p^2}{(m+p)x-p(m+p)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-m^2}{(m+n)x-n(m+n)}=\frac{x^2-m^2}{(m+p)x-p(m+p)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-m^2}{(m+n)x-n(m+n)}-\frac{x^2-m^2}{(m+p)x-p(m+p)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-m^2\right)\cdot\left(\frac{1}{(m+n)x-n(m+n)}-\frac{1}{(m+p)x-p(m+p)}\right)=0.$$

Отсюда получаем $x^2-m^2=0 \Leftrightarrow x^2=m^2$, $x_{1,2}=\pm m$, или

$$\frac{1}{(m+n)x-n(m+n)}-\frac{1}{(m+p)x-p(m+p)}=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(m+p)x-p(m+p)-(m+n)x+n(m+n)}{((m+n)x-n(m+n))((m+p)x-p(m+p))}=0$$

или с учетом ОДЗ

$$(m+p)x-(m+n)x-p(m+p)+n(m+n)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m+p)x-(m+n)x=p(m+p)-n(m+n) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m+p-m-n)x=pm+p^2-mn-n^2 \Leftrightarrow (p-n)x=p^2-n^2+pm-mn \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (p-n)x=(p-n)(p+n)+m(p-n) \Leftrightarrow (p-n)x=(p-n)(p+n+m)$$

Отсюда:

1) если $p-n=0$, $p=n$, то, учитывая ОДЗ, $x \in R$, кроме p и n;

2) если $p-n \neq 0$, $p \neq n$, то $x_3=p+n+m$.

Ответ: если $n=p$, то $x \in R$, кроме n и p; если $n \neq p$, то $x_1=m$, $x_2=-m$, $x_3=m+n+p$.

6.018. $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Из условия имеем $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$.

Пусть $x+\frac{1}{x}=y \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$ или $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Наше уравнение принимает вид $y^2-2+y-4=0 \Leftrightarrow y^2+y-6=0$, откуда $y_1=-3, y_2=2$. Относительно x получаем два уравнения: $x+\frac{1}{x}=-3$, откуда $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ или $x+\frac{1}{x}=2$, откуда $x_{3,4}=1$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=1$.

6.019. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$

Решение.

ОДЗ: $x \in R$.

Из условия имеем $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-\left(x^2-4x+10\right)+4=0.$

Пусть $x^2-4x+10=y \neq 0: \dfrac{21}{y}-y+4=0 \Leftrightarrow \dfrac{y^2-4y-21}{y}=0$. Уравнение $y^2-4y-21=0$ имеет корни $y_1=-3,\ y_2=7$. Относительно x получаем два уравнения: $x^2-4x+10=-3$, $x^2-4x+13=0$ $(D<0)$ или $x^2-4x+10=7$, $x^2-4x+3=0$, $x_1=3$, $x_2=1$.

Ответ: $x_1=3, x_2=1$.

6.020. $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-a}=2{,}5.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq b, x \neq a$.

Пусть $\dfrac{x-a}{x-b}=y$: $y+\dfrac{1}{y}-2{,}5=0;$ $\dfrac{y^2-2{,}5y+1}{y}=0.$

Уравнение $y^2-2{,}5y+1=0$ имеет корни $y_1=\dfrac{1}{2},\ y_2=2$. Получаем два уравнения относительно x: $\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{1}{2}$, откуда $x_1=2a-b$, или $\dfrac{x-a}{x-b}=2$, откуда $x_2=2b-a$.

Ответ: если $a \neq b$, то $x_1=2a-b$, $x_2=2b-a$; если $a=b$, то корней нет.

6.021. $8x^4+x^3+64x+8=0.$

Решение.

ОДЗ: $x \in R$.

Из условия имеем

$$(8x^4+x^3)+(64x+8)=0 \Leftrightarrow x^3(8x+1)+8(8x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8x+1)(x^3+8)=0 \Leftrightarrow (8x+1)(x+2)(x^2-2x+4)=0.$$

Отсюда $8x+1=0, x_1=-\frac{1}{8}$, или $x+2=0, x_2=-2$, или

$x^2-2x+4=0,\ x_{3,4}\in\varnothing\ (D<0)$.

Ответ: $x_1=-\frac{1}{8}, x_2=-2$.

6.022. $(x+3)^3-(x+1)^3=56$.

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

Из условия имеем

$$(x+3-x-1)((x+3)^2+(x+3)(x+1)+(x+1)^2)=56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+6x+9+x^2+4x+3+x^2+2x+1)=56 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0, x_1=-5, x_2=1.$$

Ответ: $x_1=-5, x_2=1$.

6.023. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+6}{x+3}+\frac{x+10}{x+5}=6$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq-1, x\neq-3, x\neq-5$.

Из условия имеем:

$$\frac{(x+1)+1}{x+1}+\frac{(x+3)+3}{x+3}+\frac{(x+5)+5}{x+5}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{x+3}{x+3}+\frac{3}{x+3}+\frac{x+5}{x+5}+\frac{5}{x+5}=6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=6 \Leftrightarrow \frac{3x^3+18x^2+23x}{(x+1)(x+3)(x+5)}=0.$$

С учетом ОДЗ получаем $3x^3+18x^2+23x=0$ или

$x(3x^2+18x+23)=0$, откуда $x_1=0$, или

$3x^2+18x+23=0$, $x_2=\frac{-9+\sqrt{12}}{3}$, $x_3=\frac{-9-\sqrt{12}}{3}$.

Ответ: $x_1=0, x_2=\frac{-9+\sqrt{12}}{3}, x_3=\frac{-9-\sqrt{12}}{3}$.

6.024. $4x^2+12x+\frac{12}{x}+\frac{4}{x^2}=47.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Группируя, получаем:

$$\left(4x^2+\frac{4}{x^2}\right)+\left(12x+\frac{12}{x}\right)-47=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)-47=0.$$

Пусть $x+\frac{1}{x}=y\Rightarrow\ x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$ или $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Тогда

$4\left(y^2-2\right)+12y-47=0,\ 4y^2+12y-55=0,\ y_1=-\frac{11}{2}, y_2=\frac{5}{2}.$

Относительно x получаем два уравнения: $x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}$ или $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$,

корнями которых являются $x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}, x_3=\frac{1}{2}, x_4=2.$

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}, x_3=\frac{1}{2}, x_4=2.$

6.025. $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3.$

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

Левую и правую части уравнения разложим на множители как разности кубов:

$$(x-a-x+b)\left((x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2\right)=(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right),$$

$$(b-a)\left(x^2-2ax+a^2+x^2-(a+b)x+ab+x^2-2bx+b^2\right)-$$
$$-(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)=0,$$
$$(b-a)\left(3x^2-3(a+b)x+ab+a^2+b^2\right)-(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b-a)\left(x^2-(a+b)x\right)=0.$$

Отсюда:

1) если $b-a=0, b=a$, то $x\in R$;

2) если $b-a\neq 0, b\neq a$, то $x^2-(a+b)x=0$, или $x(x-(a+b))=0$, откуда $x_1=0, x_2=a+b$.

Ответ: если $a=b$, то $x\in R$; если $a\neq b$, то $x_1=0, x_2=a+b$.

6.026. $\frac{ax^2}{x-1}=(a+1)^2$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 1$.

Приводим уравнение к общему знаменателю:

$$\frac{ax^2-(a+1)^2(x-1)}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{ax^2-(a+1)^2x+(a+1)^2}{x-1}=0.$$

С учетом ОДЗ $ax^2-(a+1)^2x+(a+1)^2=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{(a+1)^2\pm\sqrt{(a+1)^4-4a(a+1)^2}}{2a}=\frac{(a+1)^2\pm\sqrt{(a+1)^2\left((a+1)^2-4a\right)}}{2a}=$$
$$=\frac{(a+1)^2\pm\sqrt{(a+1)^2\left(a^2+2a+1-4a\right)}}{2a}=\frac{(a+1)^2\pm\sqrt{(a+1)^2(a-1)^2}}{2a}=$$
$$=\frac{(a+1)^2\pm(a-1)^2}{2a};$$

$$x_1=\frac{(a+1)^2-(a-1)^2}{2a}=\frac{a^2+2a+1-a^2+1}{2a}=\frac{a+1}{a},$$
$$x_2=\frac{(a+1)^2+a^2-1}{2a}=\frac{a^2+2a+1+a^2-1}{2a}=\frac{2a^2+2a}{2a}=a+1.$$

Ответ: $x_1=\frac{a+1}{a}$, где $a\neq 0$; $x_2=a+1$.

6.027. $\frac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\frac{19}{7}$.

Решение.

ОДЗ: $(x-a)^2-x(x-a)+x^2\neq 0$.

Из условия получаем

$$\frac{6(x-a)^2-13x(x-a)+6x^2}{7\left((x-a)^2-x(x-a)+x^2\right)}=0\Rightarrow 6(x-a)^2-13x(x-a)+6x^2=0.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $x^2\neq 0$:

$$6\left(\frac{x-a}{x}\right)^2-13\left(\frac{x-a}{x}\right)+6=0.$$

Пусть $\frac{x-a}{x}=y$: $6y^2-13y+6=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются $y_1=\frac{2}{3}$, $y_2=\frac{3}{2}$.

Имеем два уравнения: $\frac{x-a}{x}=\frac{2}{3}$ или $\frac{x-a}{x}=\frac{3}{2}$, откуда $x_1=3a$, $x_2=-2a$. Сделав проверку по ОДЗ, получим ответ.

Ответ: если $a\neq 0$, то $x_1=3a$, $x_2=-2a$; если $a=0$, то корней нет.

6.028. $\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $a\neq\pm b,\ x\neq 0$.

Из условия имеем

$$\frac{x}{a+b}+\frac{2a-x}{a-b}-\frac{a+b}{x}-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)x^2+(2a-x)(a+b)x-(a+b)^2(a-b)-(a+b)(a-b)x}{(a+b)(a-b)x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)x^2+2a(a+b)x-(a+b)x^2-(a+b)^2(a-b)-\left(a^2-b^2\right)x}{\left(a^2-b^2\right)x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left((a-b)x^2-(a+b)x^2\right)+\left(2a(a+b)x-\left(a^2-b^2\right)x\right)-(a+b)^2(a-b)}{\left(a^2-b^2\right)x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b-a-b)x^2+\left(2a^2+2ab-a^2+b^2\right)x-(a+b)^2(a-b)}{\left(a^2-b^2\right)x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2bx^2+\left(a^2+2ab+b^2\right)x-(a+b)^2(a-b)}{\left(a^2-b^2\right)x}=0.$$

С учетом ОДЗ $-2bx^2+\left(a^2+2ab+b^2\right)x-(a+b)^2(a-b)=0$ или

$2bx^2-(a+b)^2x+(a+b)^2(a-b)=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{(a+b)^2\pm\sqrt{(a+b)^4-8b(a+b)^2(a-b)}}{4b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2\pm\sqrt{(a+b)^2\left((a+b)^2-8b(a-b)\right)}}{4b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2\pm(a+b)\sqrt{a^2+2ab+b^2-8ab+8b^2}}{4b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2\pm(a+b)\sqrt{a^2-6ab+9b^2}}{4b}=\frac{(a+b)^2\pm(a+b)\sqrt{(a-3b)^2}}{4b}=$$

$$=\frac{(a+b)^2\pm(a+b)(a-3b)}{4b}=\frac{(a+b)\left((a+b)\pm(a-3b)\right)}{4b};$$

$$x_1=\frac{(a+b)(a+b-a+3b)}{4b}=\frac{(a+b)4b}{4b}=a+b,$$

$$x_2=\frac{(a+b)(a+b+a-3b)}{4b}=\frac{(a+b)(2a-2b)}{4b}=\frac{(a+b)(a-b)}{2b}=\frac{a^2-b^2}{2b}.$$

Ответ: если $b\neq 0$, то $x_1=a+b$, $x_2=\dfrac{a^2-b^2}{2b}$; если $b=0$, то $x=a$.

6.029. $\dfrac{a^2-1}{ax-1}+\dfrac{a-x}{a}=1.$

Решение.

ОДЗ: $a \neq 0, x \neq \frac{1}{a}$.

Из условия имеем:

$$\frac{a^2-1}{ax-1}+\frac{a}{a}-\frac{x}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{a^2-1}{ax-1}+1-\frac{x}{a}=1 \Leftrightarrow \frac{a^2-1}{ax-1}-\frac{x}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^2-x-(a^2-1)a}{(ax-1)a}=0,$$

с учетом ОДЗ $ax^2-x-(a^2-1)a=0$, откуда

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a^2(a^2-1)}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{4a^4-4a^2+1}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{(2a^2-1)^2}}{2a}=$$

$$=\frac{1\pm(2a^2-1)}{2a};$$

$$x_1=\frac{1-2a^2+1}{2a}=\frac{1-a^2}{a},\ \ x_2=\frac{1+2a^2-1}{2a}=a.$$

Ответ: $x_1=\frac{1-a^2}{a}, x_2=a$ при $a\neq 0$.

6.030. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{4-x^2}\right)^2$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm 2$.

Перепишем это уравнение в виде

$$\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{5x}{x^2-4}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{x^2+6}{x^2-4}\right|=\sqrt{\left(\frac{5x}{x^2-4}\right)^2} \Rightarrow \left|\frac{x^2+6}{x^2-4}\right|=\left|\frac{5x}{x^2-4}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+6}{x^2-4}=-\frac{5x}{x^2-4} \text{ или } \frac{x^2+6}{x^2-4}=\frac{5x}{x^2-4}.$$

С учетом ОДЗ получим уравнения $x^2+5x+6=0$ или $x^2-5x+6=0$, откуда $x_1=-3, x_2=-2, x_3=2, x_4=3$; $x_2=-2$ и $x_3=2$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: $x_1=-3, x_2=3$.

6.031. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

Решение.

ОДЗ: $3x+4\ge 0, x-4\ge 0, x\ge 0 \Rightarrow x\ge 4$.

Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$3x+4+2\sqrt{(3x+4)(x-4)}+x-4=4x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0.$$

Еще раз возводя в квадрат, получаем: $(3x+4)(x-4)=0$. Отсюда имеем $3x+4=0$ или $x-4=0$, $x_1=-\frac{4}{3}$, $x_2=4$; $x_1=-\frac{4}{3}$ не входит в ОДЗ. Проверяя $x=4$ непосредственной подстановкой в исходное уравнение, имеем:

Ответ: $x=4$.

6.032. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x+11}=y\ge 0$ или $x+11=y^2$, т.е. $x=y^2-11$. Тогда

$\sqrt{y^2+y-11}+\sqrt{y^2-y-11}=4$ или $\sqrt{y^2+y-11}=4-\sqrt{y^2-y-11}$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$y^2+y-11=16-8\sqrt{y^2-y-11}+y^2-y-11,\ 8\sqrt{y^2-y-11}=16-2y$$

или $4\sqrt{y^2-y-11}=8-y$. После возведения обеих частей уравнения в квадрат, найдем

$$16y^2-16y-176=64-16y+y^2,\ 0<y\le 8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}15y^2=240,\\ 0<y\le 8\end{cases} \text{или } y=4.$$

Отсюда получаем $\sqrt{x+11}=4$ или $x+11=16$, $x=5$. Проверкой убеждаемся, что это корень исходного уравнения.

Ответ: $x=5$.

6.033. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}15-x\geq 0,\\ 3-x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 15,\\ x\leq 3,\end{cases} \Leftrightarrow x\leq 3.$

Из условия имеем:

$\sqrt{15-x}=6-\sqrt{3-x} \Rightarrow 15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x,$

$12\sqrt{3-x}=24, \sqrt{3-x}=2.$

Отсюда $3-x=4$ или $x=-1$. Проверкой убеждаемся, что это корень исходного уравнения.

Ответ: $x=-1$.

6.034. $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x.$

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\begin{cases}1+x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x+1,\\ x-1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x,\\ x\geq 1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2-24}=x-2,\\ x\geq 1.\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2-24=x^2-4x+4$ или $4x=28$; $x=7$.

Проверяя $x=7$ непосредственной подстановкой в исходное уравнение, имеем:

Ответ: $x=7$.

6.035. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b \quad (a>b).$

Решение.

Из условия имеем

$$\frac{\left(\sqrt{x-a}\right)^3+\left(\sqrt{x-b}\right)^3}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b.$$

Разложим на множители числитель левой части уравнения как сумму кубов:

$$\frac{\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\right)\left(\left(\sqrt{x-a}\right)^2-\sqrt{(x-a)(x-b)}+\left(\sqrt{x-b}\right)^2\right)}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b.$$

Так как $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}\neq 0$, то

$$\left(\sqrt{x-a}\right)^2-\sqrt{(x-a)(x-b)}+\left(\sqrt{x-b}\right)^2=a-b\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-a-\sqrt{(x-a)(x-b)}+x-b=a-b\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x-2a=\sqrt{(x-a)(x-b)}\Leftrightarrow 2(x-a)=\sqrt{(x-a)(x-b)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x-a)^2=(x-a)(x-b)\Leftrightarrow 4(x-a)^2-(x-a)(x-b)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-a)(4x-4a-x+b)\Leftrightarrow (x-a)(3x-4a+b)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $x-a=0$, откуда $x_1=a$, либо $3x-4a+b=0$, откуда $x_2=\dfrac{4a-b}{3}$.

Подставляя x_1 и x_2 в начальное уравнение, убеждаемся, что это действительно корни.

Ответ: $x_1=a;\ x_2=\dfrac{4a-b}{3}$.

6.036. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}3x+7\geq 0,\\ x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq -1.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$3x+7-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}+x+1=4\Leftrightarrow 4x+4=2\sqrt{(3x+7)(x+1)}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x+1)=\sqrt{(3x+7)(x+1)}\Rightarrow 4(x+1)^2=(3x+7)(x+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2-(3x+7)(x+1)=0\Leftrightarrow (x+1)(4x+4-3x-7)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \text{ или } x+1=0, x_1=-1 \text{ или } x-3=0, x_2=3.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что это корни начального уравнения.

Ответ: $x_1=-1, x_2=3$.

6.037. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$1+\sqrt{x}+3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})}+3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})^2}+1-\sqrt{x}=8\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2(1-\sqrt{x})}+3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})^2}=6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)=6.$$

Так как $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$, то уравнение принимает вид:

$$3\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}\cdot 2=6\Leftrightarrow\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=1\Leftrightarrow\sqrt[3]{1-x}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x=1, x=0.$$

Ответ: $x=0$.

6.038. $2\sqrt{7-x}:0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=10\sqrt[4]{1{,}5}:\frac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}.$

Решение.

ОДЗ: $7-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 7$.

Будем упрощать исходное уравнение:

$$\frac{2\sqrt{7-x}}{0{,}6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}=\frac{10\sqrt[4]{1{,}5}}{\frac{1}{4}\sqrt[4]{216\sqrt[3]{9}}}\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{7-x}}{\frac{3}{5\sqrt[3]{3}}}=\frac{10\sqrt[4]{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[12]{3^{11}}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{7-x}\cdot 5\sqrt[3]{3}}{3}=\frac{40\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[12]{3^{11}}}\Leftrightarrow\sqrt{7-x}=2.$$

Очевидно, что $x=3$ есть корень этого уравнения и других корней нет.

Ответ: $x=3$.

6.039. $\left(\frac{x+5}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+4\left(\frac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=4.$

Решение.

Из условия имеем

$$\sqrt{\frac{x+5}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+5}}-4=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+5}{x}}+\frac{4}{\sqrt{\frac{x}{x+5}}}-4=0.$$

Пусть

$$\sqrt{\frac{x+5}{x}}=y>0: \ y+\frac{4}{y}-4=0 \Leftrightarrow y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2=0 \Leftrightarrow y-2=0 \Leftrightarrow y=2.$$

Тогда $\sqrt{\frac{x+5}{x}}=2$. Проверкой убеждаемся, что это выражение удовлетворяет условию.

Отсюда $\frac{x+5}{x}=4 \Leftrightarrow x+5=4x,\ x=\frac{5}{3}$.

Ответ: $x=\frac{5}{3}$.

6.040. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

Решение.

ОДЗ: $x \ge 0$.

Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$24+\sqrt{x}-3\sqrt[3]{\left(24+\sqrt{x}\right)^2\left(5+\sqrt{x}\right)}+3\sqrt[3]{\left(24+\sqrt{x}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)^2}-5-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt[3]{\left(24+\sqrt{x}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)}\left(\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}\right)=-18.$$

Так как $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$ по условию, то получаем

$$\sqrt[3]{\left(24+\sqrt{x}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)}=6 \Leftrightarrow \left(24+\sqrt{x}\right)\left(5+\sqrt{x}\right)=216,$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2+29\sqrt{x}-96=0.$$

Откуда $\sqrt{x}=3$, $\sqrt{x}=-3$ (не подходит). Отсюда $x=9$.

Ответ: $x=9$.

6.041. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1.$

Решение.

Возведя обе части уравнения в куб, получим

$$x+34-x+3-\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\left(\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}\right)=1.$$

Так как $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$, то имеем следующее уравнение:

$$37-3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+34)(x-3)}=12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+24)(x-3)=1728 \Leftrightarrow x^2+31x-1830=0;\ x_1=-61, x_2=30.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1=-61, x_2=30.$

6.042. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$

Решение.

Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=y\ge 0$. Тогда $x^2+3x-6=y^2$

или

$$x^2+3x=y^2+6$$

и уравнение принимает вид:

$$y^2+6-18+4y=0 \Leftrightarrow y^2+4y-12=0,\ y_1=-6 \text{ (не подходит)},\ y_2=2.$$

Тогда

$$\sqrt{x^2+3x-6}=2 \Leftrightarrow x^2+3x-6=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-10=0;\ x_1=-5, x_2=2.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни заданного уравнения.

Ответ: $x_1=-5, x_2=2.$

6.043. $\sqrt{x^2+32}-2\sqrt[4]{x^2+32}=3.$

Решение.

Пусть $\sqrt[4]{x^2+32}=y>0$. Относительно y получаем уравнение $y^2-2y-3=0$, откуда $y_1=-1$ (не подходит), $y_2=3$. Тогда

$$\sqrt[4]{x^2+32}=3 \Leftrightarrow x^2+32=81 \Leftrightarrow x^2=49.$$

Это выражение удовлетворяет заданному уравнению. Отсюда $|x| = 7$ или $x_{1,2} = \pm 7$.

Ответ: $x_1 = -7, x_2 = 7$.

6.044. $\sqrt[5]{(5x+2)^3} - \dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}} = 6.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq -\dfrac{2}{5}$.

Пусть $\sqrt[5]{(5x+2)^3} = y,\ \ y \neq 0$. Относительно y имеем уравнение: $y - \dfrac{16}{y} = 6\ (y \neq 0) \Leftrightarrow y^2 - 6y - 16 = 0$, откуда $y_1 = -2$, $y_2 = 8$. Тогда:

1) $\sqrt[5]{(5x+2)^3} = -2;\ x_1 = \dfrac{-2^{\frac{5}{3}} - 2}{5} = \dfrac{-2\left(\sqrt[3]{4}+1\right)}{5};$

2) $\sqrt[5]{(5x+2)^3} = 8;\ x_2 = 6.$

Ответ: $x_1 = \dfrac{-2\left(\sqrt[3]{4}+1\right)}{5}, x_2 = 6.$

6.045. $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$

Решение.

Пусть $\sqrt[3]{x} = y$, тогда $x = y^3$, $x^2 = y^6$. Относительно y имеем уравнение

$$y^3 \cdot y - 4y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow y^4 - 4y^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 - 2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2 - 2 = 0,\ y^2 = 2,$$

откуда $y_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Тогда $\sqrt[3]{x} = -\sqrt{2}, x_1 = -\sqrt{8}$ и $\sqrt[3]{x} = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{8}$.

Ответ: $x_1 = -2\sqrt{2}, x_2 = 2\sqrt{2}$.

6.046. $3\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^{-1}}=2x^{-1}$.

Решение.

Из условия имеем $3\sqrt[3]{x}-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2}{x}$.

Пусть $\sqrt[3]{x}=y,\ \ y\neq 0$, и уравнение принимает вид

$$3y-\frac{5}{y}-\frac{2}{y^3}=0\ (y\neq 0)\Leftrightarrow 3y^4-5y^2-2=0\Leftrightarrow 3\left(y^2\right)^2-5\left(y^2\right)-2=0,$$

откуда $y^2=2$; $y^2=-1$ (не подходит). Тогда $y_{1,2}=\pm\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt[3]{x}=-2$ или $\sqrt[3]{x}=\sqrt{2}$, $x_1=-\sqrt{8}, x_2=\sqrt{8}$.

Ответ: $x_1=-2\sqrt{2}, x_2=2\sqrt{2}$.

6.047. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x^2+20}=y>0$, тогда $x^2+20=y^2$, $x^2=y^2-20$ и уравнение принимает вид $y^2-20+y=22\Leftrightarrow y^2+y-42=0$, откуда найдем $y_1=-7$, $y_2=6$; $y_1=-7<0$ не подходит. Тогда $\sqrt{x^2+20}=6$ или $x^2+20=36$, $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm 4$.

Ответ: $x_1=4, x_2=-4$.

6.048. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\frac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

Решение.

ОДЗ: $\sqrt[3]{x}+2\neq 0, \sqrt[3]{x}\neq -2, x\neq -8$.

Пусть $\sqrt[3]{x}+2=y,\ \ y\neq 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$\frac{4}{y}+\frac{y+1}{5}=2\ \ (y\neq 0)\Leftrightarrow y^2-9y+20=0$, откуда $y_1=4$, $y_2=5$.

Тогда: 1) $\sqrt[3]{x}+2=4;\ x_1=8$; 2) $\sqrt[3]{x}+2=5;\ x_2=27$.

Ответ: $x_1=8; x_2=27$.

6.049. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$

Решение.

ОДЗ: $x^3+8\geq 0 \Leftrightarrow x^3\geq -8 \Leftrightarrow x\geq -2.$

Пусть $\sqrt[4]{x^3+8}=y,\ y>0$, и уравнение принимает вид $y^2+y=6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2+y-6=0$, откуда $y_1=-3$, $y_2=2$; $y_1=-3$ не подходит. Тогда

$\sqrt[4]{x^3+8}=2,\ x^3+8=16,\ x^3=8,\ x=2$.

Ответ: $x=2$.

6.050. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x}+(x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}5-x\geq 0,\\ x-3\geq 0,\end{cases} \Leftrightarrow 3\leq x\leq 5.$

Перепишем уравнение в виде $\dfrac{\left(\sqrt{5-x}\right)^3+\left(\sqrt{x-3}\right)^3}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$ и разложим

числитель левой части на множители как сумму кубов:

$$\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{(5-x)^2}-\sqrt{(5-x)(x-3)}+\sqrt{(x-3)^2}\right)}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2.$$

Учитывая, что знаменатель положителен, получаем

$$\sqrt{(5-x)^2}-\sqrt{(5-x)(x-3)}+\sqrt{(x-3)^2}=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5-x-\sqrt{(5-x)(x-3)}+x-3=2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(5-x)(x-3)}=0,\ (5-x)(x-3)=0,$$

откуда $5-x=0$, $x_1=5$, или $x-3=0$, $x_2=3$. Проверкой убеждаемся, что это корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1=5, x_2=3$.

6.051. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1\ge 0, \\ 9-x\ge 0, \\ 2x-12\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1, \\ x\le 9, \\ x\ge 6, \end{cases} \Leftrightarrow 6\le x\le 9.$

Возведя обе части уравнения в квадрат и приведя подобные члены, получаем $\sqrt{(x+1)(9-x)}=11-x$, откуда

$(x+1)(9-x)=121-22x+x^2 \Leftrightarrow x^2-15x+56=0;\ x_1=7, x_2=8.$

Проверкой убеждаемся, что это корни заданного уравнения.

Ответ: $x_1=7, x_2=8$.

6.052. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-x\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)\ge 0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup[1;+\infty).$

Из условия получаем

$$\frac{x+\sqrt{x^2-x}-x+\sqrt{x^2-x}}{x^2-x^2+x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x^2-x}}{x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}{x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}\ \ (x\ne 0).$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем $\dfrac{4x-4}{x}=3$ или $x=4$. Проверкой убеждаемся, что $x=4$ является корнем последнего уравнения с радикалами.

Ответ: $x=4$.

6.053. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4.$

Решение.

ОДЗ: $x\ne \pm 1$.

Пусть $\sqrt[3]{x}=y,\ \ y\neq\pm1$. Относительно y уравнение принимает вид

$$\frac{y^4-1}{y^2-1}-\frac{y^2-1}{y+1}=4\Leftrightarrow\frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^2-1}-\frac{(y-1)(y+1)}{y+1}=4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y^2+1-y+1=4\Leftrightarrow y^2-y-2=0,$$

откуда найдем $y_1=-1$, $y_2=2$. Тогда $\sqrt[3]{x}=-1$, $x_1=-1$, или $\sqrt[3]{x}=2$, $x_2=8$; $x_1=-1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $x=8$.

6.054. $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}5+\sqrt[3]{x}\geq0,\\5-\sqrt[3]{x}\geq0\end{cases}\Leftrightarrow-125\leq x\leq125.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем уравнение

$$5+\sqrt[3]{x}+2\sqrt{(5+\sqrt[3]{x})(5-\sqrt[3]{x})}+5-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow2\sqrt{25-\sqrt[3]{x^2}}=\sqrt[3]{x^2}-10\Rightarrow100-4\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^4}-20\sqrt[3]{x^2}+100\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^4}-16\sqrt[3]{x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}-16\right)=0,$$

откуда $\sqrt[3]{x^2}=0$, $x_1=0$, или $\sqrt[3]{x^2}-16=0$, $\sqrt[3]{x^2}=16$, $x_2=64$. При проверке $x_1=0$ не удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $x=64$.

6.055. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq0$.

Из условия имеем

$$x^{\frac{6}{10}}-x^{\frac{3}{10}}=56\Leftrightarrow\left(x^{\frac{3}{10}}\right)^2-x^{\frac{3}{10}}-56=0.$$

Пусть $x^{\frac{3}{10}} = y \ge 0$. Относительно y уравнение принимает вид $y^2 - y - 56 = 0$, откуда $y_1 = -7$ или $y_2 = 8$; $y_1 = -7 < 0$ не подходит. Тогда $x^{\frac{3}{10}} = 8$. Отсюда $x = 8^{\frac{10}{3}}$, $x = \left(2^3\right)^{\frac{10}{3}}$, $x = 2^{10} = 1024$.

Ответ: $x = 1024$.

6.056. $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $x^2 - 7 \ge 0$.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x^2+9} = \sqrt{x^2-7} + 2$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$x^2 + 9 = x^2 - 7 + \sqrt{x^2-7} + 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-7} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 16,\ x_{1,2} = \pm 4.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни заданного уравнения.

Ответ: $x_1 = 4,\ x_2 = -4$.

6.057. $\sqrt{10-x^2} + \sqrt{x^2+3} = 5$.

Решение.

ОДЗ: $10 - x^2 \ge 0$.

Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем

$$10 - x^2 + 2\sqrt{\left(10-x^2\right)\left(x^2+3\right)} + x^2 + 3 = 25 \Leftrightarrow \sqrt{\left(10-x^2\right)\left(x^2+3\right)} = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(10-x^2\right)\left(x^2+3\right) = 36 \Leftrightarrow x^4 - 7x^2 + 6 = 0,\ x^2 = 1 \text{ или } x^2 = 6;$$
$$x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{6}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm 1,\ x_{3,4} = \pm\sqrt{6}$.

6.058. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \ne -3, \\ x \ne 5. \end{cases}$

Пусть $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=z,\ z\neq 0$. Относительно z уравнение принимает вид

$$z+\frac{1}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+1=0 \Leftrightarrow (z-1)^2=0 \Leftrightarrow z-1=0,\ z=1.$$

Тогда $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}=1 \Leftrightarrow \frac{5-x}{x+3}=1;\ x=1$.

Ответ: $x=1$.

6.059. $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=2{,}5.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} z\neq 1, \\ z\neq 0. \end{cases}$

Пусть $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=y,\ y\neq 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$y+\frac{1}{y}=2{,}5 \Leftrightarrow y^2-2{,}5y+1=0$, откуда $y_1=\frac{1}{2}, y_2=2$. Тогда или

$\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=\frac{1}{2},\ \frac{16z}{z-1}=\frac{1}{32},\ z_1=-\frac{1}{511}$, или $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=2,\ \frac{16z}{z-1}=32,\ z_2=2$.

Ответ: $z_1=-\frac{1}{511}, z_2=2.$

6.060. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $\sqrt[3]{5x+7}=\sqrt[3]{5x-12}+1$ и возведем обе части в куб:

$$5x+7=5x-12+3\left(\sqrt[3]{5x-12}\right)^2+3\sqrt[3]{5x-12}+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5x-12}\right)^2+\sqrt[3]{5x-12}-6=0.$$

Пусть $\sqrt[3]{5x-12}=t$. Относительно t уравнение принимает вид $t^2-t-6=0$, откуда найдем $t_1=-3$ и $t_2=2$.

Тогда или $\sqrt[3]{5x-12}=-3$, $5x-12=-27$, $x_1=-3$, или $\sqrt[3]{5x-12}=2$, $5x-12=8$, $x_2=4$.

Ответ: $x_1=-3, x_2=4.$

6.061. $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-18=0.$

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0.$

Обозначим $\sqrt[6]{x}=y\ge 0$. Относительно y уравнение принимает вид

$2y^2+5y-18=0$, откуда найдем $y_1=-\frac{9}{2}$, $y_2=2$; $y_1=-\frac{9}{2}<0$ не подходит.

Тогда $\sqrt[6]{x}=2$, $x=2^6=64$.

Ответ: $x=64.$

6.062. $\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$3x^2+1+2\sqrt{(3x^2+1)(x^2+3)}+x^2+3=6x^2+10\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(3x^2+1)(x^2+3)}=x^2+3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(3x^2+1)(x^2+3)=(x^2+3)^2\Leftrightarrow(3x^2+1)(x^2+3)-(x^2+3)^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x^2+3)(3x^2+1-x^2-3)=0\Leftrightarrow(x^2+3)(x^2-1)=0;$$
$$x^2+3\ne 0, x^2-1=0, x^2=1,\ x_{1,2}=\pm 1.$$

Ответ: $x_{1,2}=\pm 1.$

6.063. $\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\ne 1.$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}=3\Leftrightarrow\frac{\sqrt[6]{x^3}(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[6]{x^3}(\sqrt[6]{x}-1)}=3\Leftrightarrow\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-3=0,\ x\neq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[6]{x}+1-3\sqrt[6]{x}+3}{\sqrt[6]{x}-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt[6]{x}+4=0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x}=2, x=2^6=64.$$

Ответ: $x=64$.

6.064. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+8}=\sqrt{2x+6}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+2\geq 0, \\ 3x+8\geq 0, \\ 2x+6\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -2.$

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+6}=-\sqrt{3x+8}$ и возведем обе его части в квадрат:

$$x+2-2\sqrt{(x+2)(2x+6)}+2x+6=3x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(2x+6)}=0,$$

откуда $x+2=0$, $x_1=-2$, или $2x+6=0$, $x_2=-3$ — не подходит по ОДЗ. Проверкой убеждаемся, что $x=-2$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $x=-2$.

6.065. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x+6}=\sqrt{12x+25}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+5\geq 0, \\ 5x+6\geq 0, \\ 12x+25\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -\frac{6}{5}.$

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$2x+5+2\sqrt{(2x+5)(5x+6)}+5x+6=12x+25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x+5)(5x+6)}=5x+14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(2x+5)(5x+6)=25x^2+140x+196 \Leftrightarrow 15x^2+8x-76=0,$$

откуда $x_1=-\frac{38}{15}$, $x_2=2$; $x_1=-\frac{38}{15}$ не подходит по ОДЗ. Проверкой убеждаемся, что $x=2$ является корнем уравнения.

Ответ: $x=2$.

6.066. $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$.

Решение.

Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$\left(x^2-4x-6\right)^2=2x^2-8x+12 \Leftrightarrow \left(x^2-4x-6\right)^2-2\left(x^2-4x-6+12\right)=0.$$

Пусть $x^2-4x-6=y,\ y\geq 0$. Относительно y уравнение примет вид $y^2-2y-24=0$, откуда $y_1=-4$, $y_2=6$; $y_1=-4$ не подходит.

Тогда $x^2-4x-6=6 \Leftrightarrow x^2-4x-12=0$, $x_1=-2, x_2=6$. Проверкой убеждаемся, что это действительно корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1=-2, x_2=6$.

Решить системы уравнений **(6.067—6.119):**

6.067. $\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ x+y=0{,}9.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ x+0{,}2-0{,}2+y+0{,}3-0{,}3=0{,}9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\\ (x+0{,}2)+(y+0{,}3)=1.4.\end{cases}$$

Пусть $\begin{cases}x+0{,}2=u,\\ y+0{,}3=v.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}u^2+v^2=1,\\ u+v=1{,}4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2-2uv=1,\\ u+v=1{,}4\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1{,}4)^2-2uv=1,\\ u+v=1{,}4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1{,}96-2uv=1,\\ u+v=1{,}4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}uv=0{,}48,\\ u+v=1{,}4.\end{cases}$$

По теореме Виета возможны только следующие варианты:

$\begin{cases}u_1=0{,}6,\\ v_1=0{,}8\end{cases}$ или $\begin{cases}u_2=0{,}8,\\ v_2=0{,}6.\end{cases}$

Тогда $\begin{cases}x+0{,}2=0{,}6,\\ y+0{,}3=0{,}8\end{cases}$ или $\begin{cases}x+0{,}2=0{,}8,\\ y+0{,}3=0{,}6;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=0{,}4,\\ y_1=0{,}5\end{cases}$ или $\begin{cases}x_2=0{,}6,\\ y_2=0{,}3.\end{cases}$

Ответ: $(0{,}4;0{,}5)$, $(0{,}6;0{,}3)$.

6.068. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3 y^3 = -8. \end{cases}$

Решение.

По теореме Виета возможны только следующие варианты:

1) $\begin{cases} x^3 = 8, \\ y^3 = -1, \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} x^3 = -1, \\ y^3 = 8, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

Ответ: $(2; -1), (-1; 2)$.

6.069. $\begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5, \\ x^{-2} + y^{-2} = 13. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\begin{cases} x + y = 5xy, \\ x^2 + y^2 = 13x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5xy, \\ (x+y)^2 - 2xy = 13x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5xy, \\ xy(6xy - 1) = 0. \end{cases}$$

Последняя система равносильна двум системам уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0. \end{cases}$

Это решение не подходит по ОДЗ.

2) $\begin{cases} x + y = \frac{5}{6}, \\ xy = \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3}, \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}, \\ y_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \right)$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

6.070. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6}, \\ x+y=5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Умножив левую и правую части первого уравнения на $6xy \neq 0$, получим

$$\begin{cases} 6(x^2+y^2)=13xy, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6((x+y)^2-2xy)=13xy, \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=6, \\ x+y=5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-5y+6=0, \\ x+y=5, \end{cases} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=3, \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=2. \end{cases}$$

Ответ: $(2;3)$, $(3;2)$.

6.071. $\begin{cases} x-y=1, \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

Решение.

Преобразуем второе уравнение системы

$$\begin{cases} x-y=1, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1, \\ (x-y)^2+3xy=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y=1, \\ 1+3xy=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1, \\ xy=2, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1, \end{cases} \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-2. \end{cases}$$

Ответ: $(2;1)$, $(-1;-2)$.

6.072. $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ y^2-x-5=0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} y \neq \pm 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы

$$\begin{cases} x(y+1)-x(y-1)=y^2-1, \\ y^2-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+x-xy+x=y^2-1, \\ y^2-x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y^2-1, \\ y^2-x=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=y^2-5$. Подставив это значение x в первое уравнение системы, получим $2(y^2-5)=y^2-1$, $y^2=9$, $y_1=3$, $y_2=-3$; тогда $x_1=4$, $x_2=4$.

Ответ: $(4;3)$, $(4;-3)$.

6.073. $\begin{cases} y^2-xy=-12, \\ x^2-xy=28. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} y(y-x)=-12, \\ x(x-y)=28. \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\begin{cases} \dfrac{y(x-y)}{x(x-y)}=\dfrac{12}{28}, \\ x(x-y)=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{7}, \\ x(x-y)=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3x}{7}, \\ x(x-y)=28. \end{cases}$$

Подставив $y=\dfrac{3x}{7}$ из первого уравнения системы во второе, получим

$$\begin{cases} y=\dfrac{3x}{7}, \\ x\left(x-\dfrac{3x}{7}\right)=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3x}{7}, \\ x^2=49. \end{cases}$$

Отсюда:

1) $\begin{cases} y=\dfrac{3x}{7}, \\ x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-3, \\ x_1=-7 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} y=\dfrac{3x}{7}, \\ x=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2=3, \\ x_2=7. \end{cases}$

Ответ: $(-7;-3)$, $(7;3)$.

6.074. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9, \\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $y \neq 0$.

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ \dfrac{x}{y}=v. \end{cases}$ Имеем $\begin{cases} u+v=9, \\ uv=20. \end{cases}$ По теореме Виета возможны только следующие варианты:

1) $\begin{cases} u_1=4, \\ v_1=5 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} u_2=5, \\ v_2=4. \end{cases}$

Тогда

1) $\begin{cases} x+y=4, \\ \dfrac{x}{y}=5, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=\dfrac{10}{3}, \\ y_1=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

или

2) $\begin{cases} x+y=5, \\ \dfrac{x}{y}=4, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=1. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, $(4;1)$.

6.075. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} xy(x+y)=6, \\ xy+(x+y)=5. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} xy = u, \\ x + y = v. \end{cases}$

Относительно u и v получим систему $\begin{cases} uv = 6, \\ u + v = 5 \end{cases}$, откуда по теореме Виета находим $u_1 = 2$, $u_2 = 3$, $v_1 = 3$, $v_2 = 2$.

Тогда $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 3, \\ x + y = 2 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $(1; 2), (2; 1)$.

6.076. $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12, \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} x^2y^2(y + x) = 12, \\ x^2y^2(y - x) = 4. \end{cases}$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x^2y^2(y+x)}{x^2y^2(y-x)} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow \frac{y+x}{y-x} = 3 \Leftrightarrow y + x = 3y - 3x \Leftrightarrow y = 2x.$$

Из первого уравнения системы находим

$$x^2(2x)^3 + x^3(2x)^2 = 12 \Leftrightarrow 8x^5 + 4x^5 = 12 \Leftrightarrow x^5 = 1,\ x = 1.$$

Тогда $y = 2$.

Ответ: $(1; 2)$.

6.077. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \left((x+y)^2 - 2xy\right)^2 - 2x^2y^2 = 82, \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left((x+y)^2 - 6\right)^2 - 18 = 82, \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left((x+y)^2-6\right)^2=100,\\ xy=3.\end{cases}$$

Из первого уравнения $\left|(x+y)^2-6\right|=10$, откуда $(x+y)^2=16$ или $(x+y)^2=-4$; $(x+y)^2=-4$ не подходит. Тогда

1) $\begin{cases}x+y=4,\\ xy=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=1\end{cases}$

или

2) $\begin{cases}x+y=-4,\\ xy=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1,\\ y_3=-3,\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-3,\\ y_4=-1.\end{cases}$

Ответ: $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1,-3)$, $(-3,-1)$.

6.078. $\begin{cases}x^3+y^3=35,\\ x+y=5.\end{cases}$

Решение.
По формуле суммы кубов получаем

$$\begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=35,\\ x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=35,\\ x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(25-3xy)=35,\\ x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25-3xy=7,\\ x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=6,\\ x+y=5.\end{cases}$$

По теореме Виета возможные варианты; $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=3\end{cases}$ или $\begin{cases}x_2=3,\\ y_2=2.\end{cases}$

Ответ: $(2;3)$, $(3;2)$.

6.079. $\begin{cases}x^3+y^3=9,\\ xy=2.\end{cases}$

Решение.
Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + \dfrac{8}{x^3} = 9, \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 9x^3 + 8 = 0, \text{ где } x \neq 0, \\ y = \dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x_1^3 = 1$ или $x_2^3 = 8$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Тогда $y_1 = 2$, $y_2 = 1$.

Ответ: $(1; 2), (2; 1)$.

6.080. $\begin{cases} u^2 + uv = 15, \\ v^2 + uv = 10. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему в виде $\begin{cases} u(u+v) = 15, \\ v(u+v) = 10 \end{cases}$ и разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{u(u+v)}{v(u+v)} = \frac{15}{10} \Leftrightarrow \frac{u}{v} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow u = \frac{3v}{2}.$$

Подставив $u = \frac{3v}{2}$ во второе уравнение системы, получим $v^2 + \frac{3v^2}{2} = 10$, $\frac{5v^2}{2} = 10$, $v^2 = 4$, откуда $v_1 = -2$, $v_2 = 2$. Тогда $u_1 = -3$, $u_2 = 3$.

Ответ: $(-3; -2), (3; 2)$.

6.081. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65, \\ x^2 y + xy^2 = 20. \end{cases}$

Решение.

Разложив левые части, представим систему в виде

$$\begin{cases} (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 65, \\ xy(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left((x+y)^2 - 3xy\right) = 65, \\ xy(x+y) = 20. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x+y=u, \\ xy=v. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} u\left(u^2-3v\right)=65, \\ uv=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2-3v\right)=65, \\ v=\dfrac{20}{u}. \end{cases}$

Из первого уравнения получаем $u\left(u^2-3\cdot\dfrac{20}{u}\right)=65$, $u^3=125$, откуда $u=5$. Тогда $v=\dfrac{20}{5}=4$ и $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=4. \end{cases}$

Ответ: $(4;1)$, $(1;4)$.

6.082. $\begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения системы $x=\dfrac{2}{y^2}$. Тогда из первого уравнения получаем $\left(\dfrac{2}{y^2}\right)^2+y^4=5$, $y^8-5y^4+4=0$. Отсюда $y_1^4=1$ или $y_2^4=4$, откуда $y_1=-1$, $y_2=1$, $y_3=-\sqrt{2}$, $y_4=\sqrt{2}$. Тогда $x_{1,2}=\dfrac{2}{1}=2$; $x_{3,4}=\dfrac{2}{2}=1$.

Ответ: $(2;1)$, $(2;-1)$, $(1;\sqrt{2})$, $(1;-\sqrt{2})$.

6.083. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y, \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему в виде $\begin{cases} 12(x+y)^2+(x+y)-2{,}5=0, \\ 6(x-y)^2+(x-y)-0{,}125=0. \end{cases}$

Тогда первое уравнение будет квадратным относительно $x+y$, а второе относительно $x-y$. Решая указанные уравнения, получаем

$$(x+y)_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{24}=\frac{-1\pm 11}{24},$$

$$(x-y)_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+3}}{12}=\frac{-1\pm 2}{12}.$$

Перебирая возможные варианты, имеем:

$$1)\ \begin{cases} x+y=-\frac{1}{2}, \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\frac{3}{8}, \\ y_1=-\frac{1}{8}; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x+y=-\frac{1}{2}, \\ x-y=\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-\frac{5}{24}, \\ y_2=-\frac{7}{24}; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x+y=\frac{5}{12}, \\ x-y=-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=\frac{1}{12}, \\ y_3=\frac{1}{3}; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x+y=\frac{5}{12}, \\ x-y=\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4=\frac{1}{4}, \\ y_4=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{12};\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{24};-\frac{7}{24}\right)\left(-\frac{3}{8};-\frac{1}{8}\right)$

6.084. $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{y}{3}=3, \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{y}=\frac{3}{2}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\begin{cases} 6+xy=9x, \\ xy+6=3y \end{cases} \Rightarrow 9x-3y=0,$$

откуда $y = 3x$. Отсюда получаем $\frac{2}{x} + \frac{3x}{3} = 3$, $x^2 - 3x + 2 = 0$ при $x \neq 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; тогда $y_1 = 3$, $y_2 = 6$.

Ответ: $(1; 3)$, $(2; 6)$.

6.085. $\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{10}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ y \neq 0, \\ x \neq -y. \end{cases}$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2) = 10(x + y), \\ 4(x + y) = 3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3((x + y)^2 - 2xy) = 10(x + y), \\ 4(x + y) = 3xy. \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$ Тогда в новых переменных $\begin{cases} 3u^2 - 10u - 6v = 0, \\ 4u = 3v. \end{cases}$

Отсюда $v = \frac{4}{3}u$ и $3u^2 - 10u - 6\left(\frac{4}{3}u\right) = 0$, $3u^2 - 18u = 0$, откуда $u_1 = 0$, $u_2 = 6$; тогда $v_1 = 0$, $v_2 = 8$.

Получили совокупность двух систем

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0 \end{cases}$ или 2) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$

Решая эти системы, найдем $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2. \end{cases}$

Ответ: $(2; 4)$, $(4; 2)$.

6.086. $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=45,\\ x+y=5.\end{cases}$

Решение.

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases}(x-y)(x-y)(x+y)=45,\\ x+y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^2(x+y)=45,\\ x+y=5.\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow(x-y)^2=9$, откуда $x-y=-3$ или $x-y=3$. Получили совокупность двух систем:

1) $\begin{cases}x-y=-3,\\ x+y=5,\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x-y=3,\\ x+y=5.\end{cases}$

Решая эти системы, найдем $\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=4.\end{cases}$

Ответ: $(4;1),(1;4)$.

6.087. $\begin{cases}x^4-y^4=15,\\ x^3y-xy^3=6.\end{cases}$

Решение.

Пусть $t=\dfrac{y}{x}$, тогда $y=tx$ и система принимает вид

$$\begin{cases}x^4-t^4x^4=15,\\ x^4t-x^4t^3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4(1-t^4)=15,\\ x^4(t-t^3)=6.\end{cases}$$

После деления получаем $\dfrac{1-t^4}{t-t^3}=\dfrac{15}{6}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0$, откуда

$t_1=\dfrac{1}{2}$, $t_2=2$.

При $t_1=\dfrac{1}{2}$ из уравнения $x^4(1-t^4)=15$ имеем

$$x^4\left(1-\frac{1}{16}\right)=15 \Leftrightarrow x^4=16,$$

откуда $x_1=-2$, $x_2=2$; тогда $y_1=-1$, $y_2=1$.

При $t_2=2$ имеем $x^4(1-16)=15, x^4=-1$, это решение не подходит.

Ответ: $(-2;-1),(2;1)$.

6.088. $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

После преобразований первого уравнения, получим

$$\begin{cases} x^2-y^2=\frac{5}{6}xy, \\ x^2-y^2=5. \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{6}xy=5 \Leftrightarrow xy=6,\ y=\frac{6}{x}.$$

Из второго уравнения системы находим

$$x^2-\frac{36}{x^2}=5 \Leftrightarrow x^4-5x^2-36=0,$$

откуда $x^2=-4$ или $x^2=9$; $x^2=-4$ не подходит, поэтому $x_1=-3$, $x_2=3$; тогда $y_1=-2$, $y_2=2$.

Ответ: $(-3;-2),(3;2)$.

6.089. $\begin{cases} u^3+v^3+1=m, \\ u^3v^3=-m. \end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы $v^3=m-1-u^3$. Подставив это значение v^3 во второе уравнение, получим

$$u^3\left(m-1-u^3\right)=-m \Leftrightarrow \left(u^3\right)^2-(m-1)u^3-m=0,$$

откуда

$$u_{1,2}^3=\frac{m-1\pm\sqrt{(m-1)^2+4m}}{2}=\frac{m-1\pm\sqrt{m^2-2m+1+4m}}{2}=$$

$$=\frac{m-1\pm\sqrt{m^2+2m+1}}{2}=\frac{m-1\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2}=\frac{m-1\pm(m+1)}{2},$$

$$u_1^3=\frac{m-1-m-1}{2}=-1,\ u_1=-1,$$

или

$$u_2^3=\frac{m-1+m+1}{2}=m,\ u_2=\sqrt[3]{m};$$

тогда $v_1^3=m$, $v_1=\sqrt[3]{m}$ или $v_2^3=m-1-m=-1$, $v_2=-1$.

Ответ: $\left(-1;\sqrt[3]{m}\right)$, $\left(\sqrt[3]{m};-1\right)$

6.090. $\begin{cases} ax+\dfrac{b}{y}=2, \\ \dfrac{b}{x}+ay=2ab. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

Перепишем систему в виде $\begin{cases} axy+b=2y, \\ b+axy=2abx \end{cases} \Rightarrow 2y=2abx,\ y=abx.$

Из первого уравнения системы получаем $a^2x^2-2ax+1=0$ (при $b\neq 0$) или $(ax-1)^2=0$, откуда $x_1=x_2=\dfrac{1}{a}$. Тогда $y=a\cdot b\cdot\dfrac{1}{a}=b$, где $a\neq 0$.

Ответ: если $ab=0$, то корней нет; если $ab\neq 0$, то $x=\dfrac{1}{a}$, $y=b$.

6.091. $\begin{cases} (x-y)\cdot xy=30, \\ (x+y)\cdot xy=120. \end{cases}$

Решение.

После деления второго уравнения системы на первое получаем $\frac{(x+y)xy}{(x-y)xy}=\frac{120}{30}$, $y=\frac{3}{5}x$. Из первого уравнения системы находим

$\left(x-\frac{3}{5}x\right)x\cdot\frac{3}{5}x=30$, $x^3=5^3$, откуда $x=5$; тогда $y=3$.

Ответ: $(5;3)$.

6.092. $\begin{cases}x^2+y^2+6x+2y=0,\\x+y+8=0.\end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения системы $y=-8-x$. Подставив это значение y в первое уравнение системы, получим

$$x^2+(-8-x)^2+6x+2(-8-x)=0 \Leftrightarrow x^2+10x+24=0,$$

откуда $x_1=-6$, $x_2=-4$; тогда $y_1=-2$, $y_2=-4$.

Ответ: $(-6;-2)$, $(-4;-4)$.

6.093. $\begin{cases}v-u=1,\\w-v=1,\\(u-1)^3+(v-2)^3+(w-3)^3=3.\end{cases}$

Решение.

Из первого уравнения системы найдем $v=1+u$. Подставив это значение v во второе и третье уравнения системы, имеем

$$\begin{cases}w-(1+u)=1,\\(u-1)^3+(1+u-2)^3+(w-3)^3=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}w-u=2,\\(u-1)^3+(u-1)^3+(w-3)^3=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}w-u=2,\\2(u-1)^3+(w-3)^3=3.\end{cases}$$

Из первого уравнения последней системы найдем $w=2+u$. Подставив это значение w во второе уравнение этой же системы, находим

$$2(u-1)^3+(2+u-3)^3=3 \Leftrightarrow (u-1)^3=1,$$

откуда $u=2$. Тогда $w=4$, а $v=3$.

Ответ: $(2;3;4)$.

6.094. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{13}{6}, \\ xy=5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm y$.

Преобразовав первое уравнение системы, получим

$$6(x+y)^2+6(x-y)^2=13(x-y)(x+y) \Leftrightarrow x^2=25y^2,$$

откуда

$$x_1=-5y,\ x_2=5y.$$

Из второго уравнения системы находим $y^2=-1$ (не подходит) или $y^2=1$, откуда $y_{1,2}=\pm 1$. Тогда $x_{1,2}=\pm 5$.

Ответ: $(5;1)$, $(-5;-1)$.

6.095. $\begin{cases} 3x+2y+2z=13, \\ 2x+3y+2z=14, \\ 2x+2y+3z=15. \end{cases}$

Решение.

Сложив все три уравнения, получим $7(x+y+z)=42$, откуда $x+y+z=6$. Теперь будем последовательно вычитать это уравнение из каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=13, \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; \quad \begin{cases} 2x+3y+2z=14, \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow y=2;$$

$$\begin{cases} 2x+2y+3z=15, \\ x+y+z=6 \end{cases} \Leftrightarrow y=3.$$

Ответ: $(1;2;3)$.

6.096. $\begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2. \end{cases}$

Решение.

Деля первое уравнение системы на второе, получаем $\frac{y}{x}=8$, $y=8x$.

Из второго уравнения системы имеем $x^3\cdot 64x^2=2$, $x^5=\frac{1}{32}$, откуда

$x=\frac{1}{2}$; тогда $y=4$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};4\right)$

6.097. $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

Решение.

Будем преобразовывать систему по методу Гаусса, т.е. из второго и третьего уравнения системы вычтем первое, помноженное на соответствующее число

$$\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=3, \\ -5y-7z=-2, \\ -y-5z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=3, \\ y+5z=4, \\ -5y-7z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=3, \\ y+5z=4, \\ 18z=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y-3z, \\ y=4-5z, \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$$

Ответ: $(2;-1;1)$.

6.098. $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ xy(x+y)=-2. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-xy+y^2)=7,\\ xy(x+y)=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)((x+y)^2-3xy)=7,\\ xy(x+y)=-2.\end{cases}$$

Пусть $\begin{cases}x+y=u,\\ xy=v,\end{cases}$ тогда система уравнений имеет вид

$$\begin{cases}u(u^2-3v)=7,\\ uv=-2\end{cases} \Rightarrow v=-\frac{2}{u}$$

Из первого уравнения полученной системы найдем

$$u\left(u^2+\frac{6}{u}\right)=7 \Leftrightarrow u^3+6=7,\ u^3=1,$$

откуда $u=1$. Тогда $v=-\frac{2}{1}=-2$. Далее,

$$\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-2\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=-1\end{cases} \text{или} \begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=2.\end{cases}\right)$$

Ответ: $(2;-1),(-1;2)$.

6.099. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=91,\\ x+\sqrt{xy}+y=13.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $xy\geq 0$.

Пусть $\begin{cases}\sqrt{x}=u\geq 0,\\ \sqrt{y}=v\geq 0,\end{cases}$ тогда $\begin{cases}x=u^2,\\ y=v^2,\end{cases}$ $\begin{cases}x^2=u^4,\\ y^2=v^4.\end{cases}$

Относительно *u* и *v* система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}u^4+u^2v^2+v^4=91,\\ u^2+uv+v^2=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u^2+v^2)^2-2u^2v^2+u^2v^2=91,\\ u^2+v^2=13-uv.\end{cases}$$

Из первого уравнения полученной системы имеем

$$(13-uv)^2-u^2v^2=91,\quad 169-26uv+u^2v^2-u^2v^2=91,\quad uv=3.$$

Из второго уравнения системы получим

$$u^2+v^2=13-3,\quad (u+v)^2-2uv=10,\quad (u+v)^2=10+2uv=16,$$

откуда

$$u+v=-4$$

или

$$u+v=4.$$

Получили две системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} u+v=-4, \\ uv=3 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad 2)\ \begin{cases} u+v=4, \\ uv=3, \end{cases}$$

откуда по теореме Виета находим

$$\begin{cases} u_1=-1, \\ v_1=-3, \end{cases} \begin{cases} u_2=-3, \\ v_2=-1, \end{cases} \begin{cases} u_3=1, \\ v_3=3, \end{cases} \begin{cases} u_4=3, \\ v_4=1. \end{cases}$$

Тогда для $\begin{cases} \sqrt{x}=-1, \\ \sqrt{y}=-3 \end{cases}$ $-\varnothing$, для $\begin{cases} \sqrt{x}=-3, \\ \sqrt{y}=-1 \end{cases}$ $-\varnothing$,

$\begin{cases} \sqrt{x}=1, \\ \sqrt{y}=3, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=9, \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x}=3, \\ \sqrt{y}=1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_2=9, \\ y_2=1. \end{cases}$

Ответ: $(1;9),(9;1)$.

6.100. $\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \sqrt{u+v}-\sqrt{u-v}=8. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} u+v\ge 0, \\ u-v\ge 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \left(\sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}\right)\left(\sqrt[4]{u+v}+\sqrt[4]{u-v}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ 2\left(\sqrt[4]{u+v}+\sqrt[4]{u-v}\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{u+v}-\sqrt[4]{u-v}=2, \\ \sqrt[4]{u+v}+\sqrt[4]{u-v}=4. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получаем

$$\begin{cases} 2\sqrt[4]{u+v}=6, \\ -2\sqrt[4]{u-v}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{u+v}=3, \\ \sqrt[4]{u-v}=1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} u+v=81, \\ u-v=1, \end{cases} \quad \begin{cases} u=41, \\ v=40. \end{cases}$$

Ответ: $(41;40)$.

6.101. $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y\ge 0, \\ (x-y)^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -y.$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3}\cdot\sqrt[6]{(x-y)^2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8. \end{cases}$$

Если $\begin{cases} \sqrt{x+y}=u, \\ \sqrt[3]{x-y}=v, \end{cases}$ то $\begin{cases} u+v=6, \\ u\cdot v=8. \end{cases}$

По теореме Виета единственно возможные варианты

$$\begin{cases} u_1=2, \\ v_1=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u_2=4, \\ v_2=2. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \sqrt{x+y}=2, \\ \sqrt[3]{x-y}=4 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt[3]{x-y}=2, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=64 \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x+y=16, \\ x-y=8, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1=34, \\ y_1=-30, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=12, \\ y_2=4. \end{cases}$$

Ответ: $(34;-30)$, $(12;4)$.

$$\textbf{6.102.}\quad \begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-y+11}=u\geq 0, \\ \sqrt[4]{3x+y-9}=v\geq 0. \end{cases}$

Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases} u^2-v^2=3, \\ u+v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(u+v)=3, \\ u+v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ u+v=3, \end{cases} \text{откуда } \begin{cases} u=2, \\ v=1. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \sqrt[4]{2x-y+11}=2, \\ \sqrt[4]{3x+y-9}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+11=16, \\ 3x+y-9=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+y=10, \end{cases}$

откуда

$$\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $(3;1)$.

$$\textbf{6.103.}\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}}-2\sqrt{\frac{x}{y}}=1, \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5x+y\geq 0, \\ 5x-y\geq 0, \\ \frac{y}{x}>0. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{\frac{y}{x}}=z>0$. Тогда $z-\frac{2}{z}=1$ или $z^2-z-2=0$, где $z\neq 0$. Отсюда $z_1=-1$, $z_2=2$; $z_1=-1<0$ не подходит.

Тогда $\sqrt{\frac{y}{x}} = 2$, $\frac{y}{x} = 4$, $y = 4x$. Из второго уравнения системы имеем $\sqrt{5x+4x} + \sqrt{5x-4x} = 4$, $\sqrt{9x} + \sqrt{x} = 4$, $4\sqrt{x} = 4$, $\sqrt{x} = 1$, откуда находим $x = 1$. Тогда $y = 4$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это решение.

Ответ: $(1; 4)$.

6.104. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt[3]{y}\sqrt{x} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \sqrt[6]{x^2}\sqrt[6]{y^3} + \sqrt[6]{y^2}\sqrt[6]{x^3} = 12, \\ xy = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{x^2}\sqrt[6]{y^2}\left(\sqrt[6]{y} + \sqrt[6]{x}\right) = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt[6]{x} = u \geq 0$, а $\sqrt[6]{y} = v \geq 0$. Тогда имеем

$$\begin{cases} u^2v^2(u+v) = 12, \\ u^6v^6 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (uv)^2(u+v) = 12, \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(u+v) = 12, \\ uv = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 3, \\ uv = 2, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} u_1 = 1, \\ v_1 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} u_2 = 2, \\ v_2 = 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} \sqrt[6]{x} = 1, \\ \sqrt[6]{y} = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \sqrt[6]{x} = 2, \\ \sqrt[6]{y} = 1, \end{cases}$

откуда

$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 64 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 64, \\ y_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: $(1; 64)$, $(64; 1)$.

6.105. $\begin{cases} \sqrt{(x+y)^2}=3, \\ \sqrt{(x-y)^2}=1. \end{cases}$

Решение.

Из условия имеем $\begin{cases} |x+y|=3, \\ |x-y|=1. \end{cases}$ Из этой системы уравнений получаем следующие четыре системы:

1) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1. \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения каждой системы, найдем ее решения:

$\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-2, \end{cases}$ $\begin{cases} x_3=2, \\ y_3=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=1, \\ y_4=2. \end{cases}$

Ответ: $(-2;-1), (-1;-2), (2;1), (1;2)$.

6.106. $\begin{cases} u^2+v^2=uv+13, \\ u+v=\sqrt{uv}+3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $uv \ge 0$.

Пусть $\begin{cases} \sqrt{u}=x\ge 0, \\ \sqrt{v}=y\ge 0, \end{cases}$ $\begin{cases} u=x^2, \\ v=y^2, \end{cases}$ $\begin{cases} u^2=x^4, \\ v^2=y^4. \end{cases}$

Относительно x и y получаем систему

$$\begin{cases} x^4+y^4=x^2y^2+13, \\ x^2+y^2=xy+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)^2-2x^2y^2=x^2y^2+13, \\ x^2+y^2=xy+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)^2-3x^2y^2-13=0, \\ x^2+y^2=xy+3. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$(xy+3)^2-3x^2y^2-13=0,\ x^2y^2+6xy+9-3x^2y^2-13=0,$

$x^2y^2-3xy+2=0$, откуда $xy=2$ или $xy=1$. Получили две системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} xy=2, \\ (x+y)^2=3xy+3 \end{cases} \quad \text{или} \quad 2)\ \begin{cases} xy=1, \\ (x+y)^2=3xy+3, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2, \end{cases} \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1, \end{cases} \begin{cases} x_3=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \\ y_3=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \begin{cases} x_4=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \\ y_4=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Тогда $\begin{cases} \sqrt{u}=1, \\ \sqrt{v}=2, \end{cases} \begin{cases} u_1=1, \\ v_1=4; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{u}=2, \\ \sqrt{v}=1, \end{cases} \begin{cases} u_2=4, \\ v_2=1; \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{u}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{v}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \begin{cases} u_3=2-\sqrt{3}, \\ v_3=2+\sqrt{3}, \end{cases} \begin{cases} \sqrt{u}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \\ \sqrt{v}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \begin{cases} u_4=2+\sqrt{3}, \\ v_4=2-\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ответ: $(1;4)$, $(4;1)$, $(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3};2-\sqrt{3})$

6.107. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ xy=9. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} \sqrt{x}=u, \\ \sqrt{y}=v, \end{cases}$ где $u>0$ и $v>0$.

Относительно u и v система уравнений примет вид $\begin{cases} \dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{4}{3}, \\ u^2v^2=9. \end{cases}$

Учитывая, что $u>0$, $v>0$, получаем

$$\begin{cases}\dfrac{u+v}{uv}=\dfrac{4}{3},\\ uv=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=\dfrac{4}{3}uv,\\ uv=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4,\\ uv=3,\end{cases} \text{откуда } \begin{cases}u_1=1,\\ v_1=3;\end{cases} \begin{cases}u_2=3,\\ v_2=1.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}\sqrt{x}=1,\\ \sqrt{y}=3,\end{cases} \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=9;\end{cases} \begin{cases}\sqrt{x}=3,\\ \sqrt{y}=1,\end{cases} \begin{cases}x_2=9,\\ y_2=1.\end{cases}$

Ответ: $(1;9)$, $(9;1)$.

6.108. $\begin{cases}3\left(2-\sqrt{x-y}\right)^{-1}+10\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=5,\\ 4\left(2-\sqrt{x-y}\right)^{-1}-5\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=3.\end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2-\sqrt{x-y}}+\dfrac{10}{2+\sqrt{x+y}}=5,\\ \dfrac{4}{2-\sqrt{x-y}}-\dfrac{5}{2+\sqrt{x+y}}=3.\end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases}x-y\ge 0,\\ x+y\ge 0,\\ x-y\ne 4.\end{cases}$

Пусть $\begin{cases}\dfrac{1}{2-\sqrt{x-y}}=u,\\ \dfrac{1}{2+\sqrt{x+y}}=v.\end{cases}$ Относительно u и v система уравнений принимает вид

$$\begin{cases}3u+10v=5,\\ 4u-5v=3.\end{cases}$$

Отсюда получаем $u=1$; $v=\dfrac{1}{5}$. Тогда

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2-\sqrt{x-y}}=1,\\ \dfrac{1}{2+\sqrt{x+y}}=\dfrac{1}{5}\end{cases}, \quad \begin{cases}2-\sqrt{x-y}=1,\\ 2+\sqrt{x+y}=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-y}=1,\\ \sqrt{x+y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=1,\\ x+y=9,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}x=5,\\ y=4.\end{cases}$$

Ответ: $(5;4)$.

6.109. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=u,\\ \sqrt[3]{y}=v,\end{cases} \begin{cases}x=u^3,\\ y=v^3.\end{cases}$ Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=4,\\ u^3+v^3=28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4,\\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4,\\ ((u+v)^2-3uv)=7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4,\\ uv=3,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}u_1=1,\\ v_1=3;\end{cases} \begin{cases}u_2=3,\\ v_2=1.\end{cases}$$

Тогда $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=1,\\ \sqrt[3]{y}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=27;\end{cases} \begin{cases}\sqrt[3]{x}=3,\\ \sqrt[3]{y}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2=27,\\ y_2=1.\end{cases}$

Ответ: $(1;27)$, $(27;1)$.

6.110. $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+y\ge 0, \\ x-y\ge 0, \end{cases} \begin{cases} x\ge -y, \\ x\ge y. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=u\ge 0, \\ \sqrt[4]{x-y}=v\ge 0, \end{cases} \begin{cases} \sqrt{x+y}=u^2, \\ \sqrt{x-y}=v^2. \end{cases}$

Относительно u и v система примет вид

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^2-v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4, \\ (u+v)(u-v)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4, \\ u-v=2, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} u=3, \\ v=1. \end{cases}$ Тогда $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=3, \\ \sqrt[4]{x-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=81, \\ x-y=1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x=41, \\ y=40. \end{cases}$

Ответ: $(41;40)$.

6.111. $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3\sqrt{xy}, \\ x+y=5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=3\sqrt{xy}, \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\sqrt{xy}=5 \end{cases}$ и введем подстановку $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=u, \\ \sqrt{xy}=v, \end{cases}$ где $u\ge 0$ и $v\ge 0$. Тогда

$$\begin{cases} 2u=3v, \\ u^2-2v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{2u}{3}, \\ u^2-2v=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{2u}{3}, \\ u^2-2\cdot\dfrac{2u}{3}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\dfrac{2u}{3}, \\ 3u^2-4u-15=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $u_1=-\dfrac{4}{3}$, $u_2=3$; $u_1=-\dfrac{4}{3}$ не подходит. Тогда $v=2$ и

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{xy}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2\sqrt{xy}+y=9,\\ xy=4\end{cases} \begin{cases}x+y=5,\\ xy=4.\end{cases}$$

Используя теорему Виета, находим: $\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=4.\end{cases}$

Ответ: $(4;1)$, $(1;4)$.

6.112. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$

Пусть $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=u\ge 0,\\ \sqrt[4]{y}=v\ge 0,\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x}=u^2,\\ \sqrt{y}=v^2.\end{cases}$ Относительно u и v система имеет вид

$$\begin{cases}u^2+v^2=10,\\ u+v=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2-2uv=10,\\ u+v=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}uv=3,\\ u+v=4,\end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases}u_1=1,\\ v_1=3;\end{cases} \begin{cases}u_2=3,\\ v_2=1.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x_1}=1,\\ \sqrt[4]{y_1}=3;\end{cases} \begin{cases}\sqrt[4]{x_2}=3,\\ \sqrt[4]{y_2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=1,\\ y_1=81;\end{cases} \begin{cases}x_2=81,\\ y_2=1.\end{cases}$$

Ответ: $(1;81)$, $(81;1)$.

6.113. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+a}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x+a}}=2,\\ x+y=xy+a.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{x+a}{y}>0.$

Пусть $\sqrt{\dfrac{x+a}{y}}=t$, где $t>0$. Относительно t уравнение принимает вид $t+\dfrac{1}{t}=2, t^2-2t+1=0, (t-1)^2=0$, откуда $t=1$. Тогда $\sqrt{\dfrac{x+a}{y}}=1$, $\dfrac{x+a}{y}=1$, откуда $y=x+a$. Из второго уравнения получаем

$$x+x+a=x(x+a)+a, x^2+(a-2)x=0, x(x+a-2)=0,$$

откуда $x_1=0, x_2=2-a$. Тогда $y_1=a, y_2=2$.

Ответ: если $a\neq 0$, то $x_1=0$, $y_1=a$, $x_2=2-a$, $y_2=2$; если $a=0$, то $x=y=2$.

6.114. $\begin{cases} y\sqrt{2x}-x\sqrt{2y}=6, \\ xy^2-x^2y=30. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0. \end{cases}$

Перепишем первое уравнение в виде $\sqrt{2}(\sqrt{xy^2}-\sqrt{x^2y})=6$ и положим $\sqrt{xy^2}=u, \sqrt{x^2y}=v$, где $u\geq 0$, $v\geq 0$. Тогда система относительно u и v примет вид

$$\begin{cases} \sqrt{2}(u-v)=6, \\ u^2-v^2=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=3\sqrt{2}, \\ (u-v)(u+v)=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=3\sqrt{2}, \\ u+v=\dfrac{30}{3\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u-v=3\sqrt{2}, \\ u+v=5\sqrt{2}, \end{cases} \text{ откуда } u=4\sqrt{2}, v=\sqrt{2}.$$

Значит, $\begin{cases}\sqrt{xy^2}=4\sqrt{2},\\ \sqrt{x^2y}=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy^2=32,\\ x^2y=2.\end{cases}$

Перемножив эти уравнения, получим $x^3y^3=64$, откуда $xy=4$. Окончательно находим $x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $y=\frac{32}{4}=8$.

Ответ: $(\frac{1}{2}; 8)$.

6.115. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$

Решение.

Пусть $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=u,\\ \sqrt[3]{y}=v,\end{cases}\begin{cases}x=u^3,\\ y=v^3.\end{cases}$

Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^2-uv+v^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=3,\\ (u+v)^2-3uv=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=3,\\ 3^2-3uv=3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=3,\\ uv=2,\end{cases}$$

откуда $\begin{cases}u_1=1,\\ v_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}u_2=2,\\ v_2=1.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}\sqrt[3]{x}=1,\\ \sqrt[3]{y}=2,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=8;\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt[3]{x}=2,\\ \sqrt[3]{y}=1,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}x=8,\\ y=1.\end{cases}$

Ответ: $(1;8),(8;1)$.

6.116. $\begin{cases}\sqrt[4]{u}-\sqrt[4]{v}=1,\\ \sqrt{u}+\sqrt{v}=5.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} u \ge 0, \\ v \ge 0. \end{cases}$

Пусть $\begin{cases} \sqrt[4]{u} = x \ge 0, \\ \sqrt[4]{v} = y \ge 0. \end{cases}$ Относительно x и y система принимает вид

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ (x-y)^2 + 2xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ 1 + 2xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 2, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -1 < 0, \\ y_1 = -2 < 0 \end{cases}$ не подходит.

Тогда $\begin{cases} \sqrt[4]{u} = 2, \\ \sqrt[4]{v} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 16, \\ v = 1. \end{cases}$

Ответ: $(16;1)$.

6.117. $\begin{cases} x - y = 8a^2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 8a^2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) \cdot 4a = 8a^2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a. \end{cases}$$

1) При $a = 0$ имеем $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases}$

2) При $a \ne 0$ имеем $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2a, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4a, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} \sqrt{x} = 3a, \\ \sqrt{y} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 9a^2, \\ y_2 = a^2 \end{cases}$

при $a > 0$.

Ответ: если $a=0$, то $x_1=y_1=0$; если $a>0$, то $x_2=9a^2$, $y_2=a^2$; если $a<0, \varnothing$.

6.118. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14,\\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x+y\ge 0,\\ x-y\ge 0.\end{cases}$

Обозначим $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=u,\\ \sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=v,\end{cases}$ где $u\ge 0$ и $v\ge 0$.

Относительно u и v система принимает вид $\begin{cases}u+v=14,\\ \dfrac{u}{2}-\dfrac{v}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=14,\\ u-v=6,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}u=10,\\ v=4.\end{cases}$ Тогда $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=10,\\ \sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}=100,\\ \dfrac{x-y}{3}=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=200,\\ x-y=48,\end{cases}$

откуда $\begin{cases}x=124,\\ y=76.\end{cases}$

Ответ: $(124; 76)$.

6.119. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy},\\ x+y=5.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$

Пусть $\begin{cases}\sqrt{x}=u,\\ \sqrt{y}=v,\end{cases}$ где $u\ge 0$ и $v\ge 0$.

Относительно u и v система принимает вид

$$\begin{cases}u-v=0{,}5uv,\\ u^2+v^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=0{,}5uv,\\ (u-v)^2+2uv=5\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(0{,}5uv)^2+2uv-5=0,\quad 0{,}25(uv)^2+2uv-5=0,$$

откуда $uv=-10$ или $uv=2$; $uv=-10<0$ не подходит. Тогда

$$\begin{cases}u-v=0{,}5uv,\\ uv=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u-v=1,\\ uv=2,\end{cases}\text{ откуда }\begin{cases}u=2,\\ v=1;\end{cases}\ \begin{cases}\sqrt{x}=2,\\ \sqrt{y}=1,\end{cases}\ \begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}$$

Ответ: $(4;1)$.

6.120. Не решая уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 — корни данного уравнения.

Решение.

$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}.$$

По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ и

$$x_1^{-2}+x_2^{-2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

Ответ: $\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

6.121. Составить квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение.

Пусть $y^2+py+q=0$ есть искомое уравнение с корнями $y_1=\frac{1}{x_1}$, $y_2=\frac{1}{x_2}$. Из условия по теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} y_1+y_2=-p, \\ y_1y_2=q. \end{cases}$

Отсюда

$$p=-(y_1+y_2)=-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{b}{a}:\frac{c}{a}=\frac{b}{c},$$

$$q=y_1\cdot y_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{a}{c}.$$

Получили уравнение $y^2+\frac{b}{c}y+\frac{a}{c}=0$, $a\cdot c\neq 0$, $\Leftrightarrow cy^2+by+a=0$.

Ответ: $cy^2+by+a=0$ при $a\cdot c\neq 0$.

6.122. Составить уравнение второй степени, один из корней которого был бы равен сумме, а другой — произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение.

Пусть $y^2+py+q=0$ — искомое уравнение с корнями $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_1\cdot x_2$. По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ y_2=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1+y_2=-p, \\ y_1\cdot y_2=q. \end{cases}$$

Отсюда $p=-(y_1+y_2)=\frac{b}{a}-\frac{c}{a}=\frac{b-c}{a}$, $q=y_1y_2=-\frac{bc}{a^2}$. Получили уравнение

$$y^2+\frac{b-c}{a}y-\frac{bc}{a^2}=0 \Leftrightarrow a^2y^2+a(b-c)y-bc=0\ .$$

Ответ: $a^2y^2+a(b-c)y-bc=0.$

6.123. Составить уравнение второй степени, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение.

Пусть $y^2+py+q=0$ — искомое уравнение с корнями $y_1=x_1+1$, $y_2=x_2+1$. Из условия по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}, \end{cases} \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} y_1+y_2=x_1+1+x_2+1=x_1+x_2+2=-\dfrac{b}{a}+2=-p, \\ y_1\cdot y_2=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=\dfrac{c}{a}-\dfrac{b}{a}+1=q, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p=\dfrac{b-2a}{a}, \\ q=\dfrac{a-b+c}{a}. \end{cases}$$

Получили уравнение

$$y^2+\frac{b-2a}{a}y+\frac{a-b+c}{a}=0 \Leftrightarrow ay^2+(b-2a)y+a-b+c=0\ .$$

Ответ: $ay^2+(b-2a)y+a-b+c=0.$

6.124. Определить коэффициенты квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0$$

так, чтобы его корни были равны p и q .

Решение.

По теореме Виета $\begin{cases} p+q=-p, \\ pq=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+q=0, \\ q(p-1)=0. \end{cases}$

Из второго уравнения системы имеем $q=0$ или $p-1=0$. Тогда $q_1=0$, $p_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2p_2=-2$.

Ответ: $p_1=q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.

6.125. Найти коэффициенты A и B уравнения $x^2+Ax+B=0$, если известно, что числа A и B являются его корнями.

Решение.

По теореме Виета

$$\begin{cases} A+B=-A, \\ AB=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+B=0, \\ B(A-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=0, \\ B_1=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} A_2=1, \\ B_2=-2. \end{cases}$$

Ответ: $A_1=B_1=0; A_2=1, B_2=-2.$

6.126. При каком целом значении k один из корней уравнения $4x^2-(3k+2)x+(k^2-1)=0$ втрое меньше другого?

Решение.

Из условия по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{3k+2}{4}, \\ x_1x_2=\dfrac{k^2-1}{4}, \\ x_2=3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1=\dfrac{3k+2}{4}, \\ 3x_1^2=\dfrac{k^2-1}{4}, \\ x_2=3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3k+2}{16}, \\ x_2=3x_1, \\ 3\left(\dfrac{3k+2}{16}\right)^2=\dfrac{k^2-1}{4}, \end{cases}$$

где $k\in Z$. Отсюда $37k^2-36k-76=0$, $k_1=2$, $k_2=-\dfrac{38}{37}\notin Z$ (не подходит).

Ответ: $k=2$.

6.127. При каком целом значении p уравнения $3x^2-4x+p-2=0$ и $x^2-2px+5=0$ имеют общий корень? Найти этот корень.

Решение.

Пусть x_1 — общий корень, тогда

$$\begin{cases} 3x_1^2-4x_1+p-2=0, \\ x_1^2-2px_1+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1^2-4x_1+p-2=0, \\ 3x_1^2-6px_1+15=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x_1+6px_1+p-2-15=0, \quad (6p-4)x_1+p-17=0,$$

откуда $x_1 = \dfrac{17-p}{6p-4}$. Из второго уравнения системы имеем

$$\left(\frac{17-p}{6p-4}\right)^2 - 2p\left(\frac{17-p}{6p-4}\right) + 5 = 0,\quad 12p^3 - 31p^2 - 138p + 369 = 0,$$
$$12p^3 - 36p^2 + 5p^2 - 15p - 123p + 369 = 0,$$
$$\left(12p^3 - 36p^2\right) + \left(5p^2 - 15p\right) - (123p - 369) = 0,$$
$$12p^2(p-3) + 5p(p-3) - 123(p-3) = 0,$$
$$(p-3)\left(12p^2 + 5p - 123\right) = 0.$$

Отсюда $p - 3 = 0$, $p_1 = 3$, или $12p^2 + 5p - 123 = 0$, откуда $p_2 = -\dfrac{41}{12}$, $p_3 = 3$; $p_2 = -\dfrac{41}{12}$ не подходит. Таким образом, $p = 3$, тогда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$, $p = 3$.

6.128. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов корней.

Решение.

По условию $x^2 - 2ax + (2a-1) = 0$. По теореме Виета $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a, \\ x_1 \cdot x_2 = 2a - 1. \end{cases}$

Далее,

$$x_1 + x_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Используя значения $x_1 + x_2 = 2a$ и $x_1 \cdot x_2 = 2a - 1$, получаем $2a = (2a)^2 - 2(2a-1)$, откуда $2a^2 - 3a + 1 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 1$.

Ответ: $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = 1$.

6.129. При каком значении a уравнения $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?

Решение.

Пусть x_1 — общий корень, тогда

$$\begin{cases} x_1^2+ax_1+8=0, \\ x_1^2+x_1+a=0 \end{cases} \Rightarrow ax_1-x_1+8-a=0,\ x_1=\frac{a-8}{a-1}.$$

Из второго уравнения системы имеем

$$\left(\frac{a-8}{a-1}\right)^2+\left(\frac{a-8}{a-1}\right)+a=0,\quad \frac{a^3-24a+72}{(a-1)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-24a+72=0, \\ a\neq 1, \end{cases}$$

$$a^3+216-216-24a+72=0,\quad \left(a^3+216\right)-24a-144=0,$$

$$\left(a^3+6^3\right)-24(a+6)=0,$$

$$(a+6)\left(a^2-6a+36\right)-24(a+6)=0,$$

$$(a+6)\left(a^2-6a+12\right)=0,$$

откуда $a=-6$. Для квадратного уравнения $D<0, \varnothing$.

Ответ: $a=-6$.

6.130. В уравнении $x^2-2x+c=0$ определить то значение c, при котором его корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $7x_2-4x_1=47$.

Решение.

Из условия по теореме Виета имеем $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1\cdot x_2=c, \\ 7x_2-4x_1=47. \end{cases}$ Отсюда $x_2=2-x_1$ и получаем

$$\begin{cases} x_1\left(2-x_1\right)=c, \\ 7\left(2-x_1\right)-4x_1=47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1\left(2-x_1\right)=c, \\ x_1=-3. \end{cases}$$

Таким образом, $c=-15$.

Ответ: $c=-15$.

6.131. Не решая уравнения $x^2-(2a+1)x+a^2+2=0$, найти, при каком значении a один из корней в два раза больше другого.

Решение.

Из условия по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a+1, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2+2, \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 2a+1, \\ 2x_1^2 = a^2+2, \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2a+1}{3}, \\ x_1^2 = \dfrac{a^2+2}{2}, \\ x_2 = 2x_1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\left(\frac{2a+1}{3}\right)^2 = \frac{a^2+2}{2} \Leftrightarrow \frac{4a^2+4a+1}{9} = \frac{a^2+2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 = 0 \Leftrightarrow (a-4)^2 = 0.$$

Таким образом, $a = 4$.

Ответ: $a = 4$.

6.132. При каком значении p отношение корней уравнения $x^2 + px - 16 = 0$ равно -4 ?

Решение.

По теореме Виета и условию имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = -16, \\ \dfrac{x_2}{x_1} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = -16, \\ x_2 = -4x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_1 = -p, \\ x_1(-4x_1) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 = -p, \\ -4x_1^2 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{p}{3}, \\ x_1^2 = 4. \end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{p^2}{9} = 4$, откуда $p^2 = 36$, или $p_{1,2} = \pm 6$.

Ответ: $p_{1,2} = \pm 6$.

6.133. Не решая уравнения $3x^2 - 5x - 2 = 0$, найти сумму кубов его корней.

Решение.

По теореме Виета и условию имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{3}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

и

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^3) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2).$$

Отсюда: $x_1^3 + x_2^3 = \frac{5}{3}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{215}{27}$.

Ответ: $\frac{215}{27}$.

6.134. При каком целом значении b уравнения $2x^2 + (3b-1)x - 3 = 0$ и $6x^2 - (2b-3)x - 1 = 0$ имеют общий корень?

Решение.

Пусть x_1 — общий корень. Тогда

$$\begin{cases} 2x_1^2 + (3b-1)x_1 - 3 = 0, \\ 6x_1^2 - (2b-3)x_1 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + (9b-3)x - 9 = 0, \\ 6x^2 - (2b-3)x_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (9b-3)x + (2b-3)x - 9 + 1 = 0, \quad x = \frac{8}{11b-6}.$$

Из первого уравнения имеем

$$2\left(\frac{8}{11b-6}\right)^2 + (3b-1)\left(\frac{8}{11b-6}\right) - 3 = 0, \quad 99b^2 - 164b - 68 = 0,$$

$$b_1 = -\frac{34}{99}, \; b_2 = 2;$$

$b_1 = -\frac{34}{99}$ не является целым значением.

Ответ: $b = 2$.

6.135. При каком положительном значении c один корень уравнения $8x^2 - 6x + 9c^2 = 0$ равен квадрату другого?

Решение.

По теореме Виета и условию имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{9c^2}{8}, \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^2, \\ x_1 + x_1^2 = \frac{3}{4}, \\ x_1 \cdot x_1^2 = \frac{9c^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^2, \\ 4x_1^2 + 4x_1 - 3 = 0, \\ x_1^3 = \frac{9c^2}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1' = \frac{1}{2}, x_1'' = -\frac{3}{2}.$$

Отсюда получаем $c^2 = -3$ или $c^2 = \frac{1}{9}$; $c^2 = -3 < 0$ не подходит. Тогда $c_1 = -\frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$; $c_1 = -\frac{1}{3} < 0$ не удовлетворяет условию.

Ответ: $c = \frac{1}{3}$.

Решения к главе 7

ЛОГАРИФМЫ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ФОРМУЛЫ

Степени с действительными показателями

$$a^0 \equiv 1, \tag{7.1}$$

где 0^0 не имеет смысла;

$$a^{-n} \equiv \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0), \tag{7.2}$$

где n – действительное число;

$$a^{\frac{m}{n}} \equiv \sqrt[n]{a^m}\ (a \geq 0), \tag{7.3}$$

где m и n – натуральные числа;

$$a^\alpha \cdot a^\beta \equiv a^{\alpha+\beta}, \tag{7.4}$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} \equiv a^{\alpha-\beta}, \tag{7.5}$$

$$\left(a^\alpha\right)^\beta \equiv a^{\alpha\cdot\beta}, \tag{7.6}$$

где α и β — действительные числа.

Показательная функция

Показательной функцией переменной x называется функция

$$y = a^x,$$

где a – данное число.

Если $a < 0$, то функция a^x определена только при целых и при дробных значениях x (если знаменатель дробного показателя – нечетное число). Если $a = 0$, то выражение 0^x определено при $x > 0$. Если $a > 0$, то функция a^x определена при всех действительных значениях x, причем при $a = 1$ имеем $1^x = 1$, т.е. функция равна постоянному.

В дальнейшем показательную функцию a^x будем рассматривать при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Основные свойства показательной функции $y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$:

1. Показательная функция определена при всех действительных значениях x $(x \in R)$.

2. Областью изменения показательной функции служит множество всех положительных действительных чисел, т.е. $y \in (0, +\infty)$.

3. При $a > 1$ показательная функция строго возрастает, т.е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $a^{x_1} < a^{x_2}$. Причем если $x \in (-\infty; 0)$, то $y \in (0; 1)$; если $x = 0$, то $y = 1$; если $x \in (0; \infty)$, то $y \in (1; +\infty)$, т.е. если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; $y \to 0$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. При $a \in (0; 1)$ показательная функция строго убывает, т.е. из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$. Причем если $x \in (-\infty; 0)$, то $y \in (1; +\infty)$; если $x = 0$, то $y = 1$; если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (0; 1)$, т.е. если $x \in (-\infty; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$; $y \to +\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to 0$ при $x \to +\infty$.

5. Характеристическое свойство: значение показательной функции от суммы равно произведению значений этой функции от слагаемых, т.е.

$$a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}.$$

Логарифмы и их свойства

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b: $\log_a b = x$, если $a^x = b$, или

$$a^{\log_a b} = b \cdot \qquad (7.7)$$

В дальнейшем основание логарифмов будем считать положительным и отличным от единицы ($a > 0$, $a \neq 1$).

Приведем некоторые свойства логарифмов (при любом положительном основании, отличном от единицы).

1. Логарифм единицы равен нулю, т.е. $\log_a 1 = 0$.

2. Логарифм основания равен единице, т.е. $\log_a a = 1$.

3. Для любого положительного числа b существует, и притом только одно, такое действительное число α, что $\log_a b = \alpha$.

4. Из равенства $\log_a x_1 = \log_a x_2$ следует $x_1 = x_2$ (и наоборот).

Основные правила логарифмирования

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c. \qquad (7.8)$$

Замечание. Логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 ... b_n) \equiv \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + ... +$$

$$+ \log_a |b_n| \quad (b_1 \cdot b_2 ... b_n > 0). \qquad (7.9)$$

2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c. \qquad (7.10)$$

Замечание. Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, т.е.

$$\log_a \frac{b}{c} \equiv \log_a |b| - \log_a |c| \quad (b \cdot c > 0). \qquad (7.11)$$

3. Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм ее основания (логарифмы взяты по тому же основанию), т.е.

$$\log_a b^c = c \log_a b. \qquad (7.12)$$

Замечание. Логарифм положительной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля ее основания, взятый по тому же основанию, т.е.

$$\log_a b^c \equiv c\log_a|b| \quad \left(b^c > 0\right). \tag{7.13}$$

Формулы перехода от одного основания логарифма к другому

1. Логарифм числа по данному основанию равен логарифму этого числа по новому основанию, деленному на логарифм данного основания по новому основанию, т.е.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}. \tag{7.14}$$

Множитель $\dfrac{1}{\log_b a}$ называется *модулем перехода.*

2. Из формулы (7.14) при $N = b$ получаем

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \tag{7.15}$$

3. Часто в логарифмических преобразованиях пользуются тождествами

$$\log_{a^k} N \equiv \frac{1}{k}\log_{|a|} N \quad \left(a^k > 0\right) \tag{7.16}$$

и

$$\log_{a\cdot b} N \equiv \frac{\log_{|a|} N}{1+\log_{|a|}|b|} \quad (ab > 0) \tag{7.17}$$

Логарифмическая функция, ее свойства и график

Логарифмической функцией называется функция вида

$$y = \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$ и x – независимая переменная.

По определению логарифма выражение $y = \log_a x$ означает то же, что и выражение $a^y = x$, т.е. логарифмическая функция есть обратная функция по отношению к показательной.

Основные свойства логарифмической функции

1. Логарифмическая функция определена при всех положительных действительных значениях x (нуль и отрицательные числа при положительном основании логарифмов не имеют).

2. Областью изменения логарифмической функции служит множество всех действительных чисел $y \in (-\infty; +\infty)$.

3. При $a > 0$ логарифмическая функция возрастает, т.е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$. Причем если $x \in (0;1)$, то $y \in (-\infty; 0)$; если $x = 1$, то $y = 0$; если $x \in (1; +\infty)$, то $y \in (0; +\infty)$, т.е. если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (-\infty; +\infty)$; $y \to -\infty$ при $x \to 0$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

4. При $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает, т.е. если $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Причем если $x \in (0;1)$, то $y \in (0; +\infty)$; если $x = 1$, то $y = 0$; если $x \in (1; +\infty)$, то $y \in (-\infty; 0)$, т.е. если $x \in (0; +\infty)$, то $y \in (-\infty; +\infty)$; $y \to -\infty$ при $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to 0$.

5. Характеристическое свойство: значение логарифмической функции от произведений двух положительных чисел равно сумме значений функции от каждого из чисел:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Показательные уравнения

Показательным называется уравнение, содержащее неизвестное только в показателе степени.

Рассмотрим несколько типов показательных уравнений, решаемых методами элементарной математики.

Показательные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения при решении показательных уравнений в общем случае обязательна.

1. Уравнение вида

$$a^x = b \tag{7.18}$$

называется *простейшим показательным*.

Рассмотрим уравнение (7.18) при $a > 0$ и $a \neq 1$. Если $b > 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \log_a b$. Если $b \leq 0$, то уравнение решений не имеет.

2. Показательное уравнение вида

$$a^{f_1(x)} = b^{f_2(x)}, \qquad (7.19)$$

где $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$, а $f_1(x), f_2(x)$ — заданные элементарные функции, логарифмированием приводится к виду

$$f_1(x)\log_c a = f_2(x)\log_c b.$$

Если последнее уравнение решается методами элементарной математики, то тем самым решается уравнение (7.19).

Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестные только под знаком логарифма.

Логарифмические уравнения, как и показательные, рассматриваются в множестве действительных чисел. Проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения в общем случае является обязательной.

1. Уравнение вида

$$\log_a x = b, \qquad (7.20)$$

где x – неизвестное, а a и b – заданные числа, называется *простейшим логарифмическим*.

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то такое уравнение при любом действительном значении b имеет единственное решение

$$x = a^b. \qquad (7.21)$$

2. Логарифмическое уравнение вида

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x), \qquad (7.22)$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$, после потенцирования приводится к виду

$$f_1(x) = f_2(x). \qquad (7.23)$$

Корнями уравнения (7.22) будут только те корни уравнения (7.23), при которых $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$, т.е. корни, принадлежащие к области определения уравнения (7.22).

3. Логарифмические уравнения вида

$$f(\log_a \psi(x)) = 0, \qquad (7.24)$$

где $f(t)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции, заменой $\log_a \psi(x) = t$ приводятся к уравнению $f(t) = 0$.

Показательно-логарифмические уравнения

Если неизвестное в уравнении входит в показатель степени и под знак логарифма или в основание логарифма, то такое уравнение называют *показательно-логарифмическим*.

Показательно-логарифмические уравнения чаще всего решают, логарифмируя обе части уравнения, и приводят их к логарифмическим уравнениям.

При решении систем показательных и логарифмических уравнений в основном применяются те же способы, что и при решении систем алгебраических уравнений (подстановки, алгебраического сложения, введения новых неизвестных и др.).

Упростить **(7.001 – 7.015)**:

7.001. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

Решение.

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}=\sqrt{5^{2\log_5 6}+7^{2\log_7 8}}=\sqrt{5^{\log_5 6^2}+7^{\log_7 8^2}}=$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

Ответ: 10.

7.002. $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Решение.

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}=3^{4\log_3 5}+3^{\frac{3}{2}\log_3 36}+3^{\frac{4}{2}\log_3 7}=5^4+36^{\frac{3}{2}}+49=$$
$$=625+216+49=890.$$

Ответ: 890.

7.003. $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

$$-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}=-\log_2\log_2 2^{\frac{1}{8}}=-\log_2\frac{1}{8}\log_2 2=-\log_2 2^{-3}=3.$$

Ответ: 3.

7.004. $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

Решение.

$$-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} = -\log_3 \log_3 3^{\frac{1}{9}} = -\log_3 \frac{1}{9} \log_3 3 = -\log_3 3^{-2} = 2.$$

Ответ: 2.

7.005. $$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}.$$

Решение.

$$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9}\right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}} =$$

$$= \frac{\left(\left(3^3\right)^{\log_3 2} + 5^{\log_5 27^2}\right)\left(\left(9^2\right)^{\log_9 4} - \left(2^3\right)^{\log_2 23^2}\right)}{3 + 5^{\log_5 24^2} \cdot 3} =$$

$$= \frac{\left(3^{\log_3 2^3} + 5^{\log_5 7}\right)\left(9^{\log_9 4^2} - 2^{\log_2 3^3}\right)}{3 + 5^{\log_5 4} \cdot 3} = \frac{\left(2^3 + 7\right)\left(4^2 - 3^3\right)}{3 + 4 \cdot 3} =$$

$$= \frac{15 \cdot (-11)}{15} = -11.$$

Ответ: -11.

7.006. $36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36}$.

Решение.

$$36^{\log_6 5} + 10^{1-\lg 2} - 3^{\log_9 36} = 6^{2\log_6 5} + \frac{10}{10^{\lg 2}} - 3^{\log_3 26^2} =$$

$$= 6^{\log_6 5^2} + \frac{10}{2} - 3^{\log_3 6} = 5^2 + 5 - 6 = 24.$$

Ответ: 24.

7.008. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$.

Решение.

$$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}=\left(\frac{81^{\frac{1}{4}}}{\left(9^2\right)^{\frac{1}{2}\log_9 4}}+5^{2\log_5 32^3}\right)\cdot 7^{2\log_7 2}=$$

$$=\left(\frac{3}{4}+4\right)\cdot 4=19.$$

Ответ: 19.

7.008. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}}3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25}7}}-125^{\log_{25}6}\right)$

Решение.

$$\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}}3}}}{409}\cdot\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25}7}}-125^{\log_{25}6}\right)=$$

$$=\frac{9^{2\log_9 5}+3^{3\log_3\sqrt{6}}}{409}\cdot\left(\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{2\log_7 25}-5^{3\log_5 26}\right)=\frac{9^{\log_9 5^2}+3^{\log_3\left(\sqrt{6}\right)^3}}{409}\times$$

$$\times\left(7^{\log_7 25}-5^{\log_5 6^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\left(25+6^{\frac{3}{2}}\right)\left(25-6^{\frac{3}{2}}\right)}{409}=\frac{625-216}{409}=1.$$

Ответ: 1.

7.009. $\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}}\dots N^{\frac{1}{\log_{512}N}}\right)^{\frac{1}{15}}$ (основания логарифмов представляют собой идущие подряд натуральные степени числа 2).

Решение.

$$\left(N^{\frac{1}{\log_2 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_4 N}}\cdot N^{\frac{1}{\log_8 N}}\cdots N^{\frac{1}{\log_{512} N}}\right)^{\frac{1}{15}}=$$

$$=\left(N^{\log_N 2}\cdot N^{\log_N 4}\cdot N^{\log_N 8}\cdots N^{\log_N 512}\right)^{\frac{1}{15}}=$$

$$=(2\cdot 4\cdot 8\cdot\cdots 512)^{\frac{1}{15}}=\left(2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdots 2^9\right)^{\frac{1}{15}}=\left(2^{1+2+3+\ldots+9}\right)^{\frac{1}{15}}.$$

Выражение $S_n=1+2+3+\ldots+9$ является суммой членов арифметической прогрессии, где $a_1=1$, $d=1$, $a_n=9$, $n=9$. Тогда $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=$ $=\frac{1+9}{2}\cdot 9=45$. Отсюда $\left(2^{45}\right)^{\frac{1}{15}}=2^3=8$.

Ответ: 8.

7.010. $\left(2^{\log_{4\sqrt{2}} a}-3^{\log_{27}\left(a^2+1\right)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49} a}-5^{0,5\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)$

Решение.

$$\left(2^{\log_{4\sqrt{2}} a}-3^{\log_{27}\left(a^2+1\right)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49} a}-5^{0,5\log_{\sqrt{5}} a}-1\right)=$$

$$=\left(2^{\log_2 a^4}-3^{\log_3\left(a^2+1\right)}-2a\right):\left(7^{\log_7 a^2}-5^{\log_5 a}-1\right)=$$

$$=\left(a^4-\left(a^2+1\right)-2a\right):\left(a^2-a-1\right)=\frac{a^4-a^2-2a-1}{a^2-a-1}=$$

$$=\frac{\left(a^2-a-1\right)}{a^2-a-1}\cdot\left(a^2+a+1\right)=a^2+a+1.$$

Ответ: a^2+a+1.

7.011. $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log_{1/a}^2\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}\left(a^2-1\right)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}$.

Решение.

$$\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log_{1/a}^2\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}\left(a^2-1\right)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}=\frac{\frac{1}{2}\log_a\left(a^2-1\right)\cdot\frac{1}{4}\log_a^2\left(a^2-1\right)}{\frac{1}{2}\log_a\left(a^2-1\right)\cdot\frac{1}{2}\log_a\left(a^2-1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\log_a\left(a^2-1\right)=\log_a\sqrt{a^2-1}.$$

Ответ: $\log_a\sqrt{a^2-1}$.

7.012. $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}\cdot b-2a^{\log_a b+1}\cdot b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

Решение.

$$a^{\frac{2}{\log_b a}+1}\cdot b-2a^{\log_a b+1}\cdot b^{\log_b a+1}+ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}=a\cdot a^{2\log_a b}\cdot b-$$
$$-2a\cdot a^{\log_a b}\cdot b\cdot b^{\log_b a}+a\cdot b\cdot b^{2\log_b a}=a\cdot a^{\log_a b^2}\cdot b-2a\cdot b\cdot b\cdot a+$$
$$+a\cdot b\cdot b^{\log_b a^2}=ab^2b-2a^2b^2+aba^2=ab^3-2a^2b^2+aba^2=$$
$$=ab^3-2a^2b^2+a^3b=ab\left(b^2-2ab+a^2\right)=ab(b-a)^2=$$
$$=ab(a-b)^2.$$

Ответ: $ab(a-b)^2$.

7.013. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{-\frac{2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}$.

Решение.

$$\frac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot 4^{\frac{2}{\log_3 4}}-a^2}{1-a}=$$
$$=\frac{\left(\left(25^{\log_{25}49}\right)^{\frac{1}{2}}+2\log_2\log_2 4\right)\cdot\left(4^{2\log_4 3}\right)^{-1}-a^2}{1-a}=$$
$$=\frac{\left((49)^{\frac{1}{2}}+2\log_2 2\right)\cdot 9^{-1}-a^2}{1-a}=\frac{(7+2)\cdot\frac{1}{9}-a^2}{1-a}=\frac{1-a^2}{1-a}=1+a.$$

Ответ: $1+a$.

7.014. $(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1$.

Решение.

$$(\log_a b+\log_b a+2)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-1=\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+2\right)\times$$

$$\times\left(\log_a b-\frac{\log_a b}{\log_a ab}\right)\frac{1}{\log_a b}-1=\frac{\log_a^2 b+2\log_a b+1}{\log_a b}\times$$

$$\times\left(\log_a b-\frac{\log_a b}{\log_a a+\log_a b}\right)\cdot\frac{1}{\log_a b}-1=$$

$$=\frac{(\log_a b+1)^2}{\log_a b}\cdot\left(\log_a b-\frac{\log_a b}{1+\log_a b}\right)\frac{1}{\log_a b}-1=$$

$$=\frac{(\log_a b+1)^2}{\log_a b}\log_a b\left(1-\frac{1}{1+\log_a b}\right)\frac{1}{\log_a b}-1=\frac{(\log_a b+1)^2(1+\log_a b-1)}{(1+\log_a b)\log_a b}-$$

$$-1=\log_a b+1-1=\log_a b.$$

Ответ: $\log_a b$.

7.015. $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a\dfrac{a}{b}}$.

Решение.

$$\frac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\cdot\log_a\frac{a}{b}}=\frac{(1-\log_a b)(1+\log_a b+\log_a^2 b)}{\left(\log_a b+\frac{1}{\log_a b}+1\right)(\log_a a-\log_a b)}=$$

$$=\frac{(1-\log_a b)(1+\log_a b+\log_a^2 b)\log_a b}{(\log_a^2 b+1+\log_a b)(1-\log_a b)}=\log_a b.$$

Ответ: $\log_a b$.

7.016. Если $\log_a 27=b$, то чему равен $\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}$?

Решение.

$$\log_{\sqrt{3}}\sqrt[6]{a}=\frac{1}{6}\cdot 2\log_3 a=\frac{1}{3\log_a 3}=\frac{1}{\log_a 27}=\frac{1}{b}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{b}$.

7.017. Показать, что при условии $x>0$ и $y>0$ из равенства $x^2+4y^2=12xy$ следует равенство $\lg(x+2y)-2\lg 2=0{,}5(\lg x+\lg y)$.

Решение.

Из условия имеем: $(x+2y)^2-2x\cdot 2y=12xy$, $(x+2y)^2=16xy$.

Прологарифмировав обе части полученного равенства по основанию 10, получим:

$$\lg(x+2y)^2=\lg 16xy,\quad 2\lg(x+2y)=\lg 16+\lg x+\lg y,$$
$$2\lg(x+2y)=4\lg 2+\lg x+\lg y,\quad \lg(x+2y)-2\lg 2=0{,}5(\lg x+\lg y).$$

7.018. Вычислить сумму 2^x+2^{-x}, если $4^x+4^{-x}=23$.

Решение.

$$2^x+2^{-x}=\sqrt{\left(2^x+2^{-x}\right)^2}=\sqrt{4^x+4^{-x}+2}=\sqrt{23+2}=\sqrt{25}=5.$$

Ответ: 5.

7.019. Доказать, что если $y=2^{x^2}$ и $z=2^{y^2}$, то $x=\pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$, и указать все z, при которых x принимает действительные значения.

Решение.

По условию $y>0$ и $z>0$. Прологарифмировав обе части равенства по основанию 2, получим $\log_2 y=\log_2 2^{x^2}$, $\log_2 y=x^2$, откуда $x=\pm\sqrt{\log_2 y}$.

Аналогично $z=2^{y^2}\Rightarrow y=\sqrt{\log_2 z}$.

Таким образом, $x=\pm\sqrt{\log_2\sqrt{\log_2 z}}=\pm\sqrt{0{,}5\log_2\log_2 z}$. Отсюда $\log_2\log_2 z\geq 0$, $\log_2 z\geq 1$, $z\geq 2$.

Ответ: $z\geq 2$.

Решить уравнения **(7.020 – 7.046):**

7.020. $\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{1/x}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ 27-3^{1/x}>0. \end{cases}$

$$\lg 3^{1+\frac{1}{2x}}+\lg 2=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right),\ \lg\left(2\cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}\right)=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right),$$

$$2\cdot 3^{1+\frac{1}{2x}}=27-3^{\frac{1}{x}},\ \ 3^{\frac{1}{x}}+6\cdot 3^{\frac{1}{2x}}-27=0.$$

Это уравнение, квадратное относительно $3^{\frac{1}{2x}}$; найдем $3^{\frac{1}{2x}}=-9$, которое не подходит, и $3^{\frac{1}{2x}}=3$, откуда $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

7.021. $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $3^x-5^{2-x}>0$.

$$\log_5 8+2\log_5 5-\log_5\left(3^x-25\cdot 5^{-x}\right)=x\Leftrightarrow\log_5\frac{8\cdot 25}{3^x-25\cdot 5^{-x}}=x,$$

откуда $\frac{200}{3^x-25\cdot 5^{-x}}=5^x\Leftrightarrow 15^x=15^2$. Таким образом, $x=2$.

Ответ: 2.

7.022. $\sqrt{\log_3 x^9}-4\log_9\sqrt{3x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ \log_3 x>0,\ x>1.\end{cases}$

$$\sqrt{\log_3 x^9}=1+4\log_9\sqrt{3x}\Leftrightarrow\sqrt{9\log_3 x}=1+\log_3 3x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{9\log_3 x}=1+\log_3 3+\log_3 x\Leftrightarrow\sqrt{9\log_3 x}=2+\log_3 x.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$9\log_3 x=4+4\log_3 x+\log_3^2 x\Leftrightarrow\log_3^2 x-5\log_3 x+4=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_3 x$, имеем $(\log_3 x)_1=1$, $(\log_3 x)_2=4$, откуда $x_1=3$, $x_2=3^4=81$.

Ответ: 3; 81.

7.023. $\log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0{,}5 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 1-x>0, \\ 1-x \neq 1, 0 \neq x < 1. \end{cases}$

Из условия $\log_{1-x} \frac{3}{2} = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{1-x} \Rightarrow \frac{9}{4} = 1-x$, откуда $x = -\frac{5}{4}$.

Ответ: $-\frac{5}{4}$.

7.024. $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+10>0, \\ 2x-1>0, \\ 21x-20>0, \end{cases} \quad x > \frac{20}{21}$.

$$\lg 5 + \lg(x+10) = \lg 10 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20) \Leftrightarrow \lg 5(x+10) =$$
$$= \lg \frac{10 \cdot (21x-20)}{2x-1} \Rightarrow 5(x+10) = \frac{10 \cdot (21x-20)}{2x-1},$$

откуда $2x^2 - 23x + 30 = 0$. Решая это уравнение, имеем $x_1 = 1{,}5; x_2 = 10$.

Ответ: 1,5; 10.

7.025. $\log_2 182 - 2\log_2 \sqrt{5-x} = \log_2(11-x) + 1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0, \\ 11-x>0, x<5. \end{cases}$

$$\log_2 182 - \log_2(5-x) = \log_2(11-x) + \log_2 2 \Rightarrow \log_2 \frac{182}{5-x} = \log_2(11-x) \cdot 2,$$
$$\frac{182}{5-x} = 2(11-x),$$

откуда $x^2 - 16x - 36 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 18$; $x_2 = 18$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: –2.

7.026. $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-9>0, \\ 2x-1>0, x>9. \end{cases}$

Из условия

$$\log_5 \frac{\sqrt{(x-9)(2x-1)}}{10} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-9)(2x-1)}}{10} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-9)(2x-1)} = 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-9)(2x-1) = 100,$$

откуда $2x^2 - 19x - 91 = 0$, $x_1 = 13$, $x_2 = -\frac{7}{2}$; $x_2 = -\frac{7}{2}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 13.

7.027. $\lg(x+1{,}5) = -\lg x$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ x>0. \end{cases}$

$$\lg(x+1{,}5) + \lg x = 0 \Rightarrow \lg(x+1{,}5)x = 0 \Rightarrow x^2 + 1{,}5x - 1 = 0,$$

откуда $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$; $x_2 = -2$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

7.028. $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x+\log_5 2}$.

Решение.

$\left(5^{x+\log_5 2}\right)^2 - 5^{x+\log_5 2} - 2 = 0$; решив это уравнение как квадратное относительно $5^{x+\log_5 2}$, найдем $5^{x+\log_5 2} = -1$ и $5^{x+\log_5 2} = 2$; $5^{x+\log_5 2} = -1$ не имеет решений.

Таким образом,

$$5^{x+\log_5 2} = 2 \Rightarrow \log_5 5^{x+\log_5 2} = \log_5 2, \ x + \log_5 2 = \log_5 2,$$

откуда $x = 0$.

Ответ: 0.

7.029. $0{,}25^{\log_2\sqrt{x+3}-0{,}5\log_2\left(x^2-9\right)}=\sqrt{2(7-x)}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x+3>0, \\ x^2-9>0, \; 3<x\le 7. \\ 7-x\ge 0. \end{cases}$$

Из условия имеем

$$\left(2^{-2}\right)^{\log_2\sqrt{x+3}-0{,}5\log_2\left(x^2-9\right)}=\sqrt{2(7-x)}\Rightarrow 2^{\log_2\left(\sqrt{x+3}\right)^{-2}}\cdot 2^{\log_2\left(x^2-9\right)}=\sqrt{2(7-x)},$$

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^{-2}\left(x^2-9\right)=\sqrt{2(7-x)},\quad \frac{x^2-9}{x+3}=\sqrt{2(7-x)},\quad x-3=\sqrt{2(7-x)}.$$

Следовательно, $x^2-4x-5=0$ при $x>3.\Rightarrow x_1=5, x_2=-1$; $x_2=-1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 5.

7.030. $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}}-\lg 25=0.$

Решение.

$$x\lg 5^{\frac{2x-8}{5}}=\lg 25,\quad \lg 5^{\frac{(2x-8)x}{5}}=\lg 5^2,\quad 5^{\frac{2x^2-8x}{5}}=5^2,$$

$$\frac{2x^2-8x}{5}=2,\quad x^2-4x-5=0,$$

откуда $x_1=5, x_2=-1$.

Ответ: 5; -1.

7.031. $\log_5(x-2)+\log_{\sqrt{5}}\left(x^3-2\right)+\log_{0,2}(x-2)=4.$

Решение.

ОДЗ: $x-2>0, x>2.$

Из условия имеем

$$\log_5(x-2)+2\log_5\left(x^3-2\right)-\log_5(x-2)=4,\quad \log_5\left(x^3-2\right)=2,$$

откуда $x^3-2=25$, $x^3=27$. Тогда $x=3$.

Ответ: 3.

7.032. $\dfrac{2-\lg 4+\lg 0{,}12}{\lg\left(\sqrt{3x+1}+4\right)-\lg 2x}=1.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}x>0,\\3x+1\geq 0,\\\lg\left(\sqrt{3x+1}+4\right)\neq\lg 2x,\end{cases}\qquad x>0.$$

Из условия

$$\lg 100-\lg 4+\lg 0{,}12=\lg\left(\sqrt{3x+1}+4\right)-\lg 2x\Rightarrow\lg\frac{100\cdot 0{,}12}{4}=\lg\frac{\sqrt{3x+1}+4}{2x},$$

$$3=\frac{\sqrt{3x+1}+4}{2x}\Rightarrow\sqrt{3x+1}=6x-4,\quad 6x-4\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x+1=36x^2-48x+16,\\6x-4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x^2-17x+5=0,\\x\geq\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Корнями квадратного уравнения будут $x_1=\dfrac{5}{12}, x_2=1$; $x_1=\dfrac{5}{12}$ не подходит.

Ответ: 1.

7.033. $x^{\lg^3 x-5\lg x}=0{,}0001.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получаем

$$\lg x^{\lg^3 x-5\lg x}=\lg 0{,}0001\Rightarrow\left(\lg^3 x-5\lg x\right)\lg x=-4,$$

$$\lg^4 x-5\lg^2 x+4=0.$$

Отсюда $(\lg x)_1=-1$, $(\lg x)_2=1$, $(\lg x)_3=-2$, $(\lg x)_4=2$. Тогда $x_1=\dfrac{1}{10}$, $x_2=10$, $x_3=\dfrac{1}{100}$, $x_4=100$.

Ответ: $\dfrac{1}{100};\dfrac{1}{10};10;100.$

7.034. $\lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=2+0{,}25\lg 16-0{,}5x\lg 4.$

Решение.

ОДЗ: $3^x-2^{4-x}>0.$

Из условия

$$\lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=\lg 100+\lg 2-\lg 2^x \Rightarrow \lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=\lg\frac{100\cdot 2}{2^x},$$

$$3^x-2^{4-x}=\frac{200}{2^x}.$$

Отсюда $6^x=216$, откуда $x=3$.

Ответ: 3.

7.035. $\log_3\left(81^x+3^{2x}\right)=3\log_{27}90.$

Решение.

Из условия $\log_3\left(81^x+3^{2x}\right)=\log_3 90,\quad 9^{2x}+9^x-90=0,$ откуда найдем $9^x=-10$, что не подходит, или $9^x=9$, откуда имеем $x=1$.

Ответ: 1.

7.036. $3x-\log_6 8^x=\log_6\left(3^{3x}+x^2-9\right)$

Решение.

ОДЗ: $3^{3x}+x^2-9>0.$

Из условия $3x=\log_6 8^x+\log_6\left(3^{3x}+x^2-9\right),\quad 3x=\log_6 8^x\left(3^{3x}+x^2-9\right),$ откуда $6^{3x}=8^x\left(3^{3x}+x^2-9\right),\quad 3^{3x}=3^{3x}+x^2-9 \Leftrightarrow x^2=9$. Тогда $x_{1,2}=\pm 3$.

Ответ: -3; 3.

7.037. $\log_6\left(3^{x^2}+1\right)-\log_6\left(3^{2-x^2}+9\right)=\log_6 2-1.$

Решение.

Из условия

$$\log_6\left(3^{x^2}+1\right)-\log_6\left(3^{2-x^2}+9\right)=\log_6 2-\log_6 6,\quad \log_6\frac{3^{x^2}+1}{3^{2-x^2}+9}=\log_6\frac{2}{6},$$

$$\frac{3^{x^2}+1}{9\cdot 3^{-x^2}+9}=\frac{2}{6},\quad 3^{2x^2}-2\cdot 3^{x^2}-3=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно 3^{x^2}, получим $3^{x^2}=-1$ (не подходит) или $3^{x^2}=3$, откуда $x^2=1, x_{1,2}=\pm 1$.

Ответ: -1; 1.

7.038. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0.$

Решение.

Из условия имеем $625\cdot 5^{\frac{x^2-20x+55}{5}}=1$, $5^{\frac{x^2-20x+55}{5}}=5^{-4}$, откуда $\frac{x^2-20x+55}{5}=-4$, $x^2-20x+75=0$. Тогда $x_1=5$; $x_2=15$.

Ответ: 5; 15.

7.039. $\lg\left(10^{\lg\left(x^2-21\right)}\right)-2=\lg x-\lg 25.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-21>0, \\ x>0, \end{cases}$ $x>\sqrt{21}.$

Из условия имеем

$$\lg\left(x^2-21\right)-\lg 100=\lg x-\lg 25,\quad \lg\frac{x^2-21}{100}=\lg\frac{x}{25},\quad \frac{x^2-21}{100}=\frac{x}{25}.$$

Получаем квадратное уравнение $x^2-4x-21=0$, корнями которого будут $x_1=7$, $x_2=-3$; $x_2=-3$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 7.

7.040. $\lg\left(x^2+1\right)=2\lg^{-1}\left(x^2+1\right)-1.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

$$\lg\left(x^2+1\right)=\frac{2}{\lg\left(x^2+1\right)}-1,\quad \lg^2\left(x^2+1\right)+\lg\left(x^2+1\right)-2=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg\left(x^2+1\right)$, найдем $\lg\left(x^2+1\right)=-2$ и $\lg\left(x^2+1\right)=1$. Отсюда $x^2+1=0{,}01$, $x^2=-0{,}99, \varnothing$. $x^2+1=10$, $x^2=9$. Тогда $x_{1,2}=\pm 3$.

Ответ: –3; 3.

7.041. $\lg\sqrt{5^{x(13-x)}}+11\lg 2=11.$

Решение.

$$\lg 5^{\frac{x(13-x)}{2}}+\lg 2^{11}=11,\quad \lg\left(5^{\frac{x(13-x)}{2}}\cdot 2^{11}\right)=11.$$

Отсюда имеем $5^{\frac{x(13-x)}{2}}\cdot 2^{11}=10^{11}$, $5^{\frac{x(13-x)}{2}}=5^{11}$. Тогда $\frac{x(13-x)}{2}=11$, $x^2-13x+22=0$, откуда $x_1=2$; $x_2=11$.

Ответ: 2; 11.

7.042. $x(\lg 5-1)=\lg(2^x+1)-\lg 6.$

Решение.

$$x(\lg 5-\lg 10)=\lg(2^x+1)-\lg 6,\quad x\lg\frac{5}{10}=\lg\frac{2^x+1}{6},$$

$$\lg 2^{-x}=\lg\frac{2^x+1}{6},\quad 2^{-x}=\frac{2^x+1}{6},\quad 2^{2x}+2^x-6=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно 2^x, найдем $2^x=-3$ (не подходит), $2^x=2$, откуда имеем $x=1$.

Ответ: 1.

7.043. $\lg\left(81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0.$

Решение.

Имеем $81\cdot\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}=1$, $3^{\frac{x^2-8x}{3}}=3^{-4}$, откуда $\frac{x^2-8x}{3}=-4$, $x^2-8x+12=0$; $x_1=2$; $x_2=6$.

Ответ: 2; 6.

7.044. $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1.$

Имеем

$$\frac{\log_3 9x^2}{\log_3 x}\cdot\log_3^2 x=4,\quad (\log_3 9+\log_3 x^2)\log_3 x=4,\quad \log_3^2 x+\log_3 x-2=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_3 x$, найдем $(\log_3 x)_1 = -2$, откуда $x_1 = \frac{1}{9}$, $(\log_3 x)_2 = 1$, откуда $x_2 = 3$.

Ответ: $\frac{1}{9}$; 3.

7.045. $\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=3+\log_5 8$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-11>0, \\ x-27>0, \end{cases}$ $x>27$.

Имеем

$$\log_5(3x-11)+\log_5(x-27)=\log_5 125+\log_5 8,$$
$$\log_5(3x-11)\cdot(x-27)=\log_5(125\cdot 8), \quad (3x-11)(x-27)=125\cdot 8,$$
$$3x^2-92x-703=0,$$

откуда находим $x_1 = 37$, $x_2 = -\frac{19}{3}$; $x_2 = -\frac{19}{3}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 37.

7.046. $\lg(5-x)+2\lg\sqrt{3-x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0, \\ 3-x>0, \end{cases}$ $x<3$.

Имеем $\lg(5-x)+\lg(3-x)=1$, $\lg(5-x)(3-x)=1$, откуда $(5-x)(3-x)=10$, $x^2-8x+5=0$. Тогда $x_1=4-\sqrt{11}$, $x_2=4+\sqrt{11}$; $x_2=4+\sqrt{11}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $4-\sqrt{11}$.

7.047. Найти натуральное число n из равенства

$$3^2\cdot 3^5\cdot 3^8\cdots 3^{3n-1}=27^5.$$

Решение.

$$3^{2+5+8+\ldots+3n-1}=3^{15}, \quad 2+5+8+\ldots+3n-1=15.$$

В левой части уравнения имеем сумму членов арифметической прогрессии S_k, где $a_1=2$, $d=3$, $a_k=3n-1$, $k=\frac{a_k-a_1}{d}+1=\frac{3n-1-2}{3}+1=n$.

Тогда $S_k=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k=\frac{2+3n-1}{2}\cdot n=\frac{3n^2+n}{2}$, и уравнение принимает вид $\frac{3n^2+n}{2}=15$, $3n^2+n-30=0$, откуда $n=3$.

Ответ: 3.

Решить уравнения (7.048 — 7.127):

7.048. $0{,}5\left(\lg\left(x^2-55x+90\right)-\lg(x-36)\right)=\lg\sqrt{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-55x+90>0, \\ x-36>0. \end{cases}$

Из условия

$0{,}5\left(\lg\left(x^2-55x+90\right)-\lg(x-36)\right)=0{,}5\lg 2, \lg\frac{x^2-55x+90}{x-36}=\lg 2,$

$\frac{x^2-55x+90}{x-36}=2.$

Имеем $x^2-57x+162=0$ при $x\neq 36$. Отсюда $x_1=54$, $x_2=3$; $x_2=3$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 54.

7.049. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg\left(35-x^3\right)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5-x>0, \\ 35-x^3>0, \end{cases}$ $x<\sqrt[3]{35}.$

Из условия имеем $3\lg(5-x)=\lg\left(35-x^3\right)$, $\lg(5-x)^3=\lg\left(35-x^3\right)$, откуда $(5-x)^3=35-x^3$, $x^2-5x+6=0$. Тогда $x_1=2$, $x_2=3$.

Ответ: 2; 3.

7.050. $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2\left(x^2-25\right)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\frac{x-5}{x+5}>0$ или $x\in(-\infty;-5)\cup(5;\infty)$.

Имеем $\log_2 \frac{(x-5)(x^2-25)}{x+5}=0$, $(x-5)^2=1$, откуда $x-5=-1$ или $x-5=1$. Тогда $x_1=4$, $x_2=6$; $x_1=4$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 6.

7.051. $\frac{\lg 8-\lg(x-5)}{\lg\sqrt{x+7}-\lg 2}=-1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-5>0, \\ x+7>0, \\ \sqrt{x+7}\neq 2, \end{cases} \quad x>5.$

Из условия

$$\lg 8-\lg(x-5)=\lg 2-\lg\sqrt{x+7},\quad \lg\frac{8}{x-5}=\lg\frac{2}{\sqrt{x+7}},$$

$$\frac{8}{x-5}=\frac{2}{\sqrt{x+7}},\quad 4\sqrt{x+7}=x-5,\quad 16x+112=x^2-10x+25,\ x>5.$$

Имеем $x^2-26x-87=0$, откуда $x_1=29$, $x_2=-3$; $x_2=-3$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 29.

7.052. $\log_{0,5}^2 4x+\log_2 \frac{x^2}{8}=8.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Имеем

$$\log_2^2 4x+\log_2\frac{x^2}{8}-8=0,\quad (\log_2 4+\log_2 x)^2+\log_2 x^2-\log_2 8-8=0,$$

$$\log_2^2 x+6\log_2 x-7=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, найдем $(\log_2 x)_1=-7$, откуда $x_1=2^{-7}=\frac{1}{128}$, или $(\log_2 x)_2=1$, откуда $x_2=2$.

Ответ: $\frac{1}{128}$; 2.

7.053. $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\lg x>0,\\ \lg x^3-2>0,\end{cases}\quad x>\sqrt[3]{100}.$

Из условия имеем

$\lg(\lg x\cdot(\lg x^3-2))=0,\quad \lg x(3\lg x-2)=1,$

$3\lg^2 x-2\lg x-1=0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, найдем $(\lg x)_1=-\frac{1}{3}$, откуда $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$, или $(\lg x)_2=1$, откуда $x_2=10$; $x_1=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 10.

7.054. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Имеем $\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=11$, $\log_2 x=6$, откуда $x=2^6=64$.

Ответ: 64.

7.055. $\log_3(3^x-8)=2-x.$

Решение.

ОДЗ: $3^x-8>0.$

По определению логарифма имеем $3^x-8=3^{2-x}$, $3^x-8=\frac{9}{3^x}$, $3^{2x}-8\cdot 3^x-9=0$, откуда, решая это уравнение как квадратное относительно 3^x, найдем $3^x=-1, \varnothing$; или $3^x=9$, откуда $x=2$.

Ответ: 2.

7.056. $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Из условия

$7^{\lg x}-5\cdot 5^{\lg x}=\frac{3}{5}\cdot 5^{\lg x}-\frac{13}{7}\cdot 7^{\lg x},\quad 35\cdot 7^{\lg x}+65\cdot 7^{\lg x}=21\cdot 5^{\lg x}+175\cdot 5^{\lg x},$

$$100\cdot 7^{\lg x}=196\cdot 5^{\lg x},\quad \left(\frac{7}{5}\right)^{\lg x}=\left(\frac{7}{5}\right)^{2},$$

откуда $\lg x=2$ и $x=100$.

Ответ: 100.

7.057. $5^{x+6}-3^{x+7}=43\cdot 5^{x+4}-19\cdot 3^{x+5}$.

Решение.

Имеем $5^{6}\cdot 5^{x}-43\cdot 5^{4}\cdot 5^{x}=3^{7}\cdot 3^{x}-19\cdot 3^{5}\cdot 3^{x}$, $\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}$, откуда $x=-3$.

Ответ: –3.

7.058. $\dfrac{\log_5\left(\sqrt{2x-7}+1\right)}{\log_5\left(\sqrt{2x-7}+7\right)}=0{,}5.$

Решение.

ОДЗ: $2x-7\ge 0,\ x\ge \frac{7}{2}$.

Из условия

$$\log_5\left(\sqrt{2x-7}+1\right)=\frac{1}{2}\log_5\left(\sqrt{2x-7}+7\right),\quad \log_5\left(\sqrt{2x-7}+1\right)=\log_5\sqrt{\sqrt{2x-7}+7},$$

откуда

$$\sqrt{2x-7}+1=\sqrt{\sqrt{2x-7}+7}\Rightarrow\left(\sqrt{2x-7}\right)^2+2\sqrt{2x-7}+1=\sqrt{2x-7}+7,$$
$$\left(\sqrt{2x-7}\right)^2+\sqrt{2x-7}-6=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{2x-7}$, найдем $\sqrt{2x-7}=-3,\varnothing$; или $\sqrt{2x-7}=2$, откуда $x=5{,}5$.

Ответ: 5,5.

7.059. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2\left(1+\sqrt{x}\right)}}=81.$

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

$$3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot 3^{-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^4,\quad 3^{\frac{1}{2}+\frac{x}{1+\sqrt{x}}-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=3^4,$$

откуда

$$\frac{1}{2}+\frac{x}{1+\sqrt{x}}-\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}=4,\ \Rightarrow x-8\sqrt{x}-9=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, найдем $\sqrt{x}=-1, \varnothing$; или $\sqrt{x}=9$, откуда $x=81$.

Ответ: 81.

7.060. $\sqrt{2^x\cdot\sqrt[3]{4^x\cdot 0{,}125^{1/x}}}=4\sqrt[3]{2}$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{x}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{2x}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{3}},\quad 2^{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}}=2^{2+\frac{1}{3}},$$

откуда

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2x}=\frac{7}{3},\ 5x^2-14x-3=0.$$

Тогда $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=3$.

Ответ: $-\frac{1}{5}$; 3.

7.061. $\sqrt{2}\cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}-16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}}=0$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

Из условия

$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}=2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}},\quad 2^{\frac{1}{2}-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}}=2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}},$$

откуда

$$\frac{1}{2}-\frac{5}{4\sqrt{x}+10}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}\ \Rightarrow (\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}-10=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, найдем $\sqrt{x}=-2$, $\varnothing$; или $\sqrt{x}=5$, откуда $x=25$.

Ответ: 25.

7.062. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1.$

Решение.

ОДЗ $\begin{cases} x\neq 1, \\ x\neq \dfrac{7}{3}. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$2^{\frac{3x-9}{3x-7}}\cdot 2^{-\frac{3x-1}{3x-3}}=2^0,\ 2^{\frac{3x-9}{3x-7}-\frac{3x-1}{3x-3}}=2^0,$

откуда

$$\frac{3x-9}{3x-7}-\frac{3x-1}{3x-3}=0\Rightarrow x=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

7.063. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3.$

Из условия $10^{x^2-3}=10^{3x-5}$, $x^2-3=3x-5$, $x^2-3x+2=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=2$.

Ответ: 1; 2.

7.064. $0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3.$

Решение.

Имеем

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{-2x^2+24}=\left(\frac{3}{5}\right)^9,\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-2x^2+x+24}=\left(\frac{3}{5}\right)^9,$$

$-2x^2+x+24=9,\ 2x^2-x-15=0,$

откуда $x_1=-\frac{5}{2}$, $x_2=3$.

Ответ: $-\frac{5}{2}$; 3.

7.065. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{25}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Из условия $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 5^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}=5^{\frac{2}{3}}$, $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=5^{\frac{2}{3}}$.

Отсюда $\frac{1}{x-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{3}$, $2\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}-6=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, найдем $\sqrt{x}=-2, \varnothing$; или $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$, откуда $x=\frac{9}{4}$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

7.066. $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Имеем: $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\cdot 2^{-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=2^{\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$, $2^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=2^{\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

Тогда $\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$, $x-\sqrt{x}-2=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, найдем $\sqrt{x}=-1, \varnothing$; или $\sqrt{x}=2$, откуда имеем $x=4$.

Ответ: 4.

7.067. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 0{,}1^5$.

Решение.

ОДЗ: $9-x>0$, $x<9$.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\sqrt{9-x}-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{5},\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}+\sqrt{9-x}-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{5}.$$

Тогда

$$\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}+\sqrt{9-x}-1=5,\ \ 13-x=5\sqrt{9-x}\Rightarrow\begin{cases}x^2-x-56=0,\\x<9,\end{cases}$$

откуда $x_1=-7$, $x_2=8$.

Ответ: -7, 8.

7.068. $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$.

Решение.

Имеем $\frac{2^{x^2}}{2}+4\cdot 2^{x^2}=\frac{3^{x^2}}{3}+3^{x^2}$, $\frac{9}{2}\cdot 2^{x^2}=\frac{4}{3}\cdot 3^{x^2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$.

Тогда $x^2=3$, откуда $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$.

Ответ: $-\sqrt{3};\sqrt{3}$.

7.069. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}4^x-6>0,\\2^x-2>0.\end{cases}$

Имеем $\log_{\sqrt{5}}\frac{4^x-6}{2^x-2}=2$, $\frac{2^{2x}-6}{2^2-2}=5$, $2^{2x}-5\cdot 2^x+4=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно 2^x, найдем $(2^x)_1=1$, откуда имеем $x_1=0$, или $(2^x)_2=4$, откуда имеем $x_2=2$; $x_1=0$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 2.

7.070. $4^{\log_9 x^2}+\log_{\sqrt{3}}3=0{,}2\left(4^{2+\log_9 x}-4^{\log_9 x}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Перепишем уравнение в виде

$4^{2\log_9 x}+2\log_3 3=0{,}2\left(16\cdot 4^{\log_9 x}-4^{\log_9 x}\right)$, $4^{2\log_9 x}-3\cdot 4^{\log_9 x}+2=0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $4^{\log_9 x}$, найдем $\left(4^{\log_9 x}\right)_1=1$, откуда $(\log_9 x)_1=0, x_1=1$, или $\left(4^{\log_9 x}\right)_2=2$, откуда $(\log_9 x)_2=\frac{1}{2}, x_2=3$.

Ответ: 1; 3.

7.071. $3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2.$

Решение.

Из условия $3\cdot 5^{2x}-2\cdot 5^{x}=1$, $3\cdot 5^{2x}-2\cdot 5^{x}-1=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно 5^x, получаем $5^x=-\frac{1}{3}, \varnothing$; или $5^x=1$, откуда $x=0$.

Ответ: 0.

7.072. $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Разделив обе части уравнения на $25^{\frac{1}{x}}$, имеем $2^{\frac{2}{x}}-4{,}25\left(2^{\frac{1}{x}}\right)+1=0$, откуда, решая уравнение как квадратное относительно $2^{\frac{1}{x}}$, получим $\left(2^{\frac{1}{x}}\right)_1=\frac{1}{4}$, откуда $\left(\frac{1}{x}\right)_1=-2$, $x_1=-\frac{1}{2}$, или $\left(2^{\frac{1}{x}}\right)_2=4$, откуда $\left(\frac{1}{x}\right)_2=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ: $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}$.

7.073. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0.$

Решение.

Имеем $\frac{9^{x^2}}{9}-36\cdot\frac{3^{x^2}}{27}+3=0$, $3^{2x^2}-12\cdot 3^{x^2}+27=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно 3^{x^2}, получим $3^{x^2}=3$, откуда $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$, или $3^{x^2}=9$, откуда $x^2=2$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

Ответ: $-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}$.

7.074. $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$.

Решение.

Из условия $2^{2x}-5\cdot 2^x-24=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно 2^x, получим $2^x=-3, \varnothing$; или $2^x=8$, откуда $x=3$.

Ответ: 3.

7.075. $\left(\sqrt[5]{3}\right)^x+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\sqrt[10]{3}\right)^{2x}+\frac{\left(\sqrt[10]{3}\right)^x}{3}-84=0,\quad 3\cdot\left(\sqrt[10]{3}\right)^{2x}+\left(\sqrt[10]{3}\right)^x-252=0.$$

Решая уравнение как квадратное относительно $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x$, получаем $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x=-\frac{23}{3}, \varnothing$; или $\left(\sqrt[10]{3}\right)^x=9$, $3^{\frac{x}{10}}=3^2$, откуда $\frac{x}{10}=2$, $x=20$.

Ответ: 20.

7.076. $9^{\sqrt{x-5}}-27=6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}$.

Решение.

ОДЗ: $x-5\ge 0, x\ge 5$.

$$3^{2\sqrt{x-5}}-6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}-27=0.$$

Решаем уравнение как квадратное относительно $3^{\sqrt{x-5}}$. Имеем $3^{\sqrt{x-5}}=-3$ (не подходит) или $3^{\sqrt{x-5}}=9$, откуда $\sqrt{x-5}=2$, или $x-5=4$. Тогда $x=9$.

Ответ: 9.

7.077. $17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-8=2\cdot 4^{\sqrt{x^2-8x}}$.

Решение.

ОДЗ: $x^2-8x\ge 0, x\in(-\infty;0]\cup[8;+\infty)$.

Имеем $2\cdot 2^{2\sqrt{x^2-8x}}-17\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}+8=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{\sqrt{x^2-8x}}$, получаем $2^{\sqrt{x^2-8x}}=2^{-1}$, откуда $\sqrt{x^2-8}=-1, \varnothing$; или $2^{\sqrt{x^2-8x}}=8$, откуда $\sqrt{x^2-8x}=3$, $x^2-8x=9$, $x^2-8x-9=0$, $x_1=-1$, $x_2=9$.

Ответ: –1; 9.

7.078. $8^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0, \quad \left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2-8\cdot 2^{\frac{3}{x}}+12=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{\frac{3}{x}}$, получаем

$\left(2^{\frac{3}{x}}\right)_1=2$, откуда $\left(\frac{3}{x}\right)_1=1$, $x_1=3$, или $\left(2^{\frac{3}{x}}\right)_2=6$, откуда

$$\left(\log_2 2^{\frac{3}{x}}\right)_2=\log_2 6, \left(\frac{3}{x}\right)_2=\log_2 6, \ x_2=\frac{3}{\log_2 6}=3\log_6 2=\log_6 8.$$

Ответ: 3; $\log_6 8$.

7.079. $2\log_x 27-3\log_{27} x=1.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Перейдем к основанию 27. Имеем

$$\frac{2}{\log_{27} x}-3\log_{27} x-1=0 \Rightarrow 3\log_{27}^2 x+\log_{27} x-2=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_{27} x$, получаем

$(\log_{27} x)_1=-1$, откуда $x_1=\frac{1}{27}$, или $(\log_{27} x)_2=\frac{2}{3}$, откуда $x_2=27^{\frac{2}{3}}=9$.

Ответ: $\frac{1}{27}$; 9.

7.080. $\lg\left(\sqrt{6+x}+6\right)=\dfrac{2}{\log_{\sqrt{x}}10}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}6+x\ge 0,\\ x>0,\\ x\ne 1,\end{cases}$ $0<x\ne 1$.

Перейдем к основанию 10. Имеем

$\lg\left(\sqrt{6+x}+6\right)=2\lg\sqrt{x}$, $\lg\left(\sqrt{6+x}+6\right)=\lg x$.

Тогда $\sqrt{6+x}+6=x$, $\sqrt{6+x}=x-6\Rightarrow\begin{cases}x^2-13x+30=0,\\ x\ge 6,\end{cases}$

откуда $x=10$.

Ответ: 10.

7.081. $\log_5 x+\log_x 25=\operatorname{ctg}^2\dfrac{25\pi}{6}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\ne 1$.

Перейдем к основанию 5. Имеем

$$\log_5 x+\frac{2}{\log_5 x}=\left(\operatorname{ctg}\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)^2,\quad \log_5 x+\frac{2}{\log_5 x}=3\Rightarrow$$

$\Rightarrow\log_5^2 x-3\log_5 x+2=0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_5 x$, получаем $(\log_5 x)_1=1$ или $(\log_5 x)_2=2$, откуда $x_1=5$; $x_2=25$.

Ответ: 5; 25.

7.082. $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\ne 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, имеем

$$\lg x^{\frac{\lg x+5}{3}}=\lg 10^{5+\lg x},\quad \frac{\lg x+5}{3}\lg x=(5+\lg x)\lg 10,\quad \lg^2 x+2\lg x-15=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получаем $(\lg x)_1 = -5$, или $(\lg x)_2 = 3$, откуда $x_1 = 10^{-5}, x_2 = 1000$.

Ответ: 10^{-5}; 10^3.

7.083. $x^{\log_4 x-2} = 2^{3(\log_4 x-1)}$.

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 4, имеем

$\log_4 x^{\log_4 x-2} = \log_4 2^{3(\log_4 x-1)}$, $(\log_4 x-2)\log_4 x = 3(\log_4 x-1)\log_4 2$,

$\log_4^2 x - 2\log_4 x = \frac{3}{2}(\log_4 x-1)$, $2\log_4^2 x - 7\log_4 x + 3 = 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_4 x$, найдем $(\log_4 x)_1 = \frac{1}{2}$, $(\log_4 x)_2 = 3$. Следовательно, $x_1 = 4^{\frac{1}{2}} = 2, x_2 = 4^3 = 64$.

Ответ: 2; 64.

7.084. $\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$.

Решение.

Из условия

$\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^x \cdot 2^{-2}}$, $\frac{2^x+10}{4} = \frac{36}{2^x}$, $2^{2x} + 10\cdot 2^x - 144 = 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно 2^x, найдем $2^x = -18, \varnothing$, или $2^x = 8$, откуда $x = 3$.

Ответ: 3.

7.085. $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$.

Решение.

Имеем $10\cdot 10^{x^2} - \frac{10}{10^{x^2}} - 99 = 0 \Rightarrow 10\cdot 10^{2x^2} - 99\cdot 10^{x^2} - 10 = 0$. Решив это уравнение как квадратное относительно 10^{x^2}, получим $10^{x^2} = -\frac{1}{10}, \varnothing$, или $10^{x^2} = 10$, откуда $x^2 = 1, x_{1,2} = \pm 1$.

Ответ: -1; 1.

7.086. $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{100}}=0.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1.$

Записывая уравнение в виде $x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{100}}$ и логарифмируя обе части по основанию 10, получаем

$$\lg x^{1-\frac{2}{3}\lg x}=\lg\frac{1}{\sqrt[3]{100}},\quad \left(1-\frac{2}{3}\lg x\right)\lg x=-\frac{1}{3}\lg 100,\quad 2\lg^2 x-3\lg x-2=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, находим $(\lg x)_1=-\frac{1}{2}$ или $(\lg x)_2=2$, откуда $x_1=10^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $x_2=10^2=100$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 100.

7.087. $7^x\left(\sqrt{2}\right)^{2x^2-6}-\left(\frac{7}{4}\right)^x=0.$

Решение.

Из условия

$$7^x\cdot 2^{x^2-3}=7^x\cdot 2^{-2x}\Rightarrow 2^{x^2-3}=2^{-2x},\quad x^2-3=-2x,\quad x^2+2x-3=0,$$

откуда $x_1=-3$, $x_2=1$.

Ответ: -3; 1.

7.088. $3\cdot 4^{\log_x 2}-46\cdot 2^{\log_x 2-1}=8.$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1.$

Имеем $3\cdot 2^{2\log_x 2}-23\cdot 2^{\log_x 2}-8=0$. Решая уравнение как квадратное относительно $2^{\log_x 2}$, найдем $2^{\log_x 2}=-\frac{1}{3}$, $\varnothing$; или $2^{\log_x 2}=8$, откуда $\log_x 2=3$, $x=\sqrt[3]{2}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2}$.

7.089. $9^{\log_{1/3}(x+1)}=5^{\log_{1/5}(2x^2+1)}$.

Решение.

ОДЗ: $x+1>0, x>-1$.

Из условия

$$3^{\log_3(x+1)^{-2}}=5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}},\ \ (x+1)^{-2}=(2x^2+1)^{-1},\ \ \frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2+1}.$$

Решая это уравнение, имеем $x_1=0$, $x_2=2$.

Ответ: 0; 2.

7.090. $27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Имеем

$$3^{3\lg x}-7\cdot 3^{2\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27=0,\ \ (3^{3\lg x}+27)-7\cdot 3^{\lg x}(3^{\lg x}+3)=0,$$
$$(3^{\lg x}+3)(3^{2\lg x}-3\cdot 3^{\lg x}+9)-7\cdot 3^{\lg x}(3^{\lg x}+3)=0,$$
$$(3^{\lg x}+3)(3^{2\lg x}-10\cdot 3^{\lg x}+9=0),$$

откуда $3^{2\lg x}-10\cdot 3^{\lg x}+9=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $3^{\lg x}$, получаем $(3^{\lg x})_1=1$ или $(3^{\lg x})_2=9$, откуда $(\lg x)_1=0$ или $(\lg x)_2=2$. Отсюда $x_1=1$, $x_2=100$.

Ответ: 1; 100.

7.091. $\log_2(4\cdot 3^x-6)-\log_2(9^x-6)=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}4\cdot 3^x-6>0,\\ 9^x-6>0.\end{cases}$

Имеем $\log_2\frac{4\cdot 3^x-6}{3^{2x}-6}=1,\ \ \frac{4\cdot 3^x-6}{3^{2x}-6}=2\Rightarrow 3^{2x}-2\cdot 3^x-3=0$. Решая его как квадратное относительно 3^x, найдем $3^x=-1, \varnothing$; или $3^x=3$, откуда $x=1$.

Ответ: 1.

7.092. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x-4\neq 0, \end{cases}$ $2<x\neq 4.$

Из условия $2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0$ или $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$.

Имеем:

1) $\begin{cases} 2<x<4, \\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<4, \\ \log_3(x-2)(4-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2<x<4, \\ x^2-6x+9=0, \end{cases}$

откуда $x_1=3$;

2) $\begin{cases} x>4, \\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4, \\ \log_3(x-2)(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>4, \\ x^2-6x+7=0, \end{cases}$

откуда $x_2=3+\sqrt{2}$.

Ответ: $3; 3+\sqrt{2}$.

7.093. $\log_3 x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=\frac{2}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Имеем $\log_3 x\cdot\frac{1}{2}\log_3 x\cdot\frac{1}{3}\log_3 x\cdot\frac{1}{4}\log_3 x=\frac{2}{3}$, $\log_3^4 x=16$, откуда $(\log_3 x)_1=-2$ или $(\log_3 x)_2=2$. Отсюда $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=9$.

Ответ: $\frac{1}{9}; 9.$

7.094. $4^{\log_5 x^2}-4^{\log_5 x+1}+4^{\log_5 x-1}-1=0.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Из условия $4\cdot 4^{2\log_5 x}-15\cdot 4^{\log_5 x}-4=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $4^{\log_5 x}$, найдем $4^{\log_5 x}=-\frac{1}{4}$, $\varnothing$; или $4^{\log_5 x}=4$,

откуда $\log_5 x=1$, $x=5$.

Ответ: 5.

7.095. $\sqrt{\log_a x}+\sqrt{\log_x a}=\frac{10}{3}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\log_a x\geq 0,\\ 0<a\neq 1,\\ 0<x\neq 1.\end{cases}$

Из условия

$$\sqrt{\log_a x}+\frac{1}{\sqrt{\log_a x}}-\frac{10}{3}=0\Rightarrow 3\left(\sqrt{\log_a x}\right)^2-10\sqrt{\log_a x}+3=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{\log_a x}$, получаем $\left(\sqrt{\log_a x}\right)_1=\frac{1}{3}$, $(\log_a x)_1=\frac{1}{9}$, откуда $x_1=\sqrt[9]{a}$, или $\left(\sqrt{\log_a x}\right)_2=3$, $(\log_a x)_2=9$, откуда $x_2=a^9$.

Ответ: $\sqrt[9]{a}; a^9$, где $0<a\neq 1$.

7.096. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$.

Решение.

ОДЗ: $3x+4>0, x>-\frac{4}{3}$.

Имеем $\lg\frac{3x^2+12x+19}{3x+4}=1$, $\frac{3x^2+12x+19}{3x+4}=10$, $3x^2-18x-21=0$

при $3x+4\neq 0$. Отсюда $x_1=-1$, $x_2=7$.

Ответ: -1; 7.

7.097. $\log_3(x-3)^2+\log_3|x-3|=3$.

Решение.

ОДЗ: $x-3\neq 0, x\neq 3$.

Из условия

$$2\log_3|x-3|+\log_3|x-3|=3,\ 3\log_3|x-3|=3,\ \log_3|x-3|=1,$$

откуда $|x-3|=3$. Тогда $(x-3)_1=-3$ или $(x-3)_2=3$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=6$.

Ответ: 0; 6.

7.098. $\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{x+3}=2-0{,}5\lg 625.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-3>0, \\ x+3>0 \end{cases}$ $x>3.$

Имеем

$\lg\sqrt{x-3}+\lg\sqrt{x+3}=\lg 100-\lg 25,\ \lg\sqrt{x^2-9}=\lg 4,\ \sqrt{x^2-9}=4$, откуда $x^2=25$, $x_1=-5$, $x_2=5$, $x_1=-5$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 5.

7.099. $\lg(3-x)-\frac{1}{3}\lg(27-x^3)=0.$

Решение.

ОДЗ: $3-x>0,\ x<3.$

Перепишем уравнение в виде

$$3\lg(3-x)=\lg(27-x^3),\ \lg(3-x)^3=\lg(27-x^3).$$

Тогда $(3-x)^3=27-x^3 \Rightarrow x^2-9x=0$, откуда $x_1=0, x_2=9; x_2=9$ не подходит по ОДЗ.

Ответ:0.

7.100. $2\lg x-\lg 4=-\lg(5-x^2).$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 5-x^2>0, \end{cases}$ $0<x<\sqrt{5}.$

Из условия

$$\lg x^2+\lg(5-x^2)=\lg 4,\ \lg(x^2(5-x^2))=\lg 4,\ x^2(5-x^2)=4,$$

$$x^4-5x^2+4=0.$$

Решая это уравнение как биквадратное относительно x, найдем $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-2$, $x_4=2$; $x_1=-1$ и $x_3=-2$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: 1; 2.

7.101. $\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+6>0, \\ x-2>0, \end{cases}$ $x>2$.

Имеем

$$\lg\frac{8}{\sqrt{x+6}}=\lg\frac{16}{x-2},\quad \frac{8}{\sqrt{x+6}}=\frac{16}{x-2},\quad 2\sqrt{x+6}=x-2,\quad x^2-8x-20=0,$$

откуда $x_1=10$, $x_2=-2$; $x_2=-2$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 10.

7.102. $2\lg\sqrt{4-x}+\lg(6-x)=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 4-x>0, \\ 6-x>0, \end{cases}$ $x<4$.

Перепишем уравнение в виде

$$\lg(4-x)+\lg(6-x)=1,\quad \lg(4-x)(6-x)=1,$$

откуда $(4-x)(6-x)=10$, $x^2+10x-14=0$. Следовательно, $x_1=5-\sqrt{11}$, $x_2=5+\sqrt{11}$; $x_2=5+\sqrt{11}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $5-\sqrt{11}$.

7.103. $\dfrac{\lg(2x-19)-\lg(3x-20)}{\lg x}=-1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-19>0, \\ 3x-20>0, \end{cases}$ $x>\dfrac{19}{2}$.

Из условия

$$\lg(2x-19)-\lg(3x-20)=-\lg x,\quad \lg(2x-19)+\lg x=\lg(3x-20),$$
$$x(2x-19)=3x-20,\quad x^2-11x+10=0.$$

Отсюда $x_1 = 10$, $x_2 = 1$; $x_2 = 1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 10.

7.104. $\dfrac{\lg x^2}{\lg(6x-5)} = 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 6x-5 > 0, \end{cases} \quad \dfrac{5}{6} < x \neq 1.$

Имеем $\lg x^2 = \lg(6x-5)$, откуда $x^2 = 6x-5, \quad x^2 - 6x + 5 = 0$, отсюда $x_1 = 5$ и $x_2 = 1$; $x_2 = 1$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 5.

7.105. $\log_a y + \log_a (y+5) + \log_a 0{,}02 = 0.$

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0, \\ y+5 > 0, \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y > 0, \\ 0 < a \neq 1. \end{cases}$

Имеем

$\log_a (y(y+5) \cdot 0{,}02) = 0, \quad 0{,}02y^2 + 0{,}1y = 1, \quad 0{,}02y^2 + 0{,}1y - 1 = 0,$

откуда $y_1 = 5$; $y_2 = -10$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $y = 5$ при $0 < a \neq 1$.

7.106. $\log_x \sqrt{2} - \log_x^2 \sqrt{2} = \log_3 27 - \log_x (2x).$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Перепишем уравнение в виде

$\dfrac{1}{2}\log_x 2 - \dfrac{1}{4}\log_x^2 2 = 3 - \log_x 2 - 1, \quad \log_x^2 2 - 6\log_x 2 + 8 = 0.$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_x 2$, найдем $\log_x 2 = 2$, $\log_x 2 = 4$, откуда $x^2 = 2$ или $x^4 = 2$. Тогда $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt[4]{2}$, $x_4 = \sqrt[4]{2}$; $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_3 = -\sqrt[4]{2}$ не подходят по ОДЗ.

Ответ: $\sqrt[4]{2}; \sqrt{2}.$

7.107. $(\log_2 x-3)\log_2 x+2(\log_2 x+1)\log_2 \sqrt[3]{2}=0.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Из условия

$$\log_2 \sqrt[3]{2}=\log_2 2^{1/3}=\frac{1}{3},\quad \log_2^2 x-3\log_2 x+\frac{2}{3}\log_2 x+\frac{2}{3}=0,$$

$$3\log_2^2 x-7\log_2 x+2=0.$$

Решая уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, имеем $(\log_2 x)_1=\frac{1}{3}$ или $(\log_2 x)_2=2$, откуда $x_1=\sqrt[3]{2}$, $x_2=4$.

Ответ: $\sqrt[3]{2}; 4.$

7.108. $0{,}1\log_2^4(x-4)-1{,}3\log_2^2(x-4)+3{,}6=0.$

Решение.

ОДЗ: $x-4>0, x>4$.

Решая это уравнение как биквадратное относительно $\log_2(x-4)$, имеем $(\log_2(x-4))_1=-2$; $(\log_2(x-4))_2=2$; $(\log_2(x-4))_3=-3$; $(\log_2(x-4))_4=3$, откуда $x_1=\frac{17}{4}$, $x_2=8$, $x_3=\frac{33}{8}$, $x_4=12$.

Ответ: $\frac{17}{4};\frac{33}{8};8;12.$

7.109. $5^{2x-1}+2^{2x}-5^{2x}+2^{2x+2}=0.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{5^{2x}}{5}-5^{2x}=-2^{2x}-4\cdot 2^{2x},\quad -\frac{4}{5}\cdot 5^{2x}=-5\cdot 2^{2x},$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{5}{2}\right)^{2},\quad x=1.$$

Ответ: 1.

7.110. $\log_2\left(9-2^x\right)=10^{\lg(3-x)}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 9-2^x>0, \\ 3-x>0, \end{cases}$ $x<3$.

Имеем $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$, $9-2^x=2^{3-x}$, $2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно 2^x, имеем $\left(2^x\right)_1=1$ или $\left(2^x\right)_2=8$, откуда $x_1=0$, $x_2=3$; $x_2=3$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 0.

7.111. $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{2\sqrt{x}}\right)+\lg 10=2$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

Из условия $\frac{1}{3}\lg\left(271+3^{2\sqrt{x}}\right)+1=2$, $\lg\left(271+3^{2\sqrt{x}}\right)=3$. Тогда $271+3^{2\sqrt{x}}=$ $=1000$, $3^{2\sqrt{x}}=3^6$, откуда $\sqrt{x}=3$, $x=9$.

Ответ: 9.

7.112. $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\sqrt[4]{3^7}$.

Решение.

ОДЗ: $x\geq 0$.

Перепишем уравнение в виде $3^{\frac{3}{5}\left(\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}\right)\left(\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}\right)}=3^{\frac{7}{4}}$. Тогда

$\frac{3}{5}\left(\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}\right)\left(\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}\right)=\frac{7}{4}$, $3x^2-16x-140=0$,

откуда $x_1=10$, $x_2=-\frac{14}{3}$; $x_2=-\frac{14}{3}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 10.

7.113. $x^{\lg x}=1000x^2$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получаем $\lg x^{\lg x}=\lg 1000x^2$, $\lg x\lg x=\lg 1000+\lg x^2$, $\lg^2 x-2\lg x-3=0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получаем $(\lg x)_1=-1$ или $(\lg x)_2=3$, откуда $x_1=0{,}1$, $x_2=1000$.

Ответ: 0,1; 1000.

7.114. $\lg(x(x+9))+\lg\dfrac{x+9}{x}=0$.

Решение.

ОДЗ: $x(x+9)>0, x\in(-\infty;-9)\cup(0;\infty)$.

Имеем $\lg\dfrac{x(x+9)(x+9)}{x}=0$, откуда $(x+9)^2=1$. Тогда $(x+9)_1=-1$, $x_1=-10$ или $(x+9)_2=1$, $x_2=-8$; $x_2=-8$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: -10.

7.115. $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\dfrac{1}{x}$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Логарифмируя, имеем

$(\lg 100+\lg x)^2+(\lg 10+\lg x)^2=14-\lg x$, $2\lg^2 x+7\lg x-9=0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, получаем $(\lg x)_1=-\dfrac{9}{2}$ или $(\lg x)_2=1$, откуда $x_1=10^{-9/2}$, $x_2=10$.

Ответ: $10^{-9/2}$;10.

7.116. $1+2\log_x 2\cdot\log_4(10-x)=\dfrac{2}{\log_4 x}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}0<x\neq 1,\\ x<10.\end{cases}$

Переходя к основанию 2, имеем

$$1+\frac{\log_2(10-x)}{\log_2 x}=\frac{4}{\log_2 x},\quad \log_2 x+\log_2(10-x)=4,\quad \log_2 x(10-x)=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-10x+16=0,$$

откуда $x_1=2, x_2=8$.

Ответ: 2; 8.

7.117. $2^{\log_3 x^2}\cdot 5^{\log_3 x}=400.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Из условия $4^{\log_3 x}\cdot 5^{\log_3 x}=400$, $20^{\log_3 x}=20^2$, откуда $\log_3 x=2$, $x=9$.

Ответ: 9.

7.118. $5^{\log_2(x^2-21)}\cdot 0{,}02^2\cdot 25^{-0{,}5\log_2 x}=1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-21>0, \\ x>0, \end{cases}$ $x>\sqrt{21}.$

Записываем

$$5^{\log_2(x^2-21)}\cdot 0{,}04\cdot\frac{1}{25^{0{,}5\log_2 x}}=1,\quad 5^{\log_2(x^2-21)}=5^{2+\log_2 x},$$

$$\log_2(x^2-21)=2+\log_2 x,\quad \log_2(x^2-21)=\log_2 4x,$$

откуда $x^2-21=4x$, $x^2-4x-21=0$, $x_1=7, x_2=-3$; $x_2=-3$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: 7.

7.119. $4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 0{,}25^{\log_8(2x-3)}=\sqrt[3]{16}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-2>0, \\ 2x-3>0, \end{cases}$ $x>\frac{3}{2}.$

Имеем

$$4^{2\log_8(2x-2)}\cdot 4^{-\log_8(2x-3)}=4^{2/3},\quad 4^{2\log_8(2x-2)-\log_8(2x-3)}=4^{2/3},$$

$$2\log_8(2x-2)-\log_8(2x-3)=\frac{2}{3},\quad \log_8\frac{(2x-2)^2}{2x-3}=\frac{2}{3},\quad \frac{(2x-2)^2}{2x-3}=4,$$

$x^2-4x+4=0,\quad (x-2)^2=0,$

откуда $x=2$.

Ответ: 2.

7.120. $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0{,}2.$

Решение.

Из условия

$$\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=-1,\quad 3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3},\quad 3^{x^2-13x+28}=\frac{1}{9},$$

$$3^{x^2-13x+28}=3^{-2},\quad x^2-13x+28=-2,\quad x^2-13x+30=0,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=10$.

Ответ: 3; 10.

7.121. $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

Решение.

ОДЗ: $2^{x+1}-3>0$.

Перепишем уравнение в виде

$$\log_2(2^{2x}+4)-\log_2(2\cdot2^x-3)=x,\quad \log_2\frac{2^{2x}+4}{2\cdot2^x-3}=x,$$

$$\frac{2^{2x}+4}{2\cdot2^x-3}=2^x,\quad 2^{2x}-3\cdot2^x-4=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно 2^x, получаем $2^x=-1, \varnothing$; или $2^x=4$, откуда $x=2$.

Ответ: 2.

7.122. $\sqrt[3]{27^{5\sqrt{x}}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}.$

Решение.

ОДЗ: $x\ge0$.

Имеем $3^{5\sqrt{x}}=3^{x(\sqrt{x}-4)}\Rightarrow 5\sqrt{x}=x(\sqrt{x}-4)$, $\sqrt{x}=0$, $x_1=0$, или $(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}-5=0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{x}$, получаем $\sqrt{x}=-1, \varnothing$; или $\sqrt{x}=5$, $x=25$.

Ответ: 0; 25.

7.123. $\log_6 \sqrt[7]{3^{x(15-x)}}+8\log_6 2=8.$

Решение.

Из условия $\log_6 3^{x(15-x)/7}+\log_6 2^8=8$, $\log_6\left(3^{x(15-x)/7}\cdot 2^8\right)=8$. Отсюда $3^{x(15-x)/7}\cdot 2^8=6^8$, $3^{x(15-x)/7}=3^8$. Тогда $\frac{x(15-x)}{7}=8$, $x^2-15x+56=0$, откуда $x_1=7$, $x_2=8$.

Ответ: 7; 8.

7.124. $\log_5\left(4^x+144\right)-4\log_5 2=1+\log_5\left(2^{x-2}+1\right)$

Решение.

Имеем

$$\log_5 \frac{2^{2x}+144}{16}=\log_5 5\left(\frac{2^x}{4}+1\right),\quad \frac{2^{2x}+144}{16}=\frac{5\left(2^x+4\right)}{4},$$

$$2^{2x}-20\cdot 2^x+64=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно 2^x, получаем $\left(2^x\right)_1=4$ или $\left(2^x\right)_2=16$, откуда $x_1=2$, $x_2=4$.

Ответ: 2; 4.

7.125. $27x^{\log_{27}x}=x^{10/3}$.

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя обе части уравнения по основанию 3, имеем

$$\log_3 27x^{\log_{27}x}=\log_3 x^{10/3},\quad 3+\frac{1}{3}\log_3^2 x=\frac{10}{3}\log_3 x,$$

$$\log_3^2 x-10\log_3 x+9=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_3 x$, получаем $\left(\log_3 x\right)_1=1$ или $\left(\log_3 x\right)_2=9$, откуда $x_1=3$, $x_2=3^9$.

Ответ: $3; 3^9$.

7.126. $\log_x 9+\log_{x^2} 729=10.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq \pm 1, \end{cases}$ $0<x\neq 1.$

Имеем $\log_x 9+\frac{3}{2}\log_x 9=10,$ $\log_x 9=4$, откуда $x^4=9$, $x=\sqrt{3}$,

$x=-\sqrt{3}$ не подходит по ОДЗ.

Ответ: $\sqrt{3}$.

7.127. $\log_2\left(25^{x+3}-1\right)=2+\log_2\left(5^{x+3}+1\right)$

Решение.

ОДЗ: $25^{x+3}-1>0,$ $25^{x+3}>25^0,$ $x>-3.$

Из условия

$\log_2\left(25^3\cdot 25^x-1\right)=\log_2 4\left(5^3\cdot 5^x+1\right)$ $25^3\cdot 5^{2x}-1=4\cdot 5^3\cdot 5^x+4,$

$3125\cdot 5^{2x}-100\cdot 5^x-1=0,$

откуда, решая это уравнение как квадратное относительно 5^x, имеем

$5^x=-\frac{1}{125}, \varnothing$; или $5^x=5^{-2}$, откуда $x=-2$.

Ответ: -2.

Решить системы уравнений (**7.128 – 7.149**):

7.128. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\neq 1, \\ 0<y\neq 1. \end{cases}$

Из первого уравнения имеем:

$\log_y x+\frac{1}{\log_y x}-2=0,$ $\log_y^2 x-2\log_y x+1=0,$ $\left(\log_y x-1\right)^2=0,$

откуда $\log_y x = 1$, $x = y$. Из второго уравнения системы имеем $y^2 - y - 20 = 0$, откуда $y_1 = -4$, $y_2 = 5$; $y_1 = -4$ не подходит по ОДЗ. Тогда $x = y = 5$.

Ответ: $(5; 5)$.

7.129. $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x - y > 0, \\ x + y > 0. \end{cases}$

Имеем:

$$\begin{cases} \lg 10^{1+\lg(x+y)} = \lg 50, \\ \lg(x^2 - y^2) = \lg 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lg(x+y) = \lg 50, \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ (x-y)(x+y) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 4, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{9}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

7.130. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2 - \lg 5, \\ \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg 1{,}2 + 1. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y > 0. \end{cases}$

Из условия

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = \lg 20, \\ \lg(x^2 - y^2) = \lg 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x^2 - y^2 = 12. \end{cases}$$

Отсюда $x^2=16$, откуда $x_{1,2}=\pm4$. $y^2=4$, $y_{1,2}=\pm2$. Следовательно,

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=-2. \end{cases}$$

Остальные решения не удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $(4;2)$, $(4;-2)$.

7.131. $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y-20=0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$

Имеем $\begin{cases} xy=36, \\ x+y=20, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=18; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=18, \\ y_2=2. \end{cases}$

Ответ: $(2;18)$, $(18;2)$.

7.132. $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg(y+x)^2-\lg x=2\lg 3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y+x\neq 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы $3^{y+2x}=3^4$, $y+2x=4$, $y=4-2x$.

Из второго уравнения системы $\lg\frac{(y+x)^2}{x}=\lg 9$, откуда $\frac{(y+x)^2}{x}=9$.

Тогда исходная система приобретает вид

$$\begin{cases} y=4-2x, \\ (y+x)^2=9x \end{cases} \Rightarrow x^2-17x+16=0,$$

откуда $x_1=1$, $x_2=16$. Тогда $y_1=2$, $y_2=-28$.

Ответ: $(1;2)$, $(16;-28)$.

7.133. $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ 0 < y \neq 1. \end{cases}$

Из первого уравнения системы имеем: $2\log_y^2 x - 5\log_y x + 2 = 0$, откуда, решая это уравнение как квадратное относительно $\log_y x$, найдем $(\log_y x)_1 = \dfrac{1}{2}$ или $(\log_y x)_2 = 2$. Отсюда $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = y^2$.

Из второго уравнения системы найдем $y^{3/2} = 27$, $y_1 = 9$. Подставляя значение $x_2 = y^2$, найдем $y_2^3 = 27$, $y_2 = 3$.

Учитывая ОДЗ, имеем $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 9, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

Ответ: $(3; 9), (9; 3)$.

7.134. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25. \end{cases}$

Решение.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\begin{cases} (3^x - 2^{y/2})(3^x + 2^{y/2}) = 725, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x + 2^{y/2} = 29, \\ 3^x - 2^{y/2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 27, \\ 2^{y/2} = 2, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: $(3; 2)$.

7.135. $\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы уравнений имеем $x^2 + y^2 = 100$. Из второго уравнения системы найдем $\log_2 \frac{x}{16} = \log_2 \frac{3}{y}$, откуда $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$, $x = \frac{48}{y}$. Далее получаем $\left(\frac{48}{y}\right)^2 + y^2 - 100 = 0$, $y^4 - 100y^2 + 2304 = 0$, откуда $y_{1,2} = \pm 6$, $y_{3,4} = \pm 8$; $y_2 = -6$ и $y_4 = -8$ не подходят по ОДЗ. Тогда $x_1 = 8$, $x_2 = 6$.

Ответ: $(8; 6), (6; 8)$.

7.136. $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 81, \\ \lg\sqrt{xy} = 1 + \lg 3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы имеем $3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 3^4$, $2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 4$, $\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4$. Из второго уравнения системы получим $\sqrt{xy} = 30$, $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30$. Система принимает вид

$$\begin{cases} \sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 4, \\ \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 30 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} - 15 = 0,$$

откуда $\sqrt{x} = 5$ или $\sqrt{x} = -3$ (не подходит). Тогда $\sqrt{y} = 6$. Следовательно, $x = 25$, $y = 36$.

Ответ: $(25; 36)$.

7.137. $\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} + 2^{\frac{y-x}{x}} = 2{,}5, \\ \lg(2x-y)+1 = \lg(y+2x)+\lg 6. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x-y>0, \\ y+2x>0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы получаем $\left(2^{\frac{x-y}{2}}\right)^2 - 2{,}5\cdot 2^{\frac{x-y}{2}} + 1 = 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{\frac{x-y}{2}}$, найдем $\left(2^{\frac{x-y}{2}}\right)_1 = 2^{-1}$ или $\left(2^{\frac{x-y}{2}}\right)_2 = 2$, откуда $(x-y)_1 = -2$ или $(x-y)_2 = 2$. Из второго уравнения системы получаем $\lg 10(2x-y) = \lg 6(y+2x)$, откуда $10(2x-y) = 6(y+2x)$, $x = 2y$. Таким образом, исходная система эквивалентна системам уравнений:

1) $\begin{cases} x-y=-2, \\ x=2y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=2, \\ x=2y; \end{cases}$

откуда:

1) $\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_2=4, \\ y_2=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-2 \end{cases}$ (не подходит по ОДЗ).

Ответ: $(4;2)$.

7.138. $\begin{cases} x^{2y^2-1}=5, \\ x^{y^2+2}=125. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $0<x\neq 1$.

Логарифмируя первое и второе уравнения системы по основанию 5, получаем

$$\begin{cases} \log_5 x^{2y^2-1} = \log_5 5, \\ \log_5 x^{y^2+2} = \log_5 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2y^2-1)\log_5 x = 1, \\ (y^2+2)\log_5 x = 3 \end{cases} \Rightarrow \log_5 x = \frac{1}{2y^2-1}.$$

Из второго уравнения системы имеем $\frac{y^2+2}{2y^2-1}=3$, $y^2=1$, откуда $y=\pm 1$. Тогда $\log_5 x=1$, т.е. $x=5$.

Ответ: $(5;1)$, $(5;-1)$.

7.139. $\begin{cases} 8\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{x-y}=0{,}5^{y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2y>0, \\ 3x+2y>0. \end{cases}$

Имеем

$$\begin{cases} 2^{3+\frac{x-y}{2}}=2^{3-y}, \\ \log_3(x-2y)(3x+2y)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+\frac{x-y}{2}=3-y, \\ (x-2y)(3x+2y)=27, \end{cases} \begin{cases} x=-y, \\ y^2=9, \end{cases}$$

откуда, учитывая ОДЗ, получаем $x=3$, $y=-3$.

Ответ: $(3;-3)$.

7.140. $\begin{cases} 4^{x+y}=2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Из условия

$$\begin{cases} 2^{2x+2y}=2^{y-x}, \\ 2^{\log_2 x^4}=y^4-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2y=y-x, \\ x^4=y^4-5 \end{cases} \Rightarrow y=-3x.$$

Из второго уравнения $x^4=(-3x)^4-5$, $x^4=\frac{1}{16}$, откуда, учитывая ОДЗ, получаем $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

7.141. $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0, \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$\log_4 x = \log_2 y^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 x = \log_2 y, \quad \log_2 x = \log_2 y^2, \quad x = y^2.$$

Из второго уравнения системы имеем $y^4 - 2y^2 - 8 = 0$, откуда с учетом ОДЗ, $y = 2$. Тогда $x = 4$.

Ответ: $(4; 2)$.

7.142. $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\begin{cases} \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y = 4, \\ \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2 x + \log_2 y = 8, \\ \log_2 x + 2\log_2 y = 10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 y = 8, \\ \log_2 xy^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = 2^8, \\ xy^2 = 2^{10}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $y = \frac{2^8}{x^2}$. Из второго уравнения $x \cdot \left(\frac{2^8}{x^2}\right)^2 = 2^{10}$, $x^3 = 2^6$, откуда $x = 4$, $y = 16$.

Ответ: $(4; 16)$.

7.143. $\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$

Решение.

Из условия $\left(2^{\frac{x+y}{6}}\right)^2 + 2^{\frac{x+y}{6}} - 6 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $2^{\frac{x+y}{6}}$, имеем $2^{\frac{x+y}{6}} = -3, \varnothing$; или $2^{\frac{x+y}{6}} = 2$, откуда $\frac{x+y}{6} = 1$, $x + y = 6$.

Из второго уравнения системы $x^2 - 6yx + 5y^2 = 0$, решая его как квадратное относительно x, имеем $x_1 = y$, $x_2 = 5y$. Исходная система эквивалентна двум системам:

$$1)\ \begin{cases} x + y = 6, \\ x = y; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x + y = 6, \\ x = 5y \end{cases} \Rightarrow 1)\ \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 3; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $(3;3),(5;1)$.

7.144. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

Решение.

Разделив второе уравнение заданной системы на первое, получим

$$\frac{3^x \cdot 4^y}{2^x \cdot 3^y} = \frac{12}{6}, \quad \frac{3^{x-y}}{2^{x-2y}} = 2, \quad 3^{x-y} = 2^{1+x-2y}.$$

Это равенство возможно, когда

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 1 + x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y, \quad 1 + y - 2y = 0, \quad y = 1.$$

Тогда $x = y = 1$.

Ответ: $(1;1)$.

7.145. $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $0 < x \neq 1$.

Логарифмируя второе уравнение системы по основанию 4, имеем $\log_4 x^y = \log_4 4^6$, $y \log_4 x = 6$. Отсюда

$$\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ y \log_4 x = 6 \end{cases} \Rightarrow (1 + \log_4 x)\log_4 x = 6,\ \log_4^2 x + \log_4 x - 6 = 0,$$

откуда, решая это уравнение как квадратное относительно $\log_4 x$, найдем $(\log_4 x)_1 = -3$, $(\log_4 x)_2 = 2$, $x_1 = \frac{1}{64}$, $x_2 = 16$. Тогда $y_1 = -2$, $y_2 = 3$.

Ответ: $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$, (16; 3).

7.146. $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(xy) = 8, \\ \log_3 \log_{1/9} \frac{x}{y} = 0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0 < x \neq 1, \\ y > 0, \\ \log_{1/9} \frac{x}{y} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{y} < 1. \end{cases}$

Из первого уравнения системы $xy = x^4$ или с учетом ОДЗ $y = x^3$. Из второго уравнения имеем $\log_{1/9} \frac{x}{y} = 1$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{9}$. Исходная система переписывается в виде $\begin{cases} y = x^3, \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x^3} = \frac{1}{9}$, откуда с учетом ОДЗ $x = 3$, $y = 27$.

Ответ: (3; 27).

7.147. $\begin{cases} \log_{xy}(x-y)=1, \\ \log_{xy}(x+y)=0. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-y>0, \\ x+y>0, \\ 0<xy\neq 1. \end{cases}$

Имеем

$$\begin{cases} x-y=xy, \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow y=1-x, \quad x-(1-x)-x(1-x)=0, \quad x^2+x-1=0,$$

откуда $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $y_2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Тогда с учетом ОДЗ имеем $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$

7.148. $\begin{cases} (x+y)\cdot 2^{y-2x}=6{,}25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=5. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 0<x+y\neq 1, \\ 2x-y\neq 0. \end{cases}$

Логарифмируя оба уравнения по основанию 10, имеем

$$\begin{cases} \lg(x+y)\cdot 2^{y-2x}=\lg\left(\dfrac{5}{2}\right)^2, \\ \lg(x+y)^{\frac{1}{2x-y}}=\lg 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(x+y)+(y-2x)\lg 2=2(\lg 5-\lg 2), \\ \dfrac{\lg(x+y)}{2x-y}=\lg 5. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $\lg(x+y)=(2x-y)\lg 5$, тогда

$(2x-y)\lg 5+(y-2x)\lg 2=2(\lg 5-\lg 2)$, $(2x-y)(\lg 5-\lg 2)=2(\lg 5-\lg 2)$,
$2x-y=2$.

Исходная система принимает вид

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ \lg(x+y) = 2\lg 5, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 2, \\ x + y = 25, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x = 9, \\ y = 16. \end{cases}$

Ответ: $(9;16)$.

7.149. $\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)} = 1, \\ 4^{x-2y} - 7 \cdot 2^{x-2y} = 8. \end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x - 4y > 0$.

Из условия

$$\begin{cases} 8^{\log_9(x-4y)} = 8^0, \\ \left(2^{x-2y}\right)^2 - 7 \cdot 2^{x-2y} - 8 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем $\log_9(x-4y) = 0$, откуда $x - 4y = 1$. Решая второе уравнение системы как квадратное относительно 2^{x-2y}, получаем $2^{x-2y} = -1, \varnothing$; $2^{x-2y} = 2^3$, откуда $x - 2y = 3$.

Исходная система принимает вид $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: $(5;1)$.

Решения к главе 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{8.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{8.2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z; \tag{8.4}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \tag{8.5}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.6}$$

(Здесь и в дальнейшем запись $n \in Z$ означает, что n – любое целое число.)

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин (табл. 8.1), а также знаки функций по четвертям (табл. 8.2).

Таблица 8.1

Аргумент (α, градусы, радианы)	Функция			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$0^\circ\ (0)$	0	1	0	∞ (не определен)
$15^\circ\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$18^\circ\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$36^\circ\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
$54^\circ\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$75^\circ\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	∞ (не определен)	0

Таблица 8.2

Четверть	Функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{8.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\,; \tag{8.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{8.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\,; \tag{8.10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.11}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.12}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,; \tag{8.13}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta},\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\pi n,\quad n\in Z\,. \tag{8.14}$$

Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\,; \tag{8.15}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\,; \tag{8.16}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\, k\in Z,\, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\, n\in Z\,; \tag{8.17}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.18}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \tag{8.19}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \tag{8.20}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z; \tag{8.21}$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \tag{8.22}$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \tag{8.23}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}; \tag{8.24}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), n \in Z; \tag{8.25}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq 2\pi n, n \in Z; \tag{8.26}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.27}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in Z; \tag{8.28}$$

Формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \qquad (8.29)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \qquad (8.30)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ; \qquad (8.31)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\ ; \qquad (8.32)$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha); \qquad (8.33)$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha); \qquad (8.34)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z\ ; \qquad (8.35)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z\ ; \qquad (8.36)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z\ ; \qquad (8.37)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z\ ; \qquad (8.38)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ \beta\neq\pi n,\ n\in Z\ ; \qquad (8.39)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ \beta\neq\pi n,\ n\in Z\ ; \qquad (8.40)$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z\ ; \qquad (8.41)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z\ ; \qquad (8.42)$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}; \tag{8.43}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \tag{8.44}$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \tag{8.45}$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \tag{8.46}$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.47}$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.48}$$

$$1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.49}$$

$$1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.50}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.51}$$

$$1-\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.52}$$

$$1-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.53}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},\quad \alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.54}$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta},\quad \alpha,\beta\neq\pi n,\quad n\in Z; \tag{8.55}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha,\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z; \qquad (8.56)$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha,\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z; \qquad (8.57)$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right); \qquad (8.58)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right); \qquad (8.59)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right); \qquad (8.60)$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \qquad (8.61)$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right); \qquad (8.62)$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right); \qquad (8.63)$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=$$

$$\frac{1}{4}\times\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right). \qquad (8.64)$$

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.65}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.66}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\quad \alpha,\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z; \tag{8.67}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}},\quad \alpha\neq\pi n,\quad n\in Z. \tag{8.68}$$

Формулы приведения

$$\left.\begin{aligned}&\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha,\quad \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha,\\&\sin\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

$$\left.\begin{aligned}&\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha,\\&\cos\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\quad \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha;\end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z,\\
&\operatorname{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z;
\end{aligned}\right\} \tag{8.71}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n\in Z,\\
&\operatorname{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha, \quad \alpha\neq\pi n, \quad n\in Z.
\end{aligned}\right\} \tag{8.72}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическим называется уравнение, в котором неизвестное входит только под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида

$$\sin x = m, \tag{8.73}$$

$$\cos x = m, \tag{8.74}$$

$$\operatorname{tg} x = m, \tag{8.75}$$

$$\operatorname{ctg} x = m, \tag{8.76}$$

где m – любое действительное число.

Решить простейшее тригонометрическое уравнение – значит найти множество всех углов (дуг), имеющих данное значение тригонометрической функции.

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений.

1. $\sin x = m$. Если $|m| \le 1$, то решения данного уравнения определяются формулой

$$x = (-1)^n \arcsin m + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.77}$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (8.73) решений не имеет.

2. $\cos x = m$. Если $|m| \le 1$, то решения этого уравнения определяются формулой

$$x = \pm \arccos m + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{8.78}$$

Если $|m| > 1$, то уравнение (8.74) решений не имеет.

3. $\operatorname{tg} x = m$. При любом действительном m

$$x = \operatorname{arctg} m + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.79}$$

4. $\operatorname{ctg} x = m$. При любом действительном m

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.80}$$

В частных случаях при $m = -1$, $m = 0$, $m = 1$ получаются следующие формулы:

$$\sin x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.81}$$

$$\sin x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.82}$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.83}$$

$$\cos x = -1; \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.84}$$

$$\cos x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.85}$$

$$\cos x = 1; \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z; \tag{8.86}$$

$$\operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.87}$$

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad x = \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.88}$$

$$\operatorname{tg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.89}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.90}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0; \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z; \tag{8.91}$$

$$\operatorname{ctg} x = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z. \tag{8.92}$$

Тригонометрические уравнения вида $\sin(ax+b)=m$, $\cos(ax+b)=m$, $\operatorname{tg}(ax+b)=t$, $\operatorname{ctg}(ax+b)=t$, где $ax+b$ — линейная функция, $|m|<1$, $a \neq 0$, x, b — любые действительные числа, также относятся к простейшим и приводятся к уравнениям (8.73) – (8.76) заменой $ax+b=y$.

Тригонометрические уравнения, содержащие тригонометрические функции одинакового аргумента

Рассмотрим тригонометрические уравнения, рациональные относительно тригонометрических функций.

Пусть имеем

$$R(\sin x, \cos x) = 0, \tag{8.93}$$

где R – рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Данное уравнение приводится к алгебраическому относительно тригонометрической функции одинакового аргумента. Затем, решая получившееся алгебраическое уравнение относительно этой функции, приводят данное уравнение к нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, из которых находят значения неизвестного и проверяют, какие из них являются решениями данного уравнения.

Если $x \neq (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, то каждое тригонометрическое уравнение вида (8.93) можно привести к рациональному уравнению относительно неизвестного $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул (8.65) – (8.68). Решая уравнение таким методом, можно потерять корни вида $x=(2n+1)\pi$, где

$n \in Z$, для которых $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не имеет смысла. Поэтому необходимо проверить, являются ли числа $x = (2n+1)\pi$, где $n \in Z$, корнями исходного уравнения.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене x на $\pi - x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\sin x$.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему не изменяется при замене x на $-x$, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\cos x$.

Если уравнение (8.93) или приводимое к нему при замене x на $\pi + x$ не изменяется, то его имеет смысл приводить к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$.

Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Тригонометрическое уравнение вида

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x = 0, \quad (8.94)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — данные числа, а n — натуральное число, называется однородным уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Сумма показателей у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородности уравнения или показателем однородности.

Уравнение (8.94) является частным случаем уравнения (8.93) и делением обеих своих частей на $\cos^n x \neq 0$ (или на $\sin^n x \neq 0$) приводится к целому рациональному относительно $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$):

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0$$

или

$$a_0 \operatorname{ctg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0;$$

при этом область определения уравнения сужается на значения $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ (или на $x = \pi n$), где $n \in Z$.

Умножением на тригонометрическую единицу $(\sin^2 x + \cos^2 x)^k$, где $k \in N$, можно привести к однородному некоторые уравнения, не являющиеся однородными. Так, к уравнению вида (8.94) сводится уравнение

$$a_0 \cos^{2n} x + a_1 \cos^{2n-1} x \sin x + a_2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \ldots + a_n \sin^n x = b.$$

Для этого нужно умножить b на тригонометрическую единицу:

$$b \equiv b\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^k, \quad k \in Z.$$

Уравнение вида $a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right)$

Это уравнение является частным случаем уравнения (8.93), следовательно, его можно решать с помощью универсальной подстановки, а также приводить к однородному.

Укажем еще один способ решения этого уравнения, так называемый способ введения вспомогательного угла. Пусть

$$a \sin \omega x + b \cos \omega x = c \quad \left(a^2 + b^2 \neq 0\right). \tag{8.95}$$

Разделим обе его части на $\sqrt{a^2 + b^2}$, тогда

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть φ — одно из решений системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Воспользовавшись этими равенствами, запишем уравнение в виде

$$\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Применив формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, получим уравнение $\sin(\omega x + \varphi) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, которое, как видно из проделанных выкладок, равносильно исходному уравнению. Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, т.е. $a^2+b^2 \ge c^2$, то уравнение имеет решение

$$\omega x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n$$

или

$$x = \frac{(-1)^n}{\omega} \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\varphi}{\omega} + \frac{\pi n}{\omega},\ n \in Z.$$

Если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$, т.е. $a^2+b^2 < c^2$, то уравнение решений не имеет.

Уравнения, рациональные относительно выражений $\sin x \pm \cos x$ и $\sin x \cdot \cos x$

Если левая часть тригонометрического уравнения $f(x)=0$ содержит лишь одно из выражений $\sin x + \cos x$ или $\sin x - \cos x$ и функцию $\sin 2x$ (или произведение $\sin x \cos x$), то, вводя новое неизвестное $t = \sin x + \cos x$ или $t = \sin x - \cos x$ и учитывая, что $\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1$, $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$, приходим к уравнению относительно t.

СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений пользуются способом подстановки или сводят системы тригонометрических уравнений к системам алгебраических уравнений. В ряде случаев для решения системы тригонометрических уравнений ее преобразуют с помощью почленного сложения, вычитания, умножения, деления уравнений с целью, например, исключить одно из неизвестных, разложить полученное уравнение на множители и т.д. Решения системы записываются в виде упорядоченных пар $(x; y)$.

Решить уравнения (**8.001 – 8.175**):

8.001. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$.

Решение.

$$\cos 3x - \sqrt{3}\cos x = \sin x - \sqrt{3}\sin 3x, \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x, \Leftrightarrow \cos 3x \cos\frac{\pi}{3} + \sin 3x \sin\frac{\pi}{3} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x, \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \Leftrightarrow -2\sin\frac{3x - \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{6}}{2} \times$$

$$\times \sin\frac{3x - \frac{\pi}{3} - x + \frac{\pi}{6}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

Тогда:

1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad 2x_1 - \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{8}(4k+1), \quad k \in Z$;

2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 0, \quad x_2 - \frac{\pi}{12} = \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{12} + \pi n = \frac{\pi}{12}(12n+1), \quad n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8}(4k+1); x_2 = \frac{\pi}{12}(12n+1), \quad k, n \in Z.$

8.002. $7 + 4\sin x \cos x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$

$$7 + 4\sin x \cos x + 1{,}5\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 + 4\sin x \cos x + 1{,}5\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7 + 4\sin x \cos x + \frac{1{,}5}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow 7 + 2\sin 2x + \frac{3}{\sin 2x} = 0.$$

Отсюда получаем уравнение $2\sin^2 2x + 7\sin 2x + 3 = 0$, квадратное относительно $\sin 2x$. Таким образом, $\sin 2x = -3, \varnothing$, или $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, откуда $2x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\quad k \in Z$, $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z.$

8.003. $\frac{4\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \sin^2 2x + 1 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0.$

Из условия

$$\frac{\frac{4\cos x}{\sin x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \sin^2 2x + 1 = 0, \Leftrightarrow \sin^2 2x + 2\sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x + 1)^2 = 0,\quad \sin 2x = -1.$$

Тогда $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\quad k \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k - 1),\quad k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k - 1),\quad k \in Z.$

8.004. $\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} + 1 = 2\operatorname{tg}^2 x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0.$

Имеем

$$\frac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x + \sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 2\operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 2x - 4}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 2\operatorname{tg}^2 x, \frac{\sin^2 2x - 2}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = \operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x-2}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 2x-2}{1-\cos^2 2x+2-2\cos 2x-4}=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \Rightarrow \cos^3 2x+\cos^2 2x=0,$$

$\cos^2 2x(\cos 2x+1)=0.$

Отсюда:

1) $\cos^2 2x=0,\quad \cos 2x=0,\quad 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z,$

$x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\quad k\in Z;$

2) $\cos 2x+1=0,\quad \cos 2x=-1,\quad 2x=\pi+2\pi n,\quad n\in Z,$

$x_2=\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z.$

Объединяя решения, получаем $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}=\frac{\pi}{4}(2m+1),\quad m\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2m+1),\quad m\in Z.$

8.005. $\sin z\sin(60^\circ-z)\sin(60^\circ+z)=\frac{1}{8}.$

Решение.

Из условия

$$\sin z(2\sin(60^\circ-z)\sin(60^\circ+z))=\frac{1}{4}, \Leftrightarrow \sin z(\cos 2z-\cos 120^\circ)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin z\cos 2z+\sin z=\frac{1}{2}, \Leftrightarrow -\sin z+\sin 3z+\sin z=\frac{1}{2},\quad \sin 3z=\frac{1}{2}.$$

Тогда $3z=(-1)^k\cdot 30^\circ+180^\circ k,\quad k\in Z,\quad z=(-1)^k\cdot 10^\circ+60^\circ k,\quad k\in Z.$

Ответ: $z=(-1)^k\cdot 10^\circ+60^\circ k,\quad k\in Z.$

8.006. $\cos^{-2} 2t-\sin^{-2} 2t=\frac{8}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2t\neq 0,\\ \sin 2t\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{\cos^2 2t}-\frac{1}{\sin^2 2t}-\frac{8}{3}=0,\quad \frac{\cos^2 2t-\sin^2 2t}{\sin^2 2t\cos^2 2t}+\frac{8}{3}=0,\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos 4t}{\sin^2 2t}+\frac{2}{3}=0,\quad \frac{\cos 4t}{1-\cos^2 4t}+\frac{2}{3}=0,\quad 2\cos^2 4t-3\cos 4t-2=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 4t$, найдем $\cos 4t=2, \varnothing$; $\cos 4t=-\frac{1}{2}$, откуда $4t=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\quad k\in Z,\quad t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Ответ: $t=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z.$

8.007. $\operatorname{tg}3t-\operatorname{tg}t-4\sin t=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 3t\neq 0,\\ \cos t\neq 0.\end{cases}$

Использовав формулу $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, перепишем уравнение в виде $\frac{\sin 2t}{\cos 3t\cos t}-4\sin t=0$, $\frac{2\sin t\cos t}{\cos 3t\cos t}-4\sin t=0,\Leftrightarrow 2\sin t\cdot\left(\frac{1-2\cos 3t}{\cos 3t}\right)=0$.

Отсюда $\sin t=0$, $t_1=\pi k,\ k\in Z$, или $1-2\cos 3t=0$, $\cos 3t=\frac{1}{2}$, $3t=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\quad n\in Z$.

Ответ: $t_1=\pi k;\ t_2=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\quad k,n\in Z.$

8.008. $\cos^{-1}3t-6\cos 3t=4\sin 3t.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 3t\neq 0.$

Из условия

$$1-6\cos^2 3t-4\cos 3t\sin 3t=0,\quad \cos^2 3t+\sin^2 3t-6\cos^2 3t-4\cos 3t\sin 3t=0,$$
$$5\cos^2 3t-\sin^2 3t+4\cos 3t\sin 3t=0.$$

Разделив уравнение на $-\cos^2 3t\neq 0$, имеем $\operatorname{tg}^2 3t-4\operatorname{tg}3t-5=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} 3t$, получим $(\operatorname{tg} 3t)_1 = -1$ или $(\operatorname{tg} 3t)_2 = 5$, откуда $3t_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $t_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{12}(4k-1)$, $k \in Z$; $3t_2 = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $t_2 = \frac{\operatorname{arctg} 5}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Ответ: $t_1 = \frac{\pi}{12}(4k-1);\ t_2 = \frac{\operatorname{arctg} 5}{3} + \frac{\pi n}{3}$, $k, n \in Z$.

8.009. $\operatorname{ctg} t - \sin t = 2\sin^2 \frac{t}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\sin t \neq 0$.

$\frac{\cos t}{\sin t} - \sin t = 1 - \cos t \Rightarrow \cos t - \sin^2 t = \sin t - \sin t \cos t$,

$(\cos t + \sin t \cos t) - (\sin^2 t + \sin t) = 0$, $\cos t(1 + \sin t) - \sin t(1 + \sin t) = 0$,

$(1 + \sin t)(\cos t - \sin t) = 0$.

Отсюда 1) $1 + \sin t = 0$ или 2) $\cos t - \sin t = 0$. Тогда:

1) $\sin t = -1$, $t_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $k \in Z$;

2) $\cos t = \sin t \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = 1$, $t_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n \in Z$.

Ответ: $t_1 = \frac{\pi}{2}(4k-1);\ t_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k, n \in Z$.

8.010. $8\cos z \cos(60^\circ - z)\cos(60^\circ + z) + 1 = 0$.

Решение.

Имеем

$4\cos z(\cos 2z + \cos 120^\circ) + 1 = 0$, $4\cos z \cos 2z - 2\cos z + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos z + 2\cos 3z - 2\cos z + 1 = 0$, $\cos 3z = -\frac{1}{2}$, $3z = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$,

$z = \pm\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: $z = \pm\frac{2}{9}\pi + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

8.011. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 3x \neq 0.$

Из условия

$$\cos 2x\operatorname{ctg}3x-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\cos 2x\cos 3x}{\sin 3x}-\sin 2x\right)-\sqrt{2}\cos 5x=0,$$

$$\frac{\cos 2x\cos 3x-\sin 2x\sin 3x}{\sin 3x}-\sqrt{2}\cos 5x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos 5x}{\sin 3x}-\sqrt{2}\cos 5x=0, \quad \frac{\cos 5x\left(1-\sqrt{2}\sin 3x\right)}{\sin 3x}=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 5x=0, \quad 5x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}=\frac{\pi}{10}(2k+1), \quad k\in Z$,

или

2) $1-\sqrt{2}\sin 3x=0, \quad \sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 3x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},$

$n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1);\ x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, \quad k,n\in Z.$

8.012. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right).$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$-\sin x+\sin 3x+\cos 3x+\cos 5x=\cos 5x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin 3x+\cos 3x=0, \ \sin 3x=-\cos 3x, \quad \operatorname{tg}3x=-1,$$

откуда $3x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}=\frac{\pi}{12}(4n-1), \quad n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(4n-1), \quad n\in Z.$

8.013. $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$.

Решение.

Имеем

$$2\sin x\cos x-\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=0,$$

$2\sin x\cos x-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0.$

Тогда:

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n=\frac{\pi}{2}(2n+1),\quad n\in Z$;

или

2) $2\sin x-1=0,\quad \sin x=\frac{1}{2},\quad x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2n+1);\ x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad n,k\in Z.$

8.014. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x$.

Решение.

Из условия

$(1+1-2\sin^2 2x)\sin 2x=1-\sin^2 2x,\quad 2\sin^3 2x-\sin^2 2x-2\sin 2x+1=0,$

$\sin^2 2x(2\sin 2x-1)-(2\sin 2x-1)=0,\quad (2\sin 2x-1)(\sin^2 2x-1)=0.$

Отсюда или

1) $2\sin 2x-1=0,\quad \sin 2x=\frac{1}{2},\quad 2x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x_1=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},$

$k\in Z,$

или

2) $\sin^2 2x-1=0,\quad \sin 2x=\pm1,\quad 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1),$

$n\in Z.$

Ответ: $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};\ x_2=\frac{\pi}{4}(2n+1),\quad k,n\in Z.$

8.015. $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\frac{1}{2}(1-\cos 4z)+\frac{1}{2}(1-\cos 6z)+\frac{1}{2}(1-\cos 8z)+\frac{1}{2}(1-\cos 10z)=2,$

$(\cos 4z+\cos 6z)+(\cos 8z+\cos 10z)=0,\Leftrightarrow 2\cos 5z\cos z+2\cos 9z\cos z=0,$

$$2\cos z(\cos 5z+\cos 9z)=0.$$

Тогда:

1) $\cos z=0, z_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k\in Z$,

или

2) $\cos 5z+\cos 9z=0,\ 2\cos 7z\cos 2z=0,\ \cos 7z=0,\ 7z=\frac{\pi}{2}+\pi n,$

$$z_2=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi}{14}(2n+1), \quad n\in Z;\ \cos 2z=0,\ 2z=\frac{\pi}{2}+\pi m,$$

$$z_3=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}=\frac{\pi}{4}(2m+1), \quad m\in Z;$$ z_1 входит в z_2.

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{14}(2n+1); z_2=\frac{\pi}{4}(2m+1), \quad n,m\in Z.$

8.016. $\operatorname{ctg}^4 2z+\sin^{-4} 2z=25.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 2z\neq 0.$

Из условия

$$\frac{\cos^4 2z}{\sin^4 2z}+\frac{1}{\sin^4 2z}-25=0\Leftrightarrow \cos^4 2z+1-25\sin^4 2z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\cos^2 2z)^2+1-25\sin^4 2z=0,\quad (1-\sin^2 2z)^2+1-25\sin^4 2z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\sin^4 2z+\sin^2 2z-1=0.$$

Решив уравнение как биквадратное относительно $\sin 2z$, получим $\sin 2z=\pm\frac{1}{2}$, откуда $2z=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $z=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1), \quad k\in Z$.

Ответ: $z=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1), \quad k\in Z.$

8.017. $\operatorname{tg} 2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 2x\neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{\sin 2x\cos 3x}{\cos 2x}+\sin 3x\right)+\sqrt{2}\sin 5x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x}{\cos 2x}+\sqrt{2}\sin 5x=0,$$

$$\frac{\sin 5x}{\cos 2x}+\sqrt{2}\sin 5x=0,\quad \frac{\sin 5x\left(1+\sqrt{2}\cos 2x\right)}{\cos 2x}=0.$$

Отсюда или

1) $\sin 5x=0,\quad 5x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{5},\quad k\in Z,$

или

2) $1+\sqrt{2}\cos 2x=0,\quad \cos 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 2x=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi n,$

$x_2=\pm\frac{3}{8}\pi+\pi n=\frac{\pi}{8}(8n\pm 3),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{5};\ x_2=\frac{\pi}{8}(8n\pm 3),\quad k,n\in Z.$

8.018. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2}x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Имеем

$$-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x},\quad \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos 2x}{\cos^2 x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin x\cos x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\left(2\cos^2 x-1\right)}{\cos^2 x},\Rightarrow \sin x(\cos x+\sin x)-2\sin^2 x=0,$$

$$\sin x(\cos x+\sin x-2\sin x)=0,\quad \sin x(\cos x-\sin x)=0.$$

Тогда:

1) $\sin x=0,\quad x_1=\pi k,\quad k\in Z,$

или

2) $\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=1,\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi k;\quad x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.019. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\cos x+\cos 2x-\cos 2x+\cos 4x-\cos x+\cos 5x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 5x=0, \Leftrightarrow 2\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}=0.$

Тогда или

1) $\cos\frac{9x}{2}=0, \quad \frac{9x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad x_1=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}=\frac{\pi}{9}(2k+1), \quad k\in Z$,

или

2) $\cos\frac{x}{2}=0, \quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad x_2=\pi+2\pi n=\pi(2n+1), \quad n\in Z$; x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi}{9}(2k+1), \quad k\in Z.$

8.020. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$

Решение.

Имеем

$1-\sin 3x=\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}, \quad \sin 3x-\sin x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x=0.$

Тогда или

1) $\sin x=0, \quad x_1=\pi n, \quad n\in Z$,

или

2) $\cos 2x=0, \quad 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k\in Z$.

Ответ: $x_1=\pi n; x_2=\frac{\pi}{4}(2k+1), \quad n,k\in Z.$

8.021. $2\operatorname{ctg}^2 x\cos^2 x+4\cos^2 x-\operatorname{ctg}^2 x-2=0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Из условия $2\cos^2 x(\operatorname{ctg}^2 x+2)-(\operatorname{ctg}^2 x+2)=0$, или $(\operatorname{ctg}^2 x+2)\times$

$\times(2\cos^2 x-1=0)$, $(\text{ctg}^2 x+2)\cos 2x=0$. Так как $\text{ctg}^2 x+2\neq 0$, то $\cos 2x=0$, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z$.

8.022. $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-\cos^3 x=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$2\sin^2 x(\sin x+\cos x)-\cos^2 x(\sin x+\cos x)=0, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\sin^2 x-\cos^2 x)=0.$

Тогда:

1) $\sin x+\cos x=0$,

или

2) $2\sin^2 x-\cos^2 x=0$.

Имеем:

1) $\text{tg}\, x=-1$

или

2) $\text{tg}^2 x=\frac{1}{2}$, откуда $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n= =\frac{\pi}{4}(4n-1)$, $n\in Z$;

$x_{2,3}=\pm\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $x_{2,3}=\pm\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$, $n,k\in Z$.

8.023. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)$.

Решение.

Из условия

$2\sin 8x\cos x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 8x\cos x=\sin 2x+\sin 4x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 8x\cos x-2\sin 3x\cos x=0, \Leftrightarrow \cos x(\sin 8x-\sin 3x)=0.$

Тогда:

1) $\cos x=0$

или

2) $\sin 8x-\sin 3x=0$,

откуда 1) $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in Z$, 2) $2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{11}{2}x=0$, $\sin\frac{5}{2}x=0$,

$\frac{5}{2}x=\pi n$, $x_2=\frac{2}{5}\pi n$, $n\in Z$; $\cos\frac{11}{2}x=0$, $\frac{11}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi l$, $x_3=\frac{\pi}{11}+\frac{2}{11}\pi l=$

$=\frac{\pi}{11}(2l+1)$, $l\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{2}{5}\pi n$; $x_3=\frac{\pi}{11}(2l+1)$, $k,n,l\in Z$.

8.024. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0,\\ \cos 3x\neq 0.\end{cases}$

Используя формулу $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0\Leftrightarrow\frac{\sin 3x(\cos 3x-\cos x\cos 2x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0,$$

откуда:

1) $\sin 3x=0$ или 2) $\cos 3x-\cos x\cos 2x=0$.

Тогда:

1) $3x=\pi n$, $x_1=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$;

2) $4\cos^3 x-3\cos x-\cos x(2\cos^2 x-1)=0$, $\cos x(\cos^2 x-1)=0$,

$\cos x\neq 0,\Rightarrow$ $\cos x=\pm 1$, $x_2=\pi k$, $k\in Z$; x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

8.025. $\sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=1$.

Решение.

Имеем:

$$2\sin\frac{15^\circ+x+45^\circ-x}{2}\cos\frac{15^\circ+x-45^\circ+x}{2}=1,\quad \cos(x-15^\circ)=1.$$

Тогда $x-15^\circ=360^\circ k$, $x=15^\circ+360^\circ k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=15^\circ+360^\circ k$, $k\in Z$.

8.026. $\cos^{-1}x+\operatorname{ctg}3x=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin 3x\neq 0,\\ \sin\frac{3x}{2}\neq 0.\end{cases}$

Из условия

$$\frac{1}{\cos x}+\left(\operatorname{ctg}3x-\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin\left(3x-\frac{3}{2}x\right)}{\sin 3x\sin\frac{3}{2}x}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\sin 3x\sin\frac{3}{2}x}=0,\quad\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\sin 3x}=0,\quad\frac{\sin 3x-\cos x}{\cos x\sin 3x}=0,$$

$$\sin 3x-\cos x=0,\Leftrightarrow\sin 3x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\sin\frac{3x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=0,$$

откуда: 1) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$; 2) $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Тогда:

1) $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+1),\quad k\in Z$;

2) $2x-\frac{\pi}{4}=\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1);\ x_2=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.027. $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\cos(x-3x)-\cos(x+3x))+\frac{1}{2}(\cos(4x-8x)-\cos(4x+8x))=0,$$

$$\cos 2x-\cos 12x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{2x+12x}{2}\sin\frac{12x-2x}{2}=0, \quad \sin 7x\sin 5x=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 7x=0, \quad 7x=\pi n, \quad x_1=\frac{\pi n}{7}, \quad n\in Z$;

2) $\sin 5x=0, \quad 5x=\pi k, \quad x_2=\frac{\pi k}{5}, \quad k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi n}{7}; x_2=\frac{\pi k}{5}, \quad n, k\in Z.$

8.028. $2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-3=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Из условия $2\operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x-1)+3(\operatorname{tg} x-1)=0, \quad (\operatorname{tg} x-1)(2\operatorname{tg}^2 x+3)=0$.

Отсюда $\operatorname{tg} x-1=0$, $\operatorname{tg} x=1$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1), \quad n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4n+1), \quad n\in Z.$

8.029. $\cos x\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}-5x\right).$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\cos(x-2x)+\cos(x+2x))=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}-4x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}+4x\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x-\frac{7\pi}{4}+5x\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}+4x+\frac{7\pi}{4}-5x\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x+\cos 3x=\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)-\sin(\pi-9x)+\sin\left(\frac{5}{2}\pi-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=\sin 5x-\sin 9x+\cos x,\quad \sin 9x-\sin 5x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2}=0,$$

откуда:

1) $\sin 2x=0,\quad 2x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z$;

2) $\cos 7x=0,\quad 7x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}=\frac{\pi}{14}(2n+1),\quad n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{2};\ x_2=\frac{\pi}{14}(2n+1),\quad k,n\in Z.$

8.030. $2+\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin\frac{x}{2}\neq 0,\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0.\end{cases}$$

По формулам половинного аргумента $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, поэтому

$$2+\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}=0\Rightarrow 2+\frac{1+\cos x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\cos x}=0,$$

$$4\cos^2 x+4\cos x+1=0,\quad (2\cos x+1)^2=0,$$

откуда $\cos x=-\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1),\quad k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{2\pi}{3}(3k\pm 1),\quad k\in Z.$

8.031. $\sin 2x+\sin(\pi-8x)=\sqrt{2}\cos 3x.$

Решение.

Из условия

$$\sin 2x+\sin 8x-\sqrt{2}\cos 3x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{2x+8x}{2}\cos\frac{2x-8x}{2}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$$

$$2\sin 5x\cos 3x-\sqrt{2}\cos 3x=0,\quad \cos 3x\left(2\sin 5x-\sqrt{2}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 3x=0,\quad 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{6}(2k+1),\quad k\in Z;$

2) $2\sin 5x-\sqrt{2}=0, \sin 5x=\frac{\sqrt{2}}{2}, 5x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,$

$x_2=(-1)^n\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1);\ x_2=(-1)^n\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5},\quad k,n\in Z.$

8.032. $0{,}5(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\cos\frac{5x+7x}{2}\cos\frac{5x-7x}{2}-\frac{1}{2}(1+\cos 4x)+\frac{1}{2}(1-\cos 6x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 6x\cos x-1-\cos 4x+1-\cos 6x=0,\quad 2\cos 6x\cos x-$$

$$-(\cos 4x+\cos 6x)=0 \Leftrightarrow 2\cos 6x\cos x-2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x-6x}{2}=0,$$

$$\cos 6x\cos x-\cos 5x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(\cos 6x-\cos 5x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos x=0,\quad x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z;$

2) $\cos 6x-\cos 5x=0,\quad -2\sin\frac{6x+5x}{2}\sin\frac{5x-6x}{2}=0.$

Тогда $\sin\frac{11}{2}x=0,\quad \frac{11}{2}x=\pi n,\quad x_2=\frac{2\pi n}{11},\quad n\in Z;\ \sin\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=\pi l,$

$x_3=2\pi l,\quad l\in Z;\ x_3$ входит в x_2.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1);\ x_2=\frac{2\pi n}{11},\quad k,n\in Z.$

8.033. $2(\cos 4x-\sin x\cos 3x)=\sin 4x+\sin 2x$.

Решение.

Имеем

$$2\cos 4x-2\sin x\cos 3x-\sin 4x-\sin 2x=0,\quad 2\cos 4x-\sin(x-3x)-$$
$$-\sin(x+3x)-\sin 4x-\sin 2x=0,\quad 2\cos 4x+\sin 2x-\sin 4x-\sin 4x-$$
$$-\sin 2x=0,\quad 2\cos 4x-2\sin 4x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}4x=1,$$

откуда $4x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{16}(4k+1),\quad k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{16}(4k+1),\quad k\in Z.$

8.034. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x$.

Решение.

Из условия

$$2(2\sin x\cos x)\cos 2x\cos 8x=\sin 12x\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x\cos 8x=\sin 12x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 4x\cos 8x-\sin 12x=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin(4x-8x)+\sin(4x+8x))-\sin 12x=0,$$
$$-\sin 4x+\sin 12x-2\sin 12x=0,\quad \sin 12x+\sin 4x=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{12x+4x}{2}\cos\frac{12x-4x}{2}=0,\quad \sin 8x\cos 4x=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 8x=0,\quad 8x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{8},\quad k\in Z$;

2) $\cos 4x=0,\quad 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi}{8}(2n+1),\quad n\in Z$; x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{8},\quad k\in Z.$

8.035. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

Решение.

Имеем

$$3(1-\cos^2 2x)+7\cos 2x-3=0\Leftrightarrow 3\cos^2 2x-7\cos 2x=0,$$
$$\cos 2x(3\cos 2x-7)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 2x = 0,\quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1),\quad k \in Z$;

2) $3\cos 2x - 7 = 0,\quad \cos 2x = \frac{7}{3} > 1 - \varnothing$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2k+1),\quad k \in Z.$

8.036. $\sin 2x \sin 6x - \cos 2x \cos 6x = \sqrt{2}\sin 3x \cos 8x.$

Решение.

Из условия

$$(\cos 2x \cos 6x - \sin 2x \sin 6x) + \sqrt{2}\sin 3x \cos 8x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \sqrt{2}\sin 3x \cos 8x = 0,\quad \cos 8x\left(1 + \sqrt{2}\sin 3x\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos 8x = 0,\quad 8x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\quad x_1 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8} = \frac{\pi}{16}(2n+1),\quad n \in Z$;

2) $1 + \sqrt{2}\sin 3x = 0,\quad \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 3x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k.$

$$x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3},\quad k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{16}(2n+1);\ x_2 = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3},\quad n, k \in Z.$

8.037. $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x.$

Решение.

Имеем

$$2\sin 3x \cos 3x - 2\sin 2x = 0, \Leftrightarrow \sin 6x - 2\sin 2x = 0,$$

$$\sin 3(2x) - 2\sin 2x = 0, \Leftrightarrow 3\sin 2x - 4\sin^3 2x - 2\sin 2x = 0,$$

$$4\sin^3 2x - \sin 2x = 0,\quad \sin 2x\left(4\sin^2 2x - 1\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $\sin 2x = 0,\quad 2x = \pi n,\quad x_1 = \frac{\pi n}{2},\quad n \in Z$;

2) $4\sin^2 2x - 1 = 0,\quad \sin^2 2x = \frac{1}{4},\quad \sin 2x = \pm\frac{1}{2},\quad 2x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$,

$$x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1),\quad k \in Z.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{2};\ x_{2,3} = \frac{\pi}{12}(6k \pm 1),\quad n, k \in Z.$

8.038. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0.$

Решение.

Из условия $1 - 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,\quad 2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sin x$, имеем $\sin x = -2, \varnothing$; или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z$.

Ответ: $\quad x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\quad k \in Z.$

8.039. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3.$

Решение.

Имеем

$$6\sin x\cos x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 3(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

$$5\sin^2 x - 6\sin x\cos x + \cos^2 x = 0, \Leftrightarrow 5\,\mathrm{tg}^2\, x - 6\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg}\, x$, найдем $(\mathrm{tg}\, x)_1 = \frac{1}{5}$ или $(\mathrm{tg}\, x)_2 = 1$, откуда $x_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} + \pi k = \mathrm{arcctg}\, 5 + \pi k,\; k \in Z$;

$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n+1),\; n \in Z$.

Ответ: $\quad x_1 = \mathrm{arcctg}\, 5 + \pi k;\; x_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1),\quad k, n \in Z.$

8.040. $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \mathrm{ctg}^2\, x + \frac{1 + \cos 2x}{\sin^2 x} = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}^2\, x + \frac{1 + 2\cos^2 x - 1}{\sin^2 x} = 0, \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}^2\, x + 2\,\mathrm{ctg}^2\, x = 0,$$

$$\mathrm{ctg}^2\, x + \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x} = 0,\quad \mathrm{ctg}^3\, x = -1,\quad \mathrm{ctg}\, x = -1.$$

Тогда $x=\frac{3}{4}\pi+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k+3)$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k+3)$, $k\in Z$.

8.041. $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$-2\sin\frac{9x+7x}{2}\sin\frac{9x-7x}{2}-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 8x\sin x+\sin 2x\sin x=0\Leftrightarrow \sin x(\sin 8x+\sin 2x)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin x=0$, $x_1=\pi n$, $n\in Z$;

2) $\sin 8x+\sin 2x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}=0$,

$\sin 5x\cos 3x=0$

Тогда или $\sin 5x=0$, $5x=\pi k$, $x_2=\frac{\pi k}{5}$, $k\in Z$, или $\cos 3x=0$, $3x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $x_3=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{3}=\frac{\pi}{6}(2m+1)$, $m\in Z$; x_1 входит в x_2.

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{5}$; $x_2=\frac{\pi}{6}(2m+1)$, $k,m\in Z$.

8.042. $2\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)=\cos t$.

Решение.

ОДЗ: $\cos\frac{t}{2}\neq 0$.

Имеем

$$2\cdot\left(\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}-1\right)-\left(\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\left(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}}-\left(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}\right)\times$$
$$\times\left(\cos\frac{t}{2}+\sin\frac{t}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2}{\cos\frac{t}{2}}+\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}\right)\left(2+\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}\right)}{\cos\frac{t}{2}}=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\frac{t}{2}-\cos\frac{t}{2}=0$; 2) $2+\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}=0.\varnothing$.

Из первого уравнения получим

$$\operatorname{tg}\frac{t}{2}=1,\ \frac{t}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ t=\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n+1),\ n\in Z.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{2}(4n+1),\ n\in Z$.

8.043. $\sin 3z-\cos 3z=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение.

Из условия

$$\sin 3z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos 3z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin 3z\cos 45^\circ-\cos 3z\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(3z-45^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $3z-45^\circ=60^\circ+360^\circ k$ или $3z-45^\circ=120^\circ+360^\circ k$. Отсюда $z_1=35^\circ+120^\circ k,\ z_2=55^\circ+120^\circ k,\ k\in Z$.

Ответ: $z_1=35^\circ+120^\circ k,\ z_2=55^\circ+120^\circ k,\ k\in Z$.

8.044. $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 5x-\cos 9x=0$.

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\sqrt{3}\sin 2x-2\sin\frac{5x+9x}{2}\sin\frac{5x-9x}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+2\sin 7x\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x(\sqrt{3}+2\sin 7x)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 2x=0,\ 2x=\pi n,\ x_1=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$;

2) $\sqrt{3}+2\sin 7x=0,\quad \sin 7x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 7x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3}+\pi k,$

$$x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7},\quad k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi n}{2};\ x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi k}{7},\quad n,k\in Z.$

8.045. $2\cos^2 x+5\sin x-4=0.$

Решение.

Имеем $2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4=0$ или $2\sin^2 x-5\sin x+2=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим $\sin x=2,\ \varnothing$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z$.

Ответ: $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z.$

8.046. $\sin\frac{z}{2}\cos\frac{3z}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 2z=\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{z}{2}.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{z}{2}-\frac{3z}{2}\right)+\sin\left(\frac{z}{2}+\frac{3z}{2}\right)\right)-\frac{\sin 2z}{\sqrt{3}}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{3z}{2}-\frac{z}{2}\right)+\sin\left(\frac{3z}{2}+\frac{z}{2}\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin z+\sin 2z-\frac{2\sin 2z}{\sqrt{3}}-\sin z-\sin 2z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin z+\sin 2z=0\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin z+2\sin z\cos z=0,$$

$$\sin z(\sqrt{3}+2\cos z)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin z=0,\quad z_1=\pi n,\quad n\in Z$;

2) $\sqrt{3}+2\cos z=0,\quad \cos z=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_2=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k,\quad k\in Z$.

Ответ: $z_1=\pi n;\ z_2=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi k,\quad n,k\in Z.$

8.047. $\sin^3 z\cos z-\sin z\cos^3 z=\frac{\sqrt{2}}{8}.$

Решение.

Из условия

$$-\sin z\cos z\left(\cos^2 z-\sin^2 z\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}\Leftrightarrow 2\sin z\cos z\left(\cos^2 z-\sin^2 z\right)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin 2z\cos 2z=-\frac{\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow 2\sin 2z\cos 2z=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin 4z=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $4z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4},\quad k\in Z$.

Ответ: $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4},\quad k\in Z.$

8.048. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-6x\right)$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x-\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x+\frac{\pi}{4}+2x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+6x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-6x\right)\right)\Leftrightarrow\sin 3x+$$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{2}+7x\right)-\cos 7x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0\Leftrightarrow\sin 3x+\cos 7x-\cos 7x+$$

$$+\sin 5x=0,\quad \sin 3x+\sin 5x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{5x+3x}{2}\cos\frac{5x-3x}{2}=0,$$

$$\sin 4x\cos x=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 4x=0,\quad 4x=\pi n,\quad x_1=\frac{\pi n}{4},\quad n\in Z$;

2) $\cos x=0,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z$; x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{4},\quad n\in Z.$

8.049. $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$4\cos^3 x - 3\cos x = -2\cos x, \Leftrightarrow 4\cos^3 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k \in Z$;

2) $4\cos^2 x - 1 = 0, \quad \cos x = \pm\frac{1}{2}, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1);\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad k, n \in Z.$

8.050. $5(1+\cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

Решение.

Из условия

$$5 + 5\cos x - 2 + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 0,$$
$$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos x$, получим $\cos x = -2, \varnothing$; или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in Z.$

8.051. $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$.

Решение.

Имеем

$$1 + \sin 2x = \cos^2 3x + 2\sin 3x\cos 3x + \sin^2 3x, \quad 1 + \sin 2x = 1 + \sin 6x,$$
$$\sin 6x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{6x+2x}{2}\sin\frac{6x-2x}{2} = 0, \quad \cos 4x\sin 2x = 0,$$

откуда:

1) $\cos 4x = 0, \quad 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{8}(2k+1), \quad k \in Z$;

2) $\sin 2x = 0, \quad 2x = \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8}(2k+1); x_2 = \frac{\pi n}{2}, \quad k, n \in Z.$

8.052. $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$3\sin x - 4\sin^3 x = 2\sin x, \quad 4\sin^3 x - \sin x = 0, \quad \sin x\left(4\sin^2 x - 1\right) = 0,$

откуда:

1) $\sin x = 0, \quad x_1 = \pi n, \quad n \in Z$;

2) $4\sin^2 x - 1 = 0, \quad \sin x = \pm\frac{1}{2}, \quad x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi n; x_{2,3} = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad n, k \in Z.$

8.053. $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$2\cos^2 2x - 1 + 1 - \cos 2x = 0, \quad 2\cos^2 2x - \cos 2x = 0,$

$\cos 2x(2\cos 2x - 1) = 0,$

откуда:

1) $\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k \in Z$;

2) $2\cos 2x - 1 = 0, \cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1); x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad k, n \in Z.$

8.054. $\sin x + \sin 7x - \cos 5x + \cos(3x - 2\pi) = 0.$

Решение.

Из условия

$(\sin x + \sin 7x) - (\cos 5x - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x+7x}{2}\cos\frac{x-7x}{2} +$

$$+2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}=0 \Leftrightarrow \sin 4x\cos x + \sin 4x\sin x = 0,$$

$$\sin 4x(\cos 3x+\sin x)=0,$$

откуда:

1) $\sin 4x=0,\quad 4x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{4},\quad k\in Z$;

2) $\cos 3x+\sin x=0,\quad 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Полученное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

а) $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$;

б) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi m,\quad x_3=\frac{\pi}{8}(4m+3),\quad m\in Z$.

Решения x_2 входят в x_1.

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{4},\ x_2=\frac{\pi}{8}(4n+3),\quad k,n\in Z.$

8.055. $\cos^4 2x+6\cos^2 2x=\frac{25}{16}$.

Решение.

Имеем $16\cos^4 2x+96\cos^2 2x-25=0$. Решив это уравнение как биквадратное относительно $\cos 2x$, получим $\cos 2x=\pm\frac{1}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, где $k\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z.$

8.056. $1+\cos t+\cos 2t+\cos 3t=0.$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$1+\cos t+2\cos^2 t-1+4\cos^3 t-3\cos t=0,$$

$$4\cos^3 t+2\cos^2 t-2\cos t=0 \Leftrightarrow 2\cos t(2\cos^2 t+\cos t-1)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos t = 0,\quad t_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1),\quad k \in Z$;

2) $2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0$.

Решив уравнение как квадратное относительно $\cos t$, получим

$(\cos t)_2 = -1,\ t_2 = \pi + 2\pi n,\ n \in Z;\ (\cos t)_3 = \frac{1}{2},\ t_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$.

Объединив решения t_2 и t_3, получим $t_2 = \frac{\pi}{3}(2n+1),\quad n \in Z$.

Ответ: $t_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ t_2 = \frac{\pi}{3}(2n+1),\quad k, n \in Z.$

8.057. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$.

Решение.

Из условия

$\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0.$

Тогда:

1) $\cos x - \sin x = 0$,

2) $\cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0$.

Из первого уравнения $\operatorname{tg} x = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. Из второго уравнения

$$\cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos x \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \sin\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

откуда $x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n,\quad x_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\quad n \in Z$. Объединив решения x_1 и x_2, получим $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad k \in Z.$

8.058. $1+\cos 7x=\left(\sin\frac{3x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)^2.$

Решение.

Имеем

$$1+\cos 7x=\sin^2\frac{3x}{2}-2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2},\quad 1+\cos 7x=1-\sin 3x,$$

$$\cos 7x+\sin 3x=0, \cos 7x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{7x+\frac{\pi}{2}-3x}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{7x-\frac{\pi}{2}+3x}{2}=0,\quad \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $2x=\frac{\pi}{4}+\pi n$,

$x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad n\in Z$;

2) $\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, $5x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $5x=\frac{3}{4}\pi+\pi k$,

$x_2=\frac{3}{20}\pi+\frac{\pi k}{5}=\frac{\pi}{20}(4k+3), k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{8}(4n+1), x_2=\frac{\pi}{20}(4k+3), n,k\in Z.$

8.059. $2\operatorname{tg}^4 3x-3\operatorname{tg}^2 3x+1=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 3x\neq 0$.

Решив это уравнение как биквадратное относительно $\operatorname{tg} 3x$, получим: 1) $\operatorname{tg} 3x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{1,2}=\frac{\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}}{3}+\frac{\pi k}{3}$, $k\in Z$; 2) $\operatorname{tg} 3x=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$.

Ответ: $x_{1,2}=\pm\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{3}; x_{3,4}=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3},\quad k,n\in Z.$

8.060. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(7x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

Из условия

$$(\sin 2x - \sin 3x) + (\sin 8x - \sin 7x) = 0, \Leftrightarrow 2\sin\frac{2x-3x}{2}\cos\frac{2x+3x}{2} +$$

$$+2\sin\frac{8x-7x}{2}\cos\frac{8x+7x}{2} = 0, \quad -\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{15x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{15x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{15x}{2}-\frac{5x}{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\sin 5x \sin\frac{5}{2}x = 0.$$

Тогда:

1) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = \pi n$, $x_1 = 2\pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin 5x = 0$, $5x = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$;

3) $\sin\frac{5}{2}x = 0$, $\frac{5}{2}x = \pi m$, $x_3 = \frac{2}{5}\pi m$, $m \in Z$; x_1 и x_3 входят в x_2.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$.

8.061. $4\operatorname{tg}^2 3x - \cos^{-2} 3x = 2$.

Решение.

ОДЗ: $\cos 3x \neq 0$.

Имеем

$$\frac{4\sin^2 3x}{\cos^2 3x} - \frac{1}{\cos^2 3x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4(1-\cos^2 3x)}{\cos^2 3x} - \frac{1}{\cos^2 3x} - 2 = 0,$$

$$4(1-\cos^2 3x) - 1 - 2\cos^2 3x = 0, \quad \cos^2 3x = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\cos 3x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $3x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

8.062. $\cos^3 x + \cos^2 x - 4\cos^2 \frac{x}{2} = 0.$

Решение.

Из условия

$$\cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cdot \frac{1}{2}(1+\cos x) = 0, \quad \cos^3 x + \cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x(\cos x + 1) - 2(\cos x + 1) = 0, \Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos^2 x - 2) = 0.$$

Тогда $\cos x + 1 = 0, \cos x = -1, x_1 = \pi + 2\pi n = \pi(2n+1), n \in Z$; $\cos^2 x - 2 \neq 0$.

Ответ: $x = \pi(2n+1), \quad n \in Z.$

8.063. $\sin 9x = 2\sin 3x.$

Решение.

Переписав уравнение в виде $\sin 3(3x) - 2\sin 3x = 0$ и воспользовавшись формулой $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, имеем

$$3\sin 3x - 4\sin^3 3x - 2\sin 3x = 0, \; 4\sin^3 3x - \sin 3x = 0,$$

$$\sin 3x(4\sin^2 3x - 1) = 0.$$

Тогда

1) $\sin 3x = 0$, $3x = \pi n$, $x_1 = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

2) $4\sin^2 3x - 1 = 0$, $\sin 3x = \pm\frac{1}{2}$, $3x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{3}; x_2 = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, \quad n, k \in Z.$

8.064. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sin z \neq 0, \\ \cos z \neq 0. \end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\cos z}\right) \cdot (\sin z + \cos z) + 2 = 0, \quad \frac{\sin z + \cos z}{\sin z \cos z} \cdot (\sin z + \cos z) + 2 = 0.$$

Отсюда

$$(\sin z + \cos z)^2 + 2\sin z\cos z = 0, \quad \sin^2 z + 2\sin z\cos z + \cos^2 z + 2\sin z\cos z =$$

$$= 0, 4\sin z\cos z = -1, \quad \sin 2z = -\frac{1}{2}.$$

Тогда $2z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Ответ: $z=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

8.065. $\sin 2z+\cos 2z=\sqrt{2}\sin 3z$.

Решение.

По формуле $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ получаем

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2z\right)=\sqrt{2}\sin 3z\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}-2z\right)-\sin 3z=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}-2z\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3z\right)=0,$$

$$-2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-2z+\frac{\pi}{2}-3z}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-2z-\frac{\pi}{2}+3z}{2}=0,$$

$$\sin\left(\frac{5z}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Тогда:

1) $\sin\left(\frac{5z}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=0$, $\frac{5z}{2}-\frac{3\pi}{8}=\pi n$, $\frac{5z}{2}=\frac{3\pi}{8}+\pi n$,

$$z_1=\frac{3}{20}\pi+\frac{2}{5}\pi n=\frac{\pi}{20}(8n+3),\ n\in Z;$$

2) $\sin\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=0$, $\frac{z}{2}-\frac{\pi}{8}=\pi k$, $\frac{z}{2}=\frac{\pi}{8}+\pi k$,

$$z_2=\frac{\pi}{4}+2\pi k=\frac{\pi}{4}(8k+1),\ k\in Z;$$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{20}(8n+3)$; $z_2=\frac{\pi}{4}(8k+1)$, $n,k\in Z$.

8.066. $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$.

Решение.

Перепишем это уравнение в виде

$$6\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+2(1-\cos^2 2x)-5=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+3\cos 2x=0,$$

$$\cos 2x(2\cos 2x+3)=0.$$

Тогда

$\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$;

$2\cos 2x + 3 \neq 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$.

8.067. $\sin 3x + \sin 5x = 2(\cos^2 2x - \sin^2 3x)$.

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$2\sin\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2} = 2\left(\frac{1}{2}(1+\cos 4x) - \frac{1}{2}(1-\cos 6x)\right) \Leftrightarrow$$

$$2\sin 4x\cos x = \cos 4x + \cos 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cos x - 2\cos\frac{4x+6x}{2}\cos\frac{4x-6x}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\cos x - \cos 5x\cos x = 0, \quad \cos x(\sin 4x - \cos 5x) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos x = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$;

2) $\sin 4x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{4x - \frac{\pi}{2} + 5x}{2}\cos\frac{4x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2} = 0$,

$$\sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Тогда или $\sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\frac{9x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi k$, $\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{9}\pi k = \frac{\pi}{18}(4k+1)$, $k \in Z$, или $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + \pi$, $x_3 = \frac{3}{2}\pi + 2\pi l$, $l \in Z$; x_3 входит в x_1.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $x_2 = \frac{\pi}{18}(4k+1)$, $n, k \in Z$.

8.068. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\operatorname{ctg}^2 x-\sin^{-2} x(1+\cos 2x)=0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0.$

Из условия

$$-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^2 x+\frac{1+2\cos^2 x-1}{\sin^2 x}=0,\quad -\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{ctg}^2 x=0,$$

$$\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{ctg} x=0,\quad \operatorname{ctg} x(\operatorname{ctg} x-1)=0.$$

Отсюда:

1) $\operatorname{ctg} x=0,\quad x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z;$

2) $\operatorname{ctg} x-1=0,\quad \operatorname{ctg} x=1,\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1);\ x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.069. $2\sin^3 x-\cos 2x-\sin x=0.$

Решение.

Имеем

$$2\sin^3 x-1+2\sin^2 x-\sin x=0,\quad 2\sin^3 x+2\sin^2 x-\sin x-1=0,$$

$$2\sin^2 x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0,\quad (\sin x+1)(2\sin^2 x-1)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin x+1=0,\quad \sin x=-1,\quad x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k-1),\quad k\in Z;$

2) $2\sin^2 x-1=0,\quad \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\quad x_2=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(4k-1);\ x_2=\frac{\pi}{4}(2n+1),\quad k,n\in Z.$

8.070. $3\sin 5z-2\cos 5z=3.$

Решение.

Из условия

$$3\sin 2\left(\frac{5}{2}z\right)-2\cos 2\left(\frac{5}{2}z\right)-3\left(\cos^2\frac{5}{2}z+\sin^2\frac{5}{2}z\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sin\frac{5}{2}z\cos\frac{5}{2}z-2\left(\cos^2\frac{5}{2}z-\sin^2\frac{5}{2}z\right)-3\left(\cos^2\frac{5}{2}z+\sin^2\frac{5}{2}z\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{5}{2}z-6\sin\frac{5}{2}z\cos\frac{5}{2}z+5\cos^2\frac{5}{2}z=0.$$

Разделив это уравнение на $\cos^2\frac{5}{2}z\neq 0$, получим

$$\operatorname{tg}^2\frac{5}{2}z-6\operatorname{tg}\frac{5}{2}z+5=0.$$

Решив уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{5}{2}z$, найдем

$$\operatorname{tg}\frac{5}{2}z=1,\ \frac{5}{2}z=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ z_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k,\ k\in Z,$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{5}{2}z=5,\ \frac{5}{2}z=\operatorname{arctg}5+\pi n,\ z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2}{5}\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $z_1=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi k;\ z_2=\frac{2}{5}\operatorname{arctg}5+\frac{2}{5}\pi n,\quad k,n\in Z.$

8.071. $4\sin 3z+\frac{1}{3}\cos 3z=3.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$24\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{3z}{2}+\cos^2\frac{3z}{2}-\sin^2\frac{3z}{2}-9\cos^2\frac{3z}{2}-9\sin^2\frac{3z}{2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\sin^2\frac{3z}{2}-24\sin\frac{3z}{2}\cos\frac{3z}{2}+8\cos^2\frac{3z}{2}=0.$$

Разделив это уравнение на $2\cos^2\frac{3z}{2}\neq 0$, получим

$$5\operatorname{tg}^2\frac{3z}{2}-12\operatorname{tg}\frac{3z}{2}+4=0;$$

решив уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}\frac{3z}{2}$, найдем $\operatorname{tg}\frac{3z}{2}=\frac{2}{5}$, $\frac{3z}{2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi n,\ z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z;\ \operatorname{tg}\frac{3z}{2}=2,\ \frac{3}{2}x=\operatorname{arctg}2+$ $+\pi k,\ z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{2}{3}\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $z_1=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\pi n;\ z_2=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}2+\frac{2}{3}\pi k,\quad k,n\in Z.$

8.072. $(\cos 6x-1)\operatorname{ctg} 3x=\sin 3x.$

Решение.

ОДЗ: $\sin 3x\neq 0.$

Имеем

$$\frac{(\cos 2(3x)-1)\cos 3x}{\sin 3x}-\sin 3x=0,\quad \left(2\cos^2 3x-2\right)\cos 3x-\sin^2 3x=0,$$

$$-2\left(1-\cos^2 3x\right)\cos 3x-\sin^2 3x=0,\quad 2\sin^2 3x\cos 3x+\sin^2 3x=0,$$

$$\sin^2 3x(2\cos 3x+1)=0.$$

Так как $\sin 3x\neq 0$, то $2\cos 3x+1=0$, $\cos 3x=-\frac{1}{2}$, $3x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k$,

$x=\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\pm\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k,\quad k\in Z.$

8.073. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=3.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\neq 0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\cos x\cos x=3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

$$\cos^2 x-3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-\frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+x-\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+\cos 2x-3(\cos 2x+0)=0,\quad \cos 2x=\frac{1}{2},$

$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.$

8.074. $1-\cos(\pi+x)-\sin\frac{3\pi+x}{2}=0.$

Решение.

Имеем

$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow 1+2\cos^2\frac{x}{2}-1+\cos\frac{x}{2}=0,$

$2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,\quad \cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0.$

Отсюда:

1) $\cos\frac{x}{2}=0,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\pi+2\pi k=\pi(2k+1),\quad k\in Z;$

2) $2\cos\frac{x}{2}+1=0,\quad \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2},\quad \frac{x}{2}=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n,\quad x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi n,$ $n\in Z$

Ответ: $x_1=\pi(2k+1);\ x_2=\pm\frac{4}{3}\pi+4\pi n,\quad k,n\in Z.$

8.075. $9^{\cos x}=9^{\sin x}\cdot 3^{\frac{2}{\cos x}}.$

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Решение.

Из условия

$3^{2\cos x}=3^{2\sin x}\cdot 3^{\frac{2}{\cos x}}\Leftrightarrow 3^{2\cos x}=3^{2\sin x+\frac{2}{\cos x}}\Leftrightarrow 2\cos x=2\sin x+\frac{2}{\cos x}.$

Отсюда

$\cos^2 x-\sin x\cos x-1=0,\ \sin x\cos x+1-\cos^2 x=0,$

$\sin x\cos x+\sin^2 x=0,\ \sin x(\cos x+\sin x)=0.$

Тогда:

1) $\sin x=0,\ x_1=\pi n,\ n\in Z;$

2) $\cos x+\sin x=0\ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg} x=1,\ x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi n;\ x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad n,k\in Z.$

8.076. $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0.$

Решение.

Имеем

$$(\sin x - \sin 2x) + (\sin x + \sin 8x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x-2x}{2}\cos\frac{x+2x}{2} +$$

$$+2\sin\frac{5x+8x}{2}\cos\frac{5x-8x}{2} = 0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{13x}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow -2\cos\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{13x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}\times$$

$$\times 2\sin\frac{\frac{x}{2}-\frac{13x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{x}{2}+\frac{13x}{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}\sin 3x\cos\frac{7x}{2} = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos\frac{3x}{2} = 0,\quad \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\quad x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k = \frac{\pi}{3}(2k+1),\quad k \in Z$;

2) $\sin 3x = 0,\quad 3x = \pi n,\quad x_2 = \frac{\pi n}{3},\quad n \in Z$;

3) $\cos\frac{7x}{2} = 0,\quad \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ x_3 = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi l}{7} = \frac{\pi}{7}(2l+1),\quad l \in Z$;

x_1 входит в x_2.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{3};\ x_2 = \frac{\pi}{7}(2l+1),\quad n, l \in Z.$

8.077. $2\sin z - \cos z = \frac{2}{5}.$

Решение.

Переходя к половинному аргументу, находим

$$20\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} - 5\left(\cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}\right) - 2\left(\cos^2\frac{z}{2} + \sin^2\frac{z}{2}\right) = 0,$$

$$3\sin^2\frac{z}{2} + 20\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} - 7\cos^2\frac{z}{2} = 0 \Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^2\frac{z}{2} + 20\,\mathrm{tg}\frac{z}{2} - 7 = 0;$$

решив это уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg}\frac{z}{2}$, найдем $\mathrm{tg}\frac{z}{2} = -7$,

$\frac{z}{2}=-\operatorname{arctg}7+\pi k$, $z_1=-2\operatorname{arctg}7+2\pi k$, $k\in Z$; $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+$ $+\pi l$, $z_2=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi l=2\operatorname{arcctg}3+2\pi l$, $l\in Z$.

Ответ: $z_1=-2\operatorname{arctg}7+2\pi k; z_2=2\operatorname{arcctg}3+2\pi l,\quad k,l\in Z.$

8.078. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x.$

Решение.

Из условия

$$(\sin 5x-\sin x)+2\cos 3x=0\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x+x}{2}\sin\frac{5x-x}{2}+2\cos 3x=0,$$

$$2\sin 2x\cos 3x+2\cos 3x=0,\quad 2\cos 3x(\sin 2x+1)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 3x=0,\quad 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{6}(2k+1),\quad k\in Z$;

2) $\sin 2x+1=0,\quad \sin 2x=-1,\quad 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi n=$ $=\frac{\pi}{4}(4n-1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{6}(2k+1); x_2=\frac{\pi}{4}(4n-1),\quad k,n\in Z.$

8.079. $(1+\sin x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\cos^{-1}x-\cos x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\neq 0.\end{cases}$

Имеем

$$\frac{(1+\sin x)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{\cos x}-\cos x,\quad \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}.$$

Отсюда $1-\sin^2 x=1-\cos^2 x$, $\sin^2 x=\cos^2 x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x=1$, откуда $\operatorname{tg} x=\pm 1$, т.е. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. Объединив x_1 и x_2, получим $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in Z$.

8.080. $\cos x-\sqrt{3}\sin x=\cos 3x$.

Решение.

Из условия

$$(\cos x-\cos 3x)-\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}-\sqrt{3}\sin x=0,$$

$$2\sin 2x\sin x-\sqrt{3}\sin x=0, \quad \sin x\left(2\sin 2x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin x=0$, $x_1=\pi n$, $n\in Z$;

2) $2\sin 2x-\sqrt{3}=0$, $2\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k$,

$$x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, \quad k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\pi n;\ x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $n,k\in Z$.

8.081. $6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2$.

Решение.

Имеем

$$6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x-2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0,$$

$$4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 4\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, получим $\operatorname{tg} x=-1$, $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$, $x_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ x_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $k,n\in Z$.

8.082. $\cos 7x+\sin 8x=\cos 3x-\sin 2x$.

Решение.

Имеем

$$(\cos 7x-\cos 3x)+(\sin 8x+\sin 2x)=0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{7x+3x}{2}\sin\frac{7x-3x}{2}+$$

$$+2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}=0,\ -2\sin 5x\sin 2x+2\sin 5x\cos 3x=0,$$

$$-2\sin 5x(\sin 2x-\cos 3x)=0.$$

Отсюда:

$$1)\sin 5x=0,\ 5x=\pi n,\ x_1=\frac{\pi n}{5},\ n\in Z;$$

$$2)\sin 2x-\cos 3x=0 \Leftrightarrow \sin 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{2x+\frac{\pi}{2}-3x}{2}\sin\frac{2x-\frac{\pi}{2}+3x}{2}=0,\ \ 2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Отсюда:

$$\text{а})\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=\frac{3}{2}\pi+2\pi k=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k-1),\ k\in Z;$$

$$\text{б})\ \sin\left(\frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\ \frac{5}{2}x-\frac{\pi}{4}=\pi l,\ x_3=\frac{\pi}{10}+\frac{2}{5}\pi l=\frac{\pi}{10}(4l+1),\ \ l\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi n}{5};\ x_2=\frac{\pi}{2}(4k-1);\ x_3=\frac{\pi}{10}(4l+1),\ n,k,l\in Z.$

8.083. $\sin^2 x-2\sin x\cos x=3\cos^2 x$.

Решение.

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x\neq 0$, имеем $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-3=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}x$, найдем

$$(\operatorname{tg}x)_1=-1,\ x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;(\operatorname{tg}x)_2=3;\ x_2=\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x_2=\operatorname{arctg}3+\pi n,\ k,n\in Z.$

8.084. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$.

Решение.

Из условия

$$2\cos\frac{5x+7x}{2}\cos\frac{5x-7x}{2} + \cos 6x = 0, \quad 2\cos 6x \cos x + \cos 6x = 0,$$

$$\cos 6x(2\cos x + 1) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos 6x = 0, \quad 6x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6} = \frac{\pi}{12}(2n+1), \quad n \in Z$;

2) $2\cos x + 1 = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{12}(2n+1); x_2 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad n, k \in Z.$

8.085. $4\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\cos(\pi + x) = 1.$

Решение.

По формулам приведения имеем

$$4\sin x \sin x - 4\sin x \cos x + 2\cos x \cos x - 1 = 0,$$

$$4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 2\cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0, \Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\,x + 1 = 0;$$

решив уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg}\,x$, найдем $(\mathrm{tg}\,x)_1 = \frac{1}{3}$,

$x_1 = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $(\mathrm{tg}\,x)_2 = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k; x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad k, n \in Z.$

8.086. $\cos 6x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.

Решение.

Представив уравнение в виде $\cos 3(2x) - 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$ и применив формулу $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, имеем

$$4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 2\cos 2x = 0, \quad 4\cos^3 2x - \cos 2x = 0,$$

$$\cos 2x(4\cos^2 2x - 1) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in Z$;

2) $4\cos^2 2x - 1 = 0$, $\cos 2x = \pm\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$,

$x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $k, n \in Z$.

8.087. $2\sin x \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 3\sin(\pi - x)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos x = 0.$

Решение.

По формулам приведения

$2\sin x \sin x - 3\sin x \cos x + \cos x \cos x = 0$,

$2\sin^2 x - 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$;

решив уравнение как квадратное относительно $\mathrm{tg}\, x$, найдем $(\mathrm{tg}\, x)_1 = \frac{1}{2}$,

$x_1 = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $(\mathrm{tg}\, x)_2 = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k, n \in Z$.

8.088. $(\sin 4t + \cos 4t)^2 = 16\sin 2t \cos^3 2t - 8\sin 2t \cos 2t.$

Решение.

Из условия

$\sin^2 4t + 2\sin 4t \cos 4t + \cos^2 4t = 8(2\sin 2t \cos 2t)\cos^2 2t - 4(2\sin 2t \cos 2t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 4t + 2\sin 4t \cos 4t + \cos^2 4t = 8\sin 4t \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos 4t) - 4\sin 4t$,

$\sin^2 4t + 2\sin 4t \cos 4t + \cos^2 4t = 4\sin 4t(1 + \cos 4t - 1)$, $\sin^2 4t + 2\sin 4t \cos 4t +$
$+ \cos^2 4t = 4\sin 4t \cos 4t$, $\sin^2 4t - 2\sin 4t \cos 4t + \cos^2 4t = 0$,

$(\sin 4t - \cos 4t)^2 = 0$, $\sin 4t - \cos 4t = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, 4t = 1$, $4t = \frac{\pi}{4} + \pi k$,

$t = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} = \frac{\pi}{16}(4k+1)$, $k \in Z$.

Ответ: $t = \frac{\pi}{16}(4k+1)$, $k \in Z$.

8.089. $\cos(2t-18^\circ)\operatorname{tg}50^\circ+\sin(2t-18^\circ)=\dfrac{1}{2\cos130^\circ}$.

Решение.

Имеем

$$\frac{\cos(2t-18^\circ)\sin50^\circ}{\cos50^\circ}+\sin(2t-18^\circ)=\frac{1}{2\cos(180^\circ-50^\circ)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos(2t-18^\circ)\sin50^\circ+\sin(2t-18^\circ)\cos50^\circ}{\cos50^\circ}=\frac{1}{-2\cos50^\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin(2t-18^\circ+50^\circ)=-\frac{1}{2},\quad \sin(2t+32^\circ)=-\frac{1}{2}.$$

Отсюда:

1) $2t+32^\circ=-30^\circ+360^\circ k,\quad k\in Z,\quad t_1=-31^\circ+180^\circ k$;

2) $2t+32^\circ=210^\circ+360^\circ k,\quad t_2=89^\circ+180^\circ k,\quad k\in Z$.

Ответ: $t_1=-31^\circ+180^\circ k;\ t_2=89^\circ+180^\circ k,\quad k\in Z.$

8.090. $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{3t}{2}+\cos^{-1}\dfrac{t}{2}\sin^{-1}\dfrac{3t}{2}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos\dfrac{t}{2}\neq0,\\ \sin\dfrac{3t}{2}\neq0.\end{cases}$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}}{\cos\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}}-1=0\Rightarrow\sin\frac{t}{2}\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2}\sin\frac{3t}{2}+1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{3t}{2}\right)+1=0,\quad -\sin t+1=0,\quad \sin t=1.$$

Отсюда $t=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k=\dfrac{\pi}{2}(4k+1),\quad k\in Z$.

Ответ: $t=\dfrac{\pi}{2}(4k+1),\quad k\in Z.$

8.091. $\frac{1}{\sqrt{3}-\operatorname{tg} t}-\frac{1}{\sqrt{3}+\operatorname{tg} t}=\sin 2t.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\operatorname{tg} t \neq \pm\sqrt{3}, \\ \cos t \neq 0.\end{cases}$

Имеем

$$\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg} t-\sqrt{3}+\operatorname{tg} t}{(\sqrt{3}-\operatorname{tg} t)(\sqrt{3}+\operatorname{tg} t)}=\sin 2t, \quad \frac{2\operatorname{tg} t}{3-\operatorname{tg}^2 t}-\sin 2t=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2\sin t}{\cos t}}{3-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}-\sin 2t=0 \Leftrightarrow \frac{2\sin t\cos^2 t}{\cos t(3\cos^2 t-\sin^2 t)}-\sin 2t=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\sin t\cos t-2\sin t\cos t(3\cos^2 t-\sin^2 t)=0, 2\sin t\cos t(1-3\cos^2 t+\sin^2 t)=0,$
$2\sin t\cos t(\sin^2 t+\cos^2 t-3\cos^2 t+\sin^2 t)=0, -2\sin t\cos t(\cos^2 t-\sin^2 t)=0,$
$\sin t\cos t\cos 2t=0.$

Отсюда:

1) $\sin t=0, \quad t_1=\pi n, \quad n\in Z$;

2) $\cos 2t=0, \quad 2t=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad t_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1), \quad k\in Z$; $\cos t\neq 0$.

Ответ: $t_1=\pi n; t_2=\frac{\pi}{4}(2k+1), \quad n,k\in Z.$

8.092. $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=\frac{1}{2}.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2\cos\frac{20^\circ+x+100^\circ-x}{2}\cos\frac{20^\circ+x-100^\circ+x}{2}=\frac{1}{2}, \quad 2\cos 60^\circ(x-40^\circ)=\frac{1}{2},$$

$\cos(x-40^\circ)=\frac{1}{2}.$

Отсюда

$x-40^\circ=\pm 60^\circ+360^\circ k$, $x_1=-20^\circ+360^\circ k$; $x_2=100^\circ+360^\circ k$, $k\in Z$.

Ответ: $x_1=-20^\circ+360^\circ k; x_2=100^\circ+360^\circ k, \quad k\in Z.$

8.093. $\cos t\sin\left(\frac{\pi}{2}+6t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t.$

Решение.

По формулам приведения

$$\cos t\cos 6t+\sin t\sin 6t=\cos 6t+\cos 4t\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos(6t-t)-2\cos\frac{6t+4t}{2}\cos\frac{6t-4t}{2}=0,\quad \cos 5t-2\cos 5t\cos t=0,$$

$$\cos 5t(1-2\cos t)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 5t=0,\quad 5t=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad t_1=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}=\frac{\pi}{10}(2k+1),\quad k\in Z;$

2) $1-2\cos t=0,\quad \cos t=\frac{1}{2},\quad t_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l,\quad l\in Z.$

Ответ: $t_1=\frac{\pi}{10}(2k+1);\ t_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l,\quad k,l\in Z.$

8.094. $\dfrac{1-\cos x}{\sin\frac{x}{2}}=2.$

Решение.

ОДЗ: $\sin\frac{x}{2}\neq 0.$

Из условия

$$\frac{1-\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}=2\Leftrightarrow\frac{1-1+2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2\Rightarrow\sin\frac{x}{2}=1,\quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,$$

$$x=\pi+4\pi k=\pi(4k+1),\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\pi(4k+1),\quad k\in Z.$

8.095. $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0.$

Решение.

Применив формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$, запишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{7x}{2}-\frac{3x}{2}\right)+\sin\left(\frac{7x}{2}+\frac{3x}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{5x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{5x}{2}\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}(\sin(2x-7x)+\sin(2x+7x))=0,$$
$$\sin 2x+\sin 5x-\sin 2x+\sin 3x-\sin 5x+\sin 9x=0,$$
$$\sin 9x+\sin 3x=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2}=0,\quad \sin 6x\cos 3x=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 6x=0,\quad 6x=\pi n,\quad x_1=\frac{\pi n}{6},\quad n\in Z$;

2) $\cos 3x=0,\quad 3x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\quad k\in Z$; x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{6},\quad n\in Z.$

8.096. $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x.$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$2\sin\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2}-\sin 4x=0,\quad 2\sin 4x\cos x-\sin 4x=0,$$
$$\sin 4x(2\cos x-1)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 4x=0,\quad 4x=\pi n,\quad x_1=\frac{\pi n}{4},\quad n\in Z$;

2) $2\cos x-1=0,\quad \cos x=\frac{1}{2},\quad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1),\quad k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi n}{4};\ x_2=\frac{\pi}{3}(6k\pm 1),\quad n,k\in Z.$

8.097. $\sin z-\sin^2 z=\cos^2 z-\cos z.$

Решение.

$\sin z+\cos z-\left(\sin^2 z+\cos^2 z\right)=0,\quad \sin z+\cos z-1=0,$

$\sin 2\left(\frac{z}{2}\right)+\cos 2\left(\frac{z}{2}\right)-\left(\sin^2\frac{z}{2}+\cos^2\frac{z}{2}\right)=0,\Leftrightarrow 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}+\cos^2\frac{z}{2}-$

$-\sin^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}-\cos^2\frac{z}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}-2\sin^2\frac{z}{2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{z}{2}\left(\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}\right)=0.$

Отсюда:

1) $\sin\frac{z}{2}=0,\quad \frac{z}{2}=\pi n,\quad z_1=2\pi n,\quad n\in Z$;

2) $\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{z}{2}=1,\quad \frac{z}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ z_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),$
$k\in Z.$

Ответ: $z_1=2\pi n;\ z_2=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ n,k\in Z.$

8.098. $\sin z+\sin 2z+\sin 3z=\cos z+\cos 2z+\cos 3z.$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$2\sin\frac{z+3z}{2}\cos\frac{z-3z}{2}+\sin 2z=2\cos\frac{z+3z}{2}\cos\frac{z-3z}{2}+\cos 2z\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 2z\cos z+\sin 2z=2\cos 2z\cos z+\cos 2z,\quad \sin 2z(2\cos z+1)-$

$-\cos 2z(2\cos z+1)=0,\ (2\cos z+1)(\sin 2z-\cos 2z)=0.$

Отсюда:

1) $2\cos z+1=0,\quad \cos z=-\frac{1}{2},\quad z_1=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k=\frac{2}{3}\pi(3k\pm 1),\quad k\in Z$;

2) $\sin 2z-\cos 2z=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}2z=1,\quad 2z=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ z_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{8}(4n+1),$

$n\in Z.$

Ответ: $z_1=\frac{2}{3}\pi(3k\pm 1);\quad z_2=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.099. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + 2 \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \right) = 4.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq \pm 1, \\ \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Из условия

$$\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\frac{4\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1} = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + \frac{4 \sin x \cos^2 x}{\cos x \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = 4, \quad \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{2\sin 2x \cos 2x} = 1, \quad \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = 1, \quad \operatorname{ctg} 4x = 1.$$

Отсюда $4x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{16}(4n+1), \quad n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{16}(4n+1), \quad n \in Z.$

8.100. $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 3x \neq 0, 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z.$

Имеем

$$1 - \cos 6x - \frac{\sin 6x}{1 + \cos 6x} = 0, \quad (1 - \cos 6x)(1 + \cos 6x) - \sin 6x = 0,$$

$$1 - \cos^2 6x - \sin 6x = 0, \quad \sin^2 6x - \sin 6x = 0, \quad \sin 6x(\sin 6x - 1) = 0.$$

Тогда:

1) $\sin 6x = 0, \quad 6x = \pi n, \quad x_1 = \frac{\pi n}{6}$, но с учетом ОДЗ $x_1 = \frac{\pi m}{3}$,
$m \neq 2n+1, \ m \in Z$;

2) $\sin 6x - 1 = 0, \ \sin 6x = 1, \ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{12}(4k+1),$
$k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi m}{3}; x_2 = \frac{\pi}{12}(4k+1), \quad m, k \in Z.$

8.101. $\sqrt{2}\cos x+\cos 2x+\cos 4x=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{2}\cos x+2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos x+$$

$$+2\cos 3x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(\sqrt{2}+2\cos 3x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos x=0,\ x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z;$

2) $\sqrt{2}+2\cos 3x=0,\ \cos 3x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 3x=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi n,$

$x_2=\pm\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi n=\frac{\pi}{12}(8n\pm 3),\ k,n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1);\ x_2=\frac{\pi}{12}(8n\pm 3),\ k,n\in Z.$

8.102. $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-0{,}5$.

Решение.

Имеем

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin 2x+0{,}5=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x-$$

$$-\sin 2x+\frac{1}{2}=0,\ \sin^2 2x+2\sin 2x-3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin 2x$, получим

$\sin 2x=-3, \varnothing$, или $\sin 2x=1,\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4n+1),\ n\in Z.$

8.103. $2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

Перепишем уравнение в виде

$$2\cos 2x+\frac{2(1-\cos 2x)}{1+\cos 2x}-5=0 \Rightarrow 2\cos 2x(1+\cos 2x)+2(1-\cos 2x)-$$

$$-5(1+\cos 2x)=0,\ 2\cos^2 2x-5\cos 2x-3=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, найдем

$\cos 2x = 3, \varnothing$, или $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$,

$x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in Z$.

8.104. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\cos(2x - 6x) - \cos(2x + 6x)) - \frac{1}{2}(\cos(x - 3x) + \cos(x + 3x)) = 0,$$

$$\cos 4x - \cos 8x - \cos 2x - \cos 4x = 0, \quad \cos 8x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\cos\frac{8x + 2x}{2}\cos\frac{8x - 2x}{2} = 0, \quad \cos 5x \cos 3x = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos 5x = 0$, $5x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} = \frac{\pi}{10}(2k + 1)$, $k \in Z$;

2) $\cos 3x = 0$, $3x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{6}(2n + 1)$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10}(2k + 1)$, $x_2 = \frac{\pi}{6}(2n + 1)$, $k, n \in Z$.

8.105. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x$.

Решение.

Имеем

$$(\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$1 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 4x + \sin 4x - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin 4x$, найдем

$\sin 4x = -2, \varnothing$, или $\sin 4x = 1$, $4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{8}(4n + 1)$, $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{8}(4n + 1)$, $n \in Z$.

8.106. $\cos(3x-30^\circ)-\sin(3x-30^\circ)\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{1}{2\cos 210^\circ}$.

Решение.

Из условия

$$\cos(3x-30^\circ)-\frac{\sin(3x-30^\circ)\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{1}{2\cos(180^\circ+30^\circ)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos(3x-30^\circ)\cos 30^\circ-\sin(3x-30^\circ)\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}-\frac{1}{2\cos(180^\circ+30^\circ)}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cos(3x-30^\circ+30^\circ)}{\cos 30^\circ}+\frac{1}{2\cos 30^\circ}=0\Leftrightarrow 2\cos 3x+1=0,$$

откуда $\cos 3x=-\dfrac{1}{2}$, $3x=\pm\dfrac{2}{3}\pi+2\pi k$, $x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2}{3}\pi k$, $k\in Z$.

8.107. $4\sin x+\cos x=4$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$4\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)-4\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)=0\Leftrightarrow 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+$$

$$+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}=0,\quad 5\sin^2\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+$$

$$+3\cos^2\frac{x}{2}=0,\Leftrightarrow 5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-8\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3=0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, найдем

$\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)_1=\dfrac{3}{5}$, $\left(\dfrac{x}{2}\right)_1=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}+\pi n$, $x_1=2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}+2\pi n$, $n\in Z$; $\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)_2=1$,

$\left(\dfrac{x}{2}\right)_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k=\dfrac{\pi}{2}(4k+1)$, $k\in Z$.

Ответ: $x_1=2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}+2\pi n$; $x_2=\dfrac{\pi}{2}(4k+1)$, $n,k\in Z$.

8.108. $2\sin^2 z+\operatorname{tg}^2 z=2.$

Решение.

ОДЗ: $\cos z\neq 0.$

Из условия

$$2\sin^2 z+\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}-2=0\Leftrightarrow 2\sin^2 z+\frac{\sin^2 z}{1-\sin^2 z}-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 z\left(1-\sin^2 z\right)+\sin^2 z-2\left(1-\sin^2 z\right)=0,\quad 2\sin^4 z-5\sin^2 z+2=0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно $\sin z$, получим $\sin z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z$.

Ответ: $z=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z.$

8.109. $\cos 2x+\cos 6x+2\sin^2 x=1.$

Решение.

Из условия

$$\cos 2x+\cos 6x-\left(1-2\sin^2 x\right)=0\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 6x-\cos 2x=0, \cos 6x=0.$$

Тогда $6x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}=\frac{\pi}{12}(2n+1),\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(2n+1),\ n\in Z.$

8.110. $\cos 3x\cos 6x=\cos 4x\cos 7x.$

Решение.

Имеем

$$\frac{1}{2}(\cos(3x-6x)+\cos(3x+6x))=\frac{1}{2}(\cos(4x-7x)+\cos(4x+7x)),$$

$$\cos 3x+\cos 9x-\cos 3x-\cos 11x=0,\quad \cos 9x-\cos 11x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{9x+11x}{2}\sin\frac{9x-11x}{2}=0,\quad \sin 10x\sin x=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 10x=0,\ \ 10x=\pi n,\ \ x_1=\frac{\pi n}{10},\ \ n\in Z$;

2) $\sin x=0,\ \ x_2=\pi k,\ \ k\in Z$; x_2 входит в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi n}{10},\ \ n\in Z.$

8.111. $\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x+\frac{1}{2}\cos 5x=0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\sin 3x+\cos 30^\circ \sin 5x+\sin 30^\circ \cos 5x=0,\quad \sin 3x+\sin\left(30^\circ+5x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x+30^\circ+5x}{2}\cos\frac{3x-30^\circ-5x}{2}=0,\ \sin\left(4x+15^\circ\right)\cos\left(x+15^\circ\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\left(4x+15^\circ\right)=0,\quad 4x+15^\circ=180^\circ k,\quad x_1=-\frac{15^\circ}{4}+45^\circ k,\quad k\in Z;$

2) $\cos\left(x+15^\circ\right)=0,\quad x+15^\circ=90^\circ+180^\circ n,\quad x_2=75^\circ+180^\circ n,\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=-3^\circ 45'+45^\circ k; x_2=75^\circ+180^\circ n,\quad k,n\in Z.$

8.112. $\operatorname{ctg}^3 x+\sin^{-2} x-3\operatorname{ctg} x-4=0.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x\neq 0.$

Из условия

$$\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}+\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{3\cos x}{\sin x}-4=0\Rightarrow \cos^3 x+\sin x-3\cos x\sin^2 x-4\sin^3 x=0,$$

$\cos^3 x+\sin x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-3\cos x\sin^2 x-4\sin^3 x=0,\quad \cos^3 x+$
$+\sin x\cos^2 x+\sin^3 x-3\cos x\sin^2 x-4\sin^3 x=0,\quad \left(\cos^3 x+\sin x\cos^2 x\right)-$
$-3\cos x\sin^2 x-3\sin^3 x=0,\quad \cos^2 x\left(\cos x+\sin x\right)-3\sin^2 x\left(\cos x+\sin x\right)=0,$
$\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2 x-3\sin^2 x\right)=0.$

Отсюда:

1) $\cos x+\sin x=0;$

2) $\cos^2 x-3\sin^2 x=0\ \Rightarrow\ \operatorname{ctg} x=-1,\ x_1=\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$

$\operatorname{ctg} x=\pm\sqrt{3},\ x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{3\pi}{4}+\pi n; x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, n,k\in Z.$

8.113. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}$.

Решение.

По формулам понижения степени получаем

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x)+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)+\frac{1}{2}(1+\cos 10x)=\frac{3}{2},\quad \cos 6x+\cos 8x+$$

$$+\cos 10x=0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{6x+10x}{2}\cos\frac{6x-10x}{2}+\cos 8x=0,$$

$$2\cos 8x\cos 2x+\cos 8x=0,\quad \cos 8x(2\cos 2x+1)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 8x=0,\quad 8x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}=\frac{\pi}{16}(2k+1),\quad k\in Z$;

2) $2\cos 2x+1=0,\ \cos 2x=-\frac{1}{2},\ 2x=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi k,\ x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1),$
$n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{16}(2k+1),\ x_2=\frac{\pi}{3}(3n\pm 1),\quad k,n\in Z.$

8.114. $1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=2\cos^2\frac{3}{2}x.$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$1+\sin x-\cos 5x-\sin 7x=1+\cos 3x \Leftrightarrow (\sin x-\sin 7x)-(\cos 5x+\cos 3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 3x\cos 4x-2\cos 4x\cos x=0,\quad -2\cos 4x(\sin 3x+\cos x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 4x=0,\quad 4x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1),\quad k\in Z$;

2) $\sin 3x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0,\quad 2\sin\frac{3x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\times$

$$\times\cos\frac{3x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=0,\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Имеем

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad x+\frac{\pi}{4}=\pi n,\quad x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n-1),\quad n\in Z,$$

или

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi l,\quad x_3=\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi l}{2},\quad l\in Z;$$

x_3 входит в x_1.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1),\ x_2=\frac{\pi}{4}(4n-1),\quad k,n\in Z.$

8.115. $\frac{\sin z}{1+\cos z}=2-\operatorname{ctg} z.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin z\neq 0,\\ \cos z\neq -1.\end{cases}$

Из условия

$$\frac{\sin z}{1+\cos z}-2+\frac{\cos z}{\sin z}=0\Rightarrow \sin^2 z-2\sin z(1+\cos z)+\cos z(1+\cos z)=0,$$
$$\sin^2 z-2\sin z-2\sin z\cos z+\cos z+\cos^2 z=0,\ (1-2\sin z)+$$
$$+(\cos z-2\sin z\cos z)=0,\quad (1-2\sin z)+\cos z(1-2\sin z)=0,$$
$$(1-2\sin z)(1+\cos z)=0.$$

Отсюда

$$1-2\sin z=0,\quad \sin z=\frac{1}{2},\quad z=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z;\ 1+\cos z\neq 0.$$

Ответ: $z=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z.$

8.116. $\sin(15^\circ+x)+\cos(45^\circ+x)+\frac{1}{2}=0.$

Решение.

Имеем

$$\sin(15^\circ+x)+\sin(90^\circ-45^\circ-x)+\frac{1}{2}=0,\quad \sin(15^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)+$$
$$+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow 2\sin\frac{15^\circ+x+45^\circ-x}{2}\cos\frac{15^\circ+x-45^\circ+x}{2}+\frac{1}{2}=0,$$
$$2\sin 30^\circ\cos(x-15^\circ)+\frac{1}{2}=0,\quad \cos(x-15^\circ)=-\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$x-15^\circ=\pm120^\circ+360^\circ k,\ x_1=-105^\circ+360^\circ k;\ x_2=135^\circ+360^\circ k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x_1=-105^\circ+360^\circ k; x_2=135^\circ+360^\circ k,\quad k\in Z.$

8.117. $1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-(\sin x+\cos x)=0,\quad (\sin x+\cos x)^2-$
$-(\sin x+\cos x)=0,\quad (\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0.$

Отсюда или $\sin x+\cos x=0$, или $\sin x+\cos x-1=0$. Из первого уравнения $\operatorname{tg}x=-1$, $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k\in Z$. Второе уравнение запишем в виде

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)=0,\quad 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-$$
$$-2\sin^2\frac{x}{2}=0,\quad 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда

$$\sin\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=\pi n,\quad x_2=2\pi n,\quad n\in Z,$$

или

$$\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi l, x_3=\frac{\pi}{2}+2\pi l=\frac{\pi}{2}(4l+1),\ l\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1); x_2=2\pi n; x_3=\frac{\pi}{2}(4l+1),\quad k,n,l\in Z.$

8.118. $3(1-\sin t)+\sin^4 t=1+\cos^4 t.$

Решение.

Из условия

$$3-3\sin t+\sin^4 t-1-(\cos^2 t)^2=0,\quad \sin^4 t-3\sin t+2-(1-\sin^2 t)^2=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 t-3\sin t+1=0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\sin t$, получим

$$(\sin t)_1=\frac{1}{2},\ t_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$(\sin t)_2=1,\ t_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n+1),\ n\in Z.$$

Ответ: $t_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k; t_2=\frac{\pi}{2}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.119. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-3\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2} x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Имеем

$$-\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg}^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}\Leftrightarrow\frac{1}{\operatorname{tg} x}+3\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\operatorname{tg} x}+3\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}^2 x=0,\quad \frac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{tg}^2 x=0\Rightarrow\operatorname{tg}^3 x+1=0,$$

$$\operatorname{tg} x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ k\in Z.$

8.120. $\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{3x}{2}-\sin^2 2x-\sin^2 4x=0.$

Решение.

По формулам понижения степени

$$\frac{1}{2}(1+\cos x)+\frac{1}{2}(1+\cos 3x)-\frac{1}{2}(1-\cos 4x)-\frac{1}{2}(1-\cos 8x)=0,$$

$$(\cos x+\cos 3x)+(\cos 4x+\cos 8x)=0\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x+2\cos 6x\cos 2x=0,$$

$$2\cos 2x(\cos x+\cos 6x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 2x=0,\quad 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\quad k\in Z$;

2) $\cos x+\cos 6x=0\Leftrightarrow 2\cos\frac{x+6x}{2}\cos\frac{x-6x}{2}=0,\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0\Rightarrow$

а) $\cos\frac{7x}{2}=0,\quad \frac{7x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{7}+\frac{2}{7}\pi n=\frac{\pi}{7}(2n+1),\quad n\in Z$;

б) $\cos\frac{5x}{2}=0,\quad \frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi l,\quad x_3=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi l=\frac{\pi}{5}(2l+1),\quad l\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1);\ x_2=\frac{\pi}{7}(2n+1);\ x_3=\frac{\pi}{5}(2l+1),\quad k,n,l\in Z.$

8.121. $\dfrac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\dfrac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos^2\dfrac{x}{2}\neq 0,\\ \sin^2\dfrac{x}{2}-4\cos^2\dfrac{x}{2}\neq 0.\end{cases}$

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x},\quad \frac{1-\cos^2 x-2}{1-\cos^2 x-2-2\cos x}-\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=0,$$

$$\frac{\cos^2 x+1}{\cos^2 x+2\cos x+1}-\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=0,\quad \frac{\cos^2 x+1}{(1+\cos x)^2}-\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos^2 x+1-(1-\cos x)(1+\cos x)=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x=0,\quad \cos x=0,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z.$

8.122. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$

Решение.

По формулам понижения степени

$$\frac{1}{2}(1+\cos 2x)+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)-\frac{1}{2}(1+\cos 6x)-\frac{1}{2}(1+\cos 8x)=0,$$

$$(\cos 2x+\cos 4x)-(\cos 6x+\cos 8x)=0\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x-2\cos 7x\cos x=0,$$

$$2\cos x(\cos 3x-\cos 7x)=0.$$

Отсюда или $\cos x=0$, или $\cos 3x-\cos 7x=0$. Из первого уравнения имеем $x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Второе уравнение эквивалентно следующему: $\sin 5x\sin 2x=0$, откуда или $\sin 5x=0$, $5x=\pi n$, $x_2=\dfrac{\pi n}{5}$, $n\in Z$, или $\sin 2x=0$, $2x=\pi l$, $x_3=\dfrac{\pi l}{2}$, $l\in Z$; x_1 входит в x_3.

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi n}{5}$; $x_2=\dfrac{\pi l}{2}$, $n,l\in Z.$

8.123. $\sin 3x - 4\sin x\cos 2x = 0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\sin 3x - 2(\sin(x-2x) + \sin(x+2x)) = 0,\quad \sin 3x + 2\sin x - 2\sin 3x = 0,$

$\sin 3x - 2\sin x = 0.$

Так как $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, то $3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x = 0,$ $4\sin^3 x - \sin x = 0,\quad \sin x(4\sin^2 x - 1) = 0.$

Отсюда:

1) $\sin x = 0,\quad x_1 = \pi n,\quad n \in Z$,

2) $4\sin^2 x - 1 = 0,\quad \sin x = \pm\frac{1}{2},\quad x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\quad k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi n;\ x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\quad n, k \in Z.$

8.124. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\cos^{-1} 4x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0, \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$

Из условия

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2}{\cos 4x} = 0,\quad \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} - \frac{2}{\cos 4x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{1 - 2\sin^2 2x} = 0 \Rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin 2x$, найдем $(\sin 2x)_1 = -1$, $2x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $(\sin 2x)_2 = \frac{1}{2}$, $2x_2 = (-1)^l\frac{\pi}{6} + \pi l$, $x_2 = (-1)^l\frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{2}$, $l \in Z$. Объединив решения x_1 и x_2, получим $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{12}(4k+1)$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12}(4k+1),\quad k \in Z.$

8.125. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)-\sin(\pi-5x)=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 3x)$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+3x-\pi+5x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}+3x+\pi-5x}{2}\sqrt{3}\left(\cos 5x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)-2\sqrt{3}\sin\frac{5x+\frac{\pi}{2}-3x}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{2}-3x-5x}{2}=0,$$

$$2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

$$2\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad 4x-\frac{\pi}{4}=\pi k,\quad 4x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad x_1=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{16}(4k+1),$
$k\in Z;$

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\cos\frac{3\pi}{4}\cos x+\sin\frac{3\pi}{4}\sin x+$
$+\sqrt{3}\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sqrt{3}\cos x\sin\frac{\pi}{4}=0,\quad -\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}+$
$+\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{6}=0\Leftrightarrow-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)+$
$+\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=0\Leftrightarrow-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}+x+\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{6}}{2}=0,\ \sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}=0,$$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0,\quad x_2=-\frac{\pi}{12}+\pi n=\frac{\pi}{12}(12n-1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{16}(4k+1),\ x_2=\frac{\pi}{12}(12n-1),\quad k,n\in Z.$

8.126. $\dfrac{1}{1+\cos^2 z}+\dfrac{1}{1+\sin^2 z}=\dfrac{16}{11}$.

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}(1+\cos 2z)}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}(1-\cos 2z)}-\frac{16}{11}=0, \frac{2}{3+\cos 2z}+\frac{2}{3-\cos 2z}-\frac{16}{11}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 2z=\frac{3}{4}, \cos 2z=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 2z=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,$$

$$z=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1), k\in Z.$$

Ответ: $z=\dfrac{\pi}{12}(6k\pm 1), \quad k\in Z.$

8.127. $\dfrac{\cos x}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}x+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x}=2\sqrt{3}.$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \cos\frac{x}{2}\neq 0, \\ \sin x\neq 0, \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}x\neq 0. \end{cases}$$

Из условия получаем

$$\frac{\cos x}{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}-\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos x}}{\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos x}{\sin x}}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin\frac{x}{2}\sin x+\cos\frac{x}{2}\cos x}{\cos\frac{x}{2}\cos x}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}\sin x}{\sin\frac{x}{2}\sin x+\cos\frac{x}{2}\cos x}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=2\sqrt{3},$$

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\sqrt{3},\ \operatorname{ctg} 2x=\sqrt{3},\ 2x=\frac{\pi}{6}+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{12}(6k+1),\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(6k+1),\ k\in Z.$

8.128. $\cos 4x\cos(\pi+2x)-\sin 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 4x.$

Решение.

По формулам приведения

$$-\cos 4x\cos 2x-\sin 2x\sin 4x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin 2x\cos 2x=0,\ \cos 4x\cos 2x+$$

$$+\sin 4x\sin 2x+\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x=0,$$

$$\cos 2x(1+\sqrt{2}\sin 2x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos 2x=0,\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1),\ n\in Z;$

2) $1+\sqrt{2}\sin 2x=0,\ \sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+\pi k,$

$$x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(2n+1);\ x_2=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ n,k\in Z.$

8.129. $\sin x-\sin 3x-\sin 5x+\sin 7x=0.$

Решение.

Имеем

$$(\sin x+\sin 7x)-(\sin 3x+\sin 5x)=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x+7x}{2}\cos\frac{x-7x}{2}-$$

$$-2\sin\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2}=0,\ 2\sin 4x\cos 3x-2\sin 4x\cos x=0,$$

$$2\sin 4x(\cos 3x-\cos x)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 4x=0,\quad 4x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{4},\quad k\in Z$;

2) $\cos 3x-\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}=0,\quad -\sin 2x\sin x=0,$

откуда

а) $\sin 2x=0,\quad 2x=\pi n,\quad x_2=\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$,

б) $\sin x=0,\quad x_3=\pi l,\quad l\in Z$; x_2 и x_3 входят в x_1.

Ответ: $x=\frac{\pi k}{4},\ k\in Z.$

8.130. $\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$2\sin\frac{3x-7x}{2}\cos\frac{3x+7x}{2}-\sqrt{3}\sin 2x=0,\ -2\sin 2x\cos 5x-\sqrt{3}\sin 2x=0,$$

$$-\sin 2x\left(2\cos 5x+\sqrt{3}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 2x=0,\quad 2x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z$;

2) $2\cos 5x+\sqrt{3}=0,\quad \cos 5x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 5x=\pm\frac{5}{6}\pi+2\pi n,\quad x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}\pi n,$

$n\in Z$

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{2};\ x_2=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{2}{5}\pi n,\quad k,n\in Z.$

8.131. $\sqrt{3}-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\neq 0.\end{cases}$

Из условия

$$\sqrt{3}=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\Leftrightarrow\sqrt{3}=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)}{\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)},$$

$$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\Rightarrow 2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1,$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}-x\right)=1,$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}=1,\quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad 2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;$$

$$2x_1=2\pi k,\quad x_1=\pi k,\quad k\in Z;\quad 2x_2=\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ x_2=\frac{\pi}{3}+\pi l=\frac{\pi}{3}(3l+1),\quad l\in Z.$$

Ответ: $x_1=\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{3}(3l+1),\ \ k,l\in Z.$

8.132. $\sin^2 x\cos^{-4}x-4\operatorname{tg}^2 x+3\cos^{-2}x-12=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0.$

Имеем

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}-\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3}{\cos^2 x}-12=0,\quad \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}-\frac{4-4\cos^2 x}{\cos^2 x}+$$

$$+\frac{3}{\cos^2 x}-12=0\Rightarrow 8\cos^4 x+2\cos^2 x-1=0.$$

Решив это уравнение как биквадратное относительно $\cos x$, получим $\cos x=\pm\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}(3k\pm 1),\ \ k\in Z.$

8.133. $\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x.$

Решение.

По формулам понижения степени

$$\frac{1}{2}(1-\cos 6x)+\frac{1}{2}(1-\cos 8x)=\frac{1}{2}(1-\cos 10x)+\frac{1}{2}(1-\cos 12x),$$

$$(\cos 6x+\cos 8x)-(\cos 10x+\cos 12x)=0\Leftrightarrow 2\cos\frac{6x+8x}{2}\cos\frac{6x-8x}{2}-$$

$$-2\cos\frac{10x+12x}{2}\cos\frac{10x-12x}{2}=0\Leftrightarrow 2\cos 7x\cos x-2\cos 11x\cos x=0,$$

$$2\cos x(\cos 7x-\cos 11x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos x=0, \quad x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k\in Z$;

2) $\cos 7x-\cos 11x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{7x+11x}{2}\sin\frac{11x-7x}{2}=0,$

$\sin 9x\sin 2x=0.$

Отсюда:

а) $\sin 9x=0, \quad 9x=\pi n, \quad x_2=\frac{\pi n}{9}, \quad n\in Z$;

б) $\sin 2x=0, \quad 2x=\pi l, \quad x_3=\frac{\pi l}{2}, \quad l\in Z$; x_1 входит в x_3.

Ответ: $x_1=\frac{\pi l}{2}; x_2=\frac{\pi n}{9}, \quad l, n\in Z.$

8.134. $\left(\sin 2t-\sin^{-1}2t\right)^2+\left(\cos^{-1}2t-\cos 2t\right)^2=1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\sin 2t\neq 0,\\ \cos 2t\neq 0.\end{cases}$

Имеем

$$\sin^2 2t-2+\frac{1}{\sin^2 2t}+\frac{1}{\cos^2 2t}-2+\cos^2 2t=1, \quad \frac{1}{\sin^2 2t}+\frac{1}{\cos^2 2t}=4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2t+\sin^2 2t=4\sin^2 2t\cos^2 2t, \quad \sin^2 4t=1, \quad \sin 4t=\pm 1,$$

откуда $4t=\frac{\pi}{2}+\pi k, \quad t=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1), \quad k\in Z$.

Ответ: $t=\frac{\pi}{8}(2k+1), \quad k\in Z.$

8.135. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25.$

Решение.

Из условия

$$\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2=\cos^2 2x+0{,}25\Leftrightarrow\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=$$

$$=\cos^2 2x+0{,}25\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=0\Leftrightarrow\cos 4x=0, \quad 4x=\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}=\frac{\pi}{8}(2k+1), \quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{8}(2k+1), \quad k\in Z.$

8.136. $\sin 2z - 4\cos 2z = 4.$

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде

$$2\sin z\cos z - 4(\cos^2 z - \sin^2 z) - 4(\cos^2 z + \sin^2 z) = 0,$$

$$2\sin z\cos z - 8\cos^2 z = 0, \quad 2\cos z(\sin z - 4\cos z) = 0.$$

Отсюда:

1) $\cos z = 0, \quad z_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k \in Z;$

2) $\sin z - 4\cos z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} z = 4, \quad z_2 = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, \quad n \in Z.$

Ответ: $z_1 = \frac{\pi}{2}(2k+1); z_2 = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, \quad k, n \in Z.$

8.137. $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Имеем

$$3 + 2\sin 2x - \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0 \Rightarrow 3\sin 2x + 2\sin^2 2x - 2 = 0,$$

$$2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 2 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin 2x$, найдем $\sin 2x = -2, \varnothing$, или $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$

8.138. $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + t\right) = \sin t + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - t\right)$

Решение.

По формулам понижения степени

$$\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2t\right)\right) = \sin t + \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right)\right), \quad 2\sin t + \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2t\right) -$$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2t\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin t + 2\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2t + \frac{\pi}{4} - 2t}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4} - 2t - \frac{\pi}{4} - 2t}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\sin t - 2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2t = 0,\ 2\sin t - 2\sqrt{2}\sin t\cos t = 0,$

$2\sin t(1-\sqrt{2}\cos t) = 0.$

Отсюда:

1) $\sin t = 0,\ t_1 = \pi n,\ n \in Z;$

2) $1-\sqrt{2}\cos t = 0,\ \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2},\ t_2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{4}(8k \pm 1),\ k \in Z.$

Ответ: $t_1 = \pi n;\ t_2 = \frac{\pi}{4}(8k \pm 1),\ n, k \in Z.$

8.139. $\sin^3\frac{x}{3} - \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} - 3\sin\frac{x}{3}\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos^3\frac{x}{3} = 0.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$\sin^2\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}\right) - 3\cos^2\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}\right) = 0,$

$\left(\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3}\right)\left(\sin^2\frac{x}{3} - 3\cos^2\frac{x}{3}\right) = 0.$

Отсюда: $\sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} = 0,\ \sin^2\frac{x}{3} - 3\cos^2\frac{x}{3} = 0.$

Тогда:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = 1,\ \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ x_1 = \frac{3}{4}\pi + 3\pi k = \frac{3\pi}{4}(4k+1),\ k \in Z;$

2) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{3} = 3,\ \operatorname{tg}\frac{x}{3} = \pm\sqrt{3},\ \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ x_2 = \pm\pi + 3\pi n = \pi(3n \pm 1),$

$n \in Z.$

Ответ: $x_1 = \frac{3\pi}{4}(4k+1);\ x_2 = \pi(3n \pm 1),\ k, n \in Z.$

8.140. $\operatorname{tg}(x-15^\circ)\operatorname{ctg}(x+15^\circ) = \frac{1}{3}.$

Решение.

Имеем

$$\frac{\sin(x-15^\circ)\cos(x+15^\circ)}{\cos(x-15^\circ)\sin(x+15^\circ)} - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-15^\circ-x-15^\circ)+\sin(x-15^\circ+x+15^\circ)}{\sin(x+15^\circ-x+15^\circ)+\sin(x+15^\circ+x-15^\circ)} -$$

$$-\frac{1}{3}=0,\quad \frac{-\sin 30^\circ+\sin 2x}{\sin 30^\circ+\sin 2x}-\frac{1}{3}=0,\quad \frac{-\frac{1}{2}+\sin 2x}{\frac{1}{2}+\sin 2x}-\frac{1}{3}=0\Rightarrow \sin 2x=1,$$

$$2x=90^\circ+360^\circ k,\quad x=45^\circ+180^\circ k=45^\circ(4k+1),\quad k\in Z.$$

Ответ: $x=45^\circ(4k+1),\quad k\in Z.$

8.141. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1).$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}(\sin(2x+2-x-1)+\sin(2x+2+x+1))-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin(4x+4-3x-3)+\sin(4x+4+3x+3))=0,\quad \sin(x+1)+\sin(x+3)-$$

$$-\sin(x+1)-\sin(7x+7)=0,\quad \sin(3x+3)-\sin(7x+7)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{3x+3+7x+7}{2}\sin\frac{3x+3-7x-7}{2}=0, \cos(5x+5)\sin(2x+2)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos(5x+5)=0,\quad 5x+5=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_1=-1+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}=\frac{\pi}{10}(2k+1)-1,$

$k\in Z;$

2) $\sin(2x+2)=0,\quad 2x+2=\pi n,\quad x_2=-1+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=-1+\frac{\pi}{10}(2k+1),\ x_2=-1+\frac{\pi n}{2},\quad k,n\in Z.$

8.142. $\cos(4x+2)+3\sin(2x+1)=2.$

Решение.

Из условия

$$\cos 2(2x+1)+3\sin(2x+1)-2=0\Leftrightarrow 1-2\sin^2(2x+1)+3\sin(2x+1)-2=0,$$

$$2\sin^2(2x+1)-3\sin(2x+1)+1=0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin(2x+1)$, найдем

$$(\sin(2x+1))_1=\frac{1}{2},\quad 2x_1+1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x_1=(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z;$$

$$(\sin(2x+1))_2=1,\ 2x_2+1=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x_2=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1)-\frac{1}{2},\ n\in Z.$$

Ответ: $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}+\frac{\pi k}{2};\ x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)-\frac{1}{2},\quad k,n\in Z.$

8.143. $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$.

Решение.

Имеем

$$\cos 2(2x) + 2\cos^2 x - 1 = 0, \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x = 0,$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Решив это уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, найдем $(\cos 2x)_1 = -1$, $2x_1 = \pi + 2\pi k$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $(\cos 2x)_2 = \frac{1}{2}$, $2x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. Объединив x_1 и x_2, получим $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in Z$.

8.144. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Решение.

Представим уравнение в виде

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - \frac{5}{8} = 0, \quad 8 - 4(4\sin^2 x\cos^2 x) - 5 = 0,$$

$$3 - 4\sin^2 2x = 0, \quad \sin^2 2x = \frac{3}{4}, \quad \sin 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), \quad k \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$, $k \in Z$.

8.145. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{2x-x}{2} - \sin 3x = 0, \quad 2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - \sin 2\left(\frac{3x}{2}\right) = 0,$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0, \quad 2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $\sin\frac{3x}{2}=0,\quad \frac{3x}{2}=\pi k,\quad x_1=\frac{2}{3}\pi k,\quad k\in Z$;

2) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{2}}{2}=0,$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0.$

Отсюда:

а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad x-\frac{\pi}{4}=\pi l,\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi l=\frac{\pi}{4}(4l+1),\quad l\in Z$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0,\quad -\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x_3=-\frac{1}{2}\pi+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n-1),$ $n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{2}{3}\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{4}(4l+1);\ x_3=\frac{\pi}{2}(4n-1),\quad k,l,n\in Z.$

8.146. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{tg}70^\circ=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}70^\circ$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

Из условия

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ}+\frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ}-\frac{\sin x\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\cos x\cos 50^\circ\cos 70^\circ}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\sin x\cos 50^\circ\cos 70^\circ-\sin x\sin 50^\circ\sin 70^\circ)+$$

$$+(\sin 50^\circ\cos x\cos 70^\circ+\sin 70^\circ\cos x\cos 50^\circ)=0,$$

$$\sin x(\cos 50^\circ\cos 70^\circ-\sin 50^\circ\sin 70^\circ)+$$

$$+\cos x(\sin 50^\circ\cos 70^\circ+\cos 50^\circ\sin 70^\circ)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sin x\cos(50^\circ+70^\circ)+\cos x\sin(50^\circ+70^\circ)=0,\quad \sin x\cos 120^\circ+$$

$$+\cos x\sin 120^\circ=0,\quad \sin(x+120^\circ)=0,\quad -\sin(x-60^\circ)=0.$$

Отсюда $x-60^\circ=180^\circ n$, $x=60^\circ+180^\circ n$, $n\in Z$.

Ответ: $x=60^\circ+180^\circ n,\quad n\in Z.$

8.147. $\cos x-\sin x=4\cos x\sin^2 x.$

Решение.

По формулам понижения степени

$$\cos x-\sin x=2\cos x(1-\cos 2x)\Leftrightarrow 2\cos x\cos 2x-(\cos x+\sin x)=0,$$
$$2\cos x(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)-(\cos x+\sin x)=0,$$
$$(\cos x+\sin x)(2\cos x(\cos x-\sin x)-1)=0,\quad (\cos x+\sin x)\times$$
$$\times(2\cos^2 x-2\sin x\cos x-1)=0\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(\cos 2x-\sin 2x)=0.$$

Тогда:

1) $\cos x+\sin x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1,\quad x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k=\frac{\pi}{4}(4k-1),\quad k\in Z;$

2) $\cos 2x-\sin 2x=0\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=1,\quad x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1),\ x_2=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.148. $\operatorname{tg} 2x\sin 2x-3\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2x\cos 2x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0.\end{cases}$

Имеем

$$\frac{\sin 2x\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{3\sqrt{3}\cos 2x\cos 2x}{\sin 2x}=0\Rightarrow \sin^3 2x-3\sqrt{3}\cos^3 2x=0,$$
$$\operatorname{tg}^3 2x=3\sqrt{3},\quad \operatorname{tg} 2x=\sqrt{3},\ 2x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{6}(3n+1),\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}(3n+1),\quad n\in Z.$

8.149. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x.$

Решение.

Из условия

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}-\sin 2x=0,\quad 2\sin 2x\sin x-\sin 2x=0,$$
$$\sin 2x(2\sin x-1)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin 2x = 0, \quad 2x = \pi k, \quad x_1 = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$;

2) $2\sin x - 1 = 0, \quad \sin x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi k}{2}; x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad k, n \in Z.$

8.150. $\sqrt{2}(1 + \cos x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\sin\frac{x}{2} \neq 0.$

По формуле $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ получаем

$$\sqrt{2}(1 + \cos x) - \frac{1 + \cos x}{\sin x} = 0, \quad (1 + \cos x)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $1 + \cos x = 0, \quad \cos x = -1, \quad x_1 = \pi + 2\pi n = \pi(2n + 1), \quad n \in Z$;

2) $\sqrt{2} - \frac{1}{\sin x} = 0, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi(2n + 1); x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad n, k \in Z.$

8.151. $\sin\frac{3x - 7\pi}{2}\cos\frac{\pi - 3x}{2} = \cos^{-1}\frac{3}{2}x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos\frac{3x}{2} \neq 0.$

Перепишем уравнение в виде

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right) - \frac{1}{\cos\frac{3x}{2}} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2} - \frac{1}{\cos\frac{3x}{2}} = 0,$$

$$\cos^2\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + \sin 3x - 1 = 0,$$

$$\sin 3x-(1-\cos 3x)=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}-2\sin^2\frac{3x}{2}=0,$$

$$2\sin\frac{3x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\frac{3x}{2}=0,\quad \frac{3x}{2}=\pi k,\quad x_1=\frac{2\pi k}{3},\quad k\in Z;$

2) $\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}=0,\quad \sin\frac{3x}{2}=\cos\frac{3x}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{3x}{2}=1,\quad \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n,$

$x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}=\frac{\pi}{6}(4n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{2\pi k}{3};\ x_2=\frac{\pi}{6}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.152. $\sin^2 3x=3\cos^2 3x.$

Решение.

Разделив это уравнение на $\cos^2 3x\neq 0$, получим

$\operatorname{tg}^2 3x=3,\ \operatorname{tg}3x=\pm\sqrt{3},\ 3x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}=\frac{\pi}{9}(3k\pm 1),\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{9}(3k\pm 1),\quad k\in Z.$

8.153. $\sin 3x+\sin x=4\sin^3 x.$

Решение.

По формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ получаем

$3\sin x-4\sin^3 x+\sin x-4\sin^3 x=0,\quad 8\sin^3 x-4\sin x=0,$

$4\sin x(2\sin^2 x-1)=0.$

Отсюда:

1) $\sin x=0,\quad x_1=\pi k,\quad k\in Z;$

2) $2\sin^2 x-1=0,\quad \sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{4}(2n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{4}(2n+1),\quad k,n\in Z.$

8.154. $\sin 6x + \sin 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$.

По формуле $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ получаем

$$2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} = 0,\quad 2\sin 4x\cos 2x - \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} = 0,$$

$$4\sin 2x\cos 2x\cos 2x - \frac{\sin 2x}{2\cos 2x} = 0 \Rightarrow 8\sin 2x\cos^3 2x - \sin 2x = 0,$$

$$\sin 2x\left(8\cos^3 2x - 1\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $\sin 2x = 0,\quad 2x = \pi n,\quad x_1 = \frac{\pi n}{2},\quad n \in Z$;

2) $8\cos^3 2x - 1 = 0, \cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),$ $k \in Z$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi n}{2};\ x_2 = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1),\quad n, k \in Z.$

8.155. $\dfrac{2\cos(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos(\pi - x)} = \dfrac{3}{2}.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x + \cos x \neq 0$.

По формулам приведения

$$\frac{-2\cos x + 5\sin x}{\sin x + \cos x} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 7\sin x - 7\cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1),\quad k \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(4k+1),\quad k \in Z.$

8.156. $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2=2-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)$.

Решение.
Имеем

$$4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2=2-2\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right),$$

$$2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x+\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)^2=1-\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-1+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)+\cos\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\frac{\pi}{3}-4x+\frac{2\pi}{3}-x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-4x-\frac{2\pi}{3}+x}{2}=0,$$

Отсюда:

1) $\sin\frac{5x}{2}=0,\ \frac{5x}{2}=\pi n,\ x_1=\frac{2}{5}\pi n,\ n\in Z;$

2) $\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0,\ \frac{3x}{2}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi k=\frac{2\pi}{9}(3k+1),$

$k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{2}{5}\pi n,\ x_2=\frac{2\pi}{9}(3k+1),\ n,k\in Z.$

8.157. $\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}2x+1=4\cos^2x+\frac{\sin 3x}{\sin x}-2\cos 2x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

По формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ запишем уравнение в виде

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+1=4\cos^2x+\frac{3\sin x-4\sin^3x}{\sin x}-2\cos 2x,$$

$$\frac{\cos 2x\cos x+\sin 2x\sin x}{\sin x\cos 2x}+1=4\cos^2 x+\frac{\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)}{\sin x}-2\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}+1=4\cos^2 x+3-4\sin^2 x-2\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}=4\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+2-2\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}=4\cos 2x+$$

$$+2-2\cos 2x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}-2(\cos 2x+1)=0,\quad \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}-$$

$$-2\left(2\cos^2 x-1+1\right)=0,\quad \frac{\cos x}{\sin x\cos 2x}-4\cos^2 x=0,$$

$$\cos x\cdot\left(\frac{1}{\sin x\cos 2x}-4\cos x\right)=0,$$

$$\frac{\cos x(1-4\sin x\cos x\cos 2x)}{\sin x\cos 2x}=0,\quad \cos x(1-\sin 4x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos x=0,\quad x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1),\quad k\in Z$;

2) $1-\sin 4x=0,\quad \sin 4x=1,\quad 4x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{8}(4n+1),$ $n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ x_2=\frac{\pi}{8}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.158. $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} x=1$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x\neq 0$.

По условию

$$\frac{\sin x\sin 20^\circ}{\cos x\cos 20^\circ}+\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ}+\frac{\sin 40^\circ\sin x}{\cos 40^\circ\cos x}-1=0,$$

$$\left(\sin x\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\sin x\cos 20^\circ\sin 40^\circ\right)+$$

$$+\left(\cos x\sin 20^\circ\sin 40^\circ-\cos x\cos 20^\circ\cos 40^\circ\right)=0,$$

$$\sin x\left(\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\sin 40^\circ\right)-$$

$$-\cos x\left(\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\sin 20^\circ\sin 40^\circ\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\sin\left(20^\circ+40^\circ\right)-\cos x\cos\left(20^\circ+40^\circ\right)=0,\quad \sin x\sin 60^\circ-$$

$$-\cos x\cos 60^\circ = 0,\quad -\cos\left(x+60^\circ\right)=0,\quad x+60^\circ = 90^\circ+180^\circ k,$$

$$x = 30^\circ + 180^\circ k,\quad k\in Z.$$

Ответ: $x = 30^\circ + 180^\circ k,\quad k\in Z.$

8.159. $2\cos^2\dfrac{x}{2}-1=\sin 3x.$

Решение.

Имеем

$$\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=0,$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\quad x-\dfrac{\pi}{4}=\pi k,\quad x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi k=\dfrac{\pi}{4}(4k+1),\quad k\in Z;$

2) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\quad 2x-\dfrac{\pi}{4}=\pi n,\quad x_2=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}=\dfrac{\pi}{8}(4n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\dfrac{\pi}{4}(4k+1),\ x_2=\dfrac{\pi}{8}(4n+1),\quad k,n\in Z.$

8.160. $\sin^2 2x+\sin^2 x=\dfrac{9}{16}.$

Решение.

По формулам понижения степени

$$1-\cos^2 2x+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)-\frac{9}{16}=0,\quad 16\cos^2 2x+8\cos 2x-15=0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, находим

$$\cos 2x=-\frac{5}{4},\ \varnothing,\ \text{или}\ \cos 2x=\frac{3}{4},\ 2x=\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{4}+\pi k,\quad k\in Z.$

8.161. $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$.

Решение.

Из условия $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Разделив это уравнение на $\cos^2 x \neq 0$, имеем $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$. Решая уравнение как квадратное относительно $\operatorname{tg} x$, находим $(\operatorname{tg} x)_1 = -3$, $x_1 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $k \in Z$; $(\operatorname{tg} x)_2 = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k, n \in Z$.

8.162. $2(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

Решение.

ОДЗ: $\cos x \neq 0$.

Из условия

$$2(1-\cos 2x) - \frac{\sqrt{3}(1-\cos 2x)}{\sin 2x} = 0,\ (1-\cos 2x)\cdot\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2x}\right) = 0.$$

Отсюда:

1) $1 - \cos 2x = 0$, $\cos 2x = 1$, $2x = 2\pi k$, $x_1 = \pi k$, $k \in Z$;

2) $2 - \frac{\sqrt{3}}{\sin 2x} = 0$, $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi k$, $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $k, n \in Z$.

8.163. $a\cos^2\frac{x}{2} - (a+2b)\sin^2\frac{x}{2} = a\cos x - b\sin x$; $b \neq 0$.

Решение.

По формулам понижения степени

$$\frac{a}{2}(1+\cos x) - \frac{a+2b}{2}\cdot(1-\cos x) - a\cos x + b\sin x = 0,\ a + a\cos x - a - 2b +$$

$$+(a+2b)\cos x - 2a\cos x + 2b\sin x = 0 \Leftrightarrow 2b\cos x + 2b\sin x - 2b = 0,$$

$$b(\cos x + \sin x - 1) = 0.$$

Так как $b \neq 0$, то получаем уравнение $\cos x + \sin x - 1 = 0$;

$$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=0,$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=\pi n,\quad x_1=2\pi n,\quad n\in Z$;

2) $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2}=1,\quad \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),$
$k\in Z$.

Ответ: $x_1=2\pi n;\ x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1),\quad n,k\in Z.$

8.164. $\sin 5x=\cos 4x$.

Решение.

По формулам приведения

$$\sin 5x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{5x-\frac{\pi}{2}+4x}{2}\cos\frac{5x+\frac{\pi}{2}-4x}{2}=0,$$

$$\sin\left(\frac{9x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\left(\frac{9x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad \frac{9x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pi n,\quad x_1=\frac{\pi}{18}+\frac{2}{9}\pi n=\frac{\pi}{18}(4n+1),\quad n\in Z$;

2) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{2}(4k+1),\quad k\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{18}(4n+1);\ x_2=\frac{\pi}{2}(4k+1),\quad n,k\in Z.$

8.165. $2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x=3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

Имеем

$$2\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=3,\quad \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=-\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{ctg}2x=-\frac{3}{4},\quad 2x=-\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\pi n,\quad x=-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z.$$

Ответ: $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$

8.166. $25\sin^2 x+100\cos x=89.$

Решение.

Из условия

$$25\left(1-\cos^2 x\right)+100\cos x-89=0,\ 25\cos^2 x-100\cos x+64=0.$$

Решив уравнение как квадратное относительно $\cos x$, получим $\cos x=\frac{16}{5}, \varnothing$, или $\cos x=\frac{4}{5}$, $x=\pm\arccos\frac{4}{5}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $x=\pm\arccos\frac{4}{5}+2\pi k,\ k\in Z.$

8.167. $\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде $1-2\sin^2 x+\sin^2 x+\sin x-0{,}25=0$, $4\sin^2 x-4\sin x-3=0$, Решив его как квадратное относительно $\sin x$, получим $\sin x=\frac{3}{2}, \varnothing$; $\sin x=-\frac{1}{2}$, $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

8.168. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}^2 2x}=1+\cos 4x.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0,\\ \operatorname{tg}2x\neq\pm 1.\end{cases}$

По формуле $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ имеем

$$\frac{1}{1-\frac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}=1+\cos 4x, \quad \frac{1+\cos 4x}{2\cos 4x}=1+\cos 4x.$$

Так как $1+\cos 4x \neq 0$, то

$$\frac{1}{2\cos 4x}=1, \quad \cos 4x=\frac{1}{2}, \quad 4x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,$$

$$x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1), \quad k\in Z.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm 1), \quad k\in Z.$

8.169. $\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x.$

Решение.

Из условия

$$2\sin\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}-4\cos^3 x=0, \quad 2\sin 2x\cos x-4\cos^3 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin x\cos x-2\cos^2 x\right)=0, \quad 4\cos^2 x(\sin x-\cos x)=0.$$

Отсюда:

1) $\cos x=0, \quad x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k=\frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k\in Z$;

2) $\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=1, \quad x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}(4n+1), \quad n\in Z$.

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1), x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1), \quad k, n\in Z.$

8.170. $\cos 2x+3\sin x=2.$

Решение.

Имеем $1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0$, $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$. Решив это уравнение как квадратное относительно $\sin x$, получим $(\sin x)_1=\frac{1}{2}$,

$x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; $(\sin x)_2=1$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n=\frac{\pi}{2}(4n+1)$, $n\in Z$.

Ответ: $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k; x_2=\frac{\pi}{2}(4n+1), \quad k, n\in Z.$

8.171. $\cos 2x = 1 - \sin 2x.$

Решение.

По формулам двойного аргумента получаем

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x, \quad 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0,$
$2\sin x(\sin x - \cos x) = 0.$

Отсюда:

1) $\sin x = 0, \quad x_1 = \pi n, \quad n \in Z$;

2) $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1, \quad x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{\pi}{4}(4k+1), \quad k \in Z$.

Ответ: $x_1 = \pi n; x_2 = \frac{\pi}{4}(4k+1), \quad n, k \in Z.$

8.172. $\operatorname{tg}(70^\circ + x) + \operatorname{tg}(20^\circ - x) = 2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \cos(70^\circ + x) \neq 0, \\ \cos(20^\circ - x) \neq 0. \end{cases}$

По формуле $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ представим уравнение в виде

$$\frac{\sin(70^\circ + x + 20^\circ - x)}{\cos(70^\circ + x)\cos(20^\circ - x)} = 2, \quad \frac{\sin 90^\circ}{\cos(70^\circ + x)\cos(20^\circ - x)} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cos(70^\circ + x)\cos(20^\circ - x) = 1 \Leftrightarrow \cos(70^\circ + x - 20^\circ + x) +$$
$$+ \cos(70^\circ + x + 20^\circ - x) = 1, \quad \cos(2x + 50^\circ) = 1, \quad 2x + 50^\circ = 360^\circ k,$$
$$x = -25^\circ + 180^\circ k, \quad k \in Z.$$

Ответ: $x = -25^\circ + 180^\circ k, \quad k \in Z.$

8.173. $\sin x + \sin\frac{1}{\pi} = \sin\left(x + \frac{1}{\pi}\right)$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\left(\sin x + \sin\frac{1}{\pi}\right) - \sin 2\cdot\left(\frac{x + \frac{1}{\pi}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x + \frac{1}{\pi}}{2}\cos\frac{x - \frac{1}{\pi}}{2} -$$

$$-2\sin\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}\cos\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}=0,\quad 2\sin\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}\cdot\left(\cos\frac{x-\frac{1}{\pi}}{2}-\cos\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}\cdot 2\sin\frac{\frac{x-\frac{1}{\pi}}{2}+\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}}{2}\sin\frac{\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}-\frac{x-\frac{1}{\pi}}{2}}{2}=0,$$

$$\sin\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{1}{2\pi}=0.$$

Отсюда:

1) $\sin\frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}=0,\quad \frac{x+\frac{1}{\pi}}{2}=\pi k,\quad x_1=-\frac{1}{\pi}+2\pi k,\quad k\in Z$;

2) $\sin\frac{x}{2}=0,\quad \frac{x}{2}=\pi n,\quad x_2=2\pi n,\quad n\in Z$.

Ответ: $x_1=-\frac{1}{\pi}+2\pi k;\ x_2=2\pi n,\quad k,n\in Z.$

8.174. $\operatorname{tg}^2 3x-2\sin^2 3x=0.$

Решение.

ОДЗ: $\cos 3x\neq 0$.

Имеем $\frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x}-2\sin^2 3x=0,\quad \sin^2 3x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 3x}-2\right)=0$.

Отсюда:

1) $\sin 3x=0,\quad 3x=\pi k,\quad x_1=\frac{\pi k}{3},\quad k\in Z$;

2) $\frac{1}{\cos^2 3x}-2=0,\quad \cos 3x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\quad x_2=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}=$

$=\frac{\pi}{12}(2n+1),\quad n\in Z.$

Ответ: $x_1=\frac{\pi k}{3};\ x_2=\frac{\pi}{12}(2n+1),\quad k,n\in Z.$

8.175. $6\operatorname{ctg}^2 x - 2\cos^2 x = 3.$

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0.$

Из условия

$$\frac{6\cos^2 x}{\sin^2 x} - 2\cos^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{6(1+\cos 2x)}{1-\cos 2x} - (1+\cos 2x) - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(1+\cos 2x) - (1+\cos 2x)(1-\cos 2x) - 3(1-\cos 2x) = 0,$$

$$\cos^2 2x + 9\cos 2x + 2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $\cos 2x$, имеем

$\cos 2x = \dfrac{-9-\sqrt{73}}{2} < -1, \varnothing$, или $\cos 2x = \dfrac{-9+\sqrt{73}}{2}$, откуда

$$2x = \pm\arccos\frac{-9+\sqrt{73}}{4} + 2\pi k, \quad x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{-9+\sqrt{73}}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{73}-9}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$

Решения к главе 9

НЕРАВЕНСТВА

НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Неравенства $f_1(x) > f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — заданные функции переменной x (одна из них может быть постоянной), называются *неравенствами с одним неизвестным*.

Переменная величина x называется неизвестной. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — алгебраические выражения, то неравенство называется алгебраическим.

Решением неравенства с одним неизвестным называется такое значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в тождественное (истинное).

Решить неравенство с одним неизвестным — значит найти множество (совокупность) всех его решений или показать, что оно не имеет решений.

Областью допустимых значений неизвестного данного неравенства (ОДЗ) или областью определения неравенства называют множество всех значений неизвестного, при которых существуют обе части неравенства.

Равносильные неравенства и основные теоремы о равносильности неравенств

Так как рассматриваемые ниже понятия и свойства неравенств одинаковы для неравенств $f_1(x) > f_2(x)$, $f_1(x) \geq f_2(x)$, $f_1(x) < f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, то будем рассматривать только неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Пусть даны два неравенства с одним неизвестным

$$f_1(x) > f_2(x), \tag{9.1}$$

$$g_1(x) > g_2(x).$$

Неравенство (9.2) называется следствием неравенства (9.1), если все решения неравенства (9.1) есть решения неравенства (9.2) или неравенство (9.1) не имеет решений.

Два неравенства (с одним неизвестным) называются равносильными (эквивалентными), если каждое из них является следствием другого.

Если над обеими частями неравенства с одним неизвестным произвести тождественные преобразования, не меняющие области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения D и в результате тождественных преобразований получилось неравенство $f_3(x) > f_4(x)$ с той же областью определения, то они равносильны.

Если к каждой части данного неравенства прибавить одно и то же число или выражение, имеющее смысл при всех значениях неизвестного из области определения неравенства, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ с областью определения D и $m(x)$ — число или выражение, имеющее смысл при всех значениях x из D, то неравенство $f_1(x) + m(x) >$ $> f_2(x) + m(x)$ равносильно данному.

Члены неравенства можно переносить с противоположным знаком из одной части неравенства в другую.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число или выражение, принимающее положительные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то полученное неравенство того же смысла будет равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число или выражение, принимающее отрицательные значения при всех значениях неизвестного из области допустимых, то получим равносильное данному неравенство противоположного смысла, т.е. если дано неравенство $f_1(x) > f_2(x)$ и число или выражение $m(x) < 0$ при всех x из ОДЗ неравенства, то неравенство $f_1(x) \cdot m(x) < f_2(x) \cdot m(x)$ будет равносильно данному.

Неравенство $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} > 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) > 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

Неравенство $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < 0$ равносильно неравенству $f_1(x) \cdot f_2(x) < 0$ при $f_2(x) \neq 0$.

РЕШЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Решение неравенства первой степени с одним неизвестным

Неравенства вида

$$f_1(x) > f_2(x),\ f_1(x) \geq f_2(x),$$
$$f_1(x) < f_2(x),\ f_1(x) \leq f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — линейные функции переменной x (одна из которых может быть постоянной), называются неравенствами первой степени с одним неизвестным.

Всякое линейное неравенство с одним неизвестным всегда можно привести к каноническому виду

$$ax + b > 0. \qquad (9.3)$$

Решение неравенства $ax + b > 0$

Если $a > 0$, то после умножения обеих частей неравенства на $\frac{1}{a} > 0$ получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} > 0$, из которого последует $x > -\frac{b}{a}$.

Если $a < 0$, то после умножения обеих частей данного неравенства на $\frac{1}{a} < 0$ получим равносильное данному неравенство $x + \frac{b}{a} < 0$, из которого следует $x < -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то при $b \leq 0$ для любого действительного значения x неравенство обращается в неверное, т.е. решений не имеет, а при $b > 0$ данное неравенство верно при всех действительных значениях x, т.е. все действительные числа являются решениями неравенства.

Решение неравенств второй степени (квадратных) с одним неизвестным

Неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного не выше второй степени, причем хотя бы один из них второй степени, называется неравенством второй степени с одним неизвестным.

Всякое неравенство второй степени с одним неизвестным (квадратное неравенство) можно привести к одному из его канонических видов:

$$\begin{aligned} &ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c\geq 0,\\ &ax^2+bx+c<0, \quad ax^2+bx+c\leq 0, \end{aligned} \tag{9.4}$$

где $x \neq 0$.

Решение неравенства $ax^2+bx+c>0$ $(a \neq 0)$

Если $a>0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}>0$$

или

$$x^2+px+q>0, \tag{9.5}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Если $a<0$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$$

или

$$x^2+px+q<0, \tag{9.6}$$

где $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Другие неравенства вида (9.4) также приводятся к виду, аналогичному (9.5) или (9.6).

Исследование трехчлена $x^2+px+q=0$

Рассмотрим трехчлен

$$x^2+px+q. \tag{9.7}$$

1. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно разложить на множители с действительными коэффициентами

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ и $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ — корни трехчлена $(x_1 < x_2)$.

Если $x < x_1 < x_2$, то $x - x_1 < 0$ и $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Если $x_1 < x < x_2$, то $x - x_1 > 0$, а $x - x_2 < 0$; тогда $x^2 + px + q < 0$.

Если $x > x_2 > x_1$, то $x - x_1 > 0$ и $x - x_2 > 0$; тогда $x^2 + px + q > 0$.

Вывод. Если $D = p^2 - 4q > 0$, то квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при значениях x, меньших меньшего корня и больших большего корня, и отрицателен при значениях x, лежащих между корнями.

2. Если $D = p^2 - 4q = 0$ $\left(q = \frac{p^2}{4}\right)$, то трехчлен $x^2 + px + q$ принимает вид

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

и при всех $x \neq -\frac{p}{2}$ будет положительным, а при $x = -\frac{p}{2}$ равен нулю.

3. Если $D = p^2 - 4q < 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ можно представить в виде

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}.$$

Так как $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geq 0$ при всех x, а $4q - p^2 > 0$, то трехчлен $x^2 + px + q$ положителен при всех значениях x.

Решение целых рациональных неравенств с одним неизвестным

Целым рациональным алгебраическим неравенством с одним неизвестным называется такое неравенство, обе части которого есть многочлены относительно неизвестного.

Степенью целого рационального алгебраического неравенства с одним неизвестным называется большая из степеней многочленов, входящих в это неравенство.

Всякое целое рациональное алгебраическое неравенство n-й степени с одним неизвестным может быть приведено к одному из канонических видов

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n > 0, \qquad (9.8)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \geq 0 \qquad (9.9)$$

или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n < 0, \qquad (9.10)$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n \leq 0 \qquad (9.11)$$

$$(a_0 \neq 0).$$

Метод интервалов

Чтобы найти решения неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0 \qquad (9.12)$$

или

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0 , \qquad (9.13)$$

достаточно нанести на числовую ось нули (корни) левой части неравенства $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, а затем проверить знак левой части неравенства на каждом из полученных интервалов путем подстановки любого числа из этого интервала. Тогда множеством всех решений неравенства (9.12)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) > 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак плюс, а решением неравенства (9.13)

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) < 0$$

будет объединение всех промежутков, в которых поставлен знак минус.

При решении неравенств

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\geq 0$$

и

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)\leq 0$$

с помощью метода интервалов, кроме соответствующих интервалов знакопостоянства левых частей неравенств, к их решениям надо относить и их нули (корни).

Обобщенный метод интервалов

Рассмотрим схему решения неравенства (9.8)

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n>0 \quad (a\neq 0).$$

Многочлен $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n$ в множестве действительных чисел можно представить в виде

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n=$$

$$=a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — действительные корни соответственно кратности $m_1, m_2, \ldots, m_k$, а трехчлены $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_ix+q_i$ имеют отрицательные дискриминанты, т.е. при всех x положительны.

Неравенство (9.8) можно переписать в виде

$$a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots$$
$$\ldots\left(x^2+p_ix+q_i\right)^{l_i}>0.$$

Так как квадратные трехчлены в этом неравенстве принимают положительные значения при всех действительных значениях неизвестного, то оно равносильно неравенству

$$a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_k)^{m_k}>0.$$

Множители левой части неравенства с нечетными показателями можно оставить в первой степени, а с четными – опустить, выписав те значения x, при которых они обращаются в нуль. Тогда неравенство примет вид

$$a_0(x-x_{j_1})(x-x_{j_2})\ldots(x-x_{j_s})>0,$$

при $a_0>0$ оно равносильно неравенству

$$(x-x_{j_1})(x-x_{j_2})\ldots(x-x_{j_s})>0,$$

а при $a_0 < 0$ — неравенству

$$(x - x_{j_1})(x - x_{j_2})\ldots(x - x_{j_s}) < 0 .$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

Дробно-рациональные неравенства

Неравенства вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0; \qquad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0 \tag{9.14}$$

или

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0; \qquad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0 , \tag{9.15}$$

где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$ и $Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-2} x^2 + b_{m-1} x + b_m \quad (b_0 \neq 0)$ — многочлены переменной x, называются дробно-рациональными неравенствами.

При решении таких неравенств пользуются следующими утверждениями:

1. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ равносильно неравенству

$$P_n(x) Q_m(x) > 0.$$

2. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x) Q_m(x) \geq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

3. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$ равносильно неравенству

$$P_n(x) Q_m(x) < 0.$$

4. Неравенство $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \leq 0$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} P_n(x) Q_m(x) \leq 0, \\ Q_m(x) \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, решение дробно-рациональных неравенств сводится к решению целых рациональных неравенств.

При решении дробно-рациональных неравенств нужно придерживаться следующей схемы:

а) перенести все члены неравенства в левую часть;

б) привести все члены левой части неравенства к общему знаменателю;

в) заменить дробные неравенства целыми;

г) разложить левую часть полученного неравенства на простейшие множители;

д) привести полученное неравенство к виду (9.12) или (9.13);

е) найти решения полученного неравенства по методу интервалов.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Системой неравенств с одним неизвестным называется несколько неравенств, в которых под одной и той же буквой, обозначающей неизвестное, подразумевается одна и та же величина.

При решении системы неравенств с одним неизвестным обычно решают каждое из неравенств системы, а затем находят пересечение множеств полученных решений.

Решить систему неравенств с одним неизвестным – значит найти множество всех ее решений или показать, что система не имеет решений.

НЕРАВЕНСТВА С НЕИЗВЕСТНЫМ ПОД ЗНАКОМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком абсолютной величины (модуля), используется определение абсолютной величины:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geq 0, \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Кроме того, иногда бывает полезным применить геометрический смысл модуля числа, согласно которому $|x|$ есть расстояние от точки x числовой прямой до начала отсчета, а $|x-a|$ — это расстояние на числовой прямой между точками x и a.

Рассмотрим неравенство

$$f(|x|) < g(x), \tag{9.16}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции.

Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} x < 0, \\ f(-x) < g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} x \ge 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| < g(x), \tag{9.17}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Неравенство такого вида равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} g(x) \le 0, \\ x \in \varnothing. \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| > g(x), \tag{9.18}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство равносильно следующей совокупности двух систем неравенств:

$$1)\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} g(x) > 0, \\ x \in \text{ОДЗ неравенства } (9.18). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| < g(x), \tag{9.19}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| < g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} x \ge 0, \\ |f(x)| < g(x). \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно двойному неравенству

$$-g(x) < f(|x|) < g(x).$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(|x|)| > g(x), \tag{9.20}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство можно решить двумя способами. Во-первых, оно равносильно совокупности двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x < 0, \\ |f(-x)| > g(x) \end{cases} \text{или } 2)\ \begin{cases} x \geq 0, \\ |f(x)| > g(x). \end{cases}$$

Во-вторых, оно также равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(|x|) > g(x), \\ f(|x|) < -g(x). \end{array}\right.$$

Рассмотрим неравенство

$$|f(x)| \geq |g(x)|, \tag{9.21}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Это неравенство решается при помощи разбиения области его допустимых значений на промежутки, каждый из которых является промежутком постоянства знака как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака абсолютной величины. Объединив решения на всех промежутках, получим множество всех решений неравенства.

Некоторые неравенства вида (9.21) $|f(x)| \geq |g(x)|$ целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $(f(x))^2 \geq (g(x))^2$, т.е. возведением обеих частей исходного неравенства в квадрат.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Алгебраическое неравенство называется иррациональным, если его неизвестное входит под знак корня.

При решении иррациональных неравенств, как и иррациональных уравнений, корни четной степени рассматриваются только арифметические, а корни нечетной степени рассматриваются на всей числовой оси (при всех действительных значениях подкоренных выражений).

Если неравенство, обе части которого неотрицательны при всех значениях неизвестного из области допустимых, возвести в любую натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

причем при всех x из ОДЗ $f_1(x) \geq 0$ и $f_2(x) \geq 0$, то неравенство

$$(f_1(x))^n > (f_2(x))^n$$

равносильно данному.

Если обе части неравенства возвести в нечетную натуральную степень, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному, т.е. если дано неравенство

$$f_1(x) > f_2(x),$$

то неравенство $(f_1(x))^{2n+1} > (f_2(x))^{2n+1}$ равносильно данному.

В частности, неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}, \quad n \in N, \tag{9.22}$$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x), \end{cases}$ а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}, \quad n \in N, \tag{9.23}$$

равносильно неравенству $f(x) < g(x)$; неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \tag{9.24}$$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}, \end{cases}$ а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x), \quad n \in N, \tag{9.25}$$

равносильно неравенству $f(x) < (g(x))^{2n+1}$; неравенство вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \tag{9.26}$$

равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases}$$

а неравенство вида

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x), \quad n \in N, \tag{9.27}$$

равносильно неравенству $f(x) > (g(x))^{2n+1}$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении показательных неравенств используются следующие правила:

1) Если $a>1$, то неравенство

$$a^{f_1(x)}<a^{f_2(x)} \qquad (9.28)$$

равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$, а неравенство

$$a^{f_1(x)}>a^{f_2(x)} \qquad (9.29)$$

равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$.

2) Если $0<a<1$, то неравенство

$$a^{f_1(x)}<a^{f_2(x)} \qquad (9.30)$$

равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$, а неравенство

$$a^{f_1(x)}>a^{f_2(x)} \qquad (9.31)$$

равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$.

3) Если $a>1$, то неравенство

$$\log_a f_1(x)<\log_a f_2(x), \qquad (9.32)$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$, а неравенство

$$\log_a f_1(x)>\log_a f_2(x), \qquad (9.33)$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$.

4) Если $0<a<1$, то неравенство

$$\log_a f_1(x)<\log_a f_2(x), \qquad (9.34)$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)>f_2(x)$, а неравенство

$$\log_a f_1(x)>\log_a f_2(x), \qquad (9.35)$$

где $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$, равносильно неравенству $f_1(x)<f_2(x)$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Тригонометрическим неравенством называется неравенство, в котором неизвестное входит под знак тригонометрических функций непосредственно или в виде линейной функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия.

К простейшим тригонометрическим неравенствам относятся:

1. Неравенство $\sin x > a$. Если $a < -1$, то решением неравенства будет любое действительное число. Если $-1 \le a < 1$, то решениями неравенства будут

$$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.36}$$

Если $a \ge 1$, то неравенство решений не имеет.

2. Неравенство $\sin x < a$. Если $a \le -1$, то неравенство решений не имеет. Если $-1 < a \le 1$, то решениями неравенства будут

$$\pi - \arcsin a + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.37}$$

Если $a > 1$, то неравенство верно при всех действительных значениях x.

3. Неравенство $\cos x > a$. Если $a < -1$, то неравенство верно при всех действительных значениях x. Если $-1 \le a < 1$, то решениями неравенства будут

$$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.38}$$

Если $a \ge 1$, то неравенство решений не имеет.

4. Неравенство $\cos x < a$. Если $a \le -1$, то неравенство решений не имеет. Если $-1 < a \le 1$, то решениями неравенства будут

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z. \tag{9.39}$$

Если $a > 1$, то неравенство верно при всех значениях x.

5. Неравенство $\operatorname{tg} x > a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z. \tag{9.40}$$

6. Неравенство $\operatorname{tg} x < a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in Z. \tag{9.41}$$

7. Неравенство $\operatorname{ctg} x > a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in Z. \tag{9.42}$$

8. Неравенство $\operatorname{ctg} x < a$. Это неравенство имеет решения при любых действительных значениях a, причем

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, \quad n \in Z. \tag{9.43}$$

В случае нестрогих неравенств к решениям присоединяются соответствующие концы интервалов.

9.001. Показать, что для всех положительных чисел a и b верно неравенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

Решение.

Возведя обе части данного неравенства в квадрат, имеем эквивалентное неравенство $a + 2\sqrt{ab} + b > a + b \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{ab} > 0,\ ab > 0$. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то последнее неравенство очевидно, и тем самым справедливость равносильного ему исходного неравенства доказана.

9.002. Доказать, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \le \sqrt[4]{ab}$.

Решение.

Так как $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$, то получим

$2\sqrt{ab} \le \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt[4]{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt[4]{ab} \le 0$;

учитывая, что $-\sqrt[4]{ab} < 0$, найдем $\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)^2 \ge 0$. Полученное, а значит, и исходные неравенства истинны.

9.003. Доказать, что если $p > 0$ и $q > 0$, то $(p+2)(q+2)(p+q) \ge 16pq$.

Решение.

Имеем

$$p^2q + pq^2 + 2p^2 + 2q^2 + 4pq + 4p + 4q \ge 16q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2q + pq^2 + 2p^2 + 2q^2 - 12pq + 4p + 4q \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2p^2 - 4pq + 2q^2\right) + \left(p^2q - 2pq\sqrt{pq} + pq^2\right) + 4\left(p - 2\sqrt{pq} + q\right) +$$

$$+ \left(2pq\sqrt{pq} - 8pq + 8\sqrt{pq}\right) \ge 0 \Leftrightarrow 2(p-q)^2 + \left(p\sqrt{q} - q\sqrt{p}\right)^2 +$$

$$+4\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)^2+2\sqrt{pq}\left(pq-4\sqrt{pq}+4\right)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(p-q)^2+\left(p\sqrt{q}-q\sqrt{p}\right)^2+4\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)^2+2\sqrt{pq}\left(\sqrt{pq}-2\right)^2\geq 0.$$

Полученное неравенство истинно, а значит исходное неравенство справедливо.

9.004. Доказать, что если $a \neq 2$, то $\dfrac{1}{a^2-4a+4} > \dfrac{2}{a^3-8}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{1}{(a-2)^2}-\frac{2}{(a-2)(a^2+2a+4)}>0 \Leftrightarrow \frac{a^2+2a+4-2a+4}{(a-2)^2(a^2+2a+4)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+8}{(a-2)^2(a^2+2a+4)}>0.$$

Так как $a^2+8>0$ при $a\in R$; $(a-2)^2>0$ при $a\neq 2$ и $a^2+2a+4>0$ при $a\in R$, то это неравенство очевидно. Итак, исходное неравенство истинно.

9.005. Доказать, что если m, n и p представляют собой длины сторон некоторого треугольника, то $m^2+n^2+p^2<2(mn+mp+np)$.

Решение.

Для всякого треугольника сумма двух сторон больше третьей:

$m+n>p, n+p>m, m+p>n.$

Запишем неравенства в виде

$p-m<n, m-n<p, n-p<m.$

Возведя каждое из этих неравенств в квадрат, получим

$$\begin{aligned}&(p-m)^2<n^2, && p^2-2mp+m^2<n^2,\\ &(m-n)^2<p^2, \Leftrightarrow && m^2-2mn+n^2<p^2,\\ &(n-p)^2<m^2 && n^2-2np+p^2<m^2.\end{aligned}$$

Сложив левые и правые части этих неравенств, найдем

$$2m^2+2n^2+2p^2-2(mn+mp+np)<m^2+n^2+p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2+n^2+p^2<2(mn+mp+np),$$

что и требовалось доказать.

9.006. Доказать, что если $m \geq 0$ и $n \geq 0$, то $mn(m+n) \leq m^3 + n^3$.

Решение.

Из условия

$mn(m+n) \leq (m+n)(m^2 - mn + n^2)$,

$mn(m+n) - (m+n)(m^2 - mn + n^2) \leq 0$,

$(m+n)(mn - m^2 + mn - n^2) \leq 0, \quad -(m+n)(m^2 - 2mn + n^2) \leq 0$,

$-(m+n)(m-n)^2 \leq 0, \quad (m+n)(m-n)^2 \geq 0$.

Так как $m+n \geq 0$ по условию; $(m-n)^2 \geq 0$, отсюда

$(m+n)(m-n)^2 \geq 0$.

9.007. Доказать, что для любых действительных чисел x и y верно неравенство $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$.

Решение.

Имеем $x^2 + y^2 + y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0, \quad (x+y)^2 + (y^2 + 6y + 10) > 0$. В полученном неравенстве $(x+y)^2 \geq 0$ для $x \in R$ и $y \in R$, а $y^2 + 6y + 10 > 0$ для $y \in R$, так как $D = 36 - 40 < 0$. Значит, и $(x+y)^2 + (y^2 + 6y + 10) > 0$, что и требовалось доказать.

9.008. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2 - (a+1)x + a + 4 = 0$ оказываются отрицательными.

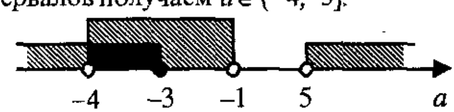
Решение.

Используя теорему Виета, получаем, что оба корня отрицательны тогда и только тогда, когда их сумма $x_1 + x_2 < 0$, а произведение $x_1 \cdot x_2 > 0$.

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a + 1 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 = a + 4 > 0, \\ D = a^2 - 2a - 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1, \\ a > -4, \\ (a-5)(a+3) \geq 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $a \in (-4;-3]$.



Ответ: $a \in (-4;-3]$.

9.009. Показать, что для любых двух положительных чисел произведение их суммы на сумму их обратных величин не меньше четырех.

Решение.

Пусть $a>0$ и $b>0$. Предположим, что

$$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4 \Leftrightarrow (a+b)\cdot\frac{a+b}{ab}-4\geq 0, \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{ab}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0.$$

Так как $(a-b)^2\geq 0$ и $ab>0$ при $a>0$ и $b>0$, то $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ и неравенство истинно, следовательно, и исходное неравенство справедливо.

9.010. Найти целые положительные значения x, удовлетворяющие неравенству $\frac{5x+1}{x-1}>2x+2$.

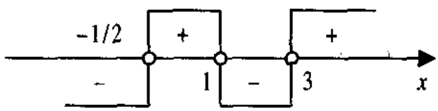
Решение.

Имеем

$$\frac{5x+1}{x-1}-2x-2>0 \Leftrightarrow \frac{5x+1-2(x+1)(x-1)}{x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+5x+3}{x-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-5x-3)(x-1)<0 \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)(x-1)<0.$$

С помощью числовой прямой найдем, что $x=2$.



Ответ: $x=2$.

9.011. Найти целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}+\frac{x}{6}<2-\frac{x+5}{2},\\ 1-\frac{x+5}{8}+\frac{4-x}{2}<3x-\frac{x+1}{4}.\end{cases}$$

Решение.

Имеем

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{2x+3}{3}+\frac{x}{6}-2+\frac{x+5}{2}<0,\\ 1-\frac{x+5}{8}+\frac{4-x}{2}-3x+\frac{x+1}{4}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2,\\ x>\frac{7}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{9}<x<2.$$

Значит, $x=1$.

Ответ: $x=1$.

9.012. Найти натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(x-1)<4,\\ \dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x}.\end{cases}$$

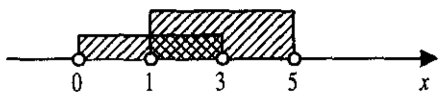
Решение.

Из условия

$$\begin{cases}0<x-1<4,\\ \dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}+\dfrac{2x}{x-3}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<5,\\ \dfrac{4x^2-8x+15}{x(x-3)}<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<5,\\ 4x^2-8x+15>0 \text{ при } x\in R,\\ x(x-3)<0.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим решение системы $x=2$.



Ответ: $x=2$.

9.013. При каких значениях x функция $y=\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}$ принимает положительные значения?

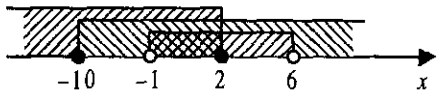
Решение.

Учитывая ОДЗ, из условия имеем

$$\begin{cases}\sqrt[4]{10+x}-\sqrt{2-x}>0,\\ 10+x\ge 0,\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10+x>4-4x+x^2,\\ x\ge -10,\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x-6<0,\\ x\ge -10,\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<6,\\ x\ge -10,\\ x\le 2.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим решения системы $-1 < x \leq 2$.



Ответ: $x \in (-1; 2]$

9.014. Найти множество целых значений x, удовлетворяющих системе неравенств

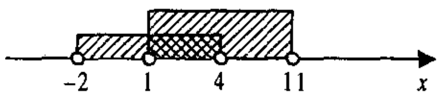
$$\begin{cases} \dfrac{x+8}{x+2} > 2, \\ \lg(x-1) < 1. \end{cases}$$

Решение.

Учитывая ОДЗ, решаем второе неравенство системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x+8}{x+2} - 2 > 0, \\ 0 < (x-1) < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+4}{x+2} > 0, \\ 1 < x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+2) < 0, \\ 1 < x < 11. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим целые решения системы $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

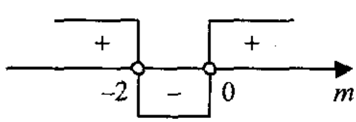


Ответ: $x_1 = 2; x_2 = 3.$

9.015. При каких значениях m неравенство $x^2 - mx > \dfrac{2}{m}$ выполняется для любых x?

Решение.

Имеем $x^2 - mx - \dfrac{2}{m} > 0$. Неравенство выполняется для $x \in R$, когда $D = m^2 + \dfrac{8}{m} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{m^3 + 8}{m} < 0$, $(m+2)(m^2 - 2m + 4)m < 0$. Так как $m^2 - 2m + 4 > 0$ при $m \in R$, то полученное неравенство равносильно неравенству $(m+2)m < 0$. Методом интервалов получаем $-2 < m < 0$.



Ответ: $m \in (-2; 0)$

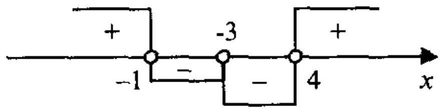
Найти области определения функций **(9.016 – 9.021)**:

9.016. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

Решение.

$D(y)$: $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}\ge 0,\quad \dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+1)}\ge 0,\quad \begin{cases}(x-3)^2(x-4)(x+1)\ge 0,\\ x-3\ne 0,\\ x+1\ne 0.\end{cases}$

Методом интервалов находим решение системы $x<-1$ или $x\ge 4$.



Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup[4;\infty)$.

9.017. $y=0{,}5^{\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}}$.

Решение.

$D(y)$: $\begin{cases}4-x^2\ge 0,\\ x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2,\\ x\ne 1.\end{cases}$

Ответ: $x\in[-2;1)\cup(1;2]$.

9.018. $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}$.

Решение.

$D(y)$: $\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+5}>0,\\ \log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}\ge 0,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x-1}{x+5}>0,\\ \dfrac{x-1}{x+5}\le 1,\\ x+5\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+5)>0,\\ x+5>0.\end{cases}$

Методом интервалов находим решение системы $x>1$.

Ответ: $x\in(1;\infty)$.

9.019. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+1}{x-1}}$.

Решение.

$D(y)$: $\log_{\frac{1}{2}}\log_3\frac{x+1}{x-1}\ge 0,\ \ 0<\log_3\frac{x+1}{x-1}\le 1,\ \ 1<\frac{x+1}{x-1}\le 3,$

$$\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}>1,\\ \frac{x+1}{x-1}\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}-1>0,\\ \frac{x+1}{x-1}-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+1-x+1}{x-1}>0,\\ \frac{x+1-3x+3}{x-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{2}{x-1}>0,\\ \frac{-2x+4}{x-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0,\\ (x-2)(x-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ (x-2)(x-1)\ge 0.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим решение $x\ge 2$.

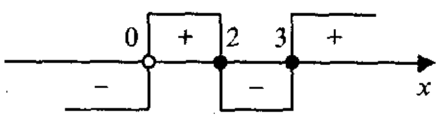
Ответ: $x\in[2;\infty)$.

9.020. $y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}$.

Решение.

$D(y)$: $5-x-\frac{6}{x}\ge 0,\ \ \begin{cases}x(x^2-5x+6)\le 0,\\ x\ne 0,\end{cases}\ \ \begin{cases}x(x-2)(x-3)\le 0,\\ x\ne 0.\end{cases}$

Методом интервалов находим $x<0$ или $2\le x\le 3$.



Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup[2;3]$.

9.021. $y=\sqrt{-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}}$.

Решение.

$$-\frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\ge 0,\quad \frac{\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{-x^2+2x+8}}\le 0,\quad \begin{cases}\log_{0,3}(x-1)\le 0,\\ -x^2+2x+8>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\ge 1,\\ x^2-2x-8<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2,\\ -2\le x<4\end{cases}\Leftrightarrow 2\le x<4.$$

Ответ: $x\in[2;4)$.

Решить неравенства **(9.022 – 9.095):**

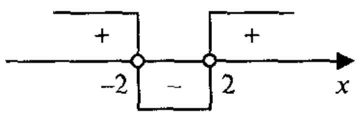
9.022. $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$.

Решение.

Имеем

$$\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}-1<0,\quad \frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)}<0,\quad \frac{x^2-4x+8}{(x-2)(x+2)}>0.$$

В полученном неравенстве $x^2-4x+8>0$ при $x\in R$, поэтому оно равносильно неравенству $(x-2)(x+2)>0$. Методом интервалов находим $x<-2$ или $x>2$.



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

9.023. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x+2}<1$.

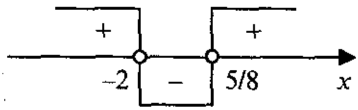
Решение.

Это неравенство равносильно неравенству

$$\frac{3x-1}{x+2}>\frac{1}{3},\quad \frac{3x-1}{x+2}-\frac{1}{3}>0,\quad \frac{9x-3-x-2}{3(x+2)}>0,\quad \frac{8x-5}{x+2}>0,$$

$(8x-5)(x+2)>0$.

С помощью числовой прямой находим $x > \frac{5}{8}$ или $x < -2$.



Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{8}; \infty\right)$

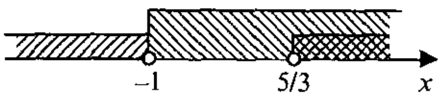
9.024. $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \le 1.$

Решение.

Неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{3x-5}{x+1} > 0, \\ \frac{3x-5}{x+1} \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)(x+1) > 0, \\ -\frac{15}{x+1} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{5}{3}\right)(x+1) > 0, \\ x > -1. \end{cases}$$

Методом интервалов находим $x > \frac{5}{3}$.



Ответ: $x \in \left(\frac{5}{3}; \infty\right)$

9.025. $\log_\pi (x+27) - \log_\pi (16-2x) < \log_\pi x.$

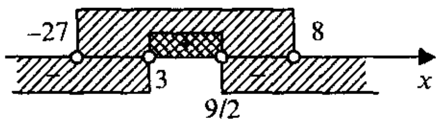
Решение.

Из условия $\log_\pi \frac{x+27}{16-2x} < \log_\pi x$. Это неравенство равносильно, с учетом ОДЗ системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+27}{16-2x} < x, \\ x+27 > 0, \\ 16-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+27}{16-2x} - x < 0, \\ x > -27, \\ -2x > -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2-15x+27}{2x-16} > 0, \\ x > -27, \\ x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3)\left(x-\frac{9}{2}\right)(2x-16)>0, \\ x>-27, \\ x<8. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой находим $3 < x < \frac{9}{2}$.



Ответ: $x \in \left(3; \frac{9}{2}\right)$

9.026. $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}(x^2+4)$.

Решение.

Это неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x-8>0, \\ 3x-8<x^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{8}{3}, \\ x^2-3x+12>0. \end{cases}$$

Так как $x^2-3x+12>0$ при $x \in R$, то последняя система неравенств эквивалентна неравенству $x > \frac{8}{3}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{8}{3}; \infty\right)$

9.027. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0.$

Решение.

Имеем

$$(x+1)(x-3)(x-2)^2<0, \quad \begin{cases} (x+1)(x-3)<0, \\ x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<3, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-1; 2) \cup (2; 3)$.

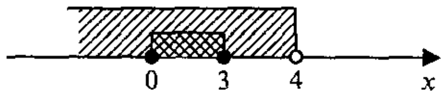
9.028. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}3x-x^2<(4-x)^2,\\ 3x-x^2\ge 0,\\ 4-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-11x+16>0,\\ x(x-3)\le 0,\\ x<4.\end{cases}$$

Так как $2x^2-11x+16>0$ при $x\in R$, то полученная система неравенств равносильна системе $\begin{cases}x(x-3)\le 0,\\ x<4.\end{cases}$ Методом интервалов находим $0\le x\le 3$.



Ответ: $x\in[0;3]$

9.029. $\frac{1}{3x-2-x^2}-\frac{3}{7x-4-3x^2}>0$.

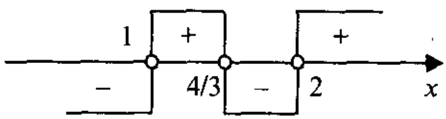
Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\frac{3}{3x^2-7x+4}-\frac{1}{x^2-3x+2}>0,\quad \frac{3}{3(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}>0,$$

$$\frac{x-2-x+\frac{4}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)}>0,\quad \frac{-\frac{2}{3}}{(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)}>0,\quad (x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2)<0.$$

Методом интервалов получаем $x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)$.



Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{4}{3};2\right)$

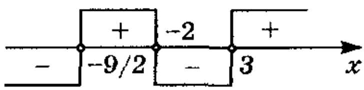
9.030. $\frac{1}{x+2}<\frac{3}{x-3}$.

Решение.

Имеем

$$\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-3}<0 \Leftrightarrow \frac{-2x-9}{(x+2)(x-3)}<0 \Leftrightarrow (2x+9)(x+2)(x-3)>0.$$

Методом интервалов получаем $x \in \left(-\frac{9}{2};-2\right) \cup (3;\infty)$.



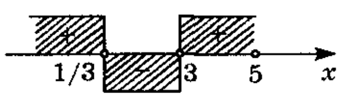
Ответ: $x \in \left(-\frac{9}{2};-2\right) \cup (3;\infty)$.

9.031. $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$.

Решение.

Из условия $\frac{3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)}{(x-5)^2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)>0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

С помощью числовой прямой получаем $x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup (3;5) \cup (5;\infty)$.



Ответ: $x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right) \cup (3;5) \cup (5;\infty)$.

9.032. $\left|2x^2-9x+15\right| \geq 20$.

Решение.

Имеем $2x^2-9x+15>0$ при $x \in R$, следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $2x^2-9x+15\ge 20$, $2x^2-9x-5\ge 0$, $2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)\ge 0$. Отсюда $x\le -\frac{1}{2}$ или $x\ge 5$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[5;\infty)$.

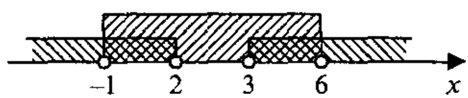
9.033. $|x^2-5x|<6$.

Решение.

Используя геометрический смысл модуля, получаем, что

$$-6<x^2-5x<6\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-5x-6<0,\\x^2-5x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(x-6)<0,\\(x-2)(x-3)>0.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $x\in(-1;2)\cup(3;6)$.



Ответ: $x\in(-1;2)\cup(3;6)$

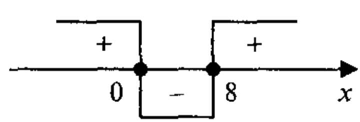
9.034. $5x-20\le x^2\le 8x$.

Решение.

Перепишем это неравенство в виде системы неравенств

$$\begin{cases}x^2-5x+20\ge 0,\\x^2-8x\le 0.\end{cases}$$

Так как $x^2-5x+20>0$ при $x\in R$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2-8x\le 0$, $x(x-8)\le 0$. С помощью метода интервалов находим $x\in[0;8]$.



Ответ: $x\in[0;8]$

9.035. $\dfrac{4x^2-1}{\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)} \le 0.$

Решение.

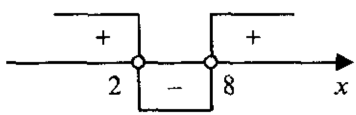
$\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right) < 0$, поэтому исходное неравенство равносильно следующему: $4x^2-1 \ge 0$. Решив его, найдем $x \ge \frac{1}{2}$ или $x \le -\frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$

9.036. $\dfrac{\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)}{(x-8)(2-x)} > 0.$

Решение.

$\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right) < 0$, поэтому исходное неравенство равносильно следующему: $(x-8)(x-2) > 0$. Отсюда $x < 2$ или $x > 8$.



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (8; \infty)$.

9.037. $(0,(4))^{x^2-1} > (0,(6))^{x^2+6}$.

Решение.

Преобразовав бесконечные десятичные периодические дроби в простые, найдем

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-1} > \left(\frac{6}{9}\right)^{x^2+6}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-2} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6} \Leftrightarrow 2x^2-2 < x^2+6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 8, -2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $x \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

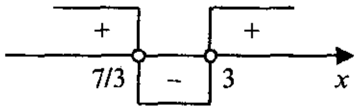
9.038. $\dfrac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}\left(x^2+4\right)}<0.$

Решение.

Выражение $\log_{0,3}\left(x^2+4\right)<0$ при $x\in R$. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$3x^2-16x+21>0$, $3(x-3)\left(x-\dfrac{7}{3}\right)>0$.

Методом интервалов получаем $x\in\left(-\infty;\dfrac{7}{3}\right)\cup(3;\infty)$.



Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{7}{3}\right)\cup(3;\infty)$.

9.039. $\dfrac{\log_5\left(x^2+3\right)}{4x^2-16x}<0.$

Решение.

$\log_5\left(x^2+3\right)>0$ при $x\in R$, поэтому $4x^2-16x<0$, $x(x-4)<0$.

Ответ: $x\in(0;4)$.

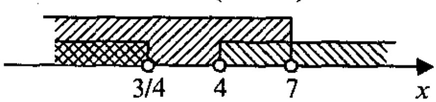
9.040. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x-7<0,\\4x^2-19x+12>0.\end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)\cup(4;7)$.



Ответ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)\cup(4;7)$.

9.041. $x^6-9x^3+8>0.$

Решение.

Пусть $x^3=y$. Тогда получаем $y^2-9y+8>0$. Решив это неравенство, найдем $\left[\begin{array}{l}y>8,\\ y<1.\end{array}\right.$ Тогда $\left[\begin{array}{l}x^3>8,\\ x^3<1,\end{array}\right.$ т.е. $\left[\begin{array}{l}(x-2)(x^2+2x+4)>0,\\ (x-1)(x^2+x+1)<0.\end{array}\right.$

Так как $x^2+2x+4>0$ и $x^2+x+1>0$ при $x\in R$, то последняя совокупность неравенств равносильна совокупности $\left[\begin{array}{l}x-2>0,\\ x-1<0,\end{array}\right.$ т.е. $\left[\begin{array}{l}x>2,\\ x<1.\end{array}\right.$

Ответ: $x\in(-\infty;1)\cup(2;\infty)$.

9.042. $0{,}3^{2+4+6+\ldots+2x}>0{,}3^{72}$ $(x\in N)$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству $2+4+6+\ldots+2x<72$, где в левой части неравенства сумма членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=2$, $d=2$, $a_n=2x$. Тогда получаем

$$\begin{cases}\dfrac{2+2x}{2}\cdot n<72,\\ n=\dfrac{2x-2}{2}+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+x)x<72,\\ n=x.\end{cases}$$

Отсюда имеем $x^2+x-72<0$, $-9<x<8$. Так как $x=n\in N$, то $n=1,2,3,4,5,6,7$.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

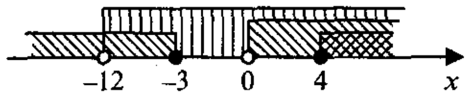
9.043. $\sqrt{x^2-x-12}<x.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-x-12\ge 0,\\ x>0,\\ x^2-x-12<x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le -3,\end{array}\right.\\ x>0,\\ x>-12.\end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $x \in [4; \infty)$.



Ответ: $x \in [4; \infty)$.

9.044. $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} 17-15x-2x^2 > 0, \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+15x-17 < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{17}{2} < x < 1, \\ x > -3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-3; 1)$.

9.045. $\sqrt{9x-20} < x.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9x-20 \ge 0, \\ x > 0, \\ 9x-20 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+20 > 0, \\ x \ge \dfrac{20}{9}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < 4, \end{array}\right. \\ x \ge \dfrac{20}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left[\dfrac{20}{9}; 4\right) \cup (5; \infty)$.

9.046. $1 < \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2.$

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} > 1, \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} - 1 > 0, \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} - 2 < 0. \end{cases}$$

Так как $x^2+1>0$, то получаем $\begin{cases} 2x^2-7x+7>0, \\ x^2-7x+6<0. \end{cases}$

Здесь $2x^2-7x+7>0$ при $x \in R$, поэтому эта система равносильна неравенству $x^2-7x+6<0$, $(x-1)(x-6)<0$, $1<x<6$.

Ответ: $x \in (1; 6)$.

9.047. $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0.$

Решение.

Так как $x^4+x^2+1>0$ при $x \in R$, поэтому имеем $x^2-4x-5<0$, $(x+1)(x-5)<0$, $-1<x<5$.

Ответ: $x \in (-1; 5)$.

9.048. $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}.$

Решение.

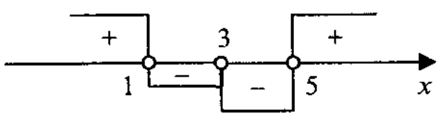
ОДЗ: $x \neq 1, x \neq 5.$

Из условия

$$\frac{4-x}{x-5}-\frac{1}{1-x}>0,\ \frac{(4-x)(1-x)-x+5}{(x-5)(1-x)}>0,\ \frac{x^2-6x+9}{(x-5)(x-1)}<0,$$

$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)}<0, (x-3)^2(x-5)(x-1)<0.$$

Методом интервалов находим $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.



Ответ: $x \in (1; 3) \cup (3; 5)$.

9.049. $\lg 10^{\lg(x^2+21)}>1+\lg x.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Получаем

$$\lg\left(x^2+21\right)>\lg 10+\lg x \Leftrightarrow \lg\left(x^2+21\right)>\lg 10x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+21>10x, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-10x+21>0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>7, \\ x<3, \end{array}\right. \\ x>0. \end{cases}$$

Ответ: $x\in(0;3)\cup(7;\infty)$.

9.050. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1$.

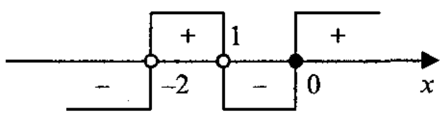
Решение.

ОДЗ: $x\neq -2,\ x\neq -1$.

Имеем

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x}{x^2+3x+2}\geq 0,\ \frac{x}{(x+2)(x+1)}\leq 0,\ \begin{cases} x(x+2)(x+1)\leq 0, \\ x\neq -2, \\ x\neq -1. \end{cases}$$

Методом интервалов находим $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0]$.



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0]$.

9.051. $\left(\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x}\geq 1$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 0$.

Из условия

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}}\geq\left(\frac{3}{7}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x^2}\leq 0,\ \ \frac{x-2}{x}\leq 0,\ \ \begin{cases} (x-2)x\leq 0, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Ответ: $x\in(0;2]$.

9.052. $2^{1-2^{\frac{1}{x}}}<0{,}125.$

Решение.

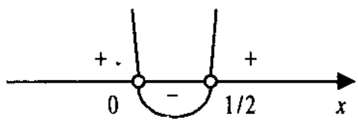
ОДЗ: $x\neq 0.$

Перепишем данное неравенство в виде

$$2^{1-2^{\frac{1}{x}}}<2^{-3}\Leftrightarrow 1-2^{\frac{1}{x}}<-3,\ \ 2^{\frac{1}{x}}>4,\ \ 2^{\frac{1}{x}}>2^2,\ \ \frac{1}{x}>2,\ \ \frac{1}{x}-2>0,$$

$$\frac{1-2x}{x}>0,\ \ \frac{2x-1}{x}<0,\ \ (2x-1)x<0.$$

С помощью числовой прямой находим $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.



Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

9.053. $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leq 0.$

Решение.

Из условия $x^2\cdot 3^x-3\cdot 3^x\leq 0$, $3^x\left(x^2-3\right)\leq 0$. Так как $3^x>0$ при $x\in R$, то полученное неравенство равносильно неравенству $x^2-3\leq 0$, $x^2\leq 3$, $-\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}$.

Ответ: $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

9.054. $5^{2x+1}>5^x+4.$

Решение.

Имеем $5\cdot\left(5^x\right)^2-\left(5^x\right)+4>0$. Решив его как квадратное относительно 5^x, получим $5^x<-\frac{4}{5}$, $\varnothing$, или $5^x>1$, откуда $x>0$.

Ответ: $x\in(0;\infty)$

9.055. $0{,}5^{x-2}>6$.

Решение.

Из условия

$2^{2-x}>6,\quad \log_2 2^{2-x}>\log_2 6\Leftrightarrow 2-x>\log_2 2\cdot 3,\quad x<2-1-\log_2 3,$

$x<1-\log_2 3.$

Ответ: $x\in(-\infty;1-\log_2 3)$.

9.056. $\dfrac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}100-\log_{0,3}9}<1.$

Решение.

ОДЗ: $x>-1.$

Имеем

$$\frac{\log_{0,3}(x+1)}{\log_{0,3}\frac{100}{9}}-1<0,\quad \frac{\log_{0,3}(x+1)-\log_{0,3}\frac{100}{9}}{\log_{0,3}\frac{100}{9}}<0,$$

где $\log_{0,3}\dfrac{100}{9}<0$. Следовательно,

$$\log_{0,3}(x+1)-\log_{0,3}\frac{100}{9}>0,\quad \log_{0,3}(x+1)>\log_{0,3}\frac{100}{9}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1<\dfrac{100}{9},\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{9x-91}{100}<0,\\ x>-1,\end{cases}\quad -1<x<\frac{91}{9}.$$

Ответ: $x\in\left(-1;\dfrac{91}{9}\right)$.

9.057. $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>1.$

Решение.

ОДЗ: $\dfrac{3x+6}{x^2+2}>1.$

Перепишем неравенство в виде

$$0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}}>0{,}3^0\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{3x+6}{x^2+2}<0,\quad \log_2\frac{3x+6}{x^2+2}>1,\quad \frac{3x+6}{x^2+2}>2,$$

$$\frac{3x+6}{x^2+2}-2>0,\quad \frac{3x+6-2x^2-4}{x^2+2}>0,\quad \frac{-2x^2+3x+2}{x^2+2},\quad \frac{2x^2-3x-2}{x^2+2}<0.$$

Так как $x^2+2>0$, то $2x^2-3x-2<0$, $-\frac{1}{2}<x<2$.

Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

9.058. $2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}}>1.$

Решение.

ОДЗ: $x>0.$

Из условия

$$2^{\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}}>2^0\Leftrightarrow\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}\frac{5x}{2}>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{0,4}x\left(\log_{0,4}x+\log_{0,4}\frac{5}{2}\right)>0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l}\log_{0,4}x>-\log_{0,4}\frac{5}{2},\\ \log_{0,4}x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\frac{2}{5},\\ x>1.\end{array}\right.$

Ответ: $x\in\left(0;\frac{2}{5}\right)\cup(1;\infty)$.

9.059. $4^x-2^{2(x-1)}+8^{\frac{2}{3}(x-2)}>52.$

Решение.

Имеем

$$4^x-4^{x-1}+4^{x-2}>52,\quad 4^x-\frac{4^x}{4}+\frac{4^x}{16}>52,\quad 13\cdot4^x>16\cdot52,$$

$4^x>4^3\Leftrightarrow x>3.$

Ответ: $x\in(3;\infty)$.

9.060. $2\log_8(x-2)-\log_8(x-3)>\frac{2}{3}.$

Решение.

ОДЗ: $x>3.$

Имеем

$$\log_8(x-2)^2-\log_8(x-3)>\frac{2}{3},\quad\log_8\frac{(x-2)^2}{x-3}>\frac{2}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{(x-2)^2}{x-3}>8^{\frac{2}{3}},\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x-3}-4>0, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-4)^2}{x-3}>0, \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4, \\ x>3. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (3;4) \cup (4;\infty)$.

9.061. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.

Решение.

Записав неравенство в виде $(5^x)^2 - 6 \cdot (5^x) + 5 < 0$ и решив его как квадратное относительно 5^x, получим $1 < 5^x < 5$, откуда найдем $0 < x < 1$.

Ответ: $x \in (0;1)$.

9.062. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \le 2{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $x \in R$.

Имеем

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \le \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}, \quad \log_{0,25}(x^2-5x+8) \ge -1 \Leftrightarrow x^2-5x+8 \le 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+4 \le 0, \quad 1 \le x \le 4.$$

Ответ: $x \in [1;4]$.

9.063. $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \le 0$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq 0$.

Из условия $\dfrac{\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2}{4} - \dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{4} - 3 \le 0 \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 - 2^{\frac{1}{x}} - 12 \le 0$, решим его как квадратное относительно $2^{\frac{1}{x}}$. Получим $2^{\frac{1}{x}} \ge -3$, откуда найдем

$x \neq 0$, или $2^{\frac{1}{x}} \leq 4$, откуда найдем $\frac{1}{x} \leq 2$, $\frac{1}{x} - 2 \leq 0$, $\frac{1-2x}{x} \leq 0$,

$$\begin{cases} (2x-1)x \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x \geq \frac{1}{2}, \\ x < 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

9.064. $\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot 12{,}25^{\frac{4x+1}{2}} \geq 1.$

Решение.

Из условия

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \cdot \left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{4x+1}{2}} \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{3(2x-7)} \geq \left(\frac{2}{7}\right)^{4x+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (2x-7) \leq 4x+1, \quad x \leq 11.$

Ответ: $x \in (-\infty; 11]$.

9.065. $\frac{15}{4+3x-x^2} > 1.$

Решение.

Перенесем 1 в левую часть неравенства и приведем его к общему знаменателю. Имеем $\frac{x^2-3x+11}{x^2-3x-4} < 0$. Так как $x^2 - 3x + 11 > 0$ при $x \in R$, то $x^2 - 3x - 4 < 0$. Решив это неравенство, найдем $-1 < x < 4$.

Ответ: $x \in (-1; 4)$.

9.066. $0{,}64 < \sqrt{0{,}8^{x(x-3)}} < 1.$

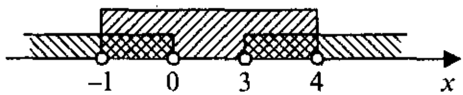
Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$(0{,}8)^2 < (0{,}8)^{\frac{x^2-3x}{2}} < (0{,}8)^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x}{2} > 0, \\ \frac{x^2-3x}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x > 0, \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)>0, \\ (x-4)(x+1)<0. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $x \in (-1; 0) \cup (3; 4)$.



Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (3; 4)$.

9.067. $\frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Перейдем к основанию 3. Имеем

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_3 x - \log_3 5x > -\log_3(x+3),$$

$$\log_3 x - 2\log_3 5x + 2\log_3(x+3) > -1 \Leftrightarrow$$

$$\log_3 x - \log_3 25x^2 + \log_3(x+3)^2 > -1, \quad \log_3 \frac{x(x+3)^2}{25x^2} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+3)^2}{25x^2} > \frac{1}{3}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x^2 - 7x + 27}{x} > 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad x > 0.$$

Ответ: $x \in (0; \infty)$.

9.068. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3 > 0$.

Решение.

Переходя к основанию 0,3, получаем

$$\frac{1}{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+5} < 1, \\ \frac{x-1}{x+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-6}{x+5} > 0, \\ (x-1)(x+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+5 > 0, \\ (x-1)(x+5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ x > 1. \end{cases} \quad x > 1.$$

Ответ: $x \in (1; \infty)$.

9.069. $(\log_{0,2}(x-1))^2 > 4.$

Решение.

ОДЗ: $x > 1$.

Переходя к равносильному неравенству, получаем $|\log_{0,2}(x-1)| > 2$.

Отсюда:

1) $\log_{0,2}(x-1) > 2 \Leftrightarrow 0 < x-1 < (0,2)^2 \Leftrightarrow 1 < x < 1,04$;

2) $\log_{0,2}(x-1) < -2 \Leftrightarrow x-1 > (0,2)^{-2}, \quad x > 26$.

Ответ: $x \in (1; 1,04) \cup (26; \infty)$.

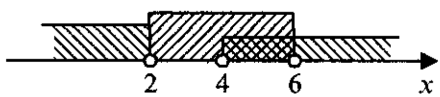
9.070. $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2} < 0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x-8}{x-2} < 1, \\ \dfrac{2x-8}{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-6}{x-2} < 0, \\ \dfrac{x-4}{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-2) < 0, \\ (x-4)(x-2) > 0. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой получаем $x \in (4; 6)$.



Ответ: $x \in (4; 6)$.

9.071. $\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) > 0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе двух неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 7 > 0, \\ x^2 - 5x + 7 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ 2 < x < 3, \end{cases} \quad 2 < x < 3.$$

Ответ: $x \in (2; 3)$.

9.072. $x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0.$

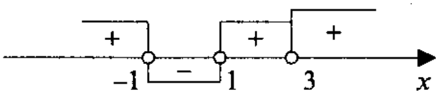
Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$x^6(x^2-6x+9)-(x^2-6x+9)<0,\quad (x^6-1)(x^2-6x+9)<0,$$

$$(x-3)^2(x^3-1)(x^3+1)<0,\quad (x-3)^2(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)<0.$$

В этом неравенстве выражение $x^2+x+1>0$ и $x^2-x+1>0$ при $x\in R$, поэтому оно равносильно неравенству $(x-3)^2(x-1)(x+1)<0$. Методом интервалов получаем $x\in(-1;1)$.



Ответ: $x\in(-1;1)$.

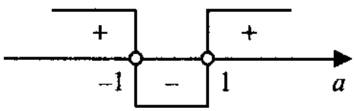
9.073. $a^4+a^3-a-1<0.$

Решение.

Группируя, получаем

$$a^3(a+1)-(a+1)<0,\quad (a+1)(a^3-1)<0,\quad (a+1)(a-1)(a^2+a+1)<0.$$

В этом неравенстве $a^2+a+1>0$ при $a\in R$, поэтому оно равносильно неравенству $(a+1)(a-1)<0$. С помощью числовой прямой получаем $a\in(-1;1)$.



Ответ: $a\in(-1;1)$.

9.074. $m^3+m^2-m-1>0.$

Решение.

Из условия

$$m^2(m+1)-(m+1)>0,\quad (m+1)(m^2-1)>0,\quad (m+1)(m+1)(m-1)>0,$$

$$(m+1)^2(m-1)>0\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0,\\m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1,\\m\neq -1,\end{cases}\quad m>1.$$

Ответ: $m\in(1;\infty)$.

9.075. $\log_2\left(1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x\right)<1.$

Решение.

Данное неравенство равносильно двойному неравенству

$0<1+\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x<2$, $-1<\log_{\frac{1}{9}} x-\log_9 x<1$.

Перейдем к основанию $\frac{1}{9}$. Имеем

$-1<\log_{\frac{1}{9}} x+\log_{\frac{1}{9}} x<1,\ \ -1<2\log_{\frac{1}{9}} x<1,\ \ -\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{9}} x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{3}<x<3.$

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

9.076. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2.$

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

Из условия $x^{\frac{\log_2\sqrt{x}}{2}}>2$, $x^{\frac{\log_2 x}{4}}>2$. Логарифмируя обе части неравенства по основанию 2, получаем

$\log_2 x^{\frac{\log_2 x}{4}}>\log_2 2,\ \ \frac{\log_2 x}{4}\cdot\log_2 x>1,\ \ \log_2^2 x>4\Leftrightarrow\left|\log_2 x\right|>2\Rightarrow$

$\Rightarrow$1) $\log_2 x<-2$, или 2) $\log_2 x>2$.

Отсюда: 1) $0<x<\frac{1}{4}$ или 2) $x>4$.

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(4;\infty)$.

9.077. $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}.$

Решение.

Имеем

$4\cdot2^x-8\cdot2^x-16\cdot2^x>5\cdot5^x-25\cdot5^x,\ \ -20\cdot2^x>-20\cdot5^x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^x<1,\ \ \left(\frac{2}{5}\right)^x<\left(\frac{2}{5}\right)^0,\ \ x>0.$

Ответ: $x\in(0;\infty)$.

9.078. $0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}00243.$

Решение.

Из условия

$$0{,}3^{2x^2-3x+6}<0{,}3^5 \Leftrightarrow 2x^2-3x+6>5,\quad 2x^2-3x+1>0,$$

$$2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)>0.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup(1;\infty).$

9.079. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0.$

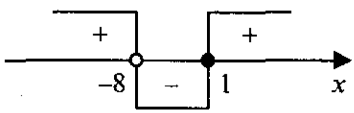
Решение.

ОДЗ: $x\neq -8.$

Перепишем неравенство в виде $\dfrac{x^2(x-1)+(x-1)}{x+8}\le 0$, $\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{x+8}\le 0$.

Так как $x^2+1>0$ при $x\in R$, то полученное неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases}(x-1)(x+8)\le 0,\\ x\neq -8.\end{cases}$

Методом интервалов получаем $x\in(-8;1]$.



Ответ: $x\in(-8;1]$

9.080. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0.$

Решение.

ОДЗ: $x\neq -1.$

Решив биквадратное уравнение $x^4-2x^2-8=0$, представим неравенство в виде $\dfrac{(x^2+2)(x^2-4)}{(x+1)^2}<0$. Так как $x^2+2>0$ при $x\in R$ и

$(x+1)^2>0$ при $x \neq -1$, то это неравенство равносильно системе неравенств $\begin{cases}(x-2)(x+2)<0, \\ x \neq -1.\end{cases}$

Ответ: $x \in (-2;-1) \cup (-1;2)$.

9.081. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<\log_{1,2}5$.

Решение.

ОДЗ: $x>2$.

Имеем $\log_{1,2}(x-2)(x+2)<\log_{1,2}5$. С учетом ОДЗ полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-4<5, \\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2<9, \\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3<x<3, \\ x>2\end{cases} \Leftrightarrow 2<x<3.$$

Ответ: $x \in (2;3)$.

9.082. $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

Решение.

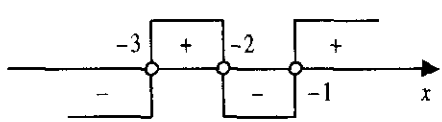
ОДЗ: $x \neq -3,\ x \neq -2,\ x \neq -1$.

Имеем

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}-1>0 \Leftrightarrow \frac{-12x^2-6}{(x+1)(x+2)(x+3)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}<0.$$

Так как $2x^2+1>0$ при $x \in R$, то полученное неравенство равносильно неравенству $(x+1)(x+2)(x+3)<0$. Методом интервалов находим $x \in (-\infty;-3) \cup (-2;-1)$.



Ответ: $x \in (-\infty;-3) \cup (-2;-1)$

9.083. $\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq -1$.

Из условия

$$\frac{1}{3^x+5}-\frac{1}{3\cdot 3^x-1}<0\Leftrightarrow \frac{3\cdot 3^x-1-3^x-5}{(3^x+5)(3\cdot 3^x-1)}<0,\quad \frac{2\cdot 3^x-6}{(3^x+5)(3\cdot 3^x-1)}<0.$$

Так как $3^x+5>0$ при $x\in R$, то это неравенство равносильно неравенству $\frac{2\cdot 3^x-6}{3\cdot 3^x-1}<0$, $(3^x-3)\left(3^x-\frac{1}{3}\right)<0$, $3^{-1}<3^x<3$, $-1<x<1$.

Ответ: $x\in(-1;1)$.

9.084. $\log_x(\log_9(3^x-9))<1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x\in(0;1)\cup(1;+\infty),\\ 3^x-9>1,\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(0;1)\cup(1;+\infty),\\ 3^x>10,\end{cases}$ $x\in(\log_3 10;+\infty)$.

Получаем следующую систему неравенств

$$\begin{cases}x>\log_3 10,\\ \log_x(\log_9(3^x-9))<\log_x x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\log_3 10,\\ \log_9(3^x-9)<x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\log_3 10,\\ \log_9(3^x-9)<\log_9 9^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\log_3 10,\\ 3^x-9<3^{2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\log_3 10,\\ (3^x)^2-3^x+9>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(\log_3 10;+\infty),\\ x\in R.\end{cases}$$

Отсюда $x\in\left(\frac{1}{\lg 3};+\infty\right)$.

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{\lg 3};+\infty\right)$

9.085. $0{,}2^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25.$

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pm 1.$

Перепишем неравенство в виде

$$5^{-\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 5^2 \Leftrightarrow -\frac{x^2+2}{x^2-1} > 2,\quad \frac{x^2+2}{x^2-1}+2<0,\quad \frac{x^2+2+2x^2-2}{x^2-1}<0,$$

$$\frac{3x^2}{x^2-1}<0,\quad \begin{cases} x \neq 0, \\ x^2-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ -1<x<1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

9.086. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}.$

Решение.

Представим данное неравенство в виде $\left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 + 5 < 5 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}$, $\left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 - 6 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5 < 0$. Решив это неравенство как квадратное относительно $5^{\sqrt{x}}$, получим $1 < 5^{\sqrt{x}} < 5,\quad 0 < \sqrt{x} < 1,\quad 0 < x < 1$.

Ответ: $x \in (0; 1)$.

9.087. $|3 - \log_2 x| < 2.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0.$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$-2 < 3 - \log_2 x < 2,\quad -5 < -\log_2 x < -1 \Leftrightarrow 1 < \log_2 x < 5,\quad 2 < x < 32.$$

Ответ: $x \in (2; 32)$.

9.088. $5 \cdot 0{,}2^{\lg x} > 0{,}04^{\lg 2}.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0.$

Имеем

$$5 \cdot 5^{-\lg x} > 5^{-2\lg 2},\quad 5^{1-\lg x} > 5^{-\lg 4} \Leftrightarrow 1 - \lg x > -\lg 4,\quad \lg x - \lg 4 < 1,$$

$$\lg\frac{x}{4} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{4} < 10,\quad 0 < x < 40.$$

Ответ: $x \in (0; 40)$.

9.089. $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0.$

Решение.

Это неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 1 \Leftrightarrow 0 < \log_5 x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt[3]{5}.$$

Ответ: $x \in \left(1; \sqrt[3]{5}\right)$

9.090. $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11.$

Решение.

ОДЗ: $x \ge 0.$

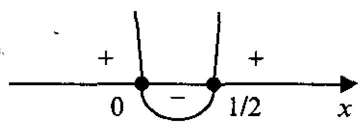
Из условия $3^{\sqrt{x}} + \frac{3^{\sqrt{x}}}{3} - \frac{3^{\sqrt{x}}}{9} < 11$, $11 \cdot 3^{\sqrt{x}} < 9 \cdot 11$, $3^{\sqrt{x}} < 3^2$. Оно равносильно неравенству $\sqrt{x} < 2$, $0 \le x < 4$.

Ответ: $x \in [0; 4)$.

9.091. $0{,}5^x \le 0{,}25^{x^2}.$

Решение.

Имеем $0{,}5^x \le 0{,}5^{2x^2} \Leftrightarrow x \ge 2x^2$, $2x^2 - x \le 0$, $x(2x-1) \le 0$. Методом интервалов получаем $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.



Ответ: $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

9.092. $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0.$

Решив это неравенство как квадратное относительно $\log_{0,5} x$, получим $-2 \le \log_{0,5} x \le 1$, $0{,}5 \le x \le 4$.

Ответ: $x \in [0{,}5; 4]$.

9.093. $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1.$

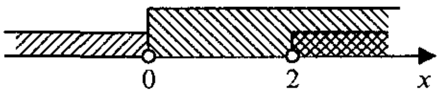
Решение.

ОДЗ: $\dfrac{x-2}{x} > 0.$

Это неравенство равносильно неравенству $\log_3 \dfrac{x-2}{x} < 0$, а последнее неравенство эквивалентно системе двух неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x} - 1 < 0, \\ \dfrac{x-2}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2}{x} < 0, \\ (x-2)x > 0. \end{cases}$$

Методом интервалов получаем $x \in (2; \infty)$.



Ответ: $x \in (2; \infty)$.

9.094. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6.$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

Перейдем к основанию 3. Получим $\log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x < 6$, $2\log_3 x < 6$, $\log_3 x < 3$, $0 < x < 27$.

Ответ: $x \in (0; 27)$.

9.095. $\log_4 (x+7) > \log_2 (x+1)$.

Решение.

ОДЗ: $x > -1$.

Перейдем к основанию 2. Имеем

$$\frac{1}{2}\log_2 (x+7) > \log_2 (x+1) \Leftrightarrow \log_2 (x+7) > 2\log_2 (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+7) > \log_2 (x+1)^2.$$

Последнее неравенство равносильно с учетом ОДЗ системе неравенств

$$\begin{cases} x+7>(x+1)^2, \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<2, \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2.$$

Ответ: $x \in (-1; 2)$.

Решения к главе 10

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольный треугольник (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие им углы; p — полупериметр; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S = \frac{1}{2} a h_a ; \tag{10.1}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha ; \tag{10.2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} ; \tag{10.3}$$

$$r = \frac{S}{p} ; \tag{10.4}$$

$$R = \frac{abc}{4S} ; \tag{10.5}$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} ; \tag{10.6}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (теорема косинусов);} \tag{10.7}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \text{ (теорема синусов).} \tag{10.8}$$

2. Прямоугольный треугольник (a, b — катеты; c — гипотенуза; a_c, b_c — проекции катетов на гипотенузу):

$$S = \frac{1}{2} ab ; \tag{10.9}$$

$$S=\frac{1}{2}ch_c\,; \tag{10.10}$$

$$r=\frac{a+b-c}{2}\,; \tag{10.11}$$

$$R=\frac{c}{2}\,; \tag{10.12}$$

$$a^2+b^2=c^2 \text{ (теорема Пифагора)}; \tag{10.13}$$

$$\frac{a_c}{h_c}=\frac{h_c}{b_c}\,; \tag{10.14}$$

$$\frac{a_c}{a}=\frac{a}{c}\,; \tag{10.15}$$

$$\frac{b_c}{b}=\frac{b}{c}\,; \tag{10.16}$$

$$a=c\sin\alpha=c\cos\beta=b\,\mathrm{tg}\,\alpha=b\,\mathrm{ctg}\,\beta\,. \tag{10.17}$$

3. Равносторонний треугольник:

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,; \tag{10.18}$$

$$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\,; \tag{10.19}$$

$$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}\,. \tag{10.20}$$

4. Произвольный выпуклый четырехугольник (d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними; S — площадь):

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\,. \tag{10.21}$$

5. Параллелограмм (a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a):

$$S=ah_a=ab\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi\,. \tag{10.22}$$

6. Ромб:

$$S=ah_a=a^2\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1d_2\,. \tag{10.23}$$

7. Прямоугольник:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi . \tag{10.24}$$

8. Квадрат (d — диагональ):

$$S = a^2 = d^2/2 . \tag{10.25}$$

9. Трапеция (a и b — основания; h — расстояние между ними; l — средняя линия):

$$l = \frac{a+b}{2} ; \tag{10.26}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = lh . \tag{10.27}$$

10. Описанный многоугольник (p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности):

$$S = pr . \tag{10.28}$$

11. Правильный многоугольник (a_n — сторона правильного n-угольника; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности):

$$a_3 = R\sqrt{3} ; \; a_4 = R\sqrt{2} ; \; a_6 = R ; \tag{10.29}$$

$$S = \frac{n a_n r}{2} . \tag{10.30}$$

12. Окружность, круг (r — радиус; C — длина окружности; S — площадь круга):

$$C = 2\pi r ; \tag{10.31}$$

$$S = \pi r^2 . \tag{10.32}$$

13. Сектор (l — длина дуги, ограничивающей сектор; n° — градусная мера центрального угла; α — радианная мера центрального угла):

$$l = \frac{\pi r n^\circ}{180^\circ} = r\alpha ; \tag{10.33}$$

$$S = \frac{\pi r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2 \alpha . \tag{10.34}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

2. Длина медианы треугольника выражается формулой

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника.

3. Длина стороны треугольника выражается формулой

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2},$$

где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника.

4. Биссектриса делит сторону треугольника на отрезки, пропорциональные двум другим его сторонам.

5. Длина биссектрисы треугольника выражается формулой

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1},$$

где a и b — длины двух сторон треугольника ABC; a_1 и b_1 — отрезки третьей стороны.

6. Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон a, b и c по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

7. Для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом r вписанной окружности выражается формулой

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

8. Площадь S равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е. $S = h^2$.

9. Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований.

Доказательство всех этих дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

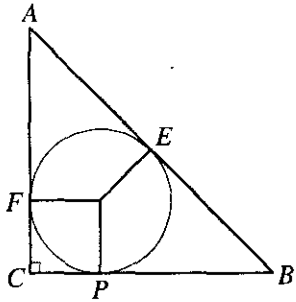


Рис. 10.1

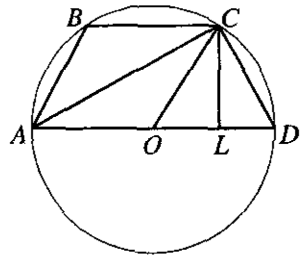


Рис. 10.2

10.001. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.

Решение.

По условию $AE = 5$ см, $BE = 12$ см (рис. 10.1). Обозначим через r — радиус вписанной окружности. $BE = BP = 12$ см, $PC = r$, $BC = PC + BP = 12 + r$, $AE = AF$, $CF = r$, $AC = CF + AF = r + 5$, $AB = AE + EB = 12 + 5 = 17$. ΔABC, $\angle C = 90^\circ$. Имеем $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $(r+12)^2 + (r+5)^2 = 289$, $r^2 + 17r - 60 = 0$, $r = 3$ см. Следовательно, $BC = 15$ см, $AC = 8$ см.

Ответ: 8 см, 15 см.

10.002. Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

Решение.

Так как AD — диаметр окружности (рис. 10.2), то $OD = OC = 10$ см. Проведем $CL \perp AD$; тогда $OL = 6$ см и из ΔCLO находим

$$CL = \sqrt{OC^2 - OL^2} = 8 \text{ (см)}.$$

Тогда из ΔALC и ΔCLD имеем

$$AC = \sqrt{CL^2 + AL^2} = \sqrt{64 + 256} = 8\sqrt{5} \text{ (см)}$$

и

$$CD = \sqrt{CL^2 + LD^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$ и $8\sqrt{5}$ см.

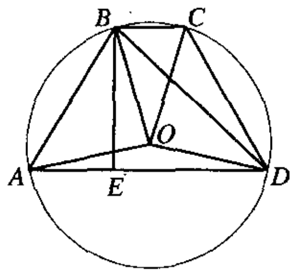


Рис. 10.3

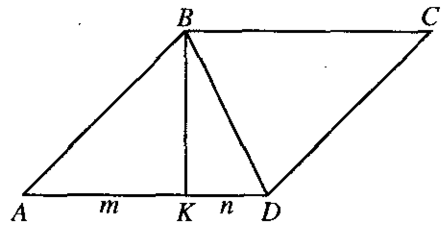


Рис. 10.4

10.003. В равнобедренной трапеции даны основания $a=21$ см, $b=9$ см и высота $h=8$ см. Найти радиус описанного круга.

Решение.

Трапеция $ABCD$ вписана в круг (рис. 10.3). Значит, ΔABD — вписан.

$BC=9$ см, $AD=21$ см, $BE=h=8$ см, $AE=\dfrac{21-9}{2}$; ΔAEB, $\angle BEA=90^\circ$.

Имеем

$$AB=\sqrt{64+36}=10 \text{ см}; \ \Delta BED,\ \angle BED=90^\circ.$$

Имеем

$$ED=AD-AE=21-6=15 \text{ см},\ BD=\sqrt{225+64}=17 \text{ см}.$$

Обозначим через R радиус описанного круга:

$$R=\frac{AB\cdot BD\cdot AD}{4S_{\Delta ABD}}=\frac{17\cdot 10\cdot 21}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 21}=10{,}625 \text{ см}.$$

Ответ: 10,625 см.

10.004. Высота ромба, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки длиной m и n. Определить диагонали ромба.

Решение.

Длина стороны ромба равна $m+n$. Из ΔABK (рис. 10.4) находим $BK^2=(m+n)^2-m^2$. В ΔBKD имеем

$$BD^2=BK^2+n^2=(m+n)^2-m^2+n^2=2n(m+n),$$

т.е. $BD=\sqrt{2n(m+n)}$.

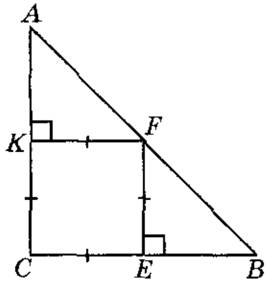


Рис. 10.5

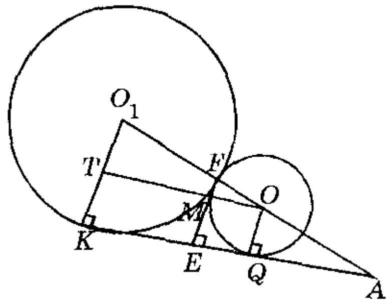


Рис. 10.6

Так как $AC^2+BD^2=4AD^2=4(m+n)^2$, то

$$AC^2=4(m+n)^2-2mn-2n^2=4m^2+6mn+2n^2,$$

т.е $AC=\sqrt{4m^2+6mn+2n^2}$.

Ответ: $BD=\sqrt{2n(m+n)}, AC=\sqrt{4m^2+6mn+2n^2}$.

10.005. В прямоугольный треугольник с катетами a и b вписан квадрат, имеющий имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

Решение.

Обозначим сторону квадрата через x (рис. 10.5). Так как $\Delta ACB \sim \Delta FEB$, то $\frac{a}{x}=\frac{b}{b-x}$. Имеем

$$x=\frac{ab}{a+b}, P=4x=\frac{4ab}{a+b}.$$

Ответ: $\frac{4ab}{a+b}$.

10.006. Две окружности радиусов $R=3$ см и $r=1$ см касаются внешним образом. Найти растояние от точки касания окружностей до их общих касательных.

Решение.

Обозначим $FM=x$ (рис. 10.6). Из $\Delta O_1TO \sim \Delta FMO$ имеем $\frac{R-r}{x}=\frac{R+r}{r}$, отсюда $x=\frac{r(R-r)}{R+r}$, $EF=x+r=\frac{r(R-r)}{R+r}+r=\frac{2Rr}{R+r}=$ $=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ см. Если же в качестве общей касательной окружностей рассматривать прямую EF, то искомое расстояние равно нулю.

Ответ: 0 и $\frac{3}{2}$ см.

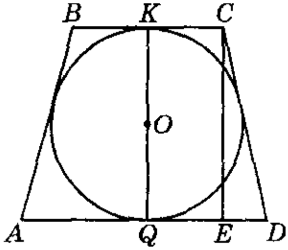


Рис. 10.7

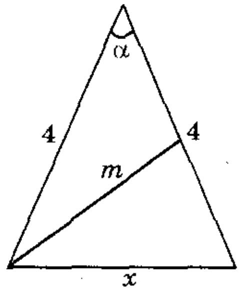


Рис. 10.8

10.007. Около окружности диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

Решение.

По условию $KQ = 15$ см, $AB = CD = 17$ см, $BC + AD = AB + CD = 34$. В ΔCED $\angle CED = 90°$, $CE = KQ$ (рис. 10.7) Имеем $DE = \sqrt{289-225} = 8$ см,

$AD = 2ED + BC = 16 + BC$, $BC + 16 + BC = 34$, $BC = 9$ см, $AD = 25$ см.

Ответ: 9 см; 25 см.

10.008. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найти основание треугольника, если медиана равна 3 см.

Решение.

Используя теорему косинусов, получим $\begin{cases} x^2 = 16 + 16 - 2 \cdot 16 \cos\alpha, \\ m^2 = 16 + 4 - 2 \cdot 8 \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2m^2 = -8$, $x^2 = 10$, $x = \sqrt{10}$ (рис. 10.8).

Ответ: $\sqrt{10}$ см.

10.009. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Решение.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, где $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (рис.10.9),

т.е. $S_{\Delta ABC} = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2). Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной в треугольник окружностей. Тогда

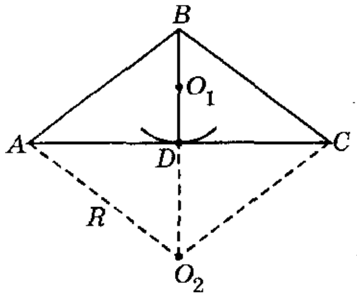


Рис. 10.9

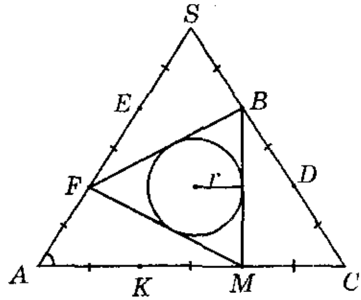


Рис. 10.10

$$R=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S}=\frac{10\cdot 10\cdot 16}{4\cdot 48}=\frac{25}{3}(\text{см}),\ r=\frac{S}{p}=\frac{48}{18}=\frac{8}{3}(\text{см}),$$

где p — полупериметр ΔABC. Расстояние между центрами $O_1O_2=O_2B-O_1B=O_2B-(BD-O_1D)=R-(6-r)=R+r-6=$

$$=\frac{25}{3}+\frac{8}{3}-6=11-6=5\ (\text{см}).$$

Ответ: $\frac{8}{3}$, $\frac{25}{3}$ и 5 см.

10.010. Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части, и соответственные точки деления, считая в одном направлении, соединены между собой. В полученный правильный треугольник вписана окружность радиуса $r=6$ см. Определить стороны треугольников.

Решение.

По условию $AS=CS=AC$, $SB=BD=DC=MC=KM=AK=AF=$ $=FE=ES$, $r=6$ см (рис.10.10). $S_{\Delta FBM}=\frac{FB+BM+FM}{2}\cdot r=\frac{3FB}{2}\cdot r$.

$S_{\Delta FBM}=FB^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, т.е. $FB=12\sqrt{3}$ см. В ΔAFM $\angle\Delta FAM=60^\circ$, $AF=\frac{AS}{3}$.

$AM=\frac{2}{3}AC$, $FM^2=AF^2+AM^2-2\cdot AF\cdot AM\cdot\cos\angle FAM$ (по теореме косинусов), откуда $FM^2=\frac{AS^2}{9}+\frac{4}{9}AS^2-2\cdot\frac{2}{9}AS^2\cdot\frac{1}{2}$, $FM^2=\frac{3AS^2}{9}$;

$FM=\frac{AS}{\sqrt{3}}$, $AS=FM\cdot\sqrt{3}$, $FM=BF$, $AS=12\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=36$ см.

Ответ: $12\sqrt{3}$ см и 36 см.

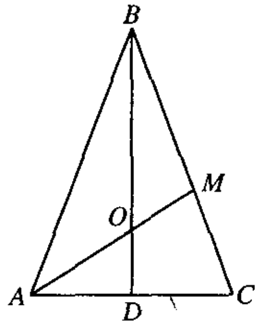


Рис. 10.11

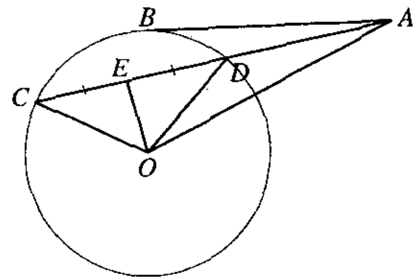


Рис. 10.12

10.011. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

Решение.

Так как ΔABC — равнобедренный, то высота BD является медианой (рис. 10.11); далее, точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, откуда $AO=\frac{10}{3}$ (см). Из ΔAOD получим

$$OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{28}}{3} \text{ (см)},$$

т.е. $BD=\sqrt{28}$ (см). Из ΔBDC имеем $BC=\sqrt{\left(\sqrt{28}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=6$ (см).

Ответ: $BC=6$ см.

10.012. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая (рис. 10.12). Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

Решение.

По условию $AC=32$ см, $EO=5$ см, $AB=16$ см, $AB^2=AC\cdot AD$,

$$256=32\cdot AD,\ AD=8 \text{ см}, CE=\frac{AC-AD}{2}=12 \text{ см}, CO=\sqrt{25+144}=13 \text{ см}.$$

Ответ: 13 см.

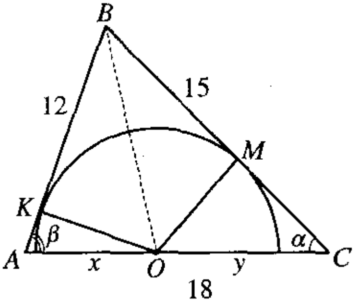


Рис. 10.13

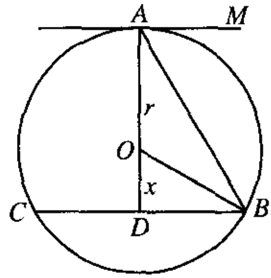


Рис. 10.14

10.013. Дан треугольник со сторонами 12, 15 и 18 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне. Найти отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

Решение.

Используя теорему косинусов, из рис. 10.13 имеем:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 12^2 = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$;

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 15^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos\beta$, $\cos\beta = \dfrac{9}{16}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.

$\sin\alpha = \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{R}{18-x}$, $\sin\beta = \dfrac{OK}{AO} = \dfrac{R}{x}$ и $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{x}{18-x} = \dfrac{4}{5}$.

$5x = 72 - 4x$, $9x = 72$, $x = 8$, $y = 10$. $AO = 8$ см, $OC = 10$ см.

Ответ: 8 и 10 см.

10.014. Хорда окружности равна 10 см. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определить радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см.

Решение.

Проведем радиус в точку A; так как $OA \perp AM$, то $OA \perp BC$ и $BD = 6$ см (рис. 10.14). Пусть $OA = r$, $OD = x$. Тогда $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 8$, т.е. $r + x = 8$ (1). Но $OD^2 = OB^2 - BD^2$ или $r^2 - x^2 = 36$; так как

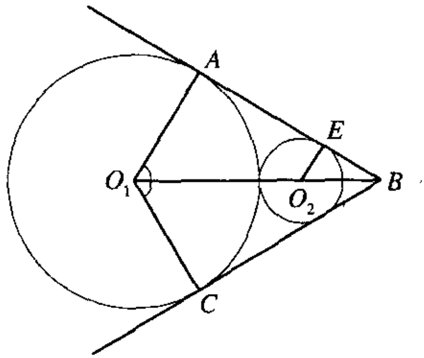


Рис. 10.15

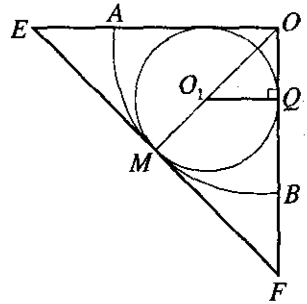


Рис. 10.16

$r^2 - x^2 = (r+x)(r-x)$, то $r - x = 36/8 = 9/2$ (2). Решив систему уравнений (1) и (2), найдем $r = 6{,}25$ (см).

Ответ: 6,25 см.

10.015. Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные, и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Доказать, что ее длина равна длине исходной дуги.

Решение.

Обозначим через r — радиус вписанной окружности, R — радиус дуги. $\angle AO_1B = 60^\circ$, $\angle BAO_1 = 90^\circ$ (рис. 10.15), значит, $\angle ABO_1 = 30^\circ$. Из ΔBAO_1 имеем $BO_1 = \dfrac{R}{\sin 30^\circ} = 2R$, из ΔBEO_2 $\angle BEO_2 = 90^\circ$. Отсюда $BO_2 = 2r$, $O_1O_2 = 2(R - r)$. По условию получим, что $O_1O_2 = R + r$, $2(R - r) = R + r$, $R = 3r$, $r = \dfrac{R}{3}$; таким образом, $l_1 = 2\pi \cdot r = \dfrac{2\pi R}{3}$ — длина вписанной окружности, $l_2 = R \cdot \alpha = R \cdot \dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, $l_1 = l_2$, что и требовалось доказать.

10.016. В сектор AOB с радиусом R и углом 90° вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB (рис. 10.16). Найти радиус окружности.

Решение.

ΔOMF — равнобедренный ($\angle MOB = \angle MFO = 45^\circ$). Отсюда $MO = MF$, $OF = R\sqrt{2}$. Из $\Delta O_1QO \sim \Delta OMF$ имеем $\dfrac{r}{R} = \dfrac{R - r}{\sqrt{2}R}$, $r = R(\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: $R(\sqrt{2} - 1)$

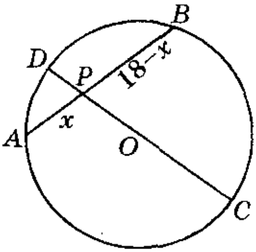
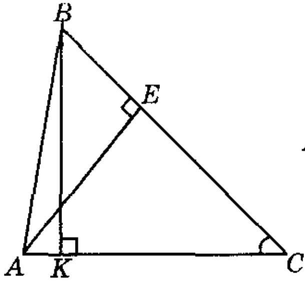


Рис. 10.17

Рис. 10.18



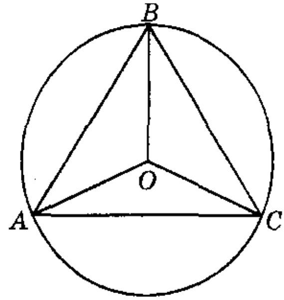


Рис. 10.19

10.017. Дана точка P, удаленная на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18 см. Каковы длины отрезков, на которые делится хорда точкой P?

Решение.

Проведем диаметр CD через точку P (рис. 10.17), которая разделит его на отрезки PD и CP длиной $11-7=4$ и $11+7=18$ (см). Пусть $AP=x$; тогда $PB=18-x$. Так как $AP\cdot PB=CP\cdot PD=4\cdot 18$, то $x(18-x)=72$ или $x^2-18x+72=0$, откуда $x_1=12$, $x_2=6$, т.е. хорда AB делится точкой P на отрезки длиной 12 и 6 см.

Ответ: 12 и 6 см.

10.018. Найти длины сторон AB и AC треугольника ABC, если $BC=8$ см, а длины высот, проведеных к AC и BC, равны соответственно 6,4 и 4 см.

Решение.

По условию $BC=8$ см, $AE=4$ см, $BK=6{,}4$ см (рис. 10.18).Из $\Delta BKC\sim\Delta AEC$ следует, что $\frac{6.4}{4}=\frac{8}{AC}$; $AC=5$ см. Из ΔAEC имеем $CE=\sqrt{25-16}=3$ см, BE = 8 – 3 = 5 см; тогда из ΔAEB находим $AB=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$ см.

Ответ: $\sqrt{41}$ см, 5 см.

10.019. Площадь равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна Q^2 (рис. 10.19). Доказать, что радиус окружности равен $2Q\sqrt[4]{3}/3$.

Решение.

По условию $S_{\Delta ABC}=Q^2$, $AB=BC=AC$. Пусть $BO=OC=AO=R$, тогда $3S_{\Delta AOC}=Q^2$, $3R^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 120^\circ=Q^2$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2=Q^2$, $R=\sqrt{\frac{4}{3\sqrt{3}}Q^2}=$

$=\frac{2Q\sqrt[4]{3}}{3}$, что и требовалось доказать.

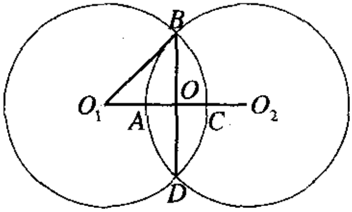


Рис. 10.20

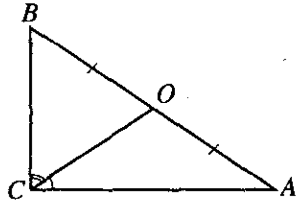


Рис. 10.21

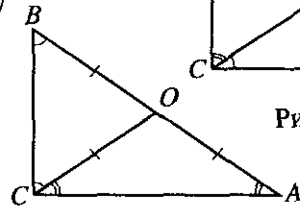


Рис. 10.22

10.020. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найти радиус окружности.

Решение.

По условию $ABCD$ — ромб, $BD=12$ см, $AC=6$ см (рис. 10.20). Обозначим: $O_1O=x$, R — радиус окружностей. Тогда $x=R-\frac{AC}{2}=R-3$.

В ΔO_1OB $\angle O_1OB=90^\circ$, $R^2=36+(R-3)^2$, $R=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}$ см.

Ответ: 7,5 см.

10.021. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1:2. Найти стороны треугольника.

Решение.

По условию $CO=m$, $AO=BO$, $\frac{\angle BCO}{\angle ACO}=\frac{2}{1}$, $AB=2m$ (O — центр описанной окружности) (рис.10.21). Обозначим $\angle ACO=x$, $\angle BCO=2x$,

$x+2x=90^\circ$, $x=30^\circ$, $\angle ACO=\angle CAO$. В ΔABC $\angle ACB=90^\circ$,

$BC=2m\cdot\sin 30^\circ=m$, $AC=\sqrt{4m^2-m^2}=m\sqrt{3}$.

Ответ: m; $m\sqrt{3}$; $2m$.

10.022. Определить острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 1:2.

Решение.

$AO=OB$, $\frac{\angle BCO}{\angle ACO}=\frac{2}{1}$ (рис. 10.22). В ΔABC $\angle ACB=90^\circ$; таким образом, O — центр описанной окружности, значит, $AO=OB=CO$, ΔAOC — равнобедренный, $\angle A=\angle OCA$, $\angle B=\angle BCO$. Обозначим

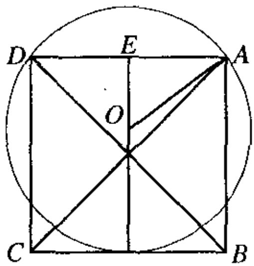


Рис. 10.23

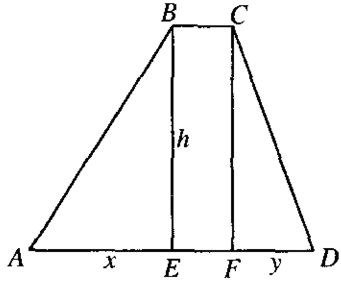


Рис. 10.24

$\angle OCA = x$, значит, $\angle BCO = 2x$, $x + 2x = 90^\circ$, $x = 30^\circ$, таким образом, $\angle A = 30^\circ$, $\angle BCO = \angle B = 60^\circ$.

Ответ: 30°, 60°.

10.023. Дан квадрат, две вершины которого лежат на окружности радиуса R, две другие — на касательной к этой окружности. Найти длину диагонали квадрата.

Решение.

Пусть x — сторона квадрата (рис. 10.23), в ΔOEA $\angle OEA = 90^\circ$, $EA^2 = OA^2 - OE^2, R^2 - (x - R)^2 = \frac{x^2}{4}, \frac{x^2}{4} + x^2 = 2xR; x = \frac{8R}{5}; AC = x\sqrt{2} = = \frac{8R}{5} \cdot \sqrt{2} = 1{,}6R\sqrt{2}$.

Ответ: $1{,}6R\sqrt{2}$.

10.024. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4 см, а длины непараллельных сторон — 20 и 13 см. Найти высоту трапеции.

Решение.

По условию $BC = 4$ см, $AD = 25$ см, $AB = 20$ см, $CD = 13$ см (рис. 10.24). Проведем $BE \perp AD$ и $CF \perp AD$. Пусть $BE = CF = h$, $AE = x$, $FD = y$. Тогда из ΔABE и ΔCFD находим $h^2 = 20^2 - x^2 = 13^2 - y^2$. Учитывая, что $y = 25 - 4 - x = 21 - x$, имеем $20^2 - x^2 = 13^2 - (21 - x)^2$ или $42x = 672$, откуда $x = 16$ (см). Итак, $h = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

10.025. Общая хорда двух окружностей служит для одной из них стороной вписанного квадрата, а для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найти расстояние между центрами окруж-

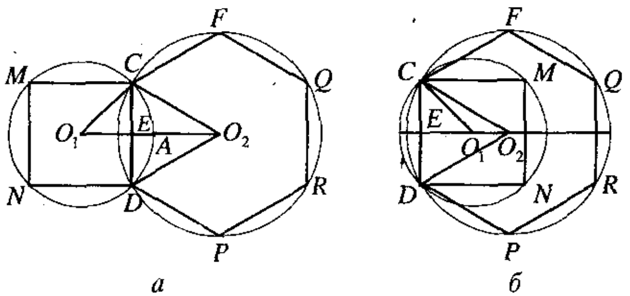


Рис. 10.25

ностей, если радиус меньшей из них равен r (рассмотреть два возможных случая расположения окружностей).

Решение.

1-й случай. По условию $O_1A = r$, $CD = 2CE$; ΔO_1EC — равнобедренный, $\angle O_1EC = 90°$, $CE = r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$, $CD = r\sqrt{2}$, $R = r\sqrt{2}$ (рис. 10.25,*а*).

Обозначим

$$CD = a = r\cdot\sqrt{2},\ O_1E = \frac{a}{2} = \frac{CD}{2} = r\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \Delta CEO_2,\ \angle CEO_2 = 90°,$$

$$EO_2 = CE\cdot\operatorname{ctg}30° = \frac{CD}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{6}}{2},$$

$$O_1O_2 = \frac{r\sqrt{6}}{2} + \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{r\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}.$$

2-й случай. $O_1O_2 = EO_2 - EO_1$, $CD = r\cdot\sqrt{2}$, $EO_1 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, $EO_2 = r\sqrt{6}/2$,

$$O_1O_2 = \frac{r\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$$ (рис. 10.25, *б*).

Ответ: $\frac{r\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}$; $\frac{r\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$.

10.026. Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет 2/3 внутреннего отрезка секущей. Определить длину касательной.

Решение.

По условию $AB = 12$ см, $AC = \frac{2}{3}DB$ (рис. 10.26). Обозначим $BD = x$,

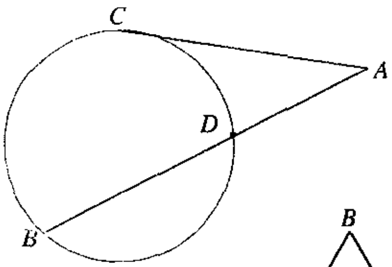


Рис. 10.26

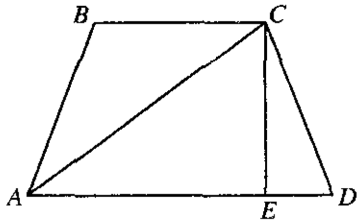


Рис. 10.28

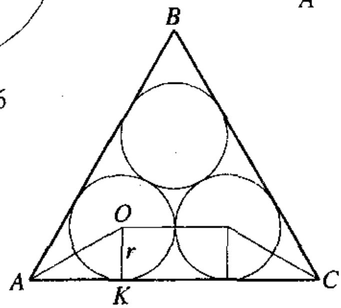


Рис. 10.27

тогда $AC^2 = AB \cdot AD$, $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 12(12-x)$, $x^2 + 27x - 324 = 0$, $x = 9$ см, $AC = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ см.

Ответ: 6 см.

10.027. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найти площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

Решение.

Треугольник ABC — правильный (рис. 10.27); поэтому его площадь равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Проведем $OK \perp AC$. Так как $\angle OAK = 30^\circ$, то $AO = 2r$, $AK = r\sqrt{3}$, откуда $a = 2r\sqrt{3} + 2r = 2r(\sqrt{3}+1)$.

Следовательно, $S = \frac{4r^2(3 + 2\sqrt{3} + 1)\sqrt{3}}{4} = 2r^2(2\sqrt{3}+3)$.

Ответ: $2r^2(2\sqrt{3}+3)$

10.028. Основания равнобедренной трапеции a и b, боковая сторона ее равна c, а диагональ равна d. Доказать, что $d^2 = ab + c^2$.

Решение.

По условию $BC = a$, $AC = d$, $CD = c$, $AD = b$ (рис. 10.28). В ΔCED

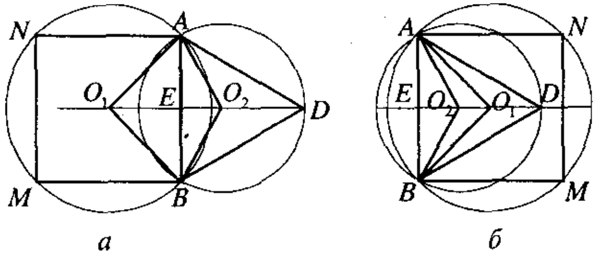


Рис. 10.29

$\angle CED = 90^\circ$, $CE^2 = c^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$. В ΔAEC $\angle AEC = 90^\circ$, $d^2 = c^2 -$

$-\frac{b^2 - 2ab + a^2}{4} + \frac{b^2 + 2b \cdot a + a^2}{4}$; $d^2 = b \cdot a + c^2$, что и требовалось доказать.

10.029. Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна a и служит для одной окружности стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Определить расстояние между центрами окружностей (рассмотреть два возможных случая).

Решение.

1-й случай. По условию $AB = a = AN = NM = MB = BD = AD$, $O_1E = \frac{a}{2}$,

$\angle BO_2E = 2\angle EDB = 60^\circ$, $O_2E = EB \cdot \mathrm{ctg}\, 60^\circ = \frac{a}{2\sqrt{3}}$,

$O_1O_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}} + \frac{a}{2} = \frac{a}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)$ (рис. 10.29, *а*).

2-й случай. $O_1O_2 = O_2E - EO_1$, $EO_1 = \frac{a}{2}$, $EO_2 = EB \cdot \mathrm{ctg}\, 60^\circ = \frac{a}{2\sqrt{3}}$;

$O_1O_2 = \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{2} = \frac{a}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right)$ (рис. 10.29, *б*).

Ответ: $a\left(3 + \sqrt{3}\right)/6$, $a\left(3 - \sqrt{3}\right)/6$.

10.030. На сторонах квадрата вне его построены правильные треугольники, и их вершины последовательно соединены. Определить отношение периметра полученного четырехугольника к периметру данного квадрата.

Решение.

Обозначим сторону квадрата через x, тогда периметр квадрата

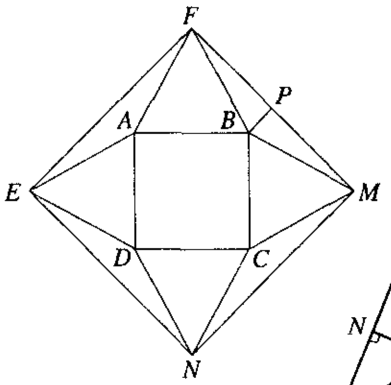


Рис. 10.30

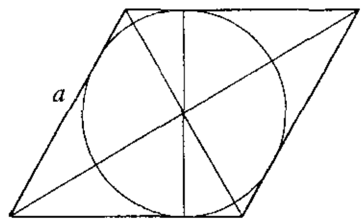


Рис. 10.31

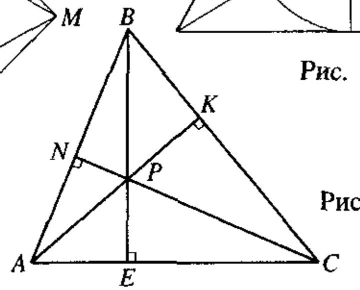


Рис. 10.32

$P_0 = 4x$, ΔFBM — равнобедренный, $\angle FBM = 360^\circ - 90^\circ - 2\cdot 60^\circ = 150^\circ$, $FM = \sqrt{2x^2 - 2x^2\cdot\cos 150^\circ} = x\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (рис. 10.30). Таким образом,

$$P_{EFMN} = 4x\sqrt{2+\sqrt{3}},\ \frac{P}{P_0} = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

10.031. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2. Найти сторону ромба.

Решение.

Пусть a — сторона ромба, а d_1 и d_2 — его диагонали (рис. 10.31). Так как высота ромба равна диаметру окружности, то его площадь a.

С другой стороны, $S = \frac{1}{2}d_1d_2$, откуда, учитывая, что $d_1 = a$, находим $d_2 = 8$. Но $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ или $a^2 = \frac{a^2}{4} + 16$, т.е. $a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $8\sqrt{3}/3$.

10.032. В треугольнике длины двух сторон составляют 6 и 3 см (рис. 10.32). Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

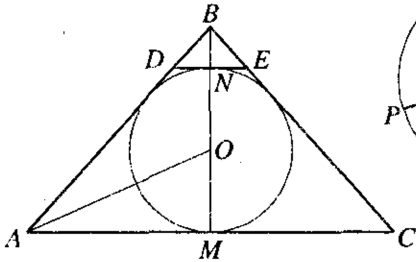


Рис. 10.33

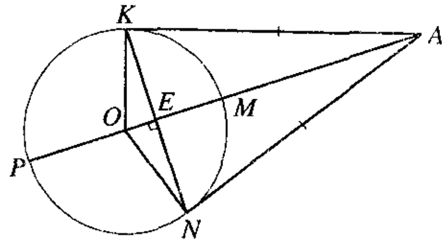


Рис. 10.34

Решение.

По условию $AC = 6$ см, $BC = 3$ см. Обозначим через h_a, h_b, h_c — высоты. Тогда $\frac{h_a + h_b}{2} = h_c$. $\Delta BEC \sim \Delta AKC \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{h_b}{h_a}$; $\Delta ANC \sim \Delta AEB \Rightarrow \frac{h_c}{h_b} = \frac{6}{AB}$. $\frac{h_a + h_b}{2h_b} = \frac{6}{AB} \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} + 1 = \frac{12}{AB}$, $2 + 1 = \frac{12}{AB}$, $AB = 4$ см.

Ответ: 4 см.

10.033. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

Решение.

Найдем длину боковой стороны BC (рис. 10.33): $BC = \sqrt{BM^2 + MC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см). Учитывая, что AO — биссектриса ΔABM, имеем $MO/OB = AM/AB$ или $r/(8-r) = 6/10$, откуда $r = 3$ (см). Так как $DE \| AC$, то $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, т.е. $DE/AC = BN/BM$ или $DE/12 = (8-2r)/8$, откуда $DE = 3$ см.

Ответ: 3 см.

10.034. Из одной точки проведены к окружности две касательные (рис. 10.34). Длина каждой касательной 12 см, а расстояние между точками касания 14,4 см. Определить радиус окружности.

Решение.

По условию $AK = AN = 12$ см, $KN = 14,4$ см. В ΔAEK $\angle AEK = 90°$,

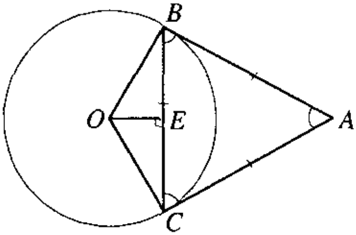


Рис. 10.35

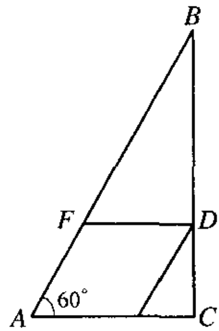


Рис. 10.36

$AE = \sqrt{144-(7{,}2)^2} = 9{,}6$ см, $KE^2 = AE \cdot OE$, $OE = \dfrac{(7{,}2)^2}{9{,}6} = 5{,}4$. В ΔKEO

$\angle KEO = 90^\circ$, $R = \sqrt{51{,}84+29{,}16} = 9$ см.

Ответ: 9 см.

10.035. Из точки A проведены две прямые, касающиеся окружности радиуса R в точках B и C так, что треугольник ABC — равносторонний. Найти его площадь (рис. 10.35).

Решение.

По условию $OB = OC = R$, $AB = AC = BC$. Так как ΔABC — равносторонний, то $S = BC^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$; $\angle ABO = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle CBO = 30^\circ$,

$BC = 2 \cdot R \cdot \cos 30 = \sqrt{3} \cdot R$, $S = 3R^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $3R^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

10.036. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6 см, так, что угол 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найти стороны треугольника.

Решение.

В ΔFBD (рис. 10.36) катет $FD = 6$ см и лежит против угла в 30°, откуда $FB = 12$ см и, значит, $AB = 18$ см. Далее, в ΔABC имеем $AC = AB/2 = 9$ см. Наконец, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$ (см).

Ответ: 9, $9\sqrt{3}$ и 18 см.

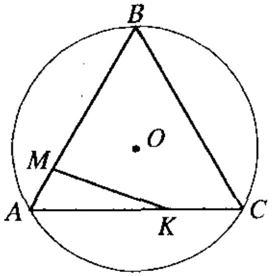


Рис. 10.37

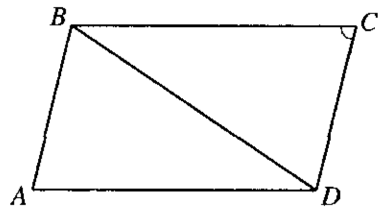


Рис. 10.38

10.037. Дан правильный треугольник ABC (рис. 10.37). Точка K делит сторону AC в отношении 2:1, а точка M — сторону AB в отношении 1:2 (считая в обоих случаях от вершины A). Показать, что длина отрезка KM равна радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.

По условию $\frac{MB}{AM}=\frac{2}{1}$; $\frac{AK}{KC}=\frac{2}{1}$. Пусть $AM=x$. Так как ΔABC — правильный, то $\angle BAC=60^\circ$ и $KM^2=AM^2+AK^2-2\cdot AM\cdot AK\cos 60^\circ$;

$KM^2=4x^2+x^2-4x^2\cdot\cos 60^\circ$, $KM^2=3x^2$; $KM=x\sqrt{3}$; $R=AB\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$AB=3x$; $R=3x\frac{\sqrt{3}}{3}=x\sqrt{3}$. Значит, $R=KM$.

Что и требовалось показать.

10.038. Периметр параллелограмма равен 90 см и острый угол содержит 60° (рис. 10.38). Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найти стороны параллелограмма.

Решение.

По условию $2BC+2CD=90$ см, $\angle BCD=60^\circ$, $\frac{\angle ABD}{\angle DBC}=\frac{3}{1}$. Имеем $BC+CD=45$, $\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$. Пусть $\angle CBD=x$, $\angle ABD=3x$, следовательно, $3x+x+60^\circ=180^\circ$ и $x=30^\circ$, $\angle ABD=90^\circ$. В ΔABD

$AB=AD\cdot\cos 60^\circ$, $AB=\frac{AD}{2}=\frac{BC}{2}$, $AB=CD$; $BC+\frac{BC}{2}=45$, $3BC=90$;

$BC=30$ см. $AD=DC=15$ см.

Ответ: 15 и 30 см.

10.039. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом (рис. 10.39). Найти длины сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2, а длина высоты равна 2 см.

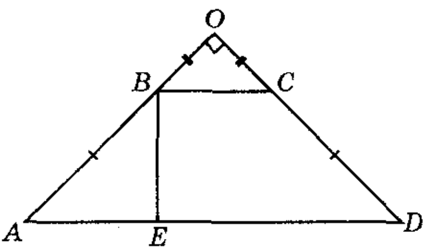


Рис. 10.39

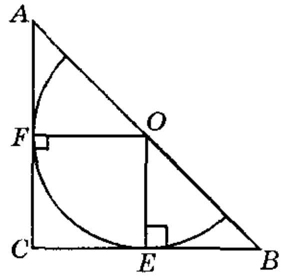


Рис. 10.40

Решение.

По условию $S_{\Delta ABCD} = 12\text{ см}^2, BE = 2\text{ см}; \angle OAD = \angle ODA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$,

$\frac{BE}{\sin 45^\circ} = AB,\ AB = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 2\sqrt{2} = CD,\ AE = BE = 2,\ \frac{BC + AD}{2} \cdot BE = 12,$

$\frac{BC + AD}{2} \cdot 2 = 12, BC + AD = 12$, тогда $2BC + 2AE = 12,\ BC + AE = 6,$

$BC + 2 = 6,\ BC = 4\text{ см},\ AD = 4 + 4 = 8$ см.

Ответ: 4 и 8 см; $2\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$ см.

10.040. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки длиной 15 и 20 см (рис. 10.40). Найти площадь треугольника и длину вписанной полуокружности.

Решение.

По условию $AO = 20\text{ см}, OB = 15$ см. Обозначим через r радиус полуокружности; $\Delta AFO \sim \Delta OEB$, имеем $\frac{20}{15} = \frac{r}{\sqrt{225 - r^2}};\ 4\sqrt{225 - r^2} = 3r;$

$16(225 - r^2) = 9r^2, r^2 = 9 \cdot 16, r = 12$ см; $l = \pi r = 12\pi$. В$\Delta AFO\ \angle AFO = 90^\circ$,

$AC = \sqrt{400 - 144} + 12 = 28, BC = \sqrt{225 - 144} + 12 = 21, S = \frac{28 \cdot 21}{2} = 294\text{ см}^2$.

Ответ: $294\text{ см}^2, 12\pi\text{ см}$.

10.041. Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$ см. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\sqrt{75}/2$ см. Найти длины сторон и большей диагонали параллелограмма.

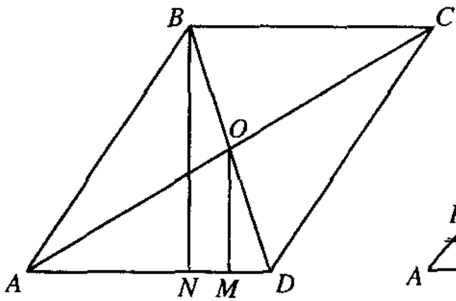


Рис. 10.41

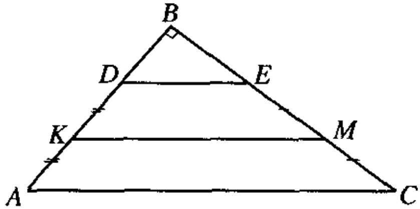


Рис. 10.42

Решение.

Проведем $BN \perp AD$ (рис. 10.41); так как $BN = 2OM$, то $BN = \sqrt{75}$ см. Учитывая, что в ΔANB $\angle ABN = 30^\circ$, имеем $AB = 2AN$ и, значит, $4AN^2 = 75 + AN^2$, откуда $AN = 5$ см и $AB = 10$ см. Далее, из ΔBND получим $ND^2 = BD^2 - BN^2 = 124 - 75 = 49$; следовательно, $ND = 7$ см и $AD = 12$ см. Наконец, из равенства $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$ находим $AC^2 = 200 + 288 - 124 = 364$, т.е. $AC = 2\sqrt{91}$ см.

Ответ: 12; 10 и $2\sqrt{91}$ см.

10.042. Один из углов трапеции равен 30°, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, пересекаются под прямым углом (рис. 10.42). Найти длину меньшей боковой стороны трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а одно из оснований 8 см.

Решение.

По условию $\angle BCA = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, $KM = 10$ см, $DE = 8$ см, $\frac{8 + AC}{2} = 10$, $AC = 12$ см (так как KM — средняя линия). Так как $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, то $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}$; $\frac{x + DB}{DB} = \frac{12}{8}$ (где $AD = x$), $x = DB \cdot \frac{1}{2}$. В ΔDBE, $\angle DBE = 90^\circ$, $\angle BED = \angle BCA = 30^\circ$, $DB = DE \cdot \sin 30^\circ = 8/2 = 4$,

значит, $x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ см.

Ответ: 2 см.

10.043. В окружность, диаметр которой равен $\sqrt{12}$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой пра-

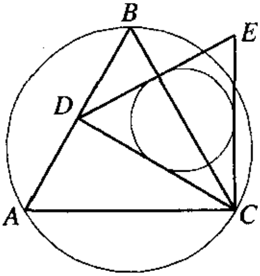


Рис. 10.43

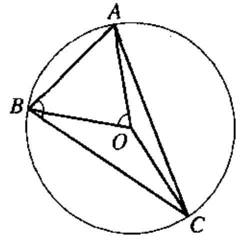


Рис. 10.44

вильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найти радиус этой окружности.

Решение.

По условию $R = 0{,}5\sqrt{12}$. Сторона AB правильного вписанного треугольника (рис. 10.43) равна $R\sqrt{3}$, т.е. $0{,}5\sqrt{12}\cdot\sqrt{3} = 3$. Найдем сторону CD нового треугольника: $a = \sqrt{3^2 - 1{,}5^2} = 1{,}5\sqrt{3}$. Так как радиус r вписанной в него окружности равен $a\sqrt{3}/6$, то окончательно получим $r = 1{,}5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/6 = 3/4$.

Ответ: $3/4$.

10.044. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найти радиус окружности.

Решение.

Обозначим $\angle BOA = \alpha$, тогда $\angle ACB = \dfrac{\alpha}{2}$, $a^2 = 2R^2 - 2R^2\cdot\cos\alpha$ (R — искомый радиус) (рис. 10.44). По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{b}{\sin\alpha} = 2R$,

$$\sin\alpha = \frac{b}{2R},\quad a^2 = 2R^2 - 2R^2\cdot\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - b^2},\quad \frac{a^2}{2R^2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{4R^2}};$$

$$R^2 = \frac{a^4}{4a^2 - b^2};\quad R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

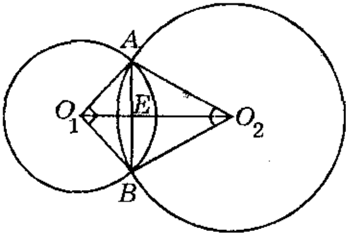


Рис. 10.45

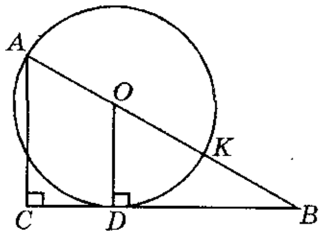


Рис. 10.46

10.045. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$.

Решение.

Пусть r — радиус одной, R — радиус другой окружности. По условию $\angle AO_1B = 90°, \angle AO_2B = 60°,\ O_1O_2 = \sqrt{3}+1;\ AB = r\sqrt{2};$

$O_1E = AB/2;\ O_1E = r\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ AB = 2R\cdot\sin 30° = R\left(\angle AO_2E = \dfrac{\angle AO_2B}{2}\right)$, значит, $R = r\sqrt{2},\ EO_2 = R\dfrac{\sqrt{3}}{2} = r\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ O_1O_2 = O_1E + O_2E = \dfrac{r\sqrt{6}}{2} + \dfrac{r\sqrt{2}}{2} =$

$= \sqrt{3}+1,\ r(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = (\sqrt{3}+1)\cdot 2,\ r = \sqrt{2};\ R = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ (рис. 10.45).

Ответ: 2 и $\sqrt{2}$.

10.046. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника, проходит через вершину противолежащего острого угла и имеет центр на гипотенузе треугольника. Каков радиус окружности, если длины катетов равны 5 и 12?

Решение.

По условию $AC = 5,\ CB = 12$ (рис. 10.46). В ΔABC $\angle C = 90°$, $AB = \sqrt{25+144} = 13$. Имеем $\Delta ACB \sim \Delta ODB \Rightarrow \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{AC}{OD}$. Пусть $OD = R$ — радиус данной окружности, тогда $\dfrac{13}{OB} = \dfrac{5}{R}$ и $OB = 13 - R$, поэтому

$\dfrac{13}{13-R} = \dfrac{5}{R};\ R = \dfrac{65}{18}.$

Ответ: $\dfrac{65}{18}$.

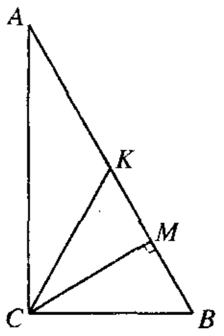


Рис. 10.47

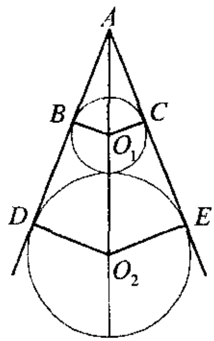


Рис. 10.48

10.047. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см (рис. 10.47). Найти длину гипотенузы.

Решение.

По условию $CK - CM = 7$ см, $P_{ABC} = 72$ см, $p = \frac{P_{ABC}}{2} = 36$. Если r — радиус вписанной окружности, то $r = p - AB$, $S = p \cdot r = p \cdot (p - AB)$. Обозначим $AB = x$, K — центр описанной окружности, $CK = AK = = KB = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$; $S = 36 \cdot (36 - x)$; $\frac{x}{2} - CM = 7$ (по условию) $CM = \frac{x}{2} - 7$;

$S = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 7\right)$. $\frac{x^2}{4} - \frac{7x}{2} = 36^2 - 36x$, $x^2 + 130x - 5184 = 0$, $x = 32$ см.

Ответ: 32 см.

10.048. В острый угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найти радиус большей окружности.

Решение.

По условию $\angle BAC = 60^\circ$, $O_1C = r$ (рис. 10.48). В ΔACO_1 $\angle ACO_1 = 90^\circ$,

$\angle O_1AC = 30^\circ$; $AO_1 = \frac{O_1C}{\sin 30^\circ} = 2O_1C = 2r$. В ΔO_2EA $\angle O_2EA = 90^\circ$;

$\Delta O_2EA \sim \Delta O_1CA \Rightarrow \frac{O_2E}{O_1C} = \frac{3r + R}{2r}$; $\frac{R}{r} = \frac{3r + R}{2r}$; $R = 3r$.

Ответ: $3r$.

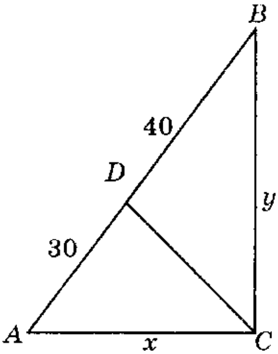


Рис. 10.49

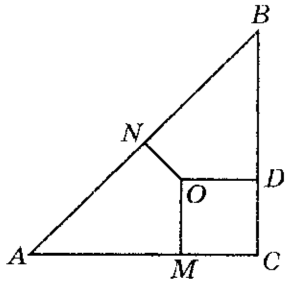


Рис. 10.50

10.049. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 и 40 см. Найти катеты треугольника.

Решение.

По условию $\angle C = 90°$, $AD = 30$ см, $BD = 40$ см (рис. 10.49). Пусть $AC = x, BC = y$. Так как точка, равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе, то $\frac{x}{y} = \frac{30}{40}$, т.е. $y = \frac{4x}{3}$. Но $x^2 + y^2 = AB^2$ или $x^2 + \frac{16x^2}{9} = 70^2$, откуда $x^2 = 1764$. Итак, $x = 42$ (см), $y = 56$ (см).

Ответ: 42 и 56 см.

10.050. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см, а катет равен 10 см.

Решение.

Проведем радиусы OD, OM и ON в точки касания (рис. 10.50) Имеем $OD = OM = CM = CD$ и, следовательно, $BD = 10 - 3 = 7$ (см). Но $BD = BN$ и $AN = AM$ (касательные, проведенные из одной точки). Положим $AN = x$; тогда $(x+7)^2 = (x+3)^2 + 10^2$, откуда $8x = 60$, т.е. $x = 7{,}5$ (см). Отсюда $AB = 14{,}5$ (см) и получаем ответ: $R = 0{,}5AB = 7{,}25$(см).

Ответ: 7,25 см.

10.051. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найти радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней окружностей равны 6 и 4 см.

Решение.

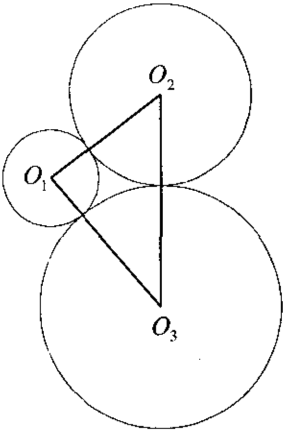


Рис. 10.51

Рис. 10.52

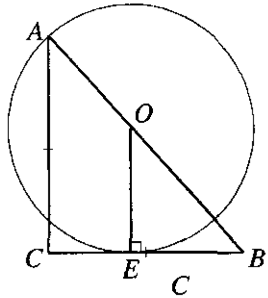
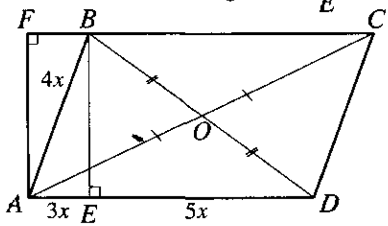


Рис. 10.53



Пусть r — радиус меньшей окружности. Тогда $O_1O_2 = r+4$, $O_1O_3 = r+6$ (рис. 10.51). Так как $O_2O_3^2 = O_1O_2^2 + O_1O_3^2$, то $10^2 = (r+4)^2 + (r+6)^2$, $r^2 + 10r - 24 = 0$, откуда $r = 2$ см (корень $r = -12$ не удовлетворяет условию).

Ответ: 2 см.

10.052. Окружность касается одного из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найти радиус окружности, если ее центр лежит на гипотенузе треугольника, а катет треугольника равен a.

Решение.

По условию $CB = a$, $AC = CB$ (рис. 10.52). Значит, $\angle CAB = \angle CBA = 45°$ (так как $\angle C = 90°$) $\Rightarrow$ $AB = a\sqrt{2}$. $\Delta ACB \sim \Delta OEB \Rightarrow \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}-R} = \dfrac{a}{R}$,

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = a\left(2-\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $a\left(2-\sqrt{2}\right)$

10.053. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла на сторону DA, делит ее в отношении 5:3, считая от вершины D (рис. 10.53). Найти отношение $AC : BD$, если $AD : AB = 2$.

Решение.

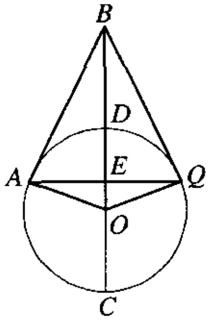
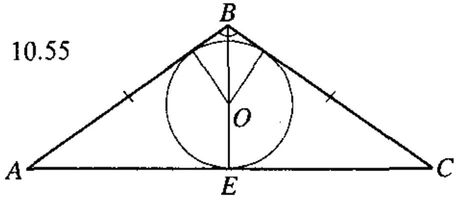


Рис. 10.54

Рис. 10.55



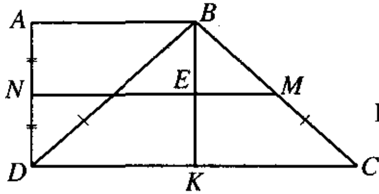


Рис. 10.56

По условию $\frac{AD}{AB}=2$, $\frac{ED}{AE}=\frac{5}{3}$; $AD=3x+5x=8x$, $\frac{8x}{AB}=2$,

$AB=4x$, $BE=\sqrt{16x^2-9x^2}=x\sqrt{7}$, $BD=\sqrt{25x^2+7x^2}=x\sqrt{32}=4x\sqrt{2}$

(ΔBED, $\angle BED=90^\circ$). В ΔAFC $\angle AFC=90^\circ$, $AC=\sqrt{FC^2+AF^2}$;

$AF=BE=x\sqrt{7}$, $FC=3x+8x=11x$, $AC=\sqrt{121x^2+7x^2}=8x\sqrt{2}$;

$\frac{AC}{BD}=\frac{8x\sqrt{2}}{4x\sqrt{2}}=2$.

Ответ: 2:1.

10.054. На основании равнобедренного треугольника, равном 8 см, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника (рис. 10.54). Найти радиус окружности, если длина высоты, проведенной на основание треугольника, равна 3 см.

Решение.

По условию $AB=BQ$, $AQ=8$ см, $BE=3$ см. $AB=\sqrt{16+9}=5$ см,

$AE^2=BE\cdot OE \Rightarrow OE\cdot 3=16$, $OE=\frac{16}{3}$. $AB^2=BD\cdot BC$,

$25=\left(R+3+\frac{16}{3}\right)\cdot\left(\frac{25}{3}-R\right)$, $R^2=\frac{625-25\cdot 9}{9}=\frac{400}{9}$, $R=\frac{20}{3}$.

Ответ: $\frac{20}{3}$ см.

10.055. В равнобедренный треугольник с углом 120° при вершине и боковой стороной a вписана окружность (рис.10.55). Найти радиус этой окружности.

Решение.

По условию $AB = BC = a$, $\angle ABC = 120°$, $\angle BAC = \angle ACB = 30°$,

$$BE = a\sin 30° = \frac{a}{2},\ S = r\cdot\frac{AB+BC+AC}{2},\ AC = 2a\cdot\cos 30° = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3};$$

$$S = \frac{1}{2}a^2\cdot\sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r\cdot(a\sqrt{3}+2a)}{2}; r = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$.

10.056. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного многоугольника, до всех прямых, содержащих его стороны, есть величина постоянная.

Решение.

Соединим любую внутреннюю точку P со всеми вершинами многоугольника и опустим перпендикуляры на все стороны (или их продолжения). Пусть длины этих перпендикуляров равны $d_1, d_2, ..., d_n$. Нужно доказать, что сумма $d_1 + d_2 + ... + d_n$ не зависит от P. Площадь многоугольника $S = 0{,}5a(d_1 + d_2 + ... + d_n)$, где a — сторона многоугольника. Значит, $d_1 + d_2 + ... + d_n = 2S/a$, т.е. эта сумма не зависит от выбора точки P. Что и требовалось доказать.

10.057. Диагональ прямоугольной трапеции и ее боковая сторона равны. Найти длину средней линии, если высота трапеции равна 2 см, а боковая сторона 4 см.

Решение.

По условию $AD = 2$ см; $DB = BC = 4$ см (рис. 10.56). В ΔDAB

$$\angle DAB = 90°,\ AB = \sqrt{16-4} = \sqrt{12},\ BE = \frac{BK}{2} = \frac{AD}{2} = \frac{2}{2} = 1,\ BM = \frac{BC}{2} = 2.$$

В ΔBEM $\angle BEM = 90°$, $EM = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ и $NM = NE + EM = AB + EM =$

$= \sqrt{12} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $3\sqrt{3}$ см.

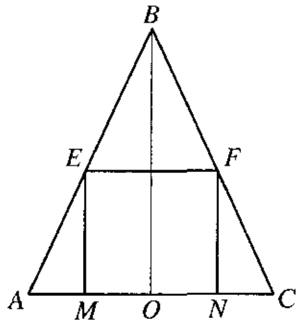


Рис. 10.57

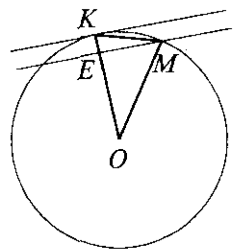


Рис. 10.58

10.058. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна m . Найти сторону треугольника.

Решение.

По условию $EF = FN = NM = EM = m$ (рис. 10.57); $AB = BC = AC = x$.

$$BO = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}. \ \Delta BOC \sim \Delta FNC \Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2m} = \frac{2x}{2(x-m)}, \ x = \frac{m(2\sqrt{3}+3)}{3}.$$

Ответ: $\frac{m(2\sqrt{3}+3)}{3}$.

10.059. В окружности радиуса r проведена хорда, равная $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной (рис. 10.58). Найти расстояние между касательной и секущей.

Решение.

$OK = OM = r$, $KM = \frac{r}{2}$; по теореме косинусов $KM^2 = OK^2 + OM^2 -$

$-2OK \cdot OM \cdot \cos\alpha$, $\frac{r^2}{4} = 2r^2 - 2r^2\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{7}{8}$. $OE = r \cdot \cos\alpha = r \cdot \frac{7}{8}$

($\angle KOM = \angle\alpha$). $EK = KO - EO = r - \frac{7}{8}r = \frac{1}{8}r$.

Ответ: $\frac{1}{8}r$.

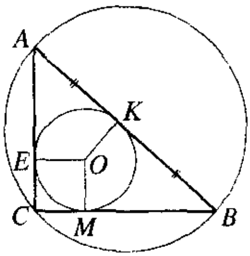


Рис. 10.59

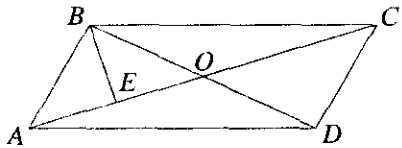


Рис. 10.60

10.060. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 и 5 см (рис. 10.59). Найти катеты треугольника.

Решение.

По условию $r = 2$ см, $R = 5$ см. В ΔACB, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 2R = 10$, $AK = AE$, $KB = MB$, $AC = AE + CE = AK + CE = AK + r$, $BC = MB + CM = KB + CM = r + KB$, $AC + CB = 2r + AB$, $AC + CB = 2(r + R)$. Пусть $AC = x$, тогда $CB = 2(r + R) - x$, $CB = 14 - x$. Так как $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $100 = x^2 + 196 - 28x + x^2$, $x_1 = 8$, $x_2 = 6$.

Ответ: 6; 8 см.

10.061. Перпендикуляр, проведенный из вершины параллелограмма к его диагонали, делит эту диагональ на отрезки длиной 6 и 15 см. Разность длин сторон параллелограмма равна 7 см (рис. 10.60). Найти длины сторон параллелограмма и его диагоналей.

Решение.

По условию $AE = 6$ см, $EC = 15$ см, $BC - AB = 7$ см. Обозначим $BC = x$, $AB = x - 7$. В ΔBEA $\angle BEA = 90^\circ \Rightarrow BE^2 = x^2 - 14x + 49 - 36$. В ΔBEC $\angle BEC = 90^\circ \Rightarrow BE^2 = x^2 - 225$. Отсюда $x^2 - 14x + 49 - 36 = x^2 - 225$; $x = 17$, значит, $BC = 17$ см, $AB = 17 - 7 = 10$ см, $AC = 6 + 15 = 21$ (см);

$$AO = \frac{21}{2},\ EO = \frac{21}{2} - AE = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2},\ BE = \sqrt{289 - 225} = 8,\ BD = 2 \cdot \sqrt{64 + \frac{81}{4}}$$

(ΔBEO, где $\angle BEO = 90^\circ$), $BD = \sqrt{337}$.

Ответ: $10;\ 17;\ 21;\ \sqrt{337}$ см.

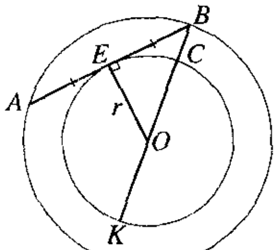


Рис. 10.61

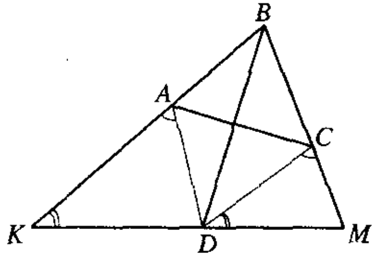


Рис. 10.62

10.062. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда, равная 32 см и касающаяся меньшего круга (рис. 10.61). Определить длину радиуса каждого из кругов, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

Решение.

По условию $CB = 8$ см, $AB = 32$ см, $EB^2 = BC \cdot BK$. Так как $EB = \frac{AB}{2} = 16$ и $BK = BC + 2r$, то $256 = 8 \cdot (8 + 2r) \Rightarrow r = 12$, $R = OC + CB = r + 8 = 12 + 8 = 20$ см.

Ответ: 12 и 20 см.

10.063. В треугольник вписан ромб так, что один угол у них общий, а противоположная вершина делит сторону треугольника в отношении 2:3. Диагонали ромба равны m и n (рис. 10.62). Найти стороны треугольника, содержащие стороны ромба.

Решение.

По условию $\frac{KD}{DM} = \frac{3}{2}$, $BD = m$, $AC = n$. Отсюда $AB = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$. $\Delta KAD \sim \Delta DCM \Rightarrow \frac{AD}{CM} = \frac{KD}{DM}$ и, так как $AB = BC = DC = AD$ (по условию), $\frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{CM} = 3$, $CM = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{3}$, $BM = CM + BC = \frac{5}{6}\sqrt{m^2 + n^2}$. Так как $\frac{KD}{DM} = \frac{AK}{CD}$, то $\frac{AK}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{3}{2}$ и $AK = \frac{3}{4}\sqrt{m^2 + n^2}$, $KB = AK + AB = \frac{5}{4}\sqrt{m^2 + n^2}$.

Ответ: $\frac{5}{6}\sqrt{m^2 + n^2}$; $\frac{5}{4}\sqrt{m^2 + n^2}$.

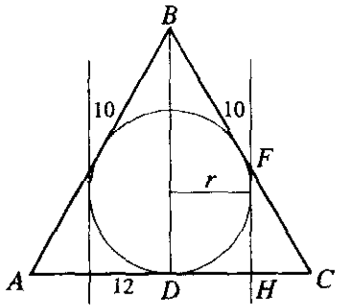


Рис. 10.63

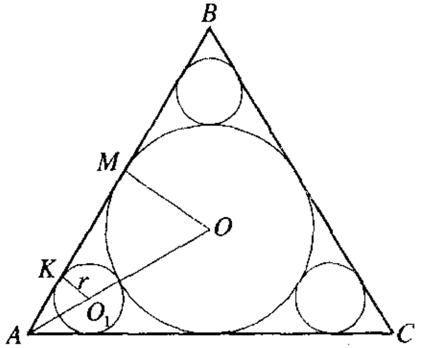


Рис. 10.64

10.064. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найти длины сторон этих треугольников.

Решение.

Площадь треугольника находится по формуле (рис. 10.63):

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)}=48.$$

Радиус вписанной окружности $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{48}{16}=3$ (см); $r=DH$. $HC=DC-$ $-DH=6-3=3$ см; ΔBCD и ΔFCH подобные, поэтому $\dfrac{DC}{HC}=\dfrac{BC}{FC}$. Отсюда $FC=\dfrac{BC\cdot HC}{DC}=\dfrac{10\cdot 3}{6}=5$ см. Из ΔFCH следует, что $FC^2=$ $=FH^2+HC^2$; $FH=\sqrt{FC^2-HC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (см).

Ответ: 3 см, 4 см, 5 см.

10.065. В равносторонний треугольник вписана окружность. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найти сторону треугольника, если радиус малой окружности равен r.

Решение.

Пусть a — сторона треугольника, R — радиус вписанной в него окружности; тогда $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Проведем радиусы OM и O_1K в точки

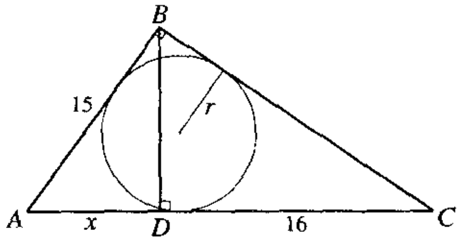


Рис. 10.65

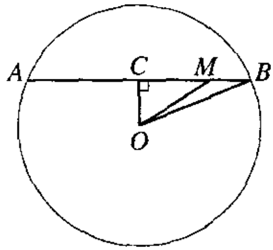


Рис. 10.66

касания (рис. 10.64). Из подобия треугольников AOM и AO_1K имеем $\frac{R}{r}=\frac{AO}{AO-R-r}$. Отсюда, учитывая, что $AO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, получаем

$$\frac{a\sqrt{3}}{6r}=\frac{a\sqrt{3}}{3\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{6}-r\right)}$$ или $\frac{a\sqrt{3}}{6}-r=2r$, т.е. $a=6r\sqrt{3}$.

Ответ: $6r\sqrt{3}$.

10.066. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см (рис. 10.65). Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

Искомый радиус находится по формуле: $r=\frac{a+b-c}{2}$; ΔABC и ΔBDC подобные, отсюда $\frac{BC}{AC}=\frac{DC}{BC}$. $BC^2=AC\cdot DC$. Из ΔABC получаем $AC^2-AB^2=BC^2$. Отсюда: $(16+x)^2-15^2=16(16+x)$. Решая уравнение $x^2+16x-225=0$, находим $x_1=-25$ см (не удовлетворяет решению задачи) или $x_2=9$ см. $AC=9+16=25$ см. $BC=\sqrt{16\cdot 25}=20$ см. Итак, $r=\frac{15+20-25}{2}=5$ см.

Ответ: 5 см.

10.067. Внутри круга радиуса 15 см взята точка M на расстоянии 13 см от центра. Через точку M проведена хорда длиной 18 см. Найти длины отрезков, на которые точка M делит хорду.

Решение.

Проведем $OC\perp AB$ (рис. 10.66). Тогда $CB=\frac{1}{2}AB=9$ см. Из ΔOBC

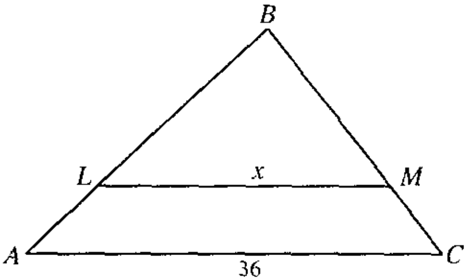


Рис. 10.67

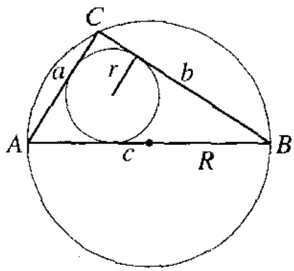


Рис. 10.68

находим $OC=\sqrt{OB^2-BC^2}=12$ (см), а из ΔOMC получим $MC=$ $=\sqrt{OM^2-OC^2}=5$ (см). Следовательно, $AM=9+5=14$ (см), $MB=$ $=9-5=4$ (см).

Ответ: 14 и 4 см.

10.068. Длина основания треугольника равна 36 см. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

Решение.

Обозначим искомую длину через x. Тогда из подобия треугольников ABC и LBM (рис. 10.67) имеем $AC^2:x^2=S:(S/2)$, где S — площадь ΔABC. Отсюда $AC^2=2x^2$ и $x=18\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $18\sqrt{2}$ см.

10.069. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 15 см, а радиус вписанной в него окружности равен 6 см. Найти стороны треугольника.

Решение.

По условию $AB=2R=2\cdot 15=30$ (см) (рис. 10.68). Радиус вписанной окружности $r=\dfrac{a+b-c}{2}$. Отсюда $2r=a+b-c$. Решая систему

$$\begin{cases}2r=a+b-c,\\ a^2+b^2=c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12=a+b-30,\\ a^2+b^2=900,\end{cases}$$

получаем $a_1=18$ (см), $b_1=24$ (см) или $a_2=24$ (см), $b_2=18$ (см).

Ответ: 18; 24 и 30 см.

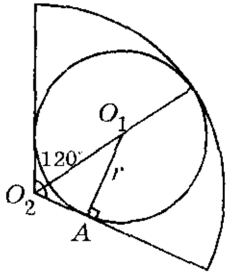


Рис. 10.69

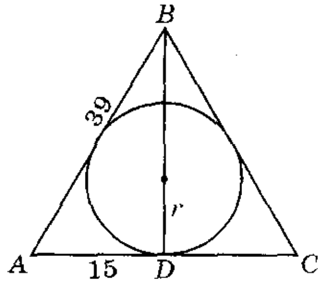


Рис. 10.70

10.070. В круговой сектор с центральным углом 120° вписан круг. Найти радиус вписанного круга, если радиус данного круга равен R.

Решение.

ΔO_2AO_1 — прямоугольный, $\angle O_1O_2A = 60°$, $\sin 60° = \frac{O_1A}{O_2O_1} = \frac{r}{R-r}$;

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{R-r}$ (рис. 10.69). Отсюда $r = \frac{\sqrt{3}R}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}R(2-\sqrt{3})$.

Ответ: $\sqrt{3}R(2-\sqrt{3})$.

10.071. Найти сторону правильного шестиугольника, равновеликого равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

Решение.

Так как AD — диаметр окружности (см. рис. 10.2), то $OD = OC = 10$ см. Проведем $CL \perp AD$; тогда $OL = 6$ см и из ΔCLO находим $CL = \sqrt{OC^2 - OL^2} = 8$ (см). Тогда $S_{ABCD} = 0{,}5(BC + AD) \cdot CL = 0{,}5(12 + 20) \cdot 8 = 128$ (см^2). Обозначив сторону правильного шестиугольника через x, имеем $\frac{6x^2\sqrt{3}}{4} = 128$, откуда $x^2 = \frac{128 \cdot 2}{3\sqrt{3}}$, т.е. $x = \frac{16\sqrt[4]{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{16\sqrt[4]{3}}{3}$ см.

10.072. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а боковая сторона равна 39 см. Определить радиус вписанного круга.

Решение.

Проведем $BD \perp AC$ (рис. 10.70); так как ΔABC —равнобедренный, то BD является и медианой. Имеем $BD^2 = AB^2 - AD^2$, откуда $BD = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$ (см) и, значит, $S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540$ (см^2). Но $S = pr = 54r$, откуда $r = 10$ см.

Ответ: 10 см.

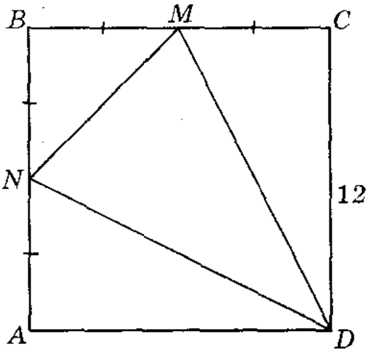


Рис. 10.71

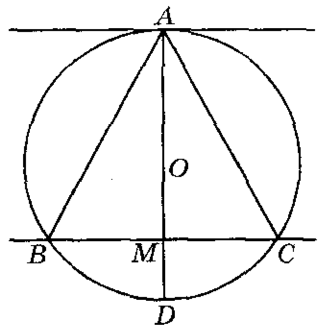


Рис. 10.72

10.073. В квадрате, сторона которого 12 см, середины его смежных сторон соединены между собой и с противоположной стороной квадрата. Найти радиус круга, вписанного в образовавшийся треугольник.

Решение.

Найдем площадь треугольника NMD (рис. 10.71); $S_{\Delta NMD} = S_{ABCD} - 2S_{\Delta MCD} - S_{\Delta NBM}$; $S_{\Delta NBM} = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 6 = 18(\text{см}^2)$; $S_{\Delta MCD} = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 12 = 36$ (см^2); $S_{\Delta NMD} = 144 - 2 \cdot 36 - 18 = 54$ (см^2). Так как $MD = DN = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ (см), $MN = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ (см), то $P_{\Delta NMD} = 0{,}5(12\sqrt{5} + 6\sqrt{2}) = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ (см). Тогда по формуле (10.4) получим

$$r = \frac{54}{6\sqrt{5} + 3\sqrt{2}} = \frac{18}{2\sqrt{5} + \sqrt{2}} = 2\sqrt{5} - \sqrt{2}\,(\text{см}).$$

Ответ: $2\sqrt{5} - \sqrt{2}$ см.

10.074. Одна из двух параллельных прямых касается окружности радиуса R в точке A, а другая пересекает эту окружность в точках B и C. Выразить площадь треугольника ABC как функцию расстояния x между прямыми.

Решение.

Пусть расстояние между параллельными прямыми равно x (рис. 10.72); тогда площадь S треугольника ABC равна $0{,}5BC \cdot x$. Так как $AM \perp BC$, то $BM = MC$ и $BM \cdot MC = AM \cdot MD = x(2R - x)$. Значит, $0{,}25BC^2 = x(2R - x)$, откуда $S = 0{,}5x \cdot 2\sqrt{2Rx - x^2} = x\sqrt{2Rx - x^2}$.

Ответ: $x\sqrt{2Rx - x^2}$.

10.075. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

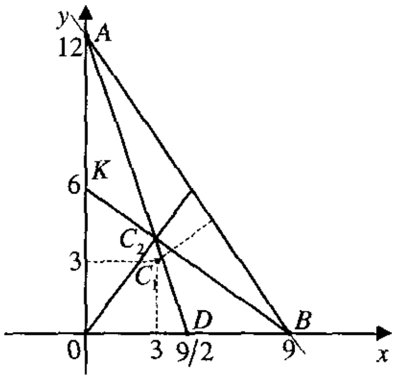


Рис. 10.73

Решение.

Выберем систему координат xOy, связанную с данным прямоугольным треугольником ΔOAB, таким образом, как это показано на рис. 10.73. Тогда

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15,$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 54 \text{ см}^2,$$

$$p = \frac{1}{2}(9 + 12 + 15) = 18 \text{ см}$$

и

$$r = \frac{S}{p} = \frac{54}{18} = 3 \text{ см}.$$

Точка пересечения биссектрис совпадает с центром вписанной в этот треугольник окружности — $C_1(3;3)$. Найдем точку C_2 пересечения медиан как точку пересечения прямых AD и BK. Составим уравнение прямых AD и BK. Пусть уравнение AD: $y_1 = k_1x + b_1$, где $A(0;12)$ и $D\left(9/2;0\right)$. Отсюда $b_1 = 12$, $0 = \frac{9}{2}k_1 + 12$, $k_1 = -\frac{8}{3}$. Значит, AD: $y = -\frac{8}{3}x + 12$.

Пусть уравнение прямой BK: $y_2 = k_2x + b_2$, где $B(9;0)$ и $K(0;6)$. Тогда $b_2 = 6$, $0 = 9k_2 + 6$, $k_2 = -\frac{2}{3}$. Получили, что уравнение BK: $y = -\frac{2}{3}x + 6$. Координаты точки C_2 находим из системы

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 6, \\ y = -\frac{8}{3}x + 12 \end{cases} \Rightarrow 2x - 6 = 0, \quad x = 3, y = 4, C_2(3;4)$$

По формуле расстояния между двумя точками координатной плоскости имеем: $C_1C_2 = \sqrt{(3-3)^2 + (3-4)^2} = 1$ см.

Ответ: 1 см.

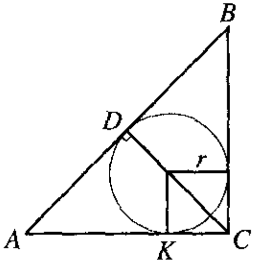


Рис. 10.74

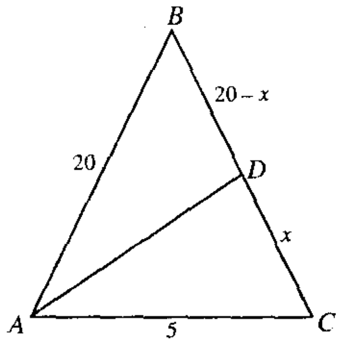


Рис. 10.75

10.076. Найти отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, к высоте, проведенной к гипотенузе.

Решение.

Так как ΔABC — равнобедренный и прямоугольный, то высота CD является биссектрисой, т.е. $\angle DCA = \angle A = 45°$ (рис. 10.74); поэтому $AD = DC$ и $AC = \sqrt{2DC}$. Но $AC = AK + KC = DC + r$ ($AK = AD$ как касательные, проведенные из одной точки), откуда $r = \sqrt{2}DC - DC$, т.е. $r/DC = \sqrt{2} - 1$.

Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

10.077. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20 см. Найти биссектрису угла при основании треугольника.

Решение.

$\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB} \cdot \frac{x}{5} = \frac{20 - x}{20}$ (рис. 10.75). Отсюда $x = 4$ (см). $DC = x = 4$ (см), $HD = = 20 - 4 = 16$ (см). Длина биссектрисы

$$AD = \sqrt{AC \cdot AB - BD \cdot DC} = \sqrt{20 \cdot 5 - 4 \cdot 16} = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6 см.

10.078. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Найти расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до центра описанной около него окружности.

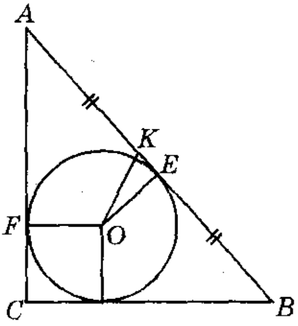


Рис. 10.76

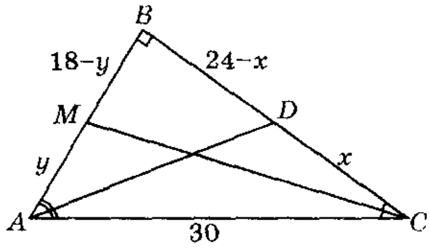


Рис. 10.77

Решение.

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см) (рис. 10.76). Расстояние между центрами $OK = \sqrt{OE^2 + EK^2}$; $p = (AB + BC + AC)/2 = 12$ (см). Радиус вписанной окружности $r = p - AB = 2$ (см).

Получим

$KE = AE - AK = AF - AK = 6 - 5 = 1$ (см),

$OK = \sqrt{OE^2 + EK^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.

Ответ: $\sqrt{5}$ см.

10.079. Найти биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 24 и 18 см.

Решение.

$\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{BD}{AB}$ (рис. 10.77); $AC = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ (см), $\dfrac{x}{30} = \dfrac{24-x}{18}$. Отсюда $x = 15$, $CD = 15$ (см), $BD = 24 - 15 = 9$ (см).

Биссектриса $\angle BAC$: $AD = \sqrt{AC \cdot AB - CD \cdot BD} = \sqrt{30 \cdot 18 - 15 \cdot 9} = 9\sqrt{5}$ (см).

$\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MB}{BC}$, $\dfrac{y}{30} = \dfrac{18-y}{24}$. Отсюда $y = 10$ (см), $AM = 10$ (см), $MB = 8$ (см).

Биссектриса $\angle BCA$:

$CM = \sqrt{AC \cdot BC - AM \cdot MB} = \sqrt{30 \cdot 24 - 8 \cdot 10} = 8\sqrt{10}$ (см).

Ответ: $9\sqrt{5}$ и $8\sqrt{10}$ см.

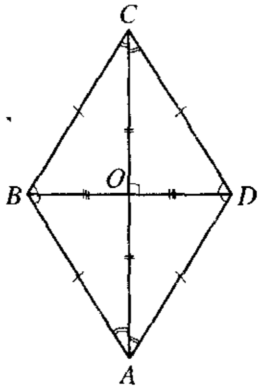


Рис. 10.78

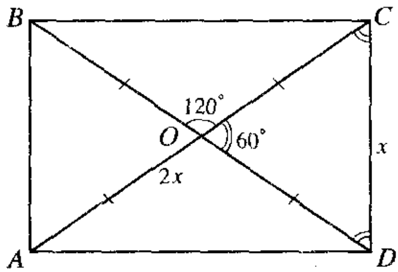


Рис. 10.79

10.080. Доказать, что если в четырехугольнике (рис. 10.78) диагонали лежат на биссектрисах его углов, то такой четырехугольник есть ромб.

Решение.

$\angle BCA = \angle DCA$, $\angle BAC = \angle DAC$; $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle CDB = \angle ADB \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta BAD = \Delta BCD$. Отсюда $\angle BAD = \angle BCD$, $BC = AB$, $DC = DA$. $\Delta ABC = \Delta ADC$. Отсюда $\angle ABC = \angle ADC$, $AB = AD$, $BC = DC$. Получаем $AB = BC = CD = DA$. Так как ΔABC — равнобедренный, то BO — высота и медиана $BD \perp AC$. Что и требовалось доказать.

10.081. Площадь прямоугольника равна 9 см², а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна 120° (рис. 10.79). Найти стороны прямоугольника.

Решение.

$CD = x$. ΔOCD — равносторонний; $AO = OC = CD = x$; $AC = 2x$.

Площадь прямоугольника $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin 60 = \frac{1}{2} 2x \cdot 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $9 = x^2 \sqrt{3}$.

Отсюда $x = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} = \frac{3^{4/4}}{3^{1/4}} = 3^{3/4} = \sqrt[4]{27}$ (см). $AC = 2\sqrt[4]{27}$ (см).

Из ΔACD:

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 4\sqrt{27} - \sqrt{27} = 3\sqrt{27},$$

$$AD = \sqrt{3\sqrt{27}} = 3^{5/4} = 3\sqrt[4]{3} \text{ (см)}.$$

Ответ: $\sqrt[4]{27}$ и $3\sqrt[4]{3}$ см.

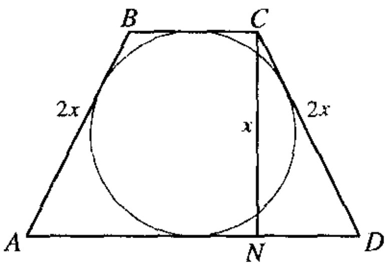


Рис. 10.80

10.082. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S, а высота трапеции в два раза меньше ее боковой стороны (рис. 10.80). Определить радиус вписанного круга.

Решение.

$CN = CD/2$; $AD + BC = AB + CD = 4x$. Площадь равнобедренной трапеции

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC)\cdot CN = \frac{1}{2}4x \cdot x = 2x^2.$$

Отсюда $x = \sqrt{\frac{S}{2}}$. Искомый радиус

$$R = \frac{CN}{2} = \frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2S}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2S}}{4}$.

10.083. Сумма длин диагоналей ромба равна m, а его площадь равна S. Найти сторону ромба.

Решение.

$AC + BD = m$; $AC = x$, $BD = y$. $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$ (рис. 10.081). Решая систему $\begin{cases} x + y = m, \\ 2S = xy, \end{cases}$ получим $x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8S}}{2}$, $y_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 8S}}{2}$ или

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 8S}}{2}, \ y_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 8S}}{2}.$$

Отсюда:

$$BC^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - 8S}}{2\cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{m - \sqrt{m^2 - 8S}}{2\cdot 2}\right)^2 = \frac{m^2 - 4S}{4}.$$

$$BC = \frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{m^2 - 4S}}{2}$.

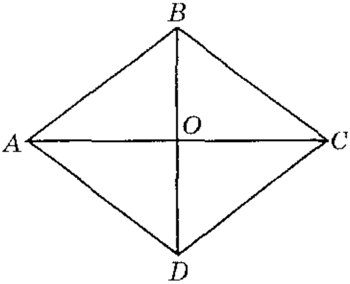


Рис. 10.81

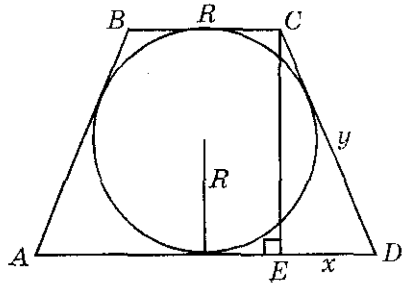


Рис. 10.82

10.084. Периметр ромба равен 2 м, длины его диагоналей относятся как 3:4. Найти площадь ромба.

Решение.

Искомую площадь найдем по формуле $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD=2AO\cdot OB$ (рис. 10.81). В ΔAOB $AB^2=AO^2+BO^2$, где $OB=\frac{3}{4}AO$, $AB=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (м). Тогда получим уравнение $\frac{1}{4}=AO^2+\frac{9}{16}AO^2$, откуда $AO^2=\frac{16}{100}$, т.е. $AO=0{,}4$ (м). Итак, $S=2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3=0{,}24$ (м^2).

Ответ: 0,24 м^2.

10.085. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса R. Верхнее основание трапеции в два раза меньше ее высоты. Найти площадь трапеции.

Решение.

$CD=y$; $ED=x$ (рис. 10.82). Решим систему $\begin{cases}2y=(R+2x)+R,\\ x^2+4R^2=y^2.\end{cases}$ Отсюда получаем $x=\frac{3}{2}R$, тогда $AD=R+2x=R+3R=4R$. Искомая площадь $S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot EC=\frac{1}{2}(R+4R)\cdot 2R=5R^2$.

Ответ: $5R^2$.

10.086. На каждой медиане правильного треугольника взята точка, делящая медиану в отношении 3:1, считая от вершины. Во сколько раз площадь треугольника с вершинами в этих трех точках меньше площади самого треугольника?

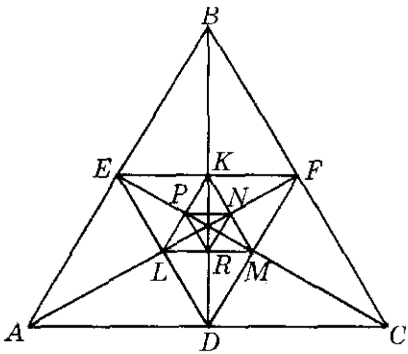


Рис. 10.83

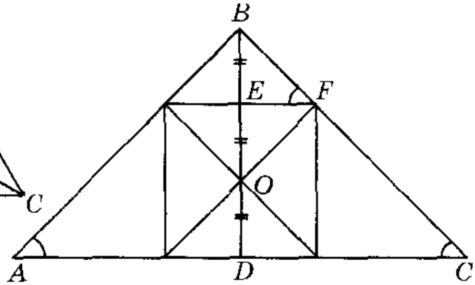


Рис. 10.84

Решение.

$EF=\frac{1}{2}AC$; $FD=\frac{1}{2}AB$; $ED=\frac{1}{2}BC$ (рис.10.83). ΔABC и ΔFDE — подобные, $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta FDE}}=k^2=2^2=4$. ΔFDE и ΔLKM — подобные, $KL=\frac{1}{2}FD$; $KM=\frac{1}{2}ED$; $LM=\frac{1}{2}EF$; $\frac{S_{\Delta FDE}}{S_{\Delta LKM}}=k^2=4$. Далее, ΔLKM и ΔNRP — подобные и $k=2$, т.е. $\frac{S_{\Delta LKM}}{S_{\Delta NRP}}=4$. Итак, $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta NRP}}=4\cdot4\cdot4=64$.

Ответ: в 64 раза.

10.087. В равнобедренный треугольник вписан квадрат единичной площади, одна сторона которого лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если известно, что центры масс треугольника и квадрата совпадают (центр масс треугольника лежит на пересечении его медиан).

Решение.

BD — медиана, $BO:OD=2:1$; $OD=0{,}5$ (см), $BO=1$ (см), $BD=$ $=OD+BO=1{,}5$ (см) (рис.10.84). ΔBEF и ΔBDC — подобные, $\frac{BD}{BE}=\frac{DC}{EF}$. Отсюда $DC=\frac{BD\cdot EF}{BE}$, $DC=\frac{1{,}5\cdot0{,}5}{0{,}5}=1{,}5$ (см), $AC=2\times$ $\times DC=3$ (см), $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot3\cdot1{,}5=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$ (кв. ед).

Ответ: $\frac{9}{4}$ кв. ед.

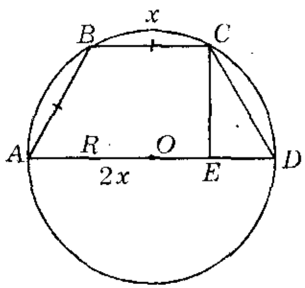


Рис. 10.85

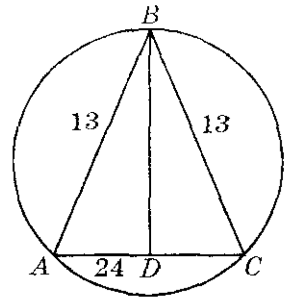


Рис. 10.86

10.088. В окружность радиуса R вписана трапеция, у которой нижнее основание вдвое больше каждой из остальных сторон. Найти площадь трапеции.

Решение.

$AD = 2x = 2R$ (рис.10.85). Отсюда $x = R$. Искомая площадь

$$S = \frac{BC + AD}{2} \cdot CE,\ CE = \sqrt{CD^2 - ED^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R;$$

$$S = \frac{R + 2R}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

10.089. Найти площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, если основание этого треугольника равно 24 см, а боковая сторона 13 см.

Решение.

Площадь круга $S = \pi R^2$ (рис.10.86). Радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S_{\Delta ABC}},\ \text{где } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

Из ΔBDC получим $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). Тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}24 \cdot 5 = 60$ (см^2). Отсюда $R = \frac{13 \cdot 13 \cdot 24}{4 \cdot 60} = \frac{169}{10}$ (см). Итак,

$$S = \frac{169^2}{100}\pi = 285{,}61\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $285{,}61\pi$ см^2.

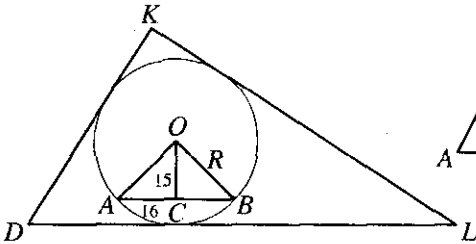


Рис. 10.87

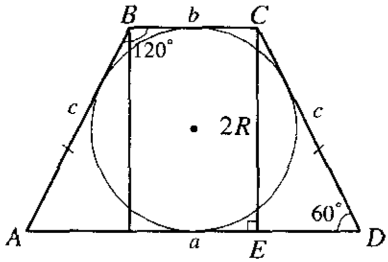


Рис. 10.88

10.090. Расстояние от центра круга до хорды длиной 16 см равно 15 см. Найти площадь треугольника, описанного около круга, если периметр треугольника равен 200 см.

Решение.

Радиус окружности из ΔOCB : $R = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ (см). Искомая площадь треугольника $S_{\Delta DKL} = R \cdot p = 17 \cdot \frac{200}{2} = 1700$ (см^2) (рис. 10.87).

Ответ: 1700 см^2.

10.091. Найти площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если ее большее основание равно a , а угол при меньшем основании равен 120°.

Решение.

В ΔCED $\angle CDE = 60^\circ$ и $\cos 60 = \frac{a-b}{2c}$ (рис. 10.88). Отсюда $\frac{a-b}{2c} = \frac{1}{2}$, $a - b = c$. Для описанной равнобедренной трапеции $a + b = 2c$.

Решая систему $\begin{cases} a - b = c, \\ a + b = 2c, \end{cases}$ получим $c = \frac{2}{3}a$. $\sin 60 = \frac{2R}{c}$. Отсюда $R = \frac{\sin 60 \cdot c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c = \frac{\sqrt{3}}{6}a$. Площадь круга $S = \pi R^2 = \pi \frac{3}{36}a^2 = \frac{\pi a^2}{12}$.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{12}$.

10.092. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15 и 60° (рис. 10.89). Найти площадь треугольника.

Решение.

$\angle ABC = 105^\circ$; $\angle ABC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC$. Отсюда $\angle AOC = 150^\circ$. Зна-

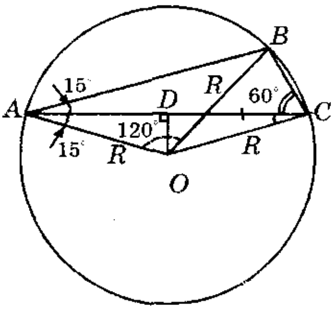


Рис. 10.89

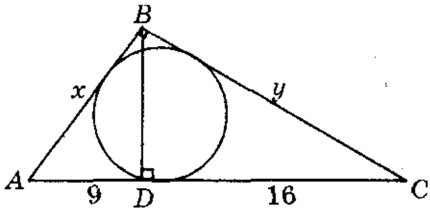


Рис. 10.90

чит, $\angle OAC = 15°$. Из ΔADO находим $AD = R\cos 15°, AC = 2AD = $ $= 2R\cos 15°$. Из ΔAOB (равнобедренного):

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120° = 2R^2(1+\cos 60°) = 3R^2;\ AB = \sqrt{3}R.$$

Площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin 15° = \frac{1}{2}\sqrt{3}R \cdot 2R\cos 15°\sin 15° = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

10.093. Периметр прямоугольного треугольника равен $2p$, а гипотенуза равна c. Определить площадь круга, вписанного в треугольник.

Решение.

ΔABC — прямоугольный (рис. 10.90); $AB = x$, $BC = y$. Известно, что $2p = x + y + c$. Отсюда $x + y = 2p - c$. Радиус вписанной окружности $r = \frac{x+y-c}{2} = \frac{2p-c-c}{2} = p - c$. Искомая площадь круга находится по формуле $S = \pi r^2 = \pi(p-c)^2$.

Ответ: $\pi(p-c)^2$.

10.094. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник (рис. 10.90), если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16 м.

Решение.

$AC = AD + DC = 25$ (м); ΔADB и ΔABC — подобные: $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$. Отсюда $\frac{9}{x} = \frac{x}{25}$, $x^2 = 9 \cdot 25 = 225$, $x = \sqrt{225} = 15$ (м), $AB = 15$ (м). ΔBDC и ΔABC — подобные: $\frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$. Отсюда $\frac{16}{y} = \frac{y}{25}$, $y^2 = 16 \cdot 25 = 400$,

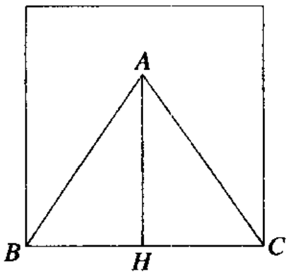


Рис. 10.91

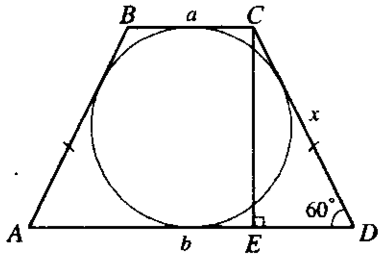


Рис. 10.92

$y=\sqrt{400}=20$ (м), $BC=20$ (м). Радиус вписанной окружности: $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{15+20-25}{2}=5$ (м). Искомая площадь круга

$S=\pi r^2=25\pi$ (м²).

Ответ: 25π м².

10.095. Площадь равнобедренного треугольника равна 1/3 площади квадрата, построенного на основании данного треугольника. Длины боковых сторон треугольника короче длины его основания на 1 см. Найти длины сторон и высоты треугольника, проведенной к основанию.

Решение.

По условию $BC^2=3\cdot\dfrac{1}{2}BC\cdot AH$ (рис. 10.91) или $AH=\dfrac{2}{3}BC$. Но $AH^2=AB^2-\left(\dfrac{1}{2}BC\right)^2$ и, значит, $\dfrac{4}{9}BC^2=AB^2-\dfrac{1}{4}BC^2$ или $AB^2=\dfrac{25}{36}BC^2$, т.е. $AB=\dfrac{5}{6}BC$. Тогда получим $AB=\dfrac{5}{6}(AB+1)$, откуда $AB=5$ (см). Следовательно, $BC=6$ см, $AH=4$ см.

Ответ: 5; 6 и 4 см.

10.096. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $32\sqrt{3}$ см² (рис. 10.92). Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/3$.

Решение.

ΔCED — прямоугольный и $\sin 60^\circ=\dfrac{2R}{CD}$. Отсюда $2R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}CD$, $CD=x \Rightarrow 2R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. Площадь трапеции $S=\dfrac{a+b}{2}h=2Rx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$. По условию $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2=32\sqrt{3} \Rightarrow x^2=64$, $x=8$ (см).

Ответ: 8 см.

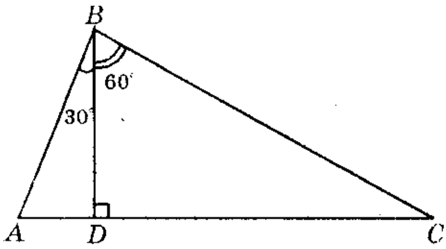


Рис. 10.93

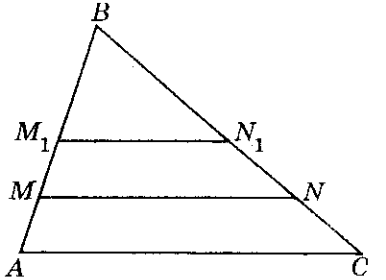


Рис. 10.94

10.097. Площадь прямоугольного треугольника (рис. 10.93) равна $2\sqrt{3}$ см^2. Определить его высоту, проведенную к гипотенузе, если она делит прямой угол в отношении 1:2.

Решение.

$\angle ABD = 30°$, $\angle DBC = 60°$. Площадь ΔABC находится по формуле $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC$. Из ΔBDC получаем $BC = \frac{DC}{\sin 60°}$. Из ΔADB находим $AB = \frac{AD}{\sin 30°}$. Тогда $S = \frac{1}{2} \frac{DC \cdot AD}{\sin 60° \cdot \sin 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}} DC \cdot AD$. Так как ΔADB и ΔBDC — подобные, то $\frac{BD}{AD} = \frac{DC}{BD}$. Отсюда $BD^2 = AD \cdot DC$. Тогда $S = \frac{2}{\sqrt{3}} BD^2 = 2\sqrt{3}$ и $BD = \sqrt{3}$ (см).

Ответ: $\sqrt{3}$ см.

10.098. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на части, площади которых относятся как 2:1. В каком отношении, считая от вершины, она делит боковые стороны?

Решение.

1. $S_{\Delta ABC} = S_{AMNC} + S_{\Delta MBN} = x + 2x = 3x$; $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMN}} = \frac{3}{2}$ (рис. 10.94).

Отсюда $\left(\frac{MB}{AB}\right)^2 = \frac{2}{3}$, $\frac{MB}{AB} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB = \sqrt{3}x$, $MB = \sqrt{2}x$; $AM = (\sqrt{3} - \sqrt{2})x$,

$$\frac{MB}{AM} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6} + 2}{1}.$$

2. $S_{\Delta ABC} = S_{AM_1N_1C} + S_{\Delta BM_1N_1}$ (рис. 10.94). Аналогично находим $M_1B : AM_1 = (\sqrt{3} + 1) : 2$.

Ответ: $(\sqrt{6} + 2) : 1$ или $(\sqrt{3} + 1) : 2$.

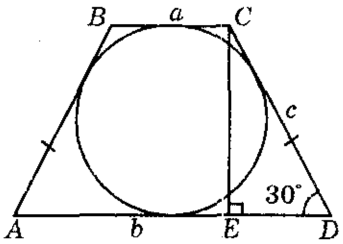


Рис. 10.95

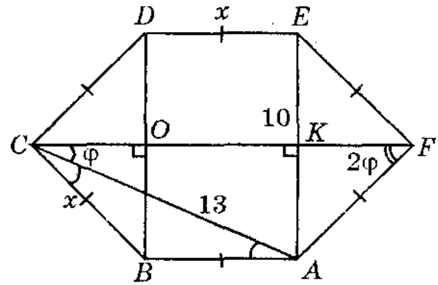


Рис. 10.96

10.099. Площадь равнобедренной трапеции (рис.10.95), описанной около круга, равна 8 см^2. Определить стороны трапеции, если угол при основании содержит 30°.

Решение.

Из ΔCED получим $\sin 30^\circ = \frac{2R}{c}$. Отсюда $2R = \frac{c}{2}$. Площадь трапеции $S = 2Rc = \frac{c^2}{2} = 8$. Отсюда $c^2 = 16$, $c = 4$ (см), $CD = AB = 4$ (см). Имеем $\cos 30^\circ = \frac{ED}{CD}$, $ED = 2\sqrt{3}$ (см). Решим систему $\begin{cases} a + b = 4, \\ b = a + 4\sqrt{3}. \end{cases}$ Отсюда получим $a = 4 - 2\sqrt{3}$, $b = 4 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $4 - 2\sqrt{3}$; $4 + 2\sqrt{3}$;4 и 4 см.

10.100. Равносторонний шестиугольник $ABCDEF$ состоит из двух трапеций (рис.10.96), имеющих общее основание CF. Известно, что $AC = 13$ см, $AE = 10$ см. Найти площадь шестиугольника.

Решение.

ΔCKA — прямоугольный, $AK = \frac{1}{2} AE = 5$ (см), $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см), $\cos\varphi = \frac{12}{13}$; $\sin\varphi = \frac{5}{13}$. Рассмотрим ΔCOB ($\angle COB = 90^\circ$): $\sin 2\varphi = \frac{5}{x}$ и $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$. Отсюда $x = \frac{169 \cdot 5}{120} = \frac{169}{24}$ (см), $\cos 2\varphi = \frac{CO}{x}$; $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{144}{169} -$

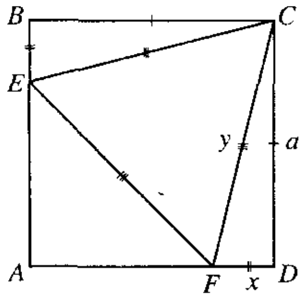


Рис. 10.97

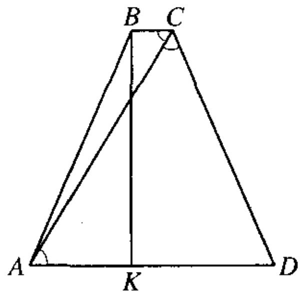


Рис. 10.98

$-\frac{25}{169}=\frac{119}{169}$. Отсюда $CO=\frac{169}{24}\cdot\frac{119}{169}=\frac{119}{24}$ (см), $CO=KF$, $CF=CO+OF=$ $=CK+KF=12+\frac{119}{24}=\frac{407}{24}$ (см). Площадь искомого шестиугольника:

$$S_{ABCDEF}=2S_{CDEF}=2\cdot\frac{1}{2}(CF+ED)\cdot EK=\left(\frac{407}{24}+\frac{169}{24}\right)\cdot 5=120 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 120 см^2.

10.101. Найти площадь правильного треугольника (рис. 10.97), вписанного в квадрат со стороной a, при условии, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной квадрата.

Решение.

$CD=a$; $BE=FD=x$; $AF=AE=a-x$; $CE=EF=CF=y$. Решим систему $\begin{cases} y^2=a^2+x^2, \\ y^2=2(a-x)^2; \end{cases}$ $a^2+x^2=2(a-x)^2$. Решая это уравнение, получим $x=a(2-\sqrt{3})$. Найдем $y^2=a^2+a^2(2-\sqrt{3})^2=a^2(8-4\sqrt{3})$. Площадь искомого правильного треугольника находится по формуле

$$S=\frac{y^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4(2-\sqrt{3})\sqrt{3}a^2}{4}=a^2(2\sqrt{3}-3).$$

Ответ: $a^2(2\sqrt{3}-3)$

10.102. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3 см, периметр равен 42 см. Найти площадь трапеции.

Решение.

По условию $\angle BCA=\angle ACD$ (рис. 10.98). Но $\angle BCA=\angle CAD$, а зна-

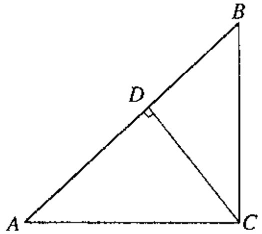


Рис. 10.99

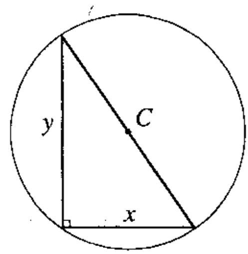


Рис. 10.100

чит, ΔACD — равнобедренный и $AD = CD$. Имеем $3AD + BC = 42$; так как $BC = 3$ см, то $AD = 13$ см. Проведем $BK \perp AD$; тогда $AK = \frac{1}{2}(13-3) = 5$ (см) и из ΔAKB находим $BK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Итак, $S = \frac{1}{2}(3+13) \cdot 12 = 96$ (см²).

Ответ: 96 см².

10.103. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, проведенная к гипотенузе, делит последнюю на отрезки длиной 25,6 и 14,4 см.

Решение.

Так как ΔABC — прямоугольный и $CD \perp AB$ (рис. 10.99), то $AC^2 = AB \cdot AD = 40 \cdot 25{,}6$ и $BC^2 = AB \cdot BD = 40 \cdot 14{,}4$, откуда $AC = 32$ (см), $BC = 24$ (см) и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 24 = 384$ (см²). С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = pr = 48r$. Следовательно, $r = 8$ и $S_{\text{кр}} = \pi r^2 = 64\pi$ (см²).

Ответ: 64π см².

10.104. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь его равна 24 см². Найти площадь описанного круга.

Решение.

Гипотенуза треугольника $c = 2R$ (рис. 10.100).

Решим систему $\begin{cases} p = x + y + 2R, \\ S = \frac{1}{2}xy, \\ x^2 + y^2 = 4R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 = x + y + 2R, \\ 24 = \frac{1}{2}xy, \\ x^2 + y^2 = 4R^2, \end{cases}$ получим $x = 6$ (см), $y = 8$ (см). Радиус круга $R = \frac{24 - x - y}{2} = 5$ (см). Площадь искомого описанного круга $S = \pi R^2 = 25\pi$ (см²).

Ответ: 25π см².

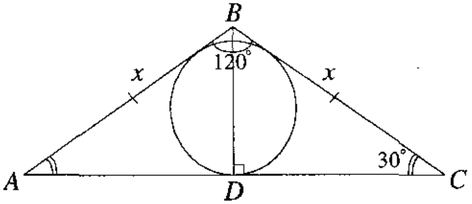


Рис. 10.101

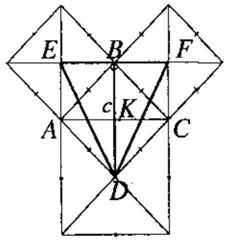


Рис. 10.102

10.105. Найти площадь равнобедренного треугольника (рис. 10.101) с углом 120°, если радиус вписанного круга равен $\sqrt[4]{12}$ см.

Решение.

Из ΔBDC находим $BD = BC \cdot \sin 30° = \frac{BC}{2}$; $DC = BC \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$.

Полупериметр ΔABC $p = \frac{1}{2}\left(x + x + \sqrt{3}x\right) = x\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Площадь ΔABC: $S = pr = x\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[4]{12}$.

С другой стороны, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2}\sqrt{3}x \cdot \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Решим уравнение $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = x\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[4]{12}$. Получим $x = \frac{2\left(2 + \sqrt{3}\right)\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь ΔABC $S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\left(2 + \sqrt{3}\right)\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)$ (см^2).

Ответ: $2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)$ (см^2).

10.106. На сторонах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой c вне этого треугольника построены квадраты. Центры этих квадратов соединены между собой. Найти площадь полученного треугольника.

Решение.

$BE = KC = \frac{c}{2}$; $EF = 2BE = c$ (рис. 10.102). Четырехугольник $ABCD$ — квадрат. Отсюда $AC = BD = c$. Площадь искомого треугольника

$S = \frac{1}{2} BD \cdot EF = \frac{1}{2}c^2 = \frac{c^2}{2}$.

Ответ: $\frac{c^2}{2}$.

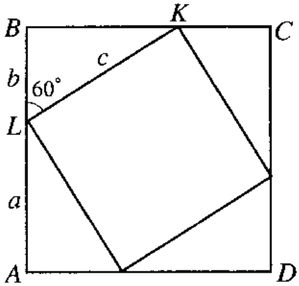


Рис. 10.103

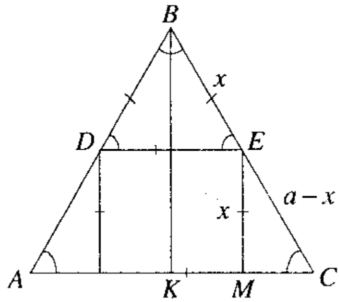


Рис. 10.104

10.107. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а стороны составляют со сторонами первого квадрата углы в 60°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного?

Решение.

Пусть $AL = a$, $LB = b$ и $LK = c$ (рис. РЗ 103). Тогда площадь данного квадрата $S_1 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$. Так как $\angle BLK = 60°$, то $\angle BKL = 30°$, откуда $c = 2b$, $a = b\sqrt{3}$ и, значит, $S_1 = 4b^2 + 2b^2\sqrt{3}$. Площадь вписанного квадрата $S_2 = c^2 = 4b^2$. Итак,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4b^2}{4b^2 + 2b^2\sqrt{3}} = \frac{2}{2+\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Ответ: $4 - 2\sqrt{3}$.

10.108. Найти площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a.

Решение.

ΔBKC и ΔEMC — подобные $\Rightarrow \dfrac{BC}{EC} = \dfrac{BK}{EM}$, $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} =$ $= \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $EM = x$ и $x = \dfrac{EC \cdot BK}{BC} = \dfrac{(a-x)a\sqrt{3}}{2a}$. Отсюда $2ax =$ $= a\sqrt{3}(a-x)$. Решая уравнение, получим $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$. Площадь искомого квадрата:

$$S = x^2 = \frac{3a^2}{(2+\sqrt{3})^2} = 3a^2(7 - 4\sqrt{3}).$$

Ответ: $3a^2(7 - 4\sqrt{3})$

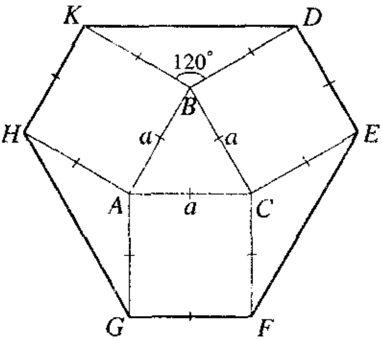


Рис. 10.105

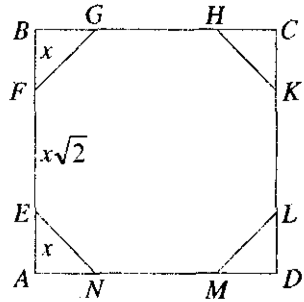


Рис. 10.106

10.109. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определить площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна a .

Решение.

Площадь искомого шестиугольника (рис. 10.105)

$$S_{HKDEFG} = S_{\Delta ABC} + 3S_{AHKB} + 3S_{\Delta KBD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 + 3\cdot\frac{1}{2}a^2\sin 120^\circ =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 + \frac{3}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = a^2\left(3+\sqrt{3}\right).$$

Ответ: $a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$.

10.110. Данный квадрат со стороной a срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определить площадь этого восьмиугольника.

Решение.

Пусть $AE = x$ (рис. 10.106). Тогда $AB = 2AE + EF$ или $2x + x\sqrt{2} = a$,

откуда $x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}$. Следовательно, искомая площадь

$$S = S_{ABCD} - 4S_{\Delta AEN} = a^2 - \frac{4x^2}{2} = a^2 - \frac{4a^2\left(4-4\sqrt{2}+2\right)}{8} = 2a^2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ответ: $2a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$

10.111. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна a . Вычислить площадь квадрата, вписанного в ту же окружность.

Решение.

Обозначим радиус описанной окружности через R. Тогда $a = R\sqrt{3}$, откуда $R = a/\sqrt{3}$. Так как сторона вписанного квадрата равна $R\sqrt{2}$, то его площадь $S = 2R^2 = 2a^2/3$.

Ответ: $2a^2/3$.

10.112. Вычислить отношение площадей квадрата, правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность.

Решение.

Пусть R — радиус окружности. Тогда сторона правильного вписанного треугольника $a_3 = R\sqrt{3}$ и $S_3 = \dfrac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. Далее, сторона квадрата $a_4 = R\sqrt{2}$ и $S_4 = a_4^2 = 2R^2$ и, наконец, сторона правильного вписанного шестиугольника $a_6 = R$ и $S_6 = \dfrac{6R^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $S_4 : S_3 : S_6 = 8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$.

Ответ: $8 : 3\sqrt{3} : 6\sqrt{3}$.

10.113. Сторона равностороннего треугольника, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

Решение.

Площадь сегмента AnB равна разности площадей сектора AOB и ΔAOB (рис. 10.107). Находим $S_{\text{сект.}AOB} = \dfrac{\pi R^2}{3}$, $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2} a \cdot \dfrac{R}{2} = \dfrac{aR}{4}$, откуда $S = \dfrac{\pi R^2}{3} - \dfrac{aR}{4}$. Так как $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, то окончательно получим

$$S = \frac{a^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{36}.$$

Ответ: $a^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)/36$.

10.114. Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна a. Вычислить площадь отсекаемого ею сегмента.

Решение.

Площадь круга $S_{\text{кр}} = \pi R^2$. Радиус круга $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $S_{\text{кр}} = \dfrac{\pi a^2}{2}$. Площадь искомого сегмента:

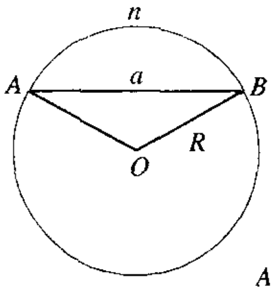


Рис. 10.107

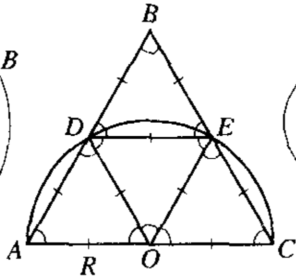


Рис. 10.108

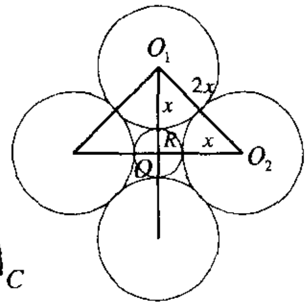


Рис. 10.109

$$S_{\text{сегм}}=\frac{1}{4}\left(S_{\text{кр}}-S_{\text{кв}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi a^2}{2}-a^2\right)=\frac{\pi-2}{8}a^2.$$

Ответ: $\frac{\pi-2}{8}a^2$.

10.115. На диаметре $2R$ полуокружности построен правильный треугольник, сторона которого равна диаметру. Треугольник расположен по ту же сторону от диаметра, что и полуокружность. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне круга.

Решение.

ΔAOD, ΔDOE, ΔOEC, ΔDBE — равносторонние со стороной R (рис. 10.108). Искомая площадь $S=S_{\Delta DBE}-S_{\text{сегм}}$. $S_{\text{сегм}}=\frac{\pi}{6}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$;

$$S_{\Delta DBE}=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2,\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2-\frac{\pi}{6}R^2+\frac{\sqrt{3}}{4}R^2=R^2\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right).$$

Ответ: $R^2\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right)$.

10.116. Круг радиуса R обложен четырьмя равными кругами, касающимися данного так, что каждые два соседних из этих четырех кругов касаются друг друга (рис. 10.109). Вычислить площадь одного из этих кругов.

Решение.

В ΔO_1OO_2 $\angle O_1OO_2=90°$. Решим уравнение $4x^2=2(x+R)^2$. Найдем $x=R\left(1+\sqrt{2}\right)$, где $x=r$ — радиус четырех равных кругов. Площадь искомого круга $S=\pi r^2=\pi R^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\pi R^2\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $\pi R^2\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

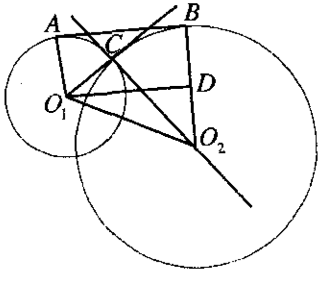


Рис. 10.110

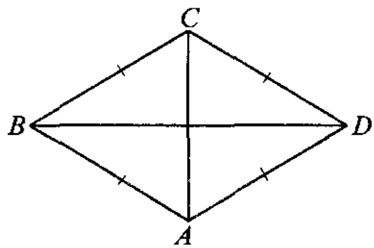


Рис. 10.111

10.117. В точках пересечения двух окружностей с радиусами 4 и 8 см касательные к ним взаимно перпендикулярны. Вычислить площадь фигуры O_1ABO_2, где AB — общая касательная к окружностям, а O_1 и O_2 — их центры.

Решение.

Так как $O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$, то $O_1A \| O_2B$ и, значит, фигура O_1ABO_2 — трапеция (рис. 10.110). Касательные в точке C взаимно перпендикулярны, а потому каждая из них проходит через центр другой окружности, т.е. $O_1C = 4$ см, $O_2C = 8$ см, откуда $O_1O_2 = \sqrt{O_1C^2 + O_2C^2} = 4\sqrt{5}$ (см). Проведем $O_1D \| AB$ и из ΔO_1DO_2 найдем $O_1D = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2D^2} = \sqrt{80-16} = 8$ (см).

Следовательно, $S_{O_1ABO_2} = 0{,}5(8+4)\cdot 8 = 48$ см².

Ответ: 48 см².

10.118. Определить сторону ромба, зная, что площадь его равна S, а длины диагоналей относятся как $m:n$.

Решение.

Запишем $BD = mx$; $AC = nx$ (рис. 10.111). Площадь ромба $S = \frac{1}{2}mnx^2$, откуда $x = \sqrt{\frac{2S}{mn}}$. Тогда $BD = m\sqrt{\frac{2S}{mn}} = \sqrt{\frac{2Sm}{n}}$; $AC = \sqrt{\frac{2Sn}{m}}$.

Сторона ромба $BC^2 = \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{4}AC^2 = = \frac{2Sm}{4n} + \frac{2Sn}{4m} = \frac{S(m^2+n^2)}{2mn}$. Отсюда $BC = \sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{S(m^2+n^2)}{2mn}}$.

10.119. Периметр ромба равен $2p$; длины диагоналей относятся как $m:n$. Вычислить площадь ромба.

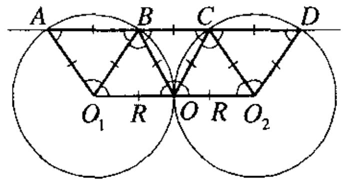


Рис. 10.112

Решение.

Используя рис. 10.111, имеем $BD = mx$, $AC = nx$. $BC^2 = \left(\frac{BD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{mx}{2}\right)^2 + \left(\frac{nx}{2}\right)^2 = \frac{x^2\left(m^2+n^2\right)}{4}$.

Периметр

$$2p = 4BC = 4\sqrt{\frac{x^2\left(m^2+n^2\right)}{4}} = 2x\sqrt{m^2+n^2}.$$

Отсюда $x = \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

Площадь ромба $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}mnx^2 = \frac{1}{2}\frac{mnp^2}{\left(m^2+n^2\right)}$.

Ответ: $\frac{mnp^2}{2\left(m^2+n^2\right)}$.

10.120. Две окружности радиуса R с центрами в точках O_1 и O_2 касаются друг друга. Их пересекает прямая в точках A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Найти площадь четырехугольника O_1ADO_2.

Решение.

ΔAO_1B, ΔO_1BO, ΔBOC, ΔOCO_2, ΔCO_2D — правильные со стороной R (рис. 10.112). Площадь ΔAO_1B $S_{\Delta AO_1B} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Площадь искомого четырехугольника O_1ADO_2 $S = 5S_{\Delta AO_1B} = \frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{5R^2\sqrt{3}}{4}$.

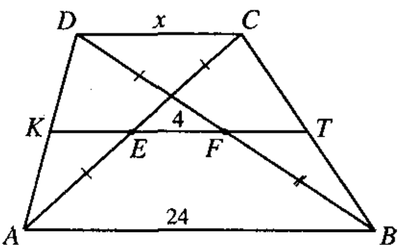


Рис. 10.113

10.121. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, если ее острый угол равен 60°, меньшее основание равно a и большая боковая сторона равна b.

Решение.

Высота трапеции равна $\frac{b\sqrt{3}}{2}$, а большее основание равно $a+\frac{b}{2}$.

Следовательно, ее площадь $S=\frac{1}{2}\left(a+a+\frac{b}{2}\right)\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{(4a+b)b\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $(4a+b)b\sqrt{3}/8$.

10.122. Большее основание трапеции имеет длину 24 см (рис. 10.113). Найти длину ее меньшего основания, если известно, что расстояние между серединами диагоналей трапеции равно 4 см.

Решение.

$AE=EC; DF=FB, KE=DC/2; FT=DC/2; DC=x, KT=2KE+EF=$ $=x+4$. С другой стороны, $KT=\frac{x+24}{2}$. Решая уравнение $x+4=\frac{x+24}{2}$, получим $x=16$ (см).

Ответ: 16 см.

10.123. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/6$.

Решение.

Пусть x — длина боковой стороны; тогда высота трапеции равна $\frac{1}{2}x$. Так как трапеция описана около круга, то сумма ее оснований равна сумме боковых сторон. Следовательно, площадь трапеции $S=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}x$, откуда $x=\sqrt{2S}$.

Ответ: $\sqrt{2S}$.

10.124. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника (рис. 10.114). Доказать, что треугольники, прилегающие к боковым сторонам, равновелики.

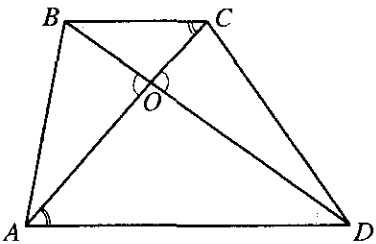


Рис. 10.114

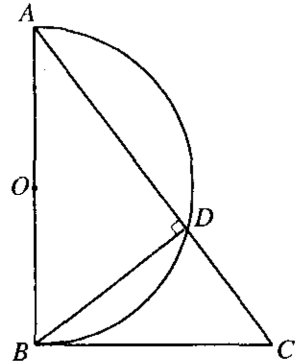


Рис. 10.115

Решение.

Рассмотрим ΔAOD и ΔCOB. Они подобные, $\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}=k$. Отсюда $\begin{cases} DO=kBO, \\ AO=kCO. \end{cases}$ $S_{\Delta BOA}=\frac{1}{2}BO\cdot AO\sin\angle BOA=\frac{1}{2}BO\cdot k\cdot CO\sin\angle BOA$,

$S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}CO\cdot OD\sin\angle COD=\frac{1}{2}CO\cdot k\cdot BO\sin\angle COD$ и $\angle BOA=\angle COD$.

Отсюда следует, что $S_{\Delta BOA}=S_{\Delta COD}$, что и требовалось доказать.

10.125. На большем катете треугольника как на диаметре построена полуокружность (рис. 10.115). Найти ее длину, если длина меньшего катета 30 см, а хорда, соединяющая вершину прямого угла с точкой пересечения гипотенузы и полуокружности, равна 24 см.

Решение.

Из ΔBDC получим $DC=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{900-576}=18$ (см). ΔBDC и ΔADB — подобные. Отсюда $BD^2=DC\cdot DA \Rightarrow DA=BD^2/DC=$ $=24^2/18=32$ (см). Из ΔABC имеем $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=40$ (см). Длина полуокружности $l=\pi AO=20\pi$ (см).

Ответ: 20π (см).

10.126. На диаметре полукруга построен правильный треугольник, стороны которого равны диаметру. Как относятся площади частей треугольника, лежащих вне и внутри полукруга?

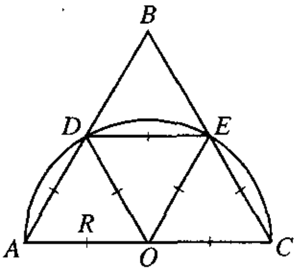


Рис. 10.116

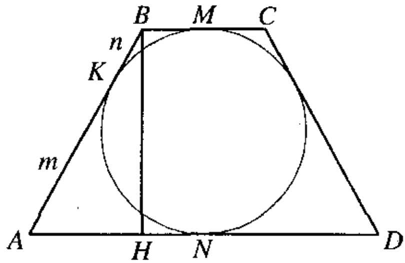


Рис. 10.117

Решение.

Площадь части треугольника, которая лежит внутри полукруга:

$S_1 = 2S_{\Delta AOD} + S_{\text{сект}} = \dfrac{2R^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi R^2}{6} = R^2\left(\dfrac{3\sqrt{3}+\pi}{6}\right)$ (рис. 10.116). Площадь части треугольника, которая лежит вне полукруга:

$$S_2 = S_{\Delta BDE} - S_{\text{сег}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} - R^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = R^2\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right).$$

Отношение площадей: $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)6}{6\cdot R^2(3\sqrt{3}+\pi)} = \dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}+\pi}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3\sqrt{3}+\pi}$.

10.127. В правильный треугольник со стороной, равной a, вписана окружность, в которую вписан правильный шестиугольник. Найти площадь шестиугольника.

Решение.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a, равен $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Сторона шестиугольника, вписанного в эту окружность, равна радиусу: $a_6 = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, а радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник, $r = \dfrac{a_6}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{6}} = \dfrac{a_6\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 2} = \dfrac{a}{4}$.

Площадь шестиугольника $S = \frac{6 \cdot a_6 \cdot r}{2} = \frac{6 \cdot a\sqrt{3} \cdot a}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

10.128. Около квадрата, сторона которого равна a, описана окружность, а около окружности — правильный шестиугольник. Определить площадь шестиугольника.

Решение.

Радиус описанной около квадрата окружности равен половине диагонали квадрата $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Эта же окружность является вписанной для шестиугольника: $r = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$. Получим $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$, откуда $a_6 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь шестиугольника

$$S = \frac{6 \cdot a_6 \cdot r}{2} = \frac{6a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2} = \sqrt{3}a^2.$$

Ответ: $\sqrt{3}a^2$.

10.129. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

Решение.

Пусть $AK = m$, $KB = n$ (рис. 10.117). Тогда $KB = BM = MC = n$, $AK = AN = ND = m$.

Найдем высоту трапеции:

$$h = BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{(m+n)^2 - (m-n)^2} = 2\sqrt{mn}.$$

Итак, $S = \frac{1}{2}(BC + AD)h = (m+n)h = 2\sqrt{mn}(m+n)$.

Ответ: $2\sqrt{mn}(m+n)$.

10.130. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi - 4)$ см^2. Найти площадь квадрата.

Решение.

Пусть R — радиус круга. Тогда площадь сектора равна $\frac{\pi R^2}{4}$, а

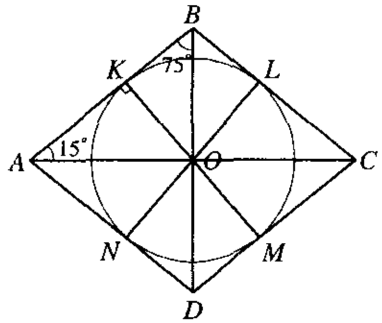


Рис. 10.118

площадь треугольника равна $\frac{R^2}{2}$ и, следовательно, площадь сегмента составляет $\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}=\frac{R^2(\pi-2)}{4}$.

Имеем $\frac{R^2(\pi-2)}{4}=2\pi-4$, откуда $R=2\sqrt{2}$ (см). Итак, площадь квадрата равна $2R^2=16$ (см^2).

Ответ: 16 см^2.

10.131. В ромб с острым углом 30° вписан круг, площадь которого равна Q. Найти площадь ромба.

Решение.

Проведем радиусы OK, OL, OM, ON в точки касания (рис. 10.118). $\angle ABC=180^\circ-\angle BAD=180^\circ-30^\circ=150^\circ$. Так как диагонали в ромбе являются биссектрисами, то $\angle ABO=\frac{150^\circ}{2}=75^\circ$. Значит,

$BO=\frac{KO}{\sin 75^\circ}=\frac{KO}{\cos 15^\circ}$. Тогда $AB=\frac{BO}{\sin\angle OAB}=\frac{KO}{\sin 15^\circ\cos 15^\circ}=\frac{2KO}{\sin 30^\circ}=$

$=4KO=4r$. У ромба $AB=BC=CD=AD=4r$. Площадь ромба

$S=AB\cdot AD\sin 30^\circ=16r^2\sin 30^\circ$. Площадь круга $Q=\pi r^2$, откуда

$r^2=\frac{Q}{\pi}$. Поэтому окончательно $S=\frac{8Q}{\pi}$.

Ответ: $\frac{8Q}{\pi}$.

10.132. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.

Решение.

Пусть B, D, E — точки касания. Радиус окружности, из которой вырезан сектор, обозначим R, а радиус вписанной в сектор окружности —

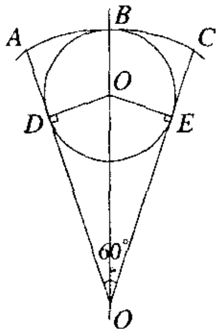


Рис. 10.119

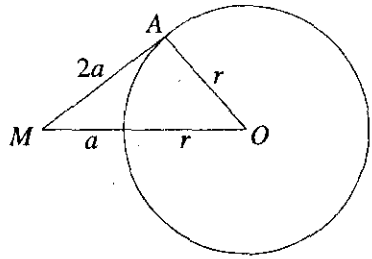


Рис. 10.120

r (рис. 10.119). Значит, $BO = DO = EO = r$, а $BO = R$. $OO = R - r$. $DO = OO \sin 30°$. Это значит, что $r = \frac{1}{2}(R - r)$, откуда $R = 3r$. Площадь сектора $S_1 = \frac{\pi R^2 60°}{360°} = \frac{\pi R^2}{6} = \frac{3\pi r^2}{2}$. Площадь вписанного круга $S_2 = \pi r^2$;

$S_2 : S_1 = \pi r^2 : \frac{3\pi r^2}{2} = 2 : 3$.

Ответ: 2:3.

10.133. Из точки M, находящейся на расстоянии a от окружности, проведена к этой окружности касательная длиной $2a$. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность.

Решение.

Проведем радиус OA в точку касания (рис. 10.120) и обозначим радиус окружности через r. Тогда в ΔOAM имеем $(2a)^2 + r^2 = (a + r)^2$ или $4a^2 + r^2 = a^2 + 2ar + r^2$, откуда $r = \frac{3a}{2}$. Таким образом,

$$S = \frac{6r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{27a^2\sqrt{3}}{8}$.

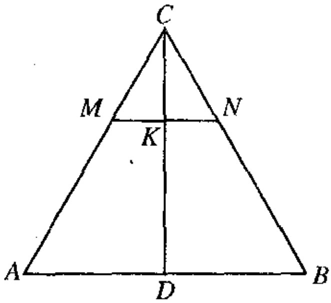


Рис. 10.121

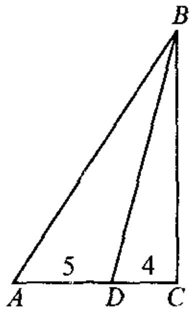


Рис. 10.122

10.134. В равнобедренной трапеции одно основание равно 40 см, а другое 24 см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

Решение.

Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты: $S = h^2$. С другой стороны, $S = \frac{a+b}{2}h$, откуда $h = \frac{a+b}{2} = \frac{40+24}{2} = 32$ (см). А площадь

$S = 32^2 = 1024$ (см^2).

Ответ: 1024 см^2.

10.135. Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны равны 26 и 28 см. Высота разделена в отношении 2:3 (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной при этом трапеции.

Решение.

По условию $AB = c = 30$ см, $AC = b = 26$ см, $BC = a = 28$ см (рис. 10.121). Тогда $p = 0{,}5(a+b+c) = 42$, $p-a=14$, $p-b=16$, $p-c=12$ и по формуле Герона находим $S_{\Delta ABC} = \sqrt{42 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 12} = 336$ (см^2). Так как $\Delta MNC \sim \Delta ABC$, то $S_{\Delta MNC} : S_{\Delta ABC} = CK^2 : CD^2 = 4/25 = 0{,}16$. Отсюда определяем площадь трапеции:

$S_{AMNB} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta MNC} = 336 - 0{,}16 \cdot 336 = 282{,}24$ (см^2).

Ответ: 282,24 см^2.

10.136. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.

Решение.

Пусть $BC = x$ (рис. 10.122). Тогда $AB = \sqrt{81 + x^2}$ и $\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{81+x^2}}{5}$

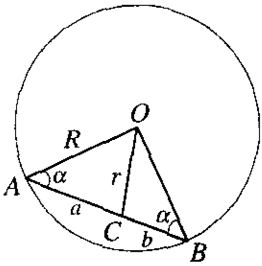


Рис. 10.123

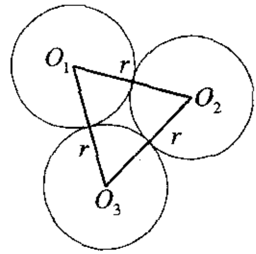


Рис. 10.124

(поскольку BD — биссектриса). Отсюда имеем $25x^2 = 16(81 + x^2)$, т.е. $x = 12$ (см). Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$ (см^2).

Ответ: 54 см^2.

10.137. Хорда AB постоянной длины скользит своими концами по окружности радиуса R. Точка C этой хорды, находящаяся на расстояниях a и b от концов A и B хорды, описывает при полном обороте окружность. Вычислить площадь кольца, заключенного между данной окружностью и окружностью, описанной точкой C.

Решение.

ΔAOB — равнобедренный (рис. 10.123). Значит, $\angle BAO = \angle ABO = \alpha$. Пусть $OC = r$. По теореме косинусов $r^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\alpha$. С другой стороны, $r^2 = R^2 + b^2 - 2bR\cos\alpha$. Приравнивая, получим $a^2 - b^2 = 2R\cos\alpha(a - b)$, откуда $\cos\alpha = \frac{a+b}{2R}$. Значит, $r^2 = R^2 + b^2 - 2bR\frac{a+b}{2R} = R^2 - ab$. Площади кругов $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi r^2 = \pi(R^2 - ab)$. Площадь кольца $S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi R^2 + \pi ab = \pi ab$.

Ответ: πab.

10.138. Три равные окружности радиуса r попарно касаются одна другой. Вычислить площадь фигуры, расположенной вне окружностей и ограниченной их дугами, заключенными между точками касания.

Решение.

Отрезки, соединяющие центры окружностей (рис. 10.124), образуют правильный треугольник со стороной $2r$. Его площадь: $S_1 = \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}$.

Площадь 1-го сектора $S_2 = \frac{\pi r^2 60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi r^2}{6}$. Так как секторов три, то пло-

площадь фигуры, расположенной вне окружностей и ограниченной их дугами, заключенными между точками касания, будет равна

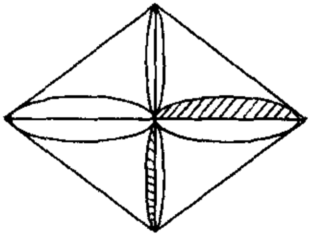


Рис. 10.125

$$S = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{r^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}.$$

Ответ: $\frac{r^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$.

10.139. На сторонах ромба как на диаметрах описаны полуокружности, обращенные внутрь ромба. Определить площадь полученной розетки, если диагонали ромба равны a и b.

Решение.

Площадь полученной розетки будет равна сумме площадей четырех заштрихованных (рис. 10.125) частей. Площадь каждой заштрихованной части равна разности площади полукруга и площади прямоугольного треугольника со сторонами $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Сторону ромба можно найти как гипотенузу: $c = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда радиус полуокружности $R = \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}$. Площадь полукруга $S_1 = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{32}(a^2+b^2)$. Площадь прямоугольного треугольника $S_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab}{8}$. Площадь розетки $S = 4(S_1 - S_2) =$

$$= 4\left(\frac{\pi}{32}(a^2+b^2) - \frac{ab}{8}\right) = \frac{\pi(a^2+b^2)-4ab}{8}.$$

Ответ: $\frac{\pi(a^2+b^2)-4ab}{8}$.

10.140. Доказать, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, определяемого этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

Решение.

По условию (рис. 10.126), $KL \parallel AC \parallel NM$, $KN \parallel BD \parallel LM$. Площадь параллелограмма $KLMN$ равна

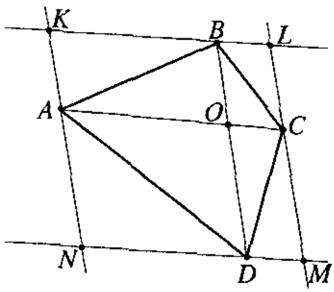


Рис. 10.126

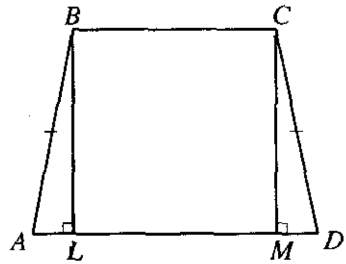


Рис. 10.127

$S_{KLMN} = S_{ABCD} + S_{AKB} + S_{BLC} + S_{CDM} + S_{AND}$.

Так как $KB \| AO$ и $KA \| BO$, то $KBOA$ — параллелограмм и AB — его диагональ. Значит, $S_{AKB} = S_{ABO}$. Аналогично $S_{BLC} = S_{BOC}$, $S_{CMD} = S_{COD}$, $S_{DNA} = S_{DOA}$. Тогда

$S_{KLMN} = S_{ABCD} + (S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} + S_{ABO}) = S_{ABCD} + S_{ABCD} = 2S_{ABCD}$,

что и требовалось доказать.

10.141. Определить боковые стороны равнобедренной трапеции, если ее основания и площадь равны соответственно 8 см, 14 см и 44 см^2.

Решение.

Пусть $BC = 8$, $AD = 14$ (рис. 10.127). Проведем $BL \perp AD$, $CM \perp AD$.

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} BL$. Отсюда $BL = \frac{2S_{ABCD}}{BC + AD} = 4$ (см). По условию

$AB = CD$, $BL = CM$. Значит, $AL = MD = \frac{AD - LM}{2} = 3$ (см). Тогда

$AB = \sqrt{BL^2 + AL^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

10.142. В правильный треугольник вписана окружность, а в нее — правильный шестиугольник. Найти отношение площадей треугольника и шестиугольника.

Решение.

Пусть сторона правильного треугольника равна a. Тогда его площадь $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Радиус окружности, вписанной в треугольник, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

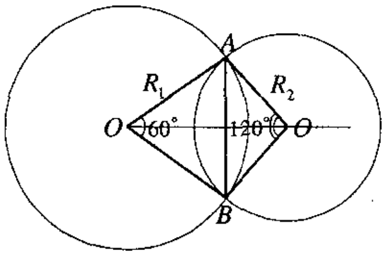


Рис. 10.128

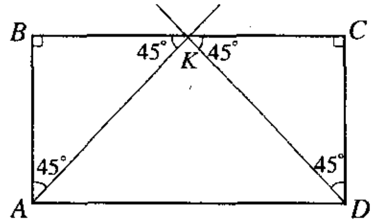


Рис. 10.129

Он будет равен стороне шестиугольника, вписанного в эту окружность: $a_6 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. А радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник:

$$r = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}.$$

Площадь шестиугольника

$$S_2 = \frac{6a_5 r}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8};\ \frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2\sqrt{3}\cdot 8}{4a^2\sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: 2.

10.143. Общей хордой двух кругов стягиваются дуги в 60° и 120°. Найти отношение площадей этих кругов.

Решение.

Пусть AB — общая хорда, R_1, R_2 — радиусы соответствующих окружностей (рис. 10.128). По теореме косинусов

$$AB^2 = R_1^2 + R_1^2 - 2R_1R_1\cos 60^\circ = R_1^2.$$

С другой стороны, $AB^2 = R_2^2 + R_2^2 - 2R_2R_2\cos 120^\circ = 3R_2^2$. Значит, $R_1^2 = 3R_2^2$. Площади кругов $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$.

Отношение $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3R_2^2\pi}{\pi R_2^2} = \frac{3}{1}$.

Ответ: 3:1.

10.144. В прямоугольнике проведены биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне. Определить, на какие части делится пло-

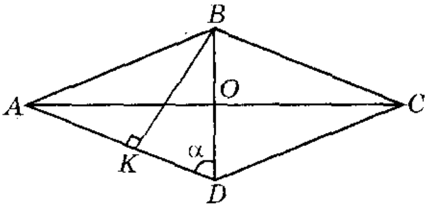


Рис. 10.130

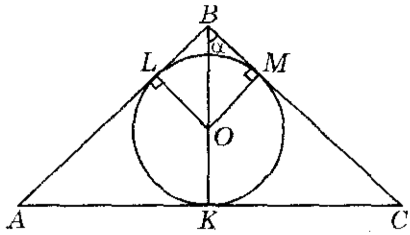


Рис. 10.131

щадь прямоугольника этими биссектрисами, если стороны прямоугольника равны 2 и 4 м.

Решение.

Пусть AK и DL — биссектрисы (рис. 10.129), $AD = 4$, $BA = 2$, $\angle KAB = 45°$, $\angle B = 90°$, $\angle BKA = 45°$. Значит, ΔABK — равнобедренный и $AB = BK = 2$ (м). Аналогично, $KC = CD = 2$ (м). Так как $BK + CL = 4$ (м), то точки L и K совпадают. Имеем $S_{ABK} =$

$= \frac{1}{2} AB \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (м^2), $S_{DCK} = \frac{1}{2} CK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (м^2), $S_{AKD} =$

$= S_{ABCD} - S_{ABK} - S_{DCK} = 2 \cdot 4 - 2 - 2 = 4$ (м^2).

Ответ: 2, 2, 4 (м^2).

10.145. Высота ромба равна 12 см, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найти площадь ромба.

Решение.

Пусть $BK = 12$ (см), $BD = 15$ (см) (рис. 10.130). Из ΔBKD

$\sin\alpha = \frac{BK}{BD} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; так как $0 < \alpha < 90°$, то $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$.

Из ΔAOD $\cos\alpha = \frac{OD}{AD} = \frac{BD}{2AD}$, откуда $AD = \frac{BD}{2\cos\alpha} = \frac{15 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \frac{75}{6}$ (см).

Площадь ромба $S = AD \cdot BK = \frac{75}{6} \cdot 12 = 150$ (см^2).

Ответ: 150 см^2.

10.146. Длина высоты, опущенной на основание равнобедренного треугольника, равна 25 см, а радиус вписанной окружности равен 8 см. Найти длину основания треугольника.

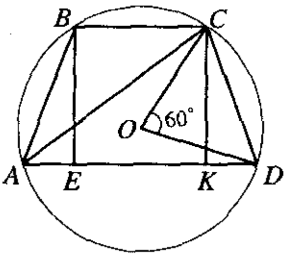


Рис. 10.132

Решение.

Пусть K, L, M — точки касания (рис. 131). Тогда $BK = 25$ (см), $OK = OL = OM = 8$ (см). Значит,

$$BO = BK - OK = 17 \text{ (см)},$$

$$BM = \sqrt{BO^2 - OM^2} = \sqrt{289 - 64} = 15 \text{ (см)}.$$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{OM}{BM} = \frac{8}{15}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{KC}{BK}$, откуда $KC = BK \operatorname{tg}\alpha = 25 \cdot \frac{8}{15} = \frac{40}{3}$ (см). Значит,

$$AC = 2KC = \frac{80}{3} \text{ (см)}.$$

Ответ: $\frac{80}{3}$ см.

10.147. В параллелограмме с периметром 32 см проведены диагонали. Разность между периметрами двух смежных треугольников равна 8 см. Найти длины сторон параллелограмма.

Решение.

Обозначим стороны параллелограмма через a и b. Тогда его периметр равен $p = 2(a + b) = 32$. Периметр одного треугольника равен $p_1 = b + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}$, второго $p_2 = a + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}$, где d_1, d_2 — диагонали параллелограмма. Разность $p_1 - p_2 = b - a = 8$. Получили систему:

$\begin{cases} a + b = 16, \\ b - a = 8. \end{cases}$ Решая ее, найдем $a = 4$, $b = 12$.

Ответ: 12 см, 4 см.

10.148. Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

Решение.

Так как центральный угол COD равен 60° (рис. 10.132), то вписанный угол CAD равен 30°. Следовательно, $h = \frac{1}{2}AC$ и из ΔAKC получим $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = h\sqrt{3}$. Находим площадь трапеции:

$$S=\frac{1}{2}(BC+AD)h=(AE+EK)h=AK\cdot h=h\sqrt{3}\cdot h=h^2\sqrt{3}.$$

Ответ: $h^2\sqrt{3}$.

10.149. Круг, радиус которого равен R, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определить площадь меньшего из этих сегментов.

Решение.

Обозначим сторону вписанного квадрата через a. Диаметр окружности является его диагональю. Это значит, что $2a^2=(2R)^2$, откуда $a=R\sqrt{2}$. Площадь круга $S_1=\pi R^2$. Площадь квадрата $S_2=a^2=2R^2$. Площадь меньшего сегмента

$$S=\frac{1}{4}(S_1-S_2)=\frac{\pi R^2-2R^2}{4}=\frac{R^2(\pi-2)}{4}.$$

Ответ: $\frac{R^2(\pi-2)}{4}$.

10.150. Определить площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны C_1 и C_2 ($C_1>C_2$).

Решение.

Длина окружности $C_1=2\pi R_1$, $C_2=2\pi R_2$, откуда $R_1=\frac{C_1}{2\pi}$, $R_2=\frac{C_2}{2\pi}$.

Площадь большего круга $S_1=\pi R_1^2=\frac{\pi C_1^2}{4\pi^2}=\frac{C_1^2}{4\pi}$; $S_2=\frac{C_2^2}{4\pi}$. Площадь кольца $S=S_1-S_2=\frac{1}{4\pi}\left(C_1^2-C_2^2\right)$.

Ответ: $\frac{C_1^2-C_2^2}{4\pi}$.

10.151. Круг разделен на два сегмента хордой, равной стороне правильного вписанного треугольника. Определить отношение площадей этих сегментов.

Решение.

Пусть r — радиус круга, а S_1 и S_2 — площади сегментов. Тогда

$$S_1=\frac{\pi r^2}{3}-\frac{1}{2}r\cdot\frac{r\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{12}r^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right),$$

$$S_2 = \pi r^2 - S_1 = \pi r^2 - \frac{1}{12} r^2 \left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) = \frac{1}{12} r^2 \left(8\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

Значит, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$.

10.152. В правильный шестиугольник, сторона которого равна a, вписана окружность, и около него же описана окружность. Определить площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

Решение.

Радиус вписанной в шестиугольник окружности $r_1 = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Радиус описанной же окружности около шестиугольника $r_2 = a$. Площадь большего круга $S_2 = \pi a^2$, меньшего — $S_1 = \pi \frac{3a^2}{4}$.

Площадь кольца $S = S_2 - S_1 = \pi a^2 - \frac{3\pi a^2}{4} = \frac{\pi a^2}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

10.153. Круг радиуса R разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найти радиусы этих окружностей.

Решение.

Обозначим радиусы внутренних окружностей через R_1 и R_2. Пусть S — площадь самого малого круга; тогда $\pi R_1^2 = S$, $\pi R_2^2 = 2S$, $\pi R^2 = 3S$. Следовательно, $\pi R_1^2 = \frac{\pi R^2}{3}$ и $\pi R_2^2 = \frac{2\pi R^2}{3}$, откуда $R_1 = \frac{R}{\sqrt{3}}$ и $R_2 = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\frac{R}{\sqrt{3}}$ и $R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

10.154. Площадь кругового кольца равна S. Радиус большей окружности равен длине меньшей окружности. Определить радиус последней.

Решение.

Радиус большей окружности обозначим через R_2, а меньшей — через R_1. Площадь кольца $S=\pi R_2^2-\pi R_1^2$. Так как $R_2=2\pi R_1$, то $S=\pi\cdot 4\pi^2R_1^2-\pi R_1^2=\pi R_1^2(4\pi^2-1)$.

Откуда $R_1=\sqrt{\dfrac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{S}{\pi(4\pi^2-1)}}$.

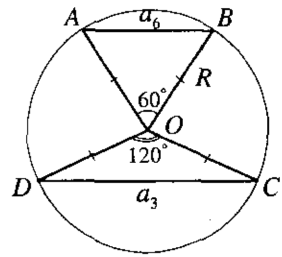


Рис. 10.133

10.155. В круге радиуса R по разные стороны от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых равна стороне правильного вписанного треугольника, а другая — стороне правильного вписанного шестиугольника. Определить площадь части круга, содержащейся между хордами.

Решение.

Длина хорды, равная стороне вписанного правильного шестиугольника, $a_6=R$, а треугольника $a_3=\dfrac{3R}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}R$ (рис. 10.133). Площадь сектора OAB S_1 равна площади сегмента плюс площадь треугольника AOB: $S_1=S_{\text{сегм}1}+S_{AOB}=\dfrac{\pi R^2\cdot 60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi R^2}{6}$. Откуда

$S_{\text{сегм}1}=\dfrac{\pi R^2}{6}-\dfrac{1}{2}R^2\sin 60^\circ=\dfrac{\pi R^2}{6}-\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Площадь сектора OCD S_2 также равна сумме площадей сегмента и треугольника ODC: $S_2=S_{\text{сегм}2}+S_{ODC}=\dfrac{\pi R^2\cdot 120^\circ}{360^\circ}=\dfrac{\pi R^2}{3}$, откуда $S_{\text{сегм}2}=\dfrac{\pi R^2}{3}-\dfrac{1}{2}R^2\sin 120^\circ=\dfrac{\pi R^2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}R^2}{4}$. Площадь круга, содержащаяся между хордами:

$$S=\pi R^2-S_{\text{сегм}1}-S_{\text{сегм}2}=\pi R^2-\frac{\pi R^2}{6}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi R^2}{3}+\frac{\sqrt{3}R^2}{4}=\frac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{R^2(\pi+\sqrt{3})}{2}$.

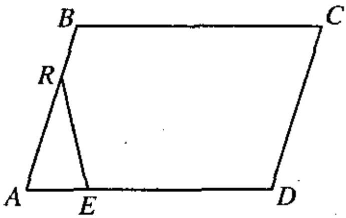


Рис. 10.134

10.156. В круг радиуса R вписаны два правильных треугольника так, что при их взаимном пересечении каждая из сторон разделилась на три равных отрезка. Найти площадь пересечения этих треугольников.

Решение.

Фигура, образованная при пересечении таких треугольников, будет правильным шестиугольником. Сторона вписанного правильного треугольника равна $a_3 = \frac{3R}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}R$. Тогда сторона правильного шестиугольника равна $a_6 = \frac{1}{3}a_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}R$. Радиус вписанной в него окружности $r = \frac{a_6}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}R}{3\cdot 2} = \frac{R}{2}$.

Площадь шестиугольника: $S_6 = \frac{6a_6r}{2} = \frac{6R\sqrt{3}\cdot R}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}R^2}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}R^2}{2}$.

10.157. Через точки R и E, принадлежащие сторонам AB и AD параллелограмма $ABCD$, и такие, что $AR = (2/3)AB$, $AE = (1/3)AD$, проведена прямая. Найти отношение площади параллелограмма к площади полученного треугольника.

Решение.

Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$, h_1 — высота треугольника ARE (рис. 10.134). Тогда $S_{ABCD} = AD\cdot h$, $S_{\Delta ARE} = \frac{1}{2}AE\cdot h_1$. Но $\frac{h}{h_1} = \frac{AB}{AR} = \frac{3}{2}$. Следовательно, $\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta ARE}} = \frac{AD\cdot h}{\frac{1}{2}AE\cdot h_1} = \frac{AD\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AD\cdot\frac{2}{3}h} = 9$.

Ответ: 9.

10.158. Три окружности радиусов $R_1 = 6$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см попарно касаются друг друга. Определить площадь треугольника, вершины которого совпадают с центрами этих окружностей.

Решение.

Отрезки, соединяющие центры этих окружностей, равны: $a = R_1 + R_1 = 6 + 7 = 13$ (см), $b = R_2 + R_3 = 7 + 8 = 15$ (см), $c = R_1 + R_3 = 6 + 8 = 14$ (см). Тогда площадь этого треугольника можно найти по формуле Герона, где $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+15+14}{2} = 21$ (см):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 84 см^2.

10.159. Найти отношение площадей равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника, длины сторон которых равны.

Решение.

Пусть сторона правильного треугольника, квадрата, шестиугольника равна a. Тогда $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_4 = a^2$, $S_6 = \frac{6\sqrt{3}a^2}{4}$. Значит,

$$S_3 : S_4 : S_6 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} : a^2 : \frac{6\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$.

10.160. В трапеции, площадь которой равна 594 м^2, высота 22 м, а разность параллельных сторон равна 6 м, найти длину каждой из параллельных сторон.

Решение.

Так как $S = \frac{1}{2}(a+b)h$, то $\frac{1}{2}(a+b)\cdot 22 = 594$, откуда $a + b = 54$. Из системы уравнений $\begin{cases} a+b=54, \\ a-b=6 \end{cases}$ находим $a = 30$ (м), $b = 24$ (м).

Ответ: 30 м и 24 м.

10.161. Через вершину прямого угла прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 см проведен перпендикуляр к гипотенузе. Вычислить площади образовавшихся треугольников.

Решение.

Пусть CK — перпендикуляр к гипотенузе AB ΔABC (рис. 10.135).

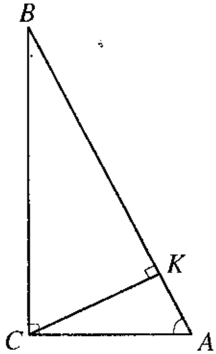


Рис. 10.135

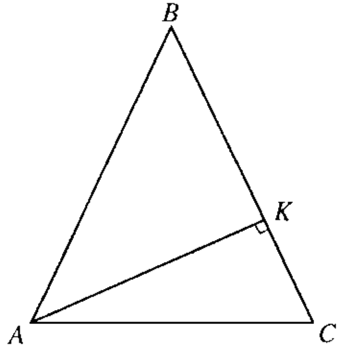


Рис. 10.136

Тогда $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 10$ (см); $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 24$ (см^2);

$\Delta BKC \sim \Delta ACB$. Значит, $\frac{S_{ACB}}{S_{BKC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$. Найдем

$$S_{BKC} = \frac{S_{ACB} \cdot BC^2}{AB^2} = \frac{24 \cdot 64}{100} = 15{,}36 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Тогда $S_{ACK} = S_{ABC} - S_{BKC} = 24 - 15{,}36 = 8{,}64$ (см^2).

Ответ: 15,36; 8,64 (см^2).

10.162. Вычислить площадь равнобедренного треугольника, если длина его высоты, проведенной к боковой стороне, равна 12 см, а длина основания равна 15 см.

Решение.

Пусть AK — перпендикуляр к боковой стороне BC (рис. 10.136). Тогда $AK = 12$, $AC = 15$ (см); $KC = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$ (см). Обозначим $AB = BC = x$. Тогда $AB^2 = AK^2 + 13x^2$ или $x^2 = 144 + (x-9)^2$, откуда $x = \frac{15}{2}$ (см). Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC = \frac{1}{2} 12 \cdot \frac{15}{2} = 75$ (см^2).

Ответ: 75 см^2.

10.163. Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.

Решение.

Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда $r = \frac{S}{p}$, $R = \frac{abc}{4S}$. Найдем

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Следовательно, $r = 4$ см, $R = \frac{65}{8}$ см, откуда получим искомое отношение площадей: $\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{65}{32}\right)^2$.

Ответ: $\left(\frac{65}{32}\right)^2$.

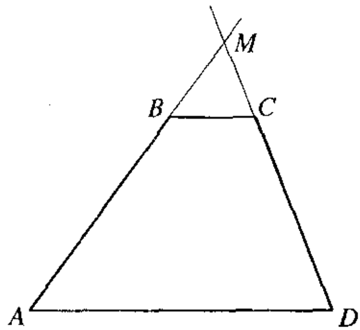


Рис. 10.137

10.164. Вычислить площадь трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$), если длины ее оснований относятся как 5:3 и площадь треугольника ADM равна 50 см², где M — точка пересечения прямых AB и CD.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 10.137). $AD : BC = 5:3$; $S_{ADM} = 50$. $\Delta ADM \sim \Delta BCM$. Значит, $\frac{S_{ADM}}{S_{BCM}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2$. Тогда

$$S_{BCM} = \frac{S_{ADM} BC^2}{AD^2} = S_{ADM}\left(\frac{BC}{AD}\right)^2 = 50\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 18.$$

$$S_{ABCD} = S_{ADM} - S_{BCM} = 50 - 18 = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 32 см².

10.165. В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найти площадь образовавшегося кольца, если сторона треугольника равна a.

Решение.

Имеем $S_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $p = \frac{3}{2}a$, $r = \frac{S_\Delta}{p} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{2}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $R = \frac{a^3}{4S_\Delta} = \frac{a^3}{\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Отсюда $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{\pi a^2}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi a^2}{4}$.

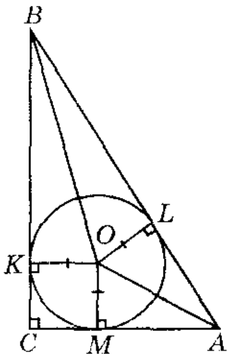


Рис. 10.138

10.166. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник, равен 3 см. Найти площадь треугольника.

Решение.

Пусть K, L, M — точки касания вписанной окружности (рис. 10.138). Тогда $KO = LO = MO = 3$ (см), $CA = 15$ (см). Отсюда $CM = KC = 3$ (см), $MA = CA - CM = 15 - 3 = 12$ (см). Значит, $LA = 12$ (см). Обозначим $BK = BL = x$. Тогда площадь треугольника $S = 2S_{BKO} + 2S_{OLA} + S_{KOMC} =$

$= 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot 3 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 3 + 3\cdot 3 = 3x + 45$. С другой стороны, $S = (x+3)\cdot 15\cdot\frac{1}{2} = \frac{15}{2}x + \frac{45}{2}$. Тогда $\frac{15}{2}x + \frac{45}{2} = 3x + 45$, откуда $x = 5$.

Итак, площадь треугольника $S = 15\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 60$ (см^2).

Ответ: 60 см^2.

10.176. Доказать, что площадь трапеции равна произведению длины одной из непараллельных сторон и длины перпендикуляра, проведенного через середину другой боковой стороны к первой.

Решение.

Пусть точки K, M — середины непараллельных сторон AB и CD (рис. 10.139), ML — перпендикуляр к стороне AB, BN — перпендикуляр к AD. Из ΔANB найдем $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$. Из ΔKLM получим $\sin\alpha = \frac{LM}{KM}$. Значит, $\frac{BN}{AB} = \frac{LM}{KM}$, где KM — средняя линия трапеции $ABCD$. Итак, $AB\cdot LM = BN\cdot KM = S$, что и требовалось доказать.

10.168. Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них построить как на диаметре полуокружность (внутри данного полукруга), то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра к диаметру полукруга, проведенного в точке деления до пересечения с окружностью.

Решение.

Пусть R — радиус данного полукруга, а r — радиус одного из пост-

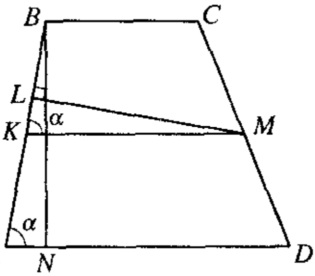


Рис. 10.139

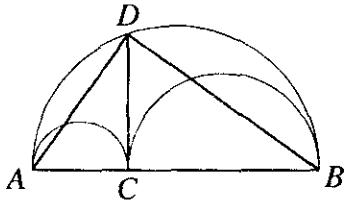


Рис. 10.140

роенных полукругов (рис. 10.140). Тогда площадь заданной фигуры равна $0{,}5\left(\pi R^2 - \pi r^2 - \pi (R-r)^2\right) = \pi r(R-r)$. Так как $\angle ADB = 90^\circ$, то $CD^2 = AC \cdot CB = 2r \cdot 2(R-r) = 4r(R-r)$, откуда $\frac{\pi CD^2}{4} = \pi r(R-r)$. Что и требовалось доказать.

10.169. В круг радиуса R вписан прямоугольник, площадь которого вдвое меньше площади круга. Определить стороны прямоугольника.

Решение.

Пусть стороны прямоугольника равны a и b. Тогда диагональ его, являясь диаметром окружности, равна $\sqrt{a^2+b^2}$, т.е. $a^2+b^2=4R^2$.

Площадь круга $\pi R^2 = 2ab$. Получим систему: $\begin{cases} a^2+b^2=4R^2, \\ \pi R^2 = 2ab. \end{cases}$ Откуда

$$b = \frac{R\sqrt{\pi+4} \pm R\sqrt{4-\pi}}{2},\ a = \frac{R\sqrt{\pi+4} \mp R\sqrt{4-\pi}}{2}.$$

Ответ: $\frac{R\sqrt{\pi+4} \pm R\sqrt{4-\pi}}{2}$.

10.170. Определить площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса R с хордой $2a$.

Решение.

Опустим радиусы вписанного круга в точки касания (рис. 10.141). Тогда из прямоугольных треугольников ΔABD и ΔOKB получаем

$$\sin\alpha = \frac{OK}{OB} = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow \frac{r}{R-r} = \frac{a}{R} \Leftrightarrow Rr = Ra - ra \Leftrightarrow r = \frac{Ra}{R+a}.$$

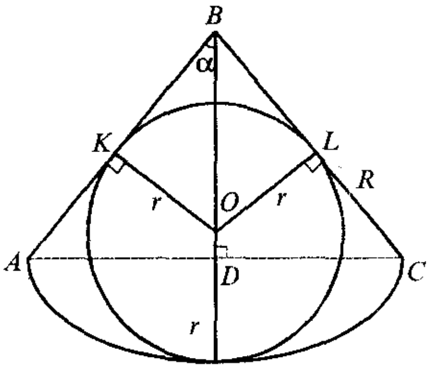


Рис. 10.141

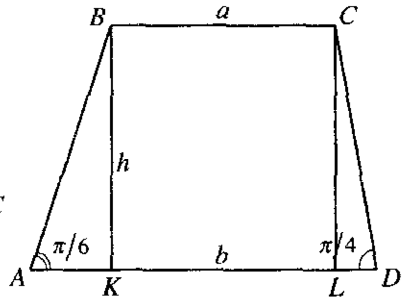


Рис. 10.142

Отсюда $\pi\left(\dfrac{Ra}{R+a}\right)^2$ — площадь вписанного круга.

Ответ: $\pi\left(\dfrac{Ra}{R+a}\right)^2$.

10.171. Основания трапеции равны a и b, углы при большем основании равны $\pi/6$ и $\pi/4$. Найти площадь трапеции.

Решение.

Пусть $BC \| AD$ и $\angle A = \pi/6$, $\angle D = \pi/4$. Опустим перпендикуляры BK и CL на сторону AD (рис. 10.142). $CL = BK$ обозначим через h. Тогда $\operatorname{tg}\pi/4 = \dfrac{CL}{LD}$. Значит, $LD = h$. Тогда $AK = b - a - h$, а $\operatorname{tg}\pi/6 = \dfrac{BK}{AK} =$ $= \dfrac{h}{b-a-h}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{b-a-h}$, откуда $h = \dfrac{b-a}{\sqrt{3}+1}$. Площадь трапеции

$$S = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{b-a}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(b^2-a^2\right)}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(b^2-a^2\right)}{4}$.

10.172. В ромб с острым углом 30° вписан круг, а в круг — квадрат. Найти отношение площади ромба к площади квадрата.

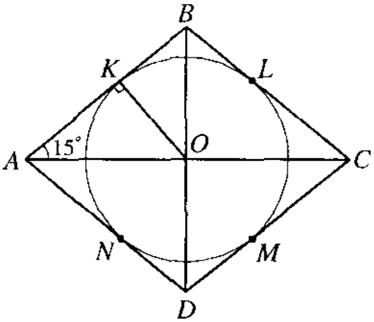


Рис. 10.143

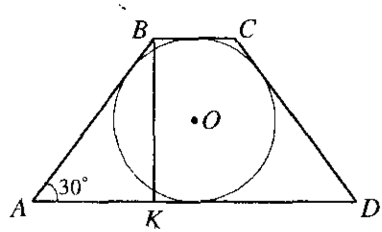


Рис. 10.144

Решение.

Пусть K, L, M, N — точки касания окружности и сторон ромба. $\angle A = 30^\circ$ (рис. 10.143), $\Delta AOB \sim \Delta OKB$. Значит, $\frac{KO}{OB} = \frac{AO}{AB}$. Обозначим $KO = OL = OM = ON = r$, $AB = BC = DC = AD = a$. Тогда $\frac{r}{a\sin 15^\circ} = \frac{a\cos 15^\circ}{a}$, откуда $r = a\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{a}{2}\sin 30^\circ$. Диаметр окружности является диагональю вписанного в окружность квадрата, т.е. $2b^2 = (2r)^2$, где b — сторона квадрата, тогда $b = r\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}\sin 30^\circ$. Площадь ромба $S_1 = a^2 \sin 30^\circ = a^2 \cdot \frac{1}{2}$. Площадь квадрата $S_2 = b^2 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{4}$. Отношение $\frac{S_1}{S_2} = 4$.

Ответ: 4.

10.173. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найти длину гипотенузы.

Решение.

Пусть c — длина гипотенузы. Тогда длины катетов равны $c-1$ и $c-2$. Имеем $(c-1)^2 + (c-2)^2 = c^2$ или $c^2 - 6c + 5 = 0$, откуда $c = 5$ (см) (второй корень уравнения не удовлетворяет условию).

Ответ: 5 см.

10.174. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S. Определить радиус этого круга, если угол при основании трапеции равен 30°.

Решение.

Пусть $BC \parallel AD$, $\angle A = 30^\circ$ (рис. 10.144). Обозначим $BC = a$, $AD = b$;

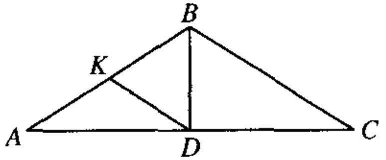


Рис. 10.145

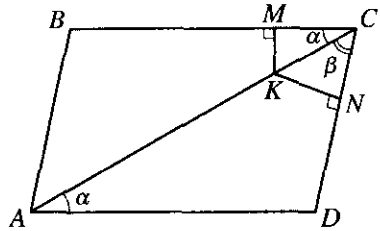


Рис. 10.146

опустим перпендикуляр BK на AD, обозначим его h, $AB=c$. Так как окружность вписана в трапецию, то $a+b=2c$ или $c=\dfrac{a+b}{2}$. Из ΔABK найдем $\sin 30^\circ=\dfrac{h}{c}=\dfrac{2h}{a+b}$, $\dfrac{2h}{a+b}=\dfrac{1}{2}$, откуда $a+b=4h$. Значит, $S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h=2h^2$; так как $h=2r$, то $S=8r^2$, откуда $r=\sqrt{\dfrac{S}{8}}=\dfrac{\sqrt{2S}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2S}}{4}$

10.175. Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно a, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

Решение.

По условию DK — средняя линия ΔABC (рис. 10.145). Так как $BD=DK=\dfrac{1}{2}BC$, то $\angle C=30^\circ$ и $BC=2BD$. В ΔBCD имеем $CD^2=BC^2-BD^2$ или $\dfrac{a^2}{4}=4BD^2-BD^2$, откуда $BD=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $S=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=CD\cdot BD=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

10.176. Доказать, что в параллелограмме $ABCD$ расстояния от любой точки диагонали AC до прямых BC и CD обратно пропорциональны длинам этих сторон.

Решение.

Пусть K — произвольная точка диагонали AC (рис. 10.146). Опустим перпендикуляры KM и KN на BC и CD.

Из ΔKMC $KC = \dfrac{MK}{\sin\alpha}$. Из ΔKNC $KC = \dfrac{KN}{\sin\beta}$. Это значит, что $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{KN}{MK}$.

Из ΔACD по теореме синусов находим $\dfrac{CD}{\sin\alpha} = \dfrac{AD}{\sin\beta}$, и так как $AD = BC$, то $\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{BC}{CD}$. Это значит, что $\dfrac{KN}{MK} = \dfrac{BC}{CD} = k$

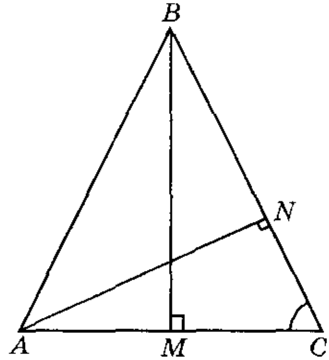


Рис. 10.147

или $KN \cdot CD = k$, $MK \cdot BC = k$. Отсюда $KN = \dfrac{k}{CD}$, $MK = \dfrac{k}{BC}$, что и требовалось доказать.

10.177. Доказать, что отношение периметра треугольника к одной из его сторон равно отношению высоты, опущенной на эту сторону, к радиусу вписанной окружности.

Решение.

Так как площадь треугольника $S = pr = 0{,}5ah_a$, то $2p/a = h_a/r$, что и требовалось доказать.

10.178. Найти длины сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если известно, что длины его высот AN и BM равны соответственно n и m.

Решение.

$\Delta CMB \sim \Delta CNA$ (рис. 10.147), откуда $\dfrac{BM}{AN} = \dfrac{BC}{AC}$. Отсюда $AC = \dfrac{n}{m}BC$,

$MC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{n}{2m}BC$. Из ΔBMC $BC^2 = MB^2 + MC^2, BC^2 = m^2 + BC^2\left(\dfrac{n}{2m}\right)^2$,

откуда $BC = \dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$, $AC = \dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

Ответ: $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}$.

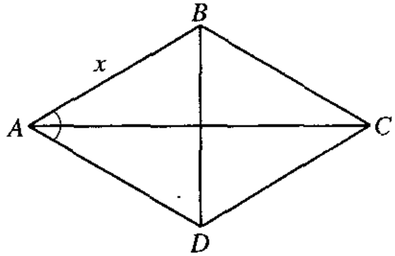


Рис. 10.148

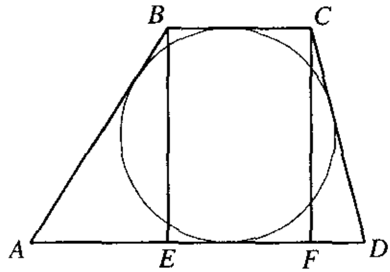


Рис. 10.149

10.179. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали (рис. 10.148), равновелик кругу радиуса R. Определить сторону ромба.

Решение.

Из условия ΔABD — равносторонний, следовательно, $\angle BAD = 60^\circ$.

Площадь ромба: $S_{\text{р}} = x^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \pi R^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}} = R\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$.

Ответ: $R\sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$.

10.180. Вычислить площадь трапеции по разности оснований, равной 14 см, и двум непараллельным сторонам, равным 13 и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

Решение.

Пусть $AB = 13$, $CD = 15$ (рис.10.149). Обозначим $AE = x$, $FD = y$. $AD - BC = 14$, значит, $x + y = 14$; $BE^2 = AB^2 - x^2$, $CF^2 = CD^2 - y^2$, откуда $13^2 - x^2 = 15^2 - y^2$. Получили систему $\begin{cases} x + y = 14, \\ 13^2 - x^2 = 15^2 - y^2, \end{cases}$ откуда $x = 5$, $y = 9$. Значит, $BE = 12$, $BC + AD = AB + CD = 28$. Тогда

$$S_{ABCD} = (BC + AD)\frac{BE}{2} = 28 \cdot 6 = 168 \text{ (см)}.$$

Ответ: 168 см^2.

10.181. В квадрате со стороной a середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Определить площадь внутреннего треугольника.

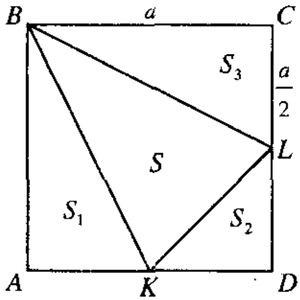


Рис. 10.150

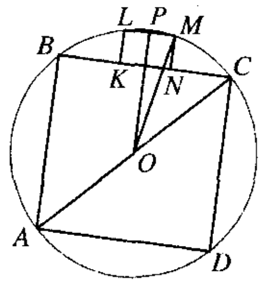


Рис. 10.151

Решение.

Пусть K, L —середины AD и CD (рис. 10.150). Тогда $S_1 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$; $S_2 = \frac{1}{2}\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$; $S_3 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Площадь квадрата $S_0 = a^2$. Значит, $S = S_0 - S_1 - S_2 - S_3 = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$.

Ответ: $\frac{3a^2}{8}$.

10.182. Около квадрата со стороной a описана окружность. В один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Определить площадь этого квадрата.

Решение.

Диагональ квадрата является диаметром окружности (рис. 10.151). $(2R)^2 = 2a^2$, откуда $R = \sqrt{2}a$. Пусть сторона меньшего квадрата равна x. Тогда $PM^2 + PO^2 = OM^2$, $PM = \frac{x}{2}$, $PO = \frac{a}{2} + x$. Значит, $\frac{x^2}{4} + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = \frac{a^2}{2}$, откуда $x = \frac{a}{5}$. Площадь меньшего квадрата $S = x^2 = \frac{a^2}{25}$.

Ответ: $\frac{a^2}{25}$.

10.183. В равнобедренную трапецию вписан круг. Доказать, что отношение площади круга к площади трапеции равно отношению длины окружности к периметру трапеции.

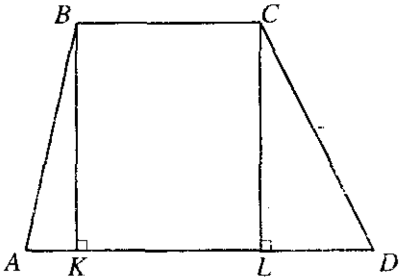


Рис. 10.152

Решение.

Обозначим основания трапеции через a и b. Так как круг вписан в трапецию, то $a+b=2\cdot c$, где c — боковая сторона. Значит, $c=\dfrac{a+b}{2}$. Тогда площадь трапеции $S_1=\dfrac{a+b}{2}\cdot h$, где h — ее высота; периметр

$$p_1=a+b+2\cdot\frac{a+b}{2}=2(a+b).$$

Площадь круга $S_2=\pi r^2=\pi\dfrac{h^2}{4}$. Длина окружности $l=2\pi r=\pi h$, отсюда $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\pi h^2\cdot 2}{4(a+b)\cdot h}=\dfrac{\pi h}{2(a+b)}=\dfrac{l}{p_1}$. Что и требовалось доказать.

10.184. Вычислить площадь трапеции, параллельные стороны которой содержат 16 и 44 см, а непараллельные — 17 и 25 см.

Решение.

Пусть BK и CL — перпендикуляры, опущенные на AD (рис. 10.152). $BC=16$ (см), $AD=44$ (см), $AB=17$ (см), $CD=25$ (см). Обозначим $AK=x$, $LD=y$. Тогда $AB^2-AK^2=BK^2$, $CL^2=CD^2-LD^2$. Это значит, что $17^2-x^2=BK^2$, $CL^2=25^2-y^2$. Получили систему $\begin{cases}17^2-x^2=25^2-y^2,\\ x+y+16=44,\end{cases}$ откуда $x=8$, $y=20$. Имеем $CL=\sqrt{625-400}=15$,

$$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot CL=\frac{16+44}{2}\cdot 15=450\ (\text{см}^2).$$

Ответ: 450 см^2.

10.185. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 5, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

Решение.

Пусть основания трапеции равны a и b, высота — h. Тогда пло-

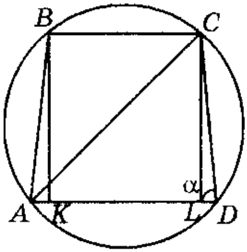


Рис. 10.153

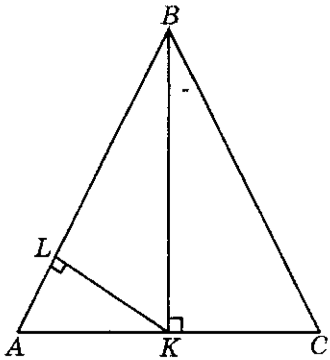


Рис. 10.154

щадь $S = \dfrac{a+b}{2}h$. С другой стороны, $S = h^2$. Значит, $h = \dfrac{a+b}{2} = 5$, откуда $S = 25$.

Ответ: 25.

10.186. Длины оснований равнобедренной трапеции относятся как 5:12, а длина ее высоты равна 17 см. Вычислить радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия равна высоте.

Решение.

Пусть $BC = 5k$, $AD = 12k$ (рис. 10.153). Тогда $\dfrac{BC+AD}{2} = h = 17$, $\dfrac{12k+5k}{2} = 17$, откуда $k = 2$. Значит, $BC = 10$, $AD = 24$. Пусть $CL \perp AD$, $BK \perp AD$, $AK = LD = \dfrac{AD-BC}{2} = 7$ (см); $CD = \sqrt{CL^2 + LD^2} = \sqrt{17^2 + 7^2} = 13\sqrt{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{CL}{CD} = \dfrac{17}{13\sqrt{2}}$. Из ΔALC найдем $AC = \sqrt{CL^2 + AL^2} = \sqrt{17^2 + 17^2} = 17\sqrt{2}$. По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = 2R$, следовательно, $\dfrac{17\sqrt{2}\cdot 13\sqrt{2}}{17\cdot 2} = R$, $R = 13$ (см).

Ответ: 13 см.

10.187. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника (рис. 10.154), равна H и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найти площадь треугольника.

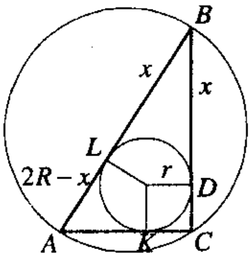


Рис. 10.155

Решение.

Пусть $BK = H$, BL — проекция BK на AB.

$$\Delta ABK \sim \Delta KLB \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{LB}{BK}, \ \frac{H}{AB} = \frac{H}{2 \cdot H},$$

откуда $AB = 2H$.

Значит,

$$AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{4H^2 - H^2} = H\sqrt{3}.$$

Площадь

$$S = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} H \cdot 2H\sqrt{3} = H^2\sqrt{3}.$$

Ответ: $H^2\sqrt{3}$.

10.188. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, относится к радиусу вписанной в него окружности как 5:2. Найти площадь треугольника, если один из его катетов равен a.

Решение.

Пусть R и r — радиусы вписанной и описанной окружностей, $BC = a$ (рис.10.155). Положим $BD = x$; тогда $BL = x$ (как касательные, проведенные из одной точки), $LA = AK = 2R - x$ (так как ΔABC — прямоугольный, то $AB = 2R$). Имеем $AC^2 + BC^2 = AB^2$ или $(r + 2R - x)^2 + a^2 = 4R^2$. Но $R = 5r/2$, $x = a - r$, и последнее уравнение примет вид $(7r - a)^2 + a^2 = 25r^2$ или $12r^2 - 7ar + a^2 = 0$, откуда $r_1 = a/3$, $r_2 = a/4$. Этим корням соответствуют значения $(AC)_1 = 4a/3$, $(AC)_2 = 3a/4$. В результате получаем два решения:

$$S_1 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{4a}{3} = \frac{2a^2}{3}, \ S_2 = \frac{1}{2} a \cdot \frac{3a}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

Ответ: $\frac{2a^2}{3}$ или $\frac{3a^2}{8}$.

10.189. В сегмент, дуга которого равна 60°, вписан квадрат. Вычислить площадь квадрата, если радиус круга равен $2\sqrt{3} + \sqrt{17}$.

Решение.

Обозначим $BC = CD = DA = AB = x$ (рис. 10.156). Рассмотрим ΔONC,

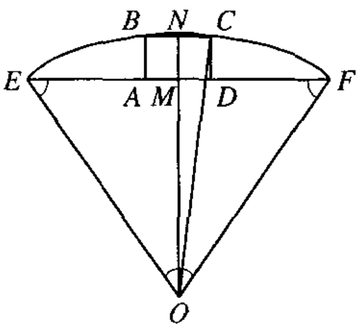


Рис. 10.156

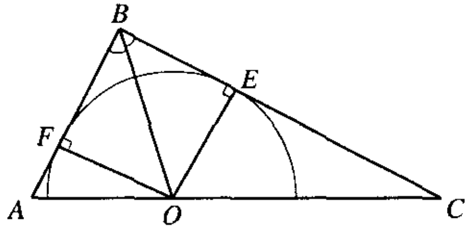


Рис. 10.157

$\angle ONC = 90^\circ$. Имеем $ON^2 + NC^2 = OC^2$, где $OC = R = 2\sqrt{3} + \sqrt{17}$. $ON =$

$= OM + MN = OM + x$, $NC = \frac{x}{2}$. В ΔOMF $\angle OMF = 90^\circ$, $\angle MOF =$

$= \frac{\angle EOF}{2} = 30^\circ$, тогда $OM = OF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $ON =$

$= \frac{R\sqrt{3}}{2} + x$. Таким образом, имеем $\left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + x\right)^2 + \frac{x^2}{4} = R^2$. Решая квадратное уравнение, получим, что $x = \frac{2R}{10}\left(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}\right)$; $S_{ABCD} = x^2$;

$x = \frac{\left(2\sqrt{3} + \sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17} - 2\sqrt{3}\right)}{5} = 1$, $S_{ABCD} = 1$.

Ответ: 1.

10.190. В треугольнике длины сторон относятся как 2:3:4 (рис. 10.157). В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найти отношение площади полукруга к площади треугольника.

Решение.

По условию $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$. Обозначим $AB = 2x$, тогда $BC = 3x$,

$AC = 4x$, $S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2} \cdot \sin \angle BCA$, $\cos \angle BCA = \frac{4x^2 - 9x^2 - 16x^2}{-24x^2} = \frac{7}{8}$,

$\sin \angle BCA = \sqrt{1 - \frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{3x^2\sqrt{15}}{4}$. Пусть O — центр полукруга и BO — биссектриса, тогда $\frac{AB}{BC}=\frac{AO}{OC}$; $\frac{2}{3}=\frac{AC}{OC}-1$, $\frac{4x}{OC}=\frac{5}{3}$; $OC=2{,}4x$.

В ΔOEC $\angle OEC=90^\circ$, $OE=R=OC\cdot\sin\angle BCA=\frac{12x}{5}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{3}{10}x\sqrt{15}$;

$S_{\text{кр}}=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{9\pi\cdot 15x^2}{100\cdot 2}=\frac{27}{40}\pi x^2$. Таким образом,

$$S_{\text{кр}}:S_{\Delta ABC}=\frac{27}{40}\pi x^2\cdot\frac{4}{3x^2\sqrt{15}}=\frac{9\pi}{10\sqrt{15}}=\frac{3\pi\sqrt{15}}{50}.$$

Ответ: $\frac{3\pi\sqrt{15}}{50}$.

Решения к главе 11

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Произвольная призма (l — боковое ребро; P — периметр основания; S — площадь основания; H — высота; $P_{\text{сеч}}$ — периметр перпендикулярного сечения; $S_{\text{сеч}}$ — площадь перпендикулярного сечения; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} l\,; \qquad (11.1)$$

$$V = SH\,; \qquad (11.2)$$

$$V = S_{\text{сеч}} l\,. \qquad (11.3)$$

2. Прямая призма:

$$S_{\text{бок}} = Pl\,. \qquad (11.4)$$

3. Прямоугольный параллелепипед (a, b, c — его измерения; d — диагональ):

$$S_{\text{бок}} = PH\,; \qquad (11.5)$$

$$V = abc\,; \qquad (11.6)$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2\,. \qquad (11.7)$$

4. Куб (a — ребро):

$$V = a^3\,; \qquad (11.8)$$

$$d = a\sqrt{3}\,. \qquad (11.9)$$

5. Произвольная пирамида (S — площадь основания; H — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3} SH\,. \qquad (11.10)$$

6. Правильная пирамида (P — периметр основания; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}Pl; \tag{11.11}$$

$$V = \frac{1}{3}SH. \tag{11.12}$$

7. Произвольная усеченная пирамида (S_1 и S_2 — площади оснований; h — высота; V — объем):

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right). \tag{11.13}$$

8. Правильная усеченная пирамида (P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l. \tag{11.14}$$

9. Цилиндр (R — радиус основания; H — высота; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = 2\pi RH; \tag{11.15}$$

$$V = \pi R^2 H. \tag{11.16}$$

10. Конус (R — радиус основания; H — высота; l — образующая; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; V — объем):

$$S_{бок} = \pi Rl; \tag{11.17}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \tag{11.18}$$

11. Шар, сфера (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности; V — объем):

$$S = 4\pi R^2; \tag{11.19}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{11.20}$$

12. Шаровой сегмент (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента; V — объем):

$$S = 2\pi Rh\,; \tag{11.21}$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right). \tag{11.22}$$

13. Шаровой сектор (R — радиус шара; h — высота сегмента; V — объем):

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h\,. \tag{11.23}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

1. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих двух условий: а) все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы; б) длины всех боковых ребер равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам основания пирамиды).

2. Пусть в пирамиде выполняется одно из следующих условий: а) все боковые грани образуют с основанием равные углы; б) длины всех апофем боковых граней равны. Тогда вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (эта же точка служит точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды).

3. Если в наклонной призме боковое ребро A_1B_1 составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину A_1 (рис. 11.1), то основание O высоты B_1O лежит на биссектрисе угла A_1.

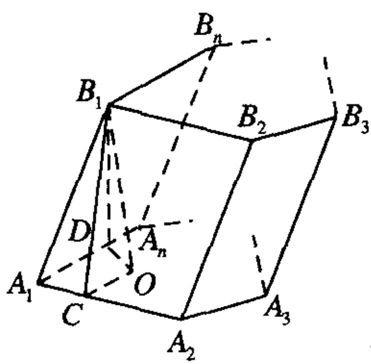


Рис. 11.1

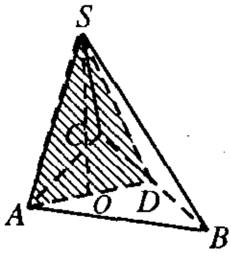


Рис. 11.2

Это же утверждение можно сформулировать так: если в трехгранном угле два острых плоских угла равны, то проекция их общего ребра на плоскость третьего плоского угла является его биссектрисой.

4. Если высота треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот треугольника, лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны. Справедливо и обратное утверждение.

5. Если SO — высота пирамиды $SABC$ и $SA \perp BC$, то площадь $SAO \perp BC$ (рис. 11.2)

Доказательство указанных дополнительных соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

11.001. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найти объем пирамиды.

Решение.

По условию $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$ (рис. 11.3); поэтому $BC = \frac{c}{2}$, $AC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, откуда $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{c\sqrt{3}}{8}$. Проведем SO так, чтобы $AO = OB$. Тогда O — центр описанной около ΔABC окружности, SO — высота пирамиды (см. «Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды», п. 1). В ΔASO имеем $\angle SAO = 45°$ и, значит, $SO = AO = \frac{c}{2}$. Итак,

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{c^3\sqrt{3}}{48}.$$

Ответ: $\frac{c^3\sqrt{3}}{48}$.

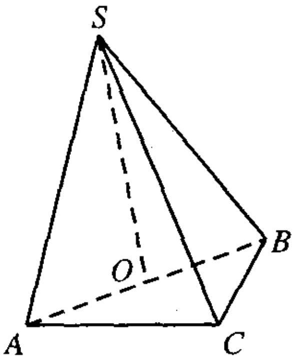


Рис. 11.3

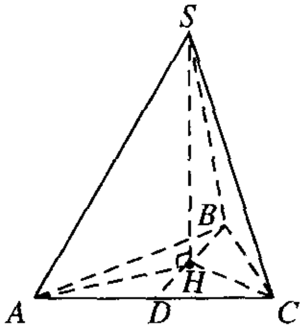


Рис. 11.4

11.002. Вычислить объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен R.

Решение.

У тетраэдра ребра равны. Обозначим их через a. Радиус окружности, описанной около основания тетраэдра (а это правильный треугольник), равен $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $a = R\sqrt{3}$. Высота тетраэдра проецируется в центр описанной около основания окружности (рис. 11.4). Тогда $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - R^2} = \sqrt{3R^2 - R^2} = R\sqrt{2}$.

Площадь основания $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. Тогда объем

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot SH = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \cdot R\sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{R^3\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$.

11.003. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем и полную поверхность пирамиды.

Решение.

У правильной треугольной пирамиды $SA = SB = SC$ (рис. 11.5); SH — высота, причем H — центр описанной окружности; D — середина AC,

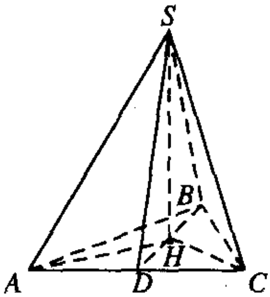


Рис. 11.5

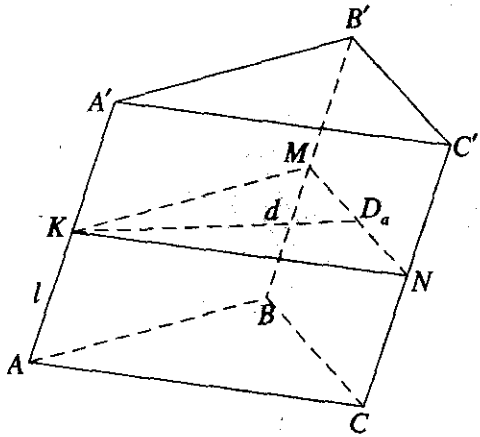


Рис. 11.6

это значит, что $HD \perp AC$ (ведь ΔABC — правильный). $\angle SDH = 45°$. Площадь основания $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Из ΔSDH имеем $DH = SH \operatorname{tg} 45° = SH$. С другой стороны, DH — радиус вписанной окружности — $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Это значит, что $SH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Тогда апофема $SD = \frac{SH}{\sin 45°} = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Полупериметр основания $p = \frac{3}{2}a$. Площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = SD \cdot p = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. Полная площадь $S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}$, а объем $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\text{осн}} = \frac{a^3}{24}$.

Ответ: $\frac{a^3}{24}$; $\frac{a^2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)}{4}$.

11.004. Определить объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна S, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно d.

Решение.

Через точку K на ребре $AA' = l$ (рис. 11.6) проводим сечение перпендикулярно к этому ребру. Тогда $KM \perp BB'$, т.к. $BB' \| AA'$; $KN \perp CC'$, т.к. $CC' \| AA'$. В ΔKMN проведем высоту KD. $KD \perp MN$ и $KD \perp CC'$, следовательно, $KD \perp BB'C'C$ и $KD = d$. По условию площадь грани $BB'C'C$ равна S. Тогда $V = S_{\Delta KMN} \cdot AA' = \frac{1}{2} KD \cdot MN \cdot AA' = \frac{1}{2} d \cdot a \cdot l$, где $MN = a$, $MN \perp CC' = l$.

Далее, $V = \frac{1}{2} d \cdot (a \cdot l) = \frac{1}{2} d (MN \cdot CC') = \frac{1}{2} dS$.

Ответ: $V = \frac{1}{2} dS.$

11.005. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади ее основания.

Решение.

У правильной пирамиды $AB = BC = AC = a$ (рис. 11.7). $\angle ASC = 90°$, $SA = SC = SB$. Это значит, что $\angle SAC = 45°$, $AD = DC$.

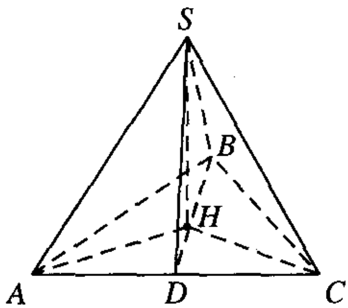


Рис. 11.7

Тогда из ΔSAC: $SA = \frac{AD}{\cos 45°} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (так как ΔASC — равнобедренный). SD — апофема. Тогда $SD = AS \sin 45° = \frac{a}{2}$. Боковая поверхность $S_{бок} = p \cdot SD$, где p — полупериметр основания — $p = \frac{3}{2} a$;

$S_{бок} = \frac{3}{2} a \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a^2}{4}$. Площадь основания $S_{осн} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$. Отношение

$\frac{S_{бок}}{S_{осн}} = \frac{3a^2 \cdot 4}{4a^2 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

11.006. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$ см. Определить объем параллелепипеда.

Решение.

Обозначим стороны основания a и b, высоту параллелепипеда h, и пусть $b>a$. Диагональ основания параллелепипеда $d_0=\sqrt{a^2+b^2}$. Диагональ боковой грани с ребрами b и h равна $d_1=\sqrt{b^2+h^2}=4\sqrt{10}$. Диагональ боковой грани с ребрами a и h равна $d_2=\sqrt{a^2+h^2}=3\sqrt{17}$. Диагональ параллелепипеда $d=\sqrt{d_0^2+h^2}=13$. Получим систему

$$\begin{cases} b^2+h^2=\left(4\sqrt{10}\right)^2, \\ a^2+h^2=\left(3\sqrt{17}\right)^2, \\ a^2+b^2+h^2=13^2, \end{cases}$$ откуда $a=3$, $b=4$, $h=12$. Объем $V=abh=144$ см^3.

Ответ: 144 см^3.

11.007. Найти отношение объема куба к объему правильного тетраэдра, ребро которого равно диагонали грани куба.

Решение.

У тетраэдра все ребра равны. Обозначим их через a. Радиус описанной около основания тетраэдра окружности $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Основание высоты H является центром описанной около ΔABC окружности (см. рис. 11.5). Тогда $H=\sqrt{a^2-R^2}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$ и объем $V_1=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$. Так как ΔABC — правильный, то $S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Значит, $V_1=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Пусть ребро куба равно b. Диагональ куба равна $b\sqrt{2}$. Она равна ребру тетраэдра $b\sqrt{2}=a$, откуда $b=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Объем куба $V_2=b^3=\frac{a^3}{2\sqrt{2}}$.

Отношение $\frac{V_2}{V_1}=\frac{a^3 12}{2\sqrt{2}a^3\sqrt{2}}=3$.

Ответ: 3.

11.008. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b, острый угол между ними содержит 60°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

Большая диагональ основания лежит напротив большего угла т.е. $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Отсюда, по теореме косинусов, $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$. Меньшая диагональ основания параллелепипеда $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$. По условию меньшая диагональ параллелепипеда равна d_1. С другой стороны, $d^2 = h^2 + d_2^2$, где h — высота параллелепипеда. Это значит, что $h = \sqrt{d_1^2 - d_2^2} = \sqrt{2ab}$. Площадь основания

$S_{\text{осн}} = ab\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}ab}{2}$. Объем $V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{\sqrt{6}ab\sqrt{ab}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}ab\sqrt{ab}}{2}$.

11.009. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен V. Найти объем призмы.

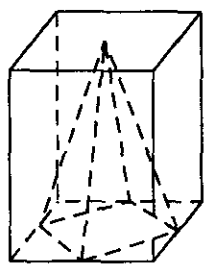


Рис. 11.8

Решение.

Пусть сторона основания призмы равна a (рис. 11.8). Тогда сторона основания пирамиды равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а площадь этого основания равна $\frac{a^2}{2}$. Обозначим объем призмы через V_1; имеем $V_1 = a^2 h$, где h — высота призмы. Так как по условию объем пирамиды равен V, то $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot h$. Но $a^2 h = V_1$, откуда $V_1 = 6V$.

Ответ: $6V$.

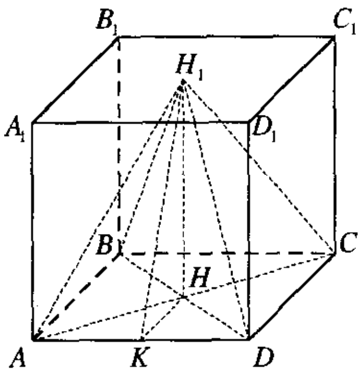


Рис. 11.9

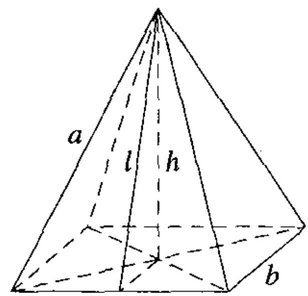


Рис. 11.10

11.010. В кубе, ребро которого равно a, центр верхней грани соединен с вершинами основания. Найти полную поверхность полученной пирамиды.

Решение.

Из условия ясно, что высота пирамиды равна высоте куба, т.е. a (рис. 11.9). K — середина AD, HH_1 — высота. Тогда $HK = \frac{a}{2}$;

$H_1K = \sqrt{HH_1^2 + HK^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Полупериметр основания $p = \frac{1}{2} \cdot 4a = 2a$. Боковая поверхность $S_{\text{бок}} = H_1K \cdot p = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{5}$.

Площадь основания $S_{\text{осн}} = a^2$. Полная поверхность

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = a^2 + a^2\sqrt{5} = a^2\left(1+\sqrt{5}\right).$$

Ответ: $a^2\left(1+\sqrt{5}\right)$

11.011. Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна 720°. Определить объем пирамиды, если ее боковое ребро, равное l, составляет с высотой пирамиды угол 30°.

Решение.

По формуле суммы внутренних углов многоугольника узнаем вид многоугольника $720° = 180°(n-2)$. Отсюда $n = 6$, т.е. получили шестиугольник; так как угол между боковым ребром и высотой равен 30°, то высота $h = l\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Радиус описанной около шестиугольника окружности $R = l\sin 30^\circ = \frac{l}{2}$. Он равен стороне шестиугольника $a = \frac{l}{2}$. Радиус окружности, вписанной в шестиугольник, равен $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$. Значит, площадь основания

$$S_{\text{осн}} = \frac{6ar}{2} = \frac{6\sqrt{3}l^2}{16}\text{, а объем } V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{3l^3}{16}.$$

Ответ: $\frac{3l^3}{16}$.

11.012. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна a. Найти полную поверхность пирамиды и ее объем.

Решение.

Обозначим сторону квадрата через b. Диагональ квадрата $d = b\sqrt{2}$. Она равна боковому ребру пирамиды $a = b\sqrt{2}$ (рис. 11.10).

Площадь основания $S_{\text{осн}} = b^2 = \frac{a^2}{2}$. Высота пирамиды, как видно из рисунка, $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Апофема пирамиды $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. Полупериметр основания $p = 2b = \frac{2a}{\sqrt{2}}$. Боковая поверхность $S_{\text{бок}} = l \cdot p = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$,

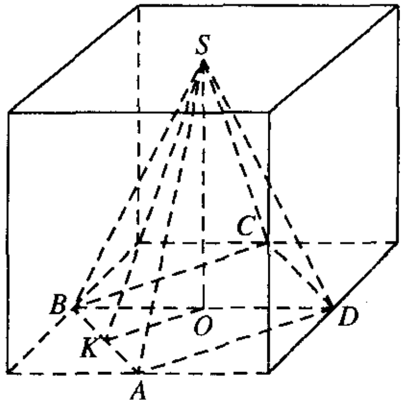


Рис. 11.11

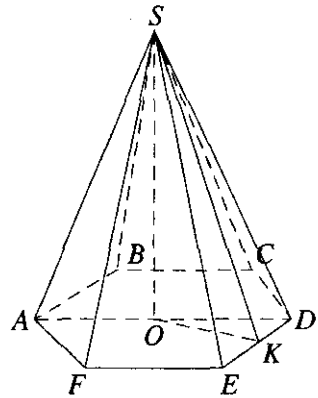


Рис. 11.12

$\frac{2a}{\sqrt{2}}=\frac{a^2\sqrt{7}}{2}$. Полная поверхность $S=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{7}}{2}+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2\left(\sqrt{7}+1\right)}{2}$.

Объем $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h=\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Ответ: $\frac{a^2\left(1+\sqrt{7}\right)}{2}$; $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

11.013. Центр верхнего основания куба с ребром, равным a, соединен с серединами сторон нижнего основания, которые также соединены в последовательном порядке. Вычислить полную поверхность полученной пирамиды.

Решение.

Так как ребро куба равно a, то сторона основания пирамиды $SABCD$ равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 11.11). Учитывая, что $OK=\frac{1}{2}AD=\frac{a\sqrt{2}}{4}$, найдем апофему пирамиды: $SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{8}}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Значит, $S_{\text{бок}}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{4}=\frac{3a^2}{2}$, $S_{\text{полн}}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+S_{\text{бок}}=2a^2$.

Ответ: $2a^2$.

11.014. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна h, а двугранный угол при основании равен 60°. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Так как $\angle SKO = 60^\circ$ (рис. 11.12), то $OK = \frac{1}{2}SK = \frac{h}{2}$. Основание пирамиды — правильный шестиугольник, поэтому $\angle KOD = 30^\circ$ и $KD = \frac{1}{2}OD$. Тогда $OK^2 = OD^2 - KD^2 = 4KD^2 - KD^2 = 3KD^2$, т.е. $KD = \frac{h\sqrt{3}}{6}$, $DE = 2KD = \frac{h\sqrt{3}}{3}$. Получаем: $S_{\text{осн}} = \frac{6DE^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\text{бок}} = 3DE \cdot h = h^2\sqrt{3}$, $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$.

11.015. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а двугранный угол при основании равен 60°.

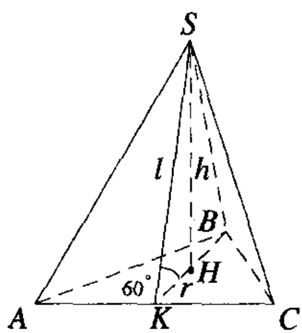


Рис. 11.13

Решение.

Радиус вписанной в правильный ΔABC окружности равен $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (рис. 11.13); SH — высота пирамиды, SK — апофема, K — середина AC, $\angle SKH = 60^\circ$. Апофема $l = \frac{r}{\cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Боковая поверхность $S_{\text{бок}} = p \cdot l$, где p — полупериметр основания $p = \frac{3a}{2}$. Тогда $S_{\text{бок}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Полная поверхность $S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

11.016. Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной b, и углом 60° между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол 45°. Найти объем пирамиды.

Решение.

По условию $BD = b, \angle AOB = 60^\circ$ (рис. 11.14); отсюда $AB = \frac{b}{2}$, $AD = \frac{b\sqrt{3}}{2}$. Значит, $S_{\text{осн}} = AB \cdot AD = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Так как $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO = 45^\circ$, то SO — высота пирамиды и $SO = \frac{b}{2}$. Итак, $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{b^3\sqrt{3}}{24}$.

Ответ: $\frac{b^3\sqrt{3}}{24}$.

11.017. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность составляет 3 см^2. Найти объем пирамиды.

Решение.

Обозначим сторону основания правильной треугольной пирамиды через a, т.е. $a = 1$ (см); $S_{\text{бок}} = 3$ (см^2). Так как $S_{\text{бок}} = pl$, где $p = \frac{3a}{2}$ — полупериметр основания, а l — апофема, то $l = \frac{S_{\text{бок}}}{p} = \frac{3}{3/2} = 2$ (см). Радиус вписанной в правильный треугольник окружности $r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (см). Тогда можно найти $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{4 - \frac{3}{36}} = \frac{\sqrt{47}}{2\sqrt{3}}$ (так как основанием высоты в правильной пирамиде является центр вписанной в треугольник основания окружности). Площадь основания $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (см^2). Тогда объем

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{47}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{47}}{24} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{47}}{24}$ см^3.

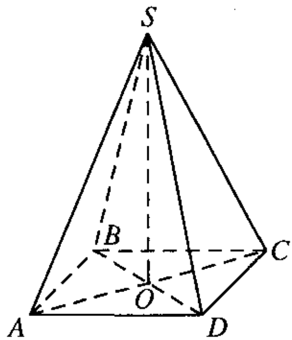


Рис. 11.14

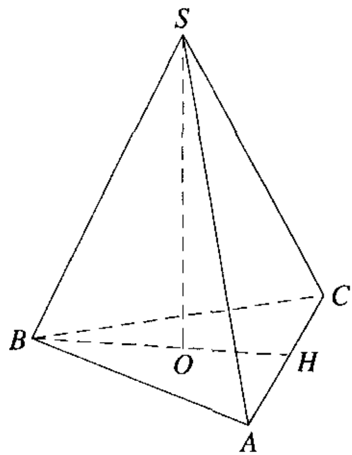


Рис. 11.15

11.018. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами, равными a, a и b. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем пирамиды.

Решение.

По условию $AB = BC = a$ (рис. 11.15); поэтому $BH = a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$. Отсюда $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{4} b\sqrt{4a^2 - b^2}$. Проведем высоту SO. Так как все ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то точка O — центр описанной около ΔABC окружности. Пусть радиус этой окружности равен R. Тогда $OB = R = \frac{a^2 b}{4S_{\text{осн}}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$. В ΔSOB $OB = \frac{SB}{2}$; поэтому

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{4OB^2 - OB^2} = OB\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$. Имеем

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{a^2 b\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $\frac{a^2 b\sqrt{3}}{12}$.

11.019. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l, а высота равна h. Определить объем пирамиды.

Решение.

Обозначим $AS = l$, $SH = h$ (см. рис. 11.5). Тогда $AH = \sqrt{AS^2 - SH^2} = \sqrt{l^2 - h^2}$. В правильной пирамиде AH является радиусом описанной около правильного ΔABC окружности, т.е. $AH = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ или $\sqrt{l^2 - h^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, откуда $a = \frac{3\sqrt{l^2 - h^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3(l^2 - h^2)}$.

Площадь основания $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}(l^2 - h^2)}{4}$. Тогда объем

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3}h\frac{3\sqrt{3}(l^2 - h^2)}{4} = \frac{\sqrt{3}h(l^2 - h^2)}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}h(l^2 - h^2)}{4}$.

11.020. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 и 6 дм и острым углом 45°. Боковое ребро призмы равно 4 дм и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть $AB = 3$ (дм), $AD = 6$ (дм), $AA_1 = 4$ (дм) (рис. 11.16); A_1H — высота. Тогда $A_1H = AA_1 \sin 30^\circ = 2$ (дм). Площадь основания $S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin 45^\circ = 9\sqrt{2}$ (дм^2). Объем

$$V = S_{\text{осн}} \cdot A_1H = 9\sqrt{2} \cdot 2 = 18\sqrt{2} \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Ответ: $18\sqrt{2}$ дм^3.

11.021. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 269/32 см. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть $SA = SB = SC = \frac{269}{32}$ (см) (рис. 11.4), а $AB = c = 15$ (см), $BC = a = 13$ (см), $AC = b = 14$ (см), SH — высота. Это значит, что $\angle SHA = \angle SHB = \angle SHC$. Тогда $AH = BH = CH$ (из равенства ΔASH,

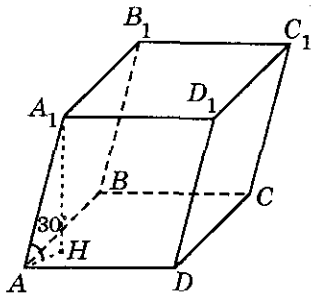


Рис. 11.16

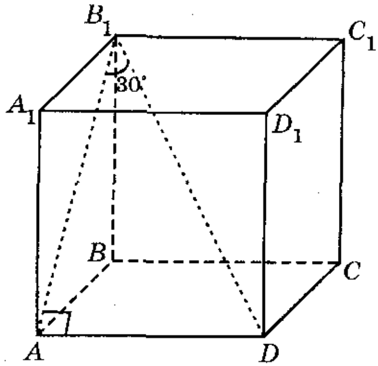


Рис. 11.17

$\Delta BSH, \Delta CSH$). Значит, H является центром описанной около ΔABC окружности и $R=\frac{abc}{4S}$. Площадь ΔABC можно найти по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}=21$ (см). Тогда $S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$ (см^2). Вычислим радиус описанной окружности $R=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\frac{65}{8}$ (см) и высоту пирамиды

$$SH=\sqrt{AS^2-AH^2}=\sqrt{\left(\frac{269}{32}\right)^2-\left(\frac{65}{8}\right)^2}=\frac{69}{32}\text{ (см).}$$

Объем $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot 84\cdot\frac{69}{32}=60{,}375$ см^3.

Ответ: 60,375 см^3.

11.022. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол 30°, а сторона основания равна a.

Решение.

Пусть $AB=BC=CD=DA=a$, B_1D — диагональ призмы, $\angle DB_1A=30°$ (рис. 11.17). Обозначим $AB_1=b$. Тогда $b=\frac{a}{\operatorname{tg}30°}=a\sqrt{3}$. Высота

$h = BB_1 = \sqrt{b^2 - a^2} = a\sqrt{2}$. Объем $V = S_{\text{осн}} \cdot h$. Так как $ABCD$ — квадрат, то $S_{\text{осн}} = a^2$. Тогда $V = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.

Ответ: $a^3\sqrt{2}$.

11.023. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания 6 дм, а высота 4 дм. Найти боковую поверхность усеченной пирамиды, отсекаемой от данной плоскостью, параллельной ее основанию и отстоящей от нее на 1 дм.

Решение.

Пусть $AD = DC = BC = AB = a_1$ (6 дм), SH — высота, $SH = 4$ (дм) (рис. 11.18). По условию $HH_1 = 1$ (дм). Из подобия ΔHES и ΔH_1E_1S (где E и E_1 — середины CD и C_1D_1 соответственно): $\frac{HE}{H_1E_1} = \frac{SH}{SH_1}$, но $SH_1 = SH - HH_1 = 4 - 1 = 3$ (дм). Значит, $H_1E_1 = HE : \frac{4}{3} = \frac{9}{4}$ (дм). Значит, $A_1D_1 = 2H_1E_1 = \frac{9}{2}$ (дм). $SE_1 = \sqrt{SH_1^2 + H_1E_1^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{15}{4}$ (дм). $SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. Тогда $S_{\text{бок1}} = p_1 \cdot SE_1$, $S_{\text{бок2}} = p_2 \cdot SE$, где p_1, p_2 — полупериметры $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ соответственно; $p_2 = 2 \cdot 6 = 12$ (дм), $p_1 = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9$ (дм). Тогда $S_{\text{бок1}} = 9 \cdot \frac{15}{4} = \frac{135}{4}$ (дм²); $S_{\text{бок2}} = 12 \cdot 5 = 60$ (дм²). Боковая поверхность усеченной пирамиды $S_{\text{бок}} = S_{\text{бок2}} - S_{\text{бок1}} = 60 - \frac{135}{4} = \frac{105}{4} = 26{,}25$ (дм²).

Ответ: 26,25 дм².

11.024. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами a и b ($a > b$). Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определить объем усеченной пирамиды.

Решение.

Пусть $AD = DC = BC = AB = a$, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1 = b$ (рис. 11.19), $\angle D_1DH = 45^\circ$, где D_1H — высота усеченной пирамиды.

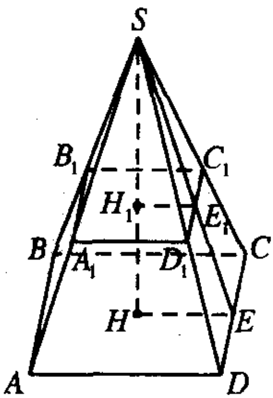


Рис. 11.18

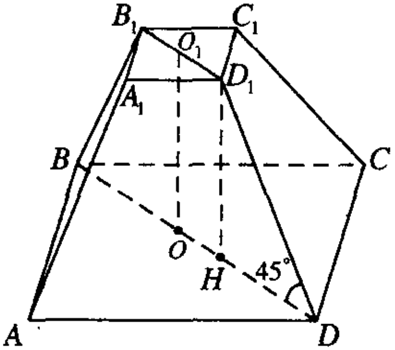


Рис. 11.19

$OO_1 \| D_1H$, $OH = O_1D_1$. $O_1D_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$. Аналогично $OD = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Значит, $HD = OD - OH = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$. $HD_1 = HD\operatorname{tg}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$;

$S_{ABCD} = a^2$, $S_{A_1B_1C_1D_1} = b^2$. Объем усеченной пирамиды

$$V = \frac{1}{3}HD_1\left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD}S_{A_1B_1C_1D_1}} + S_{A_1B_1C_1D_1}\right) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(a^3 - b^3\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}\left(a^3-b^3\right)$

11.025. Боковые ребра правильной усеченной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b ($a > b$). Найти объем усеченной пирамиды.

Решение.

Пусть $AB = BC = AC = a$, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1 = b$, $\angle A_1AH = 60^\circ$ (рис. 11.20). Так как ΔABC и $A_1B_1C_1$ — правильные, то O и O_1 — центры

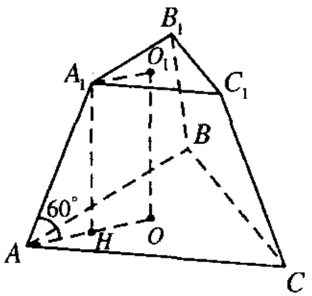


Рис. 11.20

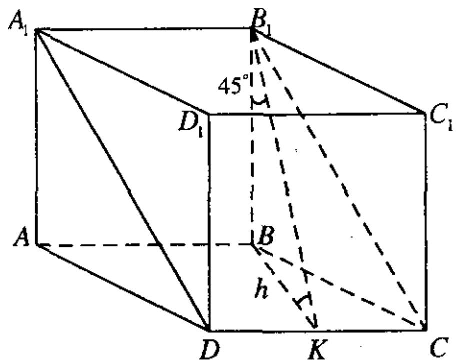


Рис. 11.21

описанных около них окружностей. Это значит, что $A_1O_1 = R_1 = \frac{b\sqrt{3}}{3}$,

$AO = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $A_1H \| OO_1$. Значит, $AH = AO - HO = R - R_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)$.

Высоту A_1H можно найти: $A_1H = AH \operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-b)\cdot\sqrt{3} = (a-b)$.

Площадь $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{A_1B_1C_1} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда объем

$$V = \frac{1}{3} A_1H\left(S_{ABC} + \sqrt{S_{ABC}S_{A_1B_1C_1}} + S_{A_1B_1C_1}\right) = \frac{1}{3}(a-b)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}ab + \frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^3 - b^3\right).$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{12}\left(a^3 - b^3\right)$.

11.026. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Полученное сечение имеет площадь, равную Q. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

Решение.

Проведем $BK \perp DC$ (рис. 11.21), тогда $B_1K \perp DC$ также. Отсюда $\angle BKB' = 45^\circ$ и $BK = BB' = h$, $B'K = \sqrt{2}h$. Пусть стороны ромба равны a. Тогда боковая поверхность

$$S_б = 4a \cdot BB_1 = 4ah = \frac{4}{\sqrt{2}} a \cdot \sqrt{2}h =$$

$= 2\sqrt{2} \cdot CD \cdot B'K = 2\sqrt{2}Q$, так как по условию площадь сечения A_1B_1CD равна Q.

Ответ: $2Q\sqrt{2}$.

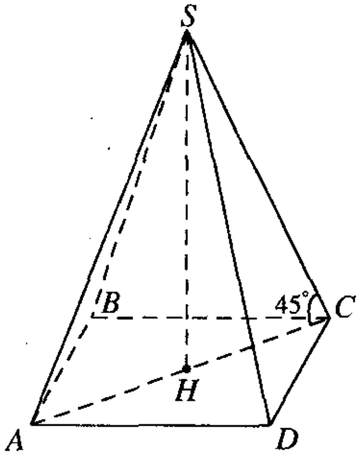


Рис. 11.22

11.027. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°, а площадь диагонального сечения равна S.

Решение.

Пусть $AB = BC = CD = AD = a$ (рис. 11.22). Тогда $AC = a\sqrt{2}$. SH — высота, $\angle SCH = 45^\circ$. $SH = CH \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Площадь диагонального сечения $S = \frac{1}{2} AC \cdot SH = \frac{\sqrt{2}a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$, откуда $a = \sqrt{2S}$. Значит, $SH = \sqrt{S}$. Площадь основания $S_{осн} = a^2 = 2S$. Объем

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot SH = 2S \cdot \sqrt{S} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} S\sqrt{S}.$$

Ответ: $\frac{2}{3} S\sqrt{S}$.

11.028. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом 30°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Определить объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен r.

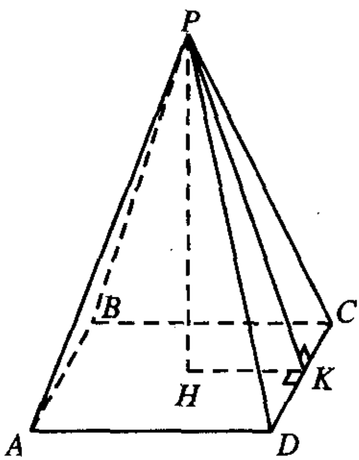


Рис. 11.23

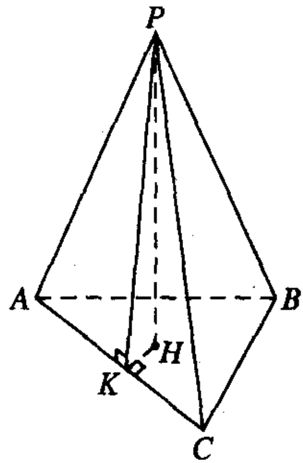


Рис. 11.24

Решение.

Пусть $PABCD$ — данная пирамида (рис. 11.23), PH — высота, $HK \perp CD$, значит, $PK \perp CD$, $\angle PKH = 60°$, $\angle BCD = 30°$, $HK = r$, $\angle CDH = 75°$. Из ΔHDK найдем $DK = \dfrac{r}{\operatorname{tg}75°}$. Из ΔCKH $KC = \dfrac{r}{\operatorname{tg}15°}$;

$$DC = DK + KC = r\left(\frac{1}{\operatorname{tg}75°} + \frac{1}{\operatorname{tg}15°}\right) = r\frac{\sin 90°}{\sin 15° \cos 15°} = \frac{2r}{\sin 30°} = 4r.$$

Площадь основания $S_{\text{осн}} = BC \cdot DC \sin 30° = 4r \cdot 4r \cdot \dfrac{1}{2} = 8r^2$. Высота PH из ΔPHK равна $PH = HK \operatorname{tg}60° = r\sqrt{3}$, а $PK = \dfrac{K}{\cos 60°} = 2r$. Тогда $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot PH = \dfrac{1}{3}8r^2 \cdot r\sqrt{3} = \dfrac{8r^3\sqrt{3}}{3}$, боковая поверхность $S_{\text{бок}} = p \cdot PK$, где p — полупериметр основания $p = 2 \cdot 4r = 8r$; это значит, что $S_{\text{бок}} = 8r \cdot 2r = 16r^2$. Полная поверхность

$$S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = 16r^2 + 8r^2 = 24r^2.$$

Ответ: $\dfrac{8r^3\sqrt{3}}{3}$, $24r^2$.

11.029. Объем правильной треугольной пирамиды, боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом 45°, равен 9 см^3. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть $PABC$ — данная пирамида (рис. 11.24), PH — высота, где H — центр вписанной в ΔABC окружности; $HK \perp AC$, значит, $PK \perp AC$, $HK = r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $\angle PKH = 45°$. Далее, $PH = HK \operatorname{tg} 45° = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $PK = \frac{HK}{\cos 45°} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{2}}{6} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Боковая поверхность $S_{\text{бок}} = \frac{3a}{2} \cdot PK = \frac{3}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. Тогда $S = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$. Объем $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot PH = \frac{a^3}{24} = 9$, откуда $a = 6$ (см). Итак, $S = \frac{36\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4} = 9\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$ см^2.

Ответ: $9\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$ см^2.

11.030. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 см и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Определить его объем.

Решение.

Пусть $AB = 1$ (см), $BC = 4$ (см) (рис. 11.25); $\angle BAD = 60°$, тогда $\angle ADC = 120°$. Значит, AC можно найти по теореме косинусов: $AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos 120° = 1 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 21$, $AC_1 = 5$ (см). Значит, $CC_1^2 = AC_1^2 - AC^2 = 25 - 21 = 4$ (см^2). Тогда $CC_1 = 2$ (см). Объем $V = S_{\text{осн}} \cdot CC_1$; $S_{\text{осн}} = AB \cdot AD \sin 60° = 1 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см^2). Тогда $V = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$ (см)^3.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см^3.

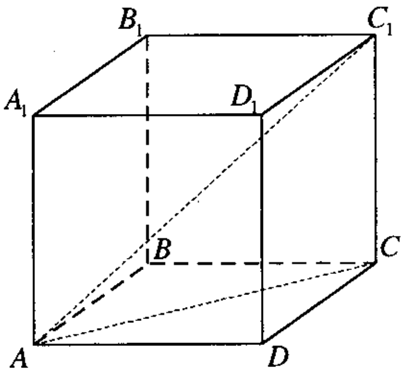


Рис. 11.25

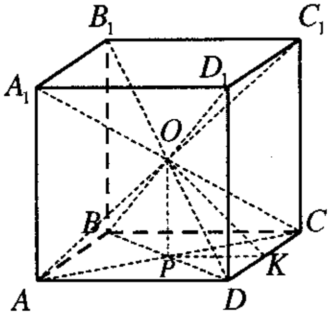


Рис. 11.26

11.031. Центр куба, ребро которого равно a, соединен со всеми его вершинами. Определить объем и поверхность каждой из полученных пирамид.

Решение.

Так как при указанном построении образовалось 6 одинаковых пирамид (рис. 11.26), то каждая из них имеет объем $V = \frac{a^3}{6}$ и полную поверхность $S_{\text{полн}} = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot OK$. Но $OK = \sqrt{OP^2 + PK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, откуда $S_{полн} = a^2 + a^2\sqrt{2} = a^2(1+\sqrt{2})$.

Ответ: $\frac{a^3}{6}$; $a^2(\sqrt{2}+1)$.

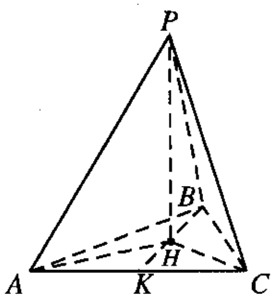


Рис. 11.27

11.032. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с основанием 6 см и высотой 9 см. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.

Решение.

Пусть $AC = 6$ (см), $BK = 9$ (см) (рис. 11.27), PH — высота, $PA = PB = PC = 13$ (см); из равенства $\Delta PHA = \Delta PHB = \Delta PHC$ следует $AH = HB = HC$, значит, H — центр

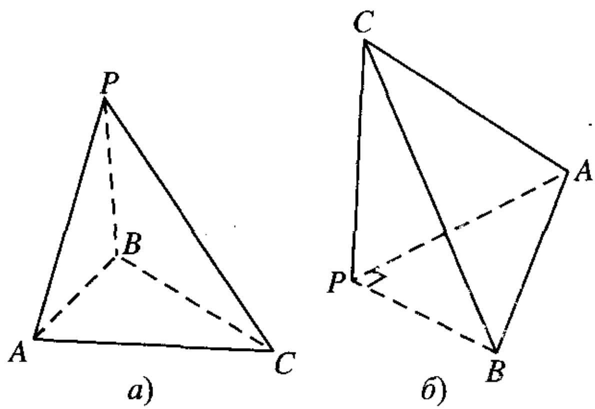


Рис. 11.28

описанной около ΔABC окружности. Тогда $AK = KC = \frac{AC}{2} = 3$ (см).

Значит, $BC = AB = \sqrt{BK^2 + KC^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$.

Площадь основания $S_{осн} = S_{ABC} = \frac{1}{2} BK \cdot AC = \frac{1}{2} 6 \cdot 9 = 27$ (см²).

Тогда радиус описанной окружности

$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{3\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 6}{4 \cdot 27} = 5$ (см). Значит,

$PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = 12$ (см). Объем $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot PH = \frac{1}{3} \cdot 27 \cdot 12 = 108$ (см³).

Ответ: 108 см³.

11.033. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$ и $\sqrt{126}$ см. Найти объем и площадь основания пирамиды.

Решение.

По условию $\angle APC = \angle APB = \angle BPC = 90°$, $AP = \sqrt{70}$, $PB = \sqrt{99}$, $PC = \sqrt{126}$ (рис. 11.28, *а*). По теореме Пифагора

$AB = \sqrt{PA^2 + PB^2} = \sqrt{70+99} = 13$, $BC = \sqrt{PB^2 + PC^2} = \sqrt{99+126} = 15$,

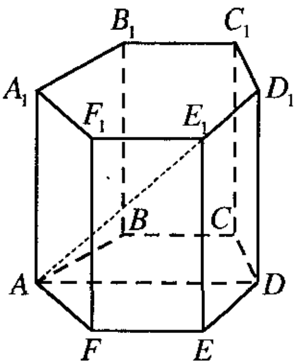


Рис. 11.29

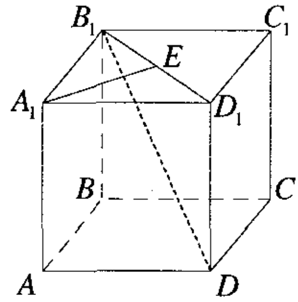


Рис. 11.30

$AC = \sqrt{PA^2 + PC^2} = \sqrt{70+126} = 14$. Тогда площадь основания S_{ABC} можно найти по формуле Герона

$S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ (см²). Для того чтобы найти объем пирамиды, перевернем ее так, чтобы основанием была грань PAB (рис. 11.28, *б*). От этого ее объем не изменится. Тогда $CP = \sqrt{126}$ является высотой полученной пирамиды, т.к. ΔPAB — прямоугольный, то его площадь $S_{PAB} = \frac{1}{2} PA \cdot PB = \frac{1}{2}\sqrt{70} \cdot \sqrt{99}$. Объем

$$V = \frac{1}{3} CP \cdot S_{PAB} = \frac{1}{3}\sqrt{126} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{70} \cdot \sqrt{99} = 21\sqrt{55} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $21\sqrt{55}$ см³, 84см².

11.034. Определить объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна d, а боковые грани — квадраты.

Решение.

$V = S \cdot H$. Обозначим $D_1D = x$ (рис. 11.29). Тогда имеем

$AB = BC = CD = ED = FE = AF = D_1D = x$ (по условию) $S = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$;

$AD = 2x$. В ΔADD_1, $\angle ADD_1 = 90°$; значит, $AD_1 = \sqrt{AD^2 + D_1D^2}$; (по условию $AD_1 = d$). Имеем, что $d = x\sqrt{5}$; отсюда $x = \frac{d}{\sqrt{5}} = H$,

$$S = \frac{3d^2\sqrt{3}}{10} \Rightarrow V = S \cdot H = \frac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\frac{3d^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$.

11.035. Найти объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно d.

Решение.

Расстояние от ребра AA_1 до диагонали B_1D равно расстоянию от этого ребра до плоскости BB_1D_1D, т.е. длине отрезка A_1E (рис. 11.30). Пусть ребро куба равно a; тогда из ΔA_1ED_1 находим $2d^2 = a^2$, откуда $a = d\sqrt{2}$. Итак, $V = a^3 = 2d^3\sqrt{2}$.

Ответ: $2d^3\sqrt{2}$.

11.036. Определить объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно a.

Решение.

$V = \frac{1}{3}SH$, где $H = 2 \cdot h = 2 \cdot SO$, $S = a^2$ (рис. 11.31). В ΔSOC $\angle SOC = 90^\circ$, тогда $SO^2 = SC^2 - OC^2$, где $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SO^2 = \frac{2a^2 - a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$; $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $H = \frac{2a}{\sqrt{2}}$,

и, таким образом,

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

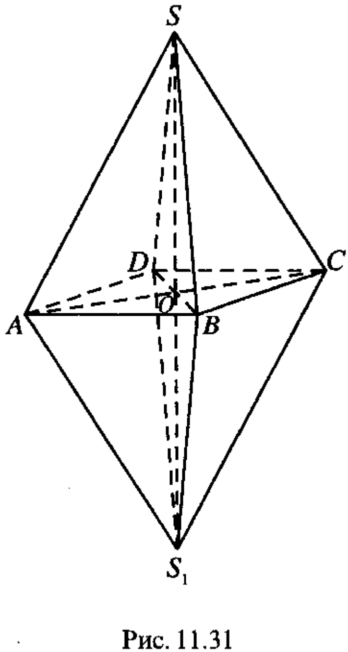


Рис. 11.31

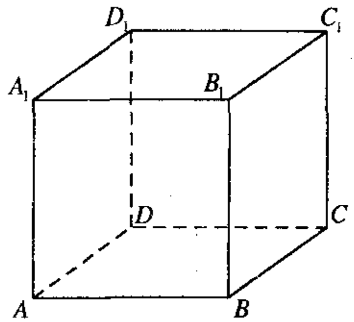


Рис. 11.32

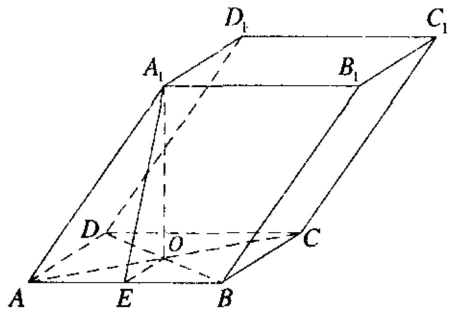


Рис. 11.33

11.037. Основание призмы — квадрат со стороной, равной a. Одна из боковых граней — также квадрат, другая — ромб с углом 60°. Определить полную поверхность призмы.

Решение.

$S_{\text{полн}} = 4 \cdot S_{ABCD} + 2 \cdot S_{BCC_1B_1}$ (рис. 11.32), $S_{ABCD} = a^2$ (так как $ABCD$ — квадрат и $AB = a$), $S_{BCC_1B_1} = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ (BB_1C_1C — ромб, $BB_1 = a$, $\angle B_1C_1C = 60°$), $S_{\text{полн}} = 4a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2\left(4+\sqrt{3}\right)$.

Ответ: $a^2\left(4+\sqrt{3}\right)$

11.038. Основанием параллелепипеда служит квадрат. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное b. Сторона основания равна a. Определить полную поверхность параллелепипеда.

Решение.

$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$, где $S_{\text{бок}} = 4S_{AA_1B_1B}$ (рис. 11.33), $S_{\text{осн}} = a^2$ ($ABCD$ — квадрат) и $EO = \frac{a}{2}$. В ΔEOA_1 $\angle EOA_1 = 90°$, тогда $A_1E = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}$;

$S_{A_1ABB_1} = AB \cdot A_1E = \frac{a\sqrt{4b^2+a^2}}{2}$, $S = 2a^2 + 2a\sqrt{4b^2+a^2}$.

Ответ: $2a\left(a+\sqrt{4b^2+a^2}\right)$.

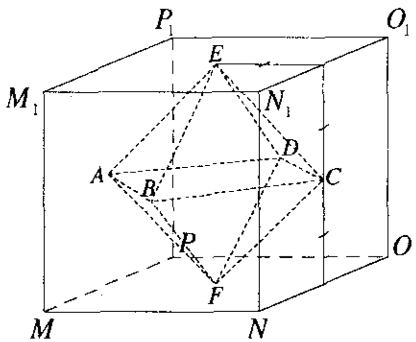


Рис. 11.34

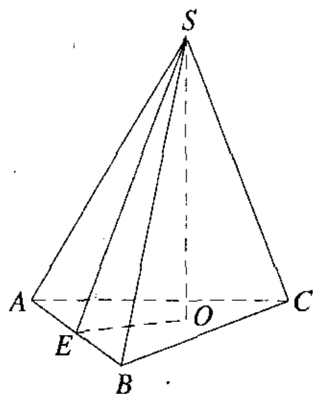


Рис. 11.35

11.039. В кубе центры оснований соединены с центрами боковых граней. Вычислить поверхность полученного октаэдра, если ребро куба равно a.

Решение.

$$S = 8 \cdot S_{\Delta BEC}\text{, где } CE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ CE = BE = BC \text{ (рис. 11.34),}$$

поэтому $\angle BEC = \angle ECB = \angle CBE = 60^\circ$ и

$$S_{\Delta BEC} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{8},\ S = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = a^2\sqrt{3}.$$

Ответ: $a^2\sqrt{3}$.

11.040. Основанием пирамиды служит треугольник с длинами сторон 6, 5 и 5 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить объем пирамиды.

Решение.

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H,\ S = \sqrt{p(p-6)(p-5)(p-5)};\ p = \frac{16}{2} = 8\text{, поэтому } S = 12;$$

$S = p \cdot r$; отсюда $r = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. В ΔSOE, $\angle SOE = 90^\circ$ (рис. 11.35),

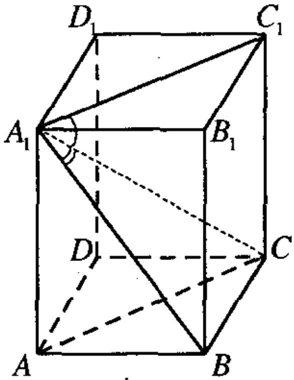


Рис. 11.36

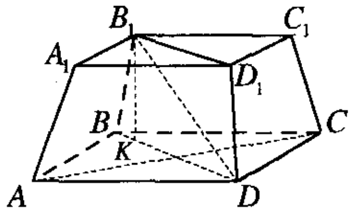


Рис. 11.37

$\angle SEO = 45°$ (по условию) $\Rightarrow$ $EO = SO = \frac{3}{2}$ (так как $EO = r$), отсюда

$V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \frac{3}{2} = 6$ см^3.

Ответ: 6 см^3.

11.041. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна l и составляет с одной гранью угол 30°, а с другой 45°.

Решение.

$V = a \cdot b \cdot c$. В ΔA_1BC (рис. 11.36) $\angle A_1BC = 90°$;

$a = BC = A_1C \cdot \sin 30° = \frac{l}{2}$; $A_1B = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. В ΔA_1C_1C, $\angle A_1C_1C = 90°$;

$C_1C = c = A_1C \cdot \sin 45° = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; $AB = b = \sqrt{A_1B^2 - c^2} = \sqrt{\frac{3l^2}{4} - \frac{2l^2}{4}} = \sqrt{\frac{l^2}{4}}$;

$V = abc = \frac{l^3\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$.

11.042. Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 и 10 см.

Решение.

Искомый объем выражается формулой $V=\frac{h}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$, где $S_1=196$ (см^2), $S_2=100$ (см^2). Найдем $h=B_1K$ (рис. 11.37). Имеем $B_1K=$ $=\sqrt{B_1D^2-KD^2}$. Так как BB_1D_1D — равнобедренная трапеция, то $BK=0{,}5(BD-B_1D_1)=0{,}5(14\sqrt{2}-10\sqrt{2})=2\sqrt{2}$ (см) и $KD=BD-BK=$ $=12\sqrt{2}$ (см), т.е. $h=\sqrt{18^2-(12\sqrt{2})^2}=6$ (см). Итак,

$$V=\frac{6}{3}(196+100+140)=872\ (\text{см}^3).$$

Ответ: 872 см^3.

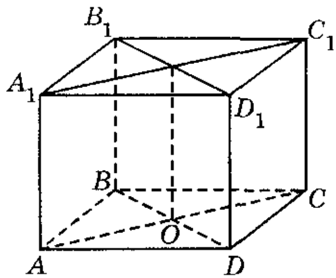


Рис. 11.38

11.043. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна Q. Площади диагональных сечений равны S_1 и S_2. Определить объем и боковую поверхность параллелепипеда.

Решение.

Имеем $V=S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}}=Q$ (по условию); таким образом, следует найти h. Так как $ABCD$ — ромб, то $S_{\text{осн}}=0{,}5AC\cdot BD$ (рис. 11.38); учитывая, что $AC\cdot h=S_1$, $BD\cdot h=S_2$, находим $AC=\frac{S_1}{h}$, $BD=\frac{S_2}{h}$. Отсюда получаем $2Q=\frac{S_1}{h}\cdot\frac{S_2}{h}$, т.е. $h=\sqrt{\frac{S_1S_2}{2Q}}$. Тогда $V=\sqrt{\frac{S_1S_2Q}{2}}$. Из ΔCOD: $CD^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{2}\right)^2=$ $=\left(\frac{S_1}{2h}\right)^2+\left(\frac{S_2}{2h}\right)^2=\frac{S_1^2+S_2^2}{4h^2}$. Итак,

$$S_{\text{бок}}=4CD\cdot h=4h\cdot\frac{\sqrt{S_1^2+S_2^2}}{2h}=2\sqrt{S_1^2+S_2^2}.$$

Ответ: $\sqrt{S_1S_2Q/2}$; $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$.

11.044. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно l и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

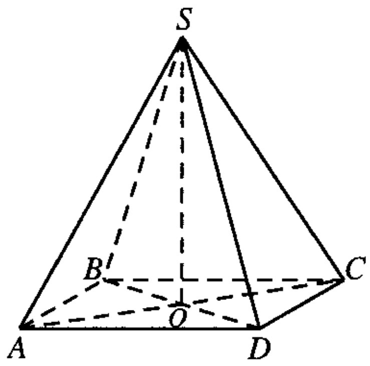


Рис. 11.39

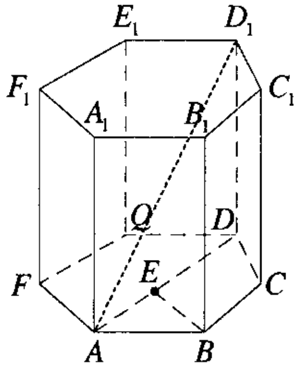


Рис. 11.40

Решение.

$V=\frac{1}{3}SH$. В ΔSOC $\angle SOC=90^\circ$, $\angle SCO=60^\circ$, $SC=l$ (рис. 11.39).

Отсюда имеем $OC=SC\cdot\cos 60^\circ=\frac{l}{2}$; $H=SO=SC\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}l$;

$DC=AD=AB=BC$. В ΔADC $\angle D=90^\circ$ (по условию),

$AD^2+DC^2=AC^2$; $2AD^2=4OC^2$; $S=AD^2=\frac{4\cdot l^2}{4\cdot 2}=\frac{l^2}{2}$;

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{l^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}l}{2}=\frac{l^3\sqrt{3}}{12}$.

Ответ: $\frac{l^3\sqrt{3}}{12}$.

11.045. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с боковым ребром призмы угол 30°. Найти объем призмы.

Решение.

$V=SH$. В ΔADD_1 (рис. 11.40) $\angle ADD_1=90^\circ$, $\angle AD_1D=30^\circ$, $AD_1=d$, тогда $H=D_1D=d\cdot\cos 30^\circ=d\sqrt{3}/2$; $AD=d\sin 30^\circ=d/2$. Пусть $BC=x$,

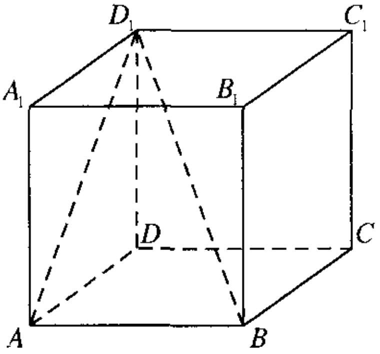


Рис. 11.41

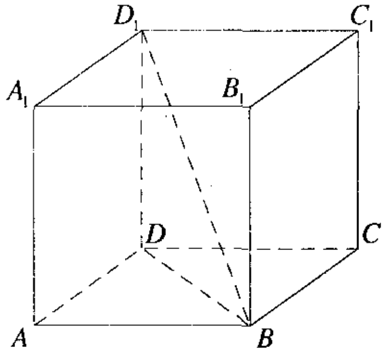


Рис. 11.42

$AE=\left(\frac{d}{2}-x\right):2=\frac{d}{4}-\frac{x}{2}$, $\angle EBA=30^\circ$; $x=\frac{AE}{\sin 30^\circ}=2AE$, $x=\frac{d}{2}-x$,

$2x=\frac{d}{2}$; $x=\frac{d}{4}$; $S=\frac{3}{2}d^2\sqrt{3}=\frac{3d^2\sqrt{3}}{32}$; $V=SH=\frac{3d^2\sqrt{3}}{32}\cdot\frac{d\sqrt{3}}{2}=\frac{9d^3}{64}$.

Ответ: $\frac{9d^3}{64}$.

11.046. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную b, под углом 30°. Найти объем параллелепипеда.

Решение.

$V=S\cdot H$, $S=a\cdot b$. В ΔD_1AB $\angle D_1AB=90^\circ$, $\angle AD_1B=30^\circ$ (рис. 11.41). Отсюда $AD_1=a\cdot\operatorname{ctg}30^\circ=a\sqrt{3}$, $H=\sqrt{AD_1^2-A_1D_1^2}=\sqrt{3a^2-b^2}$;

$V=S\cdot H=ab\sqrt{3a^2-b^2}$.

Ответ: $ab\sqrt{3a^2-b^2}$.

11.047. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Диагональ параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом 60°. Определить боковую поверхность параллелепипеда.

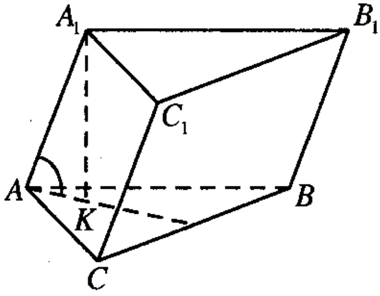


Рис. 11.43

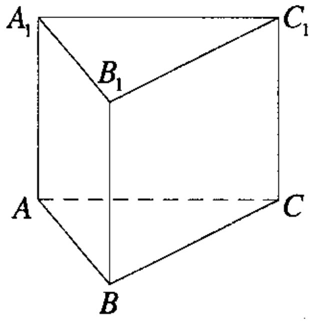


Рис. 11.44

Решение.

В ΔBAD $\angle BAD = 90^\circ$; $DB = \sqrt{a^2+b^2}$ (рис. 11.42). В ΔD_1DB $\angle D_1DB = 90^\circ$, $D_1D = DB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$, $S_{A_1B_1BA} = \sqrt{3}a \cdot \sqrt{a^2+b^2}$; $S_{BB_1C_1C} = \sqrt{3}b \cdot \sqrt{a^2+b^2}$; $S = 2\left(S_{A_1B_1BA} + S_{BB_1C_1C}\right) = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2}(a+b)$.

Ответ: $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a^2+b^2}(a+b)$.

11.048. Найти объем наклонной треугольной призмы, основанием которой служит равносторонний треугольник со стороной, равной a, если боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом 60°.

Решение.

Проведем A_1K перпендикулярно плоскости ABC (рис. 11.43); тогда $V = S_{\Delta ABC} \cdot A_1K$, где $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая, что $\angle A_1AK = 60^\circ$, находим $A_1K = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Итак, $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Ответ: $\dfrac{3a^3}{8}$.

11.049. Найти объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна a и боковая поверхность равновелика сумме площадей оснований.

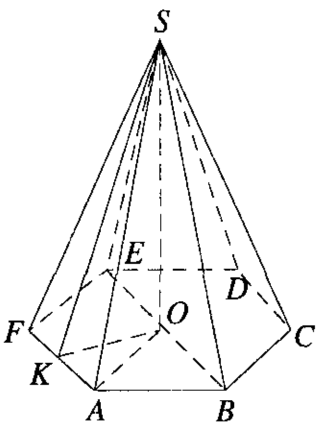


Рис. 11.45

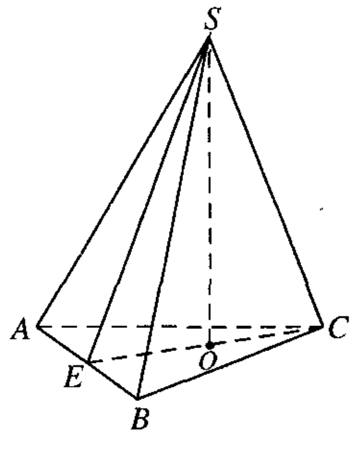


Рис. 11.46

Решение.

$V = S_{\text{осн}} \cdot H$ (рис. 11.44), $3S_{\text{бок}} = 2 \cdot S_{\text{осн}}$; $S_{\text{осн}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $S_{\text{бок}} = 3a \cdot H$;

$3a \cdot H = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{8}$.

Ответ: $a^3/8$.

11.050. Найти боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, высота которой равна h, а боковое ребро равно l.

Решение.

$S_{\text{бок}} = 6 \cdot S_{\Delta FSA} = 6 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AF \cdot SK = 3AF \cdot SK$ (рис. 11.45); ΔSOA,

$\angle SOA = 90^\circ$, $OA = \sqrt{l^2 - h^2} = AF$, $SK = \sqrt{l^2 - \dfrac{l^2 - h^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{3l^2 + h^2}}{2}$;

тогда $S_{\text{бок}} = 3 \cdot \sqrt{l^2 - h^2} \cdot \dfrac{\sqrt{3l^2 + h^2}}{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{(l^2 - h^2)(3l^2 + h^2)}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}\sqrt{(l^2 - h^2)(3l^2 + h^2)}$.

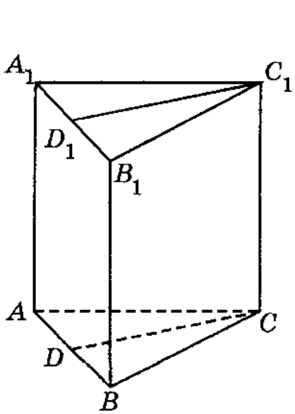


Рис. 11.47

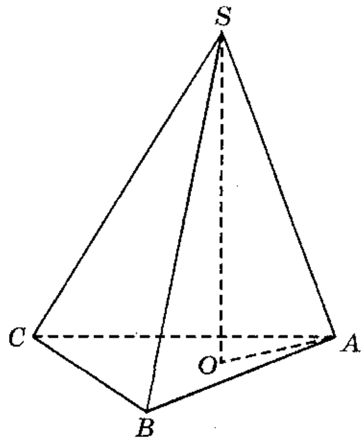


Рис. 11.48

11.051. Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен 90°, а сторона основания равна 3 см.

Решение.

$V=\frac{1}{3}SH$ (рис. 11.46); $S=\frac{9}{4}\sqrt{3}$; $OC=\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ (так как $AB=BC=AC=a=3$ см); $EO=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ΔESC $\angle ESC=90°$, $H^2=EO\times$ $\times OC=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$; $H=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ см^3.

11.052. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противолежащей боковой грани, равна Q. Сторона основания призмы равна a. Найти полную поверхность призмы.

Решение.

$S=2S_{\text{осн}}+3S_{BB_1A_1A}$ (рис. 11.47); $CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AB=BC=CA=a$;

$$Q=CD\cdot C_1C=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot C_1C;\ C_1C=\frac{2Q}{a\sqrt{3}};\ S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{BB_1A_1A}=AB\cdot BB_1=AB\cdot C_1C=\frac{2Q}{a\sqrt{3}}\cdot a=\frac{2Q}{\sqrt{3}};$$

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+2Q\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(0{,}5a^2+2Q\right).$$

Ответ: $\sqrt{3}\left(0{,}5a^2+2Q\right)$

11.053. Высота правильного тетраэдра равна h. Вычислить его полную поверхность.

Решение.

$$S=S_{\text{осн}}+3S_{\Delta BSA}=4S_{\Delta ABC}=4\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=AB^2\sqrt{3}\text{ (рис. 11.48);}$$

$AO=AB\sqrt{3}/3$, так как $SA=AB=SB=BC=SC=AC$ (по условию); ΔAOS, $\angle AOS=90^\circ$; $AS^2=OA^2+SO^2$ $AS^2=\frac{AB^2}{3}+h^2$;

$$\frac{2AB^2}{3}=h^2;\ AB^2=\frac{3h^2}{2};\ S=\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3h^2\sqrt{3}}{2}$.

11.054. Каждое из боковых ребер пирамиды равно b. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как $m:n$, а гипотенуза равна c. Вычислить объем пирамиды.

Решение.

$V=\frac{1}{3}S\cdot H$. Обозначим $AB=mx$, $BC=nx$ (рис. 11.49). По условию $AC=c$, $SC=b$. В ΔABC $\angle ABC=90^\circ$; значит, $c^2=m^2x^2+n^2x^2$,

$x=\sqrt{\frac{c^2}{m^2+n^2}}=\frac{c}{\sqrt{m^2+n^2}}$ и $S=\frac{1}{2}mnx^2=\frac{mnc^2}{2\left(m^2+n^2\right)}$. Так как

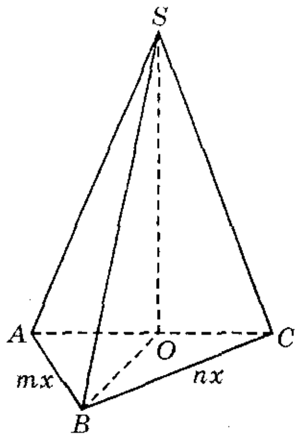


Рис. 11.49

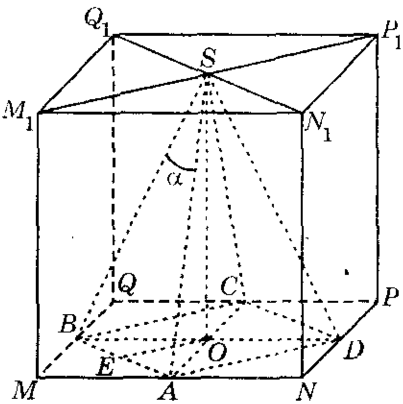


Рис. 11.50

$H = SO$ и $AO = OC = BO = \frac{c}{2}$, то $H^2 = b^2 - \frac{c^2}{4}$; $H = \frac{\sqrt{4b^2 - c^2}}{2}$ (в ΔSOC $\angle SOC = 90°$); $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{mn}{2} \cdot \frac{c^2\sqrt{4b^2 - c^2}}{(m^2 + n^2) \cdot 2} = \frac{mnc^2\sqrt{4b^2 - c^2}}{12(m^2 + n^2)}$.

Ответ. $\frac{mnc^2\sqrt{4b^2 - c^2}}{12(m^2 + n^2)}$.

11.055. Центр верхнего основания куба соединен с серединами сторон нижнего основания. Образовался четырехгранный угол, каждый плоский угол которого равен α. Доказать, что $30° < \alpha < 45°$.

Решение.

Имеем $AB = \sqrt{AM^2 + MB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (рис. 11.50). Из ΔSOB находим $SB = SA = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Пусть $\angle BSA = \alpha$; тогда в ΔSAB по теореме косинусов получим $AB^2 = 2SB^2 - 2SB^2\cos\alpha$, или $\frac{a^2}{2} = 2 \cdot \frac{5a^2}{4} - 2 \cdot \frac{5a^2}{4}\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Очевидно, что $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е., действительно, $30° < \alpha < 45°$.

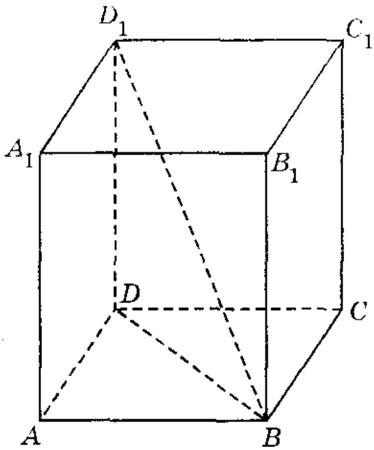


Рис. 11.51

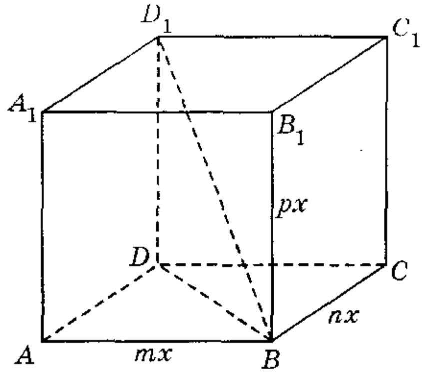


Рис. 11.52

11.056. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 10 см и образует с плоскостью основания угол 60°. Площадь основания равна 12 см^2. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

Решение.

Из ΔD_1DB (рис. 11.51) находим $BD = 5$ см, $DD_1 = 5\sqrt{3}$ см. Боковая поверхность $S_{бок} = 2(DD_1 \cdot DC + DD_1 \cdot AD) = 2DD_1(DC + AD)$. Но $DC^2 + AD^2 = BD^2 = 25$, а по условию $DC \cdot AD = 12$. Значит, $(DC + AD)^2 = DC^2 + AD^2 + 2DC \cdot AD = 25 + 24 = 49$, откуда $DC + AD = 7$ (см). Итак, $S_{бок} = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 7 = 70\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $70\sqrt{3}$ см^2.

11.057. Определить объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна d, а длины ребер относятся как $m : n : p$.

Решение.

$V = abc$, $D_1B = d$. Обозначим $AB = mx$, $BC = nx$, $B_1B = px$ (так как $m : n : p = AB : BC : B_1B$) (рис. 11.52). В ΔD_1DB $\angle D_1DB = 90°$, тогда $D_1B^2 = D_1D^2 + DB^2$. В ΔDAB $\angle DAB = 90°$ и $DB^2 = AD^2 + AB^2$, поэтому $D_1B^2 = D_1D^2 + AD^2 + AB^2$, $d^2 = p^2x^2 + m^2x^2 + n^2x^2$, значит, $x = \dfrac{d}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

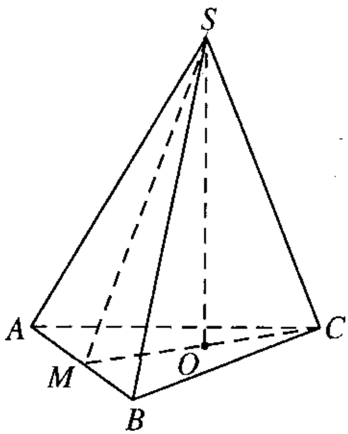


Рис. 11.53

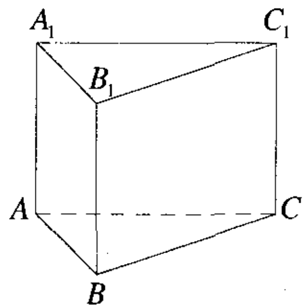


Рис. 11.54

Отсюда $V = AB \cdot BC \cdot B_1B = mnpx^3 = \dfrac{mnp \cdot d^3}{\left(m^2+n^2+p^2\right)^{3/2}}$.

Ответ: $\dfrac{mnp \cdot d^3}{\left(m^2+n^2+p^2\right)^{3/2}}$.

11.058. Определить объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника, служащего ее основанием, равна h, а апофема пирамиды равна m.

Решение.

$V=\frac{1}{3}SH$, $MC=h$, $SM=m$ (рис. 11.53). $AB=BC=AC$, значит

$CM=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB=\dfrac{2CM}{\sqrt{3}}=\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$ и $S=\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}$. $MO=\dfrac{AB\sqrt{3}}{6}=\dfrac{h}{3}$. В

ΔSOM $\angle SOM=90^\circ \Rightarrow H=\sqrt{SM^2-MO^2}=\sqrt{m^2-\dfrac{h^2}{9}}=\sqrt{\dfrac{9m^2-h^2}{3}}$.

Отсюда $V=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{h^2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{9m^2-h^2}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}h^2\sqrt{9m^2-h^2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{27}h^2\sqrt{9m^2-h^2}$.

11.059. Площади боковых граней прямой треугольной призмы равны M, N и P. Боковое ребро ее равно l. Определить объем призмы.

Решение.

По условию $S_{A_1B_1BA}=M$, $S_{B_1C_1BC}=N$, $S_{A_1ACC_1}=P$, $CC_1=l$

(рис. 11.54). Тогда $BC=\frac{N}{l}$; $AB=\frac{M}{l}$; $AC=\frac{P}{l}$;

$$V=S\cdot H=S\cdot l=l\cdot\sqrt{\frac{N+M+P}{2l}\cdot\left(\frac{N+P-M}{2l}\right)\cdot\left(\frac{N+M-P}{2l}\right)\cdot\left(\frac{M+P-N}{2l}\right)}$$

(по формуле Герона находим S). Таким образом,

$$V=\frac{1}{4l}\sqrt{(N+M+P)(M+N-P)(M+P-N)(N+P-M)}.$$

Ответ: $\frac{1}{4l}\sqrt{(N+M+P)(M+N-P)(M+P-N)(N+P-M)}$.

11.060. Известны площадь основания P и объем V правильной четырехугольной призмы. Вычислить ее полную поверхность.

Решение.

$S_{\text{п}}=2S_{\text{осн}}+4S_{\text{бок}}$ (рис. 11.55), где $P=S_{\text{осн}}$ и $P=a^2$ (a — сторона квадрата). $V=P\cdot H \Rightarrow H=\frac{V}{P}$;

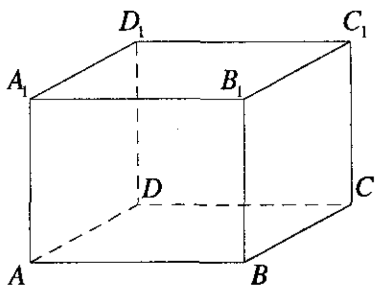


Рис. 11.55

$S_{\text{бок}}=a\cdot H=\sqrt{P}\cdot\frac{V}{P}$. Отсюда

$$S=2P+4V\frac{\sqrt{P}}{p}.$$

Ответ: $2P+\frac{4V}{\sqrt{P}}$.

11.061. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой h, если прямая, проходящая через центр верхнего

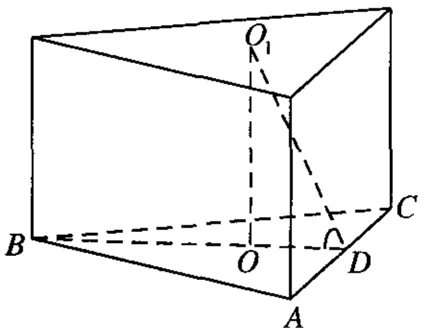


Рис. 11.56

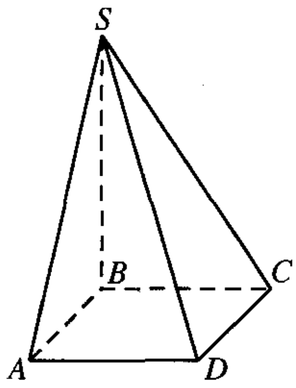


Рис. 11.57

основания и середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

Решение.

Обозначим сторону основания через a. Тогда $S_{\text{бок}} = 3ah$. Проведем высоту O_1O (рис. 11.56). В ΔDOO_1 имеем $\angle OO_1D = 30°$, поэтому $O_1D = 2OD$ и $4OD^2 - OD^2 = h^2$, откуда $OD = h\sqrt{3}/3$. С другой стороны, $OD = a\sqrt{3}/6$ и, следовательно, $a = 2h$. Итак, $S_{\text{бок}} = 3 \cdot 2h \cdot h = 6h^2$.

Ответ: $6h^2$.

11.062. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к нему под углом 45°. Среднее по величине боковое ребро равно l. Найти объем и полную поверхность пирамиды.

Решение.

По условию $SC = l$, $\angle SBC = 90°$, $\angle SCB = 45°$ (рис. 11.57), откуда $SB = BC = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$. Имеем $V = \dfrac{1}{3}BC^2 \cdot SB = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Полная поверхность — $S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + 2S_{\Delta SAB} + 2S_{\Delta SAD}$, так как $S_{\Delta SAB} = S_{\Delta SBC}$, $S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SCD}$. Но $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}AB \cdot SB = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{l^2}{4}$,

$$S_{\Delta SAD}=\frac{1}{2}AD\cdot SA=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\sqrt{2}}\cdot l=\frac{l^2\sqrt{2}}{4}.$$

Итак,

$$S_{\text{полн}}=\frac{l^2}{2}+\frac{l^2}{2}+\frac{l^2\sqrt{2}}{2}=\frac{l^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}.$$

Ответ: $\frac{l^3\sqrt{2}}{12}$, $\frac{l^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$.

11.063. Найти объем и полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°.

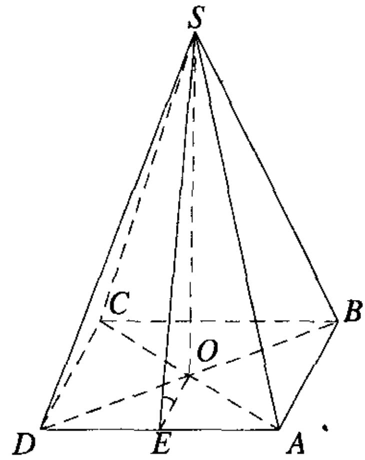


Рис. 11.58

Решение.

$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$, где $S_{\text{осн}}=a^2$ и $\angle SEO=60^\circ$ (рис. 11.58). В ΔSOE

$\angle SOE=90^\circ \Rightarrow H=SO=\frac{a}{2}\cdot\operatorname{tg}60^\circ=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Имеем $V=\frac{a^3}{6}\sqrt{3}$. Далее,

$S=S_{\text{осн}}+4S_б=a^2+4S_б$, где $S_б=\frac{1}{2}a\cdot SE$; $SE=\frac{a}{2\cos 60^\circ}=a$, значит

$S_б=\frac{a^2}{2}$ и $S=3a^2$.

Ответ: $3a^2$; $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

11.064. Найти объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна h, а все плоские углы при вершине прямые.

Решение.

Проведем $BD\perp AC$ (рис. 11.59). Пусть сторона основания будет a.

Так как пирамида правильная, то $OD=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $AD=DC=\frac{a}{2}$,

$S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Выразим a через h. В ΔSAC имеем $SA=SC$,

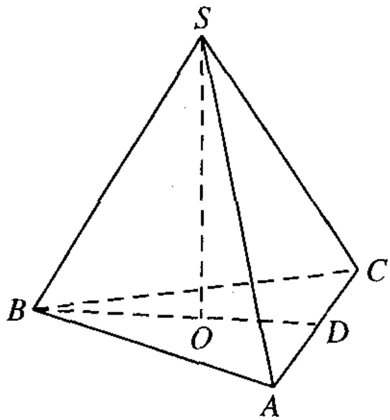


Рис. 11.59

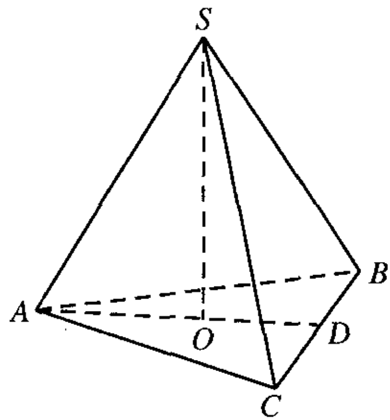


Рис. 11.60

$\angle CSA = 90^\circ$, откуда $\angle ASD = 45^\circ$ и $SD = AD = \frac{a}{2}$. Тогда

$$h = SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{\sqrt{6}} \Rightarrow a = h\sqrt{6}.$$

Имеем $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6h^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{h^3\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $h^3\sqrt{3}/2$.

11.065. Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна S.

Решение.

Пусть a — сторона основания; тогда $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, откуда $a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$.

Искомая боковая поверхность выражается так: $S_{бок} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot BD$ (рис. 11.60). Так как $BD = DC = \frac{a}{2}$, то $S_{\text{бок}} = \frac{3a^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} = S\sqrt{3}$.

Ответ: $S\sqrt{3}$.

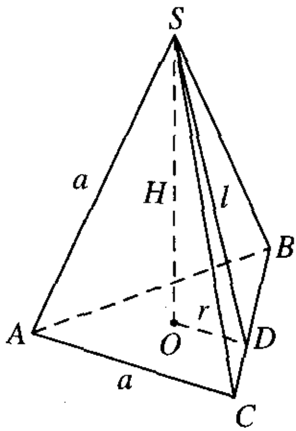


Рис. 11.61

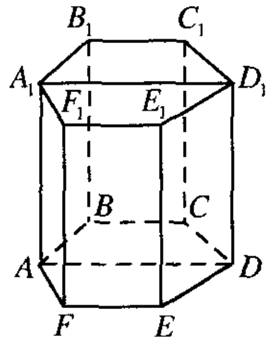


Рис. 11.62

11.066. Найти объем правильного тетраэдра с ребром, равным a.
Решение.

Объем тетраэдра $V=\frac{1}{3}SH$ (рис. 11.61). Площадь основания находится как $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Рассмотрим ΔSDC ($\angle SDC=90°$):

$l=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Рассмотрим ΔSOD ($\angle SOD=90°$):

$H=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-r^2}$. В ΔABC радиус вписанной окружности $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Тогда $H=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{36}}=\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

Окончательно получаем: $V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2a}{\sqrt{6}}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

11.067. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определить объем шестиугольной призмы, если боковая поверхность четырехугольной призмы равна 30 см².

Решение.

Пусть $AB = a$ (рис. 11.62); тогда искомый объем $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$, где $h = 3$ см — высота призмы. Найдем a. По условию боковая поверхность призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 30 см². Но $S_{бок} = (3AB + AD)h$; здесь $AD = 2a$ (как диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника). Следовательно, $5a \cdot 3 = 30$, откуда $a = 2$ см.

Итак, $V = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = 18\sqrt{3}$ см³.

Ответ: $18\sqrt{3}$ см³.

11.068. По стороне основания, равной a, определить боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.

Решение.

Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды находится по формуле $S_{бок} = \frac{1}{2}Pl$ (рис. 11.63). Периметр основания равен $P = 4a$. Из условия $S_{ABCD} = S_{ASC}$. Отсюда $a^2 = \frac{1}{2}AC \cdot SO$.

Из квадрата $ABCD$ $AC = a\sqrt{2}$. Подставим и получим $2a^2 = a\sqrt{2}SO$.

Отсюда $SO = a\sqrt{2}$. Из ΔSOE $SE = \sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$.

Подставим и получим $S_{бок} = \frac{1}{2}4a \cdot \frac{3a}{2} = 3a^2$. А искомый объем находится по формуле $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}a^2 a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $3a^2$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

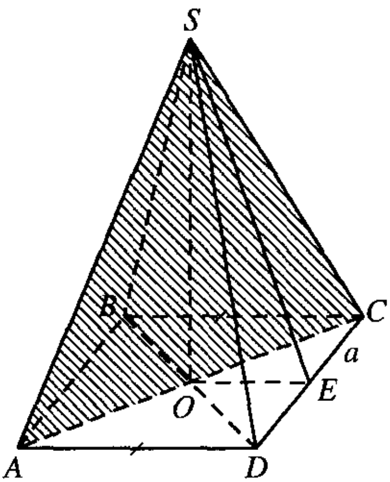


Рис. 11.63

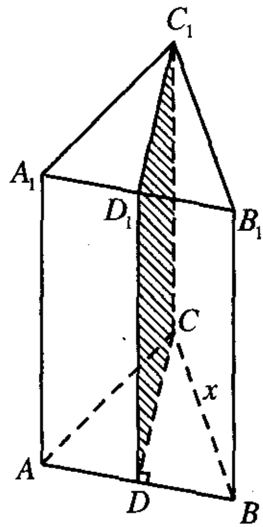


Рис. 11.64

11.069. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна Q. Определить объем призмы.

Решение.

Искомый объем призмы находится как $V = S \cdot H$ (рис. 11.64). Площадь сечения DD_1C_1C $Q = DC \cdot CC_1$. Так как по условию $DC = CC_1$, то $DC = CC_1 = \sqrt{Q}$. Площадь ΔABC: $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Из ΔCDB $Q + \frac{x^2}{4} = x^2$. Отсюда $x^2 = \frac{4Q}{3}$. Тогда $S = \frac{Q\sqrt{3}}{3} = \frac{Q}{\sqrt{3}}$ и искомый объем $V = \frac{Q\sqrt{Q}}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $Q\sqrt{Q/3}$.

11.070. В прямом параллелепипеде стороны основания равны a и b и образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Определить объем параллелепипеда.

Решение.

Объем параллелепипеда находится по формуле $V = S_{\text{осн}} H$ (рис. 11.65). Площадь основания $S_{\text{осн}} = b \cdot a \sin 30^\circ = \frac{1}{2} ab$. Площадь боковой поверхности $S = P \cdot H$. Периметр основания $P = 2(a+b)$. Отсюда $H = \frac{S}{2(a+b)}$. Тогда получим объем параллелепипеда:

$$V = \frac{abS}{4(a+b)}.$$

Ответ: $\frac{abS}{4(a+b)}$.

11.071. Найти отношение объема правильной шестиугольной пирамиды к объему правильной треугольной пирамиды при условии, что стороны оснований этих пирамид равны, а их апофемы в два раза больше сторон основания.

Решение.

Объем шестиугольной пирамиды: $V_1 = \frac{1}{3} S_1 \cdot H_1$. Площадь основания шестиугольной пирамиды $S_1 = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$, а высота равна $H_1 = \sqrt{l^2 - r_1^2}$, где апофема $l = 2a$, а радиус вписанной окружности $r_1 = \frac{3a}{2\sqrt{3}}$. Тогда $H = \frac{a}{2}\sqrt{13}$. Подставим и получим $V_1 = \frac{1}{3} \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1}{4} a^3 \sqrt{39}$.

Объем треугольной пирамиды $V_2 = \frac{1}{3} S_2 H_2$. Площадь основания этой пирамиды $S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а ее высота $H_2 = \sqrt{l^2 - r_2^2}$, где радиус вписанной окружности $r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Подставим и получим $H_2 = \frac{a}{6}\sqrt{141}$.

Тогда $V_2 = \frac{1}{3} \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{141}}{6}$.

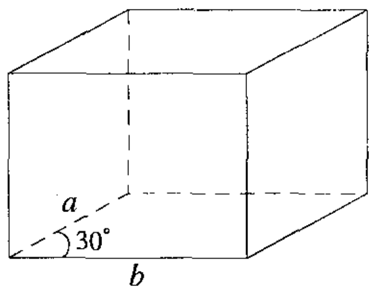


Рис. 11.65

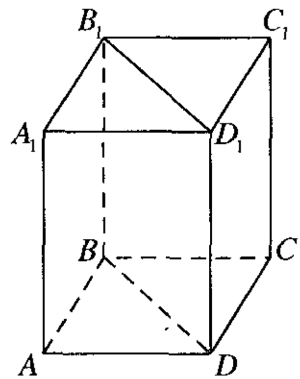


Рис. 11.66

Получаем отношение:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{a^3\sqrt{39}\cdot 4\cdot 6}{4a^3\sqrt{3}\sqrt{141}}=\frac{3\cdot 6^2\sqrt{13}}{\sqrt{141}}=\frac{18\sqrt{1833}}{141}=\frac{6\sqrt{1833}}{47}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{1833}}{47}$.

11.072. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $m:n$, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной Q. Определить объем параллелепипеда.

Решение.

Искомый объем $V=S_{осн}h$, где $S_{осн}=AB\cdot AD$ (рис. 11.66), h — высота параллелепипеда. По условию BB_1D_1D — квадрат и, значит, $h=\sqrt{Q}$. Найдем AB и AD. Так как $AB:AD=m:n$, то $AD=\frac{n}{m}AB$. В ΔABD имеем $AB^2+AD^2=BD^2$, т.е. $AB^2+\frac{n^2}{m^2}AB^2=Q\Rightarrow AB=\frac{m\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$, $AD=\frac{n\sqrt{Q}}{\sqrt{m^2+n^2}}$. Итак, $V=AB\cdot AD\cdot h=\frac{mnQ\sqrt{Q}}{m^2+n^2}$.

Ответ: $\frac{mn}{m^2+n^2}\cdot Q\sqrt{Q}$.

11.073. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 6 см. Найти длину ребра такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

Решение.

Объем прямоугольного парллелепипеда равен $V_{\text{пар}} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ см^3. Объем куба $V_{\text{к}} = a^3$. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда находится так: $S_{\text{пар}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = PH + 2S_{\text{осн}} = 2(2+3)\cdot 6 + {}$ $+ 2\cdot 3\cdot 2 = 72$ см^2. Площадь полной поверхности куба $S_{\text{к}} = 6a^2$. Из условия $\frac{V_{\text{пар}}}{V_{\text{к}}} = \frac{S_{\text{пар}}}{S_{\text{к}}}$. Отсюда $\frac{36}{a^3} = \frac{72}{6a^2}$. Получаем $a = 3$ см.

Ответ: 3 см.

11.074. Высота пирамиды равна 8 м. На расстоянии 3 м от вершины проведена плоскость, параллельная основанию. Площадь полученного сечения равна 4 м^2. Найти объем пирамиды.

Решение.

Искомый объем пирамиды $V = \frac{1}{3}SH$ (рис. 11.67). Пирамида $SABCDEF$ подобна пирамиде $SA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ с коэффициентом подобия $k = \frac{SO}{SO_1} = \frac{8}{3}$. Тогда площади их оснований относятся как $\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}} = k^2$. Отсюда $S_{ABCDEF} = \frac{64}{9}\cdot 4 = \frac{256}{9}$ (см^2). Значит, $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{256}{9}\cdot 8 \approx 75{,}85$ см^3.

Ответ: $\approx 75{,}85$ см^3.

11.075. Доказать, что объем конуса равен объему цилиндра с тем же основанием и той же высотой минус произведение боковой поверхности этого цилиндра на 1/3 радиуса его основания.

Решение.

Пусть $V_{\text{цил}}$ — объем цилиндра, $V_{\text{кон}}$ — объем конуса, r — радиус основания, h — высота; тогда $V_{\text{цил}} = \pi r^2 h$, $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}V_{\text{цил}}$.

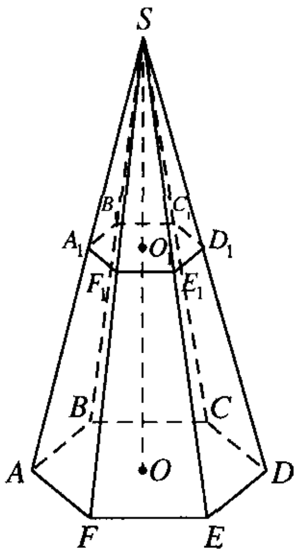


Рис. 11.67

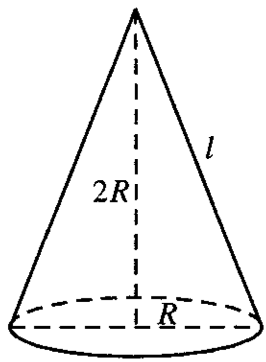


Рис. 11.68

Так как $S_{\text{бок.цил}} = 2\pi rh$, то $\frac{1}{3}S_{\text{бок.цил}}r = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}V_{\text{цил}}$. Отсюда

$$V_{\text{цил}} - \frac{1}{3}S_{\text{бок.цил}}r = \frac{1}{3}V_{\text{цил}} = V_{\text{кон}}.$$

Что и требовалось доказать.

11.076. Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к боковой поверхности.

Решение.

Площадь основания конуса: $S_{\text{осн}} = \pi R^2$ (рис. 11.68). Площадь боковой поверхности конуса $S_{\text{бок}} = \pi Rl$, где $l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{4R^2 + R^2} = R\sqrt{5}$. Отсюда $S_{\text{бок}} = \pi R^2\sqrt{5}$. Окончательно получим $\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}} = \frac{\pi R^2}{\pi R^2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

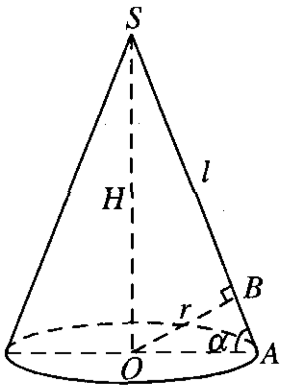


Рис. 11.69

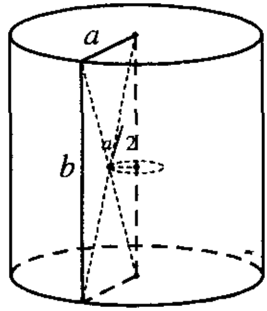


Рис. 11.70

11.077. Выразить объем конуса через его боковую поверхность S и расстояние r от центра основания до образующей.

Решение.

Объем конуса находится по формуле $V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\pi R^2H$ (рис. 11.69).

Рассмотрим ΔOBA ($\angle OBA=90^\circ$): $\sin\alpha=\frac{r}{R}$. Из ΔSOA ($\angle SOA=90^\circ$):

$H=l\sin\alpha=l\frac{r}{R}$. Площадь боковой поверхности $S_{бок}=\pi Rl$. Окончательно запишем объем конуса:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi R^2\frac{l\cdot r}{R}=\frac{1}{3}\pi Rlr=\frac{1}{3}S_б r.$$

Ответ: $\frac{1}{3}Sr$.

11.078. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Выразить объем V цилиндра через площадь S этого прямоугольника и длину C окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей.

Решение.

Искомый объем цилиндра находится как $V=\pi R^2H$ (рис. 11.70). По построению $R=a$, $H=b$. Площадь прямоугольника $S=a\cdot b=RH$.

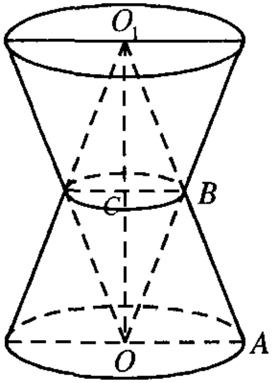


Рис. 11.71

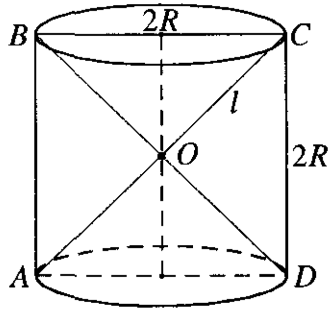


Рис. 11.72

Длина окружности $C = 2\pi r$, где $r = \frac{a}{2}$. Тогда $C = 2\pi \frac{a}{2} = \pi a = \pi R$.

Тогда окончательно получаем $V = \pi R \cdot RH = CS$.

Ответ: CS.

11.079. Доказать, что если два равных конуса имеют общую высоту и параллельные основания, то объем их общей части составляет $1/4$ объема каждого из них.

Решение.

Пусть радиус основания каждого из данных конусов равен R, а высота равна H (рис. 11.71). Тогда объем каждого конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Общая часть состоит из двух конусов; ее объем $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота. Рассмотрим осевое сечение фигуры. Так как $\Delta O_1OA \sim \Delta O_1CB$, то $AO : BC = O_1O : O_1C$ или $R : r = H : h$. Но $h = \frac{H}{2}$, откуда следует, что $r = \frac{R}{2}$. Итак,

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{12}\pi R^2 H = \frac{1}{4}V_1.$$

Что и требовалось доказать.

11.080. На основаниях цилиндра с квадратным осевым сечением построены два конуса с вершинами в середине оси (цилиндра). Найти сумму полных поверхностей и сумму объемов конусов, если высота цилиндра равна $2a$.

Решение.

По построению $H=2R$ (рис. 11.72). Эти конусы одинаковые. Площадь полной поверхности одного конуса: $S_1=S_{бок}+S_{осн}=\pi Rl+\pi R^2$. Из ΔABC $2l=2\sqrt{2}R$. Отсюда $l=\sqrt{2}R$. Так как $2R=2a$, то $S_1=\pi a^2\sqrt{2}+\pi a^2$. А сумма полных поверхностей $S=2\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$. Объем одного конуса $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi a^3$. А сумма объемов конусов $V=\frac{2}{3}\pi a^3$.

Ответ: $2\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$; $\frac{2}{3}\pi a^3$.

11.081. Около конуса с радиусом основания R описана произвольная пирамида, у которой периметр основания равен $2p$. Определить отношение объемов и отношение боковых поверхностей конуса и пирамиды.

Решение.

Пусть общая высота конуса и пирамиды равна H (рис. 11.73). Обозначим объемы конуса и пирамиды через V_1 и V_2, а их боковые поверхности — через S_1 и S_2; тогда $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2H$, $S_1=\pi Rl$, где l — образующая конуса. Найдем V_2 и S_2. Так как периметр основания пирамиды равен $2p$, а основание конуса — вписанная в основание пирамиды окружность, то площадь основания пирамиды равна pR, откуда $V_2=\frac{1}{3}pRH$, $S_2=pl$ (высота любой грани равна l). Итак, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}\pi R^2H:\frac{1}{3}pRH=\frac{\pi R}{p}$, $\frac{S_1}{S_2}=\pi Rl:pl=\frac{\pi R}{p}$.

Ответ: $\frac{\pi R}{p}$.

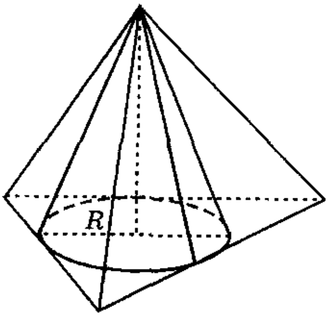


Рис. 11.73

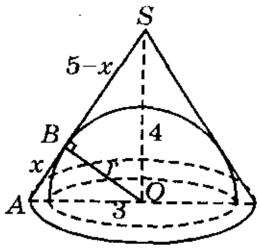


Рис. 11.74

11.082. Высота конуса и его образующая равны соответственно 4 и 5 см. Найти объем вписанного в конус полушара, основание которого лежит на основании конуса.

Решение.

Из $\Delta SOA: AO = R = \sqrt{25-16} = 3$ см (рис. 11.74). Объем искомого полушара $V = \frac{2}{3}\pi r^3$. Из $\Delta SBO: r^2 + (5-x)^2 = 16$. Из $\Delta ABO: x^2 + r^2 = 9$.

Решив систему $\begin{cases} r^2 + (5-x)^2 = 16, \\ r^2 + x^2 = 9, \end{cases}$ получим $x = \frac{9}{5}$. Тогда $r = \sqrt{9 - x^2} =$

$= \frac{12}{5}$ (см). Окончательно получаем $V = \frac{2}{3}\pi\frac{12^3}{5^3} = \frac{1152}{125}\pi$ (см^3).

Ответ: $\frac{1152}{125}\pi$ см^3.

11.083. Определить объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен 60°.

Решение.

Проведем сечение правильной пирамиды через апофему AB и высоту $BC = h$, на которой лежит центр шара, вписанного в пирамиду (рис. 11.75). Шар касается боковой грани в точке K апофемы AB.

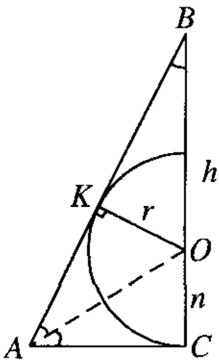


Рис. 11.75

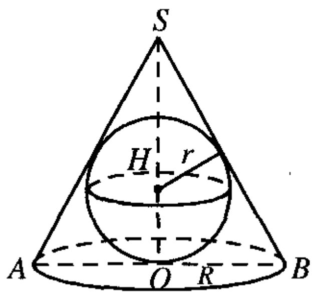


Рис. 11.76

Тогда $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Из ΔBKO имеем $\sin 30^\circ = \frac{OK}{OB} = \frac{1}{2}$;

$\frac{r}{h-r} = \frac{1}{2}$, $2r = h - r$, $r = \frac{1}{3}h$. Тогда $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{81}\pi h^3$.

Ответ: $\frac{4}{81}\pi h^3$.

11.084. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен R. Найти боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

Решение.

Так как объемы конуса и полушара равны, то $V = \frac{2}{3}\pi R^3$; с другой стороны, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, где h — высота конуса, т.е. $h = 2R$. Имеем $S_{\text{бок}} = \pi Rl$, где $l = \sqrt{R^2 + h^2} = R\sqrt{5}$. Итак, $S_{\text{бок}} = \pi R^2\sqrt{5}$.

Ответ: $\pi R^2\sqrt{5}$.

11.085. В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей, равна M, а площадь осевого сечения равна N. Определить поверхность и объем цилиндра.

Решение.

Площадь осевого сечения $S_{\text{сеч}_1} = H \cdot 2R = N$. А площадь сечения, перпендикулярного образующей, $S_{сеч_2} = \pi R^2 = M$. Площадь полной поверхности цилиндра находится так:

$S = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = N\pi + 2M$. Объем цилиндра можно найти так: $V = \pi R^2 H = MH$. Радиус основания $R = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$, а высота цилиндра

$H = \frac{N}{2R} = \frac{N\sqrt{\pi}}{2\sqrt{M}}$. Находим искомый объем цилиндра:

$$V = M \cdot \frac{N\sqrt{\pi}}{2\sqrt{M}} = \frac{N}{2}\sqrt{M\pi}.$$

Ответ: $N\pi + 2M$; $\frac{N}{2}\sqrt{M\pi}$.

11.086. В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найти объем конуса, если объем шара равен $32\pi/3$ см^3.

Решение.

Объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{32}{3}\pi$ (рис. 11.76). Отсюда $r = 2$ см. Объем искомого конуса находится как $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Так как ΔASB — равносторонний, то радиус вписанной окружности $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Отсюда $a = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ см. Радиус основания конуса $R = \frac{a}{2} = 2\sqrt{3}$ см. Из ΔSOB $SO = H = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 6$ см. Окончательно получим: $V_к = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{3})^2 \cdot 6 = 24\pi$.

Ответ: 24π см^3.

11.087. Доказать, что объем конуса равен 1/3 произведения боковой поверхности на расстояние от центра основания до образующей.

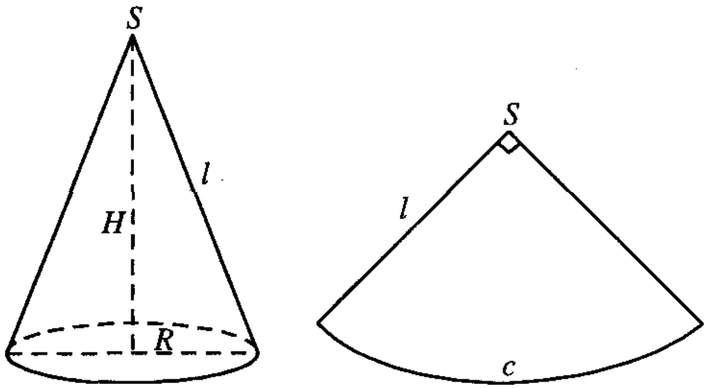


Рис. 11.77

Решение.

Нужно доказать, что объем конуса $V=\frac{1}{3}S_{бок}\cdot r$. Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$. Высоту конуса можно выразить как $H=l\sin\alpha$ из ΔSOA (рис. 11.69). Рассмотрим ΔSOB: $\sin\alpha=\frac{r}{R}$. Тогда $H=\frac{lr}{R}$. Подставим в объем и получим $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\frac{lr}{R}=\frac{1}{3}\pi Rlr$. Но известно, что $S_{бок}=\pi Rl$. Тогда окончательно получим: $V=\frac{1}{3}S_{бок}\cdot r$.

Что и требовалось доказать.

11.088. Даны шар, цилиндр с квадратным осевым сечением и конус. Цилиндр и конус имеют одинаковые основания, а их высоты равны диаметру шара. Как относятся объемы цилиндра, шара и конуса?

Решение.

$S_{осн_ц}=S_{осн_к}$; $H_к=H_ц=2R_ш$; $R_к=R_ц=R_ш$. Объем шара $V_ш=\frac{4}{3}\pi R_ш^3=\frac{4}{3}\pi R^3$. Объем конуса $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{2}{3}\pi R^3$. Объем цилиндра $V_ц=\pi R^2 H=2\pi R^3$. Отсюда отношение:

$V_ц : V_ш : V_к = 6:4:2 = 3:2:1$.

Ответ: $3:2:1$.

11.089. Радиус основания конуса равен R, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90°. Определить объем конуса.

Решение.

Объем конуса находится как: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (рис. 11.77). Длина дуги сектора, $c = \frac{\pi l \alpha}{180} = \frac{\pi l}{2}$. С другой стороны, $c = 2\pi R$. Отсюда $2\pi R = \frac{\pi l}{2}$ и получаем $l = 4R$, где l — образующая. Тогда $H = \sqrt{(4R)^2 - R^2} = \sqrt{15}R$.

Подставим и получим $V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{15}R^3 = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi R^3$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{3}\pi R^3$.

11.090. Вычислить поверхность тела, полученного от вращения ромба площадью Q вокруг одной из его сторон.

Решение.

Площадь искомого тела:

$S = S_{бок_ц} + 2S_{бок_{кон}}$ (рис. 11.78). Площадь боковой поверхности цилиндра находится как $S_{бок_ц} = 2\pi RH$. Высота цилиндра $H = a$, а радиус цилиндра $R = a\sin\alpha$. Отсюда $S_{бок_ц} = 2\pi a^2 \sin\alpha$. Площадь боковой поверхности конусов (они одинаковые) $S_{бок_к} = \pi Rl$, где $R = a\sin\alpha$, а $l = a$. Отсюда $S_{бок_к} = \pi a^2 \sin\alpha$. Площадь ромба $Q = a^2 \sin\alpha$. Окончательно получаем $S = 4\pi a^2 \sin\alpha = 4\pi Q$.

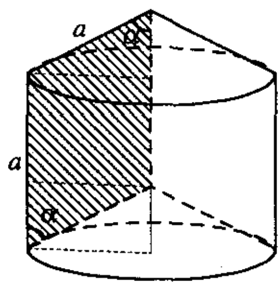


Рис. 11.78

Ответ: $4\pi Q$.

11.091. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность с центром в точке O, а на отрезках OA и OB построены две полуокружности, расположенные в той же полуплоскости с границей AB, что и первая. Найти поверхность и объем фигуры, которая образована вращением вокруг AB фигуры, ограниченной этими тремя полуокружностями, если $AB = 20$ см.

Решение.

Объем искомой фигуры равен: $V = V_{ш_1} - 2V_{ш_2}$, где $V_{ш_1} = \frac{4}{3}\pi R_1^3$ (рис. 11.79). Так как $AB = 20$ см, то $R_1 = 10$ см. Тогда получаем $V_{ш_1} = \frac{4000}{3}\pi$. Так как $R_1 = 10$ см, то $R_2 = 5$ см. Отсюда $V_{ш_2} = \frac{4}{3}\pi R_2^3 = \frac{500}{3}\pi$. Тогда $V = \frac{4000}{3}\pi - \frac{1000}{3}\pi = 1000\pi$ см^3. Площадь искомой фигуры равна: $S = S_{ш_1} + 2S_{ш_2}$. Площадь большей сферической поверхности равна: $S_{ш_1} = 4\pi R_1^2 = 400\pi$. Площадь меньшей сферической поверхности равна: $S_{ш_2} = 4\pi R_2^2 = 100\pi$. Тогда

$S = 400\pi + 200\pi = 600\pi$ см^2.

Ответ: 600π см^2; 1000π см^3.

11.092. Треугольник со сторонами 10, 17 и 21 см вращается вокруг большей стороны. Вычислить объем и поверхность полученной фигуры вращения.

Решение.

Из ΔAOB ($OB = 21 - x$) $R^2 = 17^2 - (21 - x)^2$ (рис. 11.80). Из ΔAOC ($OC = x$) $R^2 = 10^2 - x^2$. Решая систему: $\begin{cases} R^2 = 17^2 - (21 - x)^2, \\ R^2 = 10^2 - x^2, \end{cases}$ получим $OC = x = 6$ см, а $OB = 21 - 6 = 15$ см. Тогда $R = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ см. Площадь большего конуса $S_{бок_1} = \pi R l_1 = \pi 8 \cdot 17 = 136\pi$ см^2. Площадь меньшего конуса $S_{бок_2} = \pi R l_2 = \pi 8 \cdot 10 = 80\pi$ см^2. Тогда площадь поверхности искомой фигуры равна: $S = S_{бок_1} + S_{бок_2} = 216\pi$ см^2. Объем большего конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1 = \frac{1}{3}\pi 64 \cdot 15 = 320\pi$ см^3. Объем меньше-

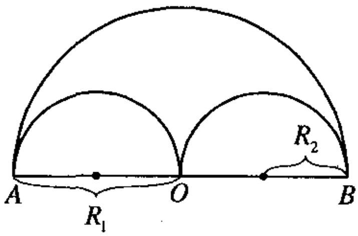


Рис. 11.79

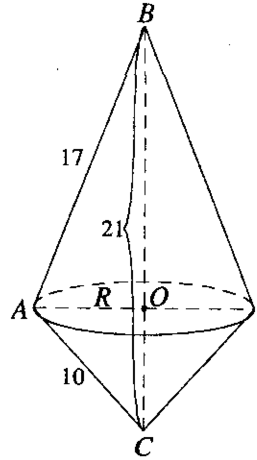


Рис. 11.80

го конуса $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_2 = \frac{1}{3}\pi 64 \cdot 6 = 128\pi$ см^3. Тогда объем искомой фигуры равен: $V = V_1 + V_2 = 448\pi$ см^3.

Ответ: 448π см^3; 216π см^2.

11.093. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного куба.

Решение.

Пусть радиус шара равен R, ребро куба равно a; тогда $R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$, откуда $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Обозначим объемы и поверхности шара и куба соответственно через V_1, V_2 и S_1, S_2. Имеем $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_2 = a^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$, $S_1 = 4\pi R^2$, $S_2 = 6a^2 = 8R^2$, откуда $V_1 : V_2 = \pi\sqrt{3} : 2$, $S_1 : S_2 = \pi : 2$

Ответ: $\pi : 2$; $\pi\sqrt{3} : 2$.

11.094. Найти отношение поверхности и объема шара соответственно к полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним осевым сечением.

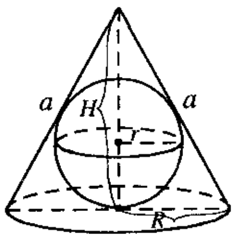


Рис. 11.81

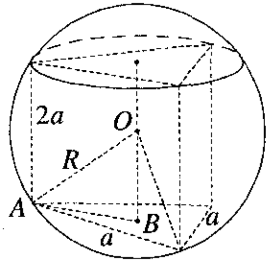


Рис. 11.82

Решение.

Объем шара $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$, объем конуса $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (рис. 11.81).

Так как сечение — равносторонний треугольник, то $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Отсюда $a = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}r$. А радиус основания конуса $R = \frac{a}{2} = \sqrt{3}r$. Высота конуса $H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{12r^2 - 3r^2} = 3r$. Отсюда отношение $\frac{V_ш}{V_к} = \frac{4\pi r^3 \cdot 3}{3\pi 3r^2 \cdot 3r} = \frac{4}{9}$.

Площадь сферической поверхности $S_ш = 4\pi r^2$. Площадь полной поверхности конуса

$S_к = S_{бок} + S_{осн} = \pi Ra + \pi R^2 = \pi\sqrt{3}r \cdot 2\sqrt{3}r + 3\pi r^2 = 9\pi r^2$. Отсюда отношение: $\frac{S_ш}{S_к} = \frac{4\pi r^2}{9\pi r^2} = \frac{4}{9}$.

Ответ: $\frac{V_ш}{V_к} = \frac{S_ш}{S_к} = \frac{4}{9}$.

11.095. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описан шар. Как относится его объем к объему призмы?

Решение.

Объем шара равен: $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$ (рис. 11.82). Объем призмы равен: $V_п = S \cdot H$. Площадь основания призмы равна: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а высота призмы $H = 2a$. Отсюда $V_п = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим ΔAOB : $OB = \frac{1}{2}H = a$;

$AB = r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (радиус описанной окружности для равностороннего треугольника).

Тогда $R = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Тогда

$V_ш = \frac{4}{3}\pi\frac{8a^3}{3\sqrt{3}}$. Искомое отношение:

$$\frac{V_ш}{V_п} = \frac{4 \cdot 8a^3\pi \cdot 2}{3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot a^3\sqrt{3}} = \frac{64\pi}{27}.$$

Ответ: $\frac{64\pi}{27}$.

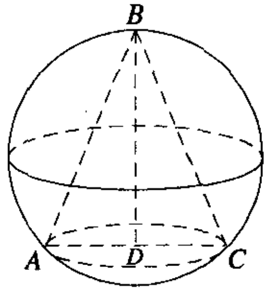


Рис. 11.83

11.096. Определить поверхность шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен R, а высота равна h.

Решение.

Поверхность шара равна: $S_ш = 4\pi r^2$ (рис. 11.83). Сечение конуса — равнобедренный треугольник. Для него радиус описанной окружности $r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$. Для ΔABC $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}2R \cdot h = Rh$. Стороны $AB = BC = \sqrt{R^2 + h^2}$. Отсюда $r = \frac{2R(R^2+h^2)}{4Rh} = \frac{(R^2+h^2)}{2h}$. Окончательно получаем $S_ш = 4\pi\frac{(R^2+h^2)^2}{4h^2} = \frac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$.

Ответ: $\frac{\pi(R^2+h^2)^2}{h^2}$.

11.097. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

Решение.

Рассмотрим осевое сечение конуса, которое пройдет через центр шара. Так как диаметр основания конуса равен образующей, то в сечении получим правильный треугольник, вписанный в окружность (рис. 11.84)).

Пусть радиус шара равен R; тогда $AB = R\sqrt{3}$, $AD = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Обозна-

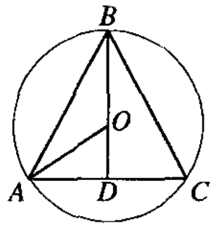


Рис. 11.84

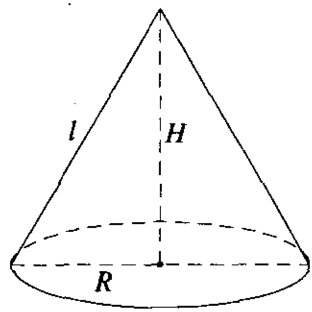


Рис. 11.85

чим полную поверхность конуса через S_1, а поверхность шара — через S_2. Имеем $S_1 = \pi\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot R\sqrt{3} + \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}\pi R^2$, $S_2 = 4\pi R^2$, откуда $S_1 : S_2 = 9:16$.

Ответ: $\frac{9}{16}$.

11.098. Боковая поверхность конуса вдвое больше площади основания. Площадь его осевого сечения равна Q. Найти объем конуса.

Решение.

Объем конуса $V_к = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ (рис. 11.85). Площадь осевого сечения $Q = \frac{1}{2}2RH = RH$. По условию $S_{бок} = 2S_{осн}$. Отсюда $\pi Rl = 2\pi R^2$ и $l = 2R$. Из рисунка $l^2 = H^2 + R^2 = 4R^2$. Отсюда $H = R\sqrt{3}$, а также $H = \frac{Q}{R}$. Тогда $\frac{Q}{R} = R\sqrt{3}$ и получаем $R = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$. Окончательно получаем: $V_к = \frac{1}{3}\pi RH\cdot R = \frac{1}{3}\pi\frac{Q\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt[4]{3}}\pi Q\sqrt{Q}$.

11.099. Равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 3 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислить поверхность и объем полученной фигуры вращения.

Решение.

Искомый объем $V = V_{\text{цил}} - 2V_{\text{кон}}$, а поверхность $S = S_{\text{цил}} + 2S_{\text{кон}}$, где $V_{\text{цил}}$, $V_{\text{кон}}$ и $S_{\text{цил}}$, $S_{\text{кон}}$ — объемы и боковые поверхности цилиндра и конуса соответственно (рис. 11.86). Имеем $V_{\text{цил}} = \pi r^2 h$, где

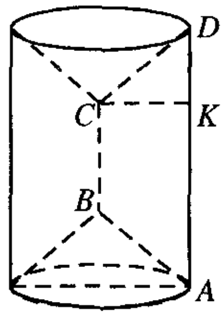


Рис. 11.86

$r = CK$, $h = AD = 3$ см. Так как $DK = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}$ (см), а $CD = 2DK = 1$ (см), то $CK = \sqrt{CD^2 - DK^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см). Следовательно, $V_{\text{цил}} = \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9\pi}{4}$ (см³), $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}$ (см³), откуда $V = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$ (см³). Наконец, находим

$S_{\text{цил}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = 3\pi\sqrt{3}$ (см²), $S_{\text{кон}} = \pi rl = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ (см²), откуда $S = 3\pi\sqrt{3} + \pi\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}$ (см²).

Ответ: $4\pi\sqrt{3}$ см²; 2π см³.

11.100. Высота конуса разделена на три равных отрезка, и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, разбивающие конус на три части. Найти объем среднего усеченного конуса, если объем данного конуса равен V.

Решение.

$V_{\text{ус.к}} = \frac{1}{3}h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$; $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$, тогда получим, что $V_{\text{ус.к}} = \frac{1}{3}h\pi\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right)$ (рис. 11.87). По условию имеем

$h=\frac{H}{3}$, где $H=\frac{3V}{S}=\frac{3V}{\pi R^2}$, следовательно, $h=\frac{V}{\pi R^2}$. Получим, что

$V_{\text{ус.к}}=\frac{1}{3}\frac{V}{R^2}\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right)=\frac{V}{3}\left(\left(\frac{R_1}{R}\right)^2+\left(\frac{R_2}{R}\right)^2+\frac{R_1R_2}{R^2}\right)$. Так как

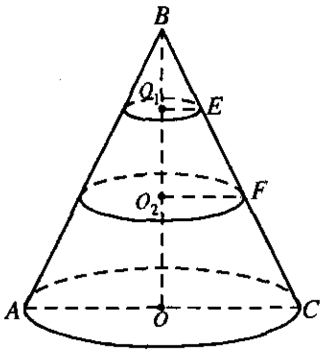


Рис. 11.87

$\Delta BO_1E\sim\Delta BOC$, то имеем

$\frac{O_1E}{OC}=\frac{BO_1}{BO}$; $\frac{R_1}{R}=\frac{\frac{1}{3}H}{H}$; $\frac{R_1}{R}=\frac{1}{3}$; так как $\Delta BO_2F\sim\Delta BOC$, то

$\frac{R_2}{R}=\frac{2/3\cdot H}{H}$; $\frac{R_2}{R}=\frac{2}{3}$, тогда

$V_{\text{ус.к}}=\frac{V}{3}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right)=\frac{7V}{27}$.

Ответ: $\frac{7V}{27}$.

11.101. Боковая поверхность конуса развернута на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит 120°, а площадь равна S. Найти объем конуса.

Решение.

Пусть радиус основания конуса равен r, а его образующая равна l. Тогда площадь развертки $S=\frac{1}{2}l^2\cdot\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi l^2}{3}$, откуда $l=\sqrt{\frac{3S}{\pi}}$.

Но $S=\pi rl=\pi r\sqrt{\frac{3S}{\pi}}$ и, следовательно, $r=\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Объем конуса найдем

по формуле $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$, где $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{\frac{3S}{\pi}-\frac{S}{3\pi}}=2\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$. Итак,

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi S}{3\pi}\cdot2\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}=\frac{2S\sqrt{6\pi S}}{27\pi}$.

Ответ: $2S\sqrt{6\pi S}/(27\pi)$.

11.102. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размерами 80×20×5 см, прокатывается лист толщиной 1 мм. Определить площадь этого листа.

Решение.

Искомую площадь найдем по формуле $S = V/h$, где V — объем листа, h — его толщина (при этом форма листа значения не имеет). Так как объемы обоих тел равны, то $V = 80 \cdot 20 \cdot 5 = 8000$ (см³). Итак, $S = 8000/0{,}1 = 80000$ см² $= 8$ м².

Ответ: 8 м².

11.103. Металлический шар радиуса R перелит в конус, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Вычислить высоту конуса.

Решение.

Так как радиус шара равен R, то объемы тел равны $\frac{4}{3}\pi R^3$. Пусть r — радиус основания конуса; тогда, по условию, $S_{\text{бок}} = 3\pi r^2$. С другой стороны, $S_{\text{бок}} = \pi r l$, где l — образующая конуса. Поэтому $l = 3r$, откуда $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2r\sqrt{2}$, т.е. $r = \frac{\sqrt{2}}{4} h$.

Находим $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2}{16} h^2 \cdot h = \frac{1}{24}\pi h^3$. Из равенства $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{24}\pi h^3$ получим $h = 2R\sqrt[3]{4}$.

Ответ: $2R\sqrt[3]{4}$.

11.104. В правильном тетраэдре построено сечение его плоскостью, проходящей через ребро AC и точку K, принадлежащую ребру SB, причем $BK : KS = 2 : 1$. Найти объем отсеченной пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно a.

Решение.

$V_{KABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot KN$ (рис. 11.88), где $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Так как $SO \| KN$,

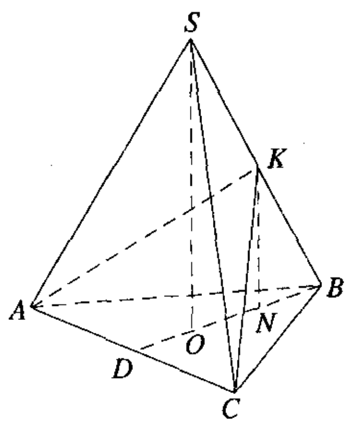


Рис. 11.88

то $BN:NO=BK:KS=2:1$, откуда $BN=\frac{2}{3}BO$. Но $BO=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, т.е.

$BN=\frac{2a\sqrt{3}}{9}$ и, значит, $KN=\sqrt{BK^2-BN^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{9}-\frac{4a^2}{27}}=\frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

Итак, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2a\sqrt{6}}{9}=\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$.

Ответ: $a^3\sqrt{2}/18$.

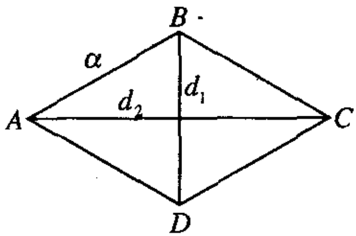


Рис. 11.89

11.105. Ромб вращается вокруг своей большей диагонали, а затем вокруг меньшей диагонали. Доказать, что отношение объемов полученных фигур вращения равно отношению площадей их поверхностей.

Решение.

Пусть сторона ромба равна a, а его диагонали равны $2d_1$ и $2d_2$ (рис. 11.89). При вращении получается тело, состоящее из двух конусов. Обозначим объем и поверхность тела вращения вокруг диагонали AC через V_{AC} и S_{AC}, а вокруг диагонали BD — через V_{BD} и S_{BD}. Тогда $V_{AC}=\frac{2}{3}\pi d_1^2 d_2$, $S_{AC}=2\pi a d_1$, $V_{BD}=\frac{2}{3}\pi d_2^2 d_1$, $S_{BD}=2\pi a d_2$.

Тогда $\frac{V_{AC}}{V_{BD}}=\frac{(2/3)\pi d_1^2 d_2}{(2/3)\pi d_2^2 d_1}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{S_{AC}}{S_{BD}}$.

Что и требовалось доказать.

Решения к главе 12

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ФИГУР

1. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 12.1) можно вычислить по следующим формулам:

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} \operatorname{tg} A; \qquad (a)$$

$$S = \frac{AB^2 - AD^2}{2} \operatorname{tg} \angle AOD, \qquad (б)$$

где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

2. Пусть известны длины b и c двух сторон треугольника ABC и угол A, образуемый ими (рис. 12.2). Тогда длина биссектрисы AD треугольника, проведенной из вершины этого угла, выражается формулой

$$l_a = \frac{2bc\cos(A/2)}{b+c}.$$

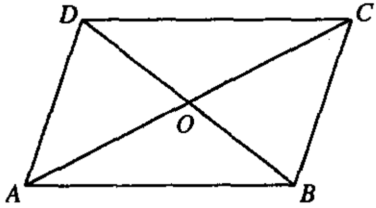


Рис 12.1

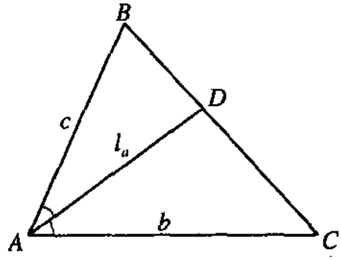


Рис 12.2

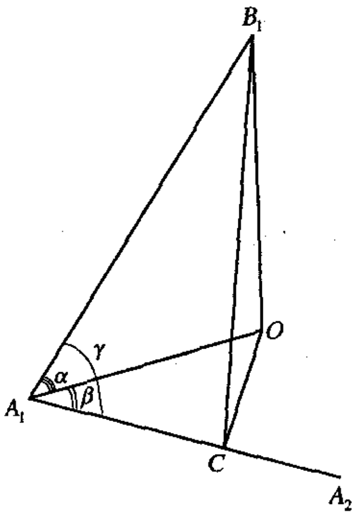


Рис 12.3

3. Справедливы следующие соотношения между элементами шара и вписанного в него конуса:

$$l = 2R\sin\alpha; \qquad \text{(а)}$$

$$l^2 = 2RH, \qquad \text{(б)}$$

где R — радиус шара, l — длина образующей конуса, H — его высота, α — угол между образующей и плоскостью основания.

Такие же соотношения справедливы и для вписанной в шар пирамиды, боковые ребра которой имеют длину l и составляют с плоскостью основания угол α.

4. Пусть A_1B_1 — боковое ребро пирамиды или призмы, A_1O — его проекция на плоскость основания, $\angle B_1A_1O = \alpha$, $\angle OA_1A_2 = \beta$, $\angle B_1A_1A_2 = \gamma$ (рис. 12.3). Тогда справедливо равенство $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta$.

Доказательство этих соотношений можно найти в любом издании данного сборника задач последних лет.

12.001. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна l, угол при вершине равен α. Найти боковую сторону.

Решение.

По условию $AB = AC$, $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$, $\angle BAC = \alpha$, $AA_1 + BB_1 = l$

(рис. 12.4). Пусть $BC = a$. Из ΔAA_1C имеем $AA_1 = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $AC = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$,

а из ΔBB_1C находим $BB_1 = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = a\cos\frac{\alpha}{2}$. По условию

$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + a\cos\frac{\alpha}{2} = l$, $\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\left(1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = l$, $a = \dfrac{2l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Получили

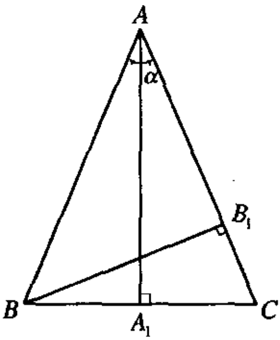


Рис. 12.4

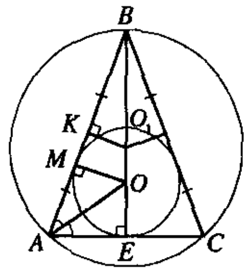


Рис. 12.5

$$AC=\frac{l\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{l}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha}=$$

$$=\frac{l}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\alpha}=\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}.$$

Ответ: $\frac{l}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}$.

12.002. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

Решение.

По условию $AB=BC$, $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Пусть $AC=x$, тогда из ΔAEO, $\angle AEO=90^\circ$ имеем $OE=r=\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (рис. 12.5), где r — радиус вписанной окружности. Из ΔAEB $\angle AEB=90^\circ$ имеем, что $AB=\frac{AE}{\cos\alpha}=\frac{x}{2\cos\alpha}$. Рассмотрим ΔBKO_1, $\angle BKO_1=90^\circ$, $BO_1=R=\frac{BK}{\cos KBO_1}$; $BK=\frac{AB}{2}=\frac{x}{4\cos\alpha}$ (O_1 — центр описанной окружности). $\angle ABE = 90° - \alpha$, тогда $BO_1 = R = \dfrac{x}{4\cos\alpha\cos(90° - \alpha)} =$

$= \dfrac{x}{4\cos\alpha\sin\alpha}$. Следовательно, $\dfrac{r}{R} = \dfrac{x\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\sin 2\alpha}{2\cdot x} = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\alpha$.

Ответ: $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\alpha$.

12.003. В ромбе через вершину острого угла, равного α, проведена прямая, делящая этот угол в отношении 1:2. В каком отношении эта прямая делит сторону ромба, которую она пересекает?

Решение.

Пусть $\angle ABC = \alpha$ и $\dfrac{\angle ABE}{\angle EBC} = \dfrac{1}{2}$, значит $\angle EBC = \dfrac{2}{3}\alpha$, $\angle ABE = \dfrac{\alpha}{3}$,

$\angle DBC = \dfrac{\angle ABC}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle EBM = \angle EBC - \angle DBC = \dfrac{2\alpha}{3} - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{6}$ (рис. 12.6).

Из подобия $\Delta ADO \sim \Delta EDM$ следует $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{DO}{DM}$. Так как $AD = ED + AE$, то $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{DO}{DM} - 1$. Обозначим $AB = BC = CD = AD = x$.

Из ΔCOD $\angle COD = 90°$, $\angle ODC = \alpha/2$, $OD = DC\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2} = x\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$,

$BD = 2DO = 2x\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Из ΔBME, $\angle BME = 90°$, $EM = BM\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}$.

Рассмотрим ΔEMD, $\angle EMD = 90°$, $DM = EM\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, $DM = BM\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$,

где $BM = BD - DM$, тогда $DM = (BD - DM)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Получили,

что $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{BD - DM}{DM}$, где $BD = 2x\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Тогда $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}} =$

$= \dfrac{2x\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{DM} - 1$; $DM = \dfrac{2x\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{6}\cdot\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}}$. Следовательно, $\dfrac{AE}{ED} =$

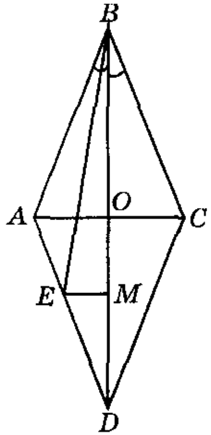


Рис. 12.6

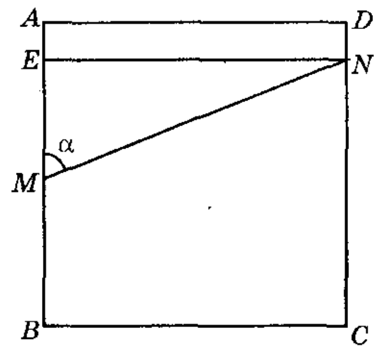


Рис. 12.7

$$=\frac{x\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)}{2x\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}-1=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{6}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{6}-\sin\frac{\alpha}{6}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{6}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}};$$

$$\frac{AE}{ED}=\frac{\cos\frac{\alpha}{6}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{6}:\cos\frac{\alpha}{2}$.

12.004. В квадрате $ABCD$ через середину M стороны AB проведена прямая, пересекающая противоположную сторону CD в точке N. В каком отношении прямая MN делит площадь квадрата, если острый угол AMN равен α? Указать возможные значения α.

Решение.

$ABCD$ — квадрат, $M\in AB$, $MA=MB$, $\angle AMN=\alpha$, $N\in CD$ (рис. 12.7); требуется найти $S_{AMND}:S_{BMNC}$. Пусть $AB=a$; тогда

$$S_{AMND}=\frac{MA+ND}{2}\cdot a=\frac{a+2ND}{4}\cdot a,\quad S_{BMNC}=\frac{MB+NC}{2}\cdot a=\frac{\frac{a}{2}+a-ND}{2}\cdot a=$$

$=\dfrac{3a-2ND}{4}a$; $\dfrac{S_{AMND}}{S_{BMNC}}=\dfrac{a+2ND}{3a-2ND}$. Проведем $NE\parallel AD$ и из ΔMEN имеем $ME=a\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда $ND=MA-ME=\dfrac{a}{2}-a\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{a-2a\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. Значит,

$$\frac{S_{AMND}}{S_{BMNC}}=\frac{a+a-2a\operatorname{ctg}\alpha}{3a-a+2a\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

Наименьшее значение угла α достигается в случае совпадения точки N с вершиной D; тогда $\operatorname{tg}\alpha=a:(a/2)=2$. С другой стороны, $\alpha<\pi/2$. Итак, $\operatorname{arctg}2<\alpha<\pi/2$.

Ответ: $\operatorname{tg}\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\operatorname{arctg}2<\alpha<\pi/2$.

12.005. Высота равнобедренной трапеции равна h, а угол между ее диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α. Найти среднюю линию трапеции.

Решение.

По условию в равнобедренной трапеции $ABCD$ имеем: $AB=CD$, $BB_1\perp AD$, $BB_1=h$; $AC\cap BD=O$, $\angle COD=\alpha$ (рис. 12.8). Так как $\angle COD$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOD, то $\angle OAD=\angle ODA=$ $=\dfrac{\alpha}{2}$. Далее, имеем $B_1D=ED+B_1E=\dfrac{1}{2}AD+\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}(AD+BC)=MN$, где MN — средняя линия трапеции. Из ΔBB_1D получим $B_1D=BB_1\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=$ $=h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Ответ: $h\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

12.006. В прямоугольном треугольнике даны его площадь S и острый угол α. Найти расстояние от точки пересечения медиан треугольника до гипотенузы.

Решение.

В прямоугольном треугольнике ACB имеем: $\angle ACB=90°$, $\angle CAB=\alpha$, $S_{\Delta ABC}=S$, $AB_1=B_1C$ и $AC_1=C_1B$, $BB_1\cap CC_1=O$ (рис. 12.9);

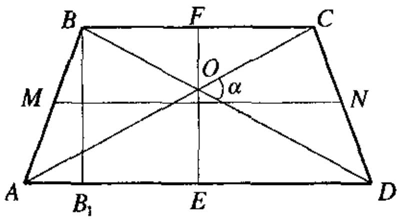


Рис. 12.8

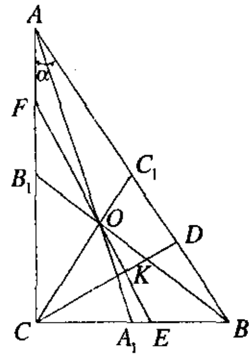


Рис. 12.9

нужно найти расстояние от O до AB. Проведем $CD \perp AB$ и положим

$CD = h$. Из ΔADC и ΔCDB находим $AC = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, $CB = \dfrac{h}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \dfrac{h}{\cos\alpha}$.

Так как $S = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{h^2}{\sin 2\alpha}$, то $h = \sqrt{S \sin 2\alpha}$. Проведем $OF \| AB$,

$OF \cap AC = F$, $OF \cap CB = E$ и $OF \cap CD = K$. Так как $\Delta CKO \sim \Delta CDC_1$,

то $\dfrac{CK}{CD} = \dfrac{OC}{CC_1} = \dfrac{2}{3}$, откуда $CK = \dfrac{2}{3} CD$, а $KD = \dfrac{1}{3} CD = \dfrac{\sqrt{S \sin 2\alpha}}{3}$ — это

и есть расстояние от O до AB, поскольку $O \in FE \| AB$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\sqrt{S \sin 2\alpha}$.

12.007. В прямоугольник $ABCD$ ($AB \| CD$) вписан треугольник AEF. Точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD. Найти тангенс угла EAF, если $AB : BC = BE : EC = CF : FD = k$.

Решение.

По условию $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BE}{EC} = \dfrac{CF}{FD} = k$ (рис. 12.10). Обозначим $AD = BC = x$,

тогда $AB = DC = kX \cdot BC = BE + EC = kEC + EC$, отсюда $EC = \dfrac{BC}{1+k} = \dfrac{x}{1+k}$,

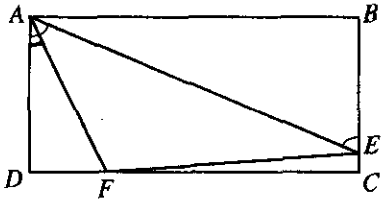


Рис. 12.10

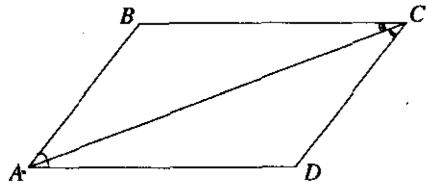


Рис. 12.11

$BE=\dfrac{kx}{1+k}$. $DC=FC+DF=kDF+DF$, тогда $DF=\dfrac{kx}{1+k}$, $FC=\dfrac{k^2x}{1+k}$.

$\angle FAE=\angle DAE-\angle DAF$, $\angle DAE=\angle BEA$ ($BC\|AD$, AE — секущая), отсюда $\angle FAE=\angle BEA-\angle DAF$. Получили, что $\operatorname{tg}\angle FAE=$

$=\operatorname{tg}(\angle BEA-\angle DAF)=\dfrac{\operatorname{tg}\angle BEA-\operatorname{tg}\angle DAF}{1+\operatorname{tg}\angle BEA\cdot\operatorname{tg}\angle DAF}$. Рассмотрим ΔADF,

$\angle ADF=90^\circ$, $\operatorname{tg}\angle DAF=\dfrac{DF}{AD}=\dfrac{kx}{(1+k)x}=\dfrac{k}{1+k}$. Из ΔABE, $\angle ABE=90^\circ$,

$\operatorname{tg}\angle BEA=\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{kx(1+k)}{kx}=1+k$. Окончательно $\operatorname{tg}\angle FAE=\dfrac{1+k-\dfrac{k}{1+k}}{1+\dfrac{k}{1+k}\cdot(1+k)}=$

$=\dfrac{k^2+k+1}{(1+k)^2}$.

Ответ: $\dfrac{k^2+k+1}{(1+k)^2}$.

12.008. В параллелограмме со сторонами a и b и острым углом α найти тангенсы углов, образуемых большей диагональю параллелограмма с его сторонами.

Решение.

$S_{ABCD}=a\cdot b\cdot\sin\alpha$ (рис. 12.11) и $S_{ABCD}=2\cdot S_{\Delta ACD}=AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD$; получили, что $ab\sin\alpha=a\cdot AC\cdot\sin\angle ACD$, $\angle ADC=180^\circ-\alpha$, $AC^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\angle ADC$ (по теореме косинусов). Отсюда $AC=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, $b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\cdot\sin\angle ACD$;

$\sin\angle ACD = = \dfrac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$. По теореме косинусов находим, что $AD^2 = AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD$,

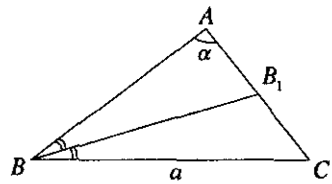


Рис. 12.12

$$\cos\angle ACD = \frac{2a^2+2ab\cos\alpha}{2a\sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}\angle ACD = \frac{b\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha}}\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{a+b\cos\alpha} = \frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\angle BCA = \operatorname{tg}(\angle BAD-\angle ACD) = \frac{\operatorname{tg}\angle BAD-\operatorname{tg}\angle ACD}{1+\operatorname{tg}\angle BAD\cdot\operatorname{tg}\angle ACD} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha-\dfrac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}} = \frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$; $\dfrac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$.

12.009. Основание равнобедренного треугольника равно a, угол при вершине равен α. Найти длину биссектрисы, проведенной к боковой стороне.

Решение.

Имеем $AB = AC$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABB_1 = \angle B_1BC$ (рис. 12.12). Тогда $\angle ABC = \angle ACB = \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$, $\angle B_1BC = \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}$, $\angle BB_1C = \pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{4}$. Из ΔBB_1C по теореме синусов находим $\dfrac{BB_1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$, т.е. $BB_1 = \dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{a\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ+\dfrac{3\alpha}{4}\right)}$.

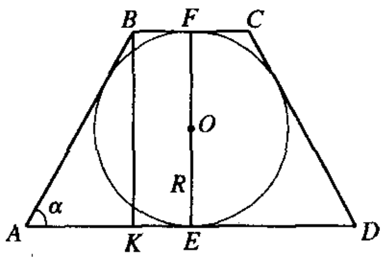


Рис. 12.13

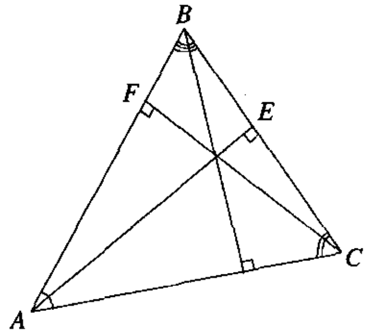


Рис. 12.14

12.010. Около круга радиуса R описана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании. Найти периметр этой трапеции.

Решение.

По условию $ABCD$ — трапеция, $AB = CD$, O — центр вписанного в трапецию круга, $OE \perp AD$, $OE = R$, $\angle BAD = \alpha$, $\alpha < \pi/2$ (рис. 12.13); нужно найти $P_{ABCD} = AD + 2AB + BC$. По свойству описанного четырехугольника $AD + BC = 2AB$ и $P_{ABCD} = 4AB$. Проведем $BK \| OE$; тогда $BK = 2OE = 2R$. Из ΔBKA находим $AB = \frac{2R}{\sin\alpha}$ и $P_{ABCD} = \frac{8R}{\sin\alpha}$.

Ответ: $\frac{8R}{\sin\alpha}$.

12.011. Доказать, что во всяком треугольнике разность между суммой квадратов любых двух его сторон и произведением этих сторон, умноженным на косинус угла между ними, есть для данного треугольника величина постоянная.

Решение.

Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Соответственно $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle ABC = \beta$. Обозначим $d_1 = a^2 + b^2 - ab \cdot \cos\gamma$, $d_2 = a^2 + c^2 - ac \cdot \cos\beta$, $d_3 = c^2 + b^2 - cb \cdot \cos\alpha$. По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$. Тогда $d_1 = c^2 + ab\cos\gamma$, $d_2 = b^2 + ac\cos\beta$, $d_3 = a^2 + bc\cos\alpha$, $d_1 + d_2 = b^2 + c^2 + a(b\cos\gamma + c\cos\beta) =$

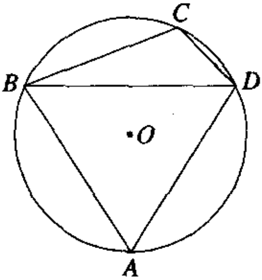


Рис. 12.15

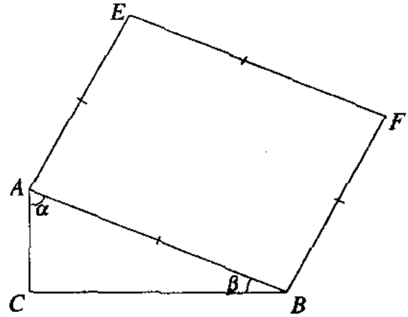


Рис. 12.16

$=b^2+c^2+a(CE+BE)=b^2+c^2+a^2$ (рис. 12.14). $d_2+d_3=b^2+a^2+$ $+c(a\cos\beta+b\cos\alpha)=b^2+a^2+c(BF+AF)=b^2+a^2+c^2$, $d_3+d_1=a^2+c^2+$ $+b(c\cos\alpha+a\cos\gamma)=a^2+c^2+b\cdot(CM+AM)=a^2+c^2+b^2$. Следовательно, $d_1+d_2=d_2+d_3=d_3+d_1$. Откуда $d_1=d_3$, $d_3=d_2$, значит, $d_1=d_2=d_3=a^2+b^2+c^2$. Что и требовалось доказать.

12.012. Даны стороны a, b, c и d четырехугольника, вписанного в окружность. Найти угол, заключенный между сторонами a и b.

Решение.

Так как $ABCD$ — четырехугольник, вписанный в окружность, то $\angle B+\angle D=\angle A+\angle C=180^\circ$. Из ΔBCD по теореме косинусов $BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle C$. Из ΔBAD $BD^2=d^2+c^2-2dc\cos\angle A$. Отсюда $d^2+c^2+2dc\cdot\cos C=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$ (рис. 12.15). $2(ab+dc)\cos C=$ $=a^2+b^2-(d^2+c^2)$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-(d^2+c^2)}{2(ab+dc)}$, $\angle C=\arccos\left(\dfrac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2(ab+dc)}\right)$.

Ответ: $\arccos\dfrac{a^2+b^2-d^2-c^2}{2(ab+dc)}$.

12.013. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно k. Найти сумму тангенсов острых углов треугольника.

Решение.

В ΔACB $\angle ACB=90^\circ$. Пусть $\angle CAB=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, тогда $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. ($\alpha+\beta=90^\circ$). Обозначим $AB=BF=$ $=EF=AE=x$ ($ABFE$ — квадрат) (рис. 12.16). $\frac{S_{\Delta ACB}}{S_{ABFE}}=\frac{AC\cdot BC}{2\cdot x^2}$;

$AC=AB\cdot\cos\alpha$, $CB=AB\cdot\cos\beta$, тогда $\frac{S_{\Delta ACB}}{S_{ABFE}}=\frac{x^2\cos\alpha\cdot\cos\beta}{x^2\cdot 2}$; $\frac{S_{\Delta ACB}}{S_{ABFE}}=k$

(по условию). Имеем, что $\frac{1}{2k}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2k}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2k}$.

12.014. Площадь прямоугольной трапеции равна S, острый угол равен α. Найти высоту трапеции, если ее меньшая диагональ равна большему основанию.

Решение.

По условию $\angle CBA=90^\circ$, $\angle ADC=\alpha$, $AC=AD$. $S_{ABCD}=S$, тогда $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot h$, откуда $h=\frac{2S}{BC+AD}=\frac{2S}{AD-ED+AD}$ (рис. 12.17). Из ΔCED, $\angle CED=90^\circ$, $ED=h\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. Из ΔAEC $\angle AEC=90^\circ$, $\angle CAE=180^\circ-2\alpha$ ($AC=AD$), $AC=\frac{h}{\sin 2\alpha}$, тогда

$$h=\frac{2S}{\frac{2\cdot h}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-h\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}},\ h^2=\frac{2S\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\ h=\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Ответ: $\sqrt{2S\operatorname{ctg}\alpha}$.

12.015. Общая внешняя касательная двух внешне касающихся окружностей составляет с линией центров угол α. Найти отношение радиусов этих окружностей.

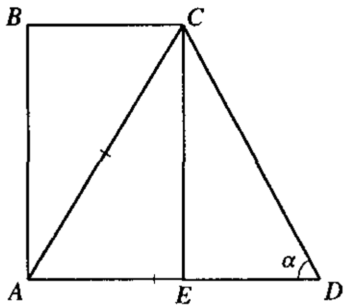


Рис. 12.17

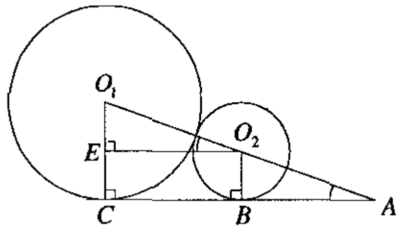


Рис. 12.18

Решение.

Пусть R; r — радиусы двух внешне касающихся окружностей, $\angle O_1AC=\alpha$. $R=O_1E+EC$, $EC=r$ ($O_1C\perp AC$, $O_2B\perp AC$, $O_2E\perp AC$) (рис. 12.18). Из ΔO_2O_1E, $\angle O_2EO_1=90^\circ$, $\angle O_1O_2E=$ $=\angle O_1AC=\alpha$; имеем $O_1E=O_1O_2\cdot\sin\alpha$, $O_1O_2=r+R$; тогда $O_1E=(R+r)\sin\alpha$, значит, $R=r+(R+r)\sin\alpha$, $R(1-\sin\alpha)=r(1+\sin\alpha)$,

$$\frac{R}{r}=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

12.016. Две высоты параллелограмма, проведенные из вершины тупого угла, равны h_1 и h_2, а угол между ними равен α. Найти большую диагональ параллелограмма.

Решение.

По условию $BF\perp CD$, $BF=h_2$, $BE\perp AD$, $BE=h_1$, $\angle EBF=\alpha$. Тогда $\angle ABF=\angle CFB=90^\circ$ ($AB\parallel CD$), $\angle ABE=90^\circ-\alpha$. Из ΔBEA $\angle BEA=90^\circ$, $AE=h_1\cdot\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)=h_1\cdot\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 12.19). Из ΔBFC $\angle BFC=90^\circ$, $CF=h_2\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, $AB=CD=\dfrac{h_1}{\sin\alpha}$, $BC=AD=\dfrac{h_2}{\sin\alpha}$,

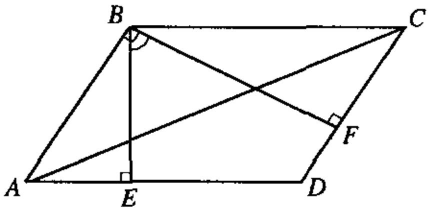


Рис. 12.19

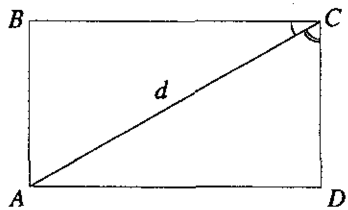


Рис. 12.20

$\angle D = 180° - \alpha$. По теореме косинусов $AC^2 = \dfrac{h_2^2 + h_1^2 + 2h_1h_2 \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$,

следовательно, $AC = \dfrac{\sqrt{h_2^2 + h_1^2 + 2h_1h_2 \cdot \cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{h_2^2 + h_1^2 + 2h_1h_2 \cdot \cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

12.017. Диагональ прямоугольника равна d и делит угол прямоугольника в отношении $m:n$. Найти периметр прямоугольника.

Решение.

По условию $ABCD$ — прямоугольник, $AC = d$, $\dfrac{\angle ACB}{\angle ACD} = \dfrac{m}{n}$ (рис. 12.20).

Так как $\angle BCD = \dfrac{\pi}{2}$, то $mx + nx = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{2(m+n)}$; $\angle ACB = \dfrac{m\pi}{2(m+n)}$,

$\angle ACD = \dfrac{n\pi}{2(m+n)}$. Из ΔABC и ΔADC находим $BC = d\cos\dfrac{m\pi}{2(m+n)}$,

$DC = d\cos\dfrac{n\pi}{2(m+n)}$. Отсюда $P_{ABCD} = 2\left(d\cos\dfrac{m\pi}{2(m+n)} + d\cos\dfrac{n\pi}{2(m+n)}\right) =$

$= 4d\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi(m-n)}{4(m+n)} = 2\sqrt{2}d\cos\dfrac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$.

Ответ: $2\sqrt{2}d\cos\dfrac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$.

12.018. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, отношение боковой стороны к меньшему основанию равно k. Найти углы трапеции и допустимые значения k.

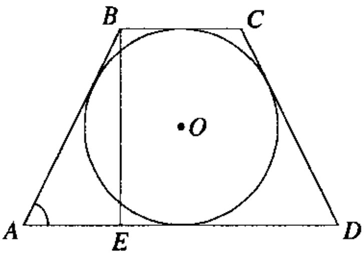


Рис. 12.21

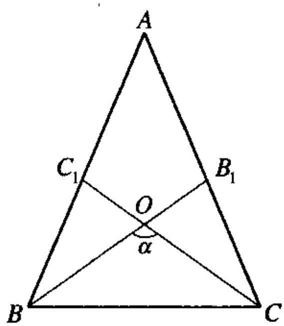


Рис. 12.22

Решение.

По условию $\frac{CD}{BC}=k$. Обозначим $\angle BAE=\alpha$ (рис. 12.21). Имеем $BC+AD=2AB$, а $AD=BC+2AE$, тогда $BC+AE=AB$, $\frac{BC}{AB}+\frac{AE}{AB}=1$. Из ΔBEA ($\angle BEA=90^\circ$) имеем $AE=AB\cdot\cos\alpha$, $AB=CD$, тогда $\frac{1}{k}+\cos\alpha=1$, $\alpha=\arccos\frac{k-1}{k}$, $\angle ABC=\angle BCD=\pi-\alpha=\pi-\arccos\frac{k-1}{k}$.

Возможные значения k находим из системы $\begin{cases}1-\frac{1}{k}>0,\\ 1-\frac{1}{k}<1\end{cases}\Rightarrow k>1$.

Ответ: $\arccos\frac{k-1}{k}$ и $\pi-\arccos\frac{k-1}{k}$; $k>1$.

12.019. Площадь равнобедренного треугольника равна S, а противолежащий основанию угол между медианами, проведенными к его боковым сторонам, равен α. Найти основание.

Решение.

Имеем $AB=AC$, $S_{\Delta ABC}=S$, $AB_1=B_1C$, $AC_1=C_1B$, $BB_1\cap CC_1=O$, $\angle BOC=\alpha$ (рис. 12.22). Тогда $S_{\Delta BOC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}S$, так как высота ΔBOC, проведенная из O, равна $\frac{1}{3}$ высоты ΔABC, проведенной из A. Находим площадь ΔBOC:

$$S_{\Delta BOC}=\frac{BC^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\alpha}=\frac{BC^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}=\frac{BC^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$=\frac{BC^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}$. Итак, $\frac{BC^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4}=\frac{1}{3}S$, откуда $BC^2=\frac{4S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3}\Rightarrow BC=$ $=2\sqrt{\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3}}$.

Ответ: $2\sqrt{\frac{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{3}}$.

12.020. В сегмент, дуга которого равна α, вписан правильный треугольник так, что одна его вершина совпадает с серединой дуги, а две другие лежат на хорде. Площадь треугольника равна S. Найти радиус дуги сегмента.

Решение.

По условию $\angle ABC=\alpha$ (рис. 12.23). Пусть $EM = MF = EF = a$, $S_{\Delta EMF}=S$, тогда $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h=MO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; отсюда $a=\frac{2h}{\sqrt{3}}$, значит, $S=\frac{4}{3}h^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{h^2}{\sqrt{3}}$; $R=BO+OM=R\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\sqrt{3}\cdot S}$, откуда $R=\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{2\sin^2\frac{\alpha}{4}}$.

12.021. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, радиус вписанного круга равен r. Через вершину угла при основании и центр вписанного круга проведена прямая. Найти отрезок этой прямой, заключенный внутри треугольника.

Решение.

Имеем $AB = AC$, O — центр окружности, вписанной в ΔABC, $\angle ABC=\alpha$, $OD\perp BC$, $OD=r$, $BO\cap AC=B_1$ (рис. 12.24). Так как

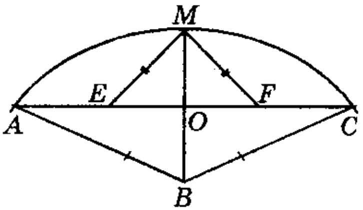


Рис. 12.23

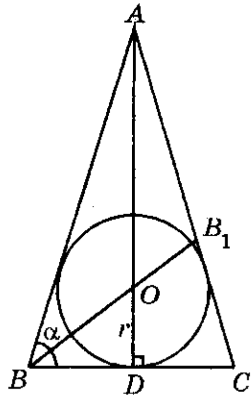


Рис. 12.24

BB_1 — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle B_1BC = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle BB_1C = \pi - \frac{3\alpha}{2}$. Из ΔODB получаем $BD = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Так как D — точка касания основания BC равнобедренного треугольника ABC с окружностью, то $BC = 2BD = 2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

В ΔBB_1C по теореме синусов имеем $\frac{BB_1}{\sin\alpha} = \frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\pi - \frac{3\alpha}{2}\right)}$, т.е.

$$BB_1 = \frac{2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{4r\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{4r\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

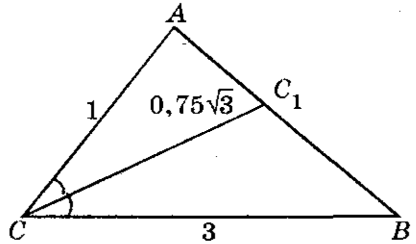


Рис. 12.25

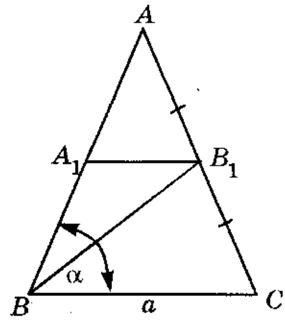


Рис. 12.26

12.022. Найти угол треугольника, если известно, что стороны, заключающие этот угол, равны 1 и 3, а биссектриса угла равна $0{,}75\sqrt{3}$.

Решение.

В ΔABC имеем: $AC=1, BC=3$, $\angle ACC_1=\angle BCC_1$, $CC_1=0{,}75\sqrt{3}$; требуется найти $\angle ACB$ (рис. 12.25).

Воспользуемся формулой $l_c=\dfrac{2ab\cos(C/2)}{a+b}$ (см. «Некоторые соотношения между элементами фигур», с. 713). Выразив отсюда $\cos\dfrac{C}{2}$, имеем

$$\cos\frac{C}{2}=\frac{l_c(a+b)}{2ab},$$

или, после подстановки значений $a=1$, $b=3$, $l_c=0{,}75\sqrt{3}$, находим

$$\cos\frac{C}{2}=\frac{3\sqrt{3}\cdot 4}{4\cdot 2\cdot 1\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\dfrac{C}{2}=30^\circ$, откуда $C=60^\circ$.

Ответ: 60°.

12.023. В равнобедренном треугольнике даны основание a и угол α при основании. Найти длину медианы, проведенной к боковой стороне.

Решение.

Имеем $AB = AC$, $BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $AB_1 = B_1C$ (рис. 12.26). В ΔABC по теореме синусов находим $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{BC}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$. Проведем $A_1B_1 \| BC$. Из ΔBA_1B_1 получаем

$A_1B_1 = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$, $BA_1 = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{4\cos\alpha}$, $\angle B_1A_1B = 180^\circ - \alpha$ и по теореме косинусов

$$BB_1^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16\cos^2\alpha} - 2\frac{a^2}{8\cos\alpha}\cos(180^\circ - \alpha) =$$
$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2(8\cos^2\alpha + 1)}{16\cos^2\alpha};$$

$$BB_1 = \frac{a}{4}\sqrt{8 + \frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{a}{4}\sqrt{9 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{a}{4}\sqrt{9 + \mathrm{tg}^2\alpha}$.

12.024. Найти отношение периметра трапеции, описанной около окружности, к длине этой окружности, если углы при большем основании трапеции равны α и β.

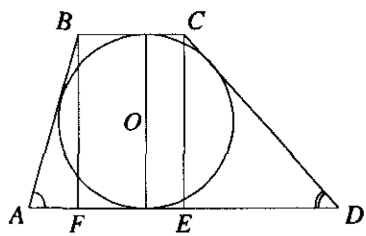


Рис. 12.27

Решение.

По условию $ABCD$ — трапеция, описанная около окружности, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$. Пусть R — радиус вписанной окружности. Длина окружности $l = 2\pi R$ (рис. 12.27). $P = BC + AD + AB + CD$, $BC + AD = AB + CD$, $2(AB + CD) = P$. Из ΔBFA $\angle BFA = 90^\circ$, $AB = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$.

Из ΔCED $\angle CED=90^\circ$, $CD=\dfrac{2R}{\sin\beta}$. Тогда $P=4R\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\beta}\right)$;

$$\frac{P}{l}=\frac{2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\pi\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{4\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\cdot\sin\alpha\sin\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{4\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\cdot\sin\alpha\sin\beta}$.

12.025. В прямоугольном треугольнике ABC острый угол A равен α радианам. Дуга окружности с центром в вершине прямого угла C касается гипотенузы в точке D и пересекает катеты AC и BC соответственно в точках E и F. Найти отношение площадей криволинейных треугольников ADE и BDF.

Решение.

По условию в ΔACB $\angle ACB=90^\circ$, $\angle CAB=\alpha$ (рис. 12.28). Обозначим $AC=x$. Из ΔADC, $\angle ADC=90^\circ$, $CD=x\sin\alpha$, тогда $S_{CED}=\dfrac{1}{2}x^2\sin^2\alpha\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (т.е. $\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$); $S_{\Delta ADC}=\dfrac{CD\cdot AD}{2}=$

$$=\frac{x^2\cos\alpha\sin\alpha}{2};\quad S_{ADE}=S_{\Delta ADC}-S_{CED}=\frac{x^2\cos\alpha\sin\alpha}{2}-\frac{x^2\sin^2\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}.$$

Из ΔCDB, $\angle CDB=90^\circ$, $DB=x\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $S_{\Delta CDB}=\dfrac{x^2}{2}\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$,

$$S_{CDF}=\frac{1}{2}x^2\cdot\sin^2\alpha\cdot\alpha,\quad S_{DFB}=S_{\Delta CDB}-S_{CDF}=\frac{x^2\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{2}-\frac{x^2\sin^2\alpha\cdot\alpha}{2};$$

$$\frac{S_{DFB}}{S_{AED}}=\frac{\sin^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha-\alpha)}{\sin^2\alpha\left(\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}$.

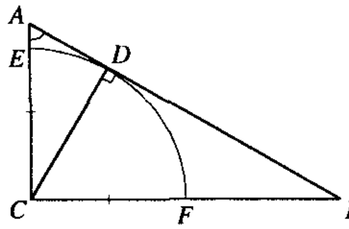


Рис. 12.28

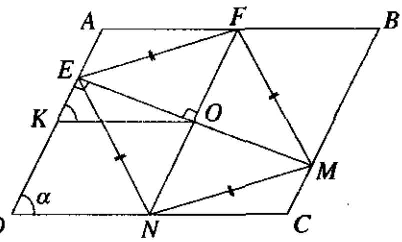


Рис. 12.29

12.026. В параллелограмм со сторонами a и b ($a<b$) и острым углом α вписан ромб; две его вершины совпадают с серединами больших сторон параллелограмма, две другие лежат на меньших сторонах (или на их продолжениях). Найти углы ромба.

Решение.

Пусть $DC=b$, $BC=a$, $\angle ADC=\alpha=\angle AKO$; $NEFM$ — ромб, $KO=\frac{DC}{2}=\frac{b}{2}$ (рис. 12.29), $OF=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$. Из ΔEOF $\angle EOF=90°$, $\operatorname{tg}\angle OEF=\frac{OF}{EO}$. Из ΔKEO $\angle KEO=90°$ ($AD\|NF$, EO — секущая $\angle FOE=\angle KEO=90°$), $EO=\frac{b}{2}\cdot\sin\alpha$, значит, $\operatorname{tg}\angle OEF=\frac{a\cdot 2}{2b\sin\alpha}$;

$\angle NEF=2\angle OEF=2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$, $\angle EFM=\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$; $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{a}{b\sin\alpha}$.

12.027. Около круга радиуса R описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найти площадь этой трапеции.

Решение.

Пусть $BAD=\alpha$, $\angle CDA=\beta$, $OE=R$ (рис. 12.30). Тогда $S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot 2R$. $S_{ABCD}=(BC+AD)\cdot R$. Так как $BC+AD=AB+CD$, то $BC+AD=2R\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$ ($AB=\frac{2R}{\sin\alpha}$, $CD=\frac{2R}{\sin\beta}$). Тогда

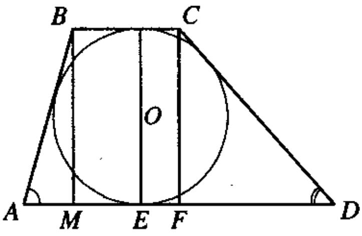


Рис. 12.30

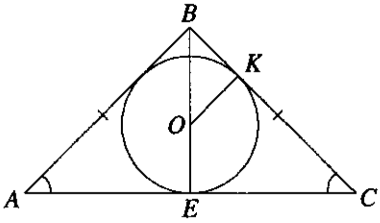


Рис. 12.31

$$S_{ABCD}=2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)=\frac{2R^2(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{4R^2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Ответ: $\dfrac{4R^2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$.

12.028. В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписана окружность радиуса r. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение.

По условию $AB=BC$, $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$, r — радиус вписанной окружности (рис. 12.31). Пусть $AB=AC=x$, тогда $AC=\sqrt{x^2\cdot 2(1+\cos 2\alpha)}=2x\cdot\cos\alpha$; $S=p\cdot r$, где p — полупериметр ΔABC. Таким образом, $S=\frac{x}{2}\cdot 2x\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{x^2\sin 2\alpha}{2}$, значит, $\frac{x^2\sin 2\alpha}{2}=\frac{(2x+2x\cos\alpha)r}{2}$ и $x=\frac{2(1+\cos\alpha)\cdot r}{\sin 2\alpha}$. Имеем $\frac{BC}{\sin\alpha}=2R$ (по теореме синусов), тогда $\frac{2(1+\cos\alpha)\cdot r}{\sin\alpha\sin 2\alpha}=2R$; $R=\frac{(1+\cos\alpha)\cdot r}{\sin^2\alpha\sin\alpha}$; так как $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $R=\dfrac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}$.

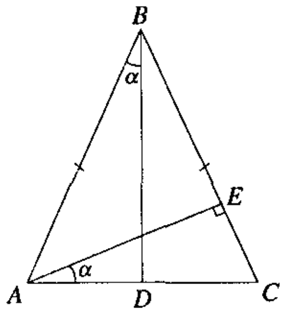


Рис. 12.32

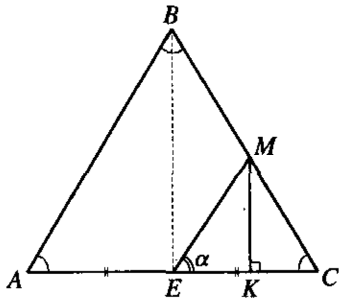


Рис. 12.33

12.029. Площадь равнобедренного треугольника равна S, угол между высотой, проведенной к боковой стороне, и основанием равен α. Найти радиус круга, вписанного в треугольник.

Решение.

По условию $S_{ABC}=S$, $AB=BC$, $\angle EAC=\alpha$, $\angle ECA=90^\circ-\alpha$ (рис. 12.32). $\angle ABC=180^\circ-2(90^\circ-\alpha)=2\alpha$, так как $AB=BC$. Имеем, что $S=p\cdot r$, $r=\dfrac{2S}{p}$, где p — полупериметр ΔABC. Обозначим $AC=x$. Из ΔABD $\angle BDA=90^\circ$, $BD=\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, тогда $S=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x^2}{4}\operatorname{ctg}\alpha$,

отсюда $x=2\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$, $BC=AB=\dfrac{AD}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sqrt{S\cdot\operatorname{tg}\alpha}}{2\sin\alpha}$, $p=\dfrac{\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha}+\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}$;

тогда $$r=\frac{S\cdot\sin\alpha}{\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}(\sin\alpha+1)}=\frac{\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\cdot\cos\alpha}{(\sin\alpha+1)}=\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\sin(\pi/2-\alpha)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=$$
$$=\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.030. Равносторонний треугольник пересечен прямой, проходящей через середину одной из его сторон и составляющей с этой стороной острый угол α. В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

Решение.

Пусть $AB=BC=AC=a$, $\angle MEC=\alpha$, $AE=EC$ (рис. 12.33). Из ΔMKE, $\angle MKE=90^\circ$, $EK=MK\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. В ΔMKC, $\angle MKC=90^\circ$, $KC=$

$$=MK\cdot\operatorname{ctg}60^\circ=\frac{MK}{\sqrt{3}},\ EC=EK+KC=MK\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$MK\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{a}{2};\ MK=\frac{a}{2\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)},\ S_{\Delta ECM}=\frac{1}{2}\cdot MK\cdot EC=$$

$$=\frac{a^2}{8\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}.\ S_{ABME}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta ECM},\ S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4},\text{ тогда }\frac{S_{ABME}}{S_{ECM}}=$$

$$=\frac{\frac{2a^2\sqrt{3}}{2\cdot 4}-\frac{a^2}{8\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}{\frac{a^2}{8}\cdot\left(\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{2\sqrt{3}-\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}}}{\operatorname{ctg}\alpha+\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha+1=\frac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}$.

12.031. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AEF; точка E лежит на стороне BC, точка F — на стороне CD и $AE=AF$. Тангенс угла AEF равен 3. Найти косинус угла FAD.

Решение.

Имеем: $ABCD$ — квадрат, AEF — равнобедренный треугольник, $AE=AF$, $E\in BC$, $F\in CD$, $\operatorname{tg}\angle AEF=3$ (рис. 12.34); требуется найти $\cos\angle FAD$. Положим $\angle AEF=\alpha$, $\angle FAD=\beta$; тогда $\angle EAF=180^\circ-2\alpha$. Так как $\Delta ABE=\Delta ADF$ (по катету и гипотенузе), то $\beta=\frac{1}{2}\left(90^\circ-180^\circ+2\alpha\right)=$

$=\alpha-45^\circ$. Отсюда $\cos\beta=\cos\left(\alpha-45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha+\sin\alpha\right)$. Учитывая,

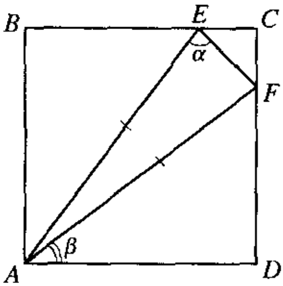


Рис. 12.34

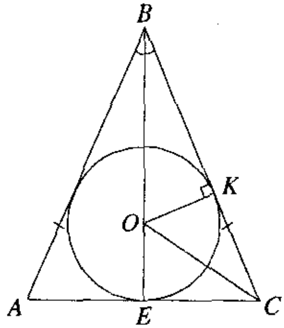


Рис. 12.35

что $\operatorname{tg}\alpha = 3$, находим $1+9 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha =$

$= \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

12.032. В равнобедренном треугольнике угол между боковыми сторонами равен α, радиус вписанной окружности равен r. Найти площадь треугольника.

Решение.

По условию в ΔABC $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$, r — радиус вписанной окружности. Из ΔOEC $\angle OEC = 90^\circ$ (рис. 12.35), $EC = r\cdot\operatorname{ctg}\angle ECO =$

$= r\cdot\operatorname{ctg}\left(\pi/4 - \dfrac{\alpha}{4}\right)$. Из ΔBEC, $\angle BEC = 90^\circ$, имеем $BE = EC\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} =$

$= r\cdot\operatorname{ctg}\left(\pi/4 - \dfrac{\alpha}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Тогда $S = \dfrac{2}{2}r^2\cdot\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} =$

$= r^2\cdot\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi - \alpha}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Ответ: $r^2\cdot\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi - \alpha}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

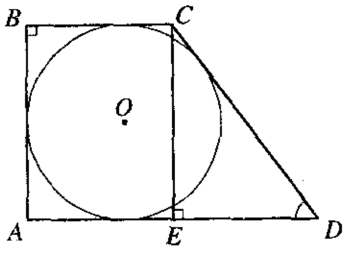


Рис. 12.36

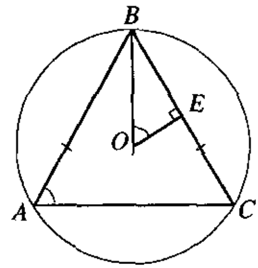


Рис. 12.37

12.033. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом α. Найти высоту трапеции, если периметр ее равен P.

Решение.

Пусть $\angle CDA = \alpha$, $\angle ABC = 90^\circ$, P — периметр трапеции (рис. 12.36) ($BC \| AD$). Так как $BC + AD = AB + CD$, а $P = BC + AD + AB + CD$, то $BC + AD = \frac{P}{2} = DC + AB$. Обозначим $AB = CE = x$. Из ΔCED, $\angle CED = 90^\circ$, $CD = \frac{x}{\sin\alpha}$, тогда $\frac{P}{2} = x + \frac{x}{\sin\alpha}$ и отсюда

$$x = \frac{P\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)} = \frac{P}{2}\frac{\sin\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{P\sin\alpha}{4\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\frac{P\sin\alpha}{4\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

12.034. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Найти отношение площади треугольника к площади описанного около него круга.

Решение.

По условию $AB = BC$, $\angle BAC = \alpha$. Пусть R — радиус описанного круга, тогда $S_{кр} = \pi R^2 = \pi BO^2$ (рис. 12.37). Пусть $AB = BC = x$, $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$, тогда $\angle OBC = 90^\circ - \alpha$. Из ΔBEO $\angle BEO = 90^\circ$,

$BO = \frac{BE}{\sin\alpha} = \frac{x}{2\sin\alpha}$, получим, что $S_{\text{кр}} = \frac{\pi x^2}{4\sin^2\alpha}$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \times$

$\times \sin\angle ABC = \frac{x^2}{2}\sin 2\alpha$. Тогда $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\text{кр}}} = \frac{4\cdot x^2\cdot\sin 2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{2\pi x^2} =$

$= \frac{2\sin 2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\pi}$.

Ответ: $\frac{2\sin 2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\pi}$.

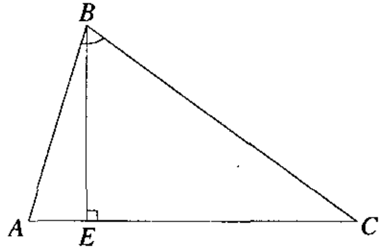


Рис. 12.38

12.035. В треугольнике даны длины двух сторон a и b и угол α между ними. Найти длину высоты, проведенной к третьей стороне.

Решение.

По условию $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$ (рис. 12.38), тогда $AC = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos a}$ (по теореме косинусов), $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a\cdot b\cdot\sin\alpha$ и

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC\cdot BE = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha}\cdot BE$; $BE = \frac{2S}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha}}$;

$BE = \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha}}$.

Ответ: $\frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha}}$.

12.036. Показать, что если в треугольнике отношение тангенсов двух углов равно отношению квадратов синусов этих же углов, то треугольник равнобедренный или прямоугольный.

Решение.

В ΔABC имеем $\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$; требуется доказать, что треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный. Из данного равенства получим $\sin A\sin^2 B\cos B - \cos A\sin B\sin^2 A = 0$ или

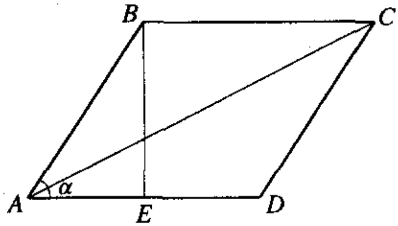


Рис. 12.39

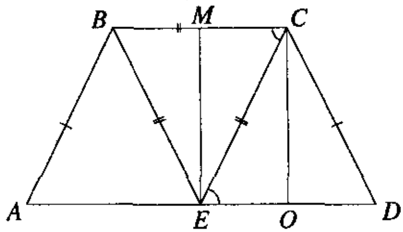


Рис. 12.40

$\sin A \sin B(\sin B \cos B - \cos A \sin A) = 0$. Но $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$, так как A и B — углы треугольника; следовательно, $\sin 2B - \sin 2A = 0$ или

$2\cos(A+B)\sin(B-A) = 0$, откуда $\left[\begin{array}{l}\cos(A+B)=0,\\ \sin(B-A)=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}A+B=\pi/2,\\ B-A=0.\end{array}\right.$

Итак, либо $C = \pi/2$, т.е. треугольник прямоугольный, либо $A = B$, т.е. треугольник равнобедренный. Что и требовалось доказать.

12.037. В ромб $ABCD$ и в треугольник ABC, содержащий его большую диагональ, вписаны окружности. Найти отношение радиусов этих окружностей, если острый угол ромба равен α.

Решение.

$ABCD$ — ромб (рис. 12.39), $\angle BAC = \alpha$ ($\alpha < 90^\circ$), r_1 — радиус окружности, вписанной в ромб, r_2 — радиус окружности, вписанной в ΔABC. Пусть $AB = a$. Проведем $BE \perp AD$. В ΔBEA $BE = 2r_1 = a\sin\alpha$, откуда $r_1 = \dfrac{a\sin\alpha}{2}$. Из ΔABC по теореме косинусов имеем $AC = \sqrt{2a^2 - 2a^2\cos(180^\circ - \alpha)} = 2a\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$P_{\Delta ABC} = 2a + 2a\cos\frac{\alpha}{2} = 4a\cos^2\frac{\alpha}{4}, \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha,$$

$$r_2 = \frac{2S_{\Delta ABC}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{a^2\sin\alpha}{4a\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{a\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}} \text{ и } \frac{r_1}{r_2} = \frac{a\sin\alpha\cdot 4\cos^2\frac{\alpha}{4}}{2a\sin\alpha} = 2\cos^2\frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $2\cos^2\dfrac{\alpha}{4}$.

12.038. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.

Решение.

По условию $AB = CD$, $BE = EC = BC$, $EM = CO$, $S_{\Delta BEC} = \frac{S_{ABCD}}{5}$,

тогда $AD = BC + 2 \cdot OD = BC + 2 \cdot CO \cdot \operatorname{ctg} \angle CDO$ (рис. 12.40). Из ΔEMC

$\angle EMC = 90^\circ$, $\angle MCE = 60^\circ$, $EM = CO = BC\frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда

$$AD = BC + 2 \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{ctg} \angle CDO,$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BC\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg} \angle CDO\right) BC^2 \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$S_{\Delta BEC} = BC^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, а $S_{ABCD} = 5S_{\Delta BEC}$ (по условию), поэтому

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg} \angle CDO\right) = \frac{5}{2},\ \operatorname{ctg} \angle CDO = \sqrt{3},\ \angle CDO = 30^\circ.$$

Ответ: 30°.

12.039. Высота BD правильного треугольника ABC продолжена за вершину B и на продолжении взят отрезок BF, равный стороне треугольника. Точка F соединена отрезком прямой с вершиной C. С помощью этого построения показать, что $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

Решение.

По условию $BF = AB = BC = AC$. В ΔFDC $\angle FDC = 90^\circ$,

$\angle DFC + \angle FCD = 90^\circ$, $\angle BFC + \angle DCB + \angle BCF = 90^\circ$, $\angle BCF = \angle BFC$ так как $BF = BC$ (по условию), тогда $2 \cdot \angle BFC + 60^\circ = 90^\circ$, $\angle BFC = 15^\circ$

(рис. 12.41). $BE \perp FC$, тогда $BE = FE \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{BE}{FE}$. Обозначим $BF = AB = BC = AC = x$, тогда $FC = \sqrt{2x^2(1 - \cos(180^\circ - 30^\circ))} =$

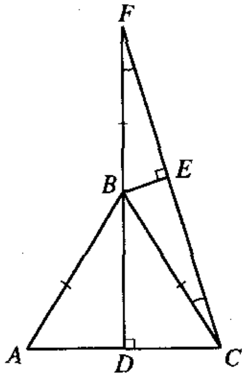


Рис. 12.41

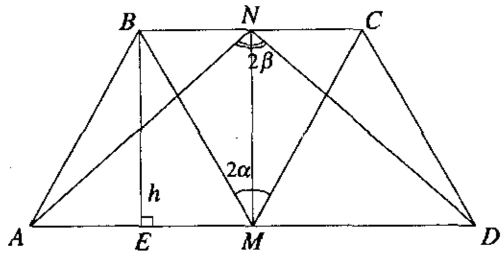


Рис. 12.42

$= x\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (по теореме косинусов). Из ΔBEC $\angle BEC = 90°$,

$BE = x^2 - \frac{(2+\sqrt{3})}{4}x^2 = \frac{x}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}15° = \frac{2x}{2x}\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}.$$

Ответ: $2-\sqrt{3}$.

12.040. Высота равнобедренной трапеции равна h. Верхнее основание трапеции из середины нижнего основания видно под углом 2α, а нижнее основание из середины верхнего — под углом 2β. Найти площадь трапеции в этом общем случае и вычислить ее без таблиц, если $h = 2$, $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$.

Решение.

В трапеции $ABCD$ имеем: $AB = CD$, $BC \| AD$, $M \in AD$, $AM = MD$, $N \in BC$, $BN = NC$, $BE \perp AD$, $BE = h$, $\angle BMC = 2\alpha$, $\angle AND = 2\beta$ (рис. 12.42). Так как $\Delta ABM = \Delta CMD$ и $\Delta ABN = \Delta NCD$ (по двум сторонам и углу между ними), то $BM = MC$ и $AN = ND$. Из ΔAMN и ΔBMN находим $AM = h\operatorname{tg}\beta$. $BN = h\operatorname{tg}\alpha$, отсюда $S_{ABCD} = (AM + BN)h =$

$= h^2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = \frac{h^2 \sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. При $h = 2$, $\alpha = 15°$ и $\beta = 75°$ имеем

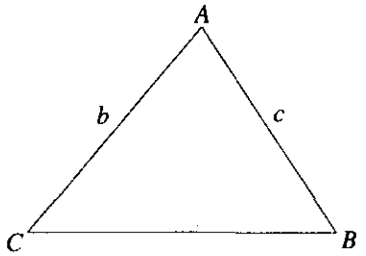


Рис. 12.43

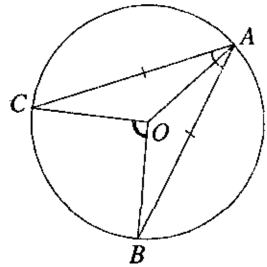


Рис. 12.44

$$S_{ABCD}=\frac{4\sin 90^\circ}{\cos 15^\circ \cos 75^\circ}=\frac{4}{\cos 15^\circ \sin 15^\circ}=\frac{8}{\sin 30^\circ}=16.$$

Ответ: $\frac{h^2\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 16.

12.041. Даны две стороны b и c треугольника и его площадь, равная $0{,}4bc$. Найти третью сторону.

Решение.

По условию $S_{\Delta ABC}=0{,}4\cdot b\cdot c$, где $b=AC$, $c=AB$ (рис. 12.43). Обозначим $CB=x$, тогда $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-c)(p-b)(p-x)}$, где $p=\frac{c+b+x}{2}$ (по формуле Герона) и $S_{\Delta ABC}=\sqrt{\frac{c+b+x}{2}\cdot\frac{b+x-c}{2}\cdot\frac{b+c-x}{2}\cdot\frac{x+c-b}{2}}=$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-x^2)^2}\quad 0{,}4bc=\frac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-x^2)^2}}{4};$$

$2{,}56b^2c^2=4b^2c^2-(b^4+2c^2b^2-2x^2b^2+c^4-2c^2x^2+x^4)$, отсюда

$x^4-2x^2(b^2+c^2)+b^4+c^4+0{,}56b^2c^2=0$, $D=4b^4+8b^2c^2+4c^4-4b^4-4c^4-$

$-2{,}24b^2c^2=5{,}76b^2c^2$, $x^2=\frac{2b^2+2c^2\pm 2{,}4b\cdot c}{2}\Rightarrow x=\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$.

Ответ: $\sqrt{b^2+c^2\pm 1{,}2bc}$.

12.042. Из точки, взятой на окружности радиуса R, проведены две равные хорды, составляющие вписанный угол, равный α ра-

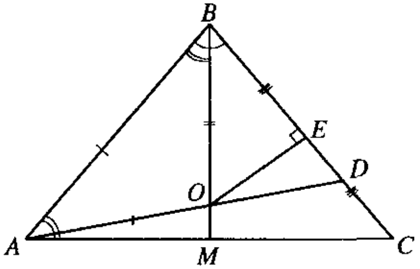


Рис. 12.45

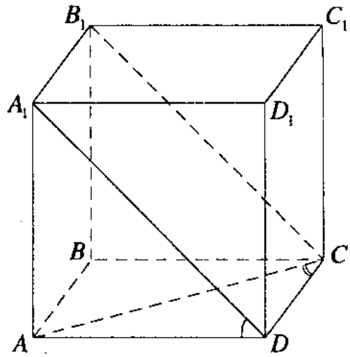


Рис. 12.46

дианам. Найти часть площади круга, заключенную внутри этого вписанного угла.

Решение.

По условию $AC=AB$, $\angle CAB=\alpha$, R — радиус окружности (рис. 12.44). $S_{CAB}=2S_{\Delta COA}+S_{COB}$; $S_{COB}=\frac{1}{2}CO^2\cdot\angle COB$, $\angle COB=2\angle CAB=2\alpha$, тогда $S_{COB}=\frac{1}{2}R^2\cdot 2\alpha=R^2\cdot\alpha$, $\angle COA=\frac{360^\circ-2\alpha}{2}=180^\circ-\alpha$. Имеем, что $S_{\Delta COA}=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{R^2}{2}\sin\alpha$; $S_{CAB}=R^2\cdot\sin\alpha+R^2\alpha=R^2(\alpha+\sin\alpha)$.

Ответ: $R^2(\alpha+\sin\alpha)$.

12.043. Через вершину A равнобедренного остроугольного треугольника ABC и центр описанной около этого треугольника окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найти длину AD, если $AB=BC=b$ и $\angle ABC=\alpha$.

Решение.

По условию $AB=BC=b$, $\angle ABC=\alpha$, O — центр описанной окружности. Рассмотрим ΔBEO, $\angle BEO=90^\circ$, $BO=\frac{b}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=AO$, $OE=BE\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (рис. 12.45). $AO=BO$, значит, $\angle BAO=\angle ABO=\frac{\alpha}{2}$, $\alpha+\frac{\alpha}{2}+\angle BDA=180^\circ$ и $\angle BDA=180^\circ-\frac{3\alpha}{2}$. Из

ΔOED, $\angle OED = 90^\circ$, $OD = \dfrac{OE}{\sin\angle BDA} = \dfrac{b}{2}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$;

$$AD = AO + OD = \frac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \frac{b\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{3\alpha}{2}} = \frac{b}{2}\left(\frac{\sin\dfrac{3\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}}\right)=$$

$$= b\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{3\alpha}{2}} = \frac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{b\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$.

12.044. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания равна d и составляет со стороной основания угол α. Через эту сторону и противоположную ей сторону верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол β. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

Решение.

По условию $AC = d$, $\angle ACD = \alpha$, $\angle A_1DA = \beta$ (рис. 12.46).

$S_б = 2S_{A_1D_1DA} + 2S_{D_1C_1CD}$. Из ΔADC $\angle ADC = 90^\circ$, $AD = d\sin\alpha$, $DC = d\cos\alpha$. Из ΔAA_1D, $\angle AA_1D = 90^\circ$, $AA_1 = d\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$, тогда $S_{AA_1D_1D} = AD\cdot A_1A = d^2\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; $S_{DD_1C_1C} = d^2\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. Имеем

$$S_б = 2d^2\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha) = 2\sqrt{2}d^2\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\alpha\left(\sin\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$= 2\sqrt{2}d^2\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\alpha\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$= 2\sqrt{2}d^2\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}d^2\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

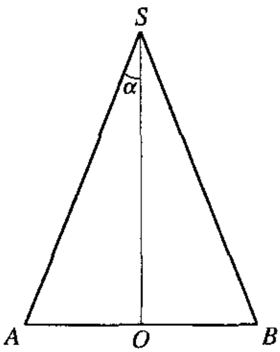


Рис. 12.47

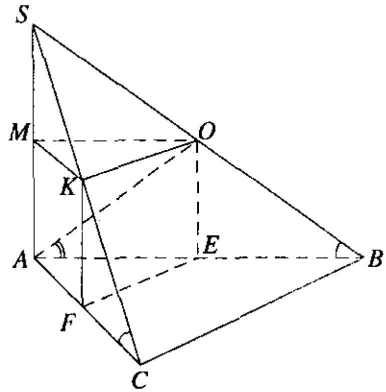


Рис. 12.48

12.045. Разность между образующей и высотой конуса равна d, а угол между ними равен α. Найти объем конуса.

Решение.

Пусть SO — высота конуса, SA и SB — его образующие (рис. 12.47). По условию $SA - SO = d$, $\angle ASO = \alpha$. Пусть $OA = R$. Из ΔSOA находим $SO = R\operatorname{ctg}\alpha$, $SA = \dfrac{R}{\sin\alpha}$. Используя условие, имеем $\dfrac{R}{\sin\alpha} - R\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{R(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} = R\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = d$, откуда $R = d\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. Получили $V_{\text{кон}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \dfrac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{3}\pi d^3 \operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}\pi d^3 \operatorname{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

12.046. Основанием пирамиды служит правильный треугольник. Одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания и равно l, два других образуют с плоскостью основания угол α. В пирамиду вписана прямая призма; три ее вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, три другие — на основании пирамиды. Диагональ боковой грани призмы составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту призмы.

Решение.

По условию $AB = BC = AC$, $SA \perp AB$, $SA \perp AC$, $\angle SBA = \alpha = \angle SCA$, $\angle OAE = \beta$, $SA = l$ (рис. 12.48). Из ΔSAB ($\angle SAB = 90°$): $AB = BC = AC = l \cdot \text{ctg}\alpha$, $SB = \frac{l}{\sin\alpha}$. Обозначим $AE = FE = AF = x$, тогда из ΔAEO имеем $OE = x \cdot \text{tg}\,\beta = MA$. Из ΔSMO ($\angle SMO = 90°$): $SM = x \cdot \text{tg}\alpha$, $SA = x \cdot \text{tg}\,\alpha + x \cdot \text{tg}\beta$, $x(\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta) = l$, $x = \frac{l}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}$, $OE = \frac{l\,\text{tg}\beta}{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta} = \frac{l\sin\beta}{\cos\beta\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)} = \frac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Ответ: $\frac{l\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

12.047. Диагонали осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найти объем усеченного конуса.

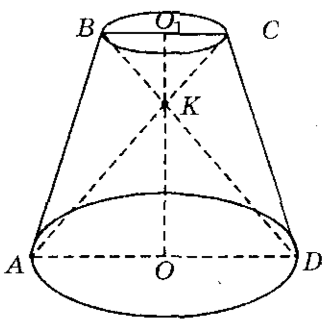


Рис. 12.49

Решение.

Пусть $ABCD$ — диагональное сечение (рис. 12.49). По условию, $AK : KC = 2 : 1$. Это значит, что $AK = \frac{2}{3}l$, $KC = \frac{1}{3}l$. Из ΔAOK найдем AO. Так как $\angle AKO = \frac{\alpha}{2}$, то $AO = AK\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$. Из ΔCO_1K : $O_1C = KC\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$. Высоту OO_1 найдем как сумму $O_1K + KO$, где $O_1K = KC\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}l\cos\frac{\alpha}{2}$, $KO = AK\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}l\cos\frac{\alpha}{2}$. Тогда

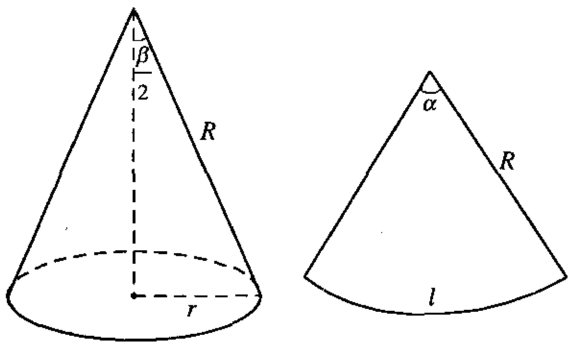


Рис. 12.50

$OO_1 = l\cos\frac{\alpha}{2}$. Объем $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)$, где $h = OO_1 = l\cos\frac{\alpha}{2}$,

$R_1 = AO = \frac{2}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$, $R_2 = O_1C = \frac{1}{3}l\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi l\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{4}{9}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{3}l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{27}\pi l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{7}{54}\pi l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$.

12.048. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, если центральный угол в развертке его боковой поверхности равен α радианам.

Решение.

Обозначим образующую конуса через R, а радиус окружности, лежащей в основании конуса, через r (рис. 12.50). Длина сектора, полученного в развертке, равна $l = R\alpha$. С другой стороны $2\pi r = l$. Это значит, что $2\pi r = R\alpha$, откуда $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$. Угол при вершине осевого сечения конуса обозначим β. Тогда $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r}{R} = \frac{\alpha}{2\pi}$ и $\beta = 2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$.

Ответ: $2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$.

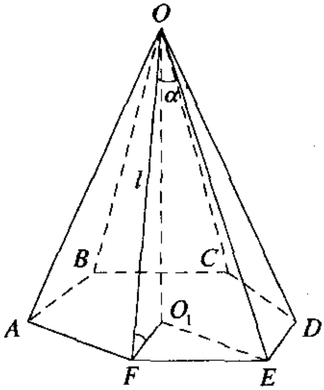


Рис. 12.51

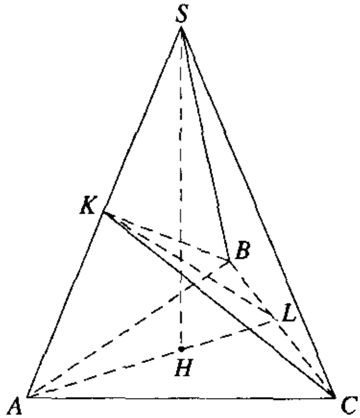


Рис. 12.52

12.049. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

Решение.

Пусть $OABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, $OO_1\perp(ABC)$, $\angle FOE=\angle OFO_1$ (рис. 12.51). Положим $OF=l$ и $\angle FOE=\alpha$;

тогда $FE=\sqrt{2l^2-2l^2\cos\alpha}=2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Учитывая, что $O_1F=FE$, в

ΔOO_1F имеем $\cos\alpha=\frac{2l\sin\frac{\alpha}{2}}{l}$; $-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+1=2\sin\frac{\alpha}{2}$; $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}-1=0$;

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\alpha=2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Ответ: $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

12.050. Через вершину C основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ проведена плоскость перпендикулярно боковому ребру SA. Эта плоскость составляет с плоскостью основания угол, косинус которого равен $2/3$. Найти косинус угла между двумя боковыми гранями.

Решение.

Пусть CKB — данное сечение (рис. 12.52). Это значит, что $KC \perp AS$, $KB \perp AS$, L — середина BC, $\angle ALK = \alpha$. Необходимо найти $\angle CKB = \beta$. Обозначим $AB = BC = AC = a$. ΔBKC — равнобедренный, у него $KB = KC$ (т.к. $CK \perp AS$, $KB \perp AS$, $AB = AC$, AK — общая). Тогда $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{LC}{KL}$. Из прямоугольного треугольника AKL (ведь $KL \perp AS$, т.к. KL лежит в плоскости KBC) найдем KL:

$KL = AL\cos\alpha$, где AL — высота правильного ΔABC, $AL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогда $KL = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{a\cdot 3}{2\cdot a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значение $\cos\beta = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

12.051. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$. Через сторону AC проведена плоскость под углом $\varphi(\varphi < \pi/2)$ к основанию. Найти площадь сечения, если известно, что в сечении получился треугольник.

Решение.

Пусть ALC — данное сечение (рис. 12.53), LK — перпендикуляр к AC, значит, $KB \perp AC$ (по теореме о 3-х перпендикулярах), K — середина AC. Из ΔABK $AK = AB\cos\alpha = a\cos\alpha$. $AC = 2AK = 2a\cos\alpha$.

Площадь ΔABC $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot AB = a^2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{a^2\sin 2\alpha}{2}$. Так как ΔABC является проекцией ΔALC, то $S_{ALC} = \frac{S_{ABC}}{\cos\varphi} = \frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$.

Ответ: $\frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$.

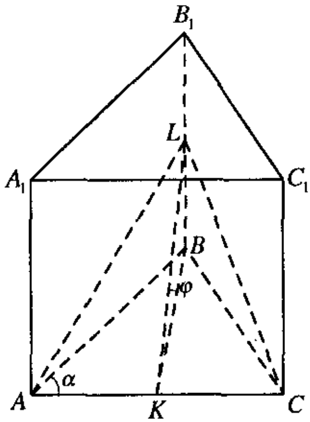


Рис. 12.53

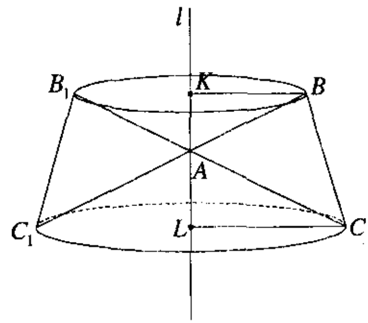


Рис. 12.54

12.052. Треугольник ABC вращается вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, проходящей вне его через вершину A и одинаково наклоненной к сторонам AB и AC. Найти объем тела вращения, если $AB = a$, $AC = b$ и $\angle BAC = \alpha$.

Решение.

Объем данного тела можем получить, если из объема усеченного конуса с диаметрами BB_1 и CC_1 в основаниях отнимем объемы конусов с вершиной в A и диаметром в основании BB_1 и с вершиной в A и диаметром в основании CC_1 (рис. 12.54). Опустим перпендикуляры BK и CL на прямую l. Тогда $\angle KAB = \angle CAL = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Тогда

$KB = AB\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$, а $CL = AC\sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = b\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

$AK = AB\cos\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = a\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $AL = b\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Высота усеченного конуса $KL = AK + AL = \sin\dfrac{\alpha}{2}(a+b)$. Объем усеченного конуса

$$V' = \frac{1}{3}\pi\cdot KL\cdot\left(KB^2 + KB\cdot LC + LC^2\right) = \frac{1}{3}\pi\sin\frac{\alpha}{2}(a+b)\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Объем $V_1=\frac{1}{3}\pi AK\cdot KB^2=\frac{1}{3}\pi a^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Объем $V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot AL\cdot LC^2=$

$=\frac{1}{3}\pi b^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда объем полученного тела вращения

$$V=V'-V_1-V_2=\frac{1}{3}\pi\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3-a^3-b^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\pi ab(a+b)\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{3}ab(a+b)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}ab(a+b)\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

12.053. Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Решение.

Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $S_{\text{бок}}=5S_{\Delta ABC}$ (рис. 12.55); требуется найти $\angle ASB$. Пусть $SA=l$ и $\angle ASB=\alpha$; тогда $S_{\text{бок}}=\frac{3}{2}l^2\sin\alpha$. Из ΔASB по теореме косинусов находим

$AB^2=2l^2-2l^2\cos\alpha=4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; тогда $S_{\Delta ABC}=\frac{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{4}=$

$=l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Используя условие, имеем: $\frac{3}{2}l^2\sin\alpha=5l^2\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

$3\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=5\sqrt{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{5}$; $\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$, т.е. $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}$.

12.054. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус так, что вершина второго конуса совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие обоих конусов взаимно перпендикулярны. Найти объем вписанного конуса.

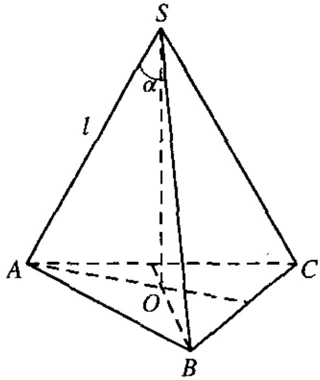


Рис. 12.55

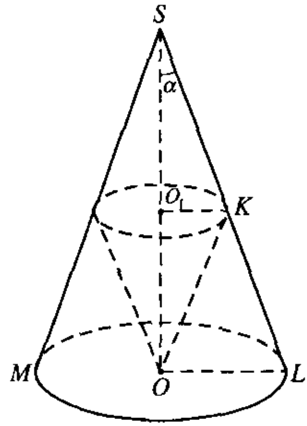


Рис. 12.56

Решение.

Пусть $SO = H$, $\angle LSO = \alpha$ (рис. 12.56), $SL \perp KO$; ΔSOK — прямоугольный. Значит, $KO = SO\sin\alpha = H\sin\alpha$. Из ΔSOL $\angle OLS = 90^\circ - \alpha$. Тогда $\angle LOK = \alpha$. Отсюда $\angle O_1KO = \angle LOK = \alpha$ (как внутренние накрест лежащие). Тогда $O_1K = OK\cos\angle O_1KO = H\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}H\sin 2\alpha$.

Из ΔO_1KO $OO_1 = OK\sin\alpha = H\sin^2\alpha$. Объем

$$V = \frac{1}{3}\pi O_1K^2 OO_1 = \frac{1}{3}\pi H\sin^2\alpha\frac{1}{4}H^2\sin^2 2\alpha = \frac{1}{12}\pi H^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{12}\pi H^3\sin^2\alpha\sin^2 2\alpha$.

12.055. Сторона большего основания правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна a. Боковое ребро и диагональ пирамиды составляют с плоскостью основания углы, равные соответственно α и β. Найти площадь меньшего основания пирамиды.

Решение.

Имеем, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная усеченная пирамида, $AB = a$, $OO_1 \perp (ABC)$, $B_1E \| D_1F \| OO_1$, $\angle D_1DE = \alpha$,

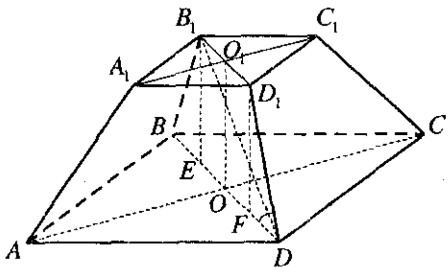


Рис. 12.57

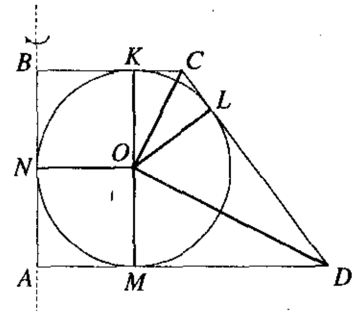


Рис. 12.58

$\angle B_1DE = \beta$ (рис. 12.57). Пусть $A_1B_1 = x$; тогда $B_1D_1 = x\sqrt{2}$, $BD = a\sqrt{2}$,

$$FD = OD - OF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{2},$$

$$ED = OD + OE = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}.$$ Из ΔD_1FD находим

$$D_1F = FD\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a-x)\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$ а из ΔB_1ED получим

$$B_1E = ED\operatorname{tg}\beta = \frac{(a+x)\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta.$$ Так как $D_1F = B_1E = OO_1$, то

$(a-x)\operatorname{tg}\alpha = (a+x)\operatorname{tg}\beta$, $x(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) = a(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$, т.е. $x = \dfrac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Получили $S_{A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

Ответ: $\dfrac{a^2\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.056. Радиус круга, вписанного в прямоугольную трапецию, равен r, острый угол трапеции равен α. Эта трапеция вращается вокруг меньшей боковой стороны. Найти боковую поверхность тела вращения.

Решение.

Пусть $KLMN$ — точки касания круга с трапецией, причем $KO = OM = OL = ON = r$, $\angle MDC = \alpha$ (рис. 12.58). Пусть трапеция вращается вокруг стороны BA — получим усеченный конус. Боковая поверхность его $S_{бок}=\pi(R_1+R_2)l$, где $R_1=BC$, $R_2=AD$, $l=CD$. Так как OD — биссектриса $\angle MDC$ и ΔOMD — прямоугольный, то

$DM=\dfrac{r}{\operatorname{tg}\alpha/2}=r\operatorname{ctg}\alpha/2$; $AM=r$, тогда $AD=AM+MD=r\left(1+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

$\angle BCD=180^\circ-\angle ADC=180^\circ-\alpha$. Тогда из ΔKCO,

$KC=\dfrac{KO}{\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}}=r\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot CB$, $BK+CK=r+r\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. $CD=l=\dfrac{2r}{\sin\alpha}$.

Тогда

$$S_{бок}=\pi\left(r+r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+r+r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{2r}{\sin\alpha}=\frac{2\pi r^2}{\sin\alpha}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}(1+\sin\alpha)=\frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\right)=\frac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\sin\frac{\pi/2+\alpha}{2}\cos\frac{\pi/2-\alpha}{2}=$$

$$=\frac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $\dfrac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

12.057. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом α. Диагональ большей боковой грани равна d и образует с боковым ребром угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть ΔABC — прямоугольный, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC=\alpha$ (рис. 12.59). По условию $BA_1=d$, $\angle BA_1A=\beta$. Тогда из ΔBA_1A высота призмы $AA_1=d\cos\beta$, а $AB=d\sin\beta$, так как AB — гипотенуза ΔABC, то $AC=AB\cos\alpha=d\sin\beta\cos\alpha$. Площадь основания

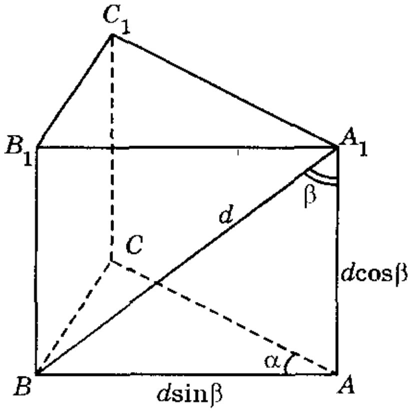


Рис. 12.59

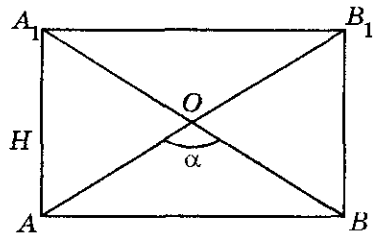


Рис. 12.60

$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha=\frac{1}{2}d\sin\beta\cdot d\sin\beta\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}d^2\sin 2\alpha\sin^2\beta.$$

Объем $V=S_{\text{осн}}\cdot AA_1=\frac{1}{8}d^3\sin^2\beta\cos\beta\sin 2\alpha=\frac{1}{8}d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha.$

Ответ: $\frac{d^3\sin\beta\sin 2\beta\sin 2\alpha}{8}$.

12.058. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом, равным α, обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V. Найти высоту цилиндра.

Решение.

Пусть AA_1B_1B — осевое сечение цилиндра, $\angle AOB=\alpha$ (рис 12. 60). Положим $AA_1=H$; тогда, учитывая, что $\angle OAB=\angle OBA=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, из ΔA_1AB находим $AB=H\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $V=\pi\left(\frac{H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}\right)^2\cdot H=$

$=\frac{\pi H^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}$, откуда $H=\sqrt[3]{\frac{4V\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{4V\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}{\pi}}$.

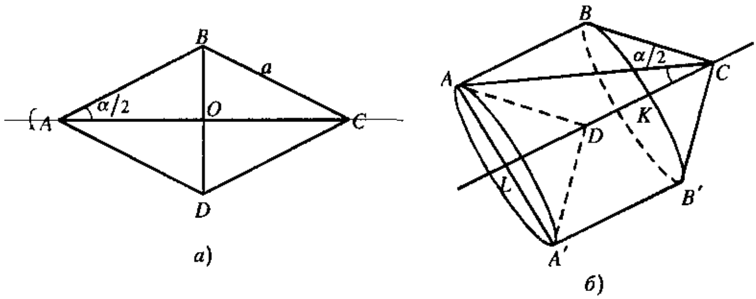


Рис. 12.61

12.059. Найти острый угол ромба, зная, что объемы тел, полученных от вращения ромба вокруг его большей диагонали и вокруг его стороны, относятся как $1:2\sqrt{5}$.

Решение.

Обозначим сторону ромба a, а острый угол α (рис. 12.61, *а*). Это значит, что $\angle DAB=\alpha$, AC — большая диагональ. При вращении ромба вокруг большей диагонали получится тело, состоящее из 2-х равных конусов (рис. 12.61, *б*). Объем каждого конуса $V'=\frac{1}{3}S'_{\text{осн}}\cdot h'$, где h' — высота конуса, равная AO, а $S_{\text{осн}}=\pi r^2$, где $r=BO$. Из ΔABO $AO=a\cos\frac{\alpha}{2}$, $BO=a\sin\frac{\alpha}{2}$. Значит, $V_1=\frac{2}{3}\pi\left(a^2\sin\frac{\alpha}{2}\right)a^2\cos\frac{\alpha}{2}=$ $=\frac{2\pi}{3}a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Объем тела V_2, полученного при вращении ромба $ABCD$ вокруг стороны DC, можно найти как объем цилиндра с центрами окружностей в основаниях K и L (ведь конусы с вершинами C и D равны). $V_2=S''_{\text{осн}}\cdot h''$, где $h''=KL=CD=a$. Площадь основания $S_{\text{осн}}=\pi AL^2$; т.к. AC — диагональ ромба, то $AC=2a\cos\frac{\alpha}{2}$, а из ΔALC $AL=AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2a\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Тогда $S_{\text{осн}}=\pi\cdot 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=\pi a^2\sin^2\alpha$. Тогда объем $V_2=\pi a^3\sin^2\alpha$.

По условию $V_1 : V_2 = 1 : 2\sqrt{5}$, это значит, что

$$\frac{2\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{3\cdot 4\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$, откуда $3\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}$. Значит $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2\cdot\frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9}$. Значит, $\alpha = \arccos\frac{1}{9}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{9}$.

12.060. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом β. Найти объем пирамиды.

Решение.

По условию $SABC$ — треугольная пирамида, $AB = BC = a$, $\angle ABC = \alpha$, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$ (рис. 12.62). Так как $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$ (по катету и прилежащему углу), то $OA = OB = OC$, т.е. O — центр окружности, описанной около ΔABC. Пусть $OA = R$; тогда $AB = 2R\sin\angle ACB$ или

$a = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, а $R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔSOA находим

$SO = \frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, откуда

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \frac{1}{6}a^2\sin\alpha\frac{a\,\mathrm{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\beta.$$

Ответ: $\frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\beta$.

12.061. Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция, у которой основания равны a и b ($a > b$), а острый угол равен α. Плоскость, проходящая через большее основание верхней

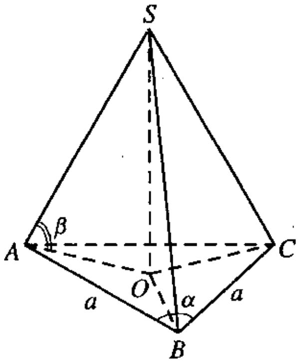


Рис. 12.62

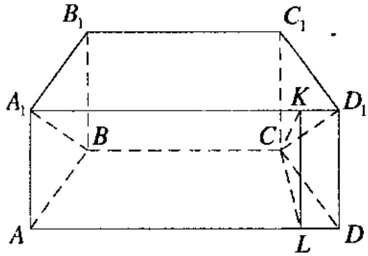


Рис. 12.63

трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть $AD = a$, $BC = b$, $\angle ADC = \alpha$ (рис. 12.63). Проведем $CK \perp A_1D_1$, из точки K опустим перпендикуляр KL на AD, значит, $CL \perp AD$ (по теореме о 3-х перпендикулярах); $\angle KCL = \beta$. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $LD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{a-b}{2}$. Из ΔCLD $CL = LD \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Тогда площадь основания $S_{осн} = \frac{a+b}{2} \cdot CL = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha =$

$= \frac{a^2 - b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. Из ΔCKL ($\angle CLK = 90°$) $KL = CL \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$.

Объем призмы $V = \frac{a^2 - b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{(a^2 - b^2)(a-b)}{8}\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Ответ: $\frac{(a^2 - b^2)(a-b)}{8}\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

12.062. Угол между диагоналями основания прямоугольного параллелепипеда равен α. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найти высоту параллелепипеда, если его объем равен V.

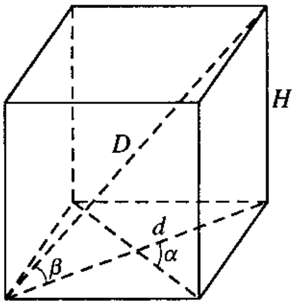


Рис. 12.64

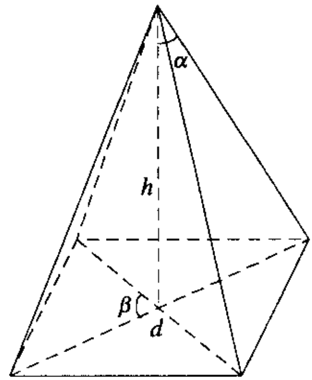


Рис. 12.65

Решение.

Объем параллелепипеда $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, где H — высота (рис. 12.64).

Из рисунка видно, что $d = \dfrac{H}{\operatorname{tg}\beta}$. Так как в основании параллелепипеда лежит прямоугольник, то его диагонали равны, а площадь основания $S_{\text{осн}} = \dfrac{1}{2}d^2 \sin\alpha = \dfrac{1}{2}\dfrac{H^2}{\operatorname{tg}^2\beta}\sin\alpha$. Подставляя все в формулу, получим: $V = \dfrac{1}{2}\dfrac{H^3}{\operatorname{tg}^2\beta}\sin\alpha$. Откуда $H^3 = \dfrac{2V\operatorname{tg}^2\beta}{\sin\alpha}$, значит, $H = \sqrt[3]{\dfrac{2V}{\operatorname{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\dfrac{2V}{\operatorname{ctg}^2\beta\sin\alpha}}$.

12.063. Каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом β между диагоналями. Найти объем пирамиды, если ее высота равна h.

Решение.

Так как каждое из боковых ребер четырехугольной пирамиды образует с высотой угол α, то вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника, лежащего в основании (рис.12.65). Таким образом, если d — длина диагонали, то $\frac{d}{2}=h\operatorname{tg}\alpha$ и

площадь основания $S=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\sin\beta=\frac{1}{2}d^2\sin\beta=2h^2\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta$.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S\cdot h=\frac{1}{3}2h^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta$.

Ответ: $\frac{2}{3}h^3\operatorname{tg}^2\alpha\sin\beta$.

12.064. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через одну из сторон этого квадрата и через вершину конуса, при пересечении с поверхностью конуса образует равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине равен α. Найти объем конуса.

Решение.

Пусть $ABCD$ — данный квадрат со стороной a (рис. 12.66) и пусть секущая плоскость проходит через сторону AD. Тогда по условию $\angle ASD=\alpha$. Пусть L — середина

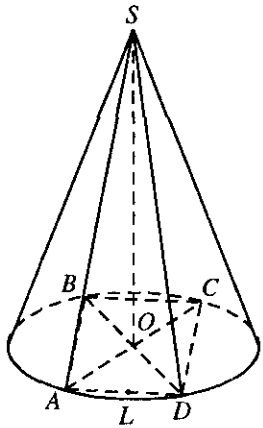


Рис. 12.66

AD. Это значит, что $AL=\frac{a}{2}$. Так как ΔASD — равнобедренный, то

$AS=\frac{AL}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Диагональ AC квадрата является диаметром

окружности: $2a^2=d^2$. Откуда $d=a\sqrt{2}$, $AO=r=\frac{d}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда

высота $SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{a^2}{2}}=\sqrt{\frac{a^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Площадь основания конуса $S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi \frac{a^2}{2}$. Тогда объем

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$.

12.065. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно l и составляет с плоскостью основания угол α. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида. $SA = l$, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = \alpha$ (рис. 12.67). Из ΔSAO находим $SO = l\sin\alpha$, $AO = l\cos\alpha$, откуда $AB = AO\sqrt{3} = l\sqrt{3}\cos\alpha$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{4};$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\alpha}{4} \cdot l\sin\alpha = \frac{l^3\sqrt{3}\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}.$$

Ответ: $\dfrac{l^3\sqrt{3}\sin 2\alpha\cos\alpha}{8}$.

12.066. Через диагональ нижнего основания правильной четырехугольной призмы и противоположную вершину ее верхнего основания проведена плоскость. Угол между равными сторонами сечения равен α. Найти отношение высоты призмы к стороне основания.

Решение.

Обозначим сторону основания призмы a (ведь в основании призмы лежит квадрат, т.к. призма правильная). Диагональ квадрата $d = a\sqrt{2}$ (рис. 12.68). Так как сечение — равнобедренный треугольник со сторонами l и углом между ними α, то $l = \frac{d}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} = \dfrac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

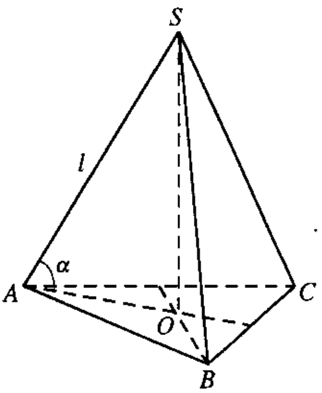


Рис. 12.67

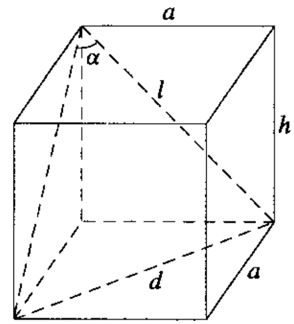


Рис. 12.68

Тогда высота призмы

$$h=\sqrt{l^2-a^2}=\sqrt{\frac{d^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-a^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-a^2}=\frac{a\sqrt{2\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда отношение $\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

12.067. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с углом α при вершине. Диагональ грани, противоположной данному углу, равна l и составляет с плоскостью основания угол β. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, $AC=CB$, $\angle ACB=\alpha$, $A_1B=l$, $\angle A_1BA=\beta$ (рис. 12.69), нужно найти $V_{\text{пр}}=S_{\Delta ABC}\cdot A_1A$. Из ΔA_1AB находим $AA_1=l\sin\beta$, $AB=l\cos\beta$, а из ΔADC имеем

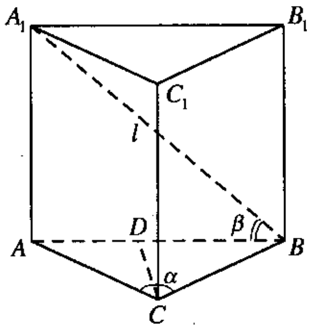


Рис. 12.69

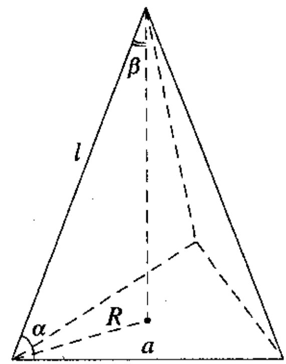


Рис. 12.70

$DC = AD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}l\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{2}l\cos\beta\cdot\frac{1}{2}l\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot l\sin\beta = \frac{1}{4}l^3\cos^2\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta = \frac{1}{8}l^3\sin2\beta\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}l^3\sin2\beta\cos\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

12.068. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды и допустимые значения α.

Решение.

Обозначим сторону основания через a (рис. 12.70), а боковое ребро — через l. Тогда из равнобедренного треугольника, являющегося боковой гранью пирамиды, найдем $l = \frac{a}{2\cos\alpha}$. Так как пирамида правильная, то основанием высоты является центр, описанной около треугольника-основания пирамиды окружности. А радиус этой окружности $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда $\sin\beta = \frac{R}{l} = \frac{a\sqrt{3}\cdot2\cos\alpha}{3a} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$.

Так как $0<\beta<\pi/2$, то $0<\sin\beta<1$, т.е. $0<\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}<1$ или $\begin{cases}\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}<1,\\ \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}>0.\end{cases}$

Решая эту систему и учитывая, что $0<\alpha<\pi/2$, получим, что $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$; $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

12.069. Плоскость, проведенная параллельно оси цилиндра, делит окружность основания в отношении $m:n$. Площадь сечения равна S. Найти боковую поверхность цилиндра.

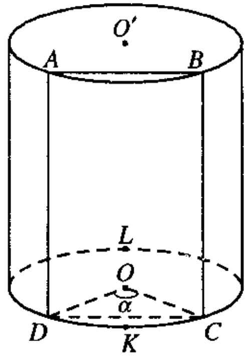


Рис. 12.71

Решение.

Пусть $ABCD$ — данное сечение (рис. 12.71). Пусть длины дуг DLC и $C\breve{K}D$ относятся как $m:n$. Это значит, что $DLC=mx$, $CKD=nx$. Так как $DLC+CKD=2\pi R$, где $R=OD$ — радиус окружности лежащей в основании цилиндра, то $(m+n)x=2\pi R$, откуда $x=\frac{2\pi R}{m+n}$. Значит, $DLC=\frac{2\pi Rm}{m+n}$, $CKD=\frac{2\pi Rn}{m+n}$. С другой стороны, $CKD=R\alpha$, где α — радианная мера центрального угла для дуги CKD. Это значит $\frac{2\pi Rn}{m+n}=R\alpha$, откуда $\alpha=\frac{2\pi n}{m+n}$. Так как ΔDOC — равнобедренный, то $DC=2DO\sin\frac{\alpha}{2}=2R\sin\frac{\pi n}{m+n}$. Площадь S сечения

$S=DC\cdot AD=2R\sin\frac{\pi n}{m+n}\cdot H$, откуда $H=\frac{S}{2R\sin\frac{\pi n}{m+n}}$. Длина всей окружности $L=2\pi R$. Тогда $S_{бок}=L\cdot H=\frac{S}{2R\sin\frac{\pi n}{m+n}}\cdot 2\pi R=\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi n}{m+n}}$.

Ответ: $\frac{\pi S}{\sin\frac{\pi n}{m+n}}$.

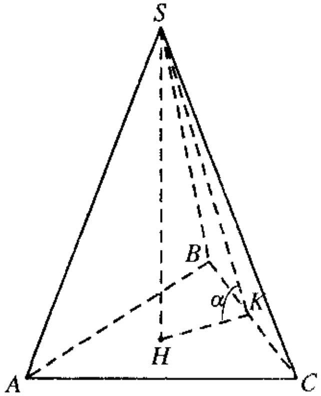


Рис. 12.72

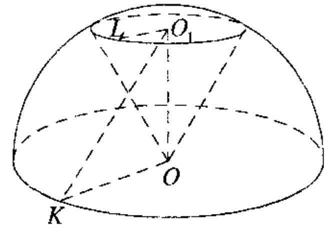


Рис. 12.73

12.070. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

Решение.

По условию $\angle ASC = \angle CSB = \angle ASB = 90^\circ$ (рис. 12.72). Кроме того, $AS = SB = SC$, ΔABC — правильный; $SK \perp BC$, $HK \perp BC$, где H — основание высоты. Так как ΔSCB — прямоугольный и равнобедренный, то $\angle SCB = 45^\circ$. Обозначим SC через a, тогда $SK = SC\sin\angle SCB = a\sin 45^\circ = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $BC = a\sqrt{2}$ (как гипотенуза ΔSCB); HK является радиусом вписанной в ΔABC окружности, значит, $HK = r = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{6}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{HK}{SK} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{6a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Значит, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12.071. В полушар вписан конус; вершина конуса совпадает с центром окружности, являющейся основанием полушара; плоскости оснований конуса и полушара параллельны. Прямая, проходящая через центр основания конуса и произвольную точку окружности большого круга полушара, составляет с плоскостью основания конуса угол α. Найти отношение объемов полушара и конуса.

Решение.

Обозначим радиус круга, лежащего в основании полушара, через R, т.е. $OK = R$, а в основании конуса — через r, т.е. $O_1L = r$, $\angle O_1KO = \alpha$ (рис. 12.73). Тогда высота O_1O конуса будет равна $h = KO \cdot \operatorname{tg}\alpha = R\operatorname{tg}\alpha$. С другой стороны, образующая конуса OL является радиусом полушара. Тогда $LO_1^2 = OL^2 - OO_1^2$ или $r^2 = R^2 - h^2$, это значит, что $r = \sqrt{R^2 - R^2\operatorname{tg}^2\alpha} = R\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = R\dfrac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos\alpha}$. Тогда объем конуса $V_к = \dfrac{1}{3}S_{осн} \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot R\operatorname{tg}\alpha$. Объем полушара $V_п = \dfrac{2}{3}\pi R^3$. Отношение $\dfrac{V_п}{V_к} = \dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}$.

12.072. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Высота пирамиды равна H. Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный β. Найти объем пирамиды.

Решение.

Так как все боковые ребра наклонены под одинаковым углом к плоскости основания, то основанием высоты данной пирамиды будет являться центр описанной около основания окружности. Так как в основании лежит прямоугольный треугольник, то центром описанной около него окружности будет являться середина гипотенузы (рис. 12.74). Тогда $SK = H$, $\angle SCK = \beta$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = \alpha$. Тогда из ΔSCK $CK = R = H/\operatorname{tg}\beta$, гипотенуза $AB = 2R = \dfrac{2H}{\operatorname{tg}\beta}$, $AC = AB\cos\alpha = \dfrac{2H\cos\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.

Объем пирамиды $V = \dfrac{1}{3}S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC\sin\alpha =$

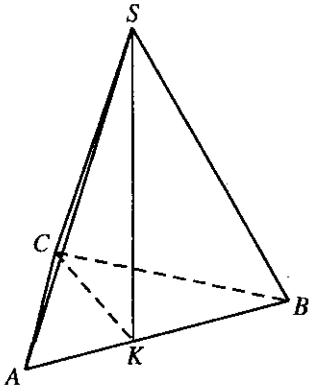


Рис. 12.74

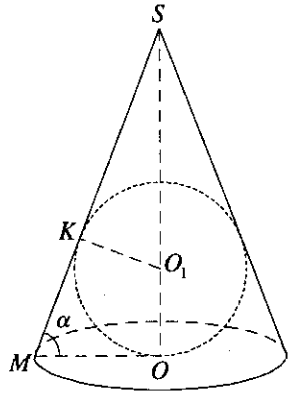


Рис. 12.75

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2H}{\operatorname{tg}\beta}\cdot\frac{2H\cos\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\sin\alpha.$$ Тогда объем $V=\frac{H^2\sin2\alpha}{3\operatorname{tg}^2\beta}\cdot H=\frac{H^3\sin2\alpha}{3\operatorname{tg}^2\beta}$.

Ответ: $\frac{H^3\sin2\alpha}{3\operatorname{tg}^2\beta}$.

12.073. Образующая конуса равна a, расстояние от вершины конуса до центра вписанного шара равно b. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

Решение.

По условию $SM=a$, $SO_1=b$ (рис. 12.75). Точка K — точка касания конуса и шара. $\Delta SKO_1 \sim \Delta SOM$ ($\angle S$ — общий, $\angle SKO_1=\angle SOM=90°$). Тогда $\angle KO_1S=\alpha$. Отсюда из ΔSKO_1 $r=KO_1=b\cos\alpha$. Из ΔMSO

$\sin\alpha=\frac{SO}{MC}=\frac{b+r}{a}=\frac{b(1+\cos\alpha)}{a}=\frac{2b\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a}$. Учитывая, что $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$,

получим $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2b\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a}$. Откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{b}{a}$, $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

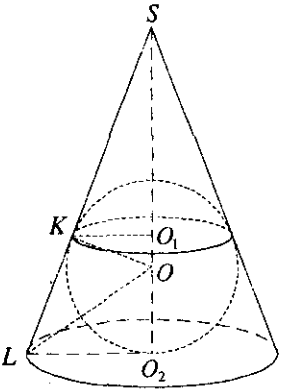


Рис. 12.76

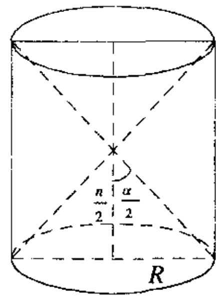


Рис. 12.77

12.074. В конус вписан шар. Отношение радиуса окружности касания шаровой и конической поверхностей к радиусу основания конуса равно k. Найти косинус угла между образующей конуса и плоскостью основания.

Решение.

Из условия задачи радиус окружности касания шаровой и конической поверхностей будет KO_1, радиус основания конуса LO_2 (рис. 12.76). $\angle SLO_2 = \alpha$. Из рисунка видно, что $\Delta SKO \sim \Delta SO_2L$, а $\Delta SKO \sim \Delta KO_1O$, значит, $\angle KOO_1 = \angle SLO_2 = \alpha$. Тогда из ΔKO_1O $KO = \frac{KO_1}{\sin\alpha}$. Из ΔLOO_2 $OO_2 = LO_2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Так как KO и OO_2 равны, то $\frac{KO_1}{\sin\alpha} = LO_2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. $\frac{KO_1}{LO_2} = \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = k$. Тогда $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{k}{2}}$.

А значит, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\frac{k}{2} = 1 - k$.

Ответ: $1-k$.

12.075. Площадь основания цилиндра относится к площади его осевого сечения как $m:n$. Найти острый угол между диагоналями осевого сечения.

Решение.

Пусть радиус окружности, лежащей в основании цилиндра, равен R, а высота H (рис. 12.77). Тогда $S_{осн} = \pi R^2$, $S_{сеч} = 2RH$. Так как $S_{осн} : S_{сеч} = \pi R^2 : 2RH = m : n$, то $\frac{R}{2H} = \frac{m}{\pi n}$. Так как $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2R}{H}$, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4m}{\pi n}$. Поскольку α — острый угол, имеем $\frac{4m}{\pi n} < 1$, т.е. $\frac{m}{n} < \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{4m}{\pi n}$. Если же $\frac{m}{n} > \frac{\pi}{4}$, то $\frac{4m}{\pi n} > 1$ и искомым острым углом является $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{\pi n}{4m}$.

Ответ: $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{4m}{\pi n}$ при $\frac{m}{n} < \frac{\pi}{4}$; $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{\pi n}{4m}$ при $\frac{m}{n} > \frac{\pi}{4}$.

12.076. В основании прямой призмы лежит ромб с острым углом α. Отношение высоты призмы к стороне основания равно k. Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания.

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$ $(\alpha < 90°)$, $AA_1 : AB = k$, $C_1E = EC$, $ADEF$ — сечение призмы (рис. 12.78); требуется найти $\angle(ABC);(FAD)$. Пусть $AB = a$; тогда $AA_1 = ka$. Проведем $BK \perp AD$; тогда $FK \perp AD$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $\angle FKB$ — линейный угол между сечением и основанием $ABCD$. Из ΔAKB найдем $BK = a\sin\alpha$; так как $EF \parallel AD$, то $FB = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}ka$. Наконец, из ΔFBK получим $\operatorname{tg}\angle FKB = \frac{FB}{BK} = \frac{ka}{2a\sin\alpha} = \frac{k}{2\sin\alpha}$, откуда $\angle FKB = \operatorname{arctg}\frac{k}{2\sin\alpha}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{k}{2\sin\alpha}$.

12.077. Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как 1 : 2, острый угол в основании равен α. Найти угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания, если высота параллелепипеда равна большей диагонали основания.

Решение.

Обозначим стороны основания параллелепипеда через a и b. Тогда $a : b = 1 : 2$. Большая диагональ основания

$d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$. Учитывая, что

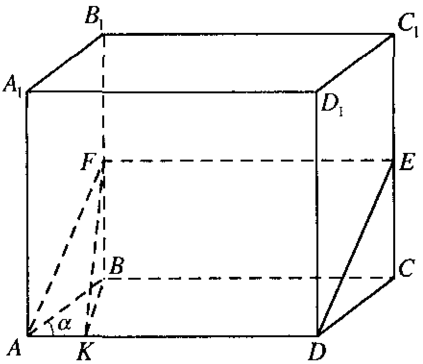


Рис. 12.78

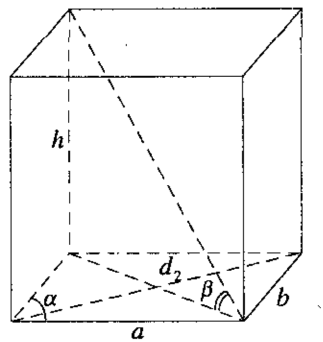


Рис. 12.79

$b=2a$, $d_2=\sqrt{5a^2+4a^2\cos\alpha}$. Меньшая диагональ основания $d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}=\sqrt{5a^2-4a^2\cos\alpha}$. Так как высота $h=d_2=\sqrt{5a^2+4a^2\cos\alpha}$, то $\operatorname{tg}\beta$ (рис. 12.79) можно найти как

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{d_1}=\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$.

12.078. Отношение одной из сторон основания треугольной пирамиды к каждому из остальных пяти ее ребер равно k. Найти двугранный угол между двумя равными боковыми гранями пирамиды и допустимые значения k.

Решение.

Пусть $SABC$ — треугольная пирамида, $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AC}{SA}=\dfrac{AC}{SB}=$ $=\dfrac{AC}{SC}=k$ (рис. 12.80). Так как $AB=BC=SA=SB=SC=\dfrac{AC}{k}$, то $\Delta ASB=\Delta BSC$ (по трем сторонам). Проведем $AD\perp SB$ и соединим точки D и C. Тогда $\Delta ASD=\Delta SDC$ ($SA=SC$, сторона SD —

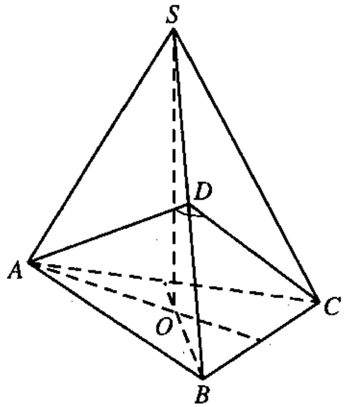


Рис. 12.80

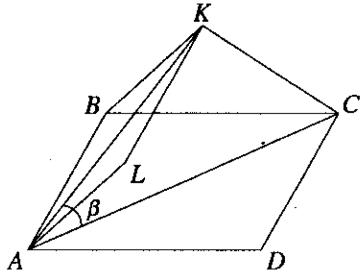


Рис. 12.81

общая и $\angle ASD = \angle DSC$), откуда следует, что $\angle SDC = \angle SDA = 90°$. Поэтому $\angle ADC$ — линейный угол двугранного угла $ASDC$, т.е. искомый угол. Из ΔADC по теореме косинусов находим

$AC^2 = 2AD^2 - 2AD^2 \cos\angle ADC$, где $AD = \frac{SA\sqrt{3}}{2} = \frac{AC\sqrt{3}}{2k}$, так как

ΔASB — равносторонний. Значит, $AC^2 = 2 \cdot \frac{3AC^2}{4k^2}(1 - \cos\angle ADC)$;

$1 - \cos\angle ADC = \frac{2k^2}{3}$; $2\sin^2\frac{\angle ADC}{2} = \frac{2k^2}{3}$; $\sin\frac{\angle ADC}{2} = \sqrt{\frac{k^2}{3}} = \frac{k\sqrt{3}}{3}$;

$\angle ADC = 2\arcsin\frac{k\sqrt{3}}{3}$, где $0 < \frac{k\sqrt{3}}{3} < 1$, т.е. $0 < k < \sqrt{3}$.

Ответ: $2\arcsin\frac{k\sqrt{3}}{3}$; $0 < k < \sqrt{3}$.

12.079. Плоскость квадрата составляет угол α с плоскостью, проведенной через одну из его сторон. Какой угол составляет с той же плоскостью диагональ квадрата?

Решение.

Пусть $ABCD$ — квадрат, $ABKL$ — данная плоскость, $BC \perp AB$, $BK \perp AB$, $\angle CBK = \alpha$ (рис. 12.81), KC — перпендикуляр к плоскости $ABKL$, AC — диагональ квадрата. Обозначим сторону квадрата a.

Из прямоугольного ΔBKC $KC = BC\sin\alpha$; искомый $\angle KAC$ можно найти из ΔKAC: $\sin\beta = \frac{KC}{AC}$, где $KC = a\sin\alpha$, $AC = a\sqrt{2}$. Тогда $\sin\beta = \frac{a\sin\alpha}{a\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$. Откуда $\beta = \arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$.

12.080. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно стороне основания. Найти угол между стороной основания и непересекающей ее диагональю боковой грани.

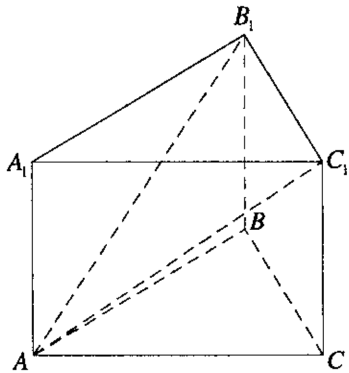


Рис. 12.82

Решение.

Обозначим сторону основания призмы через a (рис. 12.82). Необходимо найти угол между AB_1 и BC, но т.к. $BC \| B_1C_1$, то этот угол равен углу между AB_1 и B_1C_1. Диагональ AB_1 является диагональю квадрата, т.е. $AB_1 = a\sqrt{2}$, аналогично $AC_1 = a\sqrt{2}$. Тогда по теореме косинусов: $AC_1^2 = AB_1^2 + B_1C_1^2 - 2AB_1 \cdot B_1C_1 \cos\alpha$ или $2a^2 = 2a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{2}\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$.

12.081. Диагонали боковых граней прямоугольного параллелепипеда составляют с плоскостью основания углы α и β. Найти угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью основания.

Решение.

Пусть стороны параллелепипеда будут a и b, а высота h (рис. 12.83). Тогда $h = a\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{tg}\,\beta$, откуда $\frac{b}{a} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}$. Диагональ основания

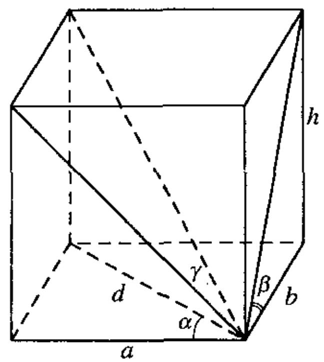


Рис. 12.83

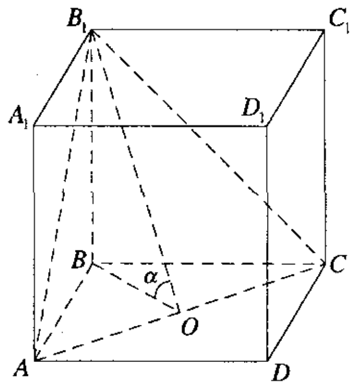


Рис. 12.84

$$d=\sqrt{a^2+b^2}\ .\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{h}{d}=\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}}{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\beta}}}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}},\text{ или }\operatorname{ctg}\gamma=\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}\,.$$

Ответ: $\operatorname{arcctg}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}$.

12.082. Найти угол между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней правильной четырехугольной призмы, если плоскость, в которой они лежат, составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Так как призма правильная, то в ее основании лежит квадрат. Обозначим его сторону a (рис. 12.84). $BO\perp AC$, $B_1O\perp AC$, $\angle B_1OB=\alpha$. Из ΔB_1BO найдем $B_1O=\frac{BO}{\cos\alpha}$. Так как BO — середина диагонали BD, то $BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Тогда $B_1O=\frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$, $OC=BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Из ΔB_1OC

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{OC}{B_1O}=\frac{a\sqrt{2}\cdot 2\cos\alpha}{2a\sqrt{2}}=\cos\alpha.\ \text{Тогда }\ \beta=2\operatorname{arctg}\cos\alpha\,.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\cos\alpha$.

12.083. Найти угол между апофемами двух смежных боковых граней правильной n-угольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен α.

Решение.

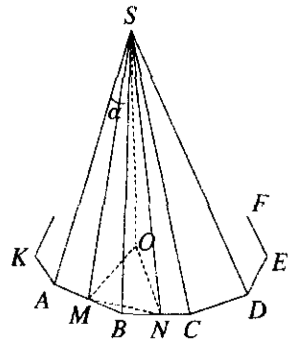


Рис. 12.85

Пусть $S_{ABC...K}$ — правильная n-угольная пирамида, $\angle ASB=\alpha$, SM и SN — апофемы смежных боковых граней; требуется найти $\angle MSN$ (рис. 12.85). Проведем $SO\perp(ABC)$ и соединим O с точками A, B, M и N. Имеем $\angle AOB=\frac{2\pi}{n}$, $\angle ABC=\frac{\pi(n-2)}{n}$. Пусть $AB=a$. Из ΔMSB найдем $SM=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Далее, из ΔMNB по теореме косинусов находим $MN^2=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}\cos\frac{\pi(n-2)}{n}=\frac{a^2}{2}\left(1-\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{n}\right)\right)=$ $=\frac{a^2}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{n}\right)=a^2\cos^2\frac{\pi}{n}$, а из ΔMSN получим $MN^2=2SM^2-$ $-2SM^2\cos\angle MSN=2\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}(1-\cos\angle MSN)=a^2\sin^2\frac{\angle MSN}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда $a^2\cos^2\frac{\pi}{n}=a^2\sin^2\frac{\angle MSN}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; $\sin\frac{\angle MSN}{2}=\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Получили $\angle MSN=2\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $2\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

12.084. Найти косинус угла между апофемой и диагональю основания правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

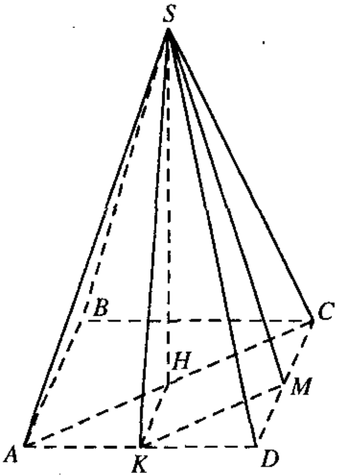


Рис. 12.86

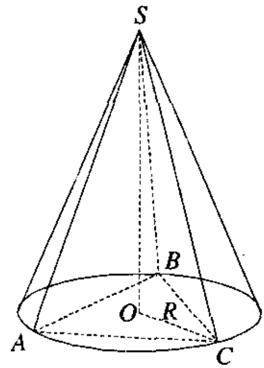


Рис. 12.87

Решение.

Обозначим сторону квадрата, лежащего в основании пирамиды через a; SK — апофема, AC — диагональ (рис. 12.86). Проведем $KM \| AC$, KM — средняя линия ΔACD, $KM = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; ΔSAD является правильным (у него $AD = SA = SD = a$). Тогда $SK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Из ΔKSM найдем $\angle SKM = \alpha$. По теореме косинусов $SM^2 = KS^2 + KM^2 - 2KS \cdot KM \cos\alpha$ или

$\frac{3a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - 2\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. Откуда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

12.085. В конус вписана треугольная пирамида, у которой боковые ребра попарно взаимно перпендикулярны. Найти угол между образующей конуса и его высотой.

Решение.

Пусть SO — высота пирамиды (рис. 12.87). Боковые ребра пирамиды равны, значит, $AO = OB = OC = R$, значит, пирамида $SABC$ — правильная. Обозначим сторону основания пирамиды a. Тогда $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\angle ASC = 90°$. Значит, $\angle SCA = \angle SAC = 45°$. Тогда SC из ΔASC равна $SC = \frac{AC}{2\cos 45°} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Из ΔSOC $\sin\angle CSO = \frac{CO}{SC} = \frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Откуда $\angle SCO = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

12.086. В грани двугранного угла, равного α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найти угол между этой прямой и другой гранью.

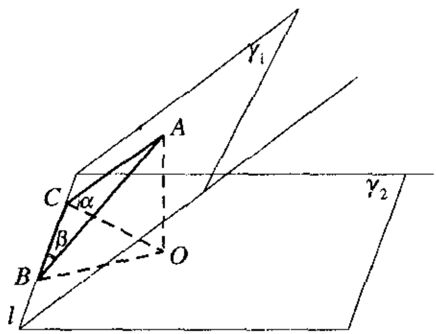


Рис. 12.88

Решение.

По условию $\gamma_1 \cap \gamma_2 = l$, двугранный угол l равен α, $AB \in \gamma_1$, $(l; AB) = \beta$; требуется найти $(\gamma_2; AB)$ (рис. 12.88). Проведем $AO \perp \gamma_2$, $AC \perp l$; тогда $\angle ACO = \alpha$ (как линейный угол двугранного угла $ABCO$), $\angle ABC = \beta$. Так как OB — проекция AB на γ_2, то $\angle ABO$ — искомый угол. Пусть $AO = a$; тогда $AC = \frac{a}{\sin\alpha}$ (из ΔAOC), а в ΔACB имеем $AB = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha\sin\beta}$. Наконец, из ΔAOB находим $\sin\angle ABO = \frac{AO}{AB} = \sin\alpha\sin\beta$. Получили $\angle ABO = \arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

Ответ: $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$.

12.087. Найти угол между образующей и высотой конуса, у которого боковая поверхность есть среднее пропорциональное между площадью основания и полной поверхностью.

Решение.

По условию задачи $S_{бок}=\sqrt{S_{осн}\cdot S}=\sqrt{S_{осн}(S_{бок}+S_{осн})}$. Обозначим образующую конуса l, радиус окружности основания R. Тогда $S_{бок}=\pi Rl$, $S_{осн}=\pi R^2$, а $\sin\alpha=\frac{R}{l}$, где α — искомый угол, поэтому $R=l\sin\alpha$. Тогда $\pi l^2\sin\alpha=\sqrt{\pi l^2\sin\alpha(\pi l^2\sin\alpha+\pi l^2\sin^2\alpha)}$, откуда $\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0$. Решая это квадратное уравнение, получим $\sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тогда $\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

12.088. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найти этот угол, если гипотенуза треугольника равна c, а объем пирамиды равен V.

Решение.

Так как все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы, то основанием высоты является центр описанной около основания окружности. Так как ΔABC — прямоугольный ($\angle B=90^\circ$), то центр этой окружности лежит на середине гипотенузы, т.е. $R=\frac{c}{2}$ (рис. 12.89). Обозначим $\angle A=\alpha$. Тогда $AB=AC\cos\alpha=c\cos\alpha$. Тогда $S_{осн}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha=\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{c^2\sin2\alpha}{4}$. По условию $\angle SAK=\angle BAC=\alpha$. Тогда высота $SK=AK\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{AC}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{c\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

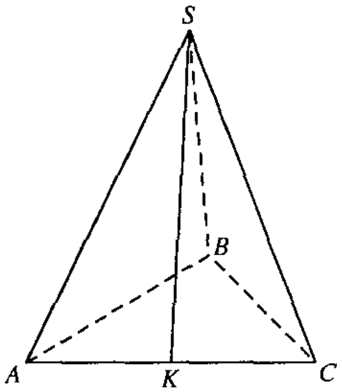


Рис. 12.89

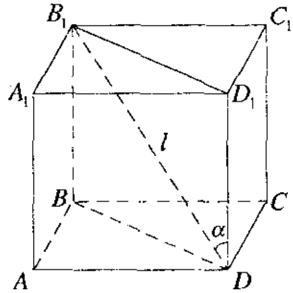


Рис. 12.90

Объем $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SK=\frac{c^2\sin 2\alpha}{12}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$, откуда $12V=c^3\sin^2\alpha$. Значит, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{12V}{c^3}}=\sqrt{\frac{12Vc}{c^4}}=\frac{\sqrt{12Vc}}{c^2}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{12Vc}}{c^2}$.

12.089. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с боковым ребром угол α. Найти объем параллелепипеда, если периметр его основания равен P.

Решение.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, $B_1D=l$, $\angle B_1DD_1=\alpha$, $P_{ABCD}=P$ (рис. 12.90). Из ΔB_1D_1D находим $DD_1=l\cos\alpha$, а $D_1B_1=DB=l\sin\alpha$. Положим $AB=x$, $AD=y$; тогда

$$\begin{cases}2x+2y=P,\\x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=P/2,\\x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+2xy+y^2=P^2/4,\\x^2+y^2=l^2\sin^2\alpha.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $xy=\frac{P^2-4l^2\sin^2\alpha}{8}$.

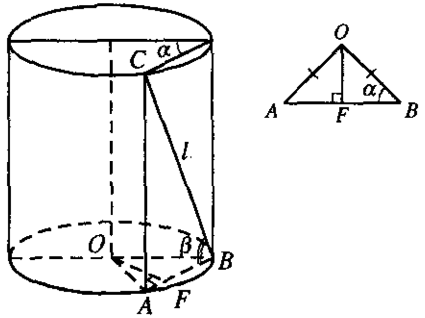


Рис. 12.91

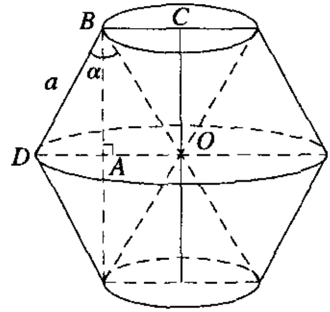


Рис. 12.92

Отсюда $V_{\text{пар}} = \dfrac{P^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha}{8} \cdot l \cos\alpha = \dfrac{l\left(P^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha\right)\cos\alpha}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}\left(P^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha\right) l \cos\alpha.$

12.090. Плоскость, проведенная через образующую цилиндра, составляет с плоскостью осевого сечения, содержащего ту же образующую, острый угол α. Диагональ прямоугольника, полученного в сечении цилиндра этой плоскостью, равна l и образует с плоскостью основания угол β. Найти объем цилиндра.

Решение.

Объем цилиндра находится так: $V = \pi R^2 H$. Высота цилиндра $H = CA = l \sin\beta$ (из ΔCAB) (рис. 12.91). Из ΔCAB: $AB = l\cos\beta$. Рассмотрим ΔOFB ($\angle OFB = 90^\circ$): $FB = \frac{1}{2} AB = \frac{l}{2}\cos\beta$. Радиус основания цилиндра равен: $R = OB = \dfrac{FB}{\cos\alpha} = \dfrac{l\cos\beta}{2\cos\alpha}$. Подставим и окончательно получим: $V = \pi \dfrac{l^2 \cos^2 \beta}{4\cos^2 \alpha} \cdot l \sin\beta = \dfrac{\pi l^3 \sin 2\beta \cos\beta}{8\cos^2 \alpha}$.

Ответ: $\dfrac{\pi l^3 \sin 2\beta \cos\beta}{8\cos^2 \alpha}$.

12.091. Сторона ромба равна a, а его острый угол равен α. Ромб вращается вокруг прямой, проходящей через его вершину параллельно большей диагонали. Найти объем тела вращения.

Решение.

Объем тела вращения есть сумма объемов двух одинаковых фигур $V_{\text{т.вр}} = 2V$ (рис. 12.92). Объем такой фигуры есть: $V = V_{\text{ус.к}} - V_{\text{к}}$.

Объем усеченного конуса равен: $V_{\text{ус.к}} = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$. Радиус большего основания $R = OD = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$. Радиус меньшего основания $r = BC = a\sin\frac{\alpha}{2}$. Высота усеченного конуса: $H = BA = a\cos\frac{\alpha}{2}$. Подставим и получим:

$$V_{\text{ус.к}} = \frac{\pi}{3}a\cos\frac{\alpha}{2}\left(4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{7}{6}\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

Объем конуса с меньшим основанием:

$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{6}\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$. Тогда объем тела вращения равен:

$$V_{\text{т.вр}} = 2\left(V_{\text{ус.к}} - V_{\text{к}}\right) = 2\left(\frac{7}{6}\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha - \frac{1}{6}\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\right) = 2\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

Ответ: $2\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$.

12.092. Объем шара равен V. Найти объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

Решение.

Объем сектора находится так: $V_{\text{с}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h$ (рис. 12.93). Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Отсюда $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Из ΔOBC ($\angle OBC = 90^\circ$), $BO = R\cos\frac{\alpha}{2}$.

Тогда высота сегмента $h = AB = R - BO = R\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

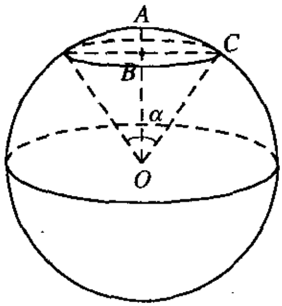


Рис. 12.93

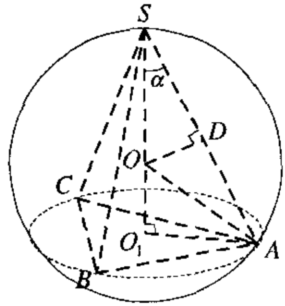


Рис. 12.94

Подставим и окончательно получим:

$$V_c = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{4} = \frac{4}{3}\pi\frac{3V}{4\pi}\sin^2\frac{\alpha}{4} = V\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

12.093. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и боковым ребром равен α $(\alpha<\pi/4)$. В каком отношении делит высоту пирамиды центр описанного шара?

Решение.

Из ΔSOA (равнобедренный: $SO=OA$) следует: $OD\perp SA$ и $SD=DA=\frac{x}{2}$ (рис. 12.94). Из ΔSDO $SD=SO\cos\alpha$; $x=2SO\cos\alpha$.

Отсюда $SO=\frac{x}{2\cos\alpha}$. Из ΔSO_1A $SO_1=SA\cos\alpha=x\cos\alpha$. Тогда

$OO_1=SO_1-SO=x\cos\alpha-\frac{x}{2\cos\alpha}=\frac{2x\cos^2\alpha-x}{2\cos\alpha}$. Отсюда:

$$\frac{OO_1}{SO}=\frac{(2x\cos^2\alpha-x)2\cos\alpha}{2\cos\alpha\cdot x}=2\cos^2\alpha-1=\cos2\alpha.$$

Ответ: $\cos2\alpha$.

12.094. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найти объем меньшего конуса, если касательные, проведенные к окружности его

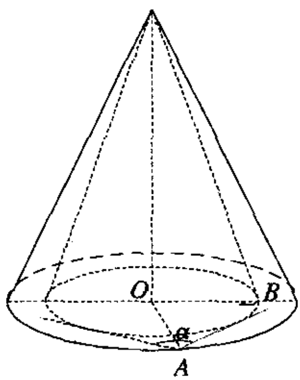


Рис. 12.95

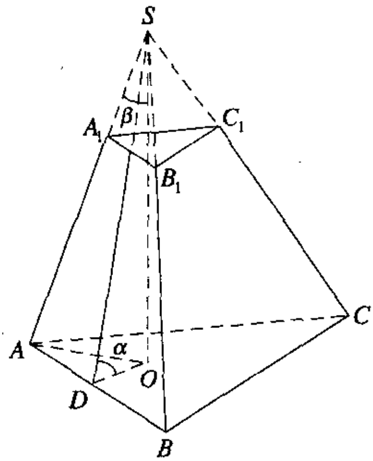


Рис. 12.96

основания из произвольной точки окружности основания большего конуса, образуют угол α.

Решение.

Разность объемов конусов: $V_1 - V_2 = V$ (рис. 12.95). Объем большего конуса $V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 H$. Объем меньшего конуса $V_2 = \frac{1}{3}\pi R_2^2 H$. Из ΔABO ($\angle OBA = 90°$): $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{OA} = \frac{R_2}{R_1}$. Тогда $R_1 = \frac{R_2}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Подставим: $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2 - R_2^2\right) = \frac{1}{3}\pi H\left(\frac{R_2^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - R_2^2\right) = \frac{1}{3}\pi H R_2^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$R_2^2 = \frac{3V}{\pi H \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Тогда объем меньшего конуса

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\frac{3V}{\pi H \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}\cdot H = \frac{V}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} = V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

12.095. Боковая грань правильной усеченной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти угол между высотой и боковым ребром пирамиды.

Решение.

Из ΔSOD ($\angle SOD = 90^\circ$): $SO = DO \operatorname{tg}\alpha$, а $DO = \frac{x\sqrt{3}}{6}$ (радиус вписанной окружности) (рис. 12.96). Отсюда $SO = \frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Из ΔSOA ($\angle SOA = 90^\circ$) $\operatorname{tg}\beta = \frac{AO}{SO}$; $AO = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (радиус описанной окружности). Тогда $\operatorname{tg}\beta = \frac{x\sqrt{3}\cdot 6}{3x\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} = 2\operatorname{ctg}\alpha$. Отсюда $\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$.

Ответ: $\operatorname{arctg}(2\operatorname{ctg}\alpha)$.

12.096. В конус вписан полушар: большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найти объем полушара, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α.

Решение.

Объем полушара равен: $V_{\text{пш}} = \frac{2}{3}\pi R^3$ (рис. 12.97). Из ΔABO ($\angle ABO = 90^\circ$) $R = OB = OA\sin\alpha$. Из ΔSOA ($\angle SOA = 90^\circ$) $OA = l\cos\alpha$. Подставим $R = l\cos\alpha\sin\alpha = \frac{l}{2}\sin 2\alpha$. Тогда объем полушара равен $V_{\text{пш}} = \frac{2}{3}\pi\frac{l^3}{8}\sin^3 2\alpha = \frac{l^3}{12}\pi\sin^3 2\alpha$.

Ответ: $\frac{l^3}{12}\pi\sin^3 2\alpha$.

12.097. Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды равны a и b. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

Решение.

Боковая поверхность пирамиды равна: $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)l$; $P_1 = nb$; $P_2 = na$ (рис. 12.98). Рассмотрим ΔBCA ($\angle BCA = 90^\circ$):

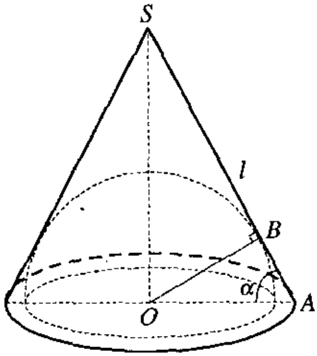


Рис. 12.97

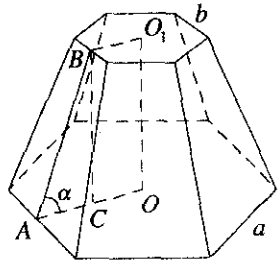


Рис. 12.98

$$AC = AO - BO_1 = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} - \frac{b}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \frac{a-b}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$ (AO и BO_1 — радиусы вписанных окружностей). Из $\Delta BCA: AB = l = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{a-b}{2\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$.

Подставим и получим:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}n(a+b)\frac{a-b}{2\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}} = \frac{n(a^2-b^2)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{4\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{n(a^2-b^2)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{4\cos\alpha}$.

12.098. В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между высотой и образующей равен α. Найти объем шара.

Решение.

Объем шара равен: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Площадь осевого сечения конуса равна: $S = \frac{1}{2}l^2 \sin 2\alpha$. Отсюда $l = \sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}$. Справедливо следующее соотношение между элементами шара и вписанного в него конуса: $l=2R\sin(90^\circ-\alpha)=2R\cos\alpha$. Отсюда $R=\frac{l}{2\cos\alpha}$. Подставим и получим:

$R=\sqrt{\frac{2S}{4\sin 2\alpha\cos^2\alpha}}$. Объем шара $V=\frac{4}{3}\pi\frac{2S}{4\sin 2\alpha\cos^2\alpha}\sqrt{\frac{2S}{4\sin 2\alpha\cos^2\alpha}}=$

$$=\frac{2}{3}\pi\frac{S\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{2\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}=\frac{1}{3}\pi S\frac{\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\pi S\frac{\sqrt{2S\sin 2\alpha}}{\sin^2 2\alpha\cos^3\alpha}$.

12.099. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом β. Найти полную поверхность пирамиды.

Решение.

Пусть $SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD=\alpha$ ($\alpha<90^\circ$), $AB=a$, $((SAB);(ABC))=((SBC);(ABC))=((SCD);(ABC))=((SDA);(ABC))=\beta$, $SO\perp(ABC)$ (рис. 12.99). Проведем апофемы пирамиды SE, SF, SK, SL; тогда $OE\perp AB$, $OF\perp BC$, $OK\perp CD$, $OL\perp AD$ (по теореме о 3-х перпендикулярах) и, значит, $\angle SEO=\angle SFO=\angle SKO=\angle SLO=\beta$.

Далее имеем $S_{\text{бок}}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\beta}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$. Отсюда

$$S_{\text{полн}}=\frac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}+a^2\sin\alpha=\frac{a^2\sin\alpha(1+\cos\beta)}{\cos\beta}=\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}.$$

Ответ: $\frac{2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

12.100. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна a, а угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найти объем призмы.

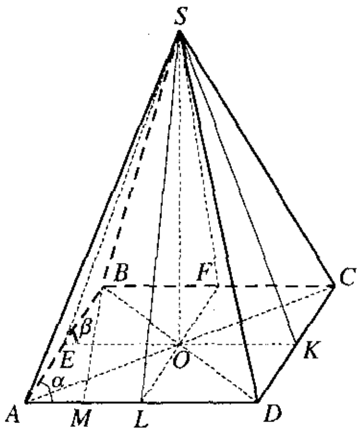


Рис. 12.99

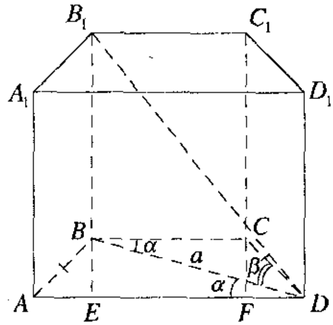


Рис. 12.100

Решение.

Объем призмы находится так: $V = S \cdot H$ (рис. 12.100). Высота призмы находится из B_1BD ($\angle B_1BD = 90°$): $H = a \cdot \operatorname{tg}\beta$. Площадь основания $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BE$. Из ΔBED ($\angle BED = 90°$): $BE = a\sin\alpha$, а $ED = a\cos\alpha$. Так как $AD = EF + AE + FD = BC + 2FD$, то $AD + BC = 2BC + 2FD = 2(BC + FD) = 2(EF + FD) = 2ED = 2a\cos\alpha$. Тогда $S = \dfrac{2a\cos\alpha}{2} \cdot a\sin\alpha = \dfrac{a^2}{2}\sin 2\alpha$. Окончательно получаем:

$$V = \frac{a^3}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta.$$

Ответ: $\dfrac{a^3}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg}\beta$.

12.101. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна a. Угол между пересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней равен α. Найти объем призмы.

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма, $AB = a$, $\angle A_1DC_1 = \alpha$ (рис. 12.101). Имеем $A_1C_1 = a\sqrt{2}$. Пусть $A_1D = x$;

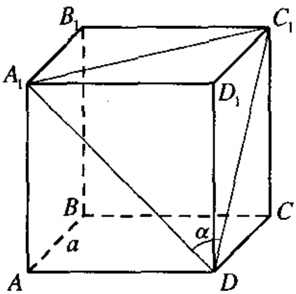


Рис. 12.101

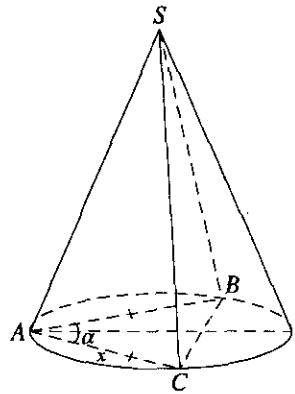


Рис. 12.102

тогда $DC_1 = x$. Из ΔA_1DC_1 по теореме косинусов находим

$2a^2 = 2x^2 - 2x^2\cos\alpha = 4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда $x = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из ΔDD_1A_1 имеем

$$DD_1 = \sqrt{\frac{2a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - a^2} = \frac{a\sqrt{2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$ Отсюда

$$V_{\text{пр}} = \frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

12.102. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найти объем пирамиды.

Решение.

Объем пирамиды равен: $V_{\text{п}} = \frac{1}{3}SH$ (рис. 12.102). Площадь основания пирамиды $S = \frac{AB^2 \cdot CB}{4R}$. Из ΔABC $CB = 2AB\sin\frac{\alpha}{2}$. Тогда

$S=\dfrac{2AB^3\sin\dfrac{\alpha}{2}}{4R}=\dfrac{2x^3\sin\dfrac{\alpha}{2}}{4R}$. Отсюда $R=\dfrac{2x^3\sin\dfrac{\alpha}{2}}{4S}$. Объем конуса

$V=\dfrac{1}{3}\pi R^2H$. Отсюда $H=\dfrac{3V}{\pi R^2}$. Подставим в объем пирамиды:

$V_{\text{п}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{S\cdot 3V\cdot 16S^2}{\pi\cdot\left(2x^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}=\dfrac{4VS^3}{\pi x^6\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$. С другой стороны, площадь осно-

вания равна: $S=\dfrac{1}{2}x^2\sin\alpha$. Тогда окончательно получим:

$$V_{\text{п}}=\frac{4Vx^6\sin^3\alpha}{8\pi x^6\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{V}{2\pi}\frac{\sin\alpha 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{2V}{\pi}\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{2V}{\pi}\sin\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

12.103. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если образующая конуса составляет с плоскостью основания угол β.

Решение.

Площадь сечения равна $S_{\text{сеч}}=\dfrac{1}{2}SA^2\sin\alpha$ (рис. 12.103), полная поверхности конуса равна $S_{\text{пол}}=S_{\text{бок}}+S_{\text{осн}}=\pi Rl+\pi R^2=\pi AO\cdot SA+\pi AO^2$. Из ΔSOA ($\angle SOA=90^\circ$) $AO=SA\cos\beta$. Подставим:

$S_{\text{пол}}=\pi SA^2(\cos\beta+\cos^2\beta)$. Тогда окончательно получаем:

$$\frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{пол}}}=\frac{SA^2\sin\alpha}{2\pi SA^2(\cos\beta+\cos^2\beta)}=\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\dfrac{\beta}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\dfrac{\beta}{2}}$.

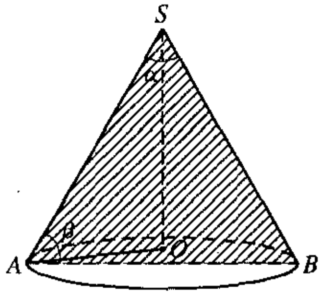


Рис. 12.103

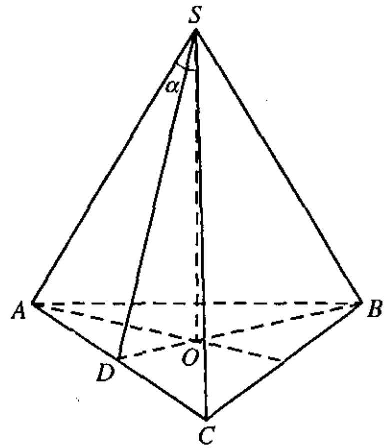


Рис. 12.104

12.104. Отношение боковой поверхности правильной треугольной пирамиды к площади ее основания равно k. Найти угол между боковым ребром и высотой пирамиды.

Решение.

По условию $SABC$ — правильная треугольная пирамида, $S_{\text{бок}} : S_{\Delta ABC} = k$, $SO \perp (ABC)$; требуется найти $\angle ASO$ (рис. 12.104). Пусть $SO = h$ и $\angle ASO = \alpha$; тогда в ΔSOA имеем $AO = h\operatorname{tg}\alpha$, откуда $AB = AO\sqrt{3} = h\operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{3}$, $OD = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}h\operatorname{tg}\alpha$. Проведем $SD \perp AC$ и из ΔSOD найдем $SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}h^2\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{h}{2}\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Следовательно, $S_{\text{бок}} = \frac{3}{2}AB \cdot SD = \frac{3}{2}h\operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{h}{2}\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha} =$

$= \frac{3}{4}h^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{3(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{3h^2\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sqrt{3}}{4}$. Имеем уравнение

$$\frac{3h^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{3(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)}4}{4 \cdot 3h^2\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sqrt{3}} = k;\ \frac{\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} = k;\ \sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha + 1} = k;$$

$4\operatorname{ctg}^2\alpha = k^2 - 1$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$,

откуда $\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$.

Ответ: $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{k^2-1}}{2}$.

12.105. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость, составляющая с основанием угол β. Найти объем конуса, если его высота равна h.

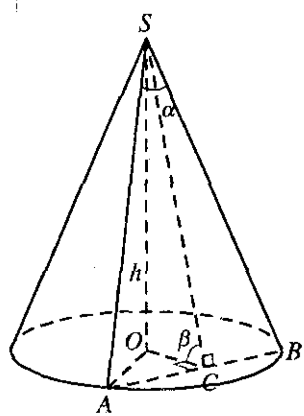


Рис. 12.105

Решение.

Объем конуса равен: $V = \frac{1}{3}\pi h R^2$ (рис. 12.105). Из ΔACO ($\angle ACO = 90^\circ$) $R^2 = AO^2 = OC^2 + AC^2$. Из ΔSOC ($\angle SOC = 90^\circ$) $OC = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}$. Из ΔSCA ($\angle SCA = 90^\circ$) $AC = SC\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а из ΔSOC $SC = \frac{h}{\sin\beta}$. Подставим и получим: $R^2 = \frac{h^2}{\operatorname{tg}^2\beta} + \frac{h^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\beta} = \frac{h^2\left(\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\beta}$. Окончательно получаем: $V = \frac{\pi}{3}\frac{h^3\left(\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\beta}$.

Ответ: $\frac{\pi h^3\left(\cos^2\beta + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{3\sin^2\beta}$.

12.106. Высота правильной треугольной пирамиды равна H, двугранный угол при основании равен α. Найти полную поверхность пирамиды.

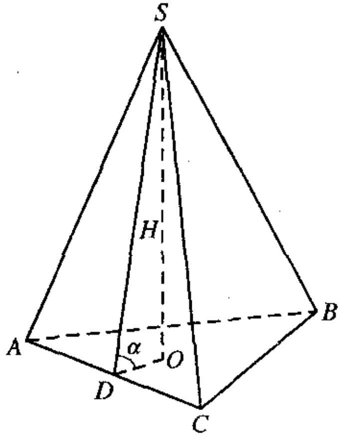


Рис. 12.106

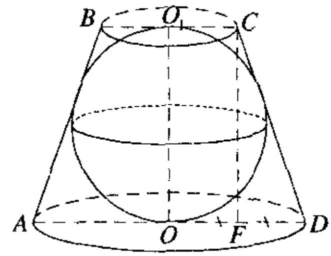


Рис. 12.107

Решение.

Полная поверхность пирамиды равна: $S_{пол} = S_{бок} + S_{осн}$ (рис. 12.106). Площадь основания $S_{осн} = 3r^2\sqrt{3}$. Из ΔSOD ($\angle SOD = 90°$) находим: $r = DO = H\operatorname{ctg}\alpha$. Тогда $S_{осн} = 3\sqrt{3}\cdot H^2\operatorname{ctg}^2\alpha$. Площадь боковой поверхности равна: $S_{бок} = \frac{1}{2}Pl$. Из ΔSOD: $l = SD = \frac{H}{\sin\alpha}$. Сторона основания $AB = \frac{6r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}H\operatorname{ctg}\alpha$. Тогда $S_{бок} = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}H^2\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} = 3\sqrt{3}H^2\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

Окончательно получаем:

$$S_{пол} = 3\sqrt{3}H^2\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 3\sqrt{3}H^2\operatorname{ctg}^2\alpha = 3\sqrt{3}H^2\frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} =$$

$$= 3\sqrt{3}H^2\frac{\cos\alpha\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}H^2\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2}H^2\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

12.107. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в четыре раза больше площади другого основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Решение.

По условию $S_2 = 4S_1$ (рис. 12.107). Отсюда $\pi R_2^2 = 4\pi R_1^2 \Rightarrow R_2 = 2R_1$

($AO = 2BO_1$). Искомый угол можно найти так: $\cos\angle CDO = \frac{FD}{CD} = \frac{BO_1}{CD}$.

Известно, что $CF^2 = BC \cdot AD = 2BO_1 \cdot 2AO = 8BO_1^2$. Из ΔCFD ($\angle CFD = 90°$)

$CF^2 + FD^2 = CD^2$. Отсюда $CD = \sqrt{8BO_1^2 + BO_1^2} = \sqrt{9BO_1^2} = 3BO_1$.

Окончательно получаем: $\cos\angle CDO = \frac{BO_1}{3BO_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle CDO = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

12.108. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m:n$, считая от нижнего основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $m \le n$.

Решение.

По условию $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n}$. Объем

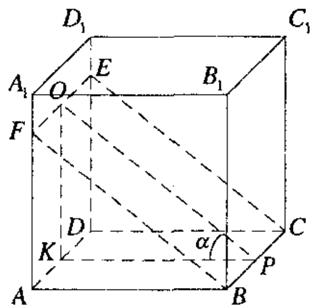


Рис. 12.108

$V_1 = S \cdot H = \frac{1}{2} KP \cdot KO \cdot AD$ (рис. 12.108). Из ΔOKP ($\angle OKP = 90°$):

$OP = \frac{KP}{\cos\alpha}$, $OK = OP\sin\alpha = KP\,\mathrm{tg}\,\alpha$. $AD = KP$. Отсюда $V_1 = \frac{1}{2}KP^3\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Объем куба $V = AB^3 = KP^3$. Тогда $V_2 = V - V_1 = KP^3 - \frac{1}{2}KP^3\,\mathrm{tg}\,\alpha =$

$= KP^3\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\alpha\right)$. Подставим в соотношение:

$$\frac{m}{n}=\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{2}KP^3\operatorname{tg}\alpha}{\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)KP^3}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{1}{2}KP^3\operatorname{tg}\alpha}{\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)KP^3}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2-\operatorname{tg}\alpha}.$$ Отсюда $2m-m\operatorname{tg}\alpha=n\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2m}{m+n}$ $\Rightarrow$ $\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{2m}{m+n}\right)$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{2m}{m+n}\right)$.

12.109. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый двугранный угол α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AA_1=H$, $AN=NB$, $BM=MC$, $((A_1C_1M);(ABC))=\alpha$ (рис. 12.109). Проведем $BE\perp AC$ и $EF\|AA_1$; $\angle FEB=\alpha$ как линейный угол двугранного угла. Пусть $BE\cap MN=O$; тогда $FO\perp MN$ (по теореме о 3-х перпендикулярах). Сечение A_1NMC_1 — трапеция, так как $MN\|AC$. Из ΔFEO находим $FO=\frac{FE}{\sin\alpha}=\frac{H}{\sin\alpha}$, $EO=H\operatorname{ctg}\alpha$, откуда $BE=2H\operatorname{ctg}\alpha$. Из ΔBEC получим $EC=MN=BE\operatorname{ctg}60^\circ=2H\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{3}$; значит, $AC=A_1C_1=\frac{4H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{3}$. Получили

$$S_{A_1NMC_1}=\frac{AC+MN}{2}\cdot FO=H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{H}{\sin\alpha}=\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ответ: $\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$.

12.110. Найти боковую поверхность усеченного конуса, описанного около правильной треугольной усеченной пирамиды, зная, что острый угол трапеции, служащей боковой гранью пирамиды, равен α и что в эту трапецию можно вписать окружность радиуса r.

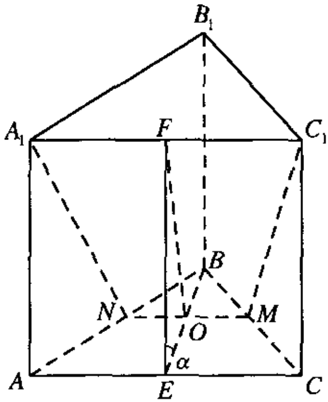


Рис. 12.109

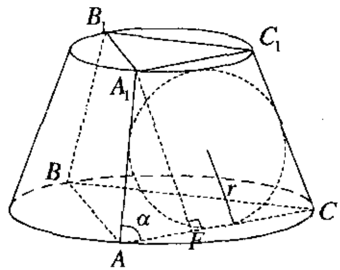


Рис. 12.110

Решение.

Боковая поверхность усеченного конуса равна $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$ (рис. 12.110). Высота трапеции $A_1F = 2r$. Из ΔA_1FA: $A_1A = \dfrac{2r}{\sin\alpha}$, $AF = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$. Обозначим $A_1C_1 = a$, $AC = b$. Из трапеции $b = a + \dfrac{4r}{\operatorname{tg}\alpha}$. Известно, что $a \cdot b = 4r^2 = a^2 + a\dfrac{4r}{\operatorname{tg}\alpha}$. Решая уравнение $a^2 + a\dfrac{4r}{\operatorname{tg}\alpha} - 4r^2 = 0$, получаем $a_1 = -2r\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$ и $a_2 = 2r\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$; a_1 — не подходит. Тогда $b = 2r\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \dfrac{4r}{\operatorname{tg}\alpha} = 2r\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. Известно также, что $R_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $R_2 = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$. Окончательно получаем

$$S_{бок} = \pi\frac{\sqrt{3}}{3}(a+b)l = \pi\frac{\sqrt{3}}{3}2r\left(\frac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\frac{2r}{\sin\alpha} = \frac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{3}\pi r^2}{3\sin^2\alpha}$.

12.111. Сторона основания треугольной пирамиды равна a, прилежащие к ней углы основания равны α и β. Все боковые ребра составляют с высотой пирамиды один и тот же угол φ. Найти объем пирамиды.

Решение.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}SH$ (рис. 12.111). Из ΔSOA ($\angle SOA=90^\circ$)

$H=SO=\frac{AO}{\operatorname{tg}\varphi}$. По теореме синусов: $2R=2AO=\frac{a}{\sin(180-\alpha-\beta)}=$

$=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$. Тогда $H=\frac{a}{2\operatorname{tg}\varphi\sin(\alpha+\beta)}$. По теореме синусов

$\frac{CB}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow CB=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Площадь основания

$S=\frac{1}{2}a\cdot CB\sin\alpha=\frac{1}{2}\frac{a^2\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. Тогда

$$V=\frac{1}{3}\frac{a^3\sin\beta\sin\alpha}{4\operatorname{tg}\varphi\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{12}\frac{a^3\sin\beta\sin\alpha\operatorname{ctg}\varphi}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Ответ: $\frac{a^3\sin\beta\sin\alpha\operatorname{ctg}\varphi}{12\sin^2(\alpha+\beta)}$.

12.112. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найти полную поверхность конуса.

Решение.

Полная поверхность конуса $S_{пол}=S_{бок}+S_{осн}=\pi Rl+\pi R^2$ (рис. 12.112).

Из ΔOBA ($\angle OBA=90^\circ$; $\angle BOA=\angle ASO=\alpha$) $R=OA=\frac{d}{\cos\alpha}$. Из

ΔSOA ($\angle SOA=90^\circ$) $SA=\frac{SO}{\cos\alpha}$; из ΔSBO $SO=\frac{d}{\sin\alpha}$. Тогда

$l=SA=\frac{d}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Отсюда

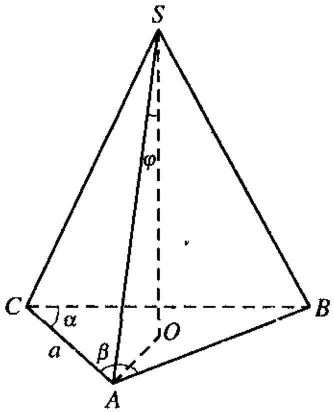


Рис. 12.111

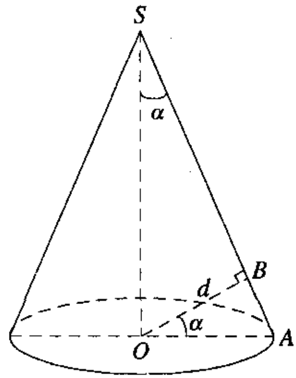


Рис. 12.112

$$S_{\text{пол}}=\pi\left(\frac{d^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}+\frac{d^2}{\cos^2\alpha}\right)=\pi\frac{d^2}{\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+1\right)=$$

$$=\pi\frac{d^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\pi d^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi d^2}{\sin\alpha}\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\pi d^2}{\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi d^2}{2\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\pi d^2}{2\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi d^2}{2\sin\alpha\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\pi d^2}{2\sin\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi d^2}{2\sin\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

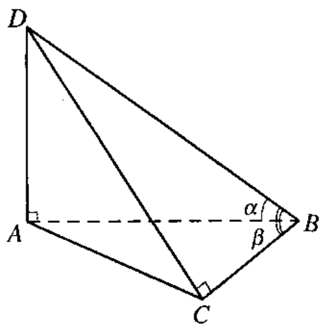


Рис. 12.113

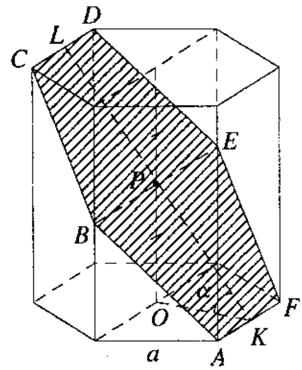


Рис. 12.114

12.113. Основанием пирамиды $ABCD$ служит прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Боковое ребро AD перпендикулярно основанию. Найти острые углы треугольника ABC, если $\angle DBA = \alpha$ и $\angle DBC = \beta$ ($\alpha < \beta$).

Решение.

Пусть $DABC$ — пирамида, $\angle ACB = 90°$, $AD \perp (ABC)$, $\angle DBA = \alpha$, $\angle DBC = \beta$ ($\alpha < \beta$) (рис. 12.113). Пусть $AD = h$; тогда из ΔADB находим $AB = h \operatorname{ctg} \alpha$, $DB = \dfrac{h}{\sin\alpha}$. Так как $BC \perp AC$, то $DC \perp BC$ и из ΔDCB получим $BC = DB\cos\beta = \dfrac{h\cos\beta}{\sin\alpha}$. Итак, в ΔABC имеем $\sin\angle A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{h\cos\beta}{\sin\alpha \cdot h\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, откуда $\angle A = \arcsin\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$,

$$\angle B = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$; $\arccos\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

12.114. В правильной шестиугольной призме плоскость, проведенная через сторону основания и середину отрезка, соединяющего центры оснований, составляет с плоскостью основания острый угол

α. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью, если сторона основания призмы равна a.

Решение.

Площадь сечения $S_{\text{сеч}} = 2S_{BAFE} = 2\left(\frac{BE+AF}{2}\cdot PK\right)$ (рис. 12.114).

Радиус вписанной окружности в основании призмы: $OK = r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из ΔPOK ($\angle POK = 90°$): $PK = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. Радиус описанной окружности $R = BP = a$. Отсюда $BE = 2a$. Окончательно получаем:

$$S_{\text{сеч}} = (BE + AF)\cdot PK = (2a+a)\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}.$$

Ответ: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$.

12.115. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

Решение.

По условию $S_{\text{ш}} = S_{\text{осн}}$ (рис. 12.115).

Отсюда $4\pi R_{\text{ш}}^2 = \pi R_{\text{к}}^2 \Rightarrow R_{\text{к}} = 2R_{\text{ш}}$.

Рассмотрим ΔSCA. По теореме ко-

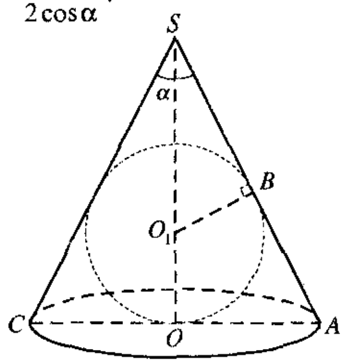


Рис. 12.115

синусов $(2AO)^2 = 2SA^2 - 2SA^2\cos\alpha = 2SA^2(1-\cos\alpha)$. Отсюда

$\cos\alpha = \frac{2SA^2 - 2(R_{\text{к}})^2}{2SA^2} = 1 - \frac{2R_{\text{к}}^2}{SA^2}$. ΔSOA и ΔSBO_1 подобные:

$\frac{OA}{BO_1} = \frac{SA}{SO_1} \Rightarrow SA = SO_1\cdot\frac{R_{\text{к}}}{R_{\text{ш}}} = 2SO_1$. Из ΔSOA: $SA^2 = OA^2 + SO^2$, а

$SO = SO_1 + O_1O = \frac{SA}{2} + O_1B$. Подставим: $SA^2 = OA^2 + \left(\frac{SA}{2} + O_1B\right)^2$.

$SA^2 = R_{\text{к}}^2 + \frac{SA^2}{4} + SA\cdot R_{\text{ш}} + R_{\text{ш}}^2 = 5R_{\text{ш}}^2 + \frac{SA^2}{4} + SA\cdot R_{\text{ш}}$. Решая уравнение

$\frac{3SA^2}{4}-SA\cdot R_ш-5R_ш^2=0$, получаем: 1) $SA=\frac{10R_ш}{3}$; 2) $SA=\frac{-6R_ш}{3}$ (не подходит). Тогда окончательно получаем: $\cos\alpha=1-\frac{2\cdot 4R_ш^2\cdot 9}{100R_ш^2}=1-\frac{18}{25}=\frac{7}{25}$.

Ответ: $\frac{7}{25}$.

12.116. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна a, а угол между боковыми сторонами равен α. Найти объем призмы, если ее боковая поверхность равна S.

Решение.

Объем призмы $V=S_{осн}\cdot H$ (рис. 12.116). Площадь основания равна: $S_{осн}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$. Боковая поверхность $S=PH$, отсюда $H=\frac{S}{P}$.

Обозначим $AC=x$. По теореме косинусов:

$x^2=2a^2-2a^2\cos\alpha=2a^2(1-\cos\alpha)$. Тогда $x=a\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=2a\sin\frac{\alpha}{2}$.

Отсюда $P=2a+2a\sin\frac{\alpha}{2}=2a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Окончательно получаем:

$$V=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\frac{S}{2a\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a\sin\alpha}{4\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{aS\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\left(\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}+2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{2aS\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)}{4\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2}=$$

$$=\frac{aS\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{aS\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\right)}{2\left(1+\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}}\right)}=$$

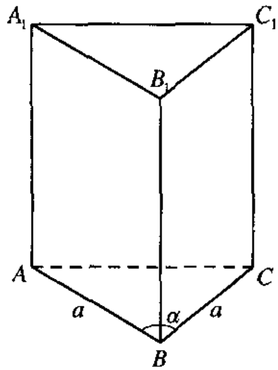


Рис. 12.116

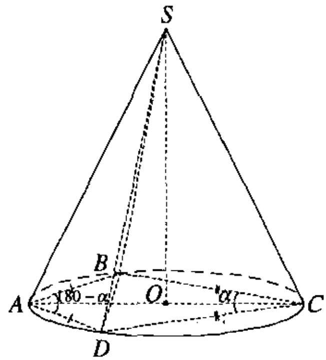


Рис. 12.117

$$=\frac{aS\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{aS\sin\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)}{2\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right).$$

Ответ: $\frac{aS}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$.

12.117. Основанием пирамиды, вписанной в конус, служит четырехугольник, у которого смежные стороны попарно равны, а угол между одной парой смежных сторон равен α. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

Решение.

Объем пирамиды $V_{\text{п}}=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$ (рис. 12.117). Площадь основания пирамиды $S_{\text{осн}}=2S_{\Delta ABC}=2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BC$ ($\angle ABC=90^\circ$). Из ΔABC $AB=2OC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$; а $BC=2R\cos\frac{\alpha}{2}$. Тогда $S_{\text{осн}}=4R^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=2R^2\sin\alpha$.

Объем конуса $V_{\text{к}}=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Тогда искомое отношение:

$$\frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{к}}}=\frac{S_{\text{осн}}\cdot H}{\pi R^2\cdot H}=\frac{2R^2\sin\alpha}{\pi R^2}=\frac{2\sin\alpha}{\pi}.$$

Ответ: $\frac{2\sin\alpha}{\pi}$.

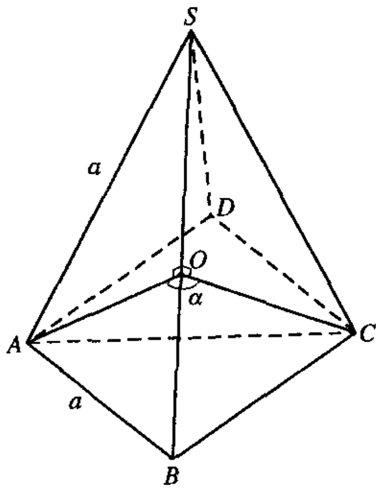


Рис. 12.118

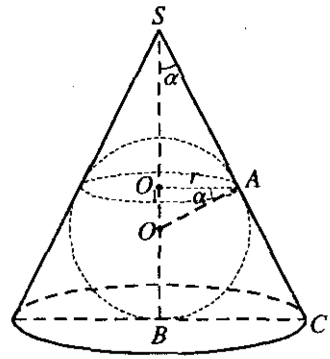


Рис. 12.119

12.118. Найти косинус угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне основания.

Решение.

Из ΔAOC по теореме косинусов $AC^2 = 2AO^2 - 2AO^2\cos\alpha$ (рис. 12.118). Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{2AO^2 - AC^2}{2AO^2}$. Из ΔABC ($\angle ABC = 90°$): $AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Из ΔAOB ($\angle AOB = 90°$): $AO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогда окончательно получаем: $\cos\alpha = \dfrac{\dfrac{2\cdot 3a^2}{4} - 2a^2}{\dfrac{3a^2}{2}} = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

12.119. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

Решение.

Объем конуса равен: $V=\frac{1}{3}\pi R_к^2\cdot H$ (рис. 12.119). Из ΔAO_1O

($\angle AO_1O=90^\circ$) $OA=R_ш=\frac{r}{\cos\alpha}$; $OO_1=r\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Из ΔSO_1A

($\angle SO_1A=90^\circ$) $SO_1=\frac{r}{\mathrm{tg}\,\alpha}$. Высота конуса:

$$H=SO_1+O_1O+R_ш=r\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)=$$

$$=r\left(\frac{(1+\sin\alpha)\sin\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right)=2r\left(\frac{\sin\alpha+1}{\sin 2\alpha}\right)$$

Из ΔSBC ($\angle SBC$)

$R_к=H\,\mathrm{tg}\,\alpha=r\left(\frac{\sin\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=r\left(\frac{\sin\alpha+1}{\cos^2\alpha}\right)$. Тогда

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{\sin\alpha+1}{\cos^2\alpha}\right)^2\cdot 2r\cdot\left(\frac{\sin\alpha+1}{\sin 2\alpha}\right)=\frac{1}{3}\pi r^3\frac{(\sin\alpha+1)^3}{\cos^4\alpha\cdot\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\pi r^3\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3}=\frac{\pi r^3\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^6}{3\cos^2\alpha\sin\alpha\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3}=$$

$$=\frac{\pi r^3\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}=\frac{\pi r^3\left(1+\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha\left(1-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^3}=$$

$$=\frac{\pi r^3\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3}=\frac{\pi r^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi r^3\operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

12.120. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно m и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти объем пирамиды.

Решение.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H$ (рис. 12.120). Из ΔSOA находим: $SO=H=m\sin\alpha$; $AO=m\cos\alpha=\frac{AC}{2}$. Отсюда $AC=2m\cos\alpha$. Площадь основания $S_{\text{осн}}=\frac{AC^2}{2}=\frac{4m^2\cos^2\alpha}{2}=2m^2\cos^2\alpha$. Тогда

$$V=\frac{1}{3}2m^2\cos^2\alpha\cdot m\sin\alpha=\frac{1}{3}m^3\cos\alpha\sin2\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{3}m^3\cos\alpha\sin2\alpha$.

12.121. Основанием пирамиды служит правильный треугольник со стороной a. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а равные боковые ребра образуют между собой угол α. Найти высоту прямой треугольной призмы, равновеликой данной пирамиде и имеющей с ней общее основание.

Решение.

Пусть $DABC$ — пирамида, ABC — правильный треугольник, $(ABD)\perp(ABC)$, $(BCD)\perp(ABC)$, $\angle ADC=\alpha$, $AB=a$ (рис. 12.121). Требуется найти высоту призмы с основанием, равным ΔABC, причем $V_{пр}=V_{пир}$. Высота пирамиды совпадает с ребром DB, так как перпендикуляр, опущенный из D на (ABC), должен принадлежать и

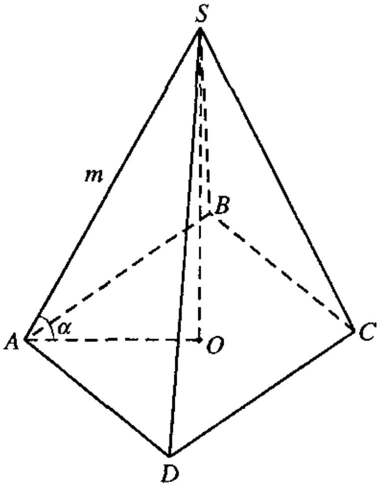


Рис. 12.120

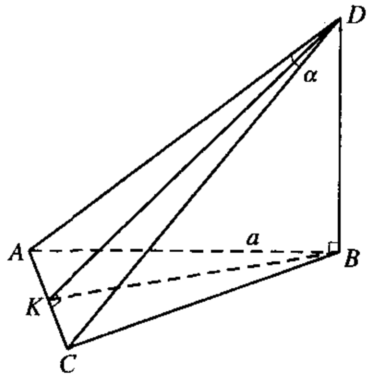


Рис. 12.121

(ABC), и (CBD). Проведем $DK \perp AC$; так как ΔADC — равнобедренный, то $KA = KC$. Из ΔDKC находим $DK = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а из ΔDBK получим $DB = \sqrt{DK^2 - BK^2} = \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}$.

Отсюда $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3} = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3\right)}$. Так как $V_{\text{пир}} = V_{\text{пр}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$, то $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{a^3}{24}\sqrt{3\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 3\right)}$, откуда

$$H = \frac{a}{6}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}} = \frac{a\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}}{3\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{a}{3\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

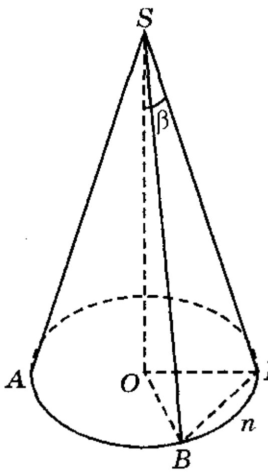


Рис. 12.122

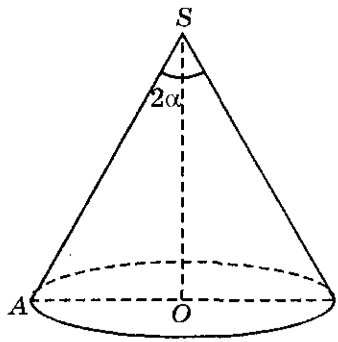


Рис. 12.123

12.122. Найти объем конуса, если в его основании хорда длиной a стягивает дугу в α радианов, а высота конуса составляет с образующей угол β.

Решение.

Пусть SAK — конус, SO — его высота, BK — хорда, $BK = a$, $\cup BnK = \alpha$, $\angle OSK = \beta$ (рис. 12.122). Так как $\cup BnK = \alpha$, то $\angle BOK = \alpha$.

Пусть R — радиус основания конуса; тогда в ΔOBK имеем $a^2 = 2R^2 - -2R^2\cos\alpha = 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, т.е. $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда $R = \frac{a}{2\sin(\alpha/2)}$. Из ΔSOK находим $SO = OK\operatorname{ctg}\beta = \frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin(\alpha/2)}$. Итак,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$.

12.123. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна a. Найти объем конуса.

Решение.

По условию $SA+SO=a \Rightarrow SO=a-SA$ (рис. 12.123). Объем конуса $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$. Из ΔSOA $SO=SA\cos\alpha$. Тогда $SA\cos\alpha=a-SA$.

$SA=\frac{a}{1+\cos\alpha}$ и $H=SO=\frac{a\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, а $AO=R=SA\sin\alpha=\frac{a\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Тогда окончательно получаем:

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}\cdot\frac{a\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)}=\frac{a^3}{3}\pi\frac{\cos\alpha\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3}=$$

$$=\frac{a^3\pi\cos\alpha\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cdot 8\cos^4\frac{\alpha}{2}}=\frac{a^3\pi\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\frac{a^3\pi\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}$.

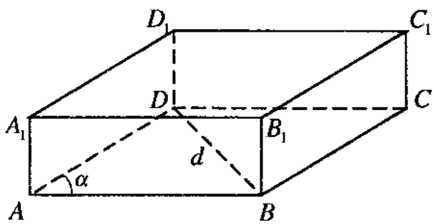


Рис. 12.124

12.124. Найти полную поверхность прямого параллелепипеда, если в основании его лежит ромб с острым углом α и меньшей диагональю d, а высота параллелепипеда в два раза меньше стороны основания.

Решение.

Полная поверхность параллелепипеда $S_{\text{пол}}=S_{\text{бок}}+2S_{\text{осн}}$ (рис. 12.124).

По условию $AA_1=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$. Периметр основания $P=4a$, а высота $H=\frac{a}{2}$. Тогда $S_{\text{бок}}=4\frac{a^2}{2}=2a^2$. Из ΔABD по теореме косинусов

$DB^2=2AB^2-2AB^2\cos\alpha$; $d^2=2a^2-2a^2\cos\alpha$. Тогда $a^2=\frac{d^2}{2(1-\cos\alpha)}$.

Площадь основания $S_{\text{осн}} = 2S_{\Delta ABD} = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\alpha = a^2\sin\alpha$. Окончательно получаем:

$$S_{\text{пол}} = 2a^2 + a^2\sin\alpha = \frac{2d^2}{2(1-\cos\alpha)} + \frac{2d^2\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \frac{2d^2(1+\sin\alpha)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{d^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{d^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{d^2\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{d^2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

12.125. В правильной двенадцатиугольной пирамиде, ребра которой пронумерованы подряд, проведено сечение через первое и пятое ребра. Плоскость сечения образует с плоскостью основания пирамиды угол α, а площадь этого сечения равна S. Найти объем пирамиды.

Решение.

Пусть $SA_1A_2A_3\ldots A_{12}$ — правильная двенадцатиугольная пирамида, SA_1A_5 — сечение пирамиды плоскостью, $((SA_1A_5);(A_1A_2A_3)) = \alpha$, $S_{\Delta SA_1A_5} = S$ (рис. 12.125). Проведем $SO\perp(A_1A_2A_3)$. Пусть $OA_1 = R$; так как $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$, $\angle A_1OA_5 = 30^\circ\cdot 4 = 120^\circ$, то A_1A_5 — сторона правильного вписанного в окружность треугольника и $A_1A_5 = R\sqrt{3}$.

Проведем $OK\perp A_1A_5$; тогда $\angle A_1OK = 60^\circ$, $OK = \frac{1}{2}R$. Из ΔSOK находим $SK = \frac{OK}{\cos\alpha} = \frac{R}{2\cos\alpha}$, $SO = \frac{1}{2}R\operatorname{tg}\alpha$, так как $\angle SKO$ — линейный

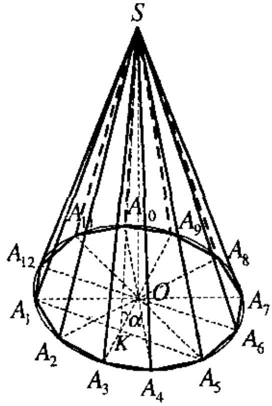


Рис. 12.125

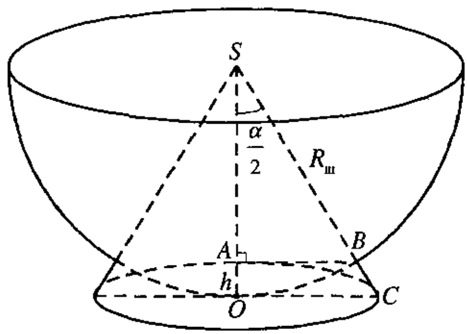


Рис. 12.126

угол двугранного угла между сечением и основанием. Имеем $S_{\Delta SA_1A_5}=\frac{1}{2}A_1A_5\cdot SK$, т.е. $S=\frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot\frac{R}{2\cos\alpha}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$, откуда $R=\frac{2\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{3}}$.

Далее, $S_{осн}=12S_{\Delta OA_1A_2}=12\cdot\frac{1}{2}R^2\sin 30^\circ=3R^2=\frac{12S\cos\alpha}{\sqrt{3}}=4S\sqrt{3}\cos\alpha$.

Получили

$$V_{пир}=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot SO=\frac{4S\sqrt{3}\cos\alpha}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{3}}\operatorname{tg}\alpha=\frac{4S\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{\sqrt[4]{27}}=$$

$$=\frac{4S\sqrt[4]{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}}{3}.$$

Ответ: $\frac{4S\sqrt[4]{3}}{3}\sin\alpha\sqrt{S\cos\alpha}$.

12.126. Найти угол в осевом сечении конуса, если сфера с центром в вершине конуса, касающаяся его основания, делит объем конуса пополам.

Решение.

Объем сектора $V_{сек}=\frac{2}{3}\pi R_ш^2\cdot h$ (рис. 12.126). Объем конуса $V_к=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$. По условию $V_{сек}=\frac{V_к}{2}$; $\frac{2}{3}\pi R_ш^2 h=\frac{1}{6}\pi R^2 H$. Высота конуса $H=R_ш$; высота сегмента $h=R_ш-SA$. Из ΔSAB находим:

$SA = R_ш \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$. Отсюда $h = R_ш\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. Из ΔSOC находим: $R = OC = R_ш \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Подставим: $\frac{2}{3}\pi R_ш^3\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi R_ш^3 \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.\ 4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\alpha/2}-1;\ 4\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 4\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$4\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$. Обозначим $\cos\frac{\alpha}{2} = t$. Решая уравнение $4t^2 - t - 1 = 0$, получаем $t_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ и $t_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ (не подходит). Отсюда $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$. Тогда $\alpha = 2\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

Ответ: $2\arccos\frac{1+\sqrt{17}}{8}$.

12.127. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, диагонали которого пересекаются под углом α. Длина диагонали равна d. Найти боковую поверхность цилиндра.

Решение.

Пусть AA_1B_1B — развертка боковой поверхности цилиндра, AA_1 и BB_1 — его образующие, AB и A_1B_1 — длины окружностей его оснований, $AB_1 = d$, $\angle AOA_1 = \alpha$ (рис. 12.127). Так как $\angle AOA_1$ — внешний угол равнобедренного треугольника AOB, то $\angle OBA = \frac{\alpha}{2}$.

Из ΔA_1AB находим $A_1A = d\sin\frac{\alpha}{2}$, $AB = d\cos\frac{\alpha}{2}$. Получили

$$S_{бок} = 2\pi RH = AB \cdot AA_1 = d^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}d^2\sin\alpha.$$

Ответ: $\frac{1}{2}d^2\sin\alpha$.

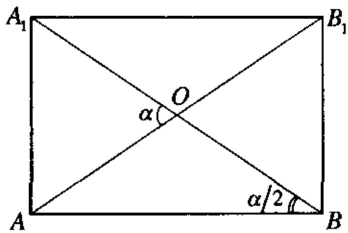


Рис. 12.127

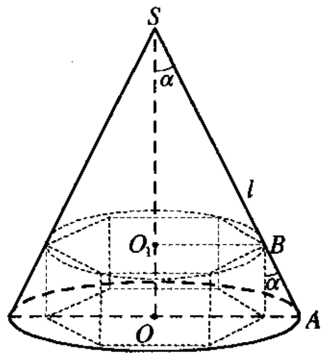


Рис. 12.128

12.128. В конус, образующая которого равна l, вписана правильная шестиугольная призма с равными ребрами. Найти боковую поверхность призмы, если угол между образующей и высотой конуса равен α.

Решение.

Боковая поверхность призмы $S_{бок} = P \cdot h$ (рис. 12.128). Пусть ребро призмы равно x. Тогда $h = x$ и $P = 6x$. Из ΔSOA $SO = l\cos\alpha$. Из ΔSO_1B $SO_1 = \dfrac{x}{\operatorname{tg}\alpha}$. Найдем $SO = OO_1 + O_1S = x + \dfrac{x}{\operatorname{tg}\alpha} = x\left(1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$. Решим уравнение: $x\left(1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = l\cos\alpha \Rightarrow x = \dfrac{l\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$. Тогда $S_{бок} = 6x^2 =$

$$= \frac{6l^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} = \frac{3l^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} = \frac{3l^2 4\cdot\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{4\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{3l^2\sin^2 2\alpha}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

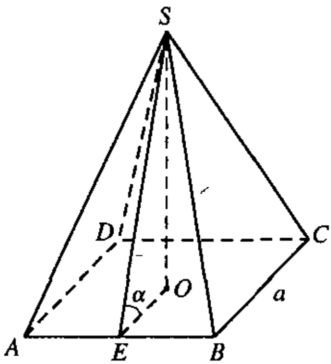


Рис. 12.129

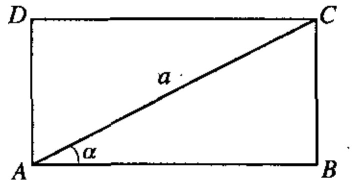


Рис. 12.130

12.129. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

Решение.

Объем пирамиды $V=\frac{1}{3}SH$ (рис. 12.129). Площадь основания: $S=a^2$. Высота пирамиды из ΔSOE $SO=H=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Отсюда $V=\frac{1}{3}\frac{a^3}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\frac{a^3}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

12.130. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна a и составляет с основанием угол α. Найти объем цилиндра.

Решение.

Объем цилиндра $V=\pi R^2 H$ (рис. 12.130). Высота цилиндра из ΔABC равна $H=CB=a\sin\alpha$. Длина окружности основания $c=AB=a\cos\alpha$. Но, с другой стороны, $c=2\pi R$. Тогда $R=\frac{a\cos\alpha}{2\pi}$.

Подставим и получим: $V=\pi\frac{a^2\cos^2\alpha}{4\pi^2}\cdot a\sin\alpha=\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

Ответ: $\frac{a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$.

Решения к главе 13

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

13.001. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $1/5:1/3:1/20$, а четвертое составляет 15% второго числа. Найти эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

Решение.

Искомые числа таковы: $k/5$; $k/3$; $k/20$; $0{,}15\cdot k/3=k/20$. По условию $\frac{k}{3}-8=\frac{k}{5}+\frac{k}{20}+\frac{k}{20}$, откуда $k=240$.

Ответ: 48; 80; 12; 12.

13.002. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 т целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

Решение.

В целлюлозной массе содержится $0{,}85\cdot 500=425$ кг воды. Пусть выпарено x кг воды; тогда получим $425-x=0{,}75(500-x)$, откуда $x=200$ (кг).

Ответ: 200 кг.

13.003. В двух бидонах находится 70 литров молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5% молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

Решение.

Пусть первоначально в первом бидоне x, а во втором $70-x$ литров молока. После переливания в первом бидоне осталось $x-0{,}125x=0{,}875x$ литров, а во втором стало $70-x+0{,}125x$ литров. По условию $70-x+0{,}125x=0{,}875x$, откуда $x=40$. В первом бидоне было 40 литров, во втором — 30 литров молока.

Ответ: 40 и 30 л.

13.004. Две бригады, работая одновременно, обработали участок земли за 12 ч. За какое время могла бы обработать этот участок каждая из бригад в отдельности, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3:2?

Решение

Пусть $3x$ — скорость выполнения работы первой бригадой, $2x$ — скорость выполнения работы второй бригадой. Первая бригада выполнит всю работу за $\frac{1}{3x}$ часов; вторая — за $\frac{1}{2x}$ часов. Вместе они выполнят всю работу за $\frac{1}{3x+2x}=\frac{1}{5x}$ часов. По условию $\frac{1}{5x}=12$, откуда $x=60$. Первая бригада выполнит всю работу за $\frac{1}{3\cdot\frac{1}{60}}=20$ часов; вторая — за $\frac{1}{2\cdot\frac{1}{60}}=30$ часов.

Ответ: 20 и 30 ч.

13.005. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение.

Пусть искомое число имеет вид $10x+y$. Тогда по условию $x+y=12$ (1) и $10x+y+36=10y+x$, т.е. $x-y+4=0$ (2). Складывая (1) и (2), получим $2x=8$, откуда $x=4$, а $y=8$.

Ответ: 48.

13.006. Тракторист вспахал три участка земли. Площадь первого равна $2/5$ площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как $3/2:4/3$. Сколько гектаров было во всех трех участках, если в третьем было на 16 га меньше, чем в первом?

Решение.

Пусть площади участков равны x, y, $x-16$ (га). По условию $x=\frac{2}{5}(x+y-16+x)$ и $y:(x-16)=3/2:4/3$, откуда $y=\frac{9}{8}(x-16)$. Имеем

$x=\frac{2}{5}\left(2x-16+\frac{9}{8}x-18\right) \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}\left(\frac{25x}{8}-34\right)$, $x=\frac{272}{5}$. Далее находим

$y=\frac{9}{8}\left(\frac{272}{5}-16\right)=\frac{216}{5}$. Вся площадь составляет $\frac{544}{5}+\frac{216}{5}-16=136$ (га).

Ответ: 136 га.

13.007. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после пересчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение.

Пусть x — первоначальная цена товара. После первого снижения цена стала $x-0{,}2x=x(1-0{,}2)$; после второго — $x(1-0{,}2)(1-0{,}15)$; после третьего — $x(1-0{,}2)(1-0{,}15)(1-0{,}1)=0{,}612x$. Значит, всего первоначальную цену товара снизили на $1-0{,}612=0{,}388=38{,}8\%$.

Ответ: 38,8%.

13.008. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли составляла 1,5%.

Решение.

Пусть x кг соли в 30 кг морской воды. x кг составляют 5%. Отсюда $x=1{,}5$ кг, 30 кг — 100%. В разбавленной морской воде: 1,5 кг соли составляет 1,5%, a кг — 100%, откуда $a=100$ кг разбавленной морской воды. Значит, надо добавить $100-30=70$ кг пресной воды.

Ответ: 70 кг.

13.009. В библиотеке имеются книги на английском, французском и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех книг на иностранных языках, французские — 75% английских, а остальные 185 книг — немецкие. Сколько книг на иностранных языках в библиотеке?

Решение.

Пусть x — всего книг на иностранных языках. Английских книг — $0{,}36x$; французских $0{,}75\cdot 0{,}36x$. По условию $0{,}36x+0{,}75\cdot 0{,}36x+185=x$, откуда $x=500$.

Ответ: 500.

13.010. Насос может выкачать из бассейна 2/3 воды за 7,5 мин. Проработав 0,15 ч, насос остановился. Найти вместимость бассейна, если после остановки насоса в бассейне еще осталось 25 м^3 воды.

Решение.

Пусть x м^3 — вместимость бассейна. За 7,5 мин насос может выкачать $\frac{2}{3}x$ воды. За 0,15 ч = 9 мин насос выкачал $\frac{9\cdot\frac{2}{3}x}{7,5}=0,8x$ воды. В бассейне осталось $0,2x$ воды. По условию $0,2x = 25$, откуда $x = 125$.

Ответ: 125 м^3.

13.011. Вследствие реконструкции оборудования производительность труда рабочего повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 2500 руб., а теперь на 2809 руб.?

Решение.

Пусть за 8 часов работы рабочий изготавливал a деталей. Тогда расценка составляет $\frac{2500}{a}$ руб. за деталь, а производительность труда равна $\frac{a}{8}$ деталей в час. После первого увеличения производительности на x% рабочий стал изготовлять $\frac{a}{8}+\frac{x\cdot a}{100\cdot 8}$ деталей в час; после второго увеличения производительности еще на x% — $\frac{a}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$ деталей в час. За 8 часов он стал изготовлять $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ деталей и заработал $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2\cdot\frac{2500}{a}$ руб. Согласно условию, $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2\cdot\frac{2500}{a}=2809$, откуда $x = 6\%$.

Ответ: 6%.

13.012. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

Решение.

Пусть за 8 ч работы мастер изготовлял a деталей и зарабатывал b руб. Тогда расценка составляет b/a руб. за деталь, а производительность труда равна $a/8$ деталей в час. После увеличения производительности на x% мастер стал изготовлять $\frac{a}{8}+\frac{xa}{8\cdot 100}$ деталей в час. Поэтому за 7 ч он изготовил $\frac{7a}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)$ деталей и заработал $\frac{7a}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{b}{a}=\frac{7b}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)$ руб. Согласно условию, $\frac{7a}{8}\left(1+\frac{x}{100}\right)=1{,}05b$, откуда $x=20\%$.

Ответ: 20%.

13.013. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

Решение.

Пусть $x/2$ — месячный план завода; x — двухмесячный план. В январе завод выполнил $0{,}05\cdot x/2$ сверх плана; в феврале — $0{,}04\cdot 0{,}05\cdot x/2$. За два месяца завод перевыполнил план на $0{,}05\frac{x}{2}+0{,}04\cdot 0{,}05\frac{x}{2}=0{,}071x$. Значит, завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции на 7,1%.

Ответ: 7,1%.

13.014. Найти три числа, если первое составляет 80% второго, второе относится к третьему как $0{,}5:9/20$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

Решение.

Пусть x — первое число, y — второе число, z — третье число.

Тогда, согласно условию, $\begin{cases} x = 0{,}8y, \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{0{,}5}{9/20}, \\ x + z = y + 70. \end{cases}$ Решая систему, получим $x = 80$; $y = 100$; $z = 90$.

Ответ: 80, 100, 90.

13.015. Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал $1/5$ всего пути и еще 60 км, во второй $1/4$ всего пути и еще 20 км, а в третий день $23/80$ всего пути и оставшиеся 25 км. Найти расстояние между городами.

Решение.

Пусть x км — расстояние между городами. Составим следующую таблицу:

День	Путь, пройденный за день
Первый	$\frac{1}{5}x + 60$ (км)
Второй	$\frac{1}{4}x + 20$ (км)
Третий	$\frac{23}{80}x + 25$ (км)

По условию $\frac{1}{5}x + 60 + \frac{1}{4}x + 20 + \frac{23}{80}x + 25 = x$, откуда $x = 400$.

Ответ: 400 км.

13.016. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2 и 3, а обратные величины соответствующих знаменателей пропорциональны числам 1, 1/3 и 0,2. Найти эти дроби, если их среднее арифметическое равно 136/315.

Решение.

Составим следующую таблицу:

Дробь	Числитель	Знаменатель
Первая	x	$1/y$
Вторая	$2x$	$3/y$
Третья	$3x$	$1/0{,}2y$

Первая дробь — xy; вторая — $\frac{2}{3}xy$; третья — $0{,}6xy$. Среднее арифметическое дробей $\frac{xy+\frac{2}{3}xy+0{,}6xy}{3}=\frac{136}{315}$, откуда $xy=\frac{136}{238}=\frac{4}{7}$. Значит, первая дробь — $\frac{4}{7}$; вторая — $\frac{8}{21}$; третья — $\frac{12}{35}$.

Ответ: $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{12}{35}$.

13.017. Найти сумму трех чисел, зная, что третье относится к первому как 18,48 : 15,4 и составляет 40% второго, а сумма первого и второго равна 400.

Решение.

Пусть x, y, z — указанные числа. По условию имеем: $\frac{z}{x}=\frac{1848}{1540}=\frac{6}{5}$, $z=0{,}4y$, $x+y=400$. Так как $y=\frac{5}{2}z$ и $z=\frac{6}{5}x$, то $y=3x$ и $x+3x=400\Rightarrow$ $\Rightarrow x=100$, $z=\frac{6}{5}x=120$. Тогда

$S=x+y+z=400+120=520$.

Ответ: 520.

13.018. Вкладчик снял со своего счета в сбербанке сначала 1/4 своих денег, потом 4/9 оставшихся денег и еще 640 руб. После этого у него осталось на сберкнижке 3/20 всех его денег. Как велик был вклад?

Решение.

Пусть вклад составляет x руб. Тогда первый остаток равен $\frac{3x}{4}$; второй остаток — $\frac{3x}{4}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3x}{4}-640=\frac{3x}{20}$. Имеем $\frac{3x}{4}-\frac{x}{3}-\frac{3x}{20}=640$, откуда $x=2400$ (руб.).

Ответ: 2400 руб.

13.019. На уборке снега работают две снегоочистительные машины. Первая может убрать всю улицу за 1 ч, а вторая — за 75% этого времени. Начав уборку одновременно, обе машины проработали вместе 20 мин, после чего первая машина прекратила работу. Сколько еще нужно времени, чтобы вторая машина закончила работу?

Решение.

Весь объем работы примем за 1. Производительность первой машины равна 1 (за 1 ч), второй $1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}$ (за 1 ч). Работая вместе $\frac{1}{3}$ ч, они выполнят $\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7}{9}$ всей работы. Тогда на долю второй машины останется $\frac{2}{9}$ работы, для чего потребуется $\frac{2}{9}:\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$ (ч).

Ответ: 10 мин.

13.020.Сумма первых трех членов пропорции равна 58. Третий член составляет 2/3, а второй — 3/4 первого члена. Найти четвертый член пропорции и записать ее.

Решение.

Пусть пропорция имеет вид $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. По условию $a+b+c=58$; $c=\frac{2}{3}a$; $b=\frac{3}{4}a$. Значит, $a+\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}a=58$, откуда $a=24$; $c=16$; $b=18$.

Значит, $d=\frac{bc}{a}=12$.

Ответ: 12; $\frac{24}{18}=\frac{16}{12}$.

13.021. Одна бригада может убрать все поле за 12 дней. Другой бригаде для выполнения той же работы нужно 75% этого времени. После того как в течение 5 дней работала только первая бригада, к ней присоединилась вторая, и обе вместе закончили работу. Сколько дней работали бригады вместе?

Решение.

Пусть бригады работали вместе x дней. Производительность первой бригады — $\frac{1}{12}$; второй бригады — $\frac{1}{12\cdot 0{,}75}=\frac{1}{9}$. По условию $\frac{1}{12}\cdot 5+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{9}\right)\cdot x=1$, откуда $x=3$ дня.

Ответ: 3 дня.

13.022. На вступительном экзамене по математике 15% поступающих не решили ни одной задачи, 144 человека решили задачи с ошибками, а число решивших все задачи верно относится к числу не решивших вовсе как 5:3. Сколько человек экзаменовались по математике в этот день?

Решение.

Пусть x человек всего экзаменовались. Не решили ни одной задачи $0{,}15x$ человек; решили все задачи — $\frac{0{,}15x \cdot 5}{3} = 0{,}25x$ человек. По условию $0{,}15x + 144 + 0{,}25x = x$, откуда $x = 240$.

Ответ: 240.

13.023. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену на каждом станке, если первый работал в эту смену 6 ч, а второй — 8 ч, причем оба станка вместе обработали 820 деталей?

Решение.

Пусть производительность второго станка x; тогда производительность первого — $1{,}4x$ деталей в час. Первый станок обработал в смену $1{,}4x \cdot 6$ деталей; второй — $x \cdot 8$ деталей. По условию $1{,}4x \cdot 6 + x \cdot 8 = 820$, откуда $x = 50$. Значит, первый станок обработал в смену $1{,}4 \cdot 50 \cdot 60 = 420$ деталей; второй — $50 \cdot 8 = 400$ деталей.

Ответ: 420 и 400 деталей.

13.024. Тракторная бригада может вспахать $5/6$ участка земли за 4 ч 15 мин. До обеденного перерыва бригада работала 4,5 ч, после чего остались невспаханными еще 8 га. Как велик был участок?

Решение.

Пусть x га — весь участок. До обеда бригада вспахала $\frac{4{,}5 \cdot \frac{5}{6}x}{4{,}25} = \frac{15}{17}x$ га. По условию $\frac{15}{17}x + 8 = x$, откуда $x = 68$ га.

Ответ: 68 га.

13.025. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч, а через полчаса после нее в том же направлении вышел пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если пароход пришел туда на 1,5 ч раньше лодки?

Решение.

Пусть x ч был в пути пароход. Тогда $x+0{,}5+1{,}5$ ч была в пути лодка. Пароход прошел $20\cdot x$ км, а лодка $12(x+2)$ км. Тогда $20x=12(x+2)$, откуда $x=3$ ч. Расстояние между городами и пристанью $20\cdot 3=60$ км.

Ответ: 60 км.

13.026. Турист проплыл по реке на лодке 90 км и прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько времени плыл по реке?

Решение.

Пусть x ч турист шел пешком. Тогда он плыл на лодке $(x+4)$ ч. Скорость туриста пешком $\frac{10}{x}$ км/ч; на лодке — $\frac{90}{x+4}$ км/ч. Согласно условию, $\frac{10}{x}(x+4)=\frac{90}{x+4}\cdot x$, откуда $x=2$ ч.

Ответ: 2 и 6 ч.

13.027. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого двузначного числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

Решение.

Пусть искомое число имеет вид $10x+y$. Согласно условию,

$\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 10x+y-9=10y+x \end{cases}$. Отсюда $x=3$, $y=2$.

Ответ: 32.

13.028. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно 200/441. Найти эти дроби.

Решение.

Искомые дроби имеют вид: $\frac{x}{y}$; $\frac{2x}{3y}$; $\frac{5x}{7y}$. По условию

$\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{2x}{3y}+\frac{5x}{7y}}{3}=\frac{200}{441}$, откуда $\frac{x}{y}=\frac{4}{7}$; $\frac{2x}{3y}=\frac{8}{21}$; $\frac{5x}{7y}=\frac{20}{49}$.

Ответ: $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{20}{49}$.

13.029. В штате гаража числится 54 шофера. Сколько свободных дней может иметь каждый шофер в месяц (30 дней), если ежедневно 25% автомашин из имеющихся 60 остаются в гараже для профилактического ремонта?

Решение.

Пусть x свободных дней в месяц имеет каждый шофер. Тогда рабочих дней — $30 - x$. По условию $(30-x)\cdot 54 = 60\cdot 0{,}75\cdot 30$, откуда $x = 5$.

Ответ: 5.

13.030. Три бригады рабочих сделали насыпь. Вся работа оценена в 325 500 руб. Какую зарплату получит каждая бригада, если первая состояла из 15 человек и работала 21 день, вторая — из 14 человек и работала 25 дней, а число рабочих третьей бригады, работавшей 20 дней, на 40% превышало число рабочих первой бригады?

Решение.

Пусть x руб. получит один человек за один день работы. Тогда первая бригада получит $x \cdot 15 \cdot 21$ руб.; вторая — $x \cdot 14 \cdot 25$ руб.; третья — $x \cdot 1{,}4 \cdot 15 \cdot 20$ руб. По условию $15 \cdot 21x + 14 \cdot 25x + 1{,}4 \cdot 15 \cdot 20x = 325\ 500$, откуда $x = 300$. Значит, первая бригада получит $15 \cdot 21 \cdot 300 = 94\ 500$ руб.; вторая — $14 \cdot 25 \cdot 300 = 105\ 000$ руб.; третья — $1{,}4 \cdot 15 \times 20 \cdot 300 = 126\ 000$ руб.

Ответ: 126 000, 105 000 и 94 500 руб.

13.031. Группа студентов во время каникул совершила поход по Подмосковью. Первые 30 км они прошли пешком, 20% оставшейся части маршрута проплыли на плоту по реке, а затем опять шли пешком, пройдя расстояние в 1,5 раза больше того, которое проплыли по реке. Остальной путь проехали за 1 ч 30 мин на попутном грузовике, который шел со скоростью 40 км/ч. Какова длина всего маршрута?

Решение.

Пусть x км — длина всего маршрута. Тогда студенты проплыли на плоту $(x - 30) \cdot 0{,}2$ км, затем прошли пешком еще $1{,}5(x-30)\cdot 0{,}2$ км. По условию $30+(x-30)0{,}2+1{,}5(x-30)\cdot 0{,}2+40\cdot 1{,}5 = x$, откуда $x = 150$ км.

Ответ: 150 км.

13.032. За 3,5 ч работы один штамповочный пресс может изготовить 42% всех заказанных деталей. Второй пресс за 9 ч работы может изготовить 60% всех деталей, а скорости выполнения работы на третьем и на втором прессах относятся как 6 : 5. За какое время будет выполнен весь заказ, если все три пресса будут работать одновременно?

Решение.

Пусть x деталей — весь заказ. Тогда скорость работы первого пресса — $\frac{0,42x}{3,5}$ дет/ч; второго — $\frac{0,6x}{9}$ дет/ч; третьего — $\frac{6}{5}\cdot\frac{0,6x}{9}$ дет/ч. Значит, все три пресса, работая одновременно, выполнят весь заказ за

$$\frac{x}{\frac{0,6x}{9}+\frac{0,42x}{3,5}+\frac{6}{5}\cdot\frac{0,6x}{9}}=3,75 \text{ (ч)} = 3 \text{ ч } 45 \text{ мин.}$$

Ответ: за 3 ч 45 мин.

13.033. Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись объемом 72 страницы. Первая машинистка перепечатывала 6 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 5 страниц. Сколько страниц перепечатывала каждая машинистка в час, если первая закончила работу на 1,5 ч быстрее второй?

Решение.

Пусть x страниц в час перепечатывала первая машинистка, тогда вторая — $\frac{5}{6}x$. Первая машинистка работала $\frac{72}{x}$ часов; вторая — $\frac{72}{\frac{5}{6}x}$ часов. По условию $\frac{72}{x}=\frac{72}{\frac{5}{6}x}-1,5$, откуда $x=9,6$ (стр/ч); вторая перепечатывала $\frac{5}{6}\cdot 9,6=8$ стр/ч.

Ответ: 8 и 9,6 стр/ч.

13.034. В магазин для продажи поступили учебники по физике и математике. Когда продали 50% учебников по математике и 20% учебников по физике, что составило в общей сложности 390 книг, то учебников по математике осталось в три раза больше, чем по физике. Сколько учебников по математике и сколько по физике поступило в продажу?

Решение.

Пусть в продажу поступило x учебников по математике, y учебников по физике. Продали $0,5x+0,2y=390$ учебников. Осталось $0,5x$ учебников по математике, $0,8y$ учебников по физике. По условию $\frac{0,5x}{0,8y}=3$. Решив систему $\begin{cases}0,5x+0,2y=390\\ \frac{0,5x}{0,8y}=3\end{cases}$, получим $x=720$; $y=150$.

Ответ: 720 и 150.

13.035. Обувная фабрика за первую неделю выполнила 20% месячного плана, за вторую произвела 120% количества продукции, выработанной за первую неделю, а за третью неделю — 60% продукции, выработанной за первые две недели вместе. Каков месячный план выпуска обуви, если известно, что для его выполнения необходимо за последнюю неделю месяца изготовить 1480 пар обуви?

Решение.

Пусть x — месячный план выпуска обуви. За первую неделю фабрика выпустила $0,2x$ пар обуви, за вторую — $1,2\cdot 0,2x$; за третью — $0,6(0,2x+1,2\cdot 0,2x)$ пар. По условию

$0,2x+1,2\cdot 0,2x+0,6(0,2x+1,2\cdot 0,2x)+1480=x$, откуда $x=5000$ пар.

Ответ: 5000.

13.036. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

Решение.

Пусть x кг сухих грибов получится из 22 кг свежих. Тогда воды в сухих грибах — $0,12x$. По условию $x-0,12x=22(1-0,9)$; $0,88x=2,2$. Откуда $x=2,5$ кг.

Ответ: 2,5 кг.

13.037. Одна мельница может смолоть 19 ц пшеницы за 3 ч, другая — 32 ц за 5 ч, а третья — 10 ц за 2 ч. Как распределить 133 т пшеницы между этими мельницами, чтобы, одновременно начав работу, они окончили ее также одновременно?

Решение.

Пусть x ч — время работы мельниц. Первая мельница смелет за это время $\frac{19}{3}x$ ц пшеницы; вторая — $\frac{32}{5}x$ ц; третья — $\frac{10}{2}x$ ц. По условию $\frac{19}{3}x+\frac{32}{5}x+\frac{10}{2}x=1330$, откуда $x=75$ ч. Значит, первая мельница смелет $\frac{10}{3}\cdot 75=475$ ц; вторая — $\frac{32}{5}\cdot 75=480$ ц; третья — $\frac{10}{2}\cdot 75=375$ ц.

Ответ: 475, 480 и 375 ц.

13.038. В трех секциях спортивной школы было 96 спортсменов. Число членов конькобежной секции составляло 0,8 числа членов лыжной, а число членов хоккейной секции составляло $33\frac{1}{3}\%$ суммарного числа членов двух первых секций. Сколько спортсменов было в каждой секции?

Решение.

Пусть x чел. — число членов лыжной секции; $0{,}8x$ чел. — конькобежной секции; $\frac{33\frac{1}{3}}{100}(x+0{,}8x)$ чел. — хоккейной секции. По условию $x+0{,}8x+\frac{33\frac{1}{3}}{100}(x+0{,}8x)=96$, откуда $x=40$ чел. в лыжной секции. В конькобежной секции $0{,}8\cdot 40=32$ чел.; в хоккейной — $96-40-32=24$ чел.

Ответ: 40, 32 и 24 чел.

13.039. За первый квартал автозавод выполнил 25% годового плана выпуска автомашин. Число машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, оказалось пропорционально числам 11,25, 12 и 13,5. Определить перевыполнение годового плана в процентах, если во втором квартале автозавод дал продукции в 1,08 раза больше, чем в первом.

Решение.

Пусть x — годовой план автозавода. За первый квартал завод выполнил $0{,}25x$ плана, за второй квартал завод выпустил $11{,}25y$ машин, что составило $1{,}08\cdot 0{,}25x$ плана: $11{,}25y=1{,}08\cdot 0{,}25x=0{,}27x$, отсюда $y=0{,}024x$. За третий квартал завод выполнил $12y=12\cdot 0{,}024x=0{,}288x$ плана, за четвертый — $13{,}5y=0{,}324x$ плана. За весь год завод выполнил $0{,}25x+0{,}27x+0{,}288x+0{,}324x=1{,}132x$ плана, т.е. он перевыполнил план на $0{,}132 = 13{,}2\%$.

Ответ: 13,2%.

13.040. Трое сотрудников получили премию в размере 2970 руб., причем второй получил 1/3 того, что получил первый, и еще 180 руб., а третий получил 1/3 денег второго и еще 130 руб. Какую премию получил каждый?

Решение.

Пусть x руб. — премия первого сотрудника. Тогда $\frac{1}{3}x+180$ руб. — второго: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+180\right)+130$ руб. — третьего. По условию $x+\frac{1}{3}x+180+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+180\right)+130=2970$, откуда $x=1800$ руб. — премия первого сотрудника; $\frac{1}{3}\cdot 1800+180=780$ руб. — премия второго; $\frac{1}{3}\cdot 780+130=390$ руб. — третьего.

Ответ: 1800, 780 и 390 руб.

13.041. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение.

Пусть взяли x г 30%-ного раствора соляной кислоты и $(600-x)$ г — 10%-ного раствора. Масса соляной кислоты в 30%-ном растворе составляет $0{,}3x$ г; в 10%-ном — $0{,}1(600-x)$ г. В полученном 15%-ном растворе масса соляной кислоты составляет $0{,}15 \cdot 600 = 90$ г. По условию $0{,}3x + 0{,}1(600-x) = 90$, откуда $x = 150$ г 30%-ного раствора; $600 - 150 = 450$ г 10%-го раствора.

Ответ: 150 и 450 г.

13.042. Площади трех участков земли относятся как $2\frac{3}{4}:1\frac{5}{6}:1\frac{3}{8}$. Известно, что с первого участка собрано зерна на 72 ц больше, чем со второго. Найти площадь всех трех участков, если средняя урожайность составляет 18 ц с 1 га.

Решение.

Пусть x, y, z — площади участков. Тогда $x/y=6/4$, $y/z=4/3$, откуда $x=6k$, $y=4k$, $z=3k$. По условию $(6k-4k)\cdot 18=72$, $k=2$ и площадь всех трех участков составляет $x+y+z=2(6+4+3)=26$ (га).

Ответ: 26 га.

13.043. Расстояние между Москвой и Смоленском по железной дороге равно 415 км. На этом пути расположены города Можайск и Вязьма. Расстояние между Москвой и Можайском относится к расстоянию между Можайском и Вязьмой как 7:9, а расстояние между Можайском и Вязьмой составляет 27/35 расстояния между Вязьмой и Смоленском. Найти расстояния между каждыми двумя соседними городами.

Решение.

Пусть x км — расстояние между Можайском и Вязьмой. Тогда $\frac{7}{9}x$ км — расстояние между Москвой и Можайском; $\frac{35}{27}x$ км — между Вязьмой и Смоленском. По условию $\frac{7}{9}x+x+\frac{35}{27}x=415$, откуда $x=135$ км. Между Москвой и Можайском — $\frac{7}{9}\cdot 135=105$ км; между Вязьмой и Смоленском — $\frac{35}{27}\cdot 135=175$ км.

Ответ: 105, 135 и 175 км.

13.044. В магазин привезли сахар и сахарный песок в 63 мешках, всего 4,8 т, причем мешков с сахарным песком было на 25% больше, чем с сахаром. Масса каждого мешка с сахаром составляла 3/4 массы мешка с сахарным песком. Сколько привезли сахара и сколько сахарного песка?

Решение.

Пусть привезли x мешков сахара; $1{,}25x$ мешков сахарного песка. По условию $x+1{,}25x=63$, откуда $x=28$ мешков сахара; $1{,}25\cdot 28=35$ мешков сахарного песка. Теперь пусть всего y т сахарного песка; $4{,}8-y$ т — сахара. Тогда $\frac{y}{35}$ т — масса одного мешка сахарного песка; $\frac{4,8-y}{28}$ т — масса мешка сахара. По условию

$\frac{3}{4}\cdot\frac{y}{35}=\frac{4,8-y}{28}$, откуда $y=1,8$ т сахарного песка; $4,8-1,8=3$ т сахара.

Ответ: 1,8 и 3 т.

13.045. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

Решение.

Первоначально в сплаве $36\cdot 0,45=16,2$ кг меди. Пусть добавили x кг меди. Тогда масса нового сплава $36+x$ кг, масса меди в нем $16,2+x$ кг. По условию $16,2+x=(36+x)\cdot 0,6$, откуда $x=13,5$ кг.

Ответ: 13,5 кг.

13.046. Охотничий порох состоит из селитры, серы и угля. Масса серы должна относиться к массе селитры как 0,2:1,3, а масса угля должна составлять $11\frac{1}{9}\%$ массы серы и селитры вместе. Сколько пойдет каждого из веществ на приготовление 25 кг пороха?

Решение.

Пусть x кг — масса селитры. Тогда $\frac{0,2}{1,3}x$ кг — масса серы; $\left(x+\frac{0,2}{1,3}x\right)\cdot\frac{11\frac{1}{9}}{100}$ кг — угля. По условию $x+\frac{0,2}{1,3}x+\left(x+\frac{0,2}{1,3}x\right)\cdot\frac{1}{9}=25$, откуда $x=19,5$ кг селитры. Тогда $\frac{0,2}{1,3}\cdot 19,5=3$ кг серы; $(3+19,5)\cdot\frac{1}{9}=2,5$ кг угля.

Ответ: 3 кг серы; 19,5 кг селитры; 2,5 кг угля.

13.047. Музыкальный театр объявил конкурс для поступления в оркестр. Первоначально предполагалось, что число мест для скрипачей, виолончелистов и трубачей распределится в отношении 1,6:1:0,4. Однако затем было решено увеличить прием, и в результате скрипачей было принято на 25% больше, а виолончелистов на 20% меньше, чем ранее намечалось. Сколько музыкантов каждого жанра было принято в оркестр, если всего приняли 32 человека?

Решение.

Пусть предполагалось набрать $1{,}6x$ скрипачей, x — виолончелистов, $0{,}4x$ трубачей. Тогда набрали $1{,}25 \cdot 1{,}6x$ скрипачей, $(1-0{,}2)x$ виолончелистов, $0{,}4x$ трубачей. По условию $1{,}25 \cdot 1{,}6x + (1-0{,}2)x + 0{,}4x = 32$, откуда $x = 10$. Значит, набрали $1{,}25 \cdot 1{,}6 \cdot 10 = 20$ скрипачей; $0{,}8 \cdot 10 = 8$ виолончелистов; $0{,}4 \cdot 10 = 4$ трубача.

Ответ: 20 скрипачей, 8 виолончелистов, 4 трубача.

13.048. Длина Дуная относится к длине Днепра как 19/3 : 5, а длина Дона относится к длине Дуная как 6,5 : 9,5. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

Решение.

Пусть x км — длина Дуная. Тогда длина Днепра — $\frac{5}{19/3}x$ км, длина Дона — $\frac{6{,}5}{9{,}5}x$ км. По условию $\frac{5}{19/3}x - \frac{6{,}5}{9{,}5}x = 300$, откуда $x = 2850$ км — длина Дуная. Тогда длина Днепра — $\frac{15}{19} \cdot 2850 = 2250$ км, длина Дона — $\frac{6{,}5}{9{,}5} \cdot 2850 = 1950$ км.

Ответ: 2850, 2250 и 1950 км.

13.049. Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно 14/11. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго чисел.

Решение.

Пусть x — первое число, Тогда $\frac{1}{1{,}4}x$ — второе число, $\frac{11}{14}x$ — третье число. По условию $\frac{11}{14}x - \frac{1}{1{,}4}x + 40 = 0{,}125\left(x + \frac{1}{1{,}4}x\right)$, откуда $x = 280$. Второе число — $\frac{280}{1{,}4} = 200$; третье — $\frac{11}{14} \cdot 280 = 220$.

Ответ: 280, 200, 220.

13.050. Заработные платы рабочего за октябрь и ноябрь относились как 3/2 : 4/3, а за ноябрь и декабрь как 2 : 8/3. За декабрь он получил на 450 руб. больше, чем за октябрь, и за перевыполнение квартального плана рабочему начислили премию в размере 20% его трехмесячного заработка. Найти размер премии.

Решение.

Пусть x руб. — заработная плата рабочего за ноябрь. Тогда за октябрь она составляет $\left(\frac{3}{2}:\frac{4}{3}\right)x=\frac{9}{8}x$ руб.; за декабрь — $\left(\frac{8}{3}:2\right)x=\frac{4}{3}x$ руб. По условию $\frac{4}{3}x=\frac{9}{8}x+450$, откуда $x=2160$ руб. — заработная плата за ноябрь; $\frac{9}{8}\cdot 2160=2430$ руб. — за октябрь; $\frac{4}{3}\cdot 2160=2880$ руб. — за декабрь. Тогда размер премии — $(2160+2430+2880)\cdot 0{,}2=1494$ руб.

Ответ: 1494 руб.

13.051. По наклоненной доске длиной 6 м катятся два цилиндра, у одного из которых длина окружности равна 3 дм, а у другого 2 дм. Можно ли увеличить длины окружностей обоих цилиндров на одну и ту же величину так, чтобы на том же пути один из них сделал на 3 оборота больше другого?

Решение.

Допустим, что длины окружностей можно увеличить на x дм. Тогда первый цилиндр сделает $\frac{60}{3+x}$ оборотов, второй — $\frac{60}{2+x}$. По условию $\frac{60}{3+x}+3=\frac{60}{2+x}$, откуда $x^2+5x-14=0$. Решив это уравнение, получим, что длины окружностей можно увеличить на $x=2$ дм.

Ответ: можно увеличить на 2 дм.

13.052. Искусственный водоем имеет форму прямоугольника с разностью сторон 1 км. Два рыбака, находящиеся в одной вершине этого прямоугольника, одновременно отправились в пункт, расположенный в противоположной вершине. При этом один рыбак поплыл напрямик по диагонали, а второй пошел пешком вдоль берега. Определить размеры водоема, если каждый рыбак передвигался со скоростью 4 км/ч и один из них прибыл к месту назначения на 30 мин раньше другого.

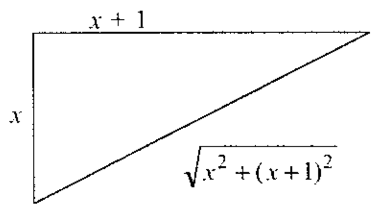


Рис. 13.1

Решение.

Пусть x км — длина меньшей стороны водоема, $x+1$ км — длина второй стороны (рис. 13.1). Тогда первый рыбак проплыл $\sqrt{x^2+(x+1)^2}$ км, а второй прошел $x+x+1$ км. По условию $(x+x+1)/4-0{,}5=\sqrt{x^2+(x+1)^2}/4$, откуда $x=3$ км.

Ответ: 3×4 км.

13.053. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что за год первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, а второй — на 5%, в то время как прирост массы первого кристалла за 3 месяца оказался равным приросту массы второго кристалла за 4 месяца. Каковы были первоначальные массы этих кристаллов, если известно, что после того как каждая из них увеличилась на 20 г, отношение массы первого кристалла к массе второго кристалла достигло числа 1,5?

Решение.

Пусть a — первоначальная масса первого кристалла; b — второго; и пусть x — прирост массы первого кристалла за 3 месяца. За год прирост массы первого кристалла составляет $4x$; второго кристалла — $3x$. По условию $a+4x=1{,}04a$, $b+3x=1{,}05b$. По условию также $\frac{a+20}{b+20}=1{,}5$. Решив систему $\begin{cases} a+4x=1{,}04a \\ b+3x=1{,}05b \\ a+20=1{,}5(b+20), \end{cases}$ находим, что $a=100$ г; $b=60$ г.

Ответ: 100 и 60 г.

13.054. Один фермер получил средний урожай гречихи 21 ц с 1 га, а другой, у которого под гречихой было на 12 га меньше, добился среднего урожая 25 ц с 1 га. В результате у второго фермера было собрано на 300 ц гречихи больше, чем у первого. Сколько центнеров гречихи было собрано каждым фермером?

Решение.

Составим следующую таблицу:

Фермер	Площадь, га	Урожайность, ц/га	Масса, ц
Первый	x	21	$21x$
Второй	$x-12$	25	$25(x-12)$

По условию $25(x-12)-21x=300$, откуда $x=150$. Тогда $21x=3150$ (ц), а $25(x-12)=3450$ ц.

Ответ: 3150 и 3450 ц.

13.055. На вагоноремонтном заводе в определенный срок должно быть отремонтировано 330 вагонов. Перевыполняя план ремонта в среднем на 3 вагона в неделю, на заводе уже за две недели до срока отремонтировали 297 вагонов. Сколько вагонов в неделю ремонтировали на заводе?

Решение.

Пусть x вагонов в неделю ремонтировали на заводе, а должны были ремонтировать по плану — $(x-3)$. Тогда срок выполнения плана — $\frac{330}{x-3}$ недель. По условию $\left(\frac{330}{x-3}-2\right)\cdot x=297$. Отсюда $x=33$.

Ответ: 33.

13.056. На расстоянии s км грузовой автомобиль расходует бензина на a л больше, чем легковой. Расходуя 1 л бензина, грузовой автомобиль проходит по той же дороге на b км меньше, чем легковой. Каков расход бензина каждого из этих автомобилей на расстоянии s км?

Решение.

Пусть x л бензина на s км расходует грузовой автомобиль, $x-a$ л — легковой. Тогда, расходуя 1 л бензина, грузовой автомобиль проходит $\frac{s}{x}$ км, а легковой — $\frac{s}{x-a}$ км. По условию $\frac{s}{x}+b=\frac{s}{x-a}$. Отсюда $bx^2-abx-sa=0$, откуда $x=\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4sab}}{2b}$ л бензина расходует грузовой автомобиль на s км.

Ответ: $\frac{ab+\sqrt{a^2b^2+4sab}}{2b}$ и $\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4sab}}{2b}$ л.

13.057. Две силы приложены к одной точке и направлены под прямым углом. Модуль одной из них на 4 Н больше модуля другой, а модуль равнодействующей на 8 Н меньше суммы модулей данных сил. Найти модули данных сил и их равнодействующей.

Решение.

Пусть x Н — модуль одной силы, $x+4$ Н — второй. Тогда модуль равнодействующей силы — $x+x+4-8$ Н. Из рисунка 13.2 вид-

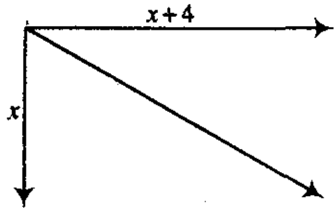


Рис. 13.2

но, что $x^2+(x+4)^2=(x+x+4-8)^2$, откуда $x=12$ Н. Модуль второй силы — 16 Н, модуль равнодействующей силы — 20 Н.

Ответ: 12, 16 и 20 Н.

13.058. В лаборатории измеряется скорость, с которой распространяется звук вдоль стержней, сделанных из разных материалов. В первом опыте оказалось, что весь путь, состоящий из трех последовательно соединенных стержней, звук проходит за время a с, а путь, состоящий из второго и третьего стержней, звук проходит в два раза быстрее, чем один первый стержень. В другом опыте второй стержень заменили новым, и тогда последовательное соединение из трех стержней звук прошел за время b с, а соединение из первого и второго стержней вдвое медленнее, чем один третий стержень. Найти скорость распространения звука в новом стержне, если его длина l м.

Решение.

Пусть t_1, t_2, t_3, t_4 соответственно — это время прохождения звука вдоль 1-го, 2-го, 3-го, нового стержней. Четвертый стержень — это новый, которым мы заменяем второй во втором опыте. По условию в первом опыте:

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=a, \\ 2(t_2+t_3)=t_1, \end{cases} \Rightarrow 2t_1=2a-t_1,\ t_1=\frac{2}{3}a;$$

во втором опыте $\begin{cases} t_1+t_4+t_3=b, \\ t_1+t_4=2t_3, \end{cases} \Rightarrow 3t_1+3t_4=2b;$

$$t_4=\frac{2}{3}b-t_1=\frac{2}{3}(b-a).$$

Тогда скорость распространения звука в новом стержне

$v=\dfrac{l}{t_4}=\dfrac{3l}{2(b-a)}$ м/с; где $b>a$.

Ответ: $\dfrac{3l}{2(b-a)}$ м/с; имеет смысл при $b>a$.

13.059. По обе стороны улицы длиной 1200 м лежат прямоугольные полосы земли, отведенные под участки, одна — шириной 50 м, а другая — 60 м. На сколько участков разбит весь поселок, если более узкая полоса содержит на 5 участков больше, чем широкая, при условии, что на узкой полосе каждый участок на 1200 м^2 меньше, чем каждый участок на широкой полосе?

Решение.

Пусть x участков на широкой полосе, $x + 5$ участков — на узкой, y м — ширина участка на узкой полосе, $y + 1200$ м — на широкой. По условию $\begin{cases}(x+5)y=1200\cdot 50,\\ x(y+1200)=1200\cdot 60.\end{cases}$ Решив систему, находим $x = 20$ участков на широкой полосе. Значит, на узкой — 25 участков. Всего $20 + 25 = 45$ участков.

Ответ: на 45.

13.060. Груз массой 60 кг давит на опору. Если массу груза уменьшить на 10 кг, а площадь опоры уменьшить на 5 дм^2, то масса, приходящаяся на каждый квадратный дециметр опоры, увеличится на 1 кг. Определить площадь опоры.

Решение.

Пусть x дм^2 — площадь опоры. Тогда $\frac{60}{x}$ кг/дм^2 — масса, приходящаяся на 1дм^2 опоры. После уменьшения массы груза и площади опоры эта масса равна $\frac{50}{x-5}$ кг/дм^2. По условию $\frac{50}{x-5}-1=\frac{60}{x}$, откуда $x = 15$.

Ответ: 15 дм^2.

13.061. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму 84 коп. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

Решение.

Пусть x коп. — стоимость самой дешевой марки, $x+d$, $x+2d$, $x+3d$ — стоимости остальных марок. По условию

$\begin{cases}x+x+d+x+2d+x+3d=84,\\ x+3d=2{,}5x,\end{cases}$ откуда $x = 12$; $d = 6$. Стоимости марок: 12 коп., 18 коп., 24 коп, 30 коп.

Ответ: 12 коп., 18 коп., 24 коп, 30 коп.

13.062. Ученик токаря вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготавливать ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь; тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготовлять ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками этот ученик, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

Решение:

Пусть токарь обеспечивает пешками x комплектов шахмат. Он выполняет задание за y дней. По условию

$$\begin{cases} \left(\dfrac{16x}{y}+2\right)(y-10)=16x, \\ \left(\dfrac{16x}{y}+4\right)(y-16)=16x, \end{cases} \text{ откуда } x=15.$$

Ответ: 15.

13.063. В зрительном зале клуба было 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале?

Решение:

Пусть в зрительном зале было x рядов; $\dfrac{320}{x}$ — число мест в одном ряду. После того как число мест в ряду увеличили на 4 и добавили один ряд, всего мест в зале стало $\left(\dfrac{320}{x}+4\right)(x+1)=420$, откуда $x=20$. Значит, в зрительном зале теперь имеется 21 ряд.

Ответ: 21.

13.064. Запас сена таков, что можно ежедневно выдавать на всех лошадей 96 кг. В действительности ежедневную порцию каждой лошади смогли увеличить на 4 кг, так как две лошади были проданы. Сколько лошадей было первоначально?

Решение.

Пусть первоначально было x лошадей. Ежедневная порция каждой лошади была $\dfrac{96}{x}$ кг. Так как две лошади были проданы другому колхозу, то их стало $x-2$, а ежедневная порция каждой лошади стала $\frac{96}{x}+4$ кг. По условию $\left(\frac{96}{x}+4\right)(x-2)=96$, откуда $x=8$.

Ответ: 8.

13.065. Сочинение писали 108 экзаменующихся. Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девушка получила на один лист больше каждого юноши, а все девушки получили столько же листов, сколько все юноши. Сколько было девушек и сколько юношей?

Решение.

Пусть x было девушек, $108-x$ — юношей. Юноши получили по y листов, а девушки — по $y+1$ листов. По условию

$\begin{cases} x(y+1)+(108-x)y=480, \\ x(y+1)=(108-x)y, \end{cases}$ откуда $x=48$. Девушек было 48, юношей — $108-48=60$.

Ответ: 48 и 60.

13.066. На машиностроительном заводе разработали новый тип деталей для генераторов. Из 875 кг металла изготовляют теперь на три детали нового типа больше, чем деталей старого типа изготовляли из 900 кг. Какова масса детали нового и старого типов, если две детали нового типа по массе меньше одной детали старого типа на 0,1 т?

Решение.

Пусть x кг — масса детали нового типа, y кг — старого. По условию $y-2x=100$. Из 875 кг изготовляют $\frac{875}{x}$ деталей нового типа, из 900 кг изготовляли $\frac{900}{y}$ деталей старого типа. По условию $\frac{875}{x}-\frac{900}{y}=3$. Решив систему $\begin{cases} \frac{875}{x}-\frac{900}{y}=3, \\ y-2x=100, \end{cases}$ находим $x=175$ кг, $y=450$ кг.

Ответ: 175 и 450 кг.

13.067. В первый день спортивных соревнований не выполнили зачетные нормы и выбыли из дальнейшей борьбы 1/6 часть состава команды юношей и 1/7 часть состава команды девушек. В течение остального периода соревнований из обеих команд выбыло из-за невыполнения норм одинаковое количество спортсменов. Всего к концу соревнований не выполнили зачетные нормы 48 человек из команды юношей и 50 человек из команды девушек, но из общего количества спортсменов, выполнивших зачетные нормы, девушек оказалось вдвое больше, чем юношей. Какова была первоначальная численность команд?

Решение:

Пусть зачетные нормы выполнили x юношей и $2x$ девушек. Тогда первоначальная численность команд составляет $x + 48$ юношей и $2x + 50$ девушек. По окончании первого дня соревнований выбыло $\frac{1}{6}(x+48)$ юношей и $\frac{1}{7}(2x+50)$ девушек. Позже еще выбыло из обеих команд одинаковое количество спортсменов, поэтому $48-\frac{1}{6}(x+48)=50-\frac{1}{7}(2x+50)$, откуда $x = 24$. Итак, первоначальная численность команд — 72 и 98 человек.

Ответ: 72 юноши и 98 девушек.

13.068. Рабочий час мастеров A и B оплачивается неодинаково, но оба мастера работали одинаковое число часов. Если бы A работал на один час меньше, а B — на пять часов меньше, то A заработал бы 720 руб., а B — 800 руб. Если бы, наоборот, A работал на пять часов меньше, а B — на один час меньше, то B заработал бы на 360 руб. больше, чем A. Сколько заработал каждый мастер в действительности?

Решение:

Пусть мастера работали x часов. Если бы A работал на 1 час меньше, то он зарабатывал бы $\frac{720}{x-1}$ руб. в час; если бы B работал на 5 часов меньше, то он зарабатывал бы $\frac{800}{x-5}$ руб. в час. По условию $\frac{800}{x-5}(x-1)-\frac{720}{x-1}(x-5)=360$, откуда $x = 25$. В действительности A заработал $\frac{720}{25-1}\cdot 25=750$ руб., B заработал $\frac{800}{20}\cdot 25=1000$ руб.

Ответ: 750 и 1000 руб.

13.069. В одном бассейне имеется 200 м^3 воды, а в другом — 112 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн вливается в час на 22 м^3 больше воды, чем в первый?

Решение.

Пусть количество воды в бассейнах станет одинаковым через x часов. Пусть y м^3 вливается воды в первый бассейн в час, $y+22$ м^3 — во второй. По условию $200+xy=112+x(y+22)$, откуда $x=4$.

Ответ: через 4 ч.

13.070. Через час после начала равномерного спуска воды в бассейне ее осталось 400 м^3, а еще через три часа — 250 м^3. Сколько воды было в бассейне?

Решение.

Пусть x м^3 воды было в бассейне. За 1 час спуска из бассейна вылили $(x-400)$ м^3; за 4 часа спуска — $(x-250)$ м^3. По условию $x-400=\frac{x-250}{4}$, откуда $x=450$.

Ответ: 450 м^3.

13.071. Для перевозки 60 т груза из одного места в другое затребовали некоторое количество машин. Ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому было дополнительно затребовано 4 машины. Какое количество автомашин было затребовано первоначально?

Решение.

Пусть x машин было затребовано первоначально. Одна машина может перевозить $\frac{60}{x}$ т груза. Ввиду неисправности дороги затребовали $x+4$ машины, а на одну машину грузили $\left(\frac{60}{x}-0{,}5\right)$ т груза. По условию $\left(\frac{60}{x}-0{,}5\right)(x+4)=60$. Отсюда $x=20$.

Ответ: 20.

13.072. Город C, расположенный между пунктами A и B, снабжается газом из этих пунктов, расстояние между которыми 500 км. Из резервуара A в каждую минуту откачивается 10000 м^3 газа, а из резервуара B — на 12% больше. При этом утечка газа в каждой магистрали составляет 4 м^3 на километр трубы. Зная, что в город C газ поступает из резервуаров A и B поровну, найти расстояние между городом C и пунктом A.

Решение.

Пусть x км — расстояние между A и C, $500-x$ км — между C и B. Учитывая утечку газа, из A в C поступает $10000-4x$ м^3 газа, из B в C поступает $10000\cdot1{,}12-4(500-x)$ м^3 газа. По условию $10000-4x=1{,}12\cdot10000-4(500-x)$, откуда $x=100$.

Ответ: 100 км.

13.073. Имеются два куска кабеля разных сортов. Масса первого куска равна 65 кг; другой, длина которого на 3 м больше длины первого и масса каждого метра которого на 2 кг больше массы каждого метра первого куска, имеет массу 120 кг. Вычислить длины этих кусков.

Решение.

Пусть x м — длина первого куска кабеля, $x+3$ м — второго. Масса каждого метра первого куска кабеля — $\frac{65}{x}$ кг. По условию масса второго куска кабеля — $(x+3)\left(\frac{65}{x}+2\right)=120$, откуда $x=5$ м или $x=19{,}5$ м. Длина второго куска кабеля 8 м или 22,5 м.

Ответ: 5 и 8 м или 19,5 и 22,5 м.

13.074. В швейный цех поступило три кипы бельевого материала, всего 5000 м. В первой кипе количество материала было в три раза меньше, чем во второй, а в третьей — 22% всего количества. Из материала первой кипы сшили 150 простыней и 240 наволочек. Для изготовления одной простыни требовалось на 3,25 м больше материала, чем для изготовления одной наволочки. Из скольких метров материала шьется одна наволочка?

Решение.

Пусть x м материала было в первой кипе, $3x$ м — во второй, $5000\cdot0{,}22=1100$ м — в третьей. По условию $x+3x+1100=5000$, откуда $x=975$ м — в первой кипе. Пусть одна наволочка шьется из y м материала, а простыня — из $3{,}25+y$ м. На простыни всего израсходовали $(3{,}25+y)\cdot 150$ м материала, на наволочки — $240y$ м. По условию $150(3{,}25+y)+240y=975$, откуда $y=1{,}25$.

Ответ: из 1,25 м.

13.075. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготовлять 86 деталей. Сколько деталей изготовляет каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

Решение.

Первоначально рабочие изготовляли за смену x и $72-x$ деталей, а затем $1{,}15x$ и $1{,}25(72-x)$ деталей. По условию $1{,}15x+90-1{,}25x=86$; $0{,}1x=4$; $x=40$; $1{,}15\cdot 40=46$

Ответ: 46 и 40 деталей.

13.076. Сбор кукурузы с полей животноводческой фермы составлял 4340 ц. На следующий год запланировано получить 5520 ц кукурузы за счет увеличения площади на 14 га и повышения урожайности на 5 ц с 1 га. Определить площадь, занятую под кукурузу, и урожайность в центнерах с 1 га (урожай был меньше 40 ц с 1 га).

Решение.

Пусть x га — площадь, занятая под кукурузу, $\frac{4340}{x}$ ц/га — урожайность. На следующий год площадь $x+14$ га, а урожайность $\frac{4340}{x}+5$ ц/га. По условию $\left(\frac{4340}{x}+5\right)(x+14)=5520$, откуда

$x=98$ га или $x=124$ га. Урожайность $\frac{4340}{98}\approx 44{,}3$ ц/га или

$\frac{4340}{124}=35$ ц/га.

Ответ: 124 га; 35 ц с 1 га.

13.077. Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку в лес и обратно. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за 2 ч, если известно, что путь, проделанный старшим братом за это время, на 40 км больше?

Решение.

Пусть x км проехал младший брат, $x+40$ км — старший. Младший брат проезжал 1 км за $\frac{120}{x}$ мин, старший за $\frac{120}{40+x}$ мин. По условию $\frac{120}{x}-4=\frac{120}{40+x}$, откуда $x=20$.

Ответ: 20 и 60 км.

13.078. Турист ехал на автомобиле 5/8 всего пути, а остальную часть — на катере. Скорость катера на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. На автомобиле турист ехал на 15 мин дольше, чем на катере. Чему равны скорость автомобиля и скорость катера, если весь путь туриста равен 160 км?

Решение.

Турист проехал на автомобиле $160\cdot\frac{5}{8}=100$ км, а на катере $160-100=60$ км. Пусть x км/ч — скорость катера, $20+x$ км/ч — автомобиля. Турист ехал на автомобиле $\frac{100}{20+x}$ ч, на катере — $\frac{60}{x}$ ч.

По условию $\frac{100}{20+x}-\frac{60}{x}=0{,}25$, откуда $x=60$ или $x=80$.

Ответ: скорость автомобиля 100 или 80 км/ч; скорость катера 80 или 60 км/ч.

13.079. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Спустя 4 ч после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

Решение.

График движения изображен на рис. 13.3. Пусть t — время (в часах), за которое второй турист догонит первого. Так как $v_{\text{вел}}=16$ км/ч, $v_{\text{мот}}=56$ км/ч, то $S_{\text{вел}}=(2{,}5+t)16$, $S_{\text{мот}}=56t$. Отсюда $56t=16t+40$, т.е. $t=1$ (ч). Итак, $S=56$ км.

Ответ: 56 км.

13.080. Из поселка, расположенного в 60 км от города, сегодня должен приехать отец студентки, который хотел посетить воскресную лекцию. Однако лекция перенесена на другой день. Чтобы

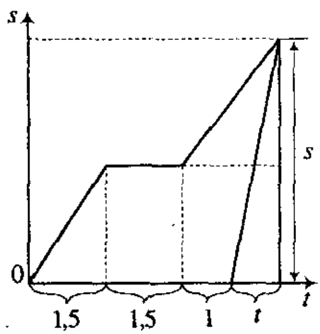


Рис. 13.3

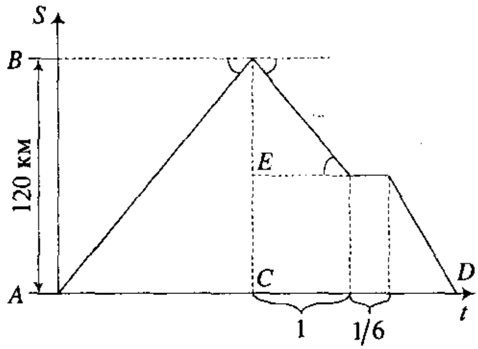


Рис. 13.4

предупредить отца об этом, дочь поехала по шоссе ему навстречу. При встрече выяснилось, что отец и дочь выехали на мопедах одновременно, но средняя скорость дочери была вдвое большей. Возвращаясь после встречи, каждый из них увеличил первоначальную скорость на 2 км/ч, и дочь прибыла в город на 5 мин позже, чем отец в поселок. С какой средней скоростью отец и дочь ехали первоначально?

Решение.

Пусть x км/ч — первоначальная скорость отца, $2x$ км/ч — дочери. До встречи отец проехал y км, дочь — $60-y$ км. По условию $\frac{y}{x}=\frac{60-y}{2x}$, откуда $y=20$ км проехал отец, 40 км проехала дочь. На обратный путь отец затратил $\frac{20}{x+2}$ ч, дочь — $\frac{40}{2x+2}$ ч. По условию $\frac{40}{2x+2}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{12}$, откуда $x=14$.

Ответ: 14 и 28 км/ч.

13.081. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

Решение.

По условию $AC = CD$ (рис. 13.4). Имеем $AC = \frac{120}{x}$, где x — первоначальная скорость; $CD = 1 + \frac{1}{6} + \frac{120 - x}{x + 6} \Rightarrow \frac{120}{x} = \frac{7}{6} + \frac{120 - x}{x + 6}$, откуда $x = 48$ (км/ч).

Ответ: 48 км/ч.

13.082. Две группы туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа выйдет на 2 ч раньше второй, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы. Если же вторая группа выйдет на 2 ч раньше, чем первая, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первой группы. С какой средней скоростью идет каждая группа?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость первой группы, y км/ч — скорость второй. Если первая группа выйдет раньше второй, то $2{,}5y + (2{,}5 + 2)x = 30$. Если вторая группа выйдет раньше первой, то $3x + (3 + 2)y = 30$. Решив систему $\begin{cases} 2{,}5y + 4{,}5x = 30, \\ 3x + 5y = 30, \end{cases}$ находим $x = 5$ км/ч, $y = 3$ км/ч.

Ответ: 5 и 3 км/ч.

13.083. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

Решение.

Пусть скорость поезда до задержки равна x км/ч, а после нее — $(x + 15)$ км/ч. Тогда (рис. 13.5) $AB = \frac{x}{5}$, $CE = 60$, $CD = 60 - \frac{x}{5}$, $BD = \frac{60 - \frac{x}{5}}{x}$, $AE = \frac{60}{x + 15}$. Так как $BD = AE$, то $\frac{60 - \frac{x}{5}}{x} = \frac{60}{x + 15}$, откуда $x = 60$ (км/ч).

Ответ: 60 км/ч.

13.084. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно навстречу друг другу два автобуса. В пути первый сделал остановку на 10 мин, второй — на 5 мин. Первый автобус прибыл в B на 25 мин раньше, чем второй прибыл в A.

Можно считать, что скорости движения автобусов были постоянными, причем скорость первого автобуса превышала скорость второго автобуса на 20 км/ч. Сколько времени продолжалась поездка пассажиров каждого из этих автобусов между пунктами A и B?

Решение.

Пусть x км/мин скорость второго автобуса, $\left(x+\frac{1}{3}\right)$ км/мин — первого. Первый автобус был в

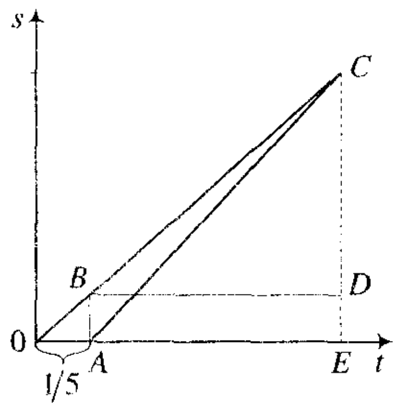


Рис. 13.5

пути $\frac{120}{x+\frac{1}{3}}+10$ мин; второй — $\frac{120}{x}+5$ мин. По условию

$$\frac{120}{x}+5-\left(\frac{120}{x+\frac{1}{3}}+10\right)=25.$$ Отсюда $x=1$ км/мин. Первый автобус был в

пути $\frac{120}{1+\frac{1}{3}}+10=100$ мин $=1$ ч 40 мин; второй — $\frac{120}{1}+5=125$ мин $=2$ ч 5 мин.

Ответ: 1 ч 40 мин и 2 ч 5 мин.

13.085. *Два брата взяли свои велосипеды и одновременно тронулись в путь с намерением проехать 42 км. Старший брат на всем пути сохранял одну и ту же скорость, а младший брат каждый час отставал от старшего на 4 км. Но так как старший брат отдыхал в пути целый час, а младший — только 20 мин, то к финишу они прибыли одновременно. Сколько времени продолжалась поездка?*

Решение.

Пусть x км/ч — скорость старшего брата, тогда $(x-4)$ км/ч — скорость младшего. Старший брат был в пути время $t_{\text{ст}}=\frac{42}{x}+1$, а младший — время $t_{\text{мл}} = \frac{42}{x-4} + \frac{1}{3}$. По условию $t_{\text{ст}} = t_{\text{мл}}$, то есть $\frac{42}{x} + 1 = \frac{42}{x-4} + \frac{1}{3}$, отсюда $x = 18$ и $t = 1 + \frac{42}{18} = 3\frac{1}{3}$.

Ответ: 3 ч 20 мин.

13.086. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 7 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Остаток уменьшили на 75% этого остатка и еще вычли задуманное число. В окончательном результате получили нуль. Какое число задумано?

Решение.

Пусть задумано число x. Рассмотрим числа $10x+7$, $10x+7-x^2$ и остаток $\frac{25}{100}\left(10x+7-x^2\right)$. Тогда $\frac{1}{4}\left(10x+7-x^2\right) - x = 0$, $x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 7$.

Ответ: 7.

13.087. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 5 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на задуманное число, а затем вычли задуманное число и в результате получили единицу. Какое число задумано?

Решение.

Пусть x — задуманное число. Тогда новое число можно представить в виде $10x+5$. По условию $\frac{10x+5-x^2}{x} - x = 1$, отсюда $x = 5$.

Ответ: 5.

13.088. На рис. 13.6 изображена окружность, касающаяся двух взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy, и прямая AB, касающаяся окружности в точке P. Радиус окружности $R = 10$ см, а площадь треугольника OAB равна 600 м². Найти координаты точек A, B, P, учитывая, что $OA > OB$.

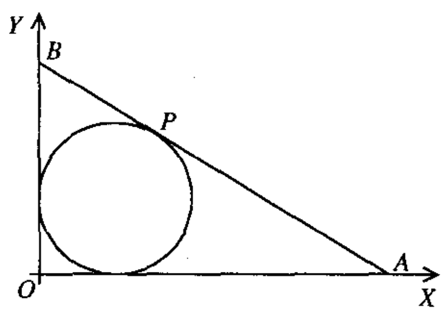


Рис. 13.6

Решение.

Пусть a и b — длины катетов; тогда $a-10+b-10$ — длина гипотенузы. Отсюда $(a+b-20)^2=a^2+b^2$ и $\frac{ab}{2}=600$, откуда $a=40$ (см), $b=30$ (см), т.е. $A(40;\ 0)$, $B(0;\ 30)$. Находим угловой коэффициент прямой AB: $k=-\frac{3}{4}$. Значит, уравнение прямой AB имеет вид $y=-\frac{3}{4}x+30$, а уравнение окружности — вид $(x-10)^2+(y-10)^2=100$. Решение системы этих уравнений дает координаты точки P: $P(16;\ 18)$.

Ответ: $A(40;\ 0)$, $B(0;\ 30)$, $P(16;\ 18)$.

13.089. Некоторое расстояние поезд прошел со скоростью 120км/ч. После этого расстояние, на 75 км большее, он прошел со скоростью 150 км/ч, а остальное расстояние, на 135 км меньшее пройденного, — со скоростью 96 км/ч. Как велик весь путь, если средняя скорость поезда оказалась равной 120 км/ч?

Решение.

Участок	Расстояние	Скорость	Время
Первый	x км	120 км/ч	$\frac{x}{120}$ ч
Второй	$75+x$ км	150 км/ч	$\frac{75+x}{150}$ ч
Третий	$2x-60$ км	96 км/ч	$\frac{2x-60}{96}$ ч

Весь путь равен $x+75+x+2x-60=4x+15$, все время равно

$\frac{x}{120}+\frac{75+x}{150}+\frac{2x-60}{96}=\frac{43x-150}{1200}$. Средняя скорость поезда: $\frac{4x+15}{\frac{43x-150}{1200}}=120.$

Отсюда $x=100$ км. Весь путь составит: $4\cdot 100+15=415$ км.

Ответ: 415 км.

13.090. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 40% меди?

Решение.

Первоначально в сплаве было $12 \cdot 0{,}45 = 5{,}4$ кг меди. После добавления олова эти 5,4 кг меди составляют 40%. Значит, масса всего куска сплава $\frac{5{,}4}{0{,}4} = 13{,}5$ кг. Итак, надо добавить $13{,}5 - 12 = 1{,}5$ кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

13.091. Имеющиеся на складе 300 кг товара проданы в неравных количествах двум организациям по цене 37,5 руб. за 1 кг. Первая организация перевозит купленный товар на расстояние 20 км, а вторая — на 30 км. Перевозка 10 кг товара обходится в 1,5 руб. за 1 км пути. Зная, что вторая организация заплатила за покупку и перевозку товара на 2700 руб. больше первой, определить, сколько килограммов купила каждая организация и какую сумму она заплатила за товар и его перевозку.

Решение.

Используя условие задачи, составим таблицу

Организация	Товар (кг)	Стоимость (руб.)	Перевозка (руб.)	Общая стоимость (руб.)
№ 1	x	$37{,}5x$	$3x$	$40{,}5x$
№ 2	$300 - x$	$37{,}5(300 - x)$	$4{,}5(300 - x)$	$42(300 - x)$

По условию задачи имеем $42(300 - x) - 40{,}5x = 2700$, откуда $x = 120$ (кг), $300 - x = 180$ (кг); $40{,}5x = 4860$ (руб.), $42(300 - x) = 7560$ (руб.).

Ответ: 120 кг и 4860 руб.; 180 кг и 7560 руб.

13.092. Денежная премия была распределена между тремя изобретателями: первый получил половину всей премии без 3/22 того, что получили двое других вместе. Второй получил 1/4 всей премии и 1/56 денег, полученных вместе двумя остальными. Третий получил 30000 руб. Как велика была премия и сколько денег получил каждый изобретатель?

Решение.

Пусть x руб. — премия первого изобретателя, y руб. — второго. По условию вся премия равна $x + y + 30000$ руб. Тогда

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x+y+30000) - \frac{3}{22}(y+30000), \\ y = \frac{1}{4}(x+y+30000) + \frac{1}{56}(x+30000), \end{cases}$$ откуда $x = 40000$, $y = 25000$. Вся

премия 40000 + 25000 + 30000 = 95000 руб.

Ответ: 95000 руб.; 40000, 25000 и 30000 руб.

13.093. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если бы к нему добавить некоторое количество чистого серебра, по массе равное 1/3 массы чистого серебра, первоначально содержавшегося в сплаве, то получился бы новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Какова масса сплава и каково первоначальное процентное содержание в нем серебра?

Решение.

Пусть x г — масса серебра, $x - 1845$ г — масса меди. Тогда $2x - 1845$ г — масса всего сплава. После добавления серебра его масса станет $x + \frac{1}{3}x$ г, а масса сплава — $2x - 1845 + \frac{1}{3}x$ г; $x + \frac{1}{3}x$ г составляют 83,5%. Значит, масса сплава $\left(x + \frac{1}{3}x\right) : 0{,}835$. Тогда $\left(x + \frac{1}{3}x\right) : 0{,}835 = 2x - 1845 + \frac{1}{3}x$, откуда $x = 2505$ г — масса серебра. Масса всего сплава $2 \cdot 2505 - 1845 = 3165$ г; 3165 г составляют 100%, 2505 г серебра составляют y%; $\frac{3165}{2505} = \frac{100}{y}$, отсюда $y \approx 79{,}1\%$.

Ответ: 3165 г; $\approx 79{,}1\%$.

13.094. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5% железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20%. Какое количество железа осталось еще в руде?

Решение.

В 200 кг примесей железа будет $x = \frac{200 \cdot 12{,}5}{100} = 25$ кг. Первоначально z кг железа составляло в 500 кг руды y%, т.е.

$z=\frac{500\cdot y}{100}=5y$ кг. В оставшейся руде $(5y-25)$ кг железа составляет $(y+20)\%$. Таким образом, $\frac{5y-25}{300}=\frac{y+20}{100} \Rightarrow 2y=85$, $y=\frac{85}{2}$. В руде останется железа $5y-25=\frac{425}{2}-25=212{,}5-25=187{,}5$ кг.

Ответ: 187,5 кг.

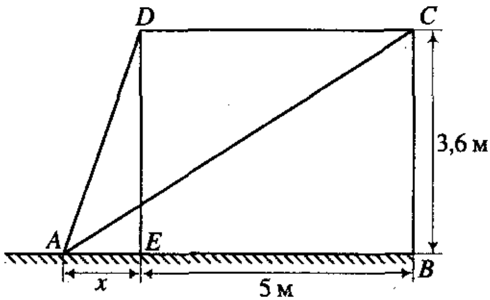


Рис. 13.7

13.095. На ровной горизонтальной площадке стоят две мачты на расстоянии 5 м друг от друга. На высоте 3,6 м от площадки к каждой мачте прикреплено по одному концу куска проволоки длиной 13 м. Проволока натянута в плоскости расположения мачт и прикреплена к площадке, как показано на рис. 13.7. На каком расстоянии от ближайшей мачты находится точка прикрепления проволоки к площадке?

Решение.

Обозначим искомое расстояние через x. Из ΔABC получим: $AB^2+BC^2=AC^2$; $AC=y$, $(x+5)^2+3{,}6^2=y^2$. Из ΔAED получим: $AE^2+ED^2=AD^2$; $AD=z$. $x^2+3{,}6^2=z^2$. По условию: $z+y=13$. Решив систему: $\begin{cases}(x+5)^2+3{,}6^2=y^2,\\ x^2+3{,}6^2=z^2,\\ z+y=13,\end{cases}$ находим, что $x=2{,}7$ м.

Ответ: 2,7 м.

13.096. Велосипедист каждую минуту проезжает на 500 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 120 км он затрачивает времени на 2 ч больше, чем мотоциклист. Вычислить скорость каждого из них.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста. Мотоциклист затратил на весь путь $\frac{120}{x}$ ч, а велосипедист — $\frac{120}{x}+2$ ч. Скорость велосипедиста — $(x-0{,}5\cdot 60)$ км/ч. По условию $(x-0{,}5\cdot 60)\left(\frac{120}{x}+2\right)=120$, отсюда $x=60$ км/ч — скорость мотоциклиста. Скорость велосипедиста — $60-30=30$ км/ч.

Ответ: 30 и 60 км/ч.

13.097. Расстояние от A до B по железной дороге равно 88 км, а по реке оно составляет 108 км. Поезд из A выходит на 1 ч позже теплохода и прибывает в B на 15 мин раньше. Найти среднюю скорость поезда, если известно, что она на 40 км/ч больше средней скорости теплохода.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость поезда, $x-40$ км/ч — скорость теплохода. Поезд был в пути $\frac{88}{x}$ ч, а теплоход — $\frac{108}{x-40}$ ч. По условию $\frac{108}{x-40}-\frac{88}{x}=1+\frac{1}{4}$, откуда $x=88$.

Ответ: 88 км/ч.

13.098. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 40 км, и встречаются спустя 2 ч после отправления. Затем они продолжают путь, причем велосипедист прибывает в A на 7 ч 30 мин раньше, чем пешеход в B. Найти скорости пешехода и велосипедиста, полагая, что они все время оставались неизменными.

Решение.

Таблицу значений скорости, пути и времени заполним в порядке, указанном цифрами (1), (2), ..., (12):

Турист	До встречи			После встречи		
	скорость, км/ч	**время, ч**	**путь, км**	**скорость, км/ч**	**время, ч**	**путь, км**
Пешеход	(1) x	(3) 2	(5) $2x$	(7) x	(11) $\frac{40-2x}{x}$	(9) $40-2x$
Велосипедист	(2) $20-x$	(4) 2	(6) $40-2x$	(8) $20-x$	(12) $\frac{2x}{20-x}$	(10) $2x$

По условию $\frac{40-2x}{x}-\frac{2x}{20-x}=\frac{15}{2}$, откуда $x=4$ (км/ч).

Ответ: 4 и 16 км/ч.

13.099. Расстояние между поселками A и B равно s км. Из A отправились в B одновременно по одной и той же дороге два автотуриста, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый турист прибыл в B на n ч раньше срока, а второй на $3n$ ч опоздал, так как последний проезжал за каждый час в среднем на r км меньше первого. Определить среднюю скорость каждого автотуриста.

Решение.

Пусть t — время, v_1 и v_2 — скорости; тогда $\frac{s}{v_1}=t-n$, (1) $\frac{s}{v_2}=t+3n$, (2) $v_1-v_2=r$. Вычитая (1) из (2), получим $s\left(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}\right)=4n \Rightarrow$ $\Rightarrow (v_1-v_2)s=4nv_1v_2 \Rightarrow v_1v_2=\frac{sr}{4n}$. Решением системы $\begin{cases} v_1+(-v_2)=r, \\ v_1(-v_2)=-\frac{sr}{4n}, \end{cases}$ являются корни $z_1=v_1$ и $z_2=-v_2$ квадратного уравнения $z^2-rz-\frac{sr}{4n}=0$.

Получаем ответ: $\frac{nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ или $\frac{-nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ км/ч.

Ответ: $\frac{nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$ и $\frac{-nr+\sqrt{nr(nr+s)}}{2n}$.

13.100. Определить целое положительное число по следующим данным: если его записать цифрами и присоединить справа цифру 4, то получится число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получится число, меньшее делителя на 27.

Решение.

Пусть x — искомое число. По условию $\frac{10x+4}{x+4}=x+4-27$, откуда $x=32$.

Ответ: 32.

13.101. В один и тот же час навстречу друг другу должны были выйти A из поселка M и B из поселка N. Однако A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км меньше, чем B. Отдохнув, они одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в N через 8 ч, а B пришел в M через 9 ч после встречи. Определить расстояния MN и скорости пешеходов.

Решение.

Пусть x км — расстояние от M до места встречи; $x+12$ км — расстояние от N до места встречи. Тогда расстояние между M и N равно $2x+12$ км. Пусть y км/ч — скорость пешехода A, z км/ч — скорость пешехода B. Тогда $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{x+12}{z}+6, \\ \frac{x+12}{y}=8, \\ \frac{x}{z}=9. \end{cases}$ Решив систему, находим: $x=36$ км, $y=6$ км/ч, $z=4$ км/ч. Тогда весь путь равен $2\cdot 36+12=84$ км.

Ответ: 84 км, 6 и 4 км/ч.

13.102. Даны два двузначных числа, из которых второе обозначено теми же цифрами, что и первое, но написанными в обратном порядке. Частное от деления первого числа на второе равно 1,75. Произведение первого числа на цифру его десятков в 3,5 раза больше второго числа. Найти эти числа.

Решение.

Представим первое число в виде $10x+y$, тогда второе — $10y+x$.

По условию: $\begin{cases} \frac{10x+y}{10y+x}=1{,}75, \\ (10x+y)x=3{,}5(10y+x). \end{cases}$ Решив систему, находим $x=2$, $y=1$. Искомые числа 21 и 12.

Ответ: 21 и 12.

13.103. От станции железной дороги до турбазы можно пройти по шоссе или тропинкой, причем тропинкой ближе на 5 км. Два товарища условились, что один пойдет по шоссе, строго выдерживая намеченную скорость v км/ч, а второй — тропинкой со скоростью 3 км/ч. Второй пришел на турбазу раньше первого на 1 ч. Найти расстояние от станции до турбазы по шоссе и скорость v первого товарища, если известно, что v — целое число.

Решение.

Пусть x км — расстояние от станции до турбазы по шоссе, $x-5$ км — по тропинке. По условию $\frac{x}{v}-\frac{x-5}{3}=1$, откуда $x=\frac{2v}{v-3}$. Выражение имеет смысл при $v>3$. Подбором находим: при $v=4$ км/ч $x=8$ км. Остальные решения этого уравнения не удовлетворяют условию $x-5>0$.

Ответ: 8 км, 4 км/ч.

13.104. Длина автобусного маршрута 16 км. В часы «пик» автобус переходит на режим экспресса, т.е. значительно уменьшает число остановок, вследствие чего продолжительность поездки от начала до конца маршрута сокращается на 4 мин, а средняя скорость автобуса увеличивается на 8 км/ч. С какой скоростью идет автобус в режиме экспресса?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость автобуса в режиме экспресса. Тогда время поездки в этом режиме будет $\left(\frac{16}{x-8}-\frac{1}{15}\right)$ ч. По условию $\left(\frac{16}{x-8}-\frac{1}{15}\right)x=16$, откуда $x=48$ км/ч.

Ответ: 48 км/ч.

13.105. По одной из трамвайных линий начали курсировать трамваи новой конструкции. Рейс протяженностью 20 км продолжается теперь на 12 мин меньше, так как средняя скорость трамвая новой конструкции на 5 км/ч больше средней скорости трамвая устаревшей конструкции. Сколько времени затрачивает на рейс трамвай новой конструкции и какова его средняя скорость?

Решение.

Пусть x км/ч — средняя скорость трамвая новой конструкции. Тогда время, которое он затрачивает на рейс, — $\frac{20}{x}$ ч. По условию $\frac{20}{x}=\frac{20}{x-5}-\frac{1}{5}$, откуда $x=25$ км/ч, и время — $\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$ ч = 48 мин.

Ответ: 48 мин, 25 км/ч.

13.106. *Самолет должен пролететь 2900 км. Пролетев 1700 км, он* сделал вынужденную посадку на 1 ч 30 мин, после чего полетел со скоростью, на 50 км/ч меньшей, чем раньше. Найти первоначальную скорость самолета, если известно, что он прибыл на место через 5 ч после вылета.

Решение.

Пусть x км/ч — первоначальная скорость самолета. До посадки он был в воздухе $\frac{1700}{x}$ ч, после посадки — $\frac{1200}{x-50}$ ч. По условию $\frac{1700}{x}+1{,}5+\frac{1200}{x-50}=5$, откуда находим $x=850$ км/ч.

Ответ: 850 км/ч.

13.107. Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать заданный участок шоссейной дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только одна первая бригада, а заканчивала ремонт участка дороги одна вторая бригада, производительность труда которой выше, чем у первой бригады. В результате ремонт заданного участка дороги продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила 2/3 всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован заданный участок дороги каждой бригадой отдельно?

Решение.

Пусть x — скорость работы первой бригады, y — второй. Работая вместе, бригады отремонтируют участок за $\frac{1}{x+y}$ дн. По условию $\frac{1}{x+y}=18$. Производительность первой бригады $\frac{1}{x}$; второй — $\frac{1}{y}$. По условию $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}=40$. Решив систему $\begin{cases}\frac{1}{x+y}=18,\\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}=40,\end{cases}$

находим: $\frac{1}{x}=45$ дн.; $\frac{1}{y}=30$ дн. или $\frac{1}{x}=24$ дн., $\frac{1}{y}=72$ дн. Учитывая условие задачи, окончательно: $\frac{1}{x}=45$ дн, $\frac{1}{y}=30$ дн. Значит, первая бригада отремонтирует весь участок за 45 дн., вторая — за 30 дн.

Ответ: 45 и 30 дней.

13.108. На полях, выделенных агролаборатории для опытов, с двух участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на втором — на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

Решение.

Пусть x ц зерна собирают с первого участка после применения новых методов, y ц — со второго участка. По условию $x+y=21{,}42$.

Первоначально с первого участка собрали $\frac{x}{1{,}8}$ ц, со второго — $\frac{y}{1{,}24}$ ц.

По условию $\frac{x}{1{,}8}+\frac{y}{1{,}24}=14{,}7$. Решив систему $\begin{cases} x+y=21{,}42 \\ \frac{x}{1{,}8}+\frac{y}{1{,}24}=14{,}7 \end{cases}$ находим

$x=10{,}26$ ц; $y=11{,}16$ ц.

Ответ: 10,26 и 11,16 ц.

13.109. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми равно 270 км. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час делает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость первого велосипедиста, $x-1{,}5$ км/ч — второго. До встречи первый проехал $x\cdot x$ км, а второй $x(x-1{,}5)$ км. По условию $x^2+x(x-1{,}5)=270$, откуда $x=12$ км/ч; $12-1{,}5=10{,}5$ км/ч.

Ответ: 12 и 10,5 км/ч.

13.110. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит 1/4 расстояния между A и B. За какие промежутки времени каждый поезд проходит весь путь?

Решение.

Пусть первый поезд проходит весь путь за x ч, второй — за y ч; расстояние между A и B равно a км. Тогда скорость первого поезда — $\frac{a}{x}$ км/ч; второго — $\frac{a}{y}$ км/ч. Первый пройдет половину пути за $\frac{a}{2} \Big/ \frac{a}{x} = \frac{x}{2}$ ч; второй — за $\frac{y}{2}$ ч. По условию $\frac{x}{2} + 2 = \frac{y}{2}$.

Выйдя одновременно, поезда пройдут за 2 ч $2\left(\frac{a}{x} + \frac{a}{y}\right) = \frac{3}{4}a$ км $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{4}, \\ \frac{x}{2} + 2 = \frac{y}{2}. \end{cases}$ Решив систему, находим: $x = 4$ ч, $y = 8$ ч.

Ответ: 4 и 8 ч.

13.111. Поезд был задержан на t ч. Увеличив скорость на m км/ч, машинист на перегоне в s км ликвидировал опоздание. Определить, какую скорость должен был иметь поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.

Решение.

Пусть m_1 км/ч — скорость поезда, если бы он шел без задержки; t_1 ч — время движения поезда в этом случае. По условию $m_1 \cdot t_1 = s$. Двигаясь быстрее со скоростью $m_1 + m$ км/ч, поезд был в пути $(t_1 - t)$ ч. Тогда $s = (m_1 + m)(t_1 - t)$. Отсюда $\begin{cases} m_1 \cdot t_1 = (m_1 + m)(t_1 - t), \\ t_1 = \frac{s}{m_1}. \end{cases}$ Решив систему, находим $m_1 = \frac{\sqrt{tm(4s + tm)} - tm}{2t}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{tm(4s + tm)} - tm}{2t}$ км/ч.

13.112. Два тела движутся навстречу друг другу из двух мест, расстояние между которыми 390 км. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того как начало двигаться первое тело, они встретятся?

Решение.

Пусть t с — время движения первого тела до встречи; $t-5$ с — второго. Первый прошел до встречи $\frac{at^2}{2}=\frac{6t^2}{2}=3t^2$ км; второй — $12(t-5)$ км. По условию $3t^2+12(t-5)=360$, откуда $t=10$ с.

Ответ: через 10 с.

13.113. В отверстие трубы вошла одна материальная частица, а спустя 6,8 мин в то же отверстие вошла вторая частица. Войдя в трубу, каждая частица немедленно начинает поступательное движение вдоль трубы: первая частица движется равномерно со скоростью 5 м/мин, а вторая в первую минуту пробегает 3 м, а в каждую следующую минуту на 0,5 м больше, чем в предыдущую. Через сколько минут вторая частица догонит первую?

Решение.

Пусть t — время (в минутах), за которое вторая частица догонит первую. Расстояние, пройденное второй частицей, равно сумме t членов арифметической прогрессии, у которой $a_1=3$, $d=0{,}5$; следовательно, $s=\frac{2a_1+d(t-1)}{2}t=\frac{6+0{,}5(t-1)}{2}t$. То же расстояние, пройденное первой частицей, составит $5(6{,}8+t)=34+5t$. Итак, $\frac{6+0{,}5(t-1)}{2}t=34+5t$, откуда $t=17$ (мин).

Ответ: 17 мин.

13.114. Расстояние между двумя городами равно a км. Два автомобилиста, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t ч раньше второго. Если же они выедут одновременно друг другу навстречу, то встреча произойдет через $2t$ ч. Определить скорость каждого автомобиля, если считать, что скорости постоянны на всем пути.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость первого автомобиля, y км/ч — второго. Первый проедет полпути за $\frac{a}{2x}$ ч; второй — за $\frac{a}{2y}$. По условию $\frac{a}{2x}+t=\frac{a}{2y}$. За $2t$ ч они проедут $2t(x+y)=a$ км. Решив систему

$$\begin{cases} 2t(x+y)=a, \\ \frac{a}{2x}+t=\frac{a}{2y}, \end{cases}$$ находим $x_1=\frac{(\sqrt{5}-1)a}{4t}$, $x_2=\frac{-a-\sqrt{5}a}{4t}<0$. Тогда

$$y=\frac{(3-\sqrt{5})a}{4t}.$$

Ответ: $\frac{a(3-\sqrt{5})}{4t}$ и $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{4t}$ км/ч.

13.115. Турист A отправился из города M в город N с постоянной скоростью 12 км/ч. Турист B, находившийся в городе N, получив сигнал, что A уже проехал 7 км, тотчас выехал навстречу ему и проезжал каждый час 0,05 всего расстояния между M и N. С момента выезда B до его встречи с A прошло столько часов, на сколько километров в час продвигался B. Найти расстояние между городами M и N, если оно не меньше 100 км.

Решение.

Пусть x км — расстояние между M и N. Тогда скорость туриста B — $0{,}05x$ км/ч. До встречи A проехал $7+0{,}05x\cdot 12$ км; B проехал $(0{,}05x)^2$ км. По условию $7+0{,}05x\cdot 12+(0{,}05x)^2=x$, откуда $x_1=20$ км; $x_2=140$ км. Учитывая, что $x\geq 100$ км, находим $x=140$ км.

Ответ: 140 км.

13.116. Выйдя со станции с опозданием в 20 мин, поезд покрыл перегон 160 км со скоростью, превышающей скорость по расписанию на 16 км/ч, и пришел к концу перегона вовремя. Какова по расписанию скорость поезда на этом перегоне?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость поезда на перегоне по расписанию. Двигаясь со скоростью $(x+16)$ км/ч поезд прошел перегон за t ч.

Значит, $(x+16)t=160$; двигаясь со скоростью x км/ч, поезд проходит перегон за $t+\frac{1}{3}$ ч. Отсюда $\begin{cases}(x+16)t=160,\\ x\left(t+\frac{1}{3}\right)=160,\end{cases}$ откуда $x=80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

13.117. Велосипедист проехал 60 км из пункта A в пункт B. На обратном пути он первый час проехал с прежней скоростью, после чего сделал остановку на 20 мин. Начав движение снова, он увеличил скорость на 4 км/ч и поэтому потратил на путь из B в A столько же времени, сколько и на путь из A в B. Определить скорость велосипедиста на пути из A в B.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость велосипедиста на пути из A в B. На путь из A в B он затратил $\frac{60}{x}$ ч; на путь обратно — $1+\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}$.

По условию $\frac{60}{x}=1+\frac{1}{3}+\frac{60-x}{x+4}$, откуда $x=20$ км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

13.118. Два автобуса одновременно выехали с фабрики и отправились в зону отдыха, к озеру. Расстояние между фабрикой и озером 48 км. Первый автобус прибыл к озеру на 10 мин раньше второго, причем средняя скорость второго меньше средней скорости первого на 4 км/ч. Вычислить скорости автобусов.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость первого автобуса, $x-4$ км/ч — второго. Первый автобус приехал к озеру за $\frac{48}{x}$ ч, второй — за $\frac{48}{x-4}$ ч.

По условию $\frac{48}{x-4}-\frac{48}{x}=\frac{1}{6}$, откуда $x=36$ км/ч, $36-4=32$ км/ч.

Ответ: 32 и 36 км/ч.

13.119. Произведение цифр двузначного числа в три раза меньше самого числа. Если к искомому числу прибавить 18, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

Решение.

Представим искомое число в виде $10x+y$. Тогда

$\begin{cases}10x + y = 3xy, \\ 10x + y + 18 = 10y + x.\end{cases}$ Решив систему, находим $x = 2$, $y = 4$. Искомое число — 24.

Ответ: 24.

13.120. Мотоциклист остановился для заправки горючим на 12 мин. После этого, увеличив скорость движения на 15 км/ч, он наверстал потерянное время на расстоянии 60 км. С какой скоростью он двигался после остановки?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста после остановки; t ч — время, за которое мотоциклист прошел бы 60 км со скоростью $x-15$ км/ч; $t-0{,}2$ ч — время, за которое мотоциклист прошел 60 км со скоростью x км/ч. Тогда $\begin{cases}(t-0{,}2)x = 60, \\ t(x-15) = 60.\end{cases}$ Решив систему, находим $x = 75$ км/ч.

Ответ: 75 км/ч.

13.121. При испытаниях на дальность самолет пролетел от заводского аэродрома до заранее намеченного пункта всего s км, затратив на это t_1 ч. Затем он повернул обратно и за время t_2 ч возвратился на аэродром $(t_1 < t_2)$. В полете туда и обратно истинная скорость самолета (скорость относительно неподвижной массы воздуха) сохранялась одной и той же, а неравенство $t_1 < t_2$ объясняется влиянием ветра, сначала попутным, а затем встречным. Найти истинную скорость v самолета, скорость ветра $v_в$ и путь $s_{ист} = v_в(t_2 - t_1)$, пройденный самолетом относительно неподвижной массы воздуха.

Решение.

От аэродрома до намеченного пункта самолет летел со скоростью $\frac{S}{t_1} = v + v_в$ км/ч, а обратно — со скоростью $\frac{S}{t_2} = v - v_в$. Решив систему: $\begin{cases}\frac{S}{t_1} = v + v_в, \\ \frac{S}{t_2} = v - v_в,\end{cases}$ находим $v = \frac{S(t_2 + t_1)}{2t_1t_2}$, $v_в = \frac{S(t_2 - t_1)}{2t_1t_2}$.

$$S_{ист}=v_в(t_2-t_1)=\frac{S(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2}.$$

Ответ: $v=\frac{S(t_2+t_1)}{2t_1t_2}$; $v_в=\frac{S(t_2-t_1)}{2t_1t_2}$; $S_{ист}=\frac{S(t_2-t_1)^2}{2t_1t_2}$.

13.122. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 20 км от их дома. Чтобы добраться до стадиона, они решили воспользоваться своим велосипедом и договорились, что отправятся одновременно, один на велосипеде, а другой пешком; проехав часть пути, первый оставит велосипед, а второй, дойдя до места, где будет оставлен велосипед, дальше поедет на нем и догонит первого у входа на стадион. Где должен оставить велосипед первый брат и сколько времени уйдет на дорогу, если каждый из братьев будет идти равномерно со скоростью 4 км/ч, а ехать в 5 раз быстрее?

Решение.

Пусть x км пройдет второй брат. На этот путь он затратит $\frac{x}{4}$ ч. Оставшиеся $20-x$ км он проедет за $\frac{20-x}{4\cdot 5}$ ч. Все время движения второго брата — $\frac{x}{4}+\frac{20-x}{20}$ ч. Первый брат проедет x км за $\frac{x}{20}$ ч и пройдет $(20-x)$ км за $\frac{20-x}{4}$ ч. В пути он будет $\frac{x}{20}+\frac{20-x}{4}$ ч. По условию $\frac{x}{4}+\frac{20-x}{20}=\frac{x}{20}+\frac{20-x}{4}$, откуда $x=10$ км. На всю дорогу уйдет $\frac{x}{20}+\frac{20-x}{4}=\frac{10}{20}+\frac{20-10}{4}=3$ ч.

Ответ: на середине пути; 3 ч.

13.123. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого свою скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Определить скорость мотоциклиста до задержки.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость мотоциклиста до задержки, $x+10$ км/ч — на перегоне. Не задерживаясь, мотоциклист проехал бы 80 км за t ч,

но он прошел 80 км со скоростью $x+10$ км/ч за $t-0{,}4$ ч. Тогда
$\begin{cases}(x+10)(t-0{,}4)=80, \\ x\cdot t=80,\end{cases}$ откуда $x=40$ км/ч.

Ответ: 40 км/ч.

13.124. Из порта одновременно вышли два теплохода, причем один из них пошел на юг, а другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними составило 174 км. Найти среднюю скорость каждого теплохода, если известно, что один из них в среднем за каждый час проходил на 3 км больше, чем второй.

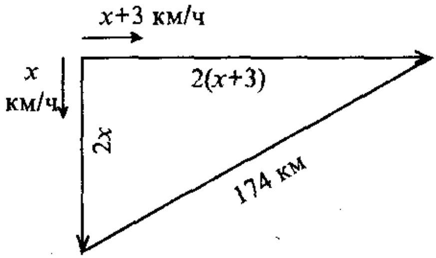


Рис. 13.8

Решение.

Пусть x км/ч — скорость второго теплохода, $x+3$ км/ч — первого. За 2 ч первый прошел $2(x+3)$ км, а второй $2x$ км. Из прямоугольного треугольника (рис. 13.8) по теореме Пифагора $(2x)^2+(2(x+3))^2=174^2$, откуда $x=60$ км/ч.

Ответ: 60 и 63 км/ч.

13.125. Скорости пассажирского и товарного поездов относятся как $a:b$. Пассажирский поезд вышел со станции A на 0,5 ч позже товарного, а прибыл на станцию B на 0,5 ч раньше его. Найти скорости поездов, если расстояние между A и B равно s км.

Решение.

Пусть ax км/ч — скорость пассажирского поезда, bx км/ч — товарного. Пассажирский поезд был в пути $\frac{s}{ax}$ ч, товарный — $\frac{s}{bx}$ ч.

По условию $\frac{s}{bx}=\frac{s}{ax}+0{,}5+0{,}5$, откуда $x=\frac{-sb+sa}{ab}$. Тогда скорость пассажирского поезда $\frac{s(a-b)}{b}$ км/ч; товарного — $\frac{s(a-b)}{a}$ км/ч.

Ответ: $\frac{s(a-b)}{b}$ и $\frac{s(a-b)}{a}$ км/ч.

13.126. По двум окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

Решение.

Пусть первая точки делает оборот за x с; вторая — за $x+5$ с. В минуту первая точка делает $\frac{60}{x}$ оборотов, а вторая — $\frac{60}{x+5}$. По условию $\frac{60}{x}=\frac{60}{x+5}+2$, откуда $x=10$. Первая точка делает в минуту $\frac{60}{10}=6$ оборотов, вторая — $\frac{60}{15}=4$ оборота.

Ответ: 4 и 6.

13.127. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал несколько быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 м больше чем второй. Продолжая бег, первый пони подбежал к дрессировщику, оставшемуся на том месте, от которого начали бежать пони, через 9 с после встречи со вторым пони, а второй — через 16 с после их встречи. Каков диаметр арены?

Решение.

Пусть x м пробежал до встречи второй пони, $x+5$ м — первый. Тогда длина всей арены $\pi d=2x+5$. Скорость первого пони $\frac{x}{9}$ м/с, второго — $\frac{x+5}{16}$ м/с. По условию $9\frac{x+5}{x}=16\frac{x}{x+5}$, откуда $x=15$, $l=\pi d=35$ м. Отсюда $d=\frac{l}{\pi}\approx 11$ м.

Ответ: ≈ 11 м.

13.128. Над пунктом A вертолет был в 8 ч 30 мин. Пролетев по прямой s км, вертолет оказался над пунктом B. Продержавшись в воздухе над пунктом B 5 мин, вертолет пошел обратным курсом по той же трассе. К пункту A он вернулся в 10 ч 35 мин. От A к B он летел по ветру, а обратно против ветра. Скорость ветра все время была постоянной. Найти скорость ветра, если собственная скорость вертолета также все время постоянна и при безветрии равна v км/ч.

При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

Решение.

Пусть x ч занял путь от A к B, y ч — от B к A. По условию $x+y=2$. Скорость вертолета от A к B была $v+v_в=\frac{s}{x}$, а на обратном пути — $v-v_в=\frac{s}{y}$. Решив систему $\begin{cases} x+y=2, \\ v+v_в=\frac{s}{x}; \\ v-v_в=\frac{s}{y}, \end{cases}$ находим $v_в=\sqrt{v(v-s)}$ км/ч при $v>s$.

Ответ: $\sqrt{v(v-s)}$ км/ч при $v>s$.

13.129. В 9 ч самоходная баржа вышла из A вверх по реке и прибыла в пункт B; 2 ч спустя после прибытия в B эта баржа отправилась в обратный путь и прибыла в A в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что средняя скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи все время постоянна, определить, когда баржа прибыла в пункт B. Расстояние между A и B равно 60 км.

Решение.

Пусть v км/ч — собственная скорость баржи. Из A в B баржа плыла $\frac{60}{v-3}$ ч, обратно — $\frac{60}{v+3}$ ч. По условию $\frac{60}{v-3}+2+\frac{60}{v+3}=10\frac{1}{3}$, откуда $v=15$ км/ч. Баржа прибыла в B в $9+\frac{60}{15-3}=14$ ч.

Ответ: в 14 ч.

13.130. Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по той же трассе через 5 ч с момента отплытия. Весь рейс составил 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем им требовалось столько же времени, сколько на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения, время проезда туда и время проезда обратно.

Решение.

Пусть v км/ч — собственная скорость лодки, $v_т$ км/ч — скорость течения. По условию $\begin{cases} \dfrac{2}{v-v_т}=\dfrac{3}{v+v_т}, \\ \dfrac{5}{v-v_т}+\dfrac{5}{v+v_т}=5, \end{cases}$ откуда $v_т=\dfrac{5}{12}$ км/ч; $v=\dfrac{25}{12}$ км/ч.

Время проезда туда $\dfrac{5}{\dfrac{25}{12}-\dfrac{5}{12}}=3$ ч, обратно — 2 ч.

Ответ: $\dfrac{5}{12}$ км/ч; 3 и 2 ч.

13.131. Бакенщик, инспектируя свой участок реки, в обыкновенной весельной лодке поднялся вверх по реке на 12,5 км, а затем по той же трассе вернулся на прежнее место. В этом рейсе он преодолевал каждые 3 км против течения и каждые 5 км по течению в среднем за одинаковые промежутки времени, а всего в пути находился ровно 8 ч. Найти скорость течения и время рейса бакенщика вверх по реке.

Решение.

Пусть v км/ч — собственная скорость лодки, $v_т$ км/ч — скорость течения. По условию $\begin{cases} \dfrac{3}{v-v_т}=\dfrac{5}{v+v_т}, \\ \dfrac{12{,}5}{v-v_т}+\dfrac{12{,}5}{v+v_т}=8, \end{cases}$ откуда $v_т=\dfrac{5}{6}$ км/ч, $v=\dfrac{20}{6}$ км/ч.

Время рейса бакенщика вверх по реке — $\dfrac{12{,}5}{\dfrac{20}{6}-\dfrac{5}{6}}=5$ ч.

Ответ: $\dfrac{5}{6}$ км/ч; 5 ч.

13.132. В лабораторной установке некоторая жидкость поступает в сосуд через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то сосуд наполнится за 6 мин. Если же наполнять сосуд только через второй кран, то на это потребуется 0,75 того времени, за которое может наполниться сосуд только через один первый кран. Через один третий кран этот сосуд наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполнения сосуда?

Решение.

Пусть первый кран надо открыть на x мин, второй — на y мин, третий — на z мин. Если все краны открыть одновременно, то $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$. По условию $y=0{,}75x$; $z=y+10$. Решив систему

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\\ y=0{,}75x,\\ z=y+10,\end{cases}$$ находим $x=\frac{56}{3}$ мин; $y=14$ мин; $z=24$ мин.

Ответ: на $\frac{56}{3}$, 14 и 24 мин.

13.133. Бассейн для плавания имеет три трубы разного сечения для отвода воды с помощью равномерно откачивающего насоса. Через первую и вторую трубы вместе при закрытой третьей трубе наполненный бассейн опорожняется за a мин, через первую и третью вместе при закрытой второй — за b мин, а через вторую и третью трубы при закрытой первой — за c мин. За какое время наполненный бассейн опорожняется через каждую трубу в отдельности?

Решение.

Пусть через первую трубу бассейн опорожняется за x мин; через вторую — за y мин; через третью — за z мин. По условию:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c},\end{cases}$$ откуда $x=\frac{2abc}{ab+bc-ac}$ мин, $y=\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ мин,

$z=\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин.

Ответ: за $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$ и $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$ мин.

13.134. Согласно программе, два станка на поточной линии должны за a ч обработать по одинаковому числу деталей. Первый станок выполнил задание. Второй станок оказался не вполне исправным, работал с перебоями, вследствие чего за то же время обработал на n деталей меньше, чем первый. На обработку одной детали на втором станке затрачивалось в среднем на b мин больше, чем на первом. Сколько деталей обработал каждый станок?

Решение.

Пусть x деталей обработал первый станок, $x-n$ деталей — второй. На обработку одной детали на первом станке затрачивалось $\frac{a}{x}$ ч, на втором — $\frac{a}{x-n}$ ч. По условию $\frac{a}{x-n}=\frac{a}{x}+\frac{b}{60}$, откуда

$$x=\frac{bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b};\ x-n=\frac{-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}.$$

Ответ: $\frac{bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$ и $\frac{-bn+\sqrt{b^2n^2+240abn}}{2b}$ деталей.

13.135. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч скорее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только 0,6 всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения этого задания?

Решение.

Пусть x ч необходимо ученикам для выполнения задания; $x-15$ ч — бригаде слесарей. За 18 ч ученики выполнят $\frac{1}{x}\cdot 18$ всего задания, за 6 ч слесари выполнят $\frac{6}{x-15}$ всего задания. По условию $\frac{18}{x}+\frac{6}{x-15}=0{,}6$, откуда $x=45$ ч.

Ответ: 45 ч.

13.136. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки больше скорости плота на 12 км/ч?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость плота, $x+12$ км/ч — скорость лодки. 20 км плот пройдет за $\frac{20}{x}$ ч, лодка — за $\frac{20}{x+12}$ ч. По условию $\frac{20}{x}-\frac{20}{x+12}=\frac{16}{3}$, откуда $x=3$ км/ч.

Ответ: 3 км/ч.

13.137. Три машины разных систем выполняют некоторую счетную работу. Если всю работу поручить только одной второй или одной первой машине, то одна вторая машина затратит на выполнение всей работы на 2 мин больше, чем одна первая. Одна третья машина может выполнить всю работу за срок, вдвое больший, чем одна первая. Так как части работы однотипны, то всю работу можно поделить между тремя машинами. Тогда, работая вместе и закончив работу одновременно, они выполнят ее за 2 мин 40 с. За какое время может выполнить эту работу каждая машина, действуя отдельно?

Решение.

Пусть первая машина может выполнить работу за x мин, вторая — за y мин, третья — за z мин. По условию $\begin{cases} y=x+2, \\ z=2x, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{8}, \end{cases}$

откуда $x=6$ мин, $y=8$ мин, $z=12$ мин.

Ответ: за 6, 8 и 12 мин.

13.138. Двое рабочих, из которых второй начал работу на 1,5 дня позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее выполнения понадобилось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту же работу?

Решение.

Пусть первый рабочий выполнил бы всю работу за x дн., второй — за $x-3$ дн. За 7 дн. первый выполнил $\frac{7}{x}$ всей работы, за

$7-1{,}5=5{,}5$ дн. второй сделал $\frac{5{,}5}{x-3}$ работы. Тогда $\frac{7}{x}+\frac{5{,}5}{x-3}=1$, откуда $x=14$ дн.

Ответ: за 14 и 11 дней.

13.139. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно 8/3, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 18.

Решение.

Представим искомое число в виде $10x+y$. Тогда по условию

$$\begin{cases}\frac{10x+y}{xy}=\frac{8}{3},\\ 10x+y=10y+x+18,\end{cases}$$ откуда $x=6$, $y=4$. Искомое число — 64.

Ответ: 64.

13.140. На одном из двух станков обрабатывают партию деталей на 3 дня дольше, чем на другом. Сколько дней продолжалась бы обработка этой партии деталей каждым станком в отдельности, если известно, что при совместной работе на этих станках втрое большая партия деталей была обработана за 20 дней?

Решение.

Время (t), количество работы, выполняемой в единицу времени, т. е. производительность (W), и весь объем работы (V) связаны соотношением $V=Wt$. Примем $V=1$ и заполним следующую таблицу:

Станок	Время, дни	Объем работы	Производительность
Первый	x	1	$\frac{1}{x}$
Второй	$x-3$	1	$\frac{1}{x-3}$
Оба вместе	20	3	$\frac{3}{20}$

Так как при совместной работе станков их производительности складываются, то $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{20}$, откуда $x=15$.

Ответ: 15 и 12 дней.

13.141. Было задано целое число. Требовалось увеличить его на 200 000 и полученное число утроить. Вместо этого приписали к цифровой записи заданного числа справа цифру 2 и получили правильный результат. Какое число было задано?

Решение.

Пусть x — искомое число. Приписав к этому числу справа цифру 2, получим число $10x+2$. По условию $10x+2=3(x+200000)$, откуда $x=85714$.

Ответ: 85714.

13.142. Чан наполняется двумя кранами A и B. Наполнение чана только через кран A длится на 22 мин дольше, чем через кран B. Если же открыть оба крана, то чан наполнится за 1 ч. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?

Решение.

Пусть чан наполняется только через кран B за x мин, через A — за $x+22$ мин. По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=\frac{1}{60}$, откуда $x=110$ мин.

Ответ: за 132 и 110 мин.

13.143. Некоторую работу A выполняет в срок, на a дней больший, чем B, и на b дней больший, чем C. Работая вместе, A и B выполняют эту работу за столько же дней, что и C. Определить время, за которое каждый выполняет эту работу отдельно. При каком соотношении между заданными величинами задача имеет решение?

Решение.

Пусть A выполняет работу за x дн., B — за $x-a$ дн., C — за $x-b$ дн. По условию $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}=\frac{1}{x-b}$, откуда $x=b+\sqrt{b(b-a)}$ дн.; при $b>a$, $x-a=b-a+\sqrt{b(b-a)}$ дн.; $x-b=\sqrt{b(b-a)}$ дн.

Ответ: $b+\sqrt{b(b-a)}$; $b-a+\sqrt{b(b-a)}$; $\sqrt{b(b-a)}$ дней; задача имеет решение при $b>a$.

13.144. Сумма всех четных двузначных чисел разделилась на одно из них без остатка. Полученное частное отличается от делителя только порядком цифр, а сумма его цифр равна 9. Какое двузначное число являлось делителем?

Решение.

Представим делитель в виде $10a+b$. Тогда по условию $\begin{cases} \dfrac{2430}{10a+b}=10b+a, \\ a+b=9, \end{cases}$ откуда $a = 4$, $b = 5$. Искомое число — 54.

Ответ: 54.

13.145. Сначала катер шел 10 км по течению реки, а затем вдвое большее растояние — по озеру, в которое река впадает. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки 7 км/ч.

Решение.

Пусть v км/ч — собственная скорость катера. По течению реки катер шел $\dfrac{10}{v+7}$ ч, по озеру — $\dfrac{20}{v}$ ч. По условию $\dfrac{10}{v+7}+\dfrac{20}{v}=1$, откуда $v^2-23v-140=0$, т. е. $v = 28$ (км/ч).

Ответ: 28 км/ч.

13.146. Найти три числа, из которых первое больше второго во столько раз, во сколько второе больше третьего. Если из первого числа вычесть сумму двух других, то получится 2, а если к первому прибавить полуразность второго и третьего, то получится 9.

Решение.

Пусть x, y, z — искомые числа. По условию $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{y}{z}, \\ x-(y+z)=2, \\ x+\dfrac{y-z}{2}=9, \end{cases}$ откуда $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$ или $x = -6{,}4$; $y = 11{,}2$; $z = -19{,}6$.

Ответ: 8; 4; 2 или $-6{,}4$; $11{,}2$; $-19{,}6$.

13.147. Имеется лист жести в форме прямоугольника, у которого отношение длины к ширине равно 2:1. Из этого листа изготовлена открытая сверху коробка таким образом, что по углам листа вырезано по квадрату со стороной 3 см, и получившиеся края загнуты. Определить размеры листа жести, если объем коробки оказался равным 168 см^3.

Решение.

Пусть $2a$ см — длина листа, a см — его ширина. Длина коробки $(2a-6)$ см, ее ширина — $(a-6)$ см, а высота — 3 см. Объем коробки равен $3(a-6)(2a-6)=168$, откуда $a=10$ см — ширина листа, 20 см — его длина.

Ответ: 10×20 см.

13.148. Фотокарточка размерами 12×18 см вставлена в рамку постоянной ширины. Определить ширину рамки, если ее площадь равна площади самой карточки.

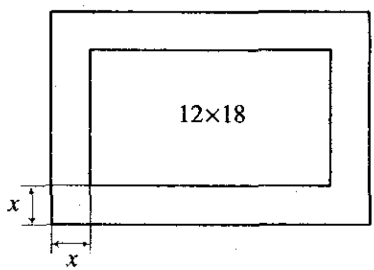


Рис. 13.9

Решение.

Пусть x см — ширина рамки (рис. 13.9). Тогда ее площадь равна $2\cdot12x+2(18+2x)x$ см. По условию $2\cdot12x+2(18+2x)x=12\cdot18$, откуда $x=3$ см.

Ответ: 3 см.

13.149. Найти два числа, сумма которых равна 44, причем меньшее число отрицательно. Процентное отношение разности между большим и меньшим числами к меньшему числу совпадает с меньшим числом.

Решение.

Пусть x и y — искомые числа ($y<0$). Тогда $\begin{cases}x+y=44,\\ \dfrac{x-y}{y}100=y,\end{cases}$ откуда $x=264$, $y=-220$.

Ответ: -220 и 264.

13.150. В рукописи задачника по арифметике был написан пример, в котором данное число надо умножить на 3 и от полученного результата отнять 4. В типографии допустили опечатку: вместо знака умножения поставили знак деления, а вместо минуса — плюс. Тем не менее конечный результат от этого не изменился. Какой пример предполагали поместить в задачнике?

Решение.

Пусть x — данное число. Тогда предполагаемый пример имеет вид — $3x-4$, а напечатанный — $\frac{x}{3}+4$. По условию $3x-4=\frac{x}{3}+4$, откуда $x=3$.

Ответ: $3\cdot 3-4$.

13.151. Кошка, гнавшаяся за мышкой вдоль длинного коридора, догнала ее через a с после начала погони. Первоначальное расстояние между ними l м. Если при таком же начальном расстоянии мышка с перепугу побежала бы не от кошки, а навстречу ей, то была бы схвачена через b с. Полагая, что в том и в другом случае кошка и мышка прилагали бы максимальные усилия, найти средние скорости каждой из них.

Решение.

Пусть x м/с — скорость мышки, y м/с — скорость кошки. За a с кошка пробежала $l+ax$ м, значит, $\frac{l+ax}{y}=a$. Во втором случае за b с кошка пробежала $l-bx$ м, и $\frac{l-bx}{y}=b$. Решив систему $\begin{cases}\frac{l+ax}{y}=a,\\ \frac{l-bx}{y}=b,\end{cases}$

находим $x=\frac{l(a-b)}{2ab}$; $y=\frac{l(a+b)}{2ab}$.

Ответ: $\frac{l(a+b)}{2ab}$ и $\frac{l(a-b)}{2ab}$ м/с.

13.152. Участок прямоугольной формы обнесен изгородью. Если от него отрезать по прямой некоторую часть так, что оставшаяся часть окажется квадратом, то при этом его площадь уменьшится на 400 м^2, а изгородь уменьшится на 20 м. Определить первоначальные размеры участка.

Решение.

Пусть $x\times y$ м — первоначальный размер участка ($x<y$). Тогда первоначальная площадь участка — $x\cdot y$ м^2. По условию

$x\cdot y=x^2+400$ (рис. 13.10). Длина изгороди $2(x+y)=4x+20$. Решив систему $\begin{cases} x\cdot y=x^2+400, \\ 2(x+y)=4x+20, \end{cases}$ находим $x = 40$ м, $y = 50$ м.

Ответ: 40 × 50 м.

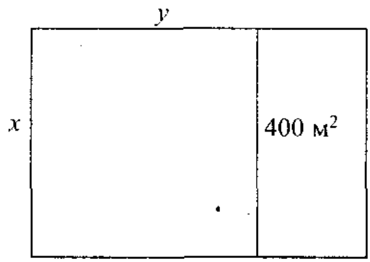


Рис. 13.10

13.153. Для спортплощадки отвели участок в форме прямоугольника с диагональю, равной 185 м. При выполнении строительных работ длину каждой стороны уменьшили на 4 м. При этом прямоугольная форма была сохранена, но площадь оказалась уменьшенной на 1012 м². Каковы действительные размеры спортплощадки?

Решение.

Пусть x — длина, а y — ширина площадки. По теореме Пифагора $x^2+y^2=185^2$. Кроме того, $(x-4)(y-4)=xy-1012$, откуда $xy-4(x+y)=$ $=xy-1028$; $x+y=257$; $y=257-x$. Решив квадратное уравнение $x^2+(257-x)^2-185^2=0$, находим $x_1=104$, $x_2=153$.

Ответ: 100 × 149 м.

13.154. За 1 кг одного продукта и 10 кг другого заплачено 20 руб. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 18 руб. 20 коп. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

Решение.

Пусть x руб. — цена одного продукта, y руб. — другого. По условию $x + 10y = 20$. При сезонном изменении цен цена 1 кг первого продукта будет стоить $1{,}15x$ руб., а 1 кг второго — $0{,}75y$ руб. Тогда $1{,}15x + 10\cdot 0{,}75y = 18{,}2$.

Решив систему $\begin{cases} 1{,}15x+0{,}75\cdot 10y=18{,}2, \\ x+10y=20, \end{cases}$ находим $x = 8$ руб., $y = 1{,}2$ руб.

Ответ: 8 руб. и 1 руб. 20 коп.

13.155. В первую неделю отпускного путешествия друзья израсходовали на 60 руб. меньше, чем 2/5 количества взятых с собой денег; во вторую неделю 1/3 остатка и еще на билеты в театр 12 руб.; в третью неделю 3/5 нового остатка и еще на морские прогулки 31 руб. 20 коп., после чего у них осталось 420 руб. Сколько денег было израсходовано за три недели путешествия?

Решение.

Пусть первоначально было x руб.

Неделя	**Израсходовали**	**Остаток**
Первая	$\frac{2}{5}x-60$ (руб.)	$\frac{3}{5}x+60$ (руб.)
Вторая	$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}x+60\right)+12=\frac{1}{5}x+32$ (руб.)	$\frac{2}{5}x+28$ (руб.)
Третья	$\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}x+28\right)+31\frac{1}{5}x=$ $=\frac{6}{25}x+48$ (руб.)	$\frac{2}{5}x+28-\frac{6}{25}x-48=$ $=\frac{4}{25}x-20$ (руб.)

По условию $\frac{4}{25}x-20=420$, откуда $x=2750$ руб. За три недели было израсходовано 2750 – 420 = 2330 (руб.).

Ответ: 2330 руб.

13.156. Моторная лодка, обладающая скоростью движения 20 км/ч, прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами равно 60 км. Определить скорость течения реки.

Решение.

Пусть $v_т$ км/ч — скорость течения реки; 60 км туда лодка прошла за $\frac{60}{20+v_т}$ ч, а обратно за $\frac{60}{20-v_т}$ ч. По условию $\frac{60}{20+v_т}+\frac{60}{20-v_т}=6{,}25$, откуда $v_т=4$ км/ч.

Ответ: 4 км/ч.

13.157. Найти двузначное число такое, что если его разделить на произведение цифр, из которых оно составлено, то в частном получится 16/3, а если вычесть из него 9, то разность будет также двузначным числом, которое отличается от искомого числа только порядком следования цифр.

Решение.

Пусть $10x + y$ — искомое двузначное число. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{xy} = \dfrac{16}{3}, \\ 10x+y-9 = 10y+x, \end{cases}$$ откуда $x = 3$, $y = 2$. Искомое число — 32.

Ответ: 32.

13.158. В магазин привезли яблоки 1-го сорта на сумму 228 руб. и яблоки 2-го сорта на сумму 180 руб. При разгрузке привезенные яблоки случайно перемешались. Подсчет показал, что если теперь продавать все яблоки по одной цене — на 90 коп. ниже цены килограмма яблок 1-го сорта, то будет выручена ранее намеченная сумма. Сколько килограммов яблок привезено, если известно, что яблок 2-го сорта было на 5 кг больше, чем 1-го сорта?

Решение.

Пусть в магазин привезли x кг яблок первого сорта и $x + 5$ кг яблок второго сорта. Всего привезли яблок $2x + 5$ кг. Килограмм яблок 1-го сорта стоит $\dfrac{228}{x}$ руб. Новая цена яблок — $\left(\dfrac{228}{x} - 0{,}9\right)$ руб. Сумма, вырученная за продажу всех яблок, — $\left(\dfrac{228}{x} - 0{,}9\right)(2x+5)$. По условию $\left(\dfrac{228}{x} - 0{,}9\right)(2x+5) = 228 + 180$, откуда $x = 40$ кг. Всего привезли яблок $2 \cdot 40 + 5 = 85$ кг.

Ответ: 85 кг.

13.159. От трех кафедр института поступили заявки на приобретение дополнительного оборудования для лабораторий. Стоимость оборудования в заявке первой кафедры составляет 45% от заявки второй кафедры, а стоимость оборудования в заявке второй кафедры — 80% от заявки третьей. Стоимость оборудования в заявке третьей кафедры превышает заявку первой на 640 тыс. руб. Какова общая стоимость оборудования в заявках всех трех кафедр?

Решение.

Пусть x, y, z тыс. руб. — стоимость оборудования в заявках первой, второй и третьей кафедр соответственно. По условию $\begin{cases} x = 0{,}45y, \\ y = 0{,}8z, \\ z = x + 640. \end{cases}$ откуда $x = 360$ тыс. руб., $y = 800$ тыс. руб., $z = 1000$ тыс. руб. Общая стоимость оборудования в заявках всех трех кафедр — $360 + 800 + 1000 = 2160$ (тыс. руб.)

Ответ: 2 млн 160 тыс. руб.

13.160. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 5. Найти это число.

Решение.

Пусть искомое число есть $10x + y$. Тогда по условию имеем систему

$$\begin{cases} 10x + y - 3 = 4(x + y), \\ 10x + y - 5 = 3xy \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = 3.$$

Ответ: 23.

13.161. Перевозка тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b руб. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти от M до N по железной дороге на сумму a руб., если водным путем на эту же сумму можно перевезти на k т больше, чем по железной дороге?

Решение.

Пусть x т груза можно перевезти по железной дороге, $(x + k)$ т — водным путем. Перевозка тонны груза по железной дороге стоит $\frac{a}{x}$ руб., водным путем — $\frac{a}{x+k}$ руб. По условию $\frac{a}{x} - \frac{a}{x+k} = b$, откуда

$$x = \frac{-bk + \sqrt{b^2k^2 + 4abk}}{2b} \text{ т.}$$

Ответ: $\frac{-bk + \sqrt{b^2k^2 + 4abk}}{2b}$ т.

13.162. Некоторый товар был куплен осенью и за него было уплачено 825 руб. Килограмм этого товара осенью на 1 руб. дешевле, чем весной, и поэтому на ту же сумму весной было куплено на 220 кг меньше. Сколько стоит 1 кг товара весной и сколько его было куплено осенью?

Решение.

Пусть осенью было куплено x кг товара. Весной на ту же сумму было куплено $x-220$ кг товара. Стоимость 1 кг осенью — $\frac{825}{x}$ руб., а весной — $\frac{825}{x-220}$ руб. По условию $\frac{825}{x-220}-\frac{825}{x}=1$, откуда $x=550$ кг. Стоимость 1 кг товара весной $\frac{825}{550-220}=2$ руб. 50 коп.

Ответ: 2 руб. 50 коп.; 550 кг.

13.163. При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с 1 га на каждом участке, если урожай пшеницы на первом участке был на 1 ц с гектара больше, чем на втором?

Решение.

Пусть x га — площадь первого участка, $(x+0,5)$ га — площадь второго. С 1 га на первом участке собрано $\frac{210}{x}$ ц пшеницы, на втором — $\frac{210}{x+0,5}$ ц. По условию $\frac{210}{x}-\frac{210}{x+0,5}=1$, откуда $x=10$ га. С 1 га на первом участке собрано $\frac{210}{10}=21$ ц пшеницы, со второго — 20 ц.

Ответ: 21 и 20 ц.

13.164. Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 2700 руб. В действительности за все эти книги уплатили только 2370 руб., так как была произведена скидка: на первый том в размере 15%, а на второй — в размере 10%. Найти первоначальную цену этих книг.

Решение.

Пусть x и y руб. — первоначальная цена первого и второго томов соответственно. По условию $60x+75y=2700$. После скидки цена первого тома стала $0,85x$ руб., второго — $0,9y$ руб. По условию $60\cdot 0,85x+75\cdot 0,9y=2370$. Решив систему

$$\begin{cases}60x+75y=2700,\\ 60\cdot 0,85x+75\cdot 0,9y=2370,\end{cases}$$ находим $x = 20$ руб., $y = 20$ руб.

Ответ: 20 руб.

13.165. Имеется 140 банок двух вместимостей. Объем банки большей вместимости на 2,5 л больше объема банки меньшей вместимости. Общий объем больших банок равен общему объему малых банок и равен 60 л. Определить количество больших и малых банок.

Решение.

Пусть x — количество больших банок, $(140-x)$ — малых, y л — объем меньшей банки, $(y + 2,5)$ л — большей. По условию $\begin{cases}x(y+2,5)=60,\\ (140-x)y=60,\end{cases}$

откуда $x = 20$ — количество больших банок и $140 - 20 = 120$ малых банок.

Ответ: 20 и 120.

13.166. Ученику надо было найти произведение числа 136 на некоторое двузначное число, в котором цифра единиц вдвое больше цифры десятков. По рассеянности он поменял местами цифры двузначного числа, отчего и получил произведение на 1224 больше истинного. Чему равно истинное произведение?

Решение.

Пусть искомое число — $10x + 2x$. Число, записанное в обратном порядке, — $(20x + x)$. По условию $136(20x + x) - 136(10x + 2x) = 1224$, откуда $x = 1$. Искомое число — $10 + 2 = 12$, а истинное произведение равно $12 \cdot 136 = 1632$.

Ответ: 1632.

13.167. Моторная лодка и парусник, находясь на озере в 30 км друг от друга, движутся навстречу и встречаются через 1 ч. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 ч 20 мин. Определить скорости лодки и парусника, полагая, что они постоянны и неизменны в обоих случаях.

Решение.

Пусть x км/ч — скорость лодки, y км/ч — парусника. По условию $x\cdot 1+y\cdot 1=30$. Во втором случае за 3 ч 20 мин лодка прошла бы

$3\frac{1}{3}y+20$ км. Тогда $\frac{3\frac{1}{3}y+20}{x}=3\frac{1}{3}$. Решив систему $\begin{cases} x+y=30, \\ \frac{3\frac{1}{3}y+20}{x}=3\frac{1}{3}, \end{cases}$

находим $x=18$ км/ч, $y=12$ км/ч.

Ответ: 18 и 12 км/ч.

13.168. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 72. Найти первоначальное число.

Решение.

Пусть x — искомое число, которое увеличили на $y\cdot 100$ %. Тогда $x+10=yx$, откуда $y=\frac{x+10}{x}$. По условию $(x+10)\cdot\frac{x+10}{x}=72$, откуда $x=2$.

Ответ: 2.

13.169. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что первый из них за 3 мес. дал такой же прирост массы, как второй за 7 мес. Однако по истечении года оказалось, что первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, второй — на 5%. Найти отношение первоначальных масс этих кристаллов.

Решение.

Пусть годовой прирост массы x равен a; тогда по условию годовой прирост массы y равен $\frac{3a}{7}$. Имеем $a=0{,}04x$, $\frac{3a}{7}=0{,}05y \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{5}\cdot\frac{x}{y}=\frac{7}{3} \Rightarrow x:y=35:12$.

Ответ: 35:12.

13.170. Одна тракторная бригада вспахала 240 га, а другая — на 35% больше, чем первая. Ежедневно первая бригада обрабатывала на 3 га меньше, чем вторая, но закончила работу на 2 дня раньше второй. Сколько гектаров обрабатывала каждая бригада за рабочий день, если известно, что намеченная ежедневная норма 20 га перевыполнялась обеими бригадами?

Решение.

Вторая бригада вспахала $240\cdot 1{,}35=324$ га. Пусть x га ежедневно обрабатывала первая бригада, $(x+3)$ га — вторая; y дней работала первая бригада, $(y+2)$ дня — вторая. По условию

$$\begin{cases} x \cdot y = 240, \\ (x+3)(y+2) = 324, \end{cases}$$ откуда $x = 24$ га.

Ответ: 24 и 27 га.

13.171. В семье отец, мать и три дочери; всем вместе 90 лет. Разница в возрасте у девочек — 2 года. Возраст матери на 10 лет больше суммы возрастов дочерей. Разность лет отца и матери равна возрасту средней дочери. Сколько лет каждому члену семьи?

Решение.

Пусть x лет — возраст младшей дочери. Тогда возраст средней — $x+2$ года, старшей — $x+4$ года, матери — $x+x+2+x+4+10=3x+16$ лет, отца $3x+16+x+2=4x+18$ лет. По условию $x+x+2+x+4+3x+16+4x+18=90$, откуда $x=5$ лет — возраст младшей дочери, $5+2=7$ лет — средней, $5+4=9$ лет — старшей, $3 \cdot 5+16=31$ год — матери, $4 \cdot 5+18=38$ лет — отца.

Ответ: 38, 31, 5, 7 и 9.

13.172. Два сосуда с раствором соли поставлены для выпаривания. Ежедневно выпариваемые порции соли постоянны для каждого сосуда. Из первого сосуда получено 48 кг соли, а из второго, стоявшего на 6 дней меньше, — 27 кг. Если бы первый сосуд стоял столько же дней, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то из обоих растворов получилось бы одинаковое количество соли. Сколько дней стоял каждый раствор?

Решение.

Пусть x дней стоял первый раствор, y дней — второй. Ежедневно выпариваемая порция для первого сосуда $\frac{48}{x}$ кг соли, для второго — $\frac{27}{y}$ кг. По условию $\begin{cases} \frac{48}{x} \cdot y = \frac{27}{y} \cdot x, \\ y = x-6, \end{cases}$ откуда $x=24$ дня, $y=18$ дней.

Ответ: 18 и 24.

13.173. Если неизвестное двузначное число разделить на число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4 и в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 7. Найти это число.

Решение.

Пусть $10x+y$ — искомое число. Тогда $\begin{cases}10x+y=(10y+x)\cdot 4+3,\\10x+y=(y+x)\cdot 8+7,\end{cases}$

откуда $x=7$, $y=1$. Искомое число — 71.

Ответ: 71.

13.174. В четырех ящиках лежит чай. Когда из каждого ящика вынули по 9 кг, то во всех вместе осталось столько же, сколько было в каждом. Сколько чая было в каждом ящике?

Решение.

Пусть в каждом ящике было по x кг чая, осталось по $(x-9)$ кг. По условию $4(x-9)=x$, откуда $x=12$ кг.

Ответ: 12 кг.

13.175. Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке 40/3 км. Не делая остановки, он развернулся и пошел вверх по реке. Пройдя 28/3 км, он встретился с плотом. Если скорость течения реки 4 км/ч, то какова собственная скорость катера?

Решение.

Катер и плот были в пути $\dfrac{\frac{40}{3}-\frac{28}{3}}{4}=1$ ч. Пусть v км/ч — собственная скорость катера. Вниз по реке катер шел $\dfrac{\frac{40}{3}}{4+v}$ ч, а вверх — $\dfrac{28}{3(v-4)}$ ч. По условию $\dfrac{40}{3(v+4)}+\dfrac{28}{3(v-4)}=1$, откуда $v=\dfrac{68}{3}$ км/ч.

Ответ: 68/3 км/ч.

13.176. Общая вместимость трех цистерн составляет 1620 л. Две из них наполнены керосином, а третья пустая. Чтобы наполнить ее, нужно использовать либо все содержимое первой цистерны плюс 1/5 содержимого второй, либо все содержимое второй плюс 1/3 содержимого первой. Найти вместимость каждой цистерны.

Решение.

Пусть x л — вместимость первой цистерны, y л — второй, z л —

третьей. По условию $\begin{cases} x+y+z=1620, \\ z=x+\frac{1}{5}y, \\ z=y+\frac{1}{3}x, \end{cases}$ откуда $x=540$ л, $y=450$ л, $z=630$ л.

Ответ: 540, 450 и 630 л.

13.177. Планом было предусмотрено, что предприятие на протяжении нескольких месяцев изготовит 6000 насосов. Увеличив производительность труда, предприятие стало изготовлять в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше установленного срока перевыполнило задание на 30 насосов. На протяжении скольких месяцев было предусмотрено выпустить 6000 насосов?

Решение.

Пусть было предусмотрено выпустить 6000 насосов за x месяцев. В месяц предприятие должно было изготовлять $\frac{6000}{x}$ насосов, а изготовляло $\frac{6000}{x}+70$ насосов. Работая $x-1$ месяц, предприятие выпустило 6030 насосов. Значит, $\left(\frac{6000}{x}+70\right)(x-1)=6030$, откуда $x=10$ месяцев.

Ответ: десяти.

13.178. Два парка общей площадью 110 га разбиты на равное количество участков. Участки каждого парка по площади равны между собой, но отличаются от участков другого. Если бы первый парк был разбит на участки такой же площади, как второй, то он имел бы 75 участков, а если бы второй был разбит на такие же участки, как первый, то он содержал бы 108 участков. Определить площадь каждого парка.

Решение.

Пусть S — площадь парка, n — число равновеликих участков, Q — площадь участка. Тогда $S:n=Q$. Данными и искомыми значениями заполним таблицу в последовательности, указанной цифрами (1), (2), ..., (12):

Парк	Первоначально			При новом разбиении		
	S	n	Q	S	n	Q
Первый	(7) x	(11) $\frac{108x}{110-x}$	(9) $\frac{110x}{108}$	(1) x	(3) 75	(5) $\frac{x}{75}$
Второй	(8) $110-x$	(12) $\frac{75(110-x)}{x}$	(10) $\frac{x}{75}$	(2) $110-x$	(4) 108	(6) $\frac{110-x}{108}$

По условию $\frac{108x}{110-x}=\frac{75(110-x)}{x}$, откуда $x=50$.

Ответ: 50 и 60 га.

13.179. Отец хочет разделить 36 яблок между пятью своими детьми. Половину всех яблок он отдает сыновьям, которые делят их поровну, а другую половину отдает дочерям, которые тоже делят их поровну. Оказалось, что каждая дочь получила на 3 яблока больше, чем каждый сын. Сколько у отца было сыновей и дочерей?

Решение.

Пусть у отца было x сыновей и $5-x$ дочерей. Каждая дочь получила $\frac{18}{5-x}$ яблок, а каждый сын — $\frac{18}{x}$ яблок. По условию $\frac{18}{5-x}-\frac{18}{x}=3$, откуда $x=3$.

Ответ: 3 сына и 2 дочери.

13.180. Одна из двух дробей вдвое больше другой. После возведения каждой из дробей в квадрат и сложения этих результатов получается некоторая сумма. Та же сумма получается после возведения каждой из дробей в куб и сложения этих результатов. Найти данные дроби.

Решение.

Пусть x — первая дробь, $2x$ — вторая. По условию

$x^2+4x^2=x^3+8x^3$, откуда $x=\frac{5}{9}$ — первая дробь, $2\cdot\frac{5}{9}=\frac{10}{9}$ — вторая.

Ответ: $\frac{5}{9}$ и $\frac{10}{9}$.

13.181. Бригада рабочих должна была изготовить за смену 7200 деталей, причем каждый рабочий делал одинаковое количество деталей. Однако в бригаде заболело трое рабочих и поэтому для выполнения всей нормы каждому из оставшихся рабочих пришлось сделать на 400 деталей больше. Сколько рабочих было в бригаде?

Решение.

Пусть x рабочих было в бригаде. Каждый рабочий делал $\frac{7200}{x}$ деталей. После того как в бригаде стало $x-3$ рабочих, каждый стал делать по $\frac{7200}{x}+400$ деталей. По условию $\left(\frac{7200}{x}+400\right)(x-3)=7200$, откуда $x=9$.

Ответ: 9.

13.182. В два сосуда одинаковой массы налита вода, причем масса сосуда A с водой составляет 4/5 массы сосуда B с водой. Если воду из сосуда B перелить в сосуд A, то масса его вместе с водой станет в 8 раз больше массы сосуда B. Найти массу сосудов и количество воды в них, зная, что в сосуде B содержится воды на 50 г больше, чем в сосуде A.

Решение.

Пусть x г — масса сосудов. Масса сосуда B с водой y г, сосуда A с водой $\frac{4}{5}y$ г. Масса воды в сосуде A — $\left(\frac{4}{5}y-x\right)$ г, в B — $(y-x)$ г.

По условию $\begin{cases} \frac{4}{5}y+y-x=8x, \\ y-x-\left(\frac{4}{5}y-x\right)=50, \end{cases}$ откуда $x=50$ г, $y=250$ г. В сосуде A — 150 г воды, в B — 200 г.

Ответ: 50, 150 и 200 г.

13.183. В зале клуба имеется 500 стульев, расположенных рядами, причем каждый ряд содержит одинаковое количество стульев. После реконструкции зала в каждом ряду оказалось на 5 стульев больше, чем было, но зато число рядов уменьшилось на 5. В результате общее число мест в зале уменьшилось на 1/10 прежнего количества стульев. Сколько рядов было в зале и сколько стульев было в каждом ряду?

Решение.

Пусть x рядов было в зале, y стульев в каждом ряду. Всего мест в зале было $x \cdot y = 500$. После реконструкции зала мест стало $(y+5)(x-5) = \frac{9}{10} \cdot 500$. Решив систему $\begin{cases} x \cdot y = 500, \\ (y+5)(x-5) = 450, \end{cases}$ находим $x = 20$, $y = 25$.

Ответ: 20 рядов по 25 стульев в каждом.

13.184. Если бы ученик правильно перемножил два написанных на доске числа, то получил бы в произведении 4500. Но, переписывая с доски сомножители, в одном из них ученик вместо последней цифры 5 написал цифру 3 и после умножения в результате получил 4380. Какие числа должен был перемножить ученик?

Решение.

Пусть $10x+5$ — первое число, y — второе. Тогда $\begin{cases} (10x+5)y = 4500, \\ (10x+3)y = 4380, \end{cases}$

откуда $x = 7$, первое число $10 \cdot 7 + 5 = 75$; $y = 60$.

Ответ: 75 и 60.

13.185. При испытании двух двигателей было установлено, что первый израсходовал 300 г, а второй 192 г бензина, причем второй работал на 2 ч меньше, чем первый. Первый двигатель затрачивает в час на 6 г бензина больше, чем второй. Какое количество бензина в час расходует каждый из двигателей?

Решение.

Пусть x г бензина в час расходует второй двигатель, $(6+x)$ г в час — первый. Первый двигатель работал $\frac{300}{x+6}$ ч, второй — $\frac{192}{x}$ ч.

По условию $\frac{300}{x+6} - \frac{192}{x} = 2$, откуда $x = 24$ г в час расходует бензина второй двигатель, $24+6=30$ г в час — первый.

Ответ: 30 и 24 г.

13.186. Бригада каменщиков взялась уложить 432 $м^3$ кладки, но в действительности на работу вышло на 4 человека меньше. Сколько всего каменщиков в бригаде, если известно, что каждому работавшему каменщику пришлось укладывать на 9 $м^3$ больше, чем первоначально предполагалось?

Решение.

Пусть всего в бригаде x каменщиков. Каждый каменщик укладывает $\frac{432}{x}$ м^3 кладки. Т.к. работало $x-4$ каменщика, то каждому пришлось укладывать по $\frac{432}{x}+9$ м^3 кладки. Значит, $\left(\frac{432}{x}+9\right)(x-4)=432$, откуда $x=16$.

Ответ: 16.

13.187. Бригада рабочих должна была изготовить 8000 одинаковых деталей в определенный срок. Фактически эта работа была окончена на 8 дней раньше срока, так как бригада делала ежедневно на 50 деталей больше, чем было намечено по плану. В какой срок должна была быть окончена работа и каков ежедневный процент перевыполнения плана?

Решение.

Пусть работа должна была быть окончена за x дней. Ежедневно бригада должна была делать $\frac{8000}{x}$ дет., а делала $\left(\frac{8000}{x}+50\right)$ дет. и работала всего $(x-8)$ дней. Значит, $\left(\frac{8000}{x}+50\right)(x-8)=8000$, откуда $x=40$ дней. В день бригада должна была делать по $\frac{8000}{40}=200$ дет., а делала $200+50=250$, $y=\frac{250\cdot 100}{200}=125\,\%$. Значит, ежедневный процент перевыполнения плана $125-100=25\,\%$.

Ответ: 40 дней; 25%.

13.188. На обработку одной детали рабочий A затрачивает на k мин меньше, чем рабочий B. Сколько деталей обрабатывает каждый из них за t ч работы, если A обрабатывает за это время на n деталей больше, чем B?

Решение.

Пусть *B* обрабатывает x дет., *A* — $x+n$ дет. На обработку 1 дет. *A* затрачивает $\frac{t}{x+n}$ ч, *B* — $\frac{t}{x}$ ч. По условию $\frac{t}{x}-\frac{t}{x+n}=\frac{k}{60}$, откуда

$$x=\frac{-kn+\sqrt{k^2n^2+240tkn}}{2k};$$

$$x+n=\frac{-kn+\sqrt{k^2n^2+240tkn}}{2k}+n=\frac{kn+\sqrt{k^2n^2+240tkn}}{2k}.$$

Ответ: $(-kn+\sqrt{k^2n^2+240tkn})/(2k)$ и $(kn+\sqrt{k^2n^2+240tkn})/(2k)$.

13.189. Сумма квадратов корней уравнения $x^2-3ax+a^2=0$ равна 1,75. Найти значение a.

Решение.

Решим уравнение относительно x: $x^2-3ax+a^2=0$;

$D=9a^2-4a^2=5a^2$. $x_1=\frac{3a-a\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{3a+a\sqrt{5}}{2}$. По условию

$\frac{a^2}{4}(3-\sqrt{5})^2+\frac{a^2}{4}(3+\sqrt{5})^2=1{,}75$, откуда $a^2=\frac{1}{4}$, $a=\pm0{,}5$.

Ответ: $\pm0{,}5$.

13.190. Кусок платины, плотность которой равна $2{,}15\cdot10^4$ кг/м^3, связан с куском пробкового дерева (плотность $2{,}4\cdot10^2$ кг/м^3). Плотность системы равна $4{,}8\cdot10^2$ кг/м^3. Какова масса куска дерева, если масса куска платины составляет 86,94 г?

Решение.

Обозначим массу куска дерева как x кг, объем куска дерева как y_1 м^3, а объем куска платины как y_2 м^3. Объем куска платины

$y_2=\frac{8{,}694\cdot10^{-2}\text{ кг}}{2{,}15\cdot10^4\text{ кг/м}^3}=4{,}044\cdot10^{-6}$ м^3. Теперь можно составить систему

уравнений $\begin{cases}\frac{x}{y_1}=2{,}4\cdot10^2;\\ \frac{x+8{,}694\cdot10^{-2}}{y_1+4{,}044\cdot10^{-6}}=4{,}8\cdot10^2.\end{cases}$ Решив ее, находим

$x=8{,}694\cdot10^{-2}-4{,}8\cdot10^2\cdot4{,}044\cdot10^{-6}\approx85$ г.

Ответ: ≈85 г.

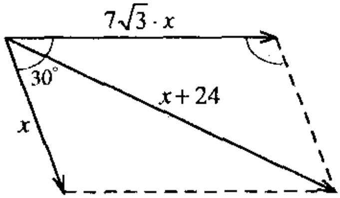


Рис. 13.11

13.191. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 30°. Модуль одной из приложенных сил в $7\sqrt{3}$ раза больше модуля другой, а модуль равнодействующей силы на 24 Н больше, чем модуль меньшей силы. Определить модуль меньшей силы и равнодействующей силы.

Решение.

Пусть x Н — модуль меньшей силы (рис. 13.11). По теореме косинусов: $(24+x)^2 = x^2 + (7\sqrt{3}x)^2 - 2x\cdot 7\sqrt{3}x\cdot\cos(180°-30°)$, откуда $x=2$ Н — модуль меньшей силы; $24+2=26$ Н — модуль равнодействующей силы.

Ответ: 2 и 26 Н.

13.192. Имеются три сосуда, содержащих неравные количества жидкости. Для выравнивания этих количеств сделано три переливания. Сначала 1/3 жидкости перелили из первого сосуда во второй, затем 1/4 жидкости, оказавшейся во втором сосуде, перелили в третий и, наконец, 1/10 жидкости, оказавшейся в третьем сосуде, перелили в первый. После этого в каждом сосуде оказалось 9 л жидкости. Сколько жидкости было первоначально в каждом сосуде?

Решение.

Составим таблицу:

Сосуд	**Первоначальное количество жидкости**	**После первого переливания**	**После второго переливания**	**После третьего переливания**
1	x л	$\frac{2}{3}x$ л	$\frac{2}{3}x$ л	$\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}\right)\right)$ л
2	y л	$y+\frac{1}{3}x$ л	$\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)$ л	$\frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)$ л
3	z л	z л	$z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)$ л	$\frac{9}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)\right)$ л

Решив систему $\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)\right)=9, \\ \frac{3}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)=9, \\ \frac{9}{10}\left(z+\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{3}x\right)\right)=9, \end{cases}$ находим $x = 12$ л; $y = 8$ л; $z = 7$ л.

Ответ: 12, 8 и 7л.

13.193. На учениях разведывательный катер подошел к головному кораблю эскадры и получил приказание произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения на расстоянии 70 км. Определить, через какое время катер вернется к головному кораблю эскадры, продолжающей идти вперед, если известно, что скорость катера 28 км/ч, а эскадра должна двигаться со скоростью 14 км/ч.

Решение.

Пусть катер вернется к головному кораблю через x ч. За это время эскадра пройдет $14x$ км. Значит, катер должен пройти $70 + 70 - 14x$ км. По условию $140 - 14x = 28x$, откуда $x = 3\frac{1}{3}$ ч.

Ответ: через 3 ч 20 мин.

13.194. Переднее колесо движущейся модели на протяжении 120 м делает на 6 оборотов больше, чем заднее. Если окружность переднего колеса увеличить на 1/4 ее длины, а окружность заднего — на 1/5 ее длины, то на том же расстоянии переднее колесо сделает на 4 оборота больше, чем заднее. Найти длины окружностей переднего и заднего колес.

Решение.

Длина окружности колеса C, число оборотов n и расстояние s связаны формулой $Cn = s$. Таблицу значений этих величин заполним в порядке, указанном цифрами (1), (2), ..., (12):

Колесо	До изменения			После изменения		
	C	s	n	C	s	n
Переднее	(1) x	(3) 120	(5) $\frac{120}{x}$	(7) $\frac{5x}{4}$	(9) 120	(11) $\frac{120\cdot 4}{5x}$
Заднее	(2) y	(4) 120	(6) $\frac{120}{y}$	(8) $\frac{6y}{5}$	(10) 120	(12) $\frac{120\cdot 5}{6y}$

По условию, имеем систему $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 6, \\ \dfrac{96}{x} - \dfrac{100}{y} = 4, \end{cases}$ откуда $x = 4$ (м), $y = 5$ (м).

Ответ: 4 и 5 м.

13.195. Бригада монтеров могла окончить электропроводку в 4 ч дня, прокладывая в час по 8 м. После выполнения половины всего задания один рабочий выбыл из бригады; в связи с этим бригада стала прокладывать в час по 6 м и закончила запланированную на день работу в 6 ч вечера. Сколько метров провода было проложено и за сколько часов?

Решение.

Пусть было проложено x м провода. Прокладывая по 8 м электропроводки в час, бригада могла бы проложить $\frac{1}{2}x$ м провода за $\frac{x}{2 \cdot 8}$ ч. Но она работала $\frac{x}{16}+2$ ч. По условию $\left(\frac{x}{16}+2\right) \cdot 6 = \frac{1}{2}x$, откуда $x = 96$ м. Всего бригада работала $\frac{x}{16}+\frac{x}{16}+2=\frac{96}{8}+2=14$ ч.

Ответ: 96 м, за 14 ч.

13.196. Через два часа после выезда с фабрики шофер посмотрел на спидометр и заметил, что проехал только 112 км. Он прикинул мысленно, что если и дальше поедет с той же скоростью, то на 30 мин опоздает с доставкой груза на станцию. Поэтому шофер увеличил скорость и прибыл на станцию даже на 30 мин раньше срока. Определить начальную и последующую скорости движения автомобиля, если расстояние от фабрики до станции по спидометру составляет 280 км.

Решение.

Первоначальная скорость автомобиля $\frac{112}{2}=56$ км/ч. Всего шофер был в пути $\frac{280}{56}-1=4$ ч. Пусть он увеличил скорость на x км/ч. С этой скоростью он ехал 2 ч и проехал $280-112=168$ км. Значит, $2(56+x)=168$, откуда новая скорость автомобиля 84 км/ч.

Ответ: 56 и 84 км/ч.

13.197. В кинозале имеется две двери, широкая и узкая. Через обе двери после сеанса зрители выходят из зала в течение 3 мин 45 с. Если зрителей выпускать через одну широкую дверь, то выход из зала займет времени на 4 мин меньше, чем в том случае, если зрителей выпускать только через одну узкую дверь. Сколько времени требуется для выхода зрителей из кинозала через каждую дверь в отдельности?

Решение.

Пусть x мин необходимо, чтобы выпустить зрителей только через широкую дверь, $(x+4)$ мин — только через узкую. В одну минуту через широкую дверь выходит $\frac{1}{x}$ чел., через узкую — $\frac{1}{x+4}$ чел.

По условию: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{3\frac{3}{4}}$, откуда $x=6$ мин.

Ответ: 6 и 10 мин.

13.198. Некоторое вещество впитывает влагу, увеличивая при этом свою массу. Чтобы впитать 1400 кг влаги, требуется взять нераздробленного вещества на 300 кг больше, чем раздробленного. Сколько процентов от массы вещества составляет масса впитанной влаги в случае раздробленного вещества и в случае нераздробленного, если во втором случае это число процентов на 105 меньше, чем в первом?

Решение.

Пусть надо взять x кг раздробленного вещества, $(x+300)$ кг — нераздробленного.

x кг	составляет	100 %
1400 кг	—	y_1 %
$x+300$ кг	составляет	100 %
1400 кг	—	y_2 %.

Отсюда $\begin{cases} y_1=\dfrac{140000}{x}, \\ y_2=\dfrac{140000}{x+300}, \\ y_1=y_2+105. \end{cases}$ Решив систему, находим $y_1=280$ %; $y_2=175$ %.

Ответ: 280 и 175 %.

13.199. На пути от села до поля колесо грузовика делает на 100 оборотов меньше, чем колесо велосипеда, и на 150 оборотов больше, чем гусеница трактора. Найти расстояние между селом и полем, если известно, что длина окружности колеса грузовика составляет 4/3 длины окружности колеса велосипеда и на 2 м короче гусеницы трактора.

Решение.

Пусть x м — расстояние между селом и полем, y м — длина окружности колеса велосипеда; $\frac{4}{3}y$ м — грузовика, $\left(\frac{4}{3}y+2\right)$м — трактора. Колесо грузовика делает $\frac{x}{\frac{4}{3}y}$ оборотов; велосипеда — $\frac{x}{y}$ оборотов; гусеница трактора — $\frac{x}{\frac{4}{3}y+2}$ оборотов. По условию $\begin{cases}\frac{x}{\frac{4}{3}y}=\frac{x}{y}-100,\\ \frac{x}{\frac{4}{3}y}=\frac{x}{\frac{4}{3}y+2}+150,\end{cases}$ откуда $x = 600$ м.

Ответ: 600 м.

13.200. Две шкурки общей стоимостью в 22500 руб. были проданы на аукционе с прибылью в 40%. Каковоа стоимость каждой шкурки, если от первой было получено прибыли 25%, а от второй — 50%?

Решение.

Пусть x руб. — стоимость первой шкурки, $22\,500-x$ руб. — стоимость второй. Первая шкурка была продана за $1{,}25x$ руб., вторая — за $1{,}5(22\,500-x)$ руб. По условию $1{,}25x+1{,}5(22\,500-x)=1{,}4\cdot 22\,500$, откуда $x = 9000$ руб.

Ответ: 9000 и 13500 руб.

13.201. Спортивная площадка имеет форму прямоугольника, длина которого на b м больше ширины. Площадка окаймлена дорожкой одинаковой ширины в a м. Каковы размеры спортивной площадки, если ее площадь равна площади окаймляющей ее дорожки?

Решение.

Пусть x м — ширина площадки, $b+x$ м — ее длина (рис. 13.12). Площадь площадки — $x(x+b)$ м. Площадь дорожки — $2ax+2(b+x+2a)a$, откуда $x=\dfrac{\sqrt{b^2+32a^2}-b+4a}{2}$ м;

$$b+x=\frac{4a+b+\sqrt{b^2+32a^2}}{2}\text{ м.}$$

Ответ: $\left(\sqrt{b^2+32a^2}-b+4a\right)\!/2$ и $\left(\sqrt{b^2+32a^2}+b+4a\right)\!/2$ м.

13.202. Две машинистки должны перепечатать рукопись, состоящую из трех глав, из которых первая вдвое короче второй и втрое длиннее третьей. Работая вместе, машинистки перепечатали первую главу за 3 ч 36 мин. Вторая глава была перепечатана за 8 ч, из которых 2 ч работала только первая машинистка, а остальное время они работали вместе. Какое время потребуется второй машинистке для того, чтобы одной перепечатать третью главу?

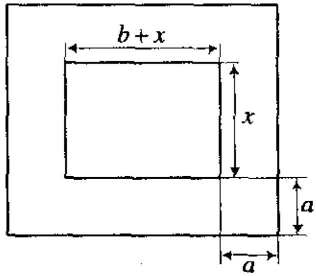


Рис. 13.12

Решение.

Пусть x — скорость работы первой машинистки, y — второй. По условию $\dfrac{1}{x+y}=3{,}6$ — время, за которое была перепечатана первая глава. За 8 ч работы первая машинистка перепечатала $8x$ второй главы, вторая за 6 ч — $\begin{cases}10x+y=3(x+y)+7,\\ x^2+y^2-xy=10x+y,\end{cases}$ По условию $8x+6y=2$. Решив систему $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=3{,}6,\\ 8x+6y=2,\end{cases}$ находим $y=\dfrac{1}{9}$. Третью главу вторая машинистка может перепечатать за $t=\dfrac{\frac{1}{3}}{y}=3$ ч.

Ответ: 3 ч.

13.203. Расстояние между двумя селами равно 10 км. Два человека выходят одновременно из одного села в другое, причем первый идет со скоростью, на 3 км/ч большей, чем второй, и приходит к месту назначения на 3 ч раньше. С какой скоростью идет каждый из них?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость второго, $x+3$ км/ч — скорость первого человека. По условию $y=7$, откуда $x=2$ км/ч.

Ответ: 2 и 5 км/ч.

13.204. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 ч скорее, чем второй, если тот будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая порознь, может выполнить работу?

Решение.

Пусть x — скорость работы первого рабочего, y — второго. По условию $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=8,\\ \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+12,\end{cases}$ откуда $\dfrac{1}{x}=24$, $\dfrac{1}{y}=12$. Первый рабочий может выполнить всю работу за 24 ч; второй — за 12 ч.

Ответ: 12 и 24 ч.

13.205. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 7. Если затем взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение тех же цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.

Решение.

Пусть $10x+y$ — искомое число. По условию

$\begin{cases}10x+y=3(x+y)+7,\\ x^2+y^2-xy=10x+y,\end{cases}$ откуда $x=3$, $y=7$. Искомое число — 37.

Ответ: 37.

13.206. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 18 больше первоначального. Найти это число.

Решение.

Пусть искомое трехзначное число имеет вид $100x + 10y + 2$; тогда после перенесения цифры 2 оно примет вид $200 + 10x + y$ (1). По условию, $200 + 10x + y - (100x + 10y + 2) = 18$, откуда $10x + y = 20$. Подставив это выражение в (1), получим $200 + 20 = 220$. Итак, первоначальное трехзначное число есть 202.

Ответ: 202.

13.207. Экспресс проходит путь от Москвы до Санкт-Петербурга на 3 ч 30 мин быстрее пассажирского поезда, так как за 1 ч он проходит на 35 км больше. Сколько километров в час проходит каждый из них, если расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом принять с округлением равным 650 км?

Решение.

Пусть x км/ч — скорость пассажирского поезда, $x + 35$ км/ч — скорость экспресса. По условию $\frac{650}{x} - \frac{650}{x+35} = 3{,}5$, откуда $x = 65$ км/ч.

Ответ: 65 и 100 км/ч.

13.208. Некоторое двузначное число в 4 раза больше суммы и в 3 раза больше произведения своих цифр. Найти это число.

Решение.

Пусть $10x + y$ — искомое число. По условию $\begin{cases} 10x + y = 4(x + y), \\ 10x + y = 3xy, \end{cases}$ откуда $x = 2$, $y = 4$. Искомое число — 24.

Ответ: 24.

13.209. Два тела одновременно начали прямолинейное движение навстречу друг другу. Одно из них проходит в каждую минуту 7 м, другое в первую минуту прошло 24 м, а в каждую последующую проходит на 4 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут оба тела встретятся, если первоначальное расстояние между ними было равно 100 м?

Решение.

Пусть тела встретятся через t мин. За это время первое тело пройдет $7t$ м. Скорость второго тела — $(24 - 4(t-1))$ м/мин, и за t мин оно пройдет $0{,}5((2 \cdot 24 - 4(t-1))t$ м. По условию $(24 - 2(t-1))t + 7 = 100$, откуда $t = 4$ мин.

Ответ: через 4 мин.

13.210. На сколько процентов следует увеличить длину радиуса круга, чтобы площадь круга стала больше на 96%?

Решение.

Пусть радиус круга надо увеличить на x. Тогда $r_1 = r + x$, $S_1 = 1{,}96\,S$, $S_1 = \pi r_1^2$. Значит, $1{,}96 r^2 = \pi(r+x)^2$. Отсюда находим, что $x = 0{,}4r$. Значит, радиус круга надо увеличить на 40 %.

Ответ: на 40 %.

Приложение

Действия над числами

Законы	Сложения	Умножения
переместительный	$a+b=b+a$	$a \cdot b=b \cdot a$
сочетательный	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
распределительный закон умножения относительно сложения	$(a+b) \cdot c=ac+bc$	

Проценты

1 % — один процент	$1 : 100 = 0{,}01$
1 % от числа A	$\frac{A}{100} = 0{,}01A$
b % от числа A	$B = b \cdot \frac{A}{100} = b \cdot 0{,}01A$
Отношение числа A к числу B, выраженное в процентах	$b = \frac{A}{B} \cdot 100$
Нахождение числа A, если b % его равны B	$A = \frac{B}{b} \cdot 100$

Арифметическая и геометрическая прогрессии

Формула четных чисел	$a_n = 2n; n \in Z$
Формула нечетных чисел	$a_n = 2n+1;\ n \in Z$
Формулы n-го члена арифметической прогрессии	$a_n = a_{n-1} + d$; $a_n = a_1 + d(n-1);\ n \in N, d \in R$
Свойство n-го члена арифметической прогрессии	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};\ n \in N$
Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, n \in N$
Формулы n-го члена геометрической прогрессии	$b_n = b_{n-1} \cdot q$; $b_n = b_1 \cdot q^{n-1};\ n \in N, q \in R, q \neq 0$
Свойство n-го члена геометрической прогрессии	$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$; $b_{n-1} > 0, b_{n+1} > 0$
Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q};\ q \neq 1$
Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии	$S_n = \dfrac{b_1}{1-q};\ \lvert q \rvert < 1$

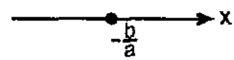
Числовые промежутки

отрезок	$a \le x \le b$	$[a;b]$	
интервал	$a < x < b$	$(a;b)$	
полуинтервалы	$a \le x < b$	$[a;b)$	
	$a < x \le b$	$(a;b]$	

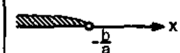
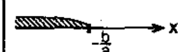
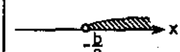
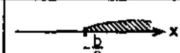
Логарифмы

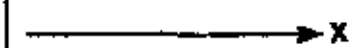
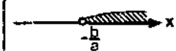
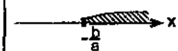
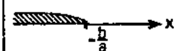
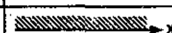
Определение логарифма числа x по основанию a	Если $\log_a x = b$, то $a^b = x$, $x>0, a>0$, $a \ne 1$
Основное логарифмическое тождество	$x = a^{\log_a x}$; $a>0$, $a \ne 1$, $x>0$
Свойства логарифмов	$\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$; $a>0$, $a \ne 1$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$ $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \cdot \log_a x$ $a>0$, $x>0$, $y>0$, $a \ne 1$, $k \ne 1$
Переход к другому основанию в логарифмах	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ $a>0$, $a \ne 1$, $x>0$, $x \ne 1$, $b>0$, $b \ne 1$

Решение линейного уравнения

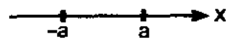
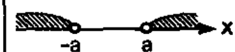
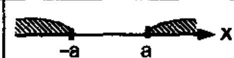
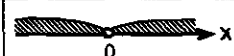
Уравнение	a	b	Корни	Графическое решение
$ax+b=0$	$a\neq 0$	$b\in R$	$x=-\dfrac{b}{a}$	
	$a=0$	$b=0$	$x\in R$	
	$a=0$	$b\neq 0$	$\varnothing$	

Решение линейных неравенств

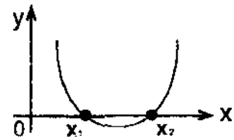
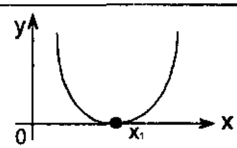
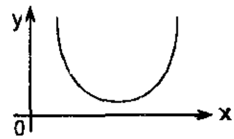
Нера-венство	a	b	Равно-сильное нера-венство	Множество решений	Графическое решение
$ax+b<0$	$a>0$	$b\in R$	$x<-\dfrac{b}{a}$	$x\in(-\infty;-\dfrac{b}{a})$	
$ax+b\leq 0$	$a>0$	$b\in R$	$x\leq-\dfrac{b}{a}$	$x\in(-\infty;-\dfrac{b}{a}]$	
$ax+b<0$	$a<0$	$b\in R$	$x>-\dfrac{b}{a}$	$x\in(-\dfrac{b}{a};\infty)$	
$ax+b\leq 0$	$a<0$	$b\in R$	$x\geq-\dfrac{b}{a}$	$x\in[-\dfrac{b}{a};\infty)$	
$ax+b<0$	$a=0$	$b<0$	—	$x\in R$	
$ax+b\leq 0$	$a=0$	$b\leq 0$	—	$x\in R$	

Неравенство	a	b	Равносильное неравенство	Множество решений	Графическое решение
$ax+b<0$	$a=0$	$b>0$	—	$\varnothing$	
$ax+b\leq 0$	$a=0$	$b\geq 0$	—	$\varnothing$	
$ax+b>0$	$a>0$	$b\in R$	$x>-\frac{b}{a}$	$x\in(-\frac{b}{a};\ \infty)$	
$ax+b\geq 0$	$a>0$	$b\in R$	$x\geq-\frac{b}{a}$	$x\in[-\frac{b}{a};\ \infty)$	
$ax+b>0$	$a<0$	$b\in R$	$x<-\frac{b}{a}$	$x\in(-\infty;\ -\frac{b}{a})$	
$ax+b\geq 0$	$a<0$	$b\in R$	$x\leq-\frac{b}{a}$	$x\in(-\infty;\ -\frac{b}{a}]$	
$ax+b>0$	$a=0$	$b>0$	—	$x\in R$	
$ax+b\geq 0$	$a=0$	$b\geq 0$	—	$x\in R$	
$ax+b>0$	$a=0$	$b\leq 0$	—	$\varnothing$	
$ax+b\geq 0$	$a=0$	$b<0$	—	$\varnothing$	

Простейшие выражения с модулем

a	Выражение	Равносильное выражение	Множество решений	Графическое решение
$a>0$	$\lvert x\rvert = a$	$\left\{\begin{array}{l} x=a \\ x=-a \end{array}\right.$	$\{-a;a\}$	
	$\lvert x\rvert < a$	$\left\{\begin{array}{l} x<a \\ x>-a \end{array}\right.$	$x\in(-a;a)$	
	$\lvert x\rvert \le a$	$\left\{\begin{array}{l} x\le a \\ x\ge -a \end{array}\right.$	$x\in[-a;a]$	
	$\lvert x\rvert > a$	$\left[\begin{array}{l} x>a \\ x<-a \end{array}\right.$	$x\in(-\infty;-a)\cup(a;\infty)$	
	$\lvert x\rvert \ge a$	$\left[\begin{array}{l} x\ge a \\ x\le -a \end{array}\right.$	$x\in(-\infty;-a]\cup[a;\infty)$	
$a=0$	$\lvert x\rvert \le 0$	$x=0$	$\{0\}$	
	$\lvert x\rvert < 0$	—	$\varnothing$	
	$\lvert x\rvert > 0$	$x\ne 0$	$x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$	
	$\lvert x\rvert \ge 0$	—	$x\in R$	
$a<0$	$\lvert x\rvert \le a$	—	$\varnothing$	
	$\lvert x\rvert \ge a$	—	$x\in R$	

Решение квадратного уравнения

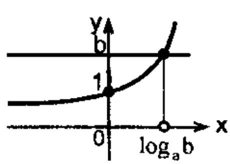
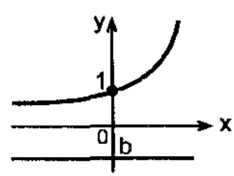
Квадратное уравнение	$D=b^2-4ac$	Корни	Графическое решение
$ax^2+bx+c=0,$	$D>0$	$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$	
$a\neq 0$	$D=0$	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	
	$D<0$	$\varnothing$	

Теорема Виета

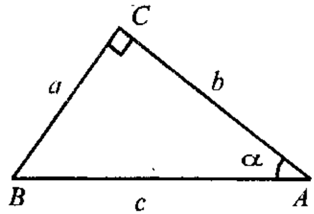
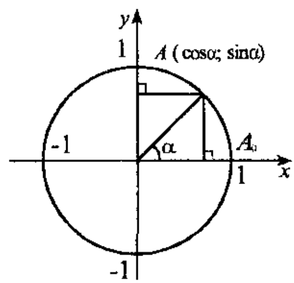
$ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0$, $D\geq 0$ x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения	$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

Решение показательного уравнения

$a^x=b$ равносильно $a^x=a^{\log_a b}$; $a>0$, $a\neq 1$

b	$b>0$	$b\leq 0$
Графическое решение		
Корни	$x=\log_a b$	$\varnothing$

Определение тригонометрических функций угла

$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$	
Если точка А получена поворотом начальной точки A_0 единичной окружности на угол α, то ординату точки А называют синусом угла α, абсциссу точки А — косинусом угла α. Отношение синуса угла α к косинусу угла α называют тангенсом угла α, а обратное отношение косинуса угла α к синусу угла α называют котангенсом угла α: $\operatorname{tg}\ \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\ \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	

Формулы приведения тригонометрических функций

x	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

Выражение одних тригонометрических функций через другие

	Функция — аргумент			
Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\pm\frac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{1}{ctg\alpha}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\alpha}$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + tg\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$, α, β, $\alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$
$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$, α, β, $\alpha - \beta \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$
$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$, α, β, $\alpha + \beta \neq \pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta + 1}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta}$, α, β, $\alpha - \beta \neq \pi n$, $n \in Z$

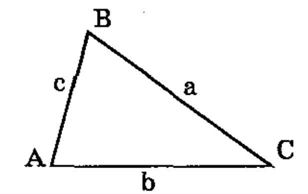
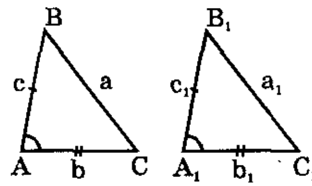
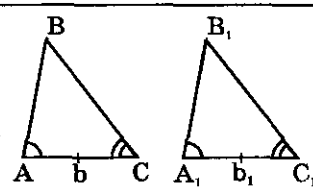
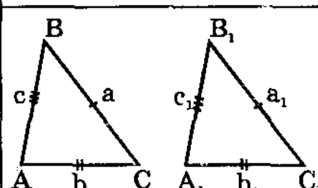
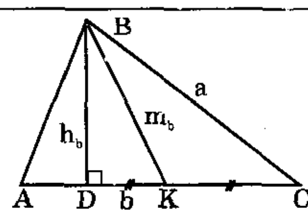
Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$$

Основные соотношения для треугольников

Треугольник ABC (ΔABC) A, B, C — вершины ΔABC $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы ΔABC $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ — стороны ΔABC	
Первый признак равенства треугольников: если $a=a_1$, $b=b_1$, $\angle A=\angle A_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$	
Второй признак равенства треугольников: если $b=b_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$	
Третий признак равенства треугольников: если $a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$, то $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$	
$BD \perp AC \Rightarrow BD$ — высота h_b, проведенная из вершины B на сторону b. $AK=KC \Rightarrow BK$ — медиана m_b, проведенная из вершины B на сторону b	

Содержание

АВТОРСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Егерев Виктор Константинович
Зайцев Владимир Валентинович
Кордемский Борис Анастасьевич
Маслова Тамара Николаевна
Орловская Ираида Федоровна
Позойский Роман Исаевич
Ряховская Галина Сергеевна
Сканави Марк Иванович
Суходский Андрей Матвеевич
Федорова Нина Михайловна

ТВОРЧЕСКИЙ КОЛЛЕКТИВ

Профессор кафедры высшей математики Белорусского Государственного Университета Информации и Радиоэлектроники Карпук Андрей Андреевич

Профессор кафедры высшей математики Белорусского Государственного Университета Информатики и Радиоэлектроники Жевняк Ростислав Михайлович

Кандидат физико-математических наук Ермолицкий Александр Александрович

Учебное издание

ПОЛНЫЙ СБОРНИК РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ
ГРУППА А

Под редакцией М. И. Сканави

Подписано в печать с готовых диапозитивов 24.10.02.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 57,0. Тираж 5000 экз. Заказ 4251.

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001 г.
109193, Москва, 5-я Кожуховская ул., д. 13, стр. 1.
Тел./факс (095) 928-78-26
E-mail: mir-obrazovanie@rambler.ru

ООО «Харвест».
Лицензия ЛВ № 32 от 27.08.2002.
РБ, 220013, Минск, ул. Кульман,
д. 1, корп. 3, эт. 4, к. 42.

Республиканское унитарное предприятие
«Полиграфический комбинат имени Я. Коласа».
220600, Минск, ул. Красная, 23.