**Kombinatorika.**

 Bundan keying mavzularda element degan so’zni ko’p ishlatamiz. Raqamlar, tekislikdagi nuqtalar, biror singfdagi o’quvchilar elementga misol bo’la oladi. Turli elementlardan birlashmalar tuzish mumkin. Birlashmalar uch xil bo’ladi.

**I. O’rinlashtirishlar**.

 **Ta’rif:** n ta elementdan m tadan (n$\geq $m) o’rinlashtirish deb shunday birlashmalarga aytiladiki , ularning har birida m tadan element bo’ladi: bitta birlashma ikkinchisidan elementlarning tarkibi yoki tartibi bilan farq qiladi.

**1-misol.** Sinfda 5 nafar o’quvchi bo’lsin. Shu o’quvchilar orasidan matematikadan 1 ta, fizikadan 1ta olimpiadachi o’quvchini tanlash kerak bo’lsin. Savol: shu ikki o’quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

 **Tushuntirish:** O’quvchilarni A, B, C, D, E deb belgilaylik. Agar matematikadan A ni tanlasak, fizikadan B ni tanlash mumkin. Demak, 1-usul A va B bo’ladi. Lekin matematikadan B tanlansa va fizikadan A tanlansa bu ham 1-usuldan farq qiladigan usul ya’ni 2-usul bo’ladi. Demak 2-usul B va A.

 E’tibor bering bu ikkita usul ayni ikki o’quvchidan tuzilgan lekin 1-usulda matematikadan olimpiadaga boradigan o’quvchi 2-usulda fizikadan boradi. Demak o’quvchilarning tarkibi o’zgarmaydi faqat tartibi o’zgaradi. Agar matematikadan olimpiadaga boradigan o’quvchini birinchi yozamiz deb kelishib olinsa, quyidagi birlashmalarni yozish mumkin ekan.

AB, AC,AD,AE,BA,BC,BD,BE,CA,CB,CD,CE,DA,DB,DC,DE,EA,EB,EC,ED.

Demak , jami 20 ta birlashma bor ekan.

Diqqat: 20=5·4 ekaniga e’tibor bering.

**2-misol.** Sinfda 30 o’quvchi bor. Shu sinfda sardor va sport tashkilotchisini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

**Yechish:** Agar A o’quvchi sardor bo’lsa, qolgan 29 ta o’quvchining har biri sport tashkilotchisi bo’lishi mumkin. Demak hozircha 29 ta usul.

Agar B o’quvchi sardor bo’lsa, qolgan 29 ta o’quvchining har biri sport tashkilotchisi bo’lishi mumkin.

Shuni esda tutish kerakki har bir o’quvchining sardor ham sport tashkilotchisi ham bo’lishga haqqi bor. Shuning uchun jami usullarni hisoblash uchun 30·29 ni hisoblash yetarli. 30·29=870

**Javob:** 870 usul

**3-misol.** Sinfda 30 o’quvchi bor. Shu sinfda sardor, sport tashkilotchisi va muharrirni tayinlash kerak bo’lsa, necha xil usulda tayinlash mumkin?

Yechish: 30·29·28=24360 usulda.

**1-topshiriq.** 3-misol yechimini izohlang.

**4-topshirq.** 30 o’quvchidan sardor, sport tashkilotchisi, muharrir va tozalik nazoratchisini tayinlash kerak bo’lsa bu ishni necha xil usulda bajarish mumkin?

**5-topshiriq.** 30 ta o’quvchidan 5 ta lavozimga tayinlash kerak bo’lsachi?

**6-topshirq.** Nima uchin ta’rifda$ n \geq $m sharti qo’yilgan?

Muhim belgilash: n elementdan m tadan o’rinlashtirishni $A\_{n}^{m}$ kabi belgilanadi.

$A\_{n}^{m}$ ning qanday hisoblanishini quyidagi misollardan tushunib olsa bo’ladi.

4-misol. Hisoblang: a) $A\_{n}^{2}$=n(n-1) $b) A\_{n}^{3}$=n(n-1)(n-2) c) $A\_{n}^{4}$=n(n-1)(n-2)(n-3) d) $A\_{10}^{2}$=10·9=90

e) $A\_{10}^{3}$=10·9·8=720 j) $A\_{25}^{3}$=25·24·23=13800

**Umumiy formula:** $A\_{n}^{m}$**=n(n-1)(n-2)·…·(n-m+1)**

**5-misol.** 10 ta raqamdan foydalanib nehcta 10 xonali talefon nomerlari tuzish mumkin. Bunda har bitta nomerda har bir raqam bir martadan ishlatiladi.

**6-misol.** $A\_{n}^{m}=\frac{n!}{(n-m)!}$ formulani isbotlang.

**II. O’rin almashtirishlar.**

**Ta’rif:** n elementdan tuzilgan o’rin almashtirish deb shunday birlashmalarga aytiladiki, ularning har biriga berilgan n ta elementning hammasi kiradi , o’rin almashtirishlar bir-biridan faqat elementlarning tartibi bilan farq qiladi.

**1-misol.** Uchta o’quvchi skameykaga necha xil usul bilan o’tirishi mumkin? Yechish: o’quvchilarni A, B, C deb belgilaylik. ABC, ACB, BAC, BCA, CAB,CBA. Demak, jami 6 xil usulda.

Diqqat qiling: 6=3!

Muhim belgilash: n ta elementdan o’rin almashtirishlar Pn deb belgilanadi.

**Pn ni hisoblash formulasi: Pn=n!**

**2-misol.** 7 ta kitobni kitob javonining bitta qavatiga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

**3-misol.** 10 kishini stol atrofiga bir-birlariga nisbatan necha xil usulda o’tqazish mumkin?

**4-misol.** Sinfda 30 nafar o’quvchi bor. Alifboga rioya qilmasdan yozganda shu o’quvchilrani ro’yxatga necha xil usulda yozish mumkin?

**III. Gruppalashlar.**

**Ta’rif:** Elementlarning tartibiga bog’liq bo’lmagan birlashmalar gruppalashlar deyiladi. Bir gruppa ikkinchisidan hech bo’lmasa bitta elementi bilan farq qilishi kerak.

**1-misol.** Shaxmat turnirida 12 shaxmatchi qatnashdi. Har bir shaxmatchi boshqa shaxmatchilarning har biri bilan bir martadan o’ynadi. Hammasi bo’lib necha partiya o’yin bo’lgan?

***Eslatma:*** Bu masalada AB va BA birlashmalar bitta birlashma deb qaraladi.

Muhim eslatma. n elementdan m tadan olib tuzilgan gruppalashlar soni $C\_{n}^{m}$ kabi belgilanadi.

$C\_{n}^{m}$ **ni hisoblash formulasi quyidagicha:** $C\_{n}^{m}=\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}$ **(1)**

**Shu formulani** $C\_{n}^{m}=\frac{n\left(n-1\right)…(n-m+1)}{1·2·3·…·m}$ **(2) formula bilan yozish ham mumkin.**

**2-misol.** Hisoblang: $a) C\_{5}^{3}$ b) $C\_{10}^{2}$ c) $ C\_{20}^{19}$ d) $ C\_{n}^{0}$ e) $C\_{n}^{1}$ j) $ C\_{n}^{n}$

**3-misol.** O’quvchi 5 ta kitobdan 3 tasini necha xil usul bilan tanlashi mumkin?

**4-misol.** 13 kishidan 6 kishilik voleybol jamoasini necha xil usulda tanlash mumkin?

**1-muhim xossa. (simmetriya qoidasi) Ushbu formula o’rinli:** $C\_{n}^{m}=C\_{n}^{n-m}$

Bu qoida foydali ekanini shu qoidaga ko’ra ushbu hisoblashlarni bajarib ishonch hosil qiling.

**5-misol.** Hisoblang: a) $C\_{20}^{19}$ b) $C\_{20}^{18}$

**2-muhim xossa.(Paskal qoidasi)**

Ushbu formula o’rinli: $C\_{n}^{m}=C\_{n-1}^{m-1}+c\_{n-1}^{m}$

**Masalan:**  $C\_{10}^{9}=C\_{9}^{8}+C\_{9}^{9}=\frac{9!}{8!·1!}+1=9+1=10$

1-topshiriq. Gruppalashtirishlarning o’rinlashtirishlardan farqi bor yoki yo’qligini aniqlang.

2-topshiriq. Gruppalashtirishlarning o’rin almashtirishlardan farqi bor yoki yo’qligini aniqlang.

3-topshiriq. $C\_{n}^{m}=\frac{A\_{n}^{m}}{P\_{n}}$ formula to’grimi?

Mustaqil bajarish uchun misollar.

1) $\frac{1}{C\_{4}^{n}}=\frac{1}{C\_{5}^{n}}+\frac{1}{C\_{6}^{n}}$ bo’lsa, n ni toping. 2) $5C\_{n}^{3}=C\_{n+2}^{4}$ bo’lsa, n ni toping.

3) $C\_{n+4}^{n+1}-C\_{n+3}^{n}=15(n+2)$ bo’lsa, n ni toping. 4) (n+2)!=132$A\_{n}^{k}·P\_{n-k}$ bo’lsa, n ni toping.

5) Tengsizlikni yeching: $C\_{10}^{x-1}>2C\_{10}^{x}$

6) 5 ta o’quvchiga 3 ta mukofotni taqsimlash kerak. Mukofotni necha xil usulda taqsimlash mumkin:

a) agar mukofotlar har xil bo’lsa; b) agar mukofotlar bir xil bo’lsa.

7) Qavariq 100 burchakning nechta diagonali bor? a) n burchakdachi? b) 25 burchakdachi?

**IV. Takrorlanuvchi o’rinlashtirishlar.**

**1-masala.** Faqat 2, 3, 5 va 7 raqamlaridan foydalanib yetti raqamlli telefon nomerlaridan nechta tuzish mumkin?

Izoh: Tushunarliki bu masalada yetti raqamli telefon nomerlarini tuzish uchun raqamlar takrorlanib qatnashishi mumkin.

**Ta’rif:** n elementdan m tadan takrorlanuvchi o’rinlashtirish deb, n ta elementni m talab shunday o’rinlash-tirishga aytiladiki bunda har bir element bir necha marta ishtirok etadi , faqat m martadan oshmasa bo’ldi.

Bunday takrorlanuvchi o’rinlashtirishni $A\_{n}^{m}(T)$ ko’rinishda belgilanadi, bunda (T) takrorlanuvchi ekanini bildiradi.

$A\_{n}^{m}(T)$ **ni hisoblash uchun formula:** $A\_{n}^{m}(T)$**=nm**

Demak, 1-masalaning yechimi quyidagicha bo’ladi, $A\_{4}^{7}\left(T\right)=4^{7}=16384$

**2-masala.** 8 ta yo’lovchini 3 ta vagonga necha usulda joylashtirish mumkin?

Yechish: $A\_{3}^{8}\left(T\right)=3^{8}=6561$

**V. Takrorlanuvchi o’rin almashtirishlar.**

n ta element berilgan bo’lsin. Bu elementlar k xil bo’lsin. Birinchi xillari n1 ta, ikkinchi xillari n2 ta, uchinchi xillari n3 ta, …., k-chi xillari nk ta bo’lsin.

Tushunarliki, n1+n2+…+nk=n bo’ladi.

Ana shunaqa n ta elementdan o’rin almashtirish takrorlanuvchi o’rin almashtirish deyiladi.

Masalan, 4455, 5544, 5454, 4545, 4554, 5445 sonlar 4 va 5 raqamlaridan ikkitadan takrorlanuvchi o’rin almashtirishlar yordamida yozilgan to’r xonali sonlardir.

Takrorlanuvchi o’rin almashtirishlar, Pn(n1, n2, …, nk) deb belgilanadi.

Pn(n1, n2, …, nk) bunday hisoblanadi: Pn(n1, n2, …, nk) = $\frac{n!}{n\_{1}!·n\_{2}!·…·n\_{k}!}$

1-misol. Ikkita yashil va to’rtta qizil lampochkani bir qatorga necha xil usulda joylashtirish mumkin?

Yechish: n=6, n1=2, n2=4 $P\_{6}\left(2,4\right)=\frac{6!}{2!·4!}=15$ Javob: 15 xil usulda.

2-misol. Matematika so’zidagi harflarni necha xil usulda joylashtirish mumkin?

3-misol. 6 raqami 3 marta, 5 raqami 4 marta takrorlanuvchi yetti xonali sonlar nechta?

**VI. Takrorlanuvchi gruppalashlar.**

n ta elementni m tadan takrorlanuvchi gruppalash deb shunday birlashmalarga aytiladiki har bir birlashmaga m ta element bo’ladi , bu elementlarning tartibi hisobga olinmaydi har bir element bir necha marta qatnashishi mumkin faqat m martadan oshmasa bo’ldi. Masalan, 3, 4 va 5 raqamlaridan takrorlanuvchi o’rin almashtirish bajarib tuziladigan gruppalashdan foydalanib yoziladigan ikki xonali sonlar: 33,34,35,44,45,55 sonlardir. Bunda 43 va 34 lar ayni bitta gruppalashdir. Teorema. n elementdan m tadan takrorlanuvchi gruppalar soni $C\_{n}^{m}(T)$ kabi belgilanadi va quyidagicha hisoblanadi:

 $C\_{n}^{m}\left(T\right)=\frac{\left(m+n-1\right)!}{m!·\left(n-1\right)!}=C\_{m+n-1}^{m}$

1-misol. To’rtta 5 tiyinlik va to’rtta 2 tiyinlik tangalardan to’rtta tangani necha xil usulda tanlab olish mumkin? Yechish: Bu masalani 2 ta elementdan to’rttadan takrorlanuvchi gruppalash deb qarash kerak,

$$C\_{2}^{4}\left(T\right)=C\_{4+2-1}^{4}=C\_{5}^{4}=\frac{5!}{4!·1!}=5$$

2-misol. 1, 2, 3, 4 va 5 raqamlaridan shunday sonlar yozish kerakki, hech bir sonda raqamlar kamayish tartibida joylashmasin. Shunday sonlar nechta?

 **Kombinatorikaga doir masalalar.**

1) To’g’ri chiziqda 10 ta nuqta belgilansa, nechta kesma hosil bo’ladi?

2) Aylanada 12 ta nuqta belgilansa, nechta yoy hosil qilinadi?

3) Qavariq 12 burchakning nechta diagonali bor?

4) Tekislikda 10 ta to’g’ri chiziq shunday o’qkazildiki, bunda ularning hech qanday ikkitasi parallel emas va hech qanday uchtasi bir nuqtada kesishmaydi.

a) Bu to’g’ri chiziqlar kesishgan nuqtalar sonini toping. b) Bu to’g’ri chiziqlar nechta uchburchak hosil qiladi?

5) Sinfda 12 ta o’quvchi bor. Ularni har birida juft sondagi o’quvchilar bo’lgan ikkita ( birinchi va ikkinchi ) guruhlarga ajratish kerak. Shu ishni necha xil usulda bajarish mumkin?

6) Hokkey jamoasida ikkita darvozabon, beshta himoyachi va sakkizta hujumchi bor. Murabbiy maydonga bitta darvozabon, ikkita himoyachi va uchta hujumchi tushirishi kerak. Murabbiy bu ishni necha xil usulda bajarish mumkin?

7) Yozuvida faqat 0 va 8 raqamlari qatnashgan va 9 ga bo’linadigan o’n bir xonali natural sonlar nechta?

8) Tramvay chiptalarining raqamlari olti xonali sonlar bo’lib, 0 dan 9 gacha raqamlar bilan yozilgan. Shunday chiptalarning nechtasida beshta bir xil raqamlar bor?

9) Raqamlari yig’indisi 4 ga teng bo’lgan 23 xonali natural sonlar nechta?

10) O’nli yozuvida 4, 5, 6 va 8 raqamlari qatnashmagan va 4 ga bo’linadigan to’rt xonali sonlar nechta?