**Kombinatorika elementlari**

Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to’plamdan uning qandaydir xossaga ega bo’lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma’lum bir tartibda joylashtirishga to’g’ri keladi.

Ta’rif. Biror chekli to’plam elementlari ichida ma’lum bir xossaga ega bo’lgan elementlaridan iborat qism to’plamlarni tanlab olish yoki to’plam elementlarini ma’lum bir tartibda joylashtirish bilan bog’liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi.

Masalan, o’nta ishchidan to’rt kishidan iborat brigadalarni necha xil usulda tuzish mumkinligini (ishlab chiqarishni tashkil etish), molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (kimyo), oqsil moddalarda aminokislotalarni qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmda bu bloklarni turli tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarni almashtirib ekish (agronomiya), davlat budjetini ishlab chiqarish tarmoqlari bo’yicha taqsimoti (iqtisodiyot) kabilar kombinatorik masalalarga keladi va kombinatorikani inson faoliyatining turli yo’nalishlarida qo’llanishini ko’rsatadi.

Ta’rif. Kombinatorik masalalar bilan shug’ullanadigan matematik fan kombinatorika deyiladi.

 Kombinatorikani mustaqil fan sifatida birinchi bo’lib olmon matematigi G.Leybnits o’rgangan va 1666 yilda “Kombinatorika san’ati haqida” asarini chop etgan.

Kombinatorikada qo’shish va ko’paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud.

Qo’shish qoidasi. Agar biror $α$ tanlovni $m(α)$ usulda, $β$ tanlovni $m(β)$ usulda amalga oshirish mumkin bo’lsa va bu yerda $α$ tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli $β$ tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda “$α$ yoki $β$” tanlovni amalga oshirish usullari soni $m\left(α yoki β\right)=$ $=m\left(α\right)+m(β)$ formuladan topiladi.

Ko’paytirish qoidasi. Agar biror $α$ tanlovni $m(α)$ usulda, $β$ tanlovni $m(β)$ usulda amalga oshirish mumkin bo’lsa, u holda “$α$ va $β$” tanlovni (yoki ($α$,$ β$) juftlikni) amalga oshirish usullari soni $m\left(α va β\right)=$ $=m\left(α\right)∙m(β)$ formuladan topiladi.

Kombinatorik masalalarni yechishda ko’p qo’llaniladigan tushunchalardan biri o’rin almashtirish tushunchasidir.

Ta’rif. Chekli va $n$ ta elementdan iborat to’plamning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o’zgartirib qism to’plam hosil qilish $n$ elementli o’rin almashtirish deb ataladi.

Berilgan $n$ ta elementdan tashkil topadigan o’rin almashtirishlar soni $P\_{n}$ bilan belgilanadi.

Teorema. $n$ ta elementdan iborat o’rin almashtirishlar soni $P\_{n}=n!$ formula bilan hisoblanadi.

Bu yerda $n!$ – en faktorial deb o’qiladi va $n!=1∙2∙3∙…∙n$ kabi aniqlanadi. Bunda $0!=1$ deb olinadi. Masalan, $3!=1∙2∙3=6,$ $4!=1∙2∙3∙4=24,$ $5!=1∙2∙3∙4∙5=120$ va hokazo. Faktoriallarni hisoblashda $\left(n+1\right)!=n!∙(n+1)$ tenglikdan foydalanish qulay bo’ladi. Masalan, $n=3$ elementli $\left\{a,b,c\right\}$ to’plamdan hosil bo’ladigan o’rin almashtirishlar $\left\{a,b,c\right\}, \left\{b,a,c\right\},$ $\left\{c,b,a\right\}, \left\{a,c,b\right\},$$\left\{c,b,a\right\}, \left\{a,c,b\right\}, \left\{b,c,a\right\}, \left\{c,a,b\right\}$ $\left\{b,c,a\right\}, \left\{c,a,b\right\}$ bo’lib, ularning soni $P\_{3}=3!=1∙2∙3=6.$ bo’ladi.

Kombinatorik tushunchalardan yana biri kombinatsiya tushunchasidir.

Ta’rif. Chekli va $n$ ta elementli to’plamning $k (k<n)$ ta elementli va kamida bitta element bilan farqlanadigan qism to’plam hosil qilish $n$ elementdan $k$ ta olingan kombinatsiya deyiladi.

Masalan, $ \left\{a,b,c\right\}$ ko’rinishdagi $n=3$ elementli to’plamdan ikkita elemenli kombinatsiyalar $\left\{a;b\right\}, \left\{a;c\right\},\left\{b;c\right\}$ bo’lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\left\{b;a\right\}=\left\{a;b\right\},$ $\left\{a;c\right\}=\left\{c;a\right\},$ $\left\{b;c\right\}=\left\{c;b\right\}$ deb olinadi.

$n$ ta elementdan $k$ tadan olingan kombinatsiyalar soni $C\_{n}^{k}$ kabi belgilanadi va uning qiymati $C\_{n}^{k}=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ formula yordamida hisoblanadi.

Bu formula orqali kiritilgan $C\_{n}^{k}$ sonlar yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a+b)^{n}=a^{n}+C\_{n}^{1}a^{n-1}b+C\_{n}^{2}a^{n-2}b^{2}+…+C\_{n}^{n-1}ab^{n-1}+b^{n}==\sum\_{k=0}^{n}C\_{n}^{k}a^{n-k}b^{k}.$$

Bu tenglikda $n$ ixtiyoriy natural son bo’lib, u $(a+b)^{2}$ va $(a+b)^{3}$ qisqa ko’paytirish formulalarining umumlashmasini ifodalaydi va uni Nyuton binomi deb ataladi. Unga kiruvchi $C\_{n}^{k}$ sonlari binomial koeffitsentlar deb ataladi.

Agar Nyuton binomida $a=b=1$ yoki $a=1, b=-1$ deb olsak, unda $\sum\_{k=0}^{n}C\_{n}^{k}=2^{n}, \sum\_{k=0}^{n}(-1)^{k}C\_{n}^{k}=0$

tengliklar o’rinli bo’ladi.

 Agar formulada $k$ o’rniga $n-k$ qo’yilsa yoki $k=0$ yoki $k=n$ deb olinsa, unda $C\_{n}^{k}=C\_{n}^{n-k},$ $C\_{n}^{0}=C\_{n}^{n}=1$ tengliklar hosil bo’ladi. Bular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

Kombinatorik masalalarni yechishda o’rinlashtirish deb ataluvchi tushunchadan ham foydalaniladi.

Ta’rif. Chekli va $n$ ta elementdan iborat to’plamdan bir-biridan yoki elementlari yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va $k$ ta elementdan iborat qism to’plamlarni hosil qilish $n$ elementdan $k$ tadan o’rinlashtirish deb ataladi.

Berilgan $n$ ta elementdan $k$ tadan o’rinlashtirishlar soni $A\_{n}^{k}$ kabi belgilanadi va uning qiymati

$A\_{n}^{k}=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots \left[n-(k-1)\right]$yoki $A\_{n}^{k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$ formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\left\{a,b,c\right\}$ to’plamdan $n=3$ elementdan $k=2$ tadan o’rinlashtirishlar $\left\{a;b\right\}, \left\{b;a\right\}, \left\{a;c\right\}, \left\{c;a\right\}, \left\{b;c\right\}, \left\{c;b\right\}$ bo’lib, ularning soni $A\_{3}^{2}=3∙2∙1=6$ yoki $A\_{3}^{2}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}=\frac{3!}{\left(3-2\right)!}=\frac{6}{1}=6.$

**Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar**

1. Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechish: $α$ - erkak xodimni tanlash, $β$ - ayol xodimni tanlash bo’lsin. U holda, shartga ko’ra, $m\left(α\right)=10,$ $m\left(β\right)=8$ bo’lgani uchun bitta xodimni $m\left(α yoki β\right)=m\left(α\right)+m\left(β\right)=10+8=18$ usulda tanlash mumkin.

1. 10 ta talabadan iborat guruhga ikkita yo’llanma ajratildi. Bu yo’llanmalarni necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

Yechish: $α$ birinchi yo’llanmani, $β$ esa ikkinchi yo’llanmani tarqatishni ifodalasin. U holda $m\left(α\right)=10$ va $m\left(β\right)=9,$ chunki bitta talabaga birinchi yo’llanma berilganda, ikkinchi yo’llanmaga to’qqizta talaba davogar bo’ladi. Demak, ikkinchi yo’llanmani tarqatishlar soni $m\left(α va β\right)=m\left(α\right)∙m\left(β\right)=$ $=10∙9=90$ ga teng bo’ladi.

1. Qurilishda 10 ta suvoqchi va 8 ta bo’yoqchi ishlaydi. Ulardan bir suvoqchi va bir bo’yoqchidan iborat juftlikni necha usulda tanlash mumkin?

Yechish: $m\left(α\right)=10$ va $m\left(β\right)=8$ bo’lgani uchun $m\left(α va β\right)=$ $=m\left(α\right)∙m\left(β\right)=10∙8=80.$

1. Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o’rinlashtirishlardan iborat.

Ya’ni, $P\_{5}=5!=1∙2∙3∙4∙5=120$ bo’ladi.

1. Ishlab chiqarish korxonasini tekshirish uchun besh kishidan iborat guruh ajratildi. Shu besh kishidan tarkibida uch kishi bo’lgan guruhni necha xil usulda tuzish mumkin.

Yechish: $C\_{n}^{k}=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$ formuladan foydalanamiz. Bizda $n=5,$ $k=3$ bo’lgani uchun $C\_{5}^{3}=\frac{5!}{3!\left(5-3\right)!}=\frac{1∙2∙3∙4∙5}{1∙2∙3∙2!}=\frac{4∙5}{1∙2}=\frac{20}{2}=10.$

1. Tikuvchilik fabrikasida ishlayotgan xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini $n=7$ elementli $\left\{1,2,3,4,5,6,7\right\}$ to’plam sifatida qarasak, dam olish kunlari $\left\{1,2\right\},$ $\left\{1,3\right\},$ $\left\{1,4\right\},…$ kabi juftliklardan iborat bo’ladi. Bunda $\left\{i,j\right\}$ va $\left\{j,i\right\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash $n=7$ elementdan $k=2$ tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va ularning soni $C\_{7}^{2}=\frac{7!}{2!\left(7-2\right)!}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{6∙7}{1∙2}=\frac{42}{2}=21$ bo’ladi.

1. Talaba 4 ta fan bo’yicha qo’shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo’ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlari uchun haftaning tanlagan kunlarini $k=4$ ta elementli $X=\left\{x\_{1},x\_{2},x\_{3},x\_{4}\right\}$ to’plam, hafta kunlarini esa $n=7$ elementlidan iborat $H=\left\{1,2,3,4,5,6,7\right\}$ to’plam sifatida qaraymiz. Bu holda $X⊂H$ bo’lib, uni hosil etish $n=7$ elementlidan $k=4$ tadan o’rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bu holda elementlarning joylashishi tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, $\left\{2,4,6,7\right\}$ taqsimotda birinchi fanga dushanba (2), ikkinchi fanga chorshanba (4), uchinchi fanga juma (6) va to’rtinchi fanga shanba (7) kunlari ajratilgan bo’ladi. Unda $\left\{4,2,6,7\right\},$ $\left\{6,4,2,7\right\}$ kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$A\_{7}^{4}=\frac{7!}{\left(7-4\right)!}=\frac{7!}{3!}=4∙5∙6∙7=840$ usulda tanlashi mumkin.

1. Xorijiy tillar fakulteti ingliz tili yo’nalishining birinchi kursida 10 ta fan o’qitiladi va har kuni 4 xil dars o’tiladi. Kunlik dars necha usul bilan taqsimlab qo’yilishi mumkin?

Yechish: Darslarning barcha mumkin bo’lgan kunlik taqsimoti o’n elementdan to’rttadan olib tuzish mumkin bo’lgan barcha o’rinlashtirishlardan iborat. Uni $A\_{n}^{k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$ formuladan foydalanib topamiz. Bizda $n=10,$ $k=4$ bo’lgani uchun

$A\_{10}^{4}=\frac{10!}{\left(10-4\right)!}=\frac{10!}{6!}=\frac{1∙2∙3∙4∙5∙6∙7∙8∙9∙10}{1∙2∙3∙4∙5∙6}=7∙8∙9∙10=5040.$

1. Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqamlar bilan ifoda qilinadigan bo’lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Yechish: Izlangan son 9 ta qiymatli raqamdan 3 tadan olib tuzilgan o’rinlashtirishlardan iborat. Ya’ni,

 $A\_{9}^{3}=\frac{9!}{\left(9-3\right)!}=\frac{9!}{6!}=7∙8∙9=504.$

Buni $A\_{n}^{k}=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots \left[n-(k-1)\right]$ formuladan ham topish mumkin. Unga asosan $A\_{9}^{3}=9∙8∙7=504.$

**Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:**

1. Quyidagi ifodalarning qiymati topilsin:
2. $\frac{14!}{12!};$ 2) $\frac{16!}{18!};$ 3) $\frac{9!}{5!∙4!};$ 4) 8!+9!.
3. Quyidagilarni isbotlang:
4. $\frac{\left(m+3\right)!}{m!}=\left(m+1\right)\left(m+2\right)\left(m+3\right);$
5. $\frac{n!}{\left(n-m\right)!}=n\left(n-1\right)\cdots \left(n-m+2\right)\left(n-m+1\right),$ bunda $n>m.$
6. Amallarni bajaring:
7. $\frac{1}{n!}-\frac{1}{\left(n+1\right)!};$ 2) $\frac{1}{\left(k-1\right)!}-\frac{1}{k!}.$
8. To’qqizta har xil qiymatli raqam bilan nechta to’qqiz xonali son yozish mumkin?

Javob: 362880.

1. 12 kishilik ovqat hozirlangan stolga 12 kishini necha turli o’tqazish mumkin?

Javob: 479001600.

1. Musobaqada 6 ta talaba qatnashmoqda. O’rinlarni ular o’rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?
2. Talaba 6 ta kitobdan 4 tasini necha usul bilan ajratishi mumkin?
3. Ma’lum bo’limda ishlash uchun 20 nafar ishchidan 6 nafar ishchini ajratish kerak. Buni necha usul bilan amalga oshirish mumkin?
4. Tenglik to’g’riligini isbotlang:
5. $C\_{7}^{4}+C\_{7}^{3}=C\_{8}^{4};$ 2) $C\_{10}^{5}+C\_{10}^{6}=C\_{11}^{6}.$
6. Ifodani soddalashtiring:

$\frac{3}{2(2n-1)}C\_{n}^{2n-3}.$

1. Musobaqada 12 ta jamoa ishtirok etadi. Uchta turli medalni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Javob: $A\_{12}^{3}=1320.$

1. Gruppada 30 ta o’quvchi bor. Ularning ichidan 3 kishini kompyuterda ishlash uchun ajratish kerak. Buni necha usul bilan bajarish mumkin?

Javob: $C\_{30}^{3}=4060.$

1. Turli rangdagi 5 to’p mato bor. Bu matolardan har bir mato faqat bitta polosani egallaydigan qilib nechta turli besh rangli bayroqlar tayyorlash mumkin?

Javob: $P\_{5}=5!=120.$

1. Tenglamani yeching:
2. $\frac{P\_{n+2}}{P\_{n}}=72;$ 2) $A\_{x}^{4}=A\_{x-2}^{2}.$

Javob: 1) 7; 2) $∅.$