VIII-БОБ. КОМБИНАТОРИКА. ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

8.1-§. КОМБИНАТОРИКА ЭЛЕМЕНТЛАРИ

I. Бирлашмалар

Таориф. Ҳар қандай нарсалардан тузилган ва бир-бирларидан ё шу нарсаларнинг тартиби билан, ёки шу нарсаларнинг ўзлари билан фарқ қилувчи турли группалар умуман *бирлашмалар* деб айтилади.

Агар 10 хил рақам; 0, 1, 2, ..., 9 дан ҳар бирида бир неча рақамдан қилиб группалар тузсак, масалан: 123, 312, 8056, 5630, 42 ва шунга ўшаш, турли бирлашмалар ҳосил қиламиз. Улардан баозилари, масалан, 123 ва 312 фақат нарсаларнинг тартиби билан фарқ қилади, бошқалари эса, масалан, 8056 ва 312 ўзларидаги нарсалар билан (ҳатто нарсаларнинг сони билан ҳам) фарқ қилади.

Бирлашмаларни тузган нарсалар *элементлар* деб аталади. Элементларни a, b, c, ... харфлар билан белгилаймиз.

Бирлашмалар уч хил бўлиши мумкин; ўринлаштириш, ўрин алмаштириш ва группалаш. Уларнинг ҳар бирини айрим кўриб чиқамиз.

1. **Ўринлаштиришлар.** Турли бирлашмалар тузадиган нарсаларимизнинг сони учта (масалан, 3 карта) бўлсин; бу нарсаларни a, b ва c билан белгилаймиз. Улардан қуйидаги бирлашмаларни тузиш мумкин; биттадан:

$$a, b, c;$$

иккитадан:

$$ab, ac, bc, ba, ca, cb$$

ва учтадан:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Бу бирлашмалардан, 2 тадан тузилган бирлашмаларни олайлик. Улар бир-бирларидан, ё нарсалари билан (масалан, ab ва ac) ёки нарсаларнинг тартиби билан (масалан, ab ва ba) фарқ қилади, аммо улардаги нарсаларнинг сони бир хил. Бундай бирлашмалар *уч элементни 2 тадан ўринлаштириш* деб аталади. **m** *элементни* **n** *тадан ўринлаштиришдеб шундай бирлашмалар айтиладики, уларнинг ҳар бирида, берилган* **m** *элементдан олинган* **n** *та элемент бўлиб, улар бир-бирларидан ё элементлари билан, ёки элементларнинг тартиби билан фарқ қилади* (демак, $n \le m$ фараз қилинади). масалан, юқоридаги 3 тадан олинган бирлашмалар уч элементдан тузилган 3 тадан ўринлаштиришлар бўлади (фақат тартиблари билан фарқ қилади), 2 тадан олинган бирлашмалар, уч элементни 2 тадан ўринлаштириш бўлади (ё нарсалари билан ёки тартиби билан фарқ қилади).

Берилган m элементдан тузилган ўринлаштиришлар 1 тадан, 2 тадан, 3 тадан, ... ва ниҳоят, m тадан бўлишлари мумкин.

m та элементдан тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришлар сонини, уларнинг ўзларини тузмасданоқ аниқлай оламиз. Бу сонни A_m^n шаклида белгилаш қабул қилинган (бундаги А — французча "arrangement" деган сўзнинг бош ҳарфи бўлиб "ўринлаштириш" деган маонони беради). Бу сонни топиш учун, берилган элементлардан мумкин бўлган барча ўринлаштиришларни тузишга имкон берадиган усулни кўриб чиқамиз.

Бизга *m* та элемент: *a, b, c, ..., k, l* берилган бўлсин. Энг олдин уларни *1* тадан жойлаштириб, барча ўринлаштиришларни тузамиз. Маолумки улар *m* та бўлади. Демак: $A_m^1 = m$. Энди 2 тадан жойлаштириб, барча ўринлаштиришларни тузамиз. Бунинг учун олдинги 1 тадан тузилган ўринлаштиришларнинг ҳар бири ёнига қолган барча *m--1* та элементни 1 тадан кетма-кет қўйиб чиқамиз. Чунончи, *a* элемент ёнига, қолган *b, c, ..., k, l* элементларнинг ҳаммасини қўйиб чиқамиз ва шунга ўхшаш. У ҳолда қуйидагича 2 тадан тузилган ўринлаштиришларни ҳосил қиламиз:

$$m \text{ ûàòî ð} \begin{cases} ab, ac, ad, \ldots., ak, al; \ (m-1 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \\ ba, bc, bd, \ldots., bk, bl; \ (m-1 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \\ ca, cb, cd, \ldots., ck, cl; \ (m-1 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ la, lb, lc, \ldots, \ lk; \ (m-1 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \end{cases}$$

Барча элементлар *m* та бўлганликдан ҳар бир ўринлаштиришдан бир элементдан олсак m -1 та 2 тадан ўринлаштириш ҳосил бўлади, ва 2 тадан ўринлаштиришнинг умумий сони (m -1)m бўлади. Булардан бошқа 2 тадан ўринлаштиришлар бўлмаслиги очиқ кўриниб турибди. Демак:

$$A_m^2 = m(m-1)$$

Энди 3 тадан ўринлаштиришлар тузиш учун, ҳозиргина тузилган 2 тадан ўринлаштиришлардан ҳар бирини олиб, унинг ёнига қолган барча **m--2** та элементни биттадан қўйиб чиқамиз. У ҳолда қуйидаги 3 тадан ўринлаштиришларни топамиз:

$$(m-1)m \text{ ûàòî ð} \begin{cases} abc, abd, \ldots, abk, abl; (m-2 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \\ acb, acd, \ldots, ack, acl; (m-2 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ lka, lkb, \ \ldots, \ (m-2 \text{ òà ùðèí ëàø òèðèø}) \end{cases}$$

2 тадан ўринлаштиришларнинг ҳаммаси **m(m--1)** га тенг ва ҳар биридан **(m -2)** та 3 тадан ўринлаштириш олингани учун, бундай ўринлаштиришларнинг ҳаммаси қуйидагича бўлади:

(m-2)[m(m-1)]=m(m-1)(m-2).

Шундай қилиб:

$$A_m^3 = m(m-1)(m-2).$$

Шунга ўхшаш:

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3).$$

$$A_m^5 = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).$$

ва умуман:

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)].$$

Ўринлаштиришлар сонининг формуласи ана шундай; уни сўз билан қуйидагича айтиш мумкин:

m та элементдан n тадан олиб тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришларнинг сони, энг каттаси m бўлган n та кетма-кет бутун сонлар кўпайтмасига тенг.

Шундай қилиб:

$$A_4^2 = 4\cdot 3 = 12;\ A_4^3 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24;\ A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$$

ва шунга ўхшаш.

Масалалар. 1) Синфда 10 фан ўқилади ва ҳар куни 5 хил дарс ўтилади. Кунлик дарс неча турли усул билан тақсимлаб қўйилиши мумкин?

Дарсларнинг барча мумкин бўлган кунлик тақсимоти ўн элементдан 5 тадан олиб тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришларга жуда ўхшаш эканлиги равшан; шунинг учун тақсимот усулларининг ҳаммаси қуйидагидан иборат бўлиши керак:

$$A_{10}^5 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 30240.$$

2) Бутун сонларнинг ҳар бири учта ҳар хил қийматли рақам билан ифода қилинадиган бўлса. қанча бутун сон тузиш мумкин?

Изланган сон 9 га қийматли рақамдан 3 тадан олиб тузилган ўринлаштириш сонидан иборат; демак, *у* $9\cdot 8\cdot 7=504$.

3) Ҳар бири учта турли рақам билан ифода қилинадиган бўлса, қанча бутун сон тузиш мумкин?

10 та рақам: 0,1,2,3,...,9 ни учтадан жойлаштириб **10·9·8=720** ўринлаштириш тузиш мумкин, лекин бу сондан 0 рақами билан бошланган 3 тадан ўринлаштиришларни чиқариб ташлаш керак. Бундай ўринлаштириш сони 9 га қийматли рақамни 2 тадан қанча ўринлаштириш тузиш мумкин бўлса, шунчага тенг, яони **9·8=72**; демак, изланган сон **720-72=648**.

2. Ўрин алмаштиришлар. Агар ўринлаштиришлар ***m*** та элементдан ***n*** тадан олинган бўлса (яони фақат элементларининг тартиби билан фарқ қилса) бундай ўринлаштиришлар ўрин алмаштиришлар деб аталади. Масалан, икки элемент ***a*** ва ***b*** дан ўрин алмаштириш 2 ни 2 тадан ўринлаштириш бўлади, яони ***ab*** ва ***ba*** : уч элементдан шрин алмаштириш 2 ни 3 тадан ўринлаштириш бўлади, яони ***abc, acb, bac, bca, cab, cba*** ва шулар каби ***m*** та элементдан мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сони P_m билан белгиланади (бунда **P** французча "**permutation**" сўзининг бош ҳарфи, унинг маоноси, "ўрин алмаштириш" демакдир).

m та элементдан ўрин алмаштиришлар ***m*** ни ***m*** тадан ўринлаштириш деган сўз бўлгани учун, ўрин алмаштиришлар формуласи қуйидагича бўлади:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots(m-1)m$$

m та элементдан мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришларнинг сони 1 дан ***m*** гача натурал сонларнинг кўпайтмасига тенг.

1) Тўққизта ҳар хил қийматли рақам билан нечта тўққиз хонали сон ёзиш мумкин?

Изланган сон:

$$P_9 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9=362880$$

2) 12 кишилик овқат ҳозирланган столга 12 кишини неча турли ўтқазиш мумкин?

Ўтқазиш турларининг сони қуйидагига тенг:

$$1\cdot 2\cdot 3 \ldots 12 = 479001600$$

Эслатма. 1 дан ***m*** гача натурал сонларнинг кўпайтмаси (қисқача бундай белгиланади: ***m!***)***m*** нинг ортиб бориши билан жуда тез ўсади: чунончи, ***m=12*** бўлганда у **479001600,** ***m=100*** бўлганда у шундай сон билан ифода қилинадики, уни тасвирлаш учун 158 рақам ёзиш керак бўлади.

3. Группалаш. Агар ***m*** та элементдан ***n*** тадан тузиш мумкин бўлган барча ўринлаштиришларни бир-бирларидан, энг камида бир элемент билан фарқ қиладиганларини танлаб олсак, у ҳолда группалар деб айтилган бирлашмаларни ҳосил қиламиз.

Масалан, тўрт элемент ***a,b,c*** ва ***d*** дан 3 тадан олиб тузилган группалар бундай бўлади:

abc, abd, acd, bcd

Агар бу группаларнинг ҳар бирида мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришларни қилсак, тўрт элементдан 3 талаб мумкин бўлган барча ўринлаштиришларни ҳосил қиламиз:

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acd	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cad	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Бундай ўринлаштиришларнинг сони **6· 4=24** бўлади.

Шундай қилиб ***m*** та элементдан ***n*** тадан олиб тузилган барча ўринлаштиришлар сони, ***m*** та элементдан ***n*** тадан олиб тузилган барча группалар сони билан ***n*** та элементдан тузиш мумкин бўлган барча ўрин алмаштиришлар сонининг кўпайтмасига тенг, яони:

$$A_m^n = C_m^n P_n,$$

бунда C_m^n ифода **m** та элементдан **n** тадан олиб тузилган барча группалар сонини белгилайди (**C** — французча "**combinaison**" сўзининг бош ҳарфи, унинг маоноси "группалаш" демакдир).

Бундан группаларнинг қуйидаги формуласини чиқарамиз:

$$C_m^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Масалан:

$$C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6,\ C_4^3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}$$ ва шунга ўхшаш.

1) Бир вазифага кўрсатилган 10 номздодан уч киши сайланиши керак. Сайловдаги турли имкониятлар қанча бўлиши мумкин?

Изланган сон ўн элементни 3 тадан жойлаштириб тузилиши мумкин бўлган барча группалар сонини ташкил қилади, яони

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

2) 52 хил картадан иборат дастадан 13 картани неча хил қилиб олиш мумкин?

Изланган сон, 52 та картадан 13 тадан олиб тузилган группалар сонидан иборат, яони:

$$C_{52}^{13} = \frac{52\cdot 51\cdot 50\ldots 40}{1\cdot 2\ldots 13} = 635013559600$$

4. Группалар сони формуласининг бошқача шакли. Группалар сони формуласининг сурат ва махражини ушбу **1·2·3...(m-n)** кўпайтмага кўпайтириб, уни бошқача шаклга келтириш мумкин; у ҳолда суратда ***m(m-1)...[m-(n-1)]*** **·1·2·3 ... (m-n)** кўпайтма чиқади, бундан кўпайтувчиларнинг ўрнини алиштириб шундай ёзсак бўлади:

1·2·3... (m-n)[m-(n-1)] ... m

Демак:

$$C_m^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)} = \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

5. Группалашнинг хоссаси. Бу формула ***n*** ни ***m-n*** билан алмаштириб, шуни чиқара оламиз:

$$C_m^{m-n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-n)\,1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{P_m}{P_n\cdot P_{m-n}}.$$

Бу формулани ўтган формула билан солиштириб, шуни топамиз:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

Қуйидаги оддий муҳокама ҳам шу хулосага келтиради: агар ***m*** та элементдан, бир группа тузиш учун қандай бўлмасин ***n*** та элементни танлаб олсак, қолган элементларнинг ҳаммаси ***m-n*** та элементдан бир группа ташкил қилади. Шундай қилиб, ***n*** та элементдан тузилган ҳар бир группага ***m-n*** та элементдан тузилган бир группа тўғри келади, ва аксинча; демак:

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

Бу муносабат, агар $n > \frac{1}{2}m$ бўлса, m та элементдан n тадан олиб тузилган группалар сонини топиши соддалаштиришга имкон беради. Масалан:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161700$$

8.2-§. НРЮТОН БИНОМИ

1. **Фақат иккинчи ҳадлари билан фарқ қиладиган биномларнинг кўпайтмаси.** Одатдагича кўпайтириш билан шуларни топамиз:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab;$$
$$(x+a)(x+b)(x+c)=[x^2+(a+b)x+ab](x+c)=$$
$$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(ac+bc)x+abc=$$
$$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

Шунга ўхшаш яна қуйидагини топа оламиз:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+$$
$$+ac+ad+bc+bd++cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

Кўпайтмаларга диққат билан қарасак, уларнинг ҳаммаси бир хил қонунга асосланиб тузилганликларини кўрамиз, яони:

Кўпайтма x нинг даражалари камайишига қараб тартиб билан жойлашган кўпҳадни ташкил қилади.

Биринчи ҳаднинг кўрсаткичи кўпайтувчи биномлар сонига тенг; кейинги ҳадларга x нинг кўрсаткичлари 1 тадан камайиб боради; охирги ҳадда x бўлмайди (x нолинчи даражада бўлади).

Биринчи ҳаднинг коэффициенти 1; иккинчи ҳаднинг коэффициенти кўпайтувчи биномларнинг иккинчи ҳадларининг йиьиндиси; учинчи ҳаднинг коэффициенти иккинчи ҳадларнинг иккиталаб олинган кўпайтмаларнинг йиьиндиси; тўртинчи ҳаднинг коэффициенти иккинчи ҳадларнинг учталаб олинган кўпайтмаларининг йиьиндиси. Охирги ҳад барча иккинчи ҳадларнинг кўпайтмасидан иборат.

Бу қонун ҳар қандай сондаги биномлар кўпайтмасига ҳам қўлланиш мумкин эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун олдин, агар у m та бином кўпайтмаси:

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+k)$$

учун тўьри бўлса, у ҳолда $(m+1)$ та бином кўпайтмаси

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+k)(x+l)$$

учун ҳам тўьри бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Демак, қуйидаги тенгликни тўьри деб фараз қиламиз:

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+...+S_m$$

бунда қисқача ифода қилиш учун шундай фараз қиламиз:

$$S_1=a+b+c+...+i+k;$$
$$S_2=ab+ac+...+ik;$$

$$S_3=abc+abd+...;$$
....
$$S_m=abc...ik.$$

Тўьри деб фараз қилинган тенгликнинг иккала томонини $x+l$ биномга кўпайтирамиз:

$$(x+a)(x+b)...(x+k)(x+l)=$$
$$=(x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+...+S_m)(x+l)=$$
$$x^{m+1}+S_1x^m+S_2x^{m-1}+...+S_mx+lx^m+lS_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+...+lS_m=$$
$$=x^{m+1}+(S_1+l)x^m+(S_2+lS_1)x^{m-1}+...+(S_m+lS_{m-1})x+lS_m.$$

Бу янги кўпайтмага қараб, унинг m та бином учун тўьри деб олинган қонунга бўйсунишига ишонч ҳосил қила оламиз. Ҳақиқатан, биринчидан, x нинг кўрсаткичлари шу қонунга бўйсунади; иккинчидан, коэффициентлар ҳам шунга бўйсунади, чунки иккинчи соннинг S_1+l коэффициенти кўпайтувчи биномлар иккинчи ҳадларининг (l ҳам шунга кирган холдаги) йиьиндиси; учинчи ҳад коэффициенти S_2+lS_1, барча иккинчи ҳадларнинг (бунга l ҳам кирган ҳолда) иккиталаб олинган кўпайтмаларининг йиьиндисидан иборат ва шунга ўхшаш; ниҳоят, lS_m барча иккинчи ҳадларнинг $abc...ik$ кўпайтмасидан иборат.

Бу қонун икки, уч ва тўрт бином учун тўьри эканини кўриб ўтдик; демак, ҳозирги исбот қилинганига кўра, у 4+1, яони бешта бином кўпайтмаси учун ҳам тўьри бўлиши керак; агар у бешта бином кўпайтмаси учун тўьри бўлса, 5+1, яони олтита бином кўпайтмаси учун ҳам тўьри бўлади ва ҳоказо.

Баён қилинган муҳокама усулини математик индукция усули деб айтилади. Шуни эслаб ўтиш кераккки, бу китобнинг ўтган параграфларида m дан $m+1$ га ўтиш усули билан исбот қилиш имконияти бир неча марта учраган эди. (Масалан, математик индукция усули баён қилинган параграфда).

2. **Нрютон биноми формуласи.** Биз исбот қилган ушбу:

$$(x+a)(x+b)...(x+k)=x^m+S_1x^{m-1}+S_2x^{m-2}+...+S_m$$

тенгликда биномнинг барча иккинчи ҳадлари бир хил, яони $a=b=c=...=k$ деб фараз қиламиз. У ҳолда чап томон биномнинг $(x+a)^m$ даражаси бўлади. $S_1, S_2, ..., S_m$ коэффициентларнинг нимага айланишларини қараймиз.

$a+b+c+...+k$ га тенг бўлган S_1 коэффициент ma га айланади. $ab+ac+ad+...$ га тенг бўлган S_2 коэффициент, m та элементдан 2 тадан қанча группа тузиш мумкин бўлса, шунча марта такрорланган a^2 сонига, яони $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$ га айланади, $abc+abd+...$ га тенг бўлган S_3 коэффициент m та элементда 3 тадан қанча группа тузиш мумкин бўлса, шунча марта такрорланган a^3 сонига, яони $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3$ га айланади ва шунга ўхшаш. Ниҳоят, $abc...k$ га тенг бўлган S_m коэффициент a^m га айланади. Шундай қилиб, қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3} +$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^nx^{m-n}+\ldots+a^m$$

Бу тенглик *Нрютон биномининг формуласи* номи билан маолум. Формуланинг ўнг томонида турувчи кўпҳад *бином ёйилмаси* деб аталади. Бу кўпҳаднинг хусусиятларини кўриб чиқамиз.

3. **Нрютон биноми формуласининг хоссалари.** Бу хоссалардан 10 тасини кўрсатамиз:

1) x нинг кўрсаткичлари биринчи ҳаддан охирги ҳадга қараб 1 тадан камайиб боради, биринчи ҳадда x нинг кўрсаткичи бином даражасининг кўрсаткичига тенг, охирги ҳадда эса 0 дир; аксинча a нинг кўрсаткичлари биринчи ҳаддан охирги ҳадга қараб, 1 тадан ортиб боради, биринчи ҳадда a нинг кўрсаткичи 0, охирги ҳадда бином даражасининг кўрсаткичига тенг. Бунинг натижасида ҳар қайси ҳадда x билан a даги кўрсаткичлар йиьиндиси ҳамма вақт бир хил бўлиб, бином даражасининг кўрсаткичига тенгдир.

2) Ёйилманинг ҳамма ҳадлари сони $m+1$, чунки ёйилмада a нинг 0 дан m гача барча даражалари бор.

3) Коэффициентлар қуйидагиларга тенг: биринчи ҳадда — бирга, иккинчи ҳадда — бином даражасининг кўрсаткичига, учинчи ҳадда m та элементдан 2 тадан группалаш сонига; тўртинчи ҳадда m та элементни 3 тадан группалаш сонига, умуман $(n+1)$-ҳад коэффициенти m та элементдан n тадан группалаш сонига тенг. Ниҳоят, охирги ҳад коэффициенти m та элементни m тадан группалаш сонига, яони 1 га тенг.

Бу коэффициентларнинг ҳаммаси *биномиал коэффици-ентлар* деб аталади.

4) Ёйилманинг ҳар бир ҳадини, тагига шу ҳаднинг ёйилмадаги ўрнининг номерининг кўрсатувчи рақамлар қўйилган T ҳарфи билан белгилаб, яони биринчи ҳади T_1 иккинчи ҳади T_2 ва ҳ.қ., шуни ёза оламиз:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^n x^{m-n}$$

Бу формула ёйилманинг умумий ҳадини ифода қилади, чунки биз ундан, n ўрнига 1, 2, 3, ..., m сонларини қўйиб (биринчидан бошқа), барча ҳадларни ҳосил қила оламиз.

5) Ёйилманинг бошидан биринчи ҳаднинг коэффициенти 1 га тенг; охирдан биринчи ҳад коэффициенти ҳам 1 га тенг. Бошда иккинчи ҳаднинг коэффициенти m, яони C_m^1; охирдан иккинчи ҳад коэффициенти C_m^{m-1}; аммо $C_m^1 = C_m^{m-1}$ бўлгани учун бу коэффициентлар ҳар бир хил бўлади. Бошдан учинчи ҳаднинг коэффициенти C_m^2 ва охирдан учинчи ҳадники C_m^{m-2}; аммо $C_m^2 = C_m^{m-2}$ бўлгани учун бу коэффициентлар ҳам бир хил бўлади ва ҳоказо. Демак,

Ёйилманинг четларидан тенг узоқликда турган ҳадларнинг коэффициентлари ўзаро тенг.

6) Қуйидаги биномиал коэффициентларга қарасак,

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots$$

бир коэффициентдан иккинчисига ўтишда сурат борган сари камаядиган (***m-1*** га, ***m-2*** га, ***m-3*** га ва ҳоказо) сонларга кўпайтирилишини кўрамиз. Бунинг натижасида коэффициентлар олдин орта боради (суратдаги кўпайтувчилар махраждаги мос кўпайтувчилардан катта бўлган вақтда), сўнгра камая боради. Ёйилманинг четларидан тенг узоқликда турган коэффициентлар тенг бўлганликдан, энг катта коэффициент ёйилманинг ўртасида бўлиши керак. Шу билан бирга агар ёйилма барча ҳадларининг сони тоқ бўлса (бу эса бином кўрсаткичининг жуфтлигида бўлади), ўртада энг катта коэффициентли фақат бир ҳад бўлади; агар барча ҳадлар сони жуфт бўлса (бу эса бином кўрсаткичининг тоқлигида бўлади), ўртада энг катта бир хил коэффициентли иккиҳад бўлиши керак. Масалан:

$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4;(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$

7) Ёнма-ён турувчи иккиҳадни:

$$T_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^n x^{m-n};$$

$$T_{n+2}=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)](m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}a^{n+1}x^{m-n-1}$$

солиштиришдан шу натижага келамиз:

Эндиги ҳад коэффициентини топиш учун, ундан олдинги ҳад коэффициентини шу ҳаддаги *x* нинг кўрсаткичига кўпай-тириш ва шу аниқланувчи ҳаддан олдинги ҳадлар сонига бўлиш кифоя.

Бу хоссадан фойдаланиб, бином ёйилмасини тўьридан-тўьри ёзиш мумкин, масалан:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+\ldots$$

Энди 7 ни оламиз, уни 6 га кўпайтирамиз ва 2 га бўламиз; бундан 21 чиқади:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+\ldots$$

Эндм 21 ни олиб, 5 га кўпайтирамиз ва 3 га бўламиз, 35 чиқади:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+\ldots$$

Ҳозир ҳадлар қаторнинг ўртасигача ёзилди, қолганларини бешинчи хоссага асосан топамиз:

$$(x+a)^7=x^7+7ax^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

8) **Барча биномиал коэффициентларнинг йиьиндиси 2^m га тенг.** Ҳақиқатан, бином формуласида ***x=a=1*** фараз қилиб, шуни ҳосил қиламиз:

$$2^m=1+m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+1.$$

Масалан $(x+a)^7$ нинг ёйилмасидаги коэффициентлар йиьин-диси мана шунга тенг:

$$\mathbf{1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7}.$$

9) Бином формуласида a ни — a га алмаштирсак, қуйида-гига эга бўламиз:

$$(x-a)^m = x^m - m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(-a)^2 x^{m-2} - \ldots + (-a)^m,$$

ёки

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2 x^{m-2} - \ldots + (-1)^m a^m,$$

демак, + ва — ишорали навбатлашиб келади.

10) Агар охирги тенгламада $x=a=1$ деб фараз қилсак, у ҳолда:

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + (-1)^m$$

чиқади.

Тоқ ўринда турувчи биномиал коэффициентлар йиьиндиси жуфт ўринда турувчи биномиал коэффициентлар йиьиндисига тенг.

4. Бином формуласини кўпҳадга татбиқ қилиш. Нрютон биномининг формуласи кўпҳадни даражага кўтаришга имкон беради, чинончи:

$$(a+b+c)^4=[(a+b)+c]^4=(a+b)^4+4c(a+b)^3+6c^2(a+b)^2+$$
$$+4c^3(a+b)=c^4.$$

$(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$ ларни ёйиб, охирги натижани ёза оламиз:

$$(a+b+c)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+12a^2bc+$$
$$+12ab^2c++4b^3c+6a^2c^2+12abc^2+6b^2c^2+4ac^3+4bc^3+c^4.$$

Мисол. 1) $1-C_8^2+C_8^4-C_8^6+C_8^8=16$ айниятни ҳисобланг.

ЕЧИШ. $(1+i)^8=1+i C_8^1 - C_8^2 - iC_8^3+ C_8^4+ iC_8^5 - C_8^6 - iC_8^7+ C_8^2+ C_8^8=$

$$=(1- iC_8^2 + C_8^4 - C_8^6+ C_8^8)+ i(C_8^1 - C_8^3 +C_8^5+ C_8^7)\quad (*)$$

$$(1+i)^8=\alpha_1=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^8=16\left(\cos 2\pi+i\sin 2\pi\right)=16\,(**)$$

Комплекс соннларнинг тенглик шартини эотиборга олиб, (*) ва (**) лардан $1 - i C_8^2 + C_8^4 - C_8^6+ C_8^8=16$, $C_8^1 - C_8^3 +C_8^5+ C_8^7=0$ келиб чиқади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Нрютон биномидан фойдаланиб қуйидаги иккиҳадларни даражага кўтаринг:

1) $(1+x)^6$; **2)** $(x+5)^5$; **3)** $(x-1)^7$;

4) $(2-a)^8$; **5)** $(3x+4y)^6$; **6)** $(1+x)^m$;

7) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$; **8)** $(x^2+2y^2)^4$; **9)** $(a^2+b^2)^6$.

2. $(5x-6a^2)^{10}$ ёйилмасининг 6-ҳадини топинг.
3. $(3a-2)^{12}$ ёйилмасининг 8-ҳадини топинг.
4. Қуйидаги ҳисобланг:

1) $2.1^6=\left(2+\frac{1}{10}\right)^6=\ldots$; 2) $1.03^5=\left(1+\frac{3}{100}\right)^5=\ldots$;

3) $0.97^4=\left(1-\frac{3}{100}\right)^4=\ldots$; 4) $29^5=(30-1)^5=\ldots$;

5) $99^3=(100-1)^3=\ldots$; 6) $(4+\sqrt{6})^6$;

7) $(6-5\sqrt{2})^6$; 8) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^5$;

9) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3$; 10) $(1+\sqrt{3})^8$;

11) $(2\sqrt{2}+\sqrt{6})^6$.

5.Қуйидаги йиьиндилар ҳисоблансин

1) $1+c_n^4+c_n^8+\ldots$; **2)** $1+c_n^3+c_n^6+c_n^9+\ldots$; **3)** $c_n^1+c_n^5+c_n^9+\ldots$;

4) $c_n^3+c_n^7+c_n^{11}+\ldots$; **5)** $c_n^2+c_n^5+c_n^8+\ldots$; **6)** $1-c_n^2+c_n^4-c_n^6+\ldots$;

7) $c_n^1-c_n^3+c_n^5-c_n^7$.

6. $\left(x^2-\frac{3}{x^3}\right)^{15}$ ёйилмасининг х бўлмаган ҳадини ҳисоблаб чиқаринг.

7. $\left(2x^2-\frac{a}{2x^3}\right)^{10}$ ёйилмасининг х бўлмаган ҳадини ҳисоблаб чиқаринг.

8.3-§. ҲОДИСАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Эҳтимоллар назарияси ҳодисалар рўй беришининг умумий қонуниятларини ўрганадиган ва уни амалиётда татбиқ этишга ёрдам кўрсатадиган фандир.

Ҳодиса дастлабки тушунча сифатида таорифланмайди. Ҳодисани кузатиш учун маолум бир шарт-шароитлар комплекси хозирланган бўлиши керак. Ушбу шарт-шароитлар комплексини **“σ”** билан белгилаймиз.

Масалан: 1. Сувнинг қайнаш ҳодисасини кузатиш учун **100^0 С** иссиқлик **760** мм Ртут симоб устуни билан ўлчанувчи нормал атмосфера **(σ: шарт-шароит);**

2. Кубик ташланганда бирор рақам(1дан 6гача)нинг тушишини кузатиш учун кубикнинг бир жинсли ва ташланаётган майдоннинг ҳам мутлоқ текис бўлиши **(“σ ” шарт-шароит).**

Биз бундан буён бирор ҳодисани руй беришини кузатиш учун ҳар доим **“σ ”** шарт-шароит хозирланган деб ҳисоблаймиз ва бу хакда кейинчалик эслатмаймиз.

Ҳодисалар табиатига кўра уч турга бўлинадилар (муқаррар ҳодиса, мумкин бўлмаган ва тасодифий ҳодиса). Тажриба ўтказилганда ҳар доим рўй берадиган ҳодисага муқаррар ҳодиса деб аталади ва уни **U** орқали белгиланади. Масалан кубик ташланганда 1дан 6гача рақамлардан бири-нинг тушиши муқаррар ҳодисадир. Ҳар сафар тажриба ўтказилганда ҳар доим рўй бермайдиган ҳодисага мумкин бўлмаган ҳодиса деб аталади ва уни **V** каби белгиланади.

Масалан кубик ташланганда **“ 7 ”** рақам тушиш ҳодисаси мумкин бўлмаган ҳодисадир.

Тажриба ўтказилганда ё рўй берадиган ёки рўй бермайдиган ҳодисага тасодифий ҳодиса деб аталади.

Тасодифий ҳодисаларни катта лотин ҳарфлари **A,B,C, ...**билан белгилаймиз. Масалан, кубик ташланганда **“3”** рақами тушиши тасодифий ҳодисадан иборат. Бундан буён тасодифий ҳодисаларнигина ўрганамиз ва уларни қисқача ҳодисалар деб атаймиз.

Агар битта синовнинг ўзида **A** ва **B** ҳодисалар бир вақтда рўй бермаса,улар биргаликдамас(биргаликда бўлмаган) ҳодисалар дейилади.

Агар синов натижасида бир нечта ҳодисалардан фақат биттаси рўй берса,улар ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташкил этади дейилади.

Агар **A** ҳодиса рўй берганда **B** ҳодиса ҳам рўй берса, у ҳолда **A** ҳодиса **B** ҳодисани эргаштиради, ва бу муносабатни $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ каби белгиланади.

Агар **A** ва **B** ҳодисалардан исталган бири иккинчисини эргаштирса, у ҳолда **A** ва **B** ҳодисаларни тенг кучли ҳодисалар деб аталади ва уни
A=B каби белгиланади. Ҳодисалар устида ҳам қўшиш, кўпайтириш, ҳодисалар айирмаси ва хаказо амалларни киритиб табиатдаги мураккаб ҳодисаларни ифодалаш мумкин бўлади.

A ва **B** ҳодисалардан ҳеч бўлмаганда биттасини рўй беришдан иборат бўлган ҳодисага **A** ва **B** ҳодисаларнинг йиьиндиси деб аталади ва уни $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ ёки **A+B** каби белгиланади. **A** ва **B** ҳодисаларнинг бир вақтда рўй беришидан иборат бўлган ҳодисага **A** ва **B** ҳодисаларнинг кўпайтмаси деб аталади ва уни $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ ёки $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ каби белгиланади.

A ҳодиса рўй бермагандагина ва фақат шу ҳолдагина рўй берадиган ҳодисага **A** ҳодисага карама-карши ҳодиса деб аталади ва уни $\overline{A}$ каби белгиланади .Агар **A** ҳодиса учун $\mathbf{B_1, B_2, ..., B_m}$ ҳодисалар мавжуд бўлиб, $\mathbf{A=B_1+B_2+...+ B_m}$ бўлса, у ҳолда **A** ҳодисани **“m”**та хусусий ҳолга ажиралади, ёки акс ҳолда эса **A** ҳодисани элементар ҳодиса деб аталади.

Элементар ҳодисаларни $\omega, \omega_1, \omega_2, \dots$ каби белгилаймиз. Элементар ҳодисалар тўпламини эса Ω каби белгилаймиз ва уни элементар ҳодисалар фазоси деб юритамиз.

Эҳтимолликнинг классик ва статистик таорифлари. Геометрик эҳтимоллик

1.Чекли сондаги тенг имкониятли элементар ҳодисалар фазоси $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ ни караймиз. Айтайлик $\{\omega_{i1,}\omega_{i2,\dots,}\omega_{ik}\}$ лар A ҳодисани рўёбга чиқарувчи элементар ҳодисалар бўлсин.

1-таориф: Агар **“п”** та тажриба ўтказилганда **А** ҳодисани рўёбга чиқарувчи имкониятлар сони **“к”** та бўлса, у ҳолда **А** ҳодисанинг классик эхтимоллиги деб $\frac{k}{n}$ нисбатига айтилади,яони $P(A) = \frac{k}{n}$. бу ерда **P(A)** ни **А** ҳодисанинг эҳтимоллиги деб ўқилади. Эхтимолликнинг классик таорифидан қуйидаги хоссаларнинг ўринлиги келиб чиқади.

1^0 P(A)$\geq$0 ; 2^0 P(V)=0, P(U)=1;

3^0 А ва **В** ҳодиса бир вақтда рўй бермаса, **P(A+B)=P(A)+P(B)**

ИСБОТИ: **п** та тажриба ўтказилганда **А** ҳодиса рўёбга чиқарувчи имкониятлар сони $\mathbf{k_1}$ та бўлсин. **В** ҳодиса учун эса $\mathbf{k_2}$ та бўлсин.

Бу ҳолда **P(A)=**$\frac{k_1}{n}$**, P(B)=**$\frac{k_2}{n}$**. А** ва **В** ҳодиса бир вақтда рўй бермаган-лиги учун **А+В** ни рўёбга чиқарувчи имкониятлар сони $\mathbf{к_1+к_2}$ га тенг бўлиб

$$P(A+B) = \frac{k_1 + k_2}{n} = \frac{k_1}{n} + \frac{k_2}{n} = P(A) + P(B)$$

шуни исботлаш зарур эди.

4^0 . P$(\overline{A})$**=1-P(A) ; 5^0. A$\subset$B** бўлса, у ҳолда **P(A) $\leq$P(B)**
P(B-A)=P(B)-P(A).

6^0 Ҳар қандай А ҳодиса учун **O$\leq$ P(A) $\leq$ 1**

2.Француз олими Мизес статистик эҳтимоллик учун **p=**$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}$ ни таклиф этган. Ўтказилган статистик тажрибалар, ҳамда назариялар ҳақиқатдан ҳам тажрибалар сони n етарли катта бўлганда $\frac{\mu_n}{n}$ нисбатни бирор **p (0$\leq$p$\leq$1)** доимий сон атрофида тебранишни тасдиқлайди. Бу ерда $\mathbf{\mu_n}$ нинг **n** та тажрибада **А** ҳодисанинг рўй беришлари частотаси, $\frac{\mu_n}{n}$ эса **А** ҳодисанинг рўй беришлар нисбий частотаси деб аталади. Статистик таорифининг ўринлигини қуйидаги жадвалда келтирилган маолумотлар ҳам тўла тасдиқлайди.

т/р		тажрибалар сони	герб тушишлар сони	нисбий частота
1.	Бюффон	4040	2048	0,5080
2.	Пирсон	12000	6019	0,5016
3.	Пирсон	24000	12012	0,5005

Жадвалдан кўринадики танга ташланганда герб тушишлари сонининг нисбий частотаси 0,5 атрофида тебранар экан. Ушбу миқдорни герб тушушлари ҳодисанинг статистик эҳтимоллиги сифатида қабул қилинган.

3. $\mathbf{D_1}$ соҳа **D** соҳанинг қисми (бўлаги) бўлсин. Агар соҳанинг ўлчамини(узунлиги,юзи,ҳажми) mes орқали белгиласак,таваккалига ташланган нуқтанинг $\mathbf{D_1}$ соҳага тушиш эҳтимоллиги $P(A)=\dfrac{mesD_1}{mesD}$ га тенг.

Эҳтимолликларни бевосита ҳисоблашда кўпинча комбинаторика формулаларидан фойдаланилади. Ўрин алмаштиришлар, ўринлаш-тиришлар ва группалашлар ва уларни сонини топиш формулаларини ўтганги параграфда кўрилган эди. *(*$P_n=1.2.....n=n!$,

$$A_n^m\ \frac{n!}{(n-m!)}=n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1),\ \ C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\dots m}=\frac{A_n^m}{P_m}\Bigg).$$

1-мисол. Кутида 3 та оқ, 7 та қора шар бор. Ундан таваккалига олинган шарнинг оқ шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. **А** - олинган шар оқ эканлиги ҳодисаси бўлсин. Мазкур синов 10 га тенг имкониятли элементар ходисалардан иборат бўлиб, уларнинг 3 таси **А** ҳодисага қулайлик туьдирувчидир. Демак,

$$P(A)=\frac{3}{10}=0,3$$

2-мисол. Гурухда 12 талаба бўлиб, уларнинг 8 нафари аолочилар. Рўйхат бўйича таваккалига 9 талаба танлаб олинди. Танлаб олинганлар ичида 5 талаба аолочи талаба бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Синовнинг барча мумкин бўлган тенг имкониятли элементар ходисалари сони C_{12}^9 га тенг. Буларнинг ичидан $C_{12}^9\cdot C_4^4$ таси танлаб олинган талабалар ичидан 5 таси аолочи талабалар ҳодисаси **(А)** учун қулайлик туьдиради. Шунинг учун

$$P(A)=\frac{C_8^5\cdot C_4^4}{C_{12}^9}=\frac{\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\cdot1}{\frac{12\cdot11\cdot10}{1\cdot2\cdot3}}=\frac{8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10}=\frac{14}{55}.$$

3-мисол. Қирқма алифбонинг 10 та харфидан “математика” сўзи тузилган. Бу харфлар тасодифан сочилиб кетган ва қайтадан ихтиёрий тартибда йиьилган. Яна “математика” сўзи ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. **А** - “Математика” сўзи ҳосил бўлиш ходисаси. Тенг имкониятли мумкин бўлган элементар ходисалар сони **n=*10 !*** бўлиб, **А** ҳодисага қулайлик яратувчилари ***m=2! ·3! ·2!*** бўлади. Бу ерда математика сўзида “**м**” 2 марта, “**а**” 3 марта, “**т**” 2 марта такрорланиши хисобга олинади.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2!\cdot3!\cdot2!}{10!}=\frac{1}{151200}.$$

4-мисол. Телефонда номер тераётган абонент охирги икки рақамни эсдан чиқариб қўйди ва фақат бу рақамлар ҳар хил эканлигини эслаб қолган ҳолда уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлиги эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. **А** - иккита керакли рақам терилганлик ходисаси бўлсин. Ҳаммаси бўлиб, ўнта рақамдан иккитадан нечта ўринлаштиришлар тузиш мумкин бўлса шунча, яони $A_{10}^2=10\cdot9=90$ та турли рақамларни териш мумкин. Шунинг учун классик эҳтимолликка кўра

$$P(A)=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{90}.$$

5-мисол. R радиусли доирага нуқта таваккалига ташланган. Ташланган нуқтанинг доирага ички чизилган мунтазам учбурчак ичига тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. D соҳа R радиусли доира юзи S га тенг, D_1 соҳа R радиусли доирага ички чизилган мунтазам учбурчак юзи S_1 га тенг бўлсин. **А**-нуқтанинг мунтазам учбурчакка тушиш ҳодисаси бўлсин. У ҳолда.

$$P(A)=\frac{mesD_1}{mesD}=\frac{s_1}{s}=\frac{\frac{3\sqrt{4}R^2}{4}}{\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx0{,}4137$$

Демак, R радиусли доирага таваккал ташланган нуқтанинг унга ички чизилган мунтазам учбурчакка тушиш эҳтимоллиги ***P(A)=0,4137*** га тенг.

ШАРТЛИ ЭҲТИМОЛЛИК.

В ҳодисанинг **А** ҳодиса рўй берди деган шартда ҳисобланган эҳтимполлиги <u>шартли эҳтимоллик</u> дейилади ва у қуйидагича белгиланади. ***P_A (B)*** ёки ***P(B/A)*** .

Иккита боьлиқ ҳодисанинг биргаликда рўй бериш эхтимоллиги учун қуйидаги формулалар ўринга эга

$P(AB)=P(A)\,P_A(B)$ ёки $P(AB)=P(B)\,P_B(A)$

Агар **А** ва **В** лар эркли бўлса уларнинг биргаликда рўй бериши эҳтимоллиги $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$ бўлади.

Бир нечта боьлиқ ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллиги қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$P(A_1, A_2, \ldots A_p) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cdot A_2}(A_3)\ldots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

А ва **В** ҳодисалар йиьиндисининг эҳтимоллиги учун қуйидаги формула ўринли:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Тўла эҳтимоллик формуласи. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ лар ҳодисаларнинг тўла гуруҳини ташқил этиб, **А** ҳодиса уларнинг бири билан рўй бериши мумкин бўлсин. У ҳолда

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)$$

тенглик ўринли бўлади.

Бейес формуласи. Агар **А** ҳодиса рўй бергани маолум бўлса, у ҳолда $P(B_k)$ $k=1,2,\ldots,n$ эҳтимолликларни қайта баҳолаш мумкин, яони $P_A(B_k)$ шартли эҳтимолликларни ушбу Бейес формуласи ёрдамида топиш мумкин:

$$p_A(B_k) = \frac{p(B_k)\cdot p_{B_k}(A)}{p(A)}$$

1-мисол. Цехда бир нечта станок ишлайди. Смена давомида битта станокни созлашни талаб этиш эхтимоллиги 0,2 га тенг, иккита станокни созланишни талаб этиш эҳтимоллиги 0,13 га тенг. Смена давомида иккитадан ортиқ станокни созланишни талаб этиш эҳтимоллиги эса 0,07 га тенг. Смена давомида станокларни созланиш талаб этилиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ҳодисаларни қараймиз: **А** - смена давомида битта станок созланиш талаб этиш ходисаси;

В - смена давомида иккита станок созлашни талаб этиш ҳодисаси;

С - смена давомида 2 тадан ортиқ станок созлашни талаб этиш ҳодисаси;

А, В, С ҳодисалар ўзаро биргаликда эмас. Бизни қуйидаги ҳодиса қизиқтиради: **(А+В+С)** - смена давомида созлаш зарур бўладиган станоклар:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}2+0{,}13+0{,}07=0.4$$

2-мисол. Иккита овчи бир пайтда бир-бирига боьлиқ бўлмаган ҳолда қуёнга қарата ўқ ўзишди. Овчилардан хеч бўлмаганла бири ўқни нишонга текказса, қуён отиб олинган бўлади. Биринчи овчининг нишонга уриш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисининки 0,75 га тенг бўлса, қуённи отиб олиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Куйидаги ҳодисаларни қараймиз:

A - биринчи овчи нишонга тekказиши;

B - иккинчи овчи нишонга тekказиши.

A ва **B** эркли ҳодисалар. Бизни (A+B) ҳодиса кизиқтиради.

(A+B) - хеч бўлмаганда битта овчининг нишонга тekказиши. У ҳолда.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0,8+0,75-0,8\cdot 0,75=0,95, \quad P(A+B)=0,95$$

3-мисол. Командада 12 спортчи бўлиб, уларнинг 5 таси спорт устаси. Спортчилар ичидан қуроа ташлаш орқали уч спортчи танланади. Танланган спортчиларнинг ҳаммаси спорт устаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1 - биринчи спортчи - спорт устаси;

A_2 - иккинчи спортчи - спорт устаси;

A_3 - учинчи спортчи - спорт устаси;

$A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$ - учала спортчи - спорт устаси.

A_1 , A_2 , A_3 ҳодисалар - боьлиқ ҳодисалар. Демак,

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}.$$

4-мисол. Талаба ўзига керакли формулани 3 та маолумотномадан қидиради. Формула биринчи, иккинчи, учинчи маолумотномада бўлиши эҳтимоллиги мос равишда **0,6; 0,7; 0,8** га тенг. Формула:

а) фақат битта маолумотномада бўлиши;

б) фақат иккита маолумотномада бўлиши;

в) учала маолумотномада бўлиши;

г) ҳеч бўлмаганда битта маолумотномада бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш: Қуйидаги ҳодисаларни караймиз:

A_1 - формула биринчи маолумотномада бор,

A_2 - формула иккинчи маолумотномада бор,

A_3 - формула учинчи маолумотномада бор.

а) $A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ - формула фақат битта маолумотномада бор. $A_1\overline{A}_2A_3,\ \overline{A}_1A_2,\ \overline{A}_3,\ \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ ходисалар биргаликда эмас ва $A_1, \overline{A}_2,\ \overline{A}_3;\ \overline{A}_1, A_2, \overline{A}_3;\ \overline{A}_1,\ \overline{A}_2\ A_3$ ходисалар боьлиқ эмас. Демак,

$$P(A)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=$$

$$=0,6\cdot 0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2+0.4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,188.$$

б) $A=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$ - формула фақат иккита маолумотномада бор. Демак,

$$P(A)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3\cdot 0,8+0,4\cdot 0,7\cdot 0,8=0,452.$$

в) $A=A_1A_2A_3$ - формула учала маолумотномада бор.

$$P(A)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,8=0,336.$$

г) $A=A_1+A_2+A_3$ - формула ҳеч бўлмаганда битта маолумотномада бор. Мазкур ҳолда **A** ходисага қарама-қарши ҳодисани қараш қулай.

$\overline{A}$ - формула ҳеч бир маолумотномада йўқ.

$\overline{A} = \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$ у ҳолда $P(A)=1-P(\overline{A})$.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=$$

= 1– 0,4 · 0,3 · 0,2 =1–0,024=0,976.

Шундай қилиб, **а) P(A) = 0,188; б) P(A) = 0,452; в) P(A)=0,336; г) P(A)=0,976**.

5-Мисол. Биринчи қутида 2 та оқ, 6 та қора, иккинчи қутида эса 4 та оқ, 2 та қора шар бор. Биринчи қутидан таваккалига 2 та шар олиб, иккинчи қутига солинди, шундан кейин иккинчи қутидан таваккалига битта шар олинди.

а) Олинган шар оқ бўлиши эҳтимоллиги қандай?

б) Иккинчи қутидан олинган шар оқ бўлиб чиқди. Биринчи қутидан олиб иккинчи қутига солинган 2 та шар оқ бўлиши эҳтимоллиги қандай?

Ечиш. а) Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

А - иккинчи қутидан шар оқ.

B_1 - биринчи қутидан иккинчи кутига 2 та оқ шар солинган,

B_2 - биринчи қутидан иккинчи кутига 2 та турли рангдаги шар солинган.

B_3 - биринчи қутидан иккинчи қутига 2 та қора шар солинган.

B_1, B_2 , B_3 - ходисалар тўла гуруҳ ташкил этади. У ҳолда тўла эҳтимоллик формуласига кўра.

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A).$$

$B_k = k=\overline{1,3}$ гипотезаларнинг эҳтимолликларини ва $P_{B_k}(A)$ шартли эҳтимолликларни классик схема бўйича хисоблаймиз:

$$P(B_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28};\quad P(B_2)=\frac{C_2^1\cdot C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}.$$

$$P(B_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28};\quad P_{B_1}(A)=\frac{3}{4};\quad P_{B_2}(A)=\frac{5}{8};$$

$$P_{B_3}(A)=\frac{1}{2}$$

Топилган натижаларни тўла эҳтимоллик формуласига қўямиз:

$$P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}.$$

б) $P_A(B_1)$ эҳтимолликни Бейес формуласи бўйича топамиз:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{9}{16}}=\frac{1}{21}.$$

4-§. ВАРИАЦИОН ҚАТОР УЧУН ПОЛИГОН ВА ГИСТОГРАММА.

Текширилаётган аломат бўйича ўрганиладиган барча обоектлар тўплами бош тўплам дейилади. Танланма тўплам ёки танлама деб текшириш учун олинган обоектлар тўпламига айтилади.

Тўплам (танлама ёки бош тўплам) ҳажми деб бу тўпламдаги обоектлар сонига айтилади.

Бирор X белгини (дискрет ёки узлуксиз) миқдор (сон) жиҳатидан ўрганиш учун бош тўпламдан $\boldsymbol{n}$ хажми x_1, x_2 , ..., x_n танланма ажратилган бўлсин.

X белгининг кузатиладиган $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, ..., $\boldsymbol{x_n}$ қийматлари вариантлар дейилади.

Вариантларнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган кетма-кетлиги вариацион қатор дейилади.

Танланманинг статистик тақсимоти деб вариантлар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталардан иборат жадвалга айтилади:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
n_i	n_1	n_2	...	n_k

ёки

x_i	x_1	x_2	...	x_k
ω_i	n_1/n	n_2/n	...	n_k/n

Барча частоталар йиьиндиси танланма ҳажмига тенг, яони $\boldsymbol{n_1+n_2+...+n_k=n}$, бу ерда $\boldsymbol{n_1, n_2, ..., n_k}$ - частоталар.

Барча нисбий частоталар йиьиндиси бирга тенг, яони $\boldsymbol{\omega_1+\omega_2+...+\omega_k=1}$, бу ерда $\boldsymbol{\omega_1 = n_1 /n, \omega_2=n_2/n, ..., \omega_k=n_k/n}$ - нисбий частоталар.

Белги узлуксиз бўлса, унинг барча кузатиладиган қийматлари жойлашган оралиқ $\boldsymbol{h}$ узунликдаги кисмий оралиқларга бўлинади ва $\boldsymbol{i}$ - оралиққа тушган частоталар йиьиндиси (ёки нисбий частоталар йиьиндиси) топилади.

Частоталар полигони деб кесмалари $(\boldsymbol{x_1, n_1})$, $(\boldsymbol{x_2, n_2})$, ..., $(\boldsymbol{x_k,n_k})$ нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади, бу ерда $\boldsymbol{x_i}$ - танланма вариантлари, $\boldsymbol{n_i}$ - мос частоталар.

Нисбий частоталар полигони деб кесмалари $(\boldsymbol{x_1, \omega_1})$, $(\boldsymbol{x_2, \omega_2})$, ..., $(\boldsymbol{x_k, \omega_k})$ нуқталарни туташтирадиган синиқ чизиққа айтилади, бу ерда
$\boldsymbol{x_i}$- танланма вариантлари; $\boldsymbol{\omega_i}$ - уларга мос нисбий частоталар.

Белгининг узлуксиз тақсимланишини яққол кўрсатиш учун гистограммалар деб аталувчи диаграммалардан фойдаланилади.

Частоталар гистрограммаси деб асослари $\boldsymbol{h}$ узунликдаги оралиқлар, баландликлари эса $\boldsymbol{n_i/h}$ (частота зичлиги) нисбатларга тенг бўлган тўьри тўртбурчаклардан иборат поьонавий фигурага айтилади.

$\boldsymbol{S_i = h\cdot \frac{n_i}{h} = n_i}$ - кисмий $\boldsymbol{i}$ тўьри тўртбурчакнинг юзи.

$\boldsymbol{S = \sum_{i=1}^{k} n_i = n}$ - частоталар гистограммаси юзи.

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари $\boldsymbol{h}$ узунликдаги оралиқлар, баландликлари эса $\boldsymbol{\omega_i/h}$ (нисбий частота зичлиги) нисбатларга тенг бўлган тўьри тўртбурчаклардан иборат поьонавий фигурага айтилади.

$$S_i = h \cdot \frac{\omega_i}{h} = \omega_i$$ - кисмий $\boldsymbol{i}$ - тўьри тўртбакнинг юзи.

$$S = \sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$$ - нисбий частоталар гистограммасининг юзи.

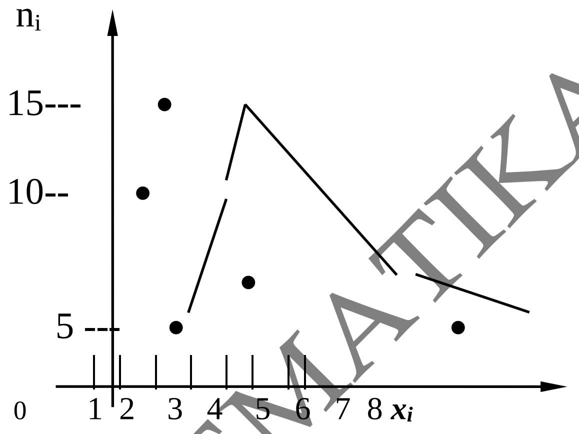
1-Мисол. Берилган танланма тақсимоти бўйича частоталар ва нисбий частоталар полигонларини чизинг:

x_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3

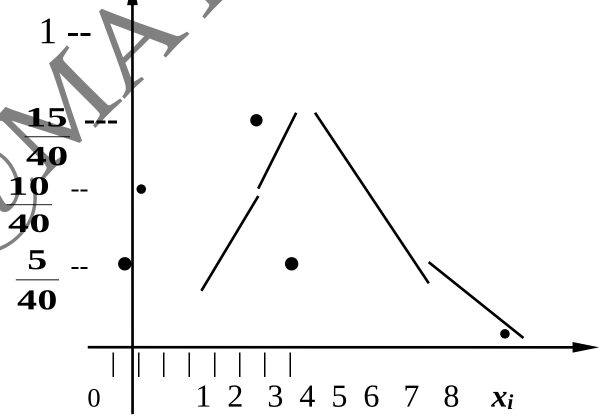
Ечиш. $n=5+10+15+7+3=40$ - танланма хажми. Нисбий частоталарни топамиз:

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}, \quad \omega_1 = \frac{5}{40}, \quad \omega_2 = \frac{10}{40}, \quad \omega_3 = \frac{15}{40}, \quad \omega_4 = \frac{7}{40}, \quad \omega_5 = \frac{3}{40}.$$

x_i	1	2	4	5	8
ω_i	5/40	10/40	15/40	7/40	3/40



1-шакл.



2-шакл

1-шаклда частоталар полигони ва 2- шаклда нисбий частоталар полигони тасвирланган.

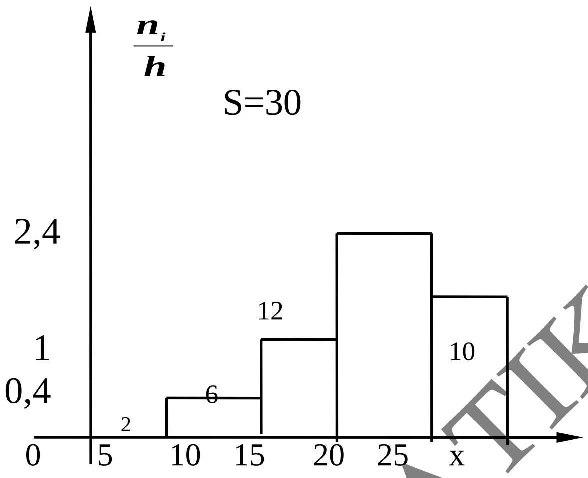
2-мисол. Берилган танланма таксимоти бўйича частоталар ва нисбий частоталар гистограммаларини чизинг.

$x_i - x_{i+1}$	5–10	10–15	15–20	20–25
n_i	2	6	12	10
ω_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

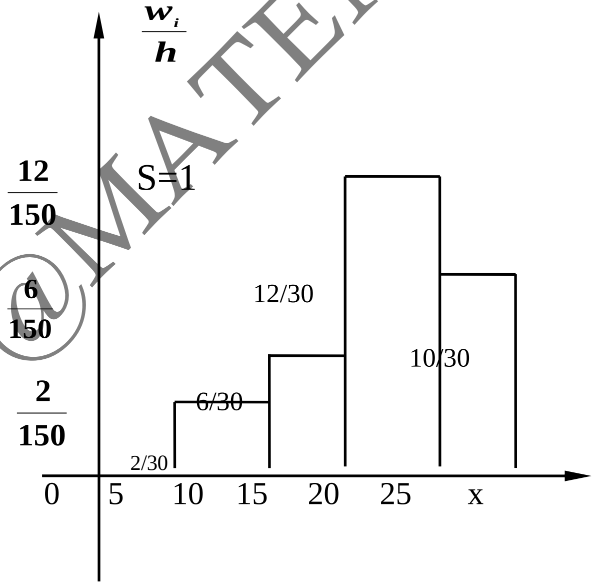
Ечиш. ***n=2+6+12+10=30*** - танланма хажми.

$$h=5,\quad \frac{n_1}{h}=\frac{2}{5}=0,4;\quad \frac{n_2}{h}=\frac{6}{5}=1,2;\ \frac{n_3}{h}=\frac{12}{5}=2,4;\quad \frac{n_4}{h}=\frac{10}{5}=2.$$

$$\frac{\omega_1}{h}=\frac{2}{150};\ \frac{\omega_2}{h}=\frac{6}{150};\ \frac{\omega_3}{h}=\frac{12}{150};\ \frac{\omega_4}{h}=\frac{10}{150}.$$



3-шакл



4-шакл.

3-шаклда частоталар гистограммалари ва 4-шаклда нисбий частоталар гистограммалари тасвирланган.

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Қутичада бир хилда 10 та шар бор: 3 таси оқ, 2 таси қора ва 5 таси қизил. Ихтиёрий олинган шарнинг а) қизил бўлиши; б) қора бўлмаслик эҳтимоли нимага тенг.
2. Қутичада бир хилда 15 та шар бор: 5 таси оқ. 10 таси қора. Қутидан ихтиёрий олинган шарни кўк шар бўлиш эҳтимолли нимага тенг?
3. Қутичада 12 та шар бор: 3 таси оқ. 4 таси қора. 5 таси қизил. Қутичадан тавакалига олинган шарни қора бўлиши эҳтимоллиги топилсин.
4. Қутичада 10 та бир шар бор: 6 таси оқ ва 4 таси қора. Қутидан таваккалига иккита шар олинди. Олинган шарларни оқ бўлиш эҳтимоли топилсин.
5. Домино тошларининг тўлиқ мажмуасидан (28 та тош) таваккалига биттаси олинди. Қўйидаги ҳодисаларнинг эҳтимоллигини топинг.
   а) олинган тошда 6 очқо бўлиши;
   б) олинган тошда 5 ёки 4 очко бўлиши.
   в) чиққан очколар йиьиндиси 7 га тенг бўлиш.
6. Иккита ўйин соққаси баравар ташланганда қуйидаги ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимолликларини топинг.
   А – тушган очколар йиьиндиси 8 га тенг.
   В – тушган очколар кўпайтмаси 8 га тенг.
   С – тушган очколар йиьиндиси уларнинг кўпайтмасидан катта.
7. R радиусли доирага нуқта ташланди. Бу нуқта доирага ички чизилган квадрат ишга тушиши эҳтимоллигини топинг.
8. Таваккалига олинган телефон номери бешта рақамдан иборат. Унда
   а) ҳамма рақамлар ҳар хил бўлиши;
   б) ҳамма рақамлар тоқ бўлиши эҳтимоллиги топинг.

8.4-§. ТОШМУҲАММАД АЛИЕВИЧ САРИМСАҚОВ (1915-1995 йиллар)

Атоқли ўзбек математик олими, жамоат ва давлат арбоби, физика-математика фанлари доктори, профессор, Ўзбекистон ФА академиги, Ўзбекистонда ҳизмат кўрсатган фан арбоби, Беруний номидаги республика мукофоти ва давлат мукофоти лауреати, Меҳнат Қахрамони Тошмуҳаммад Алиевич Саримсақов 1915 йил 10 сентябрда Андижон вилоятининг Шаҳрихон қишлоьида туьилган, у Қўқондаги мактабда ўрта маолумот олди. 1931 йилда САГУ (ҳозирги Миллий университет) нинг физика-математика факулртетига ўқишга кирди. Унинг илмий фаолияти университетини аоло даражада тугатиб, машҳура олим В.И.Романовский рахбарлигида аспирантурага киргандан сўнг бошланди. 1938 йилдаёқ физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига сазовор бўлди.

Т.А.Саримсақовнинг дастлабки илмий иши классик ортогонал кўпҳадлари илдизларининг тақсимотига боьишланган эди. Унда классик анализнинг мухим масалаларидан бирига эҳтимоллар назарияси методлари татбиқ қилинган.

Улуь Ватан уруши йилларида Тошмуҳаммад Алиевич Ўрта Осиё ҳарбий округнинг об-ҳаво бошқармасида ҳарбий метеоролог бўлиб ҳизмат қилди. Эҳтимоллар назариясининг баози методларини Ўрта Осиёнинг об-ҳаво жараёнларини ўрганишга татбиқ қилиш ьоясини илгари сурди ва Т.А.Саримсақов бу ишни олимлар В.Бугаев, В Джор-жио ҳамкорлигида амалга оширди. Мамлакатимиз ҳалқ хўжалиги учун катта ахамиятга эга бўлган амалий тавсиялар берилди. Математиканинг эҳтимоллар назарияси соҳасида олиб борган илмий изланишлари натижасида у 27 ёшида катта муваффвақият билан докторлик диссертациясини ҳимоя қилди.

Устоз олимнинг эҳтимоллар назариясига алгебраик нуқтаи назардан ёндашиш ьояси уни ҳозирги замон математикасининг янги йўналишларидан бири-ярим майдонлар назариясини яратишга олиб келди. Бу назариянинг умумий топология, функционал анализ масалаларига татбиқлари катта. Унинг ёрдамида эҳтимоллар назариясининг баён қилиниши мухим илмий-методологик ахамиятга моликдир. Тошмуҳаммад Алиевичнинг ярим майдонлар назарияси бўйича қилган илмий татқиқоқтлари унинг “Булнинг топологик алгебраси” (М.Антоновский ва В. Болтянский билан биргаликда ёзилган) ҳамда “Топологик ярим майдонлар ва эхтимоллар назарияси” китобларида ўз ифодасини топган.

Ўзстоз олим ўз атрофига қобилиятли ёшларни жалб қилиб, мамалкатимизда машҳур бўлган илмий мактаб-функционал анализ ва топологиянинг Тошкент мактабини яратди. Ярим майдонлар назариясининг ривожланиши ва унинг бошқа сохаларга татбиқи, айниқса, бу назариянинг квант эҳтимоллар назариясини асослашдаги таосири салмоқлидир. Т.А.Саримсақов квант эҳтимоллар назарияси соҳасида дунёда биринчи бўлиб илмий асар ёзишга қўл урди ва “Квант эҳтимоллар назариясига кириш” китобини ёзди.

Истеодотли педагог ва ташкилотчи сифатида Т.А.Саримсақов илмий кадрларни тайёрлашга катта эотибор берди. Ўзи бевосита рахбарлигида 60 дан ортик фан донорлари ва номзодларини тайёрлади. Физика-математика фанлари доктори, профессорлар С.Х.Сирожиддинов, С.В.Нагаев, М.Я.Антоновский, Ж.Хожиев, Ш.А.Аюпов, Я.Х.Қўчкоров, Р.Н.Ьанихўжаев, Н.Н.Ьанихўжаев, В.И.Чилин каби таниқли олимлар устозни шогиртлари ҳисобланди.

Т.Саримсақов катта илмий ва педагогик фаолиятини жамоат ва давлат фаолияти билан қўшиб олиб борган. Ўзбекистон ФА ташкил қилинган йили устоз академиянинг ҳақиқий аозоси ва вице-президенти, кейинчалик президент қилиб сайланди. Кўп йиллар давомида хозирги Миллий университетнинг ректори, 1960-71 йилларда Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таолим Вазири бўлиб ишлади. 1971 йиллардан бошлаб бир неча йил Осиё ва Африка бирдамлиги Ўзбекистон Комитасининг раиси бўлган .

Т.А.Саримсақов 1995 йил 80 ёшида вафот этган.

САОДИ ҲАСАНОВИЧ СИРОЖИДДИНОВ
(1920-1988 йиллар)

Атоқли ўзбек математик олими, жамоат ва давлат арбоби, физика-математика фанлари доктори, профессор, Ўзбекистон ФА академиги, ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан арбоби, Беруний номидаги республика мукофоти лауреати, Бернули номидаги Халқаро эҳтимоллар назарияси ва математик статистика жамиятининг ҳақиқий аозоси Саоди Ҳасанович Сирожиддинов 1920 йил 10 майда Қўқонда туьилган. У 1942 йилда САГУ (ҳозирги Миллий университет)ни битириб, Армия сафида ҳизмат қилди.

Урушдан кейинги йилларда у Ўзбекистон ФА математика институтида аспирант ва Москвада В.А.Стеклов номидаги математика институтининг докторантурасида таолим олди. 1953 йили докторлик диссертациясини ёқлагандан кейин М.В.Ломоносов номидаги Москва ДУ да профессор, Ўзбекистон ФА математика институти директори бўлиб ишлади, Ўн йилдан кўпроқ давр мабойнида Ўзбекистон ФА Президимуми аозоси, шу академиянинг вице-президенти, 1966-70 йилларда ва 1983-1987 йилларда Тошкент ДУ (ҳозирги Миллий университети) ректори бўлиб ишлаган.

С.Ҳ.Сирожиддинов 170 дан ортиқ илмий асарлар ва бир қанча монографияларнинг муаллифидир. Унинг илмий ишлари асосан эҳтимоллар назарияси ва математик статистикага, математик тахлил ва ўрта Осиёда математика тарихига баьишланган, математик статистикага боьишланган ишлари,асосан,ишлаб чиқариш махсулот-ларини контрол қилиш методларига боьишланган.

Истеододли педагог ва ташкилотчи сифатида С.Ҳ. Сирожиддинов илмий кадрларни тайёрлашга катта эотибор берган. Унинг илмий рахбарлигида 60 дан зиёд фан докторлари ва номзодлари тайёрланган. Таниқли физика-математика фанлари докторлари, профессорлар С.В.Нагаев, Г.П.Матвиевская, Т.А.Азларов, А.В.Нагаев, Г.Л.Малевич, Ш.Қ.Фармонов, М.Ў.Ьофуров, Б.Абдалимов, А.Ахмедов, М.Маматов ва бошқалар устознинг шогирдлари ҳисобланади.

С.Ҳ.Сирожиддинов 1988 йили 29 апрелда 68 ёшида вафот этган.