O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT MOLIYA INSTITUTI

“OLIY VA AMALIY MATEMATIKA” KAFEDRASI

“IQTISODIY MATEMATIKA”
fanidan o‘quv-uslubiy majmua
(V semestr)

Toshkent – 2017

Fanning O'quv uslubiy majmuasi O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2016 yil 22 yanvardagi 26 sonli buyrug'ining 2 ilovasi bilan tasdiqlangan fan dasturiga muvofiq ishlab chiqildi..

Tuzuvchi:

Xashimov A. – "Oliy va amaliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.

Ochilova N. - "Oliy va amaliy matematika" kafedrasi dotsent v.b., f.-m.f.n.

Taqrizchilar:

Zikirov O. – O`zMU, "Differensial tenglamalar" kafedrasi mudiri, f.-m.f.d. (*turdosh OTMdan.*)

Mamurov I. – TMI, "Oliy va amaliy matematika" kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.

Fanning O'quv uslubiy majmuasi kafedraning 2017 yil "27" 06 dagi 22- sonli yig'ilishi muhokamasidan o'tkazilgan va fakultet Kengashida ko'rib chiqish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri **A.Xashimov**

Fanning ishchi o'quv dasturi Hisob va audit fakultetining Kengashi muhokamasidan o'tkazilgan va institut o'quv-uslubiy Kengashida ko'rib chiqish uchun tavsiya etilgan. (2017 yil " 5 " 07 dagi 12 sonli qaror)

Fakultet dekani **K.Karimova**

Kelishildi:

O'quv-uslubiy bo'lim boshlig'i **U.Yakubov**

O'quv ishlari bo'yicha prorektor **I.Qo'ziyev**

Fanning O'quv uslubiy majmuasi institut o'quv-uslubiy Kengashining 2017 yil "21" avgustdagi 1-sonli yig'ilishida ko'rib chiqilgan va tasdiqlash uchun tavsiya qilingan.

Fanning O'quv uslubiy majmuasi institut Kengashining 2017 yil "___" avgustdagi 1/__ sonli majlisi bayoni bilan ma'qullangan.

MA'RUZA MATNLARI

19-MAVZU. TRANSPORT MASALASI

Tayanch so'z va iboralar: Yopiq modelli transport masalasi, band katakchalar, ochiq modelli transport masalasi, "shimoliy-g'arb burchak" usuli, "minimal harajat" usuli.

REJA:

1. Transport masalasining qo'yilishi va uning matematik modeli.
2. Transport masalasi yechimining xossalariga doir teoremalar.
3. Transport masalasining boshlang'ich joiz rejasini topish usullari.

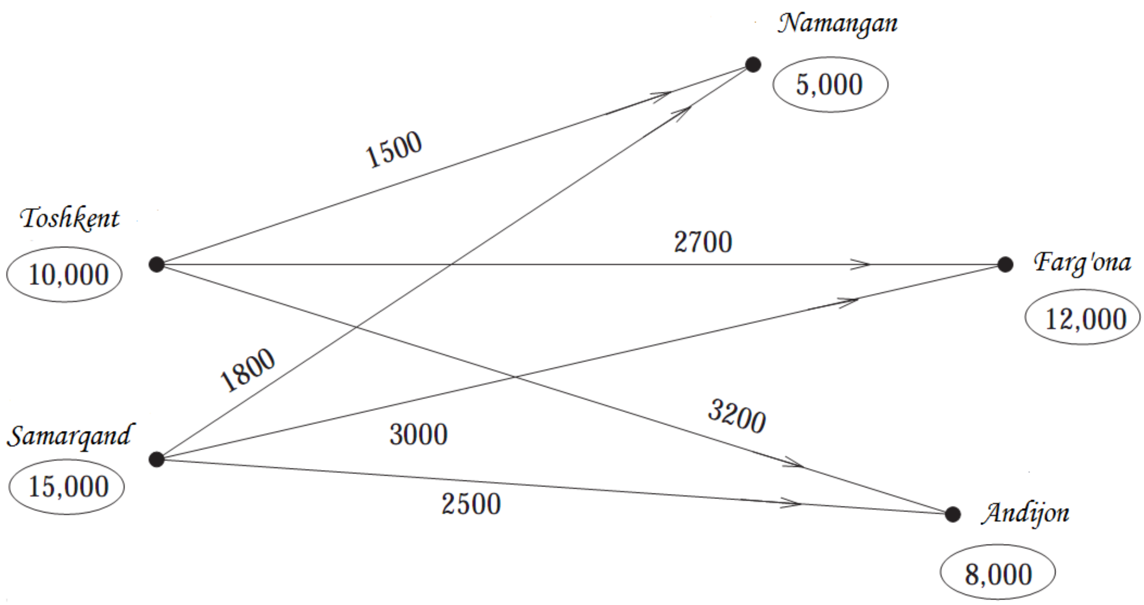
Transport masalasi – chiziqli programmalashtirishning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masalaning qo'llanish sohasi juda kengdir.

Zahirasida b_i birlik mahsuloti bo'lgan i-ta'minotchidan mavjud bo'lgan istemolchilarga zahirasidagi mahsulotni to'la realizatsiya qilish shatri

$$\sum_j x_{i,j} = b_i$$

bu yerda $x_{i,j}$ – i-ta'minotchidan j-is'temolchiga tashilgan mahsulot hajmi.

1-misol. Faraz qilaylik, Toshkent va Samarqandga keltirilgan Xitoyda ishlab chiqariluvchi o'yinchoqlar Namangan, Farg'ona va Andijonga transport orqali tarqatilmoqda. Bunda Toshkentga 10000 ta va Samarqandga 15000 ta o'yinchoq keltirilgan bo'lib, Namanganga 5000 ta, Farg'onaga 12000 ta va Andijonga esa 8000 ta jo'natish rejalashtirilgan. Bitta o'yinchoqni yetkazib berishdagi transport harajatlari ta'minotchi va is'temolchilar orasidagi masofalarga to'g'ri proporsional bo'lib, masalaning tarmoq grafik ko'rinishi quyida keltirilgan.[1]



[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 275-276.

Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli. m ta A_i ta'minotchilarda a_i miqdordagi bir xil mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j miqdordan yetkazib berish talab qilinsin. Har bir i-ta'minotchidan har bir j-iste'molchiga bir birlik mahsulotni tashishga sarf qilinadigan yo'l harajati c_{ij} pul birligini tashkil qilsin.

Mahsulot tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha mahsulotlar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i-ta'minotchidan j-iste'molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan mahsulot miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz. U holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahiralar miqdori**
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\dots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\dots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
Talablar miqdori	b_1	b_2	$\dots$	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Bunda harajatlarning umumiy qiymati

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1}$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \ge 0, \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}) \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{3}$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Jadvaldan va masalaning modelidan $0\le x_{ij}\le \min\left(a_i,\, b_j\right)$ tengsizlikning bajariliahi ko'rinib turibdi.

Transport masalalarii ikki turga ajratib o'rganiladi:

1. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bunday masala **yopiq modelli transport masalasi** deyiladi.

2. Agar mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\ne\sum_{j=1}^{n}b_j \tag{5}$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda bunday masalalar **ochiq modelli transport masalasi** deyiladi.

(1)-(3) masala uchun quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. Talablar hajmi takliflar hajmiga teng bo'lgan istalgan transport masalasining optimal yechimi mavjud bo'ladi.[2]

Transport masalasi matematik modeli tenglamalar sistemasidagi bazis vektorlar sistemasining o'lchovini aniqlaymiz. Buning uchun sistema asosiy matrisasining rangini aniqlash kerak.

Agar x_{ij} o'zgaruvchilarni

$$x_{11},\, x_{12},\, \ldots,\, x_{1n},\, x_{21},\, x_{22},\, \ldots,\, x_{2n},\, \ldots,\, x_{m1},\, x_{m2},\, \ldots,\, x_{mn}$$

ko'rinishda joylashtirsak, u holda transport masalasining cheklamalar matrisasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$A=\left(\begin{array}{l} m\begin{cases} \overbrace{1\;1\;\ldots\;1}^{n}\;\overbrace{0\;0\ldots0}^{n}\;\ldots\;\overbrace{0\;0\ldots0}^{n} \\ 0\;0\ldots0\;\;1\;1\;\ldots\;1\;\ldots\;0\;0\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots0\;0\;\;0\ldots\;0\;\ldots1\;1\;\ldots\;1 \end{cases} \\ n\begin{cases} 1\;\;0\ldots0\;\;1\;\;0\;\ldots0\;\ldots1\;0\;\ldots0 \\ 0\;\;1\ldots0\;\;0\;\;1\;\ldots\;0\;\;\ldots0\;1\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\;0\ldots1\;0\;\;0\ldots\;\;1\;\;\ldots0\;\;0\;\ldots1 \end{cases} \end{array}\right)$$

---

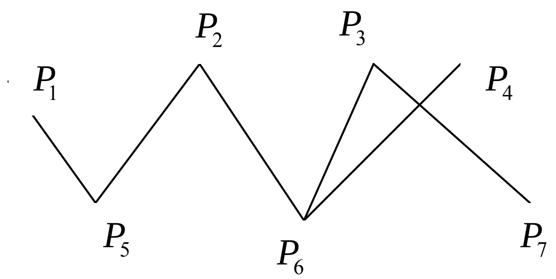
[2]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 145-146.

Bu matrisaning rangi: $rang(A) = m+n-1$ ekanligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatdan ham, matrisada $m+n$ ta satr bo'lib ular chiziqli bog'liq. Chunki birinchi m ta satrni qo'shib undan oxirgi n ta satr yig'indisini ayirsak nol vektorni hosil qilamiz. Bu matrisaning ixtiyoriy $m+n-1$ satrini olsak chiziqli erkli vektorlar sistemasi hosil bo'ladi.

Demak, masalaning optimal yechimida musbat x_{ij} lar soni ko'pi bilan $m+n-1$ ta bo'ladi.

Transport masalasi rejalari ko'p takrorlanish xususiyatiga ega.

1-ta'rif. P_i nuqtalarning (punktlarning) chekli $P = \{P_1, P_2, ..., P_l\}$ to'plami va har bir elementi yoy deb ataluvchi tartiblanmagan (P_i, P_j) juftliklarning Ω to'plami berilgan bo'lsin. (P_i, P_j) yoy P_i va P_j nuqtalarni tutashtiradi, bu nuqtalar esa (P_i, P_j) yoyning oxiri deb ataladi. (P, Ω) juftlik esa **transport tarmog'i** deb ataladi. Masalan,



rasmda elementlari 7 ta nuqtadan iborat $P = \{P_1, P_2, ..., P_7\}$ to'plam va oltita:

$$(P_1, P_5), (P_2, P_5), (P_2, P_6), (P_3, P_6), (P_3, P_7), (P_4, P_6)$$

yoylarni o'zichiga oluvchi Ω to'plam tasvirlangan.

2-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ $(P_{i_l} \in P,\ l = 0, 1, ..., k)$ ixtiyoriy chekli ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Agar har qanday $(P_{i_r}, P_{i_{r+1}})$, $r = 0, 1, ..., k-1$, juftlik yoy bo'lib $((P_{i_r}, P_{i_{r+1}}) \in \Omega)$, bu juftlik $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlikda ko'pi bilan bir marta uchrasa, u holda $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}$ ketma-ketlik **marshrut** (yo'nalish) deb ataladi.

Yuqoridagi rasmda ikkita marshrut bor: $P_1P_5P_2P_6P_4$, $P_1P_5P_2P_6P_3P_7$.

3-ta'rif. $P_{i_0}P_{i_1}...P_{i_k}P_{i_0}$ ko'rinishdagi **marshrut sikli** deb ataladi.

Demak, marshrutda boshlang'ich holatga qaytilsa u **sikl** deb ataladi

Rasmdagi marshrutda sikl yo'q, ammo unga (P_4, P_7) yoy qo'shilsa, u holda bu marshrutda $P_3P_7P_4P_6P_3$ ko'rinishdagi sikl hosil bo'ladi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani topishdan boshlanadi.

Yopiq transport masalasining boshlang'ich tayanch rejasini topishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan ikkitasi bilan tanishib chiqamiz.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari. Masalaning aynimagan joiz rejasi $m+n-1$ ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, transport masalasining aynimagan joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, matrisaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi.

Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} lar joylashgan kataklar "**band kataklar**", qolganlari "**bo'sh kataklar**" deyiladi.

Yechim aynimagan bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, u yerda sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin.

b_j / a_i	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

Ma'lumki, har bir bo'sh katakka x_{ij} noma'lumlardan biri to'g'ri keladi. Bu usulda bo'sh kataklrni x_{ij}^0 qiymatlar bilan to'ldiriladi deb faraz qilamiz.

Jadvalning shimoliy-g'arbiy burchagiga x_{11} o'zgaruvchi to'g'ri keladi. $x_{11}^0=\min\{a_1, b_1\}$ bo'lsin. Agar $x_{11}^0=a_1$ $(a_1 \le b_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchining barcha mahsuloti birinchi iste'molchiga jo'natilgan bo'ladi. Demak, $x_{1j}^0=0,\ j=\overline{1,n}$ bo'ladi.

II qadamda $x_{21}^0=\min\{b_1-a_1, a_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz. Bunda, agar $x_{21}^0=b_1-a_1$ $(b_1-a_1 \le a_2)$ bo'lsa, u holda $x_{s1}^0=0,\ s=\overline{3,m}$ bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib band kataklardagi x_{ij} larning qiymatlarini aniqlab olamiz.

Agar $x_{11}^0 = b_1$ $(b_1 \le a_1)$ bo'lsa, u holda birinchi ta'minotchida $a_1 - b_1$ miqdorda mahsulot qolgadi. Demak, $x_{i1}^0 = 0,\ i = \overline{2,m}$ bo'ladi. II qadamda $x_{12}^0 = \min\{a_1 - b_1, b_2\}$ shart asosida x_{21} ning qiymatini aniqlaymiz va hakozo.[3]

2-misol. Shimoliy-g'arbiy burchak usulidan foydalanib, transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7	4	1	4	100
A_2	2 100	7 150	10	6	11	250
A_3	8	5 50	3 100	2 50	2	200
A_4	11	8	12	16 50	13 250	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Minimal xarajatlar usuli. Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun x_{ij}^0 qiymat avvalambor yo'l harajati eng kichik bo'lgan katakka, ya'ni $\min\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{c_{ij}\}$ shart o'rinli bo'ladigan katakka yoziladi. Masalan, $\min\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{c_{ij}\} = c_{pq}$ bo'lsin. U holda $x_{pq}^0 = \min\{a_p, b_q\}$ qiymat aniqlanadi. $x_{pq}^0 = \min\{a_p, b_q\}$ $(a_p \le b_q)$ bo'lsin. Demak, $x_{pj} = a_p,\ j = 1, 2, ..., q-1, q+1, ..., n$ bo'ladi. Bundan keyingi qadamlarda ham $\min\limits_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \{c_{ij}\} = c_{pq},\ i \ne p,\ j \ne q$ shart asosida x_{ij}^0 qiymatlar aniqlanib boriladi. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

3-misol. Minimal harajatlar usuli bilan boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**					**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250

[3]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 148-149.

A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Talab hajmi	200	200	100	100	250	

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

2. David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. 680 p.

20-MAVZU. POTENTSIALLAR USULI

Tayanch so'z va iboralar: Band katakchalar, bo'sh katakchalar, harajatlar matrisasi, yopiq kontur, potensiallar, potensial tenglama, ochiq modelli transport masalasi, "soxta" ta'minotchi, "soxta" iste'molchi.

REJA:

1. Potensiallar usuli.
2. Bazis yechimning optimallik sharti.
3. Ochiq modelli transport masalasi.
4. Aynigan TM ni ε-usul bilan yechish.

Potensiallar usuli – transport masalasini yechish uchun qo'llangan birinchi aniq usul bo'lib, u 1949 yilda rus olimlari **L.V.Kantorovich** va **M.K.Gavurin** tomonidan yaratilgan. Bu usulning asosiy g'oyasi transport masalasiga moslashtirilgan simpleks usuldan iborat bo'lib, birinchi marta chiziqli programmalashtirish masalalarini yechish usullariga bog'liq bo'lmagan holda tasvirlangan. Keyinroq, xuddi shunga o'xshash usul Amerikalik olim **Dansig** tomonidan yaratildi. Dansig usuli chiziqli programmalashtirishning asosiy g'oyalariga asoslangan bo'lib, Amerika adabiyotida bu usul **modifitsirlangan taqsimot usuli** deb yuritiladi.

Transport masalasining optimal yechimini topishda foydalaniladigan potensiallar usuli simpleks usulining soddalashtirilgan varianti hisoblanadi.

Bu usul bilan tanishishdan oldin **aynigan** va **aynimagan** transport masalasi tushunchalarini kiritishimiz kerak.

Ma'lumki, agar ChPM hech bo'lmaganda bitta aynigan tayanch yechimga ega bo'lsa, u holda bu masala **aynigan ChPMsi** deb ataladi.

1-ta'rif. Agar $X^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ tayanch rejadagi (yechimdagi) musbat komponentalar soni $rangA = m$ ga teng bo'lsa, u holda bu reja **aynimagan tayanch reja**, aks holda esa u **aynigan tayanch reja** deyiladi.

Quyidagi transport masalasi berilgan bo'lsin: $b_j -$talablar miqdori; $a_i -$takliflar miqdori.

a_i \ b_j	b_1	b_2	$\dots$	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\dots$	c_{mn}

1-teorema. Agar talablarning qismiy yig'ndisi takliflarning qismiy yig'indisiga teng, ya'ni $\sum_{i\in G} a_i = \sum_{j\in H} b_j$, $G \subset M = \{1, 2, ..., m\}$, $H \subset N = \{1, 2, ..., n\}$ bo'lsa, u holda bu transport masalasi **aynigan transport masalasi** deyiladi.

Aynimagan transport masalasini qaraymiz. Ma'lumki, bu masalaning matematik modeli kanonik ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij} \ge 0, \tag{2}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min. \tag{3}$$

Bu masalaga ikkilangan masala tuzamiz.

$$U_i + V_j \le c_{ij}, \tag{4}$$

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} U_i a_i + \sum_{j=1}^{n} V_j b_j \to \max. \tag{5}$$

Ikkilanish nazariyasiga asosan agar (U_i, V_j) ikkilangan baholar mavjud bo'lsa, u holda $\{x_{ij}\}$ tayanch reja optimal bo'ladi. Bu yerda U_i va V_j ikkilangan baholar mos ravishda "**ta'minotchi va iste'molchilarning potensiallari**" deyiladi. Bu nazariyaga asosan transport masalasi uchun quyidagi teoremani keltirish mumkin.

2-teorema. Agar transport masalasining $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechimi uchun

$$x_{ij}^* > 0 \Rightarrow U_i + V_j = c_{ij}, \tag{6}$$

$$x_{ij}^* = 0 \Rightarrow U_i + V_j \le c_{ij}. \tag{7}$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda $X^* = (x_{ij}^*)$ tayanch yechim optimal yechim bo'ladi. (6) va (7) shartlar transport masalasi uchun **optimallik shartlari** deb ataladi.

Shunday qilib, navbatdagi tayanch yechimni optimallikka tekshirish uchun, avval, (6) shart yordamida potensiallar sistemasi quriladi va so'ngra (7) shartning bajarilishi tekshiriladi.

Masalaning optimal yechimini topish uchun quyidagi belgilashlar kiritamiz: S_i – ta'minotchilar joylashgan nuqta; Q_j – iste'molchilar joylashgan nuqta. $P = S \cup Q$. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (S_i, Q_j) \in \Omega$. (P, Ω) juftlik transport tarmog'i.

Potensiallar usulida optimal yechimni topish algoritmi:

1. $\left\{x_{ij}^0\right\}$ boshlang'ich tayanch yechim topiladi. Masalan,

$$Q_{j_0}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}...Q_{j_{k-1}}S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_0} \tag{8}$$

marshrut topiladi;

2. (6) shart asosida U_i va V_j potensiallardan

$$V_{j_0}+U_{i_1}=c_{i_1 j_0},\ V_{j_1}+U_{i_1}=c_{i_1 j_1},\ ...,\ V_{j_k}+U_{i_k}=c_{i_k j_k},\ V_{j_k}+U_{i_0}=c_{i_0 j_k}, \tag{9}$$

tenglamalar sistemasini tuziladi. Bunda $n+m-1$ ta band katak uchun $n+m-1$ ta chziqli tenglama va $n+m$ ta noma'lum hosil bo'ladi. Noma'lumlar soni tenglamalar sonidan bittaga ortiq bo'lgani uchun bitta erkli noma'lumga ixtiyoriy qiymat, masalan nol, qiymat berilib qolganlari mos tenglamalardan topiladi;

3. Bo'sh kataklar uchun (7) shart tekshiriladi:

a) agar barcha bo'sh kataklar uchun (7) shart bajarilsa, u holda tayanch yechim optimal bo'ladi va masalani yechish jarayoni tugaydi;

b) agar ba'zi bo'sh kataklar uchun (7) shart bajarilmasa, u holda tayanch yechim optimal bo'lmaydi va tayanch yechimni almashtirish jarayoni amalga oshiriladi;

4. Tayanch yechimni almashtirish jarayonini amalga oshirish uchun $x_{ij}^0=0 \Rightarrow U_i+V_j \le c_{ij}$ shart o'rinli bo'lmagan bo'sh kataklardan biri

$$\max_{\Delta_{ij}>0}(\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}) \tag{10}$$

shart asosida tanlanadi va u band katakka aylantiriladi. Masalan,

$$\max_{\Delta_{ij}>0}\Delta_{ij}=\Delta_{i_0 j_0}$$

bo'lsin. Demak, (8) marshrutga (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni qo'shish kerak. U holda (S_{i_0}, Q_{j_0}) yoyni o'zida saqlovchi

$$S_{i_0}Q_{j_0}S_{i_1}Q_{j_1}S_{i_2}...Q_{j_{k-1}}S_{i_k}Q_{j_k}S_{i_0}$$

sikl hosil bo'ladi. Bu siklga

$$x_{i_0 j_0},\ x_{i_1 j_0},\ x_{i_1 j_1},\ ...,\ x_{i_k j_k},\ x_{i_0 j_k}.$$

ketma-ketlik mos keladi. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{aligned} &x_{i_0 j_0}^1 = x_{i_0 j_0}^0+\theta=\theta,\\ &x_{i_1 j_0}^1 = x_{i_1 j_0}^0-\theta,\\ &x_{i_1 j_1}^1 = x_{i_1 j_1}^0+\theta,\\ &....................,\\ &x_{i_k j_k}^1 = x_{i_k j_k}^0+\theta,\\ &x_{i_0 j_k}^1 = x_{i_0 j_k}^0-\theta. \end{aligned} \tag{11}$$

Boshqa barcha $(i,\ j)$ juftliklar uchun $x_{ij}^1 = x_{ij}^0$. (11) formula yordamida topilgan $\{x_{ij}^1\}$ yechim tayanch yechim bo'lishi uchun θ ni

$$\theta = \min_{0 \le r \le k} x_{i_{r+1} j_r}^0 \tag{12}$$

shart asosida tanlash yetarli.[1]

Bu jarayonni tayanch yechim uchun (6), (7) optimallik sharti bajarilguncha davom ettiramiz.

Bu jarayon chekli son marta qaytarilgandan so'ng optimal yechim hosil bo'ladi. Chunki transport masalasi uchun quyidagi teoremalar o'rinli.

3-teorema. Har qanday yopiq modelli transport masalasining optimal yechimi mavjud.

4-teorema. Agar barcha a_i, b_j sonlar butun bo'lsa, u holda transport masalasining ixtiyoriy tayanch yechimi butun sonlardan iborat bo'ladi.

1-misol. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1	4
250	2	7	10	6	11
200	8	5	3	2	2
300	11	8	12	16	73

Yechish: Boshlang'ich tayanch yehimni minimal xarajatlar usuli bilan topamiz.

0-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10	7	4	1 100	4 0
250	2 200	7 50	10	6	11
200	8	5	3	2	2 200
300	11	8 150	12 100	16	73 50

[1]David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. pp. 154-155.

Bu jadvalda band kataklar soni $n+m-2$ ta. Shuning uchun (a_1, b_5) katakka 0 yozib uni band katakka aylantiramiz. So'ngra band kataklardan foydalanib $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib, U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz.

1-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -16	7 -8	4 -1	1 100-θ	4 0+θ	0
250	2 200	7 50-θ	10 1	6 θ 3	11 1	8
200	8 -16	5 -8	3 -2	2 -3	2 200	-2
300	11 -8	8 150+θ	12 100	16 -6	73 50-θ	9
V_j	-6	-1	3	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{24} = 3$ bo'lganligi sababli (a_2, b_4) katakka θ sonni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 1-jadvalni hosil qilamiz.

Endi $\theta = \min\,(100, 50, 50) = 50$ asosida yangi bazis rejaga o'tib, $U_i + V_j = c_{ij}$ potensial tenglamalar sistemasini tuzib U_i va V_j qiymatlarini va bu asosida $\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij}$ ning qiymatini hisoblaymiz. U holda quyidagi 2-jadval hosil bo'ladi.

2-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -5	4 2	1 50	4 50	0

250	2 200	7 0	10 1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -5	3 1	2 -3	2 200	-2
300	11 -14	8 200	12 100	16 -9	73 -3	6
V_j	-3	2	6	1	4	$\theta = 50$

Bu yerda $\max\limits_{\Delta_{ij}>0} \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 2$. Shuning uchun (a_1, b_3) katakka θ parametrni kiritamiz va (11) formula asosida almashtirish bajaramiz. Natijada 3a-jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda

$$\theta = \min\{0,\ 50,\ 100\} = 0.$$

Bu asosda yangi bazis yechimni 3-jadvalga joylashtiramiz. 3-jadvalda keltirilgan bazis yechim optimal yechim bo'ladi, chunki barcha bo'sh katakchalarda $\Delta_{ij} \le 0$.

3a-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250
100	10 -13	7 -7	4 θ	1 50-θ	4 50
250	2 200	7 0-θ -2	10 -1	6 50+θ	11 -2
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200
300	11 -6	8 200+θ	12 100-θ	16 -7	73 -1

3-jadval

a_i \ b_j	200	200	100	100	250	U_i
100	10 -13	7 -7	4 0	1 50	4 50	0
250	2 200	7 -2	10 -1	6 50	11 -2	5
200	8 -13	5 -7	3 -9	2 -3	2 200	-2
300	11 -6	8 200	12 100	16 -7	73 -1	8
V_j	-3	0	4	1	4	

Shunday qilib, uchinchi qadamda quyidagi optimal yechimga ega bo'ldik:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 50 & 50 \\ 200 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 200 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Z_{\min} = 4150 .$$

Ochiq modelli transport masalasi. Agar talab va takliflarning umumiy miqdorlari teng bo'lmasa, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

shart bajarilsa, u holda bu masala "**ochiq modelli transport masalasi**" deyiladi.

Ochiq modelli masalaning optimal yechimini topish uchun yopiq modelga keltiriladi va potensiallar usuli qo'llaniladi.

Ochiq modelli masalani yopiq modelliga keltirish uchun qo'shimcha "soxta" ta'minotchi yoki "soxta" iste'molchi kiritiladi, ularning zahirasi yoki talab hajmi

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{yoki} \quad b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

bo'ladi. Soxta ta'minotchidan real iste'molchilarga yoki real ta'minotchilardan soxta iste'molchilarga amalda mahsulot tashilmagani uchun yo'l harajatlari nolga teng qilib olinadi. Natijada bu yerda yopiq modelli masala hosil bo'ladi.

2-misol. Quyidagi ochiq modelli transport masalasini yeching.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	

Yechish: $\sum_{i=1}^{m} A_i > \sum_{j=1}^{n} B_j$ bo'lgan hol uchun masalani yopiq modelli masalaga aylantiramiz: $B_6 = 100$. So'ngra potensiallar usulini qo'llaymiz.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar						Zahira
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	10	7	4	1	4	0	100
A_2	2	7	10	6	11	0	250
A_3	8	5	3	2	2	0	200
A_4	11	8	12	16	13	0	300
Talab hajmi	200	150	100	100	200	100	

Aynigan transport masalasi. $\varepsilon-$potensiallar usuli. Aynigan transprot masalasida tayanch rejasidagi musbat komponentalar soni $k < m+n-1$ bo'ladi va bu tayanch reja aynigan reja bo'ladi. Bunday rejani aynimagan rejaga aylantirish uchun unga $m+n-1-k$ ta nol element kiritish mumkin. Ammo bu nol elementlarga mos x_{ij} noma'lumlar band kataklarga mos x_{ij} noma'lumlar o'zaro chiziqli bog'liq vektorlar esa chiziqli erkli bo'lishi kerak. Bu holatni nazorat qilish qiyin. Shu sababli aynigan transport masalasidagi siklni yo'qotib uni aynimagan transport masalasiga aylantirish kerak. Bunga erishish uchun quyidagi $\varepsilon-$potensiallar usulini qo'llash mumkin.

$\varepsilon-$potensiallar usuli. Ma'lumki, bir nechta a_i larning yig'indisi (hammasi emas) bir nechta b_j larning yig'indisiga teng bo'lsa transport masalasini aynigan transport masalasi deb ataymiz.

Masalada ayniganlikni yo'qotish uchun a_i va b_j lardan tuzilgan xususiy yig'indilarning o'zaro teng bo'lmasligiga erishish kerak. Buning uchun a_i va b_j larning qiymatini biror kichik songa o'zgartirish kerak. Masalan, yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ sonni olib, a_i va b_j larni o'zgartiramiz, ya'ni ε masala tuzamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{a_i} = a_i + \varepsilon, \quad (i = \overline{1,m}),\\ \overline{b_j} = b_j, \quad (j = \overline{1,n}),\\ \overline{b_n} = b_n + m\varepsilon,\end{array}\right\} \tag{13}$$

ε yetarlicha kichik son bo'lganligi sababli hosil bo'lgan masalaning $X(\varepsilon)$ optimal rejasi $\varepsilon = 0$ da berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

3-misol. Berilgan aynigan transport masalasining optimal yechimini toping.

a_i \ b_j	3	4	5	3
4	4	5	6	3
3	3	2	7	6
8	5	9	1	3

Yechish: (13) munosabatlardan foydalanib, quyidagi ε masalani hosil qilamiz:

a_i \ b_j	3	4	5	3+3ε
4+ε	4	5	6	3
3+ε	3	2	7	6
8+ε	5	9	1	3

Ushbu masalani yechib, $X(\varepsilon)$ rejani topamiz. Bundan $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} X(\varepsilon) = X^0$.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.
2. David G.Luenberger, Yinyu Ye. Linear and Nonlinear Programming. 2008. 680 p.

21-MAVZU. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

Tayanch so'z va iboralar: Butun sonli programmalashtirish, to'la butun sonli programmalashtirish, qisman butun sonli programmalashtirish, Bul o'zgaruvchili programmalashtirish, kesuvchi tenglama.

REJA:

1. Butun sonli programmalashtirishga doir ba'zi iqtisodiy masalalar.
2. Butun sonli programmalashtirish masalasining qo'yilishi, turlari va geometrik talqini.
3. Butun sonli programmalashtirish masalasini yechish ushun Gomori usuli.

O'zgaruvshilariga butun bo'lishlik sharti qo'yilgan ChPMlari katta amaliy ahamiyatga egadir. Butun sonli programmalashtirish masalalariga sayyoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish masalasi, optimal bichish masalasi, transrort vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash masalasi, bo'linmaydigan mahsulot ishlab shiqaruvshi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalasi va boshqa masalalar misol bo'la oladi. Bu masalalarning ayrimlari bilan tanishamiz.

Sayyoh haqida masala. A_0 shaharda yashovchi sayyoh n ta $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ shaharlarning har birida faqat bir martadan bo'lib, eng qisqa yo'l bilan A_0 shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin.

Bu masalaning matematik modelini tuzish ushun A_i va A_j shaharlar orasidagi masofani c_{ij} bilan belgilaymiz. Bundan tashqari quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\ agar\ sayyoh\ A_i\ \ dan\ A_j\ ga\quad borsa,\ \ i\neq j,\\ 0,\ agar\ sayyoh\,A_i\ \ dan\ A_j\ ga\quad bormasa.\end{cases}$$

bu yerda $i,\ j=1,\,2,\,...,\,n.$

Bu holda masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,\,2,\,...,\ n, \tag{1}$$

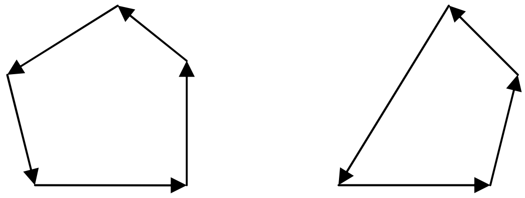
$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,\,2,\,...,\ n, \tag{2}$$

$$u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1,\ \ i,j=1,\,2,\,...,\,n, \tag{3}$$

$$x_{ij}=0\ \ yoki\ \ x_{ij}=1, \tag{4}$$

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min\,. \tag{5}$$

bu yerda (3) shart sayyoh yo'nalishining bog'liqligini ta'minlaydi. Aniqroq aytilsa bu shart A_0 dan o'tmaydigan har qanday tsikllarni yo'qqa chiqaradi. Masalan,



ko'rinishdagi yo'nalishlar bu masada bo'lishi mumkin emasligini (3) shart ta'minlaydi.

To'rt rang masalasi. 1976 yilda ajoyib teorema isbotlangan: kopi bilan to'rtta turli rangdan foidalanib ixtiyoriy geografik xaritani bo'yash mumkin.

Bu masala quyidagicha qo'yiladi: Har birning chegarasi yopiq uzluksiz egri chiziqdan iborat davlatlar tasvirlangan geofrafik xarita berilgan. Agar ikki davlatning umumiy chegarasi uzunligi musbat bo'lgan egri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda bu davlatlar qo'shni davlatlar deb ataladi. Bu geofrafik xaritani to'rt rangdan foydalanib shunday bo'yash kerakki qo'shni davlatlar turli xil rangda bo'lsin.

Bu masalaning matematik modeli quyidagicha bo'ladi:

$$
\begin{gathered}
\begin{cases} x_i - x_j + 4u_{ij} \ge 1, \\ x_i - x_j - 4u_{ij} \ge -3, \end{cases} \\
x_j = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\
u_{ij} = 0,\ 1; \qquad (i, j) \in \Gamma.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

bu yerda $\Gamma = \left\{ (i, j) \middle|\, i, j - \text{qo'shni davlatlar};\ i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n \right\}$.

Bo'linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasi. Deylik, korxona n xil bo'linmaydigan mahsulotlar ishlab chiqarsin va buning ushun m xil resurslardan foydalansin. Korxonadagi resurslar zahirasi chegaralangan va ular $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_m$ birliklarni tashkil qilsin. Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan turli resurslar miqdori, hamda har bir mahsulotdan korxonaning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

I/ch faktorlari **Mahsulot turlari**	1	2	3	…	n	**Daromad**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	c_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	c_2
…	…	…	…	…	…	…
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	…	a_{mn}	c_m
I/ch faktorining zahirasi	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

Korxona daromadini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish rejasini aniqlang.

Ushbu masalaning matematik modeliga noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini kiritish kerak:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \qquad (i=\overline{1,m}) \tag{7}$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j=\overline{1,n}) \tag{8}$$

$$x_j \in Z, \tag{9}$$

$$Y=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min. \tag{10}$$

Agar butun sonli programmalashtirish masalalaridagi (BSPM) noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlilik sharti qo'yilsa, bunday masalalar **to'la butun sonli programmalashtirish masalalari** deb ataladi.

Noma'lumlarning ma'lum bir qismi uchun butun bo'lishlilik sharti qo'yilgan masalalar **qisman butun sonli programmalashtirish masalalari** deb ataladi.

Agar BSPMsidagi noma'lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda bu masala **Bul programmalashtirish masalasi** deb ataladi.

BSPMsining geometirik talqini bilan tanishamiz.

Buning uchun quyidagi ikki o'zgaruvchili BSPMsiga murojaat qilamiz:

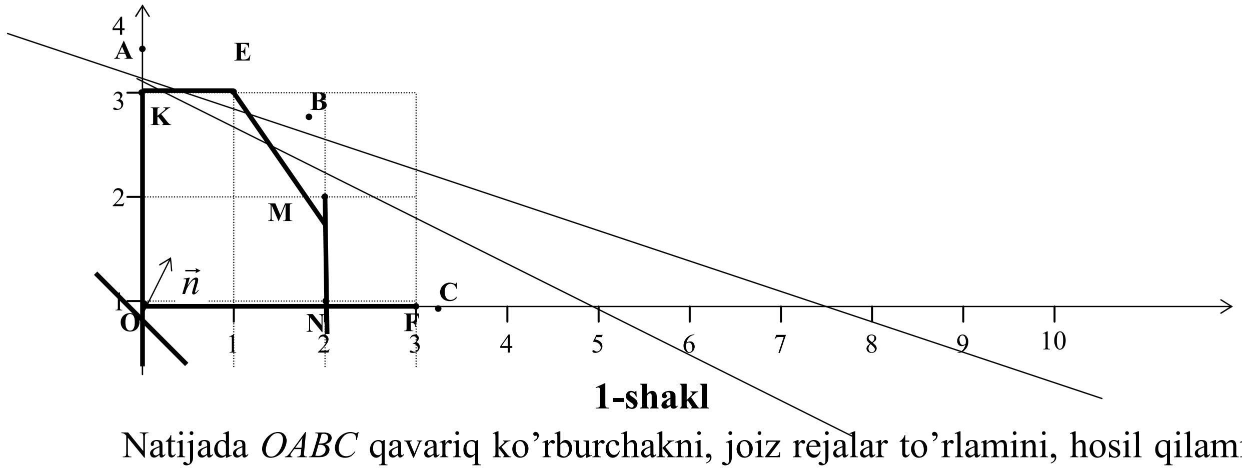
$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ x_1+3x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0,$$

$$x_j \in Z, \quad (j=1,2),$$

$$Y=2x_1+4x_2 \to \max.$$

Ushbu masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlilik shartiga e'tibor bermasdan uni grafik usulda yeshamiz (1-shakl).



1-shakl

Natijada *OABC* qavariq ko'rburchakni, joiz rejalar to'rlamini, hosil qilamiz. Bu ko'pburchakka tegishli bo'lgan nuqtalar ichida berilgan BSPMsining yechimi bo'la oladigan nuqtani topish uchun bu ko'pburchakni *OKEMNF* ko'pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo'ladi. Ana shu burchak nuqtalaridan birida maqsad funksiya maksimum qiymatga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun $2x_1 + 4x_2 = 0$ to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni normal vektor yo'nalishida o'z-o'ziga parallel ko'chirib, shu yo'nalishdagi burchak nuqta $E(1, 3)$ ni toramiz. Bu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan masalaning yechimi $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ Y_{\max} = 14$ bo'ladi.

R.Gomori usuli. Noma'lumlarga butun bo'lishlilik sharti qo'yilganligi sababli ChPMlarini yechish usullarini BSPlarini yechish uchun qo'llab bo'lmaydi.

BSPMlarini yechish uchun ularning xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ular orasida amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal butun sonli yechimni beruvchi eng aniq usullardan biri hisoblanadi. Gomori usuli yordami bilan to'la butun sonli, hamda qisman butun sonli masalalarni yechish mumkin.

Quyida biz Gomori usuli bilan to'la BSPMsini yechish jarayonda tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat:

1. Berilgan (7)-(10) masalani noma'lumlarning butun bo'lishlilik shartiga, $x_j \in Z$, e'tibor bermasdan, simpleks usuldan foydalanib yechamiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz. Bu jadvalda (7)-(10) masala uchun optimallik sharti bajarilgan bo'lsin. U holda masalaning optimal yechimi $X^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ bo'ladi.

P_b	C_b	P_0	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
			P_1	P_2	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_l	c_l	b_l	0	0	…	0	a_{lm+1}	…	a_{lk}	…	a_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_m	b_m	0	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
		Δ_0	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_k		Δ_n

Agar topilgan $X^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechimda $b_i \in Z$ bo'lsa, u holda bu yechim BSPMsining ham yechimi bo'ladi.

2. Agar $X^0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ yechimda b_i larning ba'zilari yoki hammasi kasr sonlardan iborat bo'lsa, u holda $x_j \in Z$ shartning bajarilishi uchun "**kesuvchi tenglama**" deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi.

Buning uchun quyidagi tushunchalarni kiritamiz:

Ixtiyoriy $a-$ratsional sonni

$$a = [a] + \{a\} \tag{11}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $[a]-a$ sonning butun qismi; $\{a\}-a$ sonning kasr qismi ($0 \le \{a\} < 1$, $a-$butun bo'lsa $\{a\}=0$).

Masalan, $\frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7}$, chunki $\left[\frac{30}{7}\right] = 4$, $\left\{\frac{30}{7}\right\} = \frac{2}{7}$;

$$-\frac{30}{7} = -5 + \frac{5}{7}, \text{ chunki } \left[-\frac{30}{7}\right] = -5, \quad \left\{-\frac{30}{7}\right\} = \frac{5}{7}.$$

Jadvalning P_0 ustunidagi kasr sonlardan iborat bo'lgan b_i satrlardan $\max_i\{b_i\}$ shart asosida kerakli satrni ajratib olamiz. Masalan, $\max_i\{b_i\} = q_k$ bo'lsin. Demak, $k-$satr ajratib olindi. Bu satr uchun $\{a_{kj}\} = q_{kj}$ belgilash kiritib quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + ... + q_{kn}x_n \ge q_k. \tag{12}$$

Bu tengsizlikdan

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - ... - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \tag{13}$$

kesuvchi tenglamani hosil qilamiz va bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga kiritib yoziladi. So'ngra bazis yechim almashtiriladi. Bunda ikkilangan simpleks usulidan foydalaniladi. Bu jarayon masalaning yechimda faqat butun sonlar hosil bo'lganicha yoki yechimning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Har bir bosqichda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab, bu tenglama yordamida berilgan BSPMsi yechimlar to'plamidagi kasr sonli yechimni o'z ichiga oluvchi qismi kesib boriladi.

Agar kasr sonli x_i ga mos keluvchi qatorda barcha x_{ij} lar butun sonli bo'lsa, u holda masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. Quyidagi ChPMsining butun sonli yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1,4},$$

$$Y = x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max.$$

Yechish: Masalani oddiy simpleks usul bilan yechamiz.

P_b	C_b	P_0	1	-3	5	2
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-3	$37/3$	$1/3$	1	0	$-1/3$
P_3	5	$8/3$	$2/3$	0	1	$1/3$
Δ_j		$-71/3$	$4/3$	0	0	$2/3$

Jadvaldan ko'rinadiki, topilgan yechim BSPMsining yechimi bo'lmaydi. Bu yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun kesuvchi tenglama tuzamiz.

$$\left\{\frac{37}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \quad \left\{\frac{8}{3}\right\} = \frac{2}{3}; \quad \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Demak, 2-satr tanlandi

$$\{1\} = 0, \ \{0\} = 0, \ \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \ \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

munosabatlardan foydalanib

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \ge \frac{2}{3}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikning ikki tomonini (-1) ga ko'paytiramiz va qo'shimcha noma'lumni kiritib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4 + x_5 = -\frac{2}{3}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvaliga joylashtiramiz.

P_b	C_b	P_0	1	-3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-3	$37/3$	$1/3$	1	0	$-1/3$	0
P_3	5	$8/3$	$2/3$	0	1	$1/3$	0
P_5	0	$-2/3$	$-2/3$	0	0	$\boxed{-1/3}$	1
Δ_j		$-71/3$	$4/3$	0	0	$2/3$	0

Bazisdan P_5 vektorni chiqarib, o'rniga P_4 vektorni kiritamiz. Natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi.

P_b	C_b	P_0	1	-3	5	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-3	13	1	1	0	0	-1
P_3	5	2	0	0	1	0	1
P_4	2	2	2	0	0	1	-3
Δ_j		-25	0	0	0	0	2

Demak, $X^0 = (0, 13, 2, \ 2, 0)$, $Y_{\max} = -25$.

22-MAVZU. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI VA UNING GEOMETRIK TALQINI

Tayansh so'z va iboralar: Chiziqsiz programmalashtirish, mahalliy optimal reja, global optimal reja, qavariq programmalashtirish, kvadratik programmalashtirish, gipersirtlar oilasi, gipersirtlar sathi, statsionar nuqta, Gesse matrisasi, Lagranj funksiyasi, shartsiz optimallashtirish masalasi, egar nuqta.

REJA:

1. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uning turlari.
2. Chiziqsiz programmalashtirish masalasining geometrik talqini.
3. Shartsiz optimallashtirish masalasi ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti.
4. Gesse matrisasi va uning funksiya ekstremumini tekshirishdagi roli.
5. Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli.

Chiziqsiz programmalashtirish masalasi va uning turlari. Quyidagi

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \qquad (i = \overline{1, m}) \tag{1}$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \tag{2}$$

masala matematik programmalashtirish masalasini tashkil etadi. Bu yerda, $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ berilgan funksiyalar; b_i, $(i = \overline{1, m})$ o'zgarmas sonlardir. (1) shartlar masalaning chegaraviy shartlari, $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya esa "**maqsad funksiyasi**" deb ataladi.

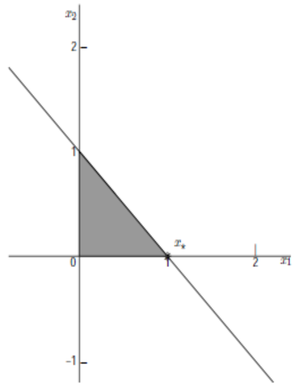
Matematik programmalashtirish masalalarida $x_1, x_2, ..., x_n$ o'zgaruvchilarning ba'zilariga yoki hammasiga nomanfiylik sharti qo'yilgan bo'ladi. Ba'zi masalalarda esa noma'lumlarning bir qismi yoki hammasi butun bo'lishligi talab qilinadi.

1-ta'rif. Agar (1), (2) masaladagi barcha $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo'lsa, bu masala **chiziqli programmalashtirish masalasi** deyiladi.

Misol. Chekmalari

$$\begin{cases} f(x) = 2x_1 + x_2 \to \max(\min) \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani qaraymiz. Bu masaladagi chegaraviy shartlari chiziqli tengsizlikdan, maqsad funksiyasi chiziqli funksiyadan iborat va uning grafigi quyidagi 1-chizmada tasvirlangan[1]



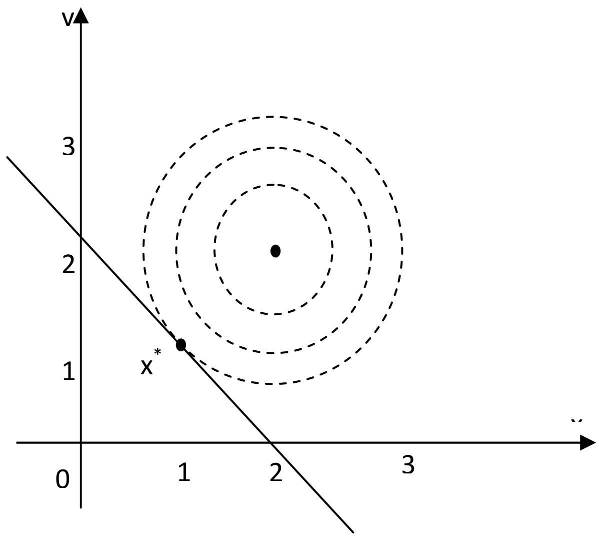
1-chizma

Bu masalaning optimal yechimi $X = (1;0)^T$ dan iborat bo'ladi.

2-ta'rif. Agar (1), (2) masaladagi $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalardan kamida bittasi chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda bu masala **"chiziqsiz programmalashtirish masalasi"** deyiladi.

Misol. $x_1 + x_2 = 2$ chizig'idagi nuqtalardan $(2;2)^T$ markazga eng yaqin bo'lgan nuqtani topish masalasini ko'ramiz. Bu masalani yechish quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasiga keladi.

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 = 2.$$



2-chizma

Chizmadan ko'rinib turibdiki, bu masala $X = (1,1)^T$ nuqtada optimal yechmga ega. Bu masala chiziqsiz programmalashtirish masalasiga misol bo'la oladi. Chiziqsiz programmalashtirish masalasi odatda S-joiz nuqtalar to'plamida f

[1]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp.5-6.

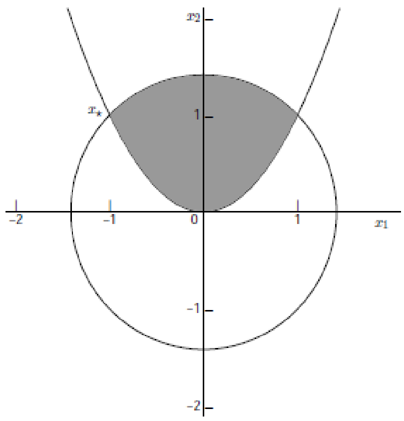
maqsad funksiyasini minimallashtiradi yoki maksimallashtiradi. Odatda, joiz nuqtalar to'plami o'zgaruvchilarga qo'yilgan shartlar asosida aniqlanadi.Ushbu masalada bizning maqsad funksiyamiz $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ – chiziqsiz funksiya va joiz nuqtalar to'plami S bitta $x_1 + x_2 = 2$ chiziqli shart orqali aniqlanadi.

Joiz nuqtalar to'plamibir qancha shartlar orqali ham aniqlanishi mumkin. Masalan:

$$f(x) = x_1 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1^2 \le x_{2,} \\ x_1^2 + x_2^2 \le 2. \end{cases}$$

Bu masala uchun joiz nuqtalar to'plami S quyidagi 3-chizmada ko'rsatilgan.[2]



3-chizma

Bu masala $X = (-1,1)^T$ nuqtada optimal yechimga ega.

Bazida shartlar (cheklovlar) bo'lmagan paytda shartsiz optimallashtirish masalasi ham uchrashi mumkin. Masalan:

$$f(x) = (e^{x_1} - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min$$

Demak, S-joiz nuqtalar to'plami bu yerda ikki o'lchamli fazodadir. Minimallashtiruvchi nuqta $X = (0,1)^T$ ga teng va funksiyaning qiymati bu nuqtada nolga teng va boshqa o'rinlarda musbat.

Biz ushbu misollardan shuni ko'rishimiz mumkinki masalaning maqsad funksiyasi hamda shartlari chiziqli yoki chiziqsiz bo'lishi mumkin.Yuqoridagi misollar ba'zi shartlar chiziqsiz bo'lganligi sababli chiziqsiz optimallashtirish masalalari hisoblanadi.[3]

3-ta'rif. Agar (1), (2) masalada $m = 0$ bo'lsa, ya'ni chegaraviy shartlar qatnashmasa, u holda bu masala **"shartsiz optimallashtirish masalasi"** deyiladi. Shartsiz optimallashtirish masalasi quyidagicha qo'iladi:

---

[2] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp 3-4.
[3] Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 5.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max\ (\min),$$
$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in E \subset R^n. \qquad (3)$$

bu yerda $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n-o'lchovli (vektor) nuqta, R^n n-o'lchovli fazo.

Faraz qilamiz, (1) sistema tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib, noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmasin, hamda $m < n$ bo'lib, $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyalar uzluksiz va kamida 2-tartibli xususiy hosilaga ega bo'lsin. U holda programmalashtirish masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1,m}) \qquad (4)$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min \qquad (5)$$

Bunday masala "**chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalasi**" deyiladi.

Shartsiz optimallashtirish va chegaraviy shartlari tenglamalardan iborat bo'lgan shartli minimum masalalarni differensial hisobgaasoslangan klassik usullar bilan yechish mumkin bo'lgani ushun ularni "**optimallashtirishning klassik masalalari**" deyiladi.

Quyidagi masalani ko'ramiz:

$$q_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (6)$$

$$X(x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset R^n, \qquad (7)$$

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min \qquad (8)$$

bu yerda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – maqsad funksiyasi; $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – chegaraviy funksiyalar (6) shartlarni qanoatlantiruvchi $X \in G$ nuqtalar esa, masalaning **joiz rejalari** deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirishda lokal va global optimal reja tushunchalari mavjud bo'lib, ular quyidagicha ta'riflanadi.

Faraz qilamiz, $Z = f(X)$, $X(x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset R^n$ bo'lsin.

4-ta'rif. X^* nuqta (6)-(8) masalaning rejasi bo'lib, uning ixtiyoriy kichik $\varepsilon > 0$ atrofida nuqtalar to'plami $U_\varepsilon(X^*) \subset G$ mavjud bo'lsin. Agar ixtiyoriy $X \in U_\varepsilon(X^*)$ uchun

$$f(X) \le f(X^*) \quad \left(f(X) \ge f(X^*) \right) \qquad (9)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, X^* reja $f(X)$ maqsad funksiyaga lokal minimum (maksimum) qiymat beruvchi **lokal optimal reja** deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $f(X^*) \le f(X)$ $[f(X^*) \ge f(X)]$ tengsizlik ixtiyoriy $X \in G$ uchun o'rinli bo'lsa, u holda X^* reja maqsad funksiyaga global minimum (maksimum) qiymat beruvchi **global optimal reja** yoki **global optimal yechim** deb ataladi.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarni yechish uchun chiziqli programmalashdagi simpleks usulga o’xshagan universal usul kashf qilinmagan.
Bu masalalar $q_i(x_1, x_2,..., x_n)$ va $f(x_1, x_2,..., x_n)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiyalar bo’lgan hollarda juda kam o’rganilgan. Ko’proq o’rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalarining ba’zilari bilan tanishib chiqamiz.

Hozirgi davrgacha eng yaxshi o’rganilgan chiziqsiz programmalashtirish masalalari $q_i(x_1, x_2,..., x_n)$ va $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyalar qavariq (botiq) bo’lgan holdir. Bunday masalalar “**qavariq programmalashtirish masalalari**” deb ataladi.

Qavariq programmalashtirish masalalarining asosiy xususiyatlari shundan iboratki, ularning har qanday lokal optimal yechimi global yechimdan iborat bo’ladi.

Iqtisodiy amaliyotda uchraydigan ko’p masalalarda $q_i(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyalar chiziqli bo’lib, $f(x_1, x_2,..., x_n)$ maqsad funksiyasi kvadratik formada, ya’ni

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_i x_j \qquad (10)$$

ko’rinishda bo’ladi. Bunday masalalar “**kvadratik programmalashtirish masalalari**” deb ataladi.

Chegaraviy shartlari yoki maqsad funksiyasi yoki ularning har ikkisi *n* ta bir o’zgaruvchili funksiyalarning yig’indisidan iborat bo’lgan, ya’ni

$$q_i(x_1, x_2,..., x_n) = q_{i1}(x_1) + q_{i2}(x_2) + ... + q_{in}(x_n),$$
$$f(x_1, x_2,..., x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + ... + f_n(x_n),$$

ko’rinishda bo’lgan masalalar “**separabel programmalashtirish masalalari**” deb ataladi.

Kvadratik va separabel programmalashtirish masalalarini yechish uchun simpleks usulga asoslanran taqribiy usullar yaratilgan.

Chiziqsiz programmalashtirishga doir bo’lgan ishlab chiqarishni rejalashtirish va resurslarni boshqarishda uchraydigan muhim masalalardan biri stoxastik programmalashtirish masalalaridir. Bu masalalarda ayrim parametrlar noaniq yoki tasodifiy miqdorlardan iborat bo’ladi.

Chegaraviy shartlari haqida to’liq ma’lumot bo’lmagan optimallashtirish masalalari “**stoxastik masalalar**” deb ataladi.

Parametrlari o’zgaruvchan miqdor bo’lib, ular vaqtning funksiyasi deb qaralgan masalalar **“dinamik programmalashtirish masalasi”** deyiladi.

O’zgaruvchilar faqatgina butun qiymatlardan iborat bo’lgan masalalar diskret programmalashtirish masalalari deb yuritiladi yoki ko'p hollarda qo'yilgan masalaning barcha funksiyalari chiziqli bo'lsa bunday masalalar **butun sonli programmalashtirish masalasi** deb yuritiladi. Bazan masalani yechish uchun muhim chegaralarini tashlab ketish va yechimga ega bo'lgandan keyin,butun songa yaqin bo'lgan o'zgaruvchilarni tanlab olishning o'zi kifoya. Lekin olingan so'nggi yechimhar doim ham optimal yechim bo'la olmaydi.[4]

ChPMlarining asosiy xusysiyatlarini takrorlab o'tamiz:

Birinchidan, uning joiz rejalar to'plami, ya'ni masalaning chegaraviy shartlarini va noma'lumlarning nomanfiylik shartlarini qanoatlantiruvchi $X=(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi;

Ikkinchidan, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ maqsad funksiyasi n-o'lchovli fazoning gipertekisliklar oilasini tashkil etadi;

Uchinchidan, maqsad funksiyaning joiz rejalar to'plamidagi har qanday minimumi (maksimumi) global minimumdan (maksimumdan) iborat bo'ladi;

To'rtinchidan, agar maqsad funksiya chekli qiymatga ega bo'lsa, joiz rejalar to'plamini ifodalovchi ko'pburchakning kamida bitta uchi optimal yechimni beradi.

Rejalar ko'pburchagining uchlari (burchak nuqtalari) bazis yechim deb ataladi. Bazis yechimdagi hamma noma'lumlar (bazis o'zgaruvchilar) qat'iy musbat bo'lgan holdagi yechim **aynimagan bazis yechim** va agar ulardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, **aynigan bazis yechim** deyiladi.

Bazis yechim optimal yechim bo'lishi uchun maqsad funksiyaning bu yechimdagi qiymati boshqa bazis yechimlardagi qiymatlaridan kam (ko'p) bo'lmasligi kerak.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining geometrik talqini. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarida yuqoridagi chiziqli programmalashtirishga doir xususiyatlarning ayrimlari (yoki hammasi) bajarilmaydi:

1) chiziqsiz programmalashtirishda rejalar to'plami qavariq bo'lmasligi ham mumkin.

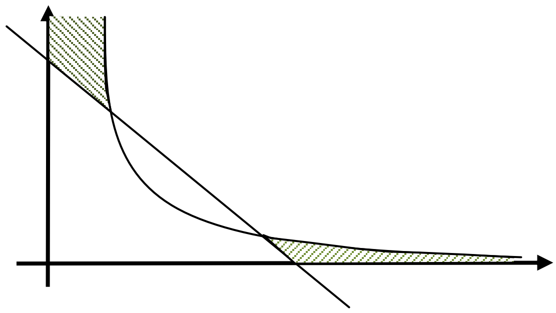
Misol. Quyidagi cheklamalari

$$\begin{cases} (x_1-1)x_2 \le 1, \\ x_1+x_2 \ge 3{,}5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

sistemadan iborat masalani ko'ramiz.

---

[4]Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. pp. 6-7.



4-chizma

Masalaning joiz rejalar to'plami ikkita alohida qismlarga ajralgan bo'lib, u qavariq emas.

Agar joiz rejalar to'plami qavariq bo'lmasa, maqsad funksiya chiziqli bo'lgan holda ham masalaning global optimal yechimidan farq qiluvchi lokal yechimlari mavjud bo'ladi.

Masalan, quyidagi masalani ko'ramiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \end{cases}$$

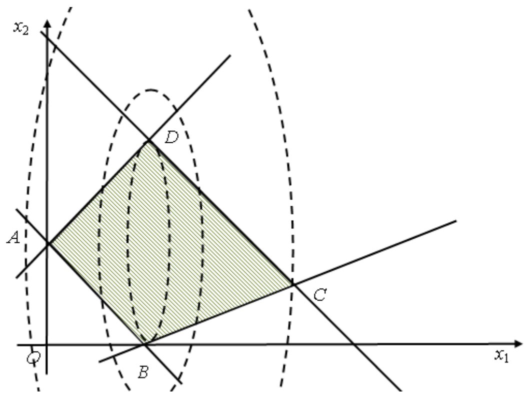
$$Z = f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$$

Bu masalaning cheklamalarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qavariq *ABCD* to'rtburshakdan iborat bo'ladi.

Masaladagi maqsad funksiya markazi (2;2) nuqtadan iborat bo'lgan ellipslar oilasidan tashkil topgan.

Bu masalaning optimal yechimi joiz rejalar to'plamining *C* uchidan iborat bo'ladi.

Umumiy holda, chiziqsiz programmalashtirish masalasining maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi nuqta (bazis yechim) mumkin bo'lgan rejalar to'plamining faqat burchak nuqtasida emas, balki ichki nuqtasida ham, chegaraviy nuqtasida ham bo'lishi mumkin.



5-chizma

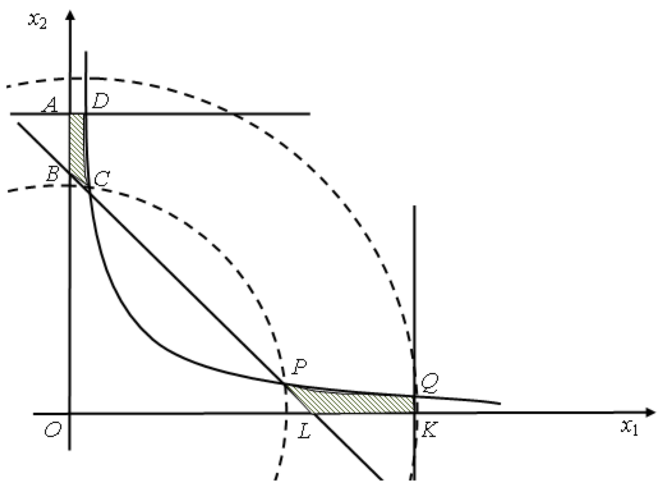
Umumiy holda berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini ko'ramiz va by masalaning geometrik talqini bilan tanishamiz. Masaladagi shartlar Evklid fazosida joiz rejalar to'plamini beradi. Bu to'plamning nuqtalari orasidan maqsad funksiyaga minimum qiymat beruvchi nuqtani (optimal nuqtani) topish kerak. Buning uchun joiz rejalar to'plamining $f(x_1, x_2, ..., x_n) = const$ gipersirtlar oilasi bilan kesishgan nuqtalari ichidan optimal nuqtani, $const$ ga eng kichik qiymat beruvchi nuqtani, topish kerak.

Misol. Quyidagi masalaning optimal yechimini grafik usulda toping.

$$\begin{cases} x_1x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \max(\min).$$

Yechish: Bu masalaning joiz rejalar to'plami qavariq to'plam bo'lmaydi, aksincha, ikkita ayrim $ABDC$ va $PQKL$ qismlardan iborat bo'ladi. Maqsad funksiya o'zining minimal qiymatiga $D(1, 4)$ va $P(1, 4)$ nuqtalarda erishadi. Bu nuqtalarda $Z_{\min} = 17$. $C\left(\frac{2}{3}, 6\right)$ va $Q\left(7, \frac{4}{7}\right)$ nuqtalarda Z funksiya lokal maksimum qiymatlarga erishadi. $Z(C) = 36\frac{4}{9}$, $Z(Q) = 49\frac{16}{49}$. $Z_{\max} = 49\frac{16}{49}$.



6-chizma

Shartsiz optimallashtirish masalasi ekstremumi mavjudligining zaruriy va yetarlilik sharti. Shartsiz minimum masalasida

$$f(X) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$$

funksiyaning minimumini $X \in E \subset R^n$ nuqtalarda topish talab qilinadi.

Ma'lumki, bu holda $f(X)$ funksiyadan birinchi tartibli barcha xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz bo'lsin

$$f(X) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \to \min \qquad (1)$$

masala o'rganiladi.

Agar X^0 nuqta (1) masalaning optimal rejasi (ekstremum nuqtasi) bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (2)$$

Demak, berilgan $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada ekstremumga ega bo'lishi uchun bu nuqta

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (3)$$

sistemaning yechimi bo'lishi zarur.

(3) sistemaning yechimlari statsionar nuqtalar deb ataladi. Berilgan $f(X)$ funksiya ekstremumga erishadigan nuqta statsionar nuqta bo'ladi, lekin har qanday statsionar nuqtada ham funksiya ekstremumga erishavermaydi.

Demak, (3) shart funksiya ekstremumi bo'lishining zaruriy sharti, lekin u yetarli shart emas.

Quyidagi teorema statsionar nuqta birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalari uzluksiz bo'lgan $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning ekstremal nuqtasi bo'lishi uchun yetarli shartni ko'rsatadi.

Gesse matrisasi va uning funksiya ekstremumini tekshirishdagi roli.

1-teorema. X^0 statsionar nuqta local ekstremal nuqta bo'lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matrisasi) ishorasi aniqlangan bo'lishi yetarli.

Agar $H\left[X^0\right]$ musbat bo'lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta;

Agar $H\left[X^0\right]$ manfiy bo'lsa, u holda X^0 nuqta maksimum bo'ladi.

Ishorasi aniqlangan matrisalar haqidagi ba'zi tushunchalarni keltirib o'tamiz. $n\times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matrisa berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $A=(a_{ij})$ matrisaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi $1,\ 2,\ ...,\ n-$tartibli minorlar, ya'ni

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad ...,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar bu **matrisaning bosh minorlari** deyiladi.

2-teorema. $A=(a_{ij})$ matrisaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat'iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matrisa musbat bo'ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matrisaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo'lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matrisa manfiy bo'ladi.

1-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+2x_3+x_2x_3-x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

Yechish: Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=1-2x_1=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_3-2x_2=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=2+x_2-2x_3=0.$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ nuqta bo'ladi. Demak, $X^0\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)-$statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matrisasini tuzamiz:

$$H\left[X^0\right]=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda -2, 4, -4. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

Yuqorida keltirilgan teoremadagi ekstremum mavjudligining yetarlilik sharti bir argumentli $f(x)$ funksiya uchun quyidagicha bo'ladi.

Faraz qilaylik, x^0 statsionar nuqta bo'lsin.

Agar $f''(x^0) < 0$ bo'lsa, u holda x^0 nuqta funksiyaning **maksimum** nuqtasi; agar $f''(x^0) > 0$ bo'lsa, u holda x^0 nuqta funksiyaning **minimum** nuqtasi deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya x^0 statsionar nuqtada $f''(x^0) = 0$ bo'lsa, u holda yuqori tartibli hosilalarning x^0 nuqtadagi qiymatlarini tekshirish kerak. Bu holda quyidagi teorema o'rinlidir.

3-teorema. x^0 statsionar nuqtada $f'(x^0) = 0,\ f''(x^0) = 0, ...,\ f^{(n-1)}(x^0) = 0$ va $f^{(n)}(x^0) \neq 0$ bo'lsa, u holda bu nuqta

a) n toq son bo'lganda burulish nuqta;

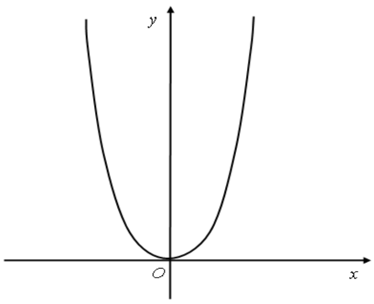
b) n juft son bo'lganda ekstremal nuqta bo'ladi.

2-misol. $f(x) = x^4$ funksiyaning ekstremumi topilsin.

Yechish: $f'(x) = 4x^3 = 0$. Demak, $x^0 = 0$ statsionar nuqta bo'ladi.

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 24 \neq 0.$$

$n = 4$ juft son. Demak, $x^0 = 0$ nuqta $f(x) = x^4$ funksiya uchun ekstremal nuqta bo'ladi. $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ bo'lgani uchun $x^0 = 0$ nuqtada berilgan funksiya minimumga erishadi.



$f(x) = x^4$

Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli. Faraz qilaylik,

$$\begin{aligned} &q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \\ &Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min, \end{aligned} \tag{4}$$

masalani yechish talab qilinsin.

(4) masalani yechishning eng sodda klassik usuli noma'lumlarni yo'qotish usulidir. Bunda

$$q_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

tenglamalar sistemasidan m ta noma'lumlarni, masalan,

$$x_1 = h_1(x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n),$$
$$x_2 = h_2(x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n),$$
$$.......................................,$$
$$x_m = h_m(x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n)$$

noma'lumlar topilib $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min$ funksiyaga keltirib qo'yiladi va $n-m$ ta $x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n$ noma'lumlarga nisbatan shartsiz optimallashtirish masalasi

$$\begin{aligned}&\varphi(x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n) = \\ &= f\left(h_1(x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n),\ ...,\ h_m(x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n),\ x_{m+1},\ x_{m+2},\ ...,\ x_n\right) \to \min\end{aligned} \quad (5)$$

hosil qilinadi. Bu masala (4) masalaga ekvivalent:

1. Agar $(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ (4) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $(x_{m+1}^0,\ x_{m+2}^0,\ ...,x_n^0)$ (5) masalaning yechimi bo'ladi;

2. Agar $(x_{m+1}^0,\ x_{m+2}^0,\ ...,x_n^0)$ (5) masalaning yechimi bo'lsa, u holda $(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ (4) masalaning yechimi bo'ladi.

(4) masalainig optimal yechimini topishning ikkinchi klassik usuli Lagranj ko'paytuvchilari usulidir.

$q_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ va $f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ funksiyalar va ularning $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ noma'lumlar bo'yicha xususiy hosilalari uzluksiz bo'lsin. Noma'lumlarga nomanfiylik sharti qo'yilmaganda (4) masalani Lagranjning aniqmas ko'paytuvchilar usuli bilan yechish mumkin.

(4) masalaning elementlaridan umumlashgan (kengaytirilgan) $(m+1)-$ Lagranj vektori $\vec{\lambda} = \{\lambda_0,\ \lambda\}$ (λ_0 – skalyar, $\lambda = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m\}$ – Lagranj vektori; $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m$ – Lagranj ko'paytuvchilari) yordamida

$$F(X,\vec{\lambda}) = \lambda_0 f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)) \quad (6)$$

umumlashgan Lagranj funksiyasini tuzamiz. Shunday qilib, (4) masala $F(X,\vec{\lambda})$ – Lagranj funksiyasining oddiy ekstremumini o'rganishga keltiriladi.

4-teorema (umumlashgan Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). (4) masalaning har bir X^0 lokal optimal rejasi uchun shunday $\lambda^0 \neq 0$ umumlashgan Lagranj vektori mavjud bo'ladiki, uning uchun

$$\frac{\partial F(X^0,\ \overrightarrow{\lambda^0})}{\partial X} = 0 \quad (7)$$

bo'ladi, ya'ni X^0 (6) umumlashgan Lagranj funksiyasining $\lambda = \lambda^0$ bo'lgandagi statsionar nuqtasi bo'ladi.

X^0 nuqtada (7) tenglik bajariladigan $\lambda^0 \neq 0$ vektor X^0 nuqtaga mos umumlashgan Lagranj vektori deb ataladi. X^0 nuqtaga bir nechta umumlashgan Lagranj vektorlari mos kelishi mumkin.

(7) tenglikni $-\lambda^0$ vektor ham qanoatlantiradi. Shu sababli $\lambda^0 \geq 0$ deb olinib, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasiga aniqlik kiritiladi.

Ko'p hollarda

$$F(X,\vec{\lambda}) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(X)), \quad (\lambda_0 = 1) \tag{8}$$

klassik Lagranj funksiyasidan foydalaniladi.

(8) Lagranj funksiyasi uchun, umuman olganda, Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi o'rinli emas.

(4) masalani tekshirishda (8) Lagranj funksiyasidan qachon foydalanish mumkinligini aniqlaymiz.

2-ta'rif. Agar X^0 optimal rejaga mos umumlashgan $\vec{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda\}$ Lagranj vektorlari ichida $\lambda_0 = 0$ kabilar bo'lmasa, u holda (4) masala va uning X^0 optimal rejasi **normal** deb ataladi.

3-ta'rif. Agar X^0 rejada

$$\frac{\partial q_1(X^0)}{\partial X}, \ \ldots, \ \frac{\partial q_m(X^0)}{\partial X} \tag{9}$$

vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda X^0 **oddiy reja** deb ataladi.

4-teorema. Optimal reja X^0 normal bo'ladi faqat va faqat shu holdaki, agar u oddiy joiz reja bo'lsa.

Agar (4) masala normal bo'lsa, u holda $m \leq n$ bo'ladi.

Endi asosiy natijani keltiramiz. Bundan keyin (4) masalada soddalik uchun $b_i = 0$ deb qaraymiz.

5-teorema (Lagranj ko'paytuvchilari qoidasi). Agar (4) masalaning X^0 optimal rejasida (9) vektorlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda shunday yagona λ^0 Lagranj vektori topiladiki, $\{X^0, \lambda^0\}$ juftlikda

$$\frac{\partial F(X^0, \lambda^0)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial F(x^0, \lambda^0)}{\partial \lambda} = 0$$

tengliklar bajariladi. Masalan, (4) masalada $i = 1, \ j = 2,$ bo'lsa, (8) funksiyaning (X^0, λ^0) statsionar nuqtasini topamiz. So'ngra

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1}(X^0) & g_{x_2}(X^0) \\ g_{x_1}(X^0) & F_{x_1x_1}(X^0,\lambda^0) & F_{x_2x_1}(X^0,\lambda^0) \\ g_{x_2}(X^0) & F_{x_2x_1}(X^0,\lambda^0) & F_{x_2x_2}(X^0,\lambda^0) \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz. Agar $\Delta > 0 \Rightarrow X^0 -\ f(X)$ funksiyaning shartli minimum nuqtasi, agar $\Delta < 0 \Rightarrow X^0 -\ f(X)$ funksiyaning shartli maksimum nuqtasi.

3-misol. $z = xy$ funksiyaning $x + y = 6$ dagi ekstremumini toping.[5]

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = xy + \lambda(6 - x - y)$$

bu funksiyadan x, y va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} Z_\lambda = 6 - x - y = 0 \\ Z_x = y - \lambda = 0 \\ Z_y = x - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ -\lambda + y = 0 \\ -\lambda + x = 0 \end{cases}$$

sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^* = 3, \quad x^* = 3, \quad y^* = 3$$

Demak, $X^* = \left(x^*, y^*\right) = (3;3)$ nuqta $z = xy$ funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi. Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = 9$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko'rishimiz kerak. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$\Delta < 0, \quad M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

demak, $x^* = (3;3)$ nuqtada z funksiya extremumga erishmaydi.

4-misol. $z = x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning $x_1 + 4x_2 = 2$ dagi ekstremumini toping.[6]

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$Z = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2 - x_1 - 4x_2)$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi x_1, x_2 va λ lar bo'yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz.

$$\begin{cases} Z_\lambda = 2 - x_1 - 4x_2 = 0 \\ Z_{x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \\ Z_{x_2} = 2x_2 - 4\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 2 \\ -\lambda + 2x_1 = 0 \\ -4\lambda + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemani yechib, quyidagini topamiz:

$$\lambda^* = \frac{4}{17}, \quad x_1^* = \frac{2}{17}, \quad x_2^* = \frac{8}{17}$$

---

[5]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental Methods of Mathematical Economics". 2013. pp. 351-352.
[6]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental Methods of Mathematical Economics". 2013. pp. 352.

Demak, $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right) = \left(\frac{2}{17}; \frac{8}{17}\right)$ nuqta $z = x_1^2 + x_2^2$ funksiya uchun statsionar nuqta bo'ladi. Topilgan qiymatni $Z^* = z^* = \frac{4}{17}$ maksimum yoki minimumini ayta olishimiz uchun tekshirib ko'rishimiz kerak. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta > 0, \quad M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$

Demak, $x^* = \left(\frac{2}{17}; \frac{8}{17}\right)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi.

(4) masalada funksiyalar o'zgaruvchili ikkitadan ko'p bo'lsa, u holda lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo'ladi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

bu sistemadan (X^0, λ^0) statsionar nuqtani topamiz.

Masalaning shartli ekstremumining mavjudligi Lagranj funksiyasining $d^2F -$ ikkinchi differensialini o'rganish bilan bog'liq: agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1,2,...,m)$, $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) < 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi; agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1,2,...,m)$, $\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo'lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) > 0$ bo'lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, (X^0, λ^0) nuqtada $d^2F(X^0, \lambda^0) = 0$ bo'lsa, u holda (X^0, λ^0) nuqtani ekstremumga boshqa usul bilan qo'shimcha tekshirish kerak bo'ladi.

5-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasini yeching

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,$$
$$u = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min(\max)$$

Yechish: Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\lambda) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9)$$

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda\left[1 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2\right].$$

Bu funksiyadan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz

$$\begin{cases} F_{x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ F_{x_2} = -2 + 2\lambda x_2 = 0, \\ F_{x_3} = 2 + 2\lambda x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ x_{11} = -1,\ \ x_{21} = 2,\ x_{31} = -2,$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2},\ x_{12} = 1,\ \ x_{22} = -2,\ x_{32} = 2,$$

Bundan $d^2u\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right) = 1 > 0;$ $d^2u\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$. Demak, $\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right)-$ nuqta shartli minimum nuqta, $u_{\min} = -9$; $\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right)-$shartli maksimum maksimum nuqta, $u_{\max} = 9$.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Igor Griva., Stephen G.Nash., Ariela Sofer. Linear and Nonlinear Optimization. 2009. 766 p.

23-MAVZU. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

Tayanch so'z va iboralar: Qavariq funksiya, qat'iy qavariq funksiya, qavariq funksiyaning mahalliy va global maksimumi, Lagranj funksiyasining egar nuqtasi, Kun-Takker shartlari, Kun-Takker teoremasi.

REJA:

1. Qavariq va botiq funksiyalar va ularning ekstremumi.
2. Qavariq funksiyaning xossalari.
3. Lagranj funksiyasining egar nuqtasi. Kun-Takker shartlari.
4. Kun-Takker teoremasi.
5. Kun-Takkerning yetarlilik teoremalari.

1. Qavariq programmalashtirish optimallashtirish masalasining bir bo'limi bo'lib, u qavariq funksiyani qavariq to'plamda minimallashtirish (maksimallashtirish) nazariyasini o'rgatadi. Qavariq programmalashtirish masalasi

$$\begin{aligned} &g_i(X) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \quad (i = \overline{1,m}), \\ &x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,n}), \quad X \in G \subset R^n, \\ &Z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min. \end{aligned} \tag{1}$$

ko'rinishda bo'lib, bunda $g_i(X), f(X)$ funksiyalar $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan va qavariq funksiyalardir.

(1) masalaning yechish usullari bilan tanishishdan oldin qavariq funksiyalar haqidagi ayrim tushunchalar bilan tanishamiz.

1-ta'rif. Agar

$$G \subset R^n, \quad X_1 \in G, \quad X_2 \in G \Rightarrow X(\lambda) = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in G, \quad \lambda \in [0, 1]$$

bo'lsa, u holda $G-$**qavariq to'plam** bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $f(X)$ funksiya $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \alpha \le 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) \le \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \tag{2}$$

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) \ge \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \tag{3}$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, $f(X)$ funksiya **qavariq funksiya** deyiladi.

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy ikkita $X_1 \in G, X_2 \in G$ nuqtalar va $0 \le \alpha \le 1$ son uchun

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) < \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \tag{4}$$

$$f(\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1) > \alpha f(X_2) + (1-\alpha) f(X_1) \tag{5}$$

tengsizliklardan biri o'rinli bo'lsa, u holda $G \subset R^n$ qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiya **qat'iy qavariq funksiya** deyiladi.

Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiya bo'lsa, ixtiyoriy chekli sondagi $X_1, X_2, ..., X_n \in G$ nuqtalar uchun quyidagi

$$\begin{cases} f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(X_j), \\ \lambda_j \ge 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1. \end{cases} \tag{7}$$

munosabatlardan biri o'rinli bo'ladi.

2. Qavariq funksiya va to'plamlar quyidagi xossalarga ega:

1. G qavariq to'plamda aniqlangan $g_i(X) = const$ funksiyalar qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinasiyasidan iborat bo'lgan

$$g(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(X), \quad \lambda_i \ge 0, \qquad (i = \overline{1, m});$$

funksiya ham qavariq bo'ladi.

2. Ixtiyoriy chekli sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'ladi.
3. Qavariq $f(X), X \in R^n$ funksiyaning sath to'plamlari $\{X : f(X) \le c\}$ $(\{X : f(X) \le c\})$ bo'sh yoki qavariq to'plam bo'ladi.
4. G qavariq to'plamda aniqlangan $f(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarining tayin qiymatlarida qavariq bo'lishligi zarur va yetarlidir.
5. Agar $f_1(X), f_2(X), ..., f_n(X)$ funksiyalar qavariq G to'plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo'lsa, $f(X) = \max\limits_{1 \le i \le n} f_i(X)$ funksiya ham qavariq bo'ladi.

4-ta'rif. $f(X)$ qavariq funksiyaning $G \subset R^n$ to'plamdagi **global maksimumi (minimumi)** deb, har qanday $X \in G$ nuqtada

$$f(X^0) \ge f(X), \quad (f(X^0) \le f(X)), \tag{8}$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi $X^0 \in G$ nuqtaga aytiladi.

Agar (8) tengsizlik $X^0 \in U_\varepsilon(X^0)$ nuqta uchun o'rinli bo'lsa, X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaga lokal maksimum (minimum) qiymat beruvchi nuqta bo'ladi. Bu yerda $U_\varepsilon(X^0) = \left\{X : \left|X - X^0\right| < \varepsilon\right\}$.

Qavariq funksiyaning ekstremumiga doir quyidagi teoremalar o'rinlidir.

1-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qat'iy qavariq funksiya bo'lsa, u ozining ixtiyoriy global ekstremumiga faqat bitta nuqtada erishadi.

2-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda qavariq bo'lib, bu to'plamga tegishli ikkita $X_1, ..., X_n \in G$ nuqtalarda ham global ekstremumga erishsa, shu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan ixtiyoriy nuqtada ham global ekstremumga erishadi.

3-teorema. Agar $f(X)$ funksiya G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq va differensiallanuvchi funksiya bo'lib, ixtiyoriy $X^0 \in G$ nuqtada $\nabla f(X^0) = 0$ bo'lsa, u holda $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada global ekstremumga erishadi.

3. (1) masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)) \quad (9)$$

Agar (X^0, λ^0) nuqta (1) masala uchun tuzilgan $F(X, \lambda)$ funksiyaning **egar nuqtasi** bo'lsa, u holda $X \in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda \in U_\delta(\lambda^0)$ $(\lambda \geq 0)$ $(U_\delta(\lambda^0) = \{\lambda : |\lambda - \lambda^0| < \delta\}$ – λ^0 nuqtaning ixtiyoriy kichik $\delta > 0$ atofi uchun

$$F(X^0, \lambda) \leq F(X^0, \lambda^0) \leq F(X, \lambda^0) \quad (10)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

$$\begin{aligned} & g_i(X) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \geq b_i, \quad (i = \overline{1, m}), \\ & x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}), \quad X \in G \subset R^n, \\ & Z = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max. \end{aligned} \quad (11)$$

masala qaraymiz.

Agar (X^0, λ^0) nuqta (11) masala uchun tuzilgan $F(X, \lambda)$ **Lagranj funksiyasining egar nuqtasi** bo'lsa, u holda $X \in U_\varepsilon(X^0)$ va $\lambda \in U_\delta(\lambda^0)$, $\lambda \geq 0$ uchun

$$F(X, \lambda^0) \leq F(X^0, \lambda^0) \leq F(X^0, \lambda) \quad (12)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4-teorema. Agar (X^0, λ^0), $X \in G$, $\lambda^0 \geq 0$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'lsa, u holda X^0 (1) masalaning optimal rejasi bo'ladi va $(b_i - g_i(X))\lambda_i^0 = 0$ shart bajariladi.

Bu teoremada G to'plam va $f(X), g_i(X)$ funksiyalar qavariq bo'lishi shart emas. (1) masalaga ham yuqoridagidek teorema isbotlash mumkin.

Demak, (1) va (11) masalalarning optimal rejasini topish uchun Lagranj funksiyaning egar nuqtasini topish yetarli ekan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lgan hol uchun Lagranj funksiyasining egar nuqtasi haqidagi mavjudlik teoremalariga ekvivalent teoremalar dastlab G.V.Kun va A.V.Takker tomonidan olingan.

$f(X)$ va $g_i(X)$ funksiyalar differensiallanuvchi bo'lsa, u holda Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligining zaruriy va yetarlilik shartlari (1) masala uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} \geq 0; \tag{13}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0; \quad x_j^0 \geq 0; \tag{14}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} \leq 0; \tag{15}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0; \quad \lambda_i^0 \geq 0. \tag{16}$$

(11) masala uchun esa bu shartlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} \leq 0; \tag{17}$$

$$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0; \quad x_j^0 \geq 0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} \geq 0; \tag{19}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_i} = 0; \quad \lambda_i^0 \geq 0. \tag{20}$$

(13)-(16) va (17)-(20) munosabatlar Lagranj funksiyasi egar nuqtasi mavjudligi haqidagi **Kun-Takker shartlari** deb ataladi.

5-teorema. $F(X,\lambda)$ funksiya egar nuqtaga ega bo'lishi uchun (1) masala uchun (13)-(16) shartlarning, (11) masala uchun (17)-(20) shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(11) masalani ko'ramiz. Agar kamida bitta $X \in G$ nuqtada $g_i(X) < b_i$ tengsizlik (Sleyter sharti) bajarilsa, Kun-Takkerning quyidagi teoremasi o'rinlidir.

4. Kun-Takker teoremasi. X^0 nuqta (11) masalaning optimal yechimi bo'lishi uchun bu nuqtada (17)-(20) munosabatlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

(1) masala uchun ham bu kabi teorema o'rinli bo'ladi. Faqat bu yerda **Sleyter sharti** $g_i(X) < b_i$ ko'rinishida bo'ladi.

1-misol. Grafik usul bilan quyidagi

$$2x_1 + x_2 \ge 2,$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$
$$Z = f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \to \max.$$

masalani yeching va Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiring.

Yechish: Masalani grafik usulda yechib, uning optimal yechimi $X^0(0,8;\,0,4)$ ekanligini ko'rish mumkin. Bunda $f(X^0) = -0,8$.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(X,\lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3(6 - x_1 - x_2)$$

X^0 nuqtada masalaning 2, 3-chegaraviy shartlari qat'iy tengsizlikka aylanadi. Demak, masala uchun Sleyter sharti bajariladi. (13)-(16) shartlarni tekshiramiz.

Lagranj funksiyasidan xususiy hosilalar olamiz va Lagranj shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 2\cdot 0,8 + 0,4 - 2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2\cdot 0,8 - 0,4 = 6 > 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_3} = 6 - x_1 - x_2, \qquad \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3} = 6 - 0,8 - 0,4 = 4,8 > 0.$$

Demak, $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$ $\left(\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_2} > 0,\ \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_3} > 0\right)$. $\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda_1} = 0$ bo'lganligi sababli $\lambda_1 \ne 0$ bo'lishi mumkin.

$x_j^0 \frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0$ tenglikda $x_j^0 > 0$. Demak, $\frac{\partial F(X^0,\lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \quad (j = 1,2)$ bo'ladi, ya'ni

$$\begin{cases} -2\cdot 0,8 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0, \\ -2\cdot 0,4 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Bundan $\lambda_1 = 0,8$. Demak, $(X^0;\lambda^0) = (0,8,\ 0,4;\ 0,8,\ 0,\ 0)$ egar nuqta bo'ladi.

Endi Kun-Takker teoremasidan foydalanib qavariq programmalashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni bilan tanishamiz. Buning uchun quyidagi masalaga murojaat qilamiz.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max.$$

Bu masaladagi maqsad funksiya chiziqli $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ va $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ kvadratik funksiyalarning yig'indisidan iborat. Bunda $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ funksiya manfiy aniqlangan kvadratik formadan iborat bo'lgani uchun botiq funksiya bo'ladi. Chiziqli $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ funksiyani ham botiq funksiya deb qarash mumkin. Shunday qilib, berilgan masala chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa botiq funksiyadan iborat bo'lgan qavariq programmalashtirish masalasidan iborat. Ushbu masalaga Kun-Takker teoremasini qo'llash mumkin.

Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

Lagranj funksiyasining egar nuqtasi mavjudligini ifodalovchi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0; \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0; \\ \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0; \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \qquad \text{(III)}$$

(I) sistemaga v_1, v_2, w_1, w_2 nomanfiy qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$
$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

Ushbu sistemani quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} v_1 = (2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2), \\ v_2 = (4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2), \\ w_1 = (8 - x_1 - 2x_2), \\ w_2 = (12 - 2x_1 - x_2). \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

Ushbu tengliklarni va (II) sistemani nazarga olib quyidagini hosilqilamiz:

$$x_1 v_1 = 0, \;\; x_2 v_2 = 0, \; \lambda_1 w_1 = 0, \; \lambda_2 w_2 = 0 \qquad \text{(VI)}$$

Endi (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimini topamiz. Bu yechim ifodalovchi nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi va berilgan masalaning optimal yechimini beradi.

(IV) sistemani sun’iy bazis usulidan foydalanib yechamiz. U holda

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$
$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, w_1 \ge 0, w_2 \ge 0, z_1 \ge 0, z_2 \ge 0.$$
$$Z = Mz_1 + Mz_2 \to \min.$$

P_b	C_b	P_0	0	0	0	0	0	0	M	M	0	0
			P_1	P_2	Λ_1	Λ_2	V_1	V_2	Z_1	Z_2	W_1	W_2
Z_1	M	2	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
Z_2	M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	1	0	0
W_1	0	8	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
W_2	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
Δ_j		$6M$	$2M$	$4M^*$	$3M$	M	$-M$	$-M$	0	0	0	0
Z_1	M	$\boxed{2}$	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0
W_2	0	13	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1

Δ_j		$2M^*$	$2M$	0	M	$2M$	-M	0	0	-M	0	0
P_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0
P_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	5	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0
W_2	0	11	0	0	-1/2	-9/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1
Δ_j		0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	0	0

Bu jadvaldan otimal yechimni topamiz:

$$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 1,\ \lambda_1^0 = 0,\ \lambda_2^0 = 0,$$

$$v_1^0 = 0,\ \ v_2^0 = 0,\ \ w_1^0 = 5,\ \ w_2^0 = 11.$$

Bu yechim (IV) sistemaning (VI) shartlarni qanoatlantiruvchi bazis yechimi bo'ladi. Demak, $(X^0, \Lambda^0) = (1;1;0;0)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. $X^0 = (1;1)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'lib, unda $f(X^0) = 3$ bo'ladi.

5. Kun-Takkerning yetarlilik teoremalari.[1] Yuqorida biz Kun-Takker shartlari bilan tanishdik va tengsizliklar bilan berilgan masalalarni optimallashtirishda zaruruiy shartlarni ko'rib o'tdik. Ba'zi bir holatlarda Kun-Takker shartlari uchun yetarlilik shartlarini o'zi ham yetarli hisoblanandi.

Klassik optimallashtirish masalalarida maksimum va minimum uchun yetarlilik sharti asosoan ikkinchi tartibli hosilalar orqali aniqlanandi. Bu yerda esa, chiziqsiz programmalashtirishda, qavariq va botiq funksiyalar uchun yetarlilik shartlari ham to'g'ridan to'g'ri olinishi mumkin. Masalani maksimallashtirish uchun, Kun va Takker quyidagicha yetarlilik teoremasini taklif qilishgan.

Teorema. Quyida berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz:

$$g^i(x) \le r_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x \ge 0$$

$$\pi = f(x) \to \min.$$

Yuqoridagi masala uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

(a) $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi va botiq bo'lsa;

(b) $g^i(x)$) funksiya differensiallanuvchi va qavariq bo'lsa;

(c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi, u holda x^* nuqtada $\pi = f(x)$ funksiya maksimum nuqtaga erishadi.

Demak, yuqoridagi teoremaning (a), (b), (c) shartlari bajarilsa x^* nuqta **masalaning optimal yechimi** hisoblanadi.

Boshqa tomondan qaraganda, (a) va (b) shartlar bilan va Kun-Takker shartlari masalani maksimallashtiradi. Agar nazarda tutilgan tengsizlik (a) va (b)

[1] Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental methods of mathematical economics". 2013. pp. 424-425.

shartlar hisobga olinsa, u holda Kun-Takker shartlari funksiyani maksimallashtirish uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi. Yuqorida ko’rilgan teorema qavariq programmalshtirish deyiladi. Yetarlilik sharti faqat maksimallashtirish uchun kerak bo’ladi.

Qisman botiq programmalashtirish masalasi uchun Arrov-Enthovenning yetarlilik nazariyasi[2].

Kun-Takkerning yetarlilik nazariyasiga yuzlanadigan bo’lsak, ayrim qavariq botiq holatlarga duch kelamiz. Bular esa bir qancha murakkab shartlarni keltirib chiqaradi. Arrov-Enthoven yetarlilik nazariyasi deb nomlangan boshqa nazariyada esa bu holatlar maqsad va chekli funksiyalarda qisman qavariqlik va qisman botiqlik shartlarining o’zi qanoatlantiradi. Shartlar orqali ular osonlashtirilishi bilan bir qatorda, yetarlilik holatlarini o’rganish imkoniyatlari kengayadi.

Arrov-Enthoven ishining asl kelib chiqishi $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalari maksimallashtirish masalasi va nomanfiy (≥) shaklidagi cheklovlar bilan bir vaqtda qisman botiq bo’lishi kerak. Bu esa qisman botiq programmalashtirish masalalarini keltirib chiqaradi. Bu muhokama jarayonida nomusbat (≤) tengsizligidan maksimallashtirish masalasining cheklovlari va (≥) tengsizligidan minimallashtirish masalasida foydalanamiz.

Berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasini qaraymiz

$$g^i(x) \le r_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m); \qquad x \ge 0;$$

$$\pi = f'(x) \to \max .$$

Yuqoridagi masala quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

(a) $f(x)$ maqsad funksiyasi differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman botiq;

(b) $g'(x)$ funksiya differensiallanuvchi va nomanfiy sohada qisman qavariqdir;

(c) x^* nuqta Kun-Takkerning maksimumlik shartlarini qanoatlantiradi;

(d) Quyidagilarning ixtiyoriy bittasi qanoatlantiriladi:

(d_1) kamida bitta x_j o’zgaruvchi uchun $f_j(x) < 0$ bo’lsa;

(d_2) musbat qiymatga erishadigan x_j o’zgaruvchi uchun $f_j\left(x^*\right) < 0$;

(d_3) $f_j\left(x^*\right)$ ning barcha n-tartibli hosilalari noldan farqli va $f(x)$ funksiya x^* nuqtada ikki marta differensiallanuvchi [ya’ni $f(x)$ ning x^* da barcha ikkinchi tartibli hosilalari mavjud];

(d_4) $f(x)$ funksiya botiq.

Demak, x^* nuqta $\pi = f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo’ladi.

Bu nazariyaning isboti juda uzun bo’lganligi sababli, uni shu yerda to’xtatamiz. Biroq shunga e’tibor qaratish kerakki, Arrov va Enthover o’zlarining

[2]Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. “Fundamental methods of mathematical economics”. 2013. pp. 425-426.

qisman botiqlik qisman qavariqlik nazariyasida botiqlik qavariqlik holatlarini kamaytirishga erishgan vaqtda, ular yangi (d) shartni kiritishni muhim deb topishdi. Shunga qaramasdan, (d) shartda berilgan to'rtta holatdan faqat bittasi to'liq yetarlilik shartlarini shakllantirishi kerak. Shuning uchun natijada yuqoridagi nazariya maksimum uchun to'rtta turli yetarlilik shartlari guruhidan tashkil topgan. Botiq $f'(x)$ funksiya bilan (d_4) shart bajarilganda, Arrov-Enthoven yetarlilik nazariyasi Kun-Takker yetarlilik nazariyasi bilan bir xil bo'lib qoladi. Lekin bu to'g'ri emas. Shu bilan birgalikda, Arrov va Enthoven $g'(x)$ chekli funksiyani qisman qavariq bo'lishini talab qiladi, uning yetarlilik shartlari shunda ham kamroq bo'ladi. Demak, nazariya (a) dan (d) gacha bo'lgan barcha yetarlilik shartlarini qamrab oladi. Lekin buni boshqacharoq tarzda izohlash ham mumkin, ya'ni (a), (b) va (d) shartlar bajarilsa, u holda Kun-Takker shartlari maksimum uchun yetarli shartlar bo'ladi. Bundan tashqari, agar cheklanganlik xususiyati qanoatlantirilsa, unda Kun-Takker shartlari maksimum uchun zaruriy va yetarli bo'ladi. Kun-Takker nazariyasiga o'xshab, Arrov-Enthoven nazariyasi minimallashtirish shakliga osonlik bilan o'tkazilishi mumkin. Optimallashtirish yo'nalishini saqlab qolish uchun zarur bo'ladigan aniq o'zgarishlar bilan birgalikda, (a) va (b) holatlarida qisman botiq va qisman qavariq so'zlarini almashtirishimiz kerak, Kun-Takker maksimum holatlarini minimum holatlariga almashtirish, (d_1) va (d_2) dagi tengsizliklarni saqlab qoliishimiz, va (d_4) da botiq so'zini qavariqqa o'zgartirishimiz kerak bo'ladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental Methods of Mathematical Economics". 2013. 352 p.

24-MAVZU. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

Tayanch so'z va iboralar: Dinamik optimallashtirish, programmalashtirish, ko'p bosqichli jarayon, boshqarish, boshqariluvchi jarayon, strategiya, optimal strategiya, optimallik prinsipi, shartli boshqarish, Bellman funksional tenglamalari.

REJA:

1. Dinamik optimallashtirish masalasi.
2. Bellman funksional tenglamalari.
3. Dinamik programmalashtirishga keltiriladigan masalalar.

Dinamik optimallashtirish masalasi. Shu paytgacha o'rganilgan chiziqli va chiziqsiz programmalashtirish masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog'liqmas deb qaraldi, shuning uchun masalaning optimal yechimi rejalashtirishning faqat bir bosqichi uchun topildi. Bunday masalalar **bir bosqichli masalalar** deb ataladi.

Dinamik programmalashtirish masalalarida iqtisodiy jarayon vaqtga bog'liq deb qaraladi, hamda butun jarayonnnig optimal rivojlanishiini ta'minlovchi bir qator (ketma-ket, har bir davr uchun) optimal yechimlar topiladi. Dinamik programmalashtirish masalalari **ko'p bosqichli** yoki **ko'p qadamli masalalar** deb ataladi.

Dinamik programmalashtirish – vaqtga bog'liq va ko'p bosqichli boshqariluvchi iqtisodiy jarayonlarni optimal rejalashtirish usullarini o'rganuvchi bo'limidir.

Agar iqtisodiy jarayonning rivojlanishiga ta'sir ko'rsatish mumkin bo'lsa, bunday jarayon **boshqariluvchi** deb ataladi. Jarayonnga ta'sir etish uchun qabul qilinuvchi qarorlar (yechimlar) to'plamiga boshqarish deb ataladi. Iqtisodiy jarayonlarni boshqarish bir bosqichidagi vositalarni taqsimlash, mablag'lar ajratish, direktiv hujjatlar qabul qilish kabilar bilan ifodalanishi mumkin.

Masalan, ixtiyoriy korxonada ishlab chiqarish – boshqariluvchi jarayondir, chunki u ishlab chiqarish vositalarining tarkibi, xom-ashyo ta'minoti, moliyaviy mablag'lar miqdori va hokazo bilan aniqlanadi. Rejalashtirish davridagi har bir yil boshida xom ashyo bilan ta'minlash, ishlab chiqarish jihozlarini almashtirish, qo'shimcha mablag'lar miqdori haqida qarorlar qabul qilinadi. Bu qarorlar to'plami jarayonni boshqarishdir. Bir qarashda, eng ko'p miqdorda mahsulot ishlab chiqarish uchun korxonaga mumkin bo'lgan vositalarning hammasini berish va ishlab chiqarish jihozlaridan (stanoklardan, texnikadan va hokazolardan) to'la foydalanish zarurdek tuyuladi. Lekin, bu jihozlarni tezda eskirishiga (ishdan chiqishga) va kelgusida mahsulot ishlab chiqarish hajmining kamayishiga olib kelishi mumkin. Demak, korxonaning faoliyatida noma'qul oqibatlardan holi bo'lgan holda eskirgan jihozlarni almashtirish yoki o'rnini to'ldirish choralari belgilanishi lozim bo'ladi. Bu esa dastlabki bosqichda mahsulot ishlab chiqarish hajmi kamaysa ham, keyingi bosqichlarda korxonaning butun ishlab chiqarish faoliyatini kuchayishiga olib kelishi mumkin.

Shunday qilib, yuqoridagi iqtisodiy jarayon, har bir qadamda uning rivojlanishiga ta'sir etuvchi, bir qancha bosqichlardan iborat deb qaralishi mumkin. Ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonlarni rejalashtirish uchun, har bir oraliq bosqichda alohida qaror qabul qilishda, butun jarayonning tub maqsadi ko'zlanadi. Butun jarayonning yechimi o'zaro bog'langan yechimlar ketma-ketligidan iborat bo'ladi. O'zaro bog'langan bunday yechimlar ketma-ketligi **strategiya** deb ataladi. Oldindan tanlangan mezonga ko'ra eng yaxshi natijani ta'minlovchi strategiya **optimal strategiya** deb ataladi. Boshqacha aytganda optimal strategiya ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonning optimal rivojlanishini ta'minlovchi strategiyadir. Dinamik programmalashtirish ko'p bosqichli tuzilishga ega bo'lgan yoki bunday tuzilishga keltiriladigan masalalarning optimal yechimini topish uchun ishlatiladigan matematik vositadir. Dinamik programmalashtirish masalasiga o'tishdan oldin bu masala bilan uzviy bog'liq bo'lgan dinamik optimallashtirish masalasi bilan tanishib chiqamiz:[1]

Iqtisodiy jarayon $t_0 \le t \le t_1$ vaqt oralig'ida ro'y bersin. U holda bu jarayon harakatini ifodalovchi tizimni $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ ustun vektor yordamida yozib olamiz. Ma'lumki, bu vektorlar E^n fazo nuqtalaridir. U holda $x_i(t), i = \overline{1,n}$ funksiyalarni uzluksiz deb faraz qilib,

$$\vec{x}(t) = \left\{ \vec{x}(t) \in E^n \middle| t_0 \le t \le t_1 \right\}$$

vektorni hosil qilamiz va bu vektorlarning geometrik o'rni $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$ nuqta va $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$ nuqta oralig'idagi niqtalar to'plami hosil qilgan traektoriyadan iborat bo'ladi.

U holda bu tizimni boshqarish vektori quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\vec{u}(t) = \left\{ \vec{u}(t) \in E^r \middle| t_0 \le t \le t_1 \right\}, \ \vec{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))^T .$$

Bu vektorlarning geometrik o'rnini **boshqarish traektoriyasi** deb ataladi. Boshqarish vektori odatda qandaydir $\Omega -$kompakt sohada aniqlangan bo'ladi:

$$\vec{u}(t) \in \Omega \subset E^r .$$

---

[1] Michael D.Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2002. pp. 330.

$U-$barcha mumkin bo'lgan boshqarish traektoriyalar to'plami bo'lsin. U holda $\{\vec{u}(t)\}\in U\subset\Omega\subset E^r$. $\{\vec{x}(t)\}$ traektoriya harakat tenglamasini ifodalaydi va boshqarish traektoriyasi bilan quyidagicha bog'langan bo'ladi:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=f(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t),\ \frac{dx_i(t)}{dt}=f(x_1(t),...,x_n(t);u_1(t),...,u_r(t);t). \quad (1)$$

Agar (1) differentsial tenglamalar t vaqtga bog'liq bo'lmasa, u holda ular avtonom tenlamalar deb ataladi. Chiziqli avtonom tenglamalar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=A\vec{x}+B\vec{u}. \quad (2)$$

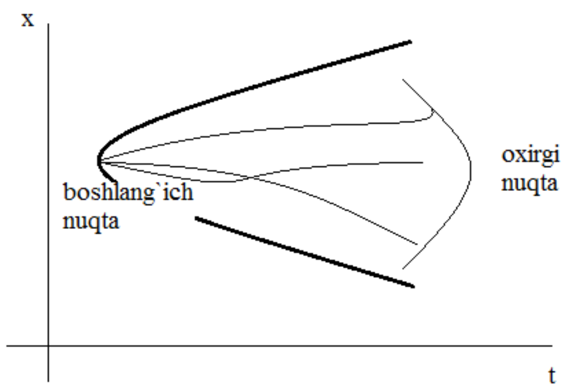
Bu yerda $A-n\times n$ o'lchamli, $B-n\times r$ o'lchamli matritsa. (2) tenglama $\vec{x}_0=\vec{x}(t_0)$ boshlang'ich shart bilan yechiladi. $\vec{x}-$harakat vektori, $\vec{u}-$boshqarish vektori va $t-$vaqt orasidagi bog'lanishni ko'rsatuvchi funksionalni $I(\vec{x},\vec{u},t)$ bilan, $\vec{x}_1$ va t_1 orasidagi bog'lanish ko'rsatuvchi funksionalni $F(\vec{x}_1,t_1)$ bilan belgilaymiz. Bu yerda

$$I(\vec{x},\vec{u},t)=I(x_1(t),...,x_n(t);u_1(t),...,u_r(t);t),\quad F(\vec{x}_1,t_1)=F(x_1(t_1),...,x_n(t_1);t)$$

Dinamik optimallashtirish masalasi umumiy holda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases}\max\limits_{\{\vec{u}(t)\}}\left\{J=\int\limits_{t_0}^{t_1}I(\vec{x},\vec{u},t)dt+F(\vec{x}_1,t_1)\right\},\\ \frac{d\vec{x}}{dt}=f(\vec{x},\vec{u},t),\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0,\ \ t=t_1\Rightarrow(\vec{x},t)\in T,\ \{\vec{u}(t)\}\in U\end{cases} \quad (3)$$

Bu masalani geometrik nuqtai-nazardan quyidagicha tasvirlash mumkin:



Bellman funksional tenglamalari. Dinamik optimallashtirishning tatbiqlaridan biri bo'lgan dinamik programmalashtirish masalasi (3) bilan atroflicha tanishamiz:[2]

---

[2]Michael D.Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2002. pp. 347.

Faraz qilamiz, $\vec{x}^*(t), t_0 \le t \le t_1$ optimal traektoriya bo'lib, u ikki qismdan iborat bo'lsin. U holda traektoriyaning 1-qismi $t_0 \le t \le \tau$ oraliqda $\vec{x}(t_0)$ boshlang'ich shart bilan, 2-qismi esa $\tau \le t \le t_1$ oraliqda $\vec{x}(\tau)$ boshlang'ich shart bilan aniqlanadi.

Faraz qilamiz, $J^*(\vec{x},t)$ funksiya (3) masalaning yechimi bo'lsin. U holda $J^*(\vec{x},t)$ ni $(\vec{x},t)$ nuqtadagi optimal qiymat deb qarash mumkin. Xuddi shunday $(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t)$ nuqtadagi optimal qiymat $J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t)$ ifoda bilan aniqlanadi. U holda $[t, t+\Delta t]$ oraliqdagi qiymat quyidagi rekurent formula bilan aniqlanadi:

$$J^*(\vec{x},t) = \max_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ I(\vec{x},\vec{u},t)\Delta t + J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t) \right\}. \tag{4}$$

$J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t)$ funksiyani $(\vec{x},t)$ nuqta atrofida Teylor qatoriga yoyamiz:

$$J^*(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t) = J^*(\vec{x},t) + \frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}}\Delta\vec{x} + \frac{\partial J^*}{\partial t}\Delta t + ... \tag{5}$$

Bu yerda

$$\frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}} = \left(\frac{\partial J^*}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial J^*}{\partial x_n} \right)$$

(4) va (5) dan foydalasak,

$$0 = \max_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ I(\vec{x},\vec{u},t) + \frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} + \frac{\partial J^*}{\partial t} + ... \right\}.$$

U holda $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x},\vec{u},t)$ tenglikni hisobga olib quyidagi **Bellman tenglamasini** hosil qilamiz:

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{\vec{u}(t)\}} \left\{ I(\vec{x},\vec{u},t) + \frac{\partial J^*}{\partial \vec{x}} f(\vec{x},\vec{u},t) \right\}. \tag{6}$$

Ko'p bosqichli iqtisodiy masalalarni yechish uchun ularni yagona matematik modelini yoki bo'lmasa, har bir bosqichga mos keluvchi statik modellar sistemasini tuzib, so'ngra uni dinamik programmalashtirish usullari bilan yechish mumkin. Shu sababli ko'p bosqichli jarayon sifatida ifodalanuvchi matematik programmalashtirish masalalarini yechish ham dinamik programmalashtirish predmetini tashkil etadi.

Ko'p bosqichli jarayon vaqtga bog'liq ravishda rivojlanuvchi va o'z taraqqiyotida bir necha bosqichlarga bo'linuvchi jarayondir.

Dinamik programmalashtirish quyidagi xususiyatlarga ega:

1) dinamik programmalashtirish ko'p bosqichli jarayonning birdan-bir yagona yechimini emas, balki har bir bosqichga mos keluvchi va tub manfaatni ko'zlovchi yechimlar ketma-ketligini topishga yordam beradi;

2) dinamik programmalashtirish yordami bilan yechilayotgan ko'p bosqichli masalaning ma'lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog'liq bo'lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi faktlar nazarga olinadi;
3) dinamik programmalashtirish yordami bilan ko'p bosqichli masalani yechish jarayonining har bir bosqichida tub maqsadni ko'zlovchi yechimni aniqlash kerak, ya'ni yechimlar orasida provard maqsadga erishishga maksimal hissa qo'shuvchi yechimni topish kerak.

Demak, ma'lum bir bosqichda topilgan optimal reja faqat shu qadam nuqtai nazaridan emas, balki butun jarayonning tub (provard) maqsadi nuqtai nazaridan optimal reja bo'lishi kerak. Bunday prinsip "**dinamik programmalashtirishning optimallik prinsipi**" deb ataladi.

Optimallik prinsipiga amal qilish har qadamda qabul qilingan yechimni kelgusida qanday oqibatlarga olib kelishini nazarga olib borish demakdir. Bundan tashqari optimallik prinsipini yana quyidagicha talqin qilish mumkin.

Har bir bosqichdan avval sistemaning holati qanday bo'lishidan qat'iy nazar shu bosqichdagi optimal yutuq bilan undan keyingi bosqichlardagi optimal yutuqlarning yig'indisini maksimallashtiruvchi boshqarishni tanlash kerak.

Demak, boshqarishning optimal strategiyasini topish uchun eng avval n-qadamdagi optimal strategiyani topish kerak, keyin n va $(n-1)$-qadamlardagi optimal strategiyani va hokazo, barcha qadamlardagi optimal strategiyani topish kerak.

Bu prinsipga asosan dinamik programmalashtirish masalasini oxirgi n-qadamdagi optimal strategiyani topishdan boshlash kerak. Buning uchun undan oldingi qadamdagi yechim haqida ayrim taxminlar qilinadi va bu asosda W mezonni maksimallashtiruvchi U_n^0 boshqarish tanlanadi. Bunday boshqarish shartli **boshqarish** deb ataladi.

Demak, optimallik prinsipi har qadamda undan oldingi qadamning mumkin bo'lgan ixtiyoriy bir natijasi uchun shartli optimal boshqarishni topishni talab qiladi. Ko'p bosqichli masalada Bellman funksional tenlamasi bilan tanishamiz.

Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan va boshqarish mumkin bo'lgan sistemani ko'ramiz. Bu sistemani T ta bosqichlarga ajratish mumkin deb faraz qilamiz, ya'ni $t = 1, 2, ..., T$. Har bir bosqichning boshidagi sistemaning holatini x_t bilan belgilaymiz. U holda

$$x_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{mt}).$$

Har bir jarayonida sistemaning holati o'zgaradi. Uning x_{t-1} holatdan x_t holatga o'tishiga u_t boshqarish ta'sir qiladi. Demak,

$$x_t = \varphi(x_{t-1},\ u_t).$$

Bu yerda u_t mumkin bo'lgan G_t – boshqarishlar to'plamiga tegishli, ya'ni

$$u_t \in G_t$$

Bunday aniqlashlarda sistemaning butun $[0,T]$ davr ichidagi taraqqiyoti $x_0, x_1, x_2, ..., x_{T-1}, x_T$ vektorlar ketma-ketligi orqali aniqlanadi. $\overline{X}(t)$ sistemaning t bosqichda mumkin bo'lgan holatlar to'plami. Sistemani boshlang'ich x_0 holatdan x_T holatga o'tkazish uchun $u_0, u_1, u_2, ..., u_{T-1}, u_T$ boshqarishlar ketma-ketligi, ya'ni strategiyalar xizmat qiladi. Sistemaning eng yaxshi x_T holatga o'tishini ta'minlash uchun $f_T(x)$ maqsad funksiyani kiritamiz.

$$f_T(x) = \sum_{t=1}^{T} Z_t(x_{t-1}, x_t)$$

bu yerda $Z_t = (x_{t-1}, x_t)$ sistemaning x_{t-1} holatdan x_t holatiga o'tishida hisoblanadigan va bu holatlarni solishtirib baholovchi funksiyadir.

Agar sistemaning t bosqichdagi holatlar to'plami $\overline{X}(t)$ mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami G_t, hamda sistemani bir holatdan ikkinchi holatga o'tkazish qoidasi, hamda bu holatlarni solishtiruvchi funksiya $Z_t = (x_{t-1}, x_t)$ berilgan bo'lsa, T bosqichda sistema to'la aniqlangan bo'ladi. Bunday sistemani ifodalovchi dinamik programmalashtirish masalasi quyidagicha bo'ladi.

Sistemani boshlang'ich holati x_0 ma'lum bo'lganda shunday

$$u_t = (u_1, u_2, ..., u_T)$$

strategiyani tanlash kerakki, u

$$x_t = \varphi(x_{t-1}, u_t), \quad x_t \in \overline{X}(t), \quad u_t \in G_t, \quad (t = \overline{1,T}) \tag{7}$$

shartlarni qanoatlantirib,

$$f_T(x) = \sum_{t=1}^{T} Z_t(x_{t-1}, x_t) \tag{8}$$

funksiyaga ekstremal qiymat bersin.

Bu munosabatlardan ko'rinadiki, dinamik programmalashtirish masalasi ko'p bosqichli tanlash masalasi bo'lib, uning u^* optimal yechimi bir nechta bosqichlarda topilgan, mumkin bo'lgan u_t boshqarishlar asosida tanlanadi.

Geometrik nuqtai nazardan, dinamik programmalashtirish masalasini quyidagicha talqin qilish mumkin: Umumiy holda sistemaning boshlang'ich x_0 holati va oxirgi x_k holati aniq berilmaydi, balki boshlang'ich holatning X_0^* sohasi va oxirgi holatning X_k^* sohasi ko'rsatiladi.

Bu masala quyidagicha ta'riflanadi: biror boshqariluvchi X sistema boshlang'ich $x_0 \in X_0^*$ holatda bo'lsin. Vaqt o'tishi bilan sistemaning holati o’zgarib $x_k \in X_k^*$ oxirgi holatga o’tadi, deb hisoblaylik. Sistema holatlarining o’zgarishi W mezon (kriteriy) bilan bog’liq bo’lsin. Sistemaning o’zgarish jarayonini shunday tashkil etish kerakki, bunda W mezon o’zining optimal qiymatiga erishsin.

U mumkin bo’lgan boshqaruvlar to’plami bo’lsin, u holda masala X sistemani $x_0 \in X_0^*$ holatdan $x_k \in X_k^*$ holatga o’tkazishga imkon beruvchi shunday $u^* \in U$ boshqaruvni topishdan iboratki, bunda $W(u)$ mezon o’zining $W^* \in W(u^*)$ optimal qiymatiga erishsin.

Odatda sistemaning x_0 holatini sonli parametrlar bilan, masalan, ajratilgan fondlar miqdori, jalb qilingan investisiyalar miqdori, sarflangan yoqilg’i miqdori va h.k. bilan ifodalash mumkin. Bu parametrlarni sistemaning koordinatalari deb ataymiz.

(7), (8) masalani yechishdan avval

$$G_T,\ G_{T-1,T},\ \ldots,\ G_{1,2,\ldots,T} = G$$

belgilashlar kiritamiz. Bu yerda $G_T -$ masalaning oxirgi T bosqichdagi aniqlanish sohasi, $G_{T-1,T} -$ T va $T-1$ bosqichlardagi aniqlanish sohasi, $G_{1,2,\ldots,T-1,T} = G -$ berilgan masalaning aniqlanish sohasi.

Maqsad funksiyaning oxirgi bosqichdagi optimal qiymatini $f_1(x_{T-1})$ bilan belgilaymiz:

$$f_1(x_{T-1}) = \min_{u_T \in G_T} \left\{ Z_T(x_{T-1}, x_T) \right\}. \qquad (9)$$

$T-1$ qadamdagi shartli optimal qiymatni $f_2(x_{T-2})$ bilan belgilaymiz:

$$f_2(x_{T-2}) = \min_{u_{T-1} \in G_{T-1,T}} \left\{ Z_{T-1}(x_{T-2}, x_{T-1}) + f_1(x_{T-1}) \right\}. \qquad (10)$$

Bu jarayonni davom ettiramiz

$$f_k(x_{T-k}) = \min_{u_{T-(k-1)} \in G_{T-(k-1),\ldots,T}} \left\{ Z_{T-k}(x_{T-k}, x_{T-(k-1)}) + f_{k-1}(x_{T-(k-1)}) \right\} \qquad (11)$$

$$f_T(x_0) = \min_{u_1 \in G} \left\{ Z_1(x_0, x_1) + f_{T-1}(x_1) \right\}. \qquad (12)$$

Bu yerda (9)-(12) ifodalar optimallik prinsipining matematik formadagi yozilishidan iborat bo’lib, ular “**Bellmanning funksional tenglamalari**” yoki “**dinamik programmalashtirishning asosiy funksional tenglamalari**” deb ataladi.

Dinamik programmalashtirishning optimallik prinsipiga asosan har bir qadamda topilgan yechim faqat shu qadam nuqtai nazaridan emas, balki so’nggi, tub maqsad nuqtai nazaridan optimal bo’lishi kerak ekanligini ko’rgan edik. Dinamik programmalashtirish masalalarini yechish usullari uchun ana shu prinsip asos qilib olingan.

Dinamik programmalashtirishga keltiriladigan masalalar. Dinamik programmalashtirish usullari bilan yechiladigan ba'zi iqtisodiy masalalar bilan tanishib chiqamiz:

1. Sanoat birlashmasini optimal rejalashtirish masalasi. Faraz qilaylik, n ta korxonani o'z ichiga oluvchi sanoat birlashmasining T yillik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinsin. Rejalashtirilayotgan T davrning boshida birlashma uchun K_0 miqdorda mablag' ajratilgan bo'lsin. Bu mablag' korxonalararo taqsimlanadi. Korxonalar ajratilgan mablag'ni to'la yoki qisman ishlatadi va ma'lum miqdorda daromad oladi. Keyingi bosqichlarda mablag'lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin. Shunday qilib, quyidagi masala hosil bo'ladi: korxonalararo kapital mablag'ni shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki, natijada birlashmaning T yil davomida olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

Har yilning boshida birlashmadagi har bir korxonaga ajratiladigan xom-ashyo, kapital mablag' va yangilanishi kerak bo'lgan uskunalarning soni haqida yechim qabul qilinadi.

Bu yechimlar to'plami boshqarish deb ataladi. Demak, t qadamdagi boshqarish

$$U^t = (U_1^t, U_2^t, ..., U_n^t)$$

vektor orqali ifodalanadi, bu yerda $U_j^t - j$ korxona uchun t qadamning boshida ajratilgan xom-ashyo, kapital mablag' va hokazolarning miqdorini ko'rsatuvchi vektor.

Butun birlashmaning T davr ichida boshqarishni

$$U = (U^1, U^2, ..., U^T)$$

vektor orqali ifodalash mumkin. Bundan tashqari birlashmadagi har bir j korxonaning holatini ko'rsatuvchi X_j vektor kiritamiz.

$$X_j = (X_j^1, X_j^2, ..., X_j^T), \qquad (j = \overline{1, n}).$$

Bu yerda $X_j^t - t$ qadamning boshidagi j korxonaning moddiy-ashyoviy va moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatuvchi vektor bo'lib, uning komponentalari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar, moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatadi, ya'ni

$$X_j^t = (X_{j1}^t, X_{j2}^t, ..., X_{jl}^t),$$

Demak, yuqoridagilardan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori birlashmadagi korxonalar sistemasining t qadam boshidagi holatini ko'rsatuvchi vektordir, ya'ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Sistemaning boshlang'ich holati X_0 berilgan deb faraz qilamiz. Maqsad fuknsiya sifatida birlashmaning T davr ichida oladigan daromadlari yig'indisini ifodalovchi

$$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max$$

funksiyani kiritamiz. Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga chegaralovchi shartlar qo'yiladi. Bu shartlar birlashmasini G bilan belgilaymiz va uni mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami deb ataymiz.

Shunday qilib, quyidagi dinamik programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$U^t \in G, \tag{13}$$

$$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max \tag{14}$$

Hosil bo'lgan (13), (14) model ishlab chiqarishning dinamik modeli deb ataladi. Bu modelga asosan har bir t qadamdagi U^t boshqarishni shunday aniqlash kerakki, natijada sistemaning rejalashtirilayotgan davr ichida erishgan daromadlari yig'indisi maksimal bo'lsin.

2. Mahsulot ishlab chiqarish va uni saqlashni rejalashtirishning dinamik modeli. Vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan talabni qondirishga qaratilgan ishlab chiqarishni rejalashtirish masalasini ko'ramiz. Rejalashtirilayot-gan davrning uzunligi T bo'lsin. Bu davrning har bir t qadamida mahsulotga bo'lgan talab $V(t)$ ma'lum deb faraz qilamiz. Xuddi shuningdek, t qadamdagi ishlab chiqarish rejasini $X(t)$ bilan belgilaymiz. T davr davomida korxonadagi mahsulotlar zahirasi kamayib yoki ortib borishi mumkin.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t=0$ qadamda korxonadagi mahsulot zahirasi $Z(0)$ bo'lsin. U holda $X(t) > V(t)$ bo'lganda t qadamdagi mahsulot zahirasi quyidagicha aniqlanadi

$$Z(t) = X(t) - V(t) + Z(0).$$

Agar t qadamda ishlab chiqarilgan mahsulot talabdan kam: $X(t) < V(t)$ bo'lsa, u holda t qadamning boshida korxonada mavjud bo'lgan mahsulot zahirasi $V(t) - X(t)$ ga kamayadi, ya'ni zahira

$$Z(t) = Z(t-1) + X(t) - V(t)$$

ifoda bilan aniqlanadi.

Ixtiyoriy qadamdagi mahsulot zahirasi noldan kichik emas deb faraz qilamiz, hamda $t=0$ boshlang'ich qadam bilan t qadam orasidagi mahsulotga bo'lgan umumiy talabni $\bar{V}(t)$ bilan, umumiy ishlab chiqarish hajmini $\bar{X}(t)$ bilan belgilaymiz. U holda

$$\bar{V}(t)=\int_0^t V(s)ds, \quad \bar{X}(t)=\int_0^t X(s)ds.$$

Faraz qilaylik, mahsulotni bir-birligini saqlash uchun sarf qilingan xarajat C birlik va ishlab chiqarish harajatlari funksiyasi $K(t)$ bo'lsin. Ishlab chiqarish xarajatlari funksiyasi $K(t)$ ishlab chiqarilgan mahsulotlar miqdori $X(t)$ ga bog'liq bo'ladi, ya'ni $K(t)=f\left(X(t)\right)$. Ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada mahsulot ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan xarajatlar minimal bo'lsin, ya'ni

$$Y=\int_0^T f\left(X(t)\right)dt+C\int_0^T\left(X(t)-V(t)+Z(0)\right)dt\to\min. \quad (15)$$

Maqsad funksiya ikki qismdan iborat bo'lib, uning birinchi qismi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ketgan harajatlarni, ikkinchi qismi esa mahsulotlarni saqalash uchun sarf qilingan harajatlarni ko'rsatadi.

Bundan tashqari masaladagi noma'lumlar quyidagi shartlarni qanoatlantirishi kerak:

$$\begin{aligned} &Z(0)\geq 0;\\ &X(t)-V(t)+Z(0)\geq 0;\\ &X(T)-V(T)=Z(T). \end{aligned} \quad (16)$$

Bunda birunchi shart rejalashtirilayotgan davrning boshidagi mahsulot zahirasi manfiy emasligini ko'rsatadi. Ikkinchi shart ixtiyoriy t bosqichdagi mahsulot zahirasining manfiy emasligini ko'rsatadi. Uchinchi shart rejalashtirilayotgan davrning oxirida korxonada ortib qolgan mahsulot miqdori $Z(T)$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

Hosil bo'lgan (15)-(16) model mahsulot ishlab chiqarish va saqlashni rejalashtirishning dinamik modeli deyiladi.

Bu modelga asosan har bir qadamdagi mahsulot ishlab chiqarishni shunday rejalashtirish kerakki, natijada uni ishlab chiqarish va saqlash uchun sarf qilingan xarajatlar yig'indisi minimal bo'lsin.

Misol. Xaridorgir mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirish uchun mahsulot ishlab chiqaruvchi n ta korxonalarga S ming so'm kapital mablag' ajratilgan. Agar i korxonaga x_i ming so'm kapital mablag' ajratilsa, u holda bu korxonadagi mahsulot ishlab chiqarish hajmi $f_i(x_i)$ miqdorga oshadi. Barcha korxonalarda ishlab chiqariladigan mahsulot hajmini maksimal oshirish uchun kapital mablag'ni korxonalarga qanday taqsimlash kerak?

Yechish: Masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S;$$
$$x_i \geq 0; \qquad (17)$$
$$F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \min.$$

Bu masalada $F(x)-$maqsad funksiyasi va $g(x)-$asosiy cheklashlar funksiyasi separabel funksiyadir.

Agar $f_i(x_i)$ qavariq funksiya bo'lsa, u holda masalani qavariq programmalashtirish masalalarining optimal yechimini topish usullaridan foydalanib yechish mumkin.

Agar $f_i(x_i)$ ixtiyoriy chiziqsiz funksiya bo'lsa, u holda (16) masalani dinamik programmalashtirish usulini qo'llab yechish kerak bo'ladi. Buning uchun masalani ko'p bosqichli masala sifatida ifodalash kerak. Kapital mablag'ni n ta korxonaga taqsimlash variantlarini o'rganish va har bir variantga mos keluvchi samaradorlik darajasini aniqlash o'rniga S miqdordagi kapital mablag'ni, avval, bitta korxonaga, keyin ikkita, va hokazo, n ta korxonaga taqsimlash samaradorligini aniqlaymiz. Shunday yo'l bilan masala ko'p bosqichli dinamik programmalashtirish masalasiga aylanadi.

Masalan, (17) ixtiyoriy $k, 0 \leq k \leq n$ va $q, 0 \leq q \leq S$ uchun yozamiz:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = q;$$
$$x_i \geq 0; \qquad (18)$$
$$B_k(q) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \to \min.$$

Bu yerda $B_k(q)-$Bellman funksiyasi deb ataladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Michael D.Intriligator. Mathematical Optimization and Economic Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2002. 420 p.

25-MAVZU. INVESTITSIYANI OPTIMAL TAQSIMLASH MASALASI

Tayanch so'z va iboralar: Investitsiyani optimal taqsimlash, investitsiyani taqsimlashning ko'p bosqichli masalasi, investitsiyani optimal taqsimlashning funksional tenglamalari.

REJA:

1. Investitsiyani optimal taqsimlashning ko'p bosqichli masala sifatida qo'yilishi.
2. Investitsiyani optimal taqsimlash masalasining asosiy funksional tenglamalari.
3. Investitsiyani korxonalararo optimal taqsimlash rejasini aniqlashga doir masala.

Faraz qilamiz birlashmadagi korxonalarni qayta ta'mirlash uchun X_0 miqdorda investitsiya ajratilgan bo'lsin. Bu mablag'ni birlashmadagi n ta korxona orasida taqsimlash kerak bo'lsin. $i-$korxonaga x_i miqdorda kapital mablag' ajratilganda uning oladigan daromadini $Z_i(x_i)$ bilan belgilaymiz.

Birlashmaning umumiy daromadi korxonalar daromadlari yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$Z = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + ... + Z_n(x_n). \tag{1}$$

Investitsiya miqdorini optimal taqsimlash masalasining matematik modeli quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + ... + x_n = X_0, \\ & x_j \geq 0, \qquad (i = 1,...,n), \\ & Z = Z_1(x_1) + Z_2(x_2) + ... + Z_n(x_n) \to \max. \end{aligned} \tag{2}$$

Yuqoridagi (2) dagi birinchi shart birlashmaga ajratilgan X_0 investitsiya miqdori to'la taqsimlanishi kerakligini; ikkinchi shart masalaning shartiga ko'ra noma'lumlar nomanfiy bo'lishini va uchinchi shart maqsad funksiya, ya'ni birlashmaning umumiy daromadi maksimal bo'lishligini ko'rsatadi.

Berilgan (2) masalada ajratilgan investitsiya miqdori X_0 ga va korxonalar soni n ga teng. Bu masalani yechishni ko'p bosqichli jarayon deb qaraymiz. Har bir bosqichda ajratilgan investitsiya miqdori noldan X_0 gacha, korxonalar soni esa noldan n gacha o'zgaruvchan miqdorlar deb qaraladi. Masalan, birinchi bosqichda $0 \leq x \leq X_0$ mablag' faqat bitta korxonaga, ikkinchi bosqichda 2 ta korxonaga va hokazo, $n-$bosqichda n ta korxonaga taqsimlanadi deb qaraladi. Shunday qilib, kapital mablag'ni taqsimlashning statik masalasi dinamik programmalashtirish masalasiga aylanadi.

Bunday dinamik programmalashtirish masalasini yechish uchun $F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x)$ funksiyalar ketma-ketligini kiritamiz. Bu yerda: $F_1(x)-$ $0 \le x \le X_0$ miqdordagi mablag'ni faqat 1 ta korxonaga taqsimlaganda olinadigan maksimal daromad, $F_2(x)-$ $0 \le x \le X_0$ miqdordagi mablag'ni 2 ta korxonaga taqsimlashdan olinadigan maksimal daromad va hokazo, $F_n(x)-$ $0 \le x \le X_0$ miqdordagi mablag'ni n ta korxonaga taqsimlashdan olinadigan daromadni bildiradi. Ma'lumki, $F_n(X_0) = Z_{max}$ bo'ladi.

Agar investitsiya taqsimlanmasa, u holda daromad ham nolga teng bo'ladi: $F_1(x) = 0$.

Agar investitsiya faqat bitta korxonaga taqsimlansa birlashmaning daromadi ana shu bitta korxona daromadidan iborat bo'ladi: $F_1(x) = Z_1(x)$, $0 \le x \le X_0$.

$0 \le x \le X_0$ kapital mablag' 2 ta korxona orasida taqsimlangan holni ko'ramiz. Agar x_2– ikkinchi korxonaga ajratilgan mablag' bo'lsa, u holda qolgan $x - x_2$ miqdordagi mablag' birinchi korxonaga ajratiladi. Bu ikki korxonadan olinadigan umumiy daromad quyidagi funksional tenglama yordamida topiladi:

$$F_2(x) = \max_{\substack{0 \le x_2 \le x \\ 0 \le x \le X_0}} \left[Z_2(x_2) + F_1(x - x_2) \right].$$

Faraz qilaylik $0 \le x \le X_0$ miqdordagi mablag' k ta korxona orasida taqsimlangan bo'lsin. Agar k –korxonaga x_k miqdorda mablag' ajratilgan bo'lsa, undan olingan daromad $Z_k(x_k)$ ga teng bo'ladi. Qolgan $x - x_k$ mablag' k–1 ta korxonalar orasida taqsimlanadi va undan olinadigan daromad $F_{k-1}(x - x_k)$ ga teng bo'ladi. Bu holda olinadigan umumiy daromad

$$F_k(x) = \max_{\substack{0 \le x_k \le x \\ 0 \le x \le X_0}} \left[Z_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k) \right]$$

funksional tenglama yordamida topiladi. Dastlab berilgan masalaning yechimini $x = X_0$ va k=n bo'lgan holdagi quyidagi funksional tenglamadan foydalanib topamiz.

$$F_n(x) = \max_{0 \le x_n \le x} \left[Z_n(x_n) + F_{n-1}(X_0 - x_n) \right].$$

Investitsiyani taqsimlash masalasini dinamik programmalashtirish usuli bilan yechish jarayoni bilan tanishamiz.

$0 \le x \le X_0$ oraliq n ta teng intervallarga (qadamlarga) bo'linadi. Har bir qadamning uzunligi Δ ga teng deb qabul qilinadi. Bundan tashqari $Z_i(x)$ va $F_i(x)$ funksiyalar faqat $x = 0, \Delta, 2\Delta, ..., n\Delta = X_0$ nuqtalarda aniqlangan deb qabul qilinadi.

$i = 1$ da $F_i(x)$ funksiya $F_1(x) = Z_1(x)$ tenglik yordamida aniqlanadi. $F_1(k\Delta) = Z_1(k\Delta)$, k=0,…,n tenglikning qiymatlari jadvalga joylashtiriladi. $F_1(k\Delta)$ ning qiymatidan foydalanib $F_2(k\Delta)$ hisoblanadi:

$$F_2(X_0) = \max_{k=0,n} \left[Z_2(k\Delta) + F_1(X_0 - k\Delta)\right]$$

Hisoblash jarayonida $F_2(x)$, funksiyaning qiymatidan tashqari $Z_2(k\Delta) + F_1(X_0 - k\Delta)$ foydani maksimallashtiruvchi x_2 ning qiymati ham topiladi. So'ngra $F_3(x)$ topiladi va hokazo. $F_n(x)$ ning qiymati

$$F_n(x) = \max_{0 \le x_n \le x} \left[Z_n(x_n) + F_{n-1}(X_0 - x_n)\right]$$

tenglik yordamida topiladi.

So'ngra hisoblash jarayoni teskari tartibda bajariladi. Bunda oxirgi qadamdan birinchi qadamgacha bir marta qarab chiqiladi:

Shu bilan chegaralangan investitsiyani birlashmaning n ta korxonalari orasida optimal taqsimlangan bo'ladi.

1-misol. Faraz qilaylik 200 birlik kapital mablag'ni birlashmadagi 4 ta korxona orasida taqsimlash kerak bo'lsin. Har bir korxona o'ziga ajratilgan mablag'ning miqdoriga bog'liq ravishda turli miqdordagi daromadga erishadi. Bu daromadlar quyidagi 1-jadvalga joylashtirilgan.

1-jadval

Korxonalarga ajratilgan mablag'lar miqdori	Korxonalar daromadi			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
200	90	85	92	66

Investitsiyani korxonalararo optimal taqsimlash rejasini tuzing.

Yechish: Masalani 4 ta bosqichga bo'lib yechamiz. Dastlab $n = 1$, ya'ni kapital mablag' faqat bitta korxonaga berilgan holni ko'ramiz. Bunda

$$F_1(x) = Z_1(x)$$

bo'ladi. $0 \le x \le 200$ oraliqdagi har bir $x_{1k} = k\Delta$ uchun $F_1(k\Delta)$ qiymatlarni 2-jadvalga joylashtiramiz.

2-jadval

x_{1k}	$F_1(x_{1k})$
0	0
40	15
80	28
120	60
160	75
200	90

$n=2$ bo'lgan holni ko'ramiz. Bu holda olinadigan daromad

$$F_2(x)=\max_{\substack{0\le x_2\le x\\ 0\le x\le X_0}}\left[Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)\right]$$

funksional tenglama orqali topiladi. Bu funksiyaning qiymatlari quyidagicha hisoblanadi.

$0\le x\le 200$ oraliqdagi har bir x uchun $0\le x_2\le X_0$ topiladi va unga tegishli bo'lgan $Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)$ qiymat hisoblanadi. So'ngra

$$F_2(x)=\max_{\substack{0\le x_2\le x\\ 0\le x\le X_0}}\left[Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)\right]$$

topiladi 3-jadvalga joylashtiriladi.

Masalan, $x=0\Rightarrow x_2=0\Rightarrow F_2(x)=Z_2(x_2)+F_1(x-x_2)=0$;

$$x=40\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\Rightarrow F_2(x)=Z_2(0)+F_1(40)=15\\ x_2=40\Rightarrow F_2(x)=Z_2(40)+F_1(0)=14\end{cases}\Rightarrow F_2(x=40)=15.$$

$$x=80\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\Rightarrow F_2(x)=Z_2(0)+F_1(80)=28\\ x_2=40\Rightarrow F_2(x)=Z_2(40)+F_1(40)=29\Rightarrow F_2(x=80)=30.\\ x_2=80\Rightarrow F_2(x)=Z_2(80)+F_1(0)=30\end{cases}$$

va hokazo.

3-jadval

x \ x_2	0	40	80	120	160	200	$F_2(x)$	x_2^*
0	0						0	0
40	0+15	14+0					15	0
80	0+28	14+15	30+0				30	80
120	0+60	14+28	30+15	55+0			60	0
160	0+75	14+60	30+28	55+15	73+0		75	0
200	0+90	14+75	30+60	55+28	73+15	85+0	90	0

3-bosqichda $n=3$ bo'lgan holda 4-jadvalni hosil qilamiz.

4-jadval

x \ x_3	0	40	80	120	160	200	$F_3(x)$	x_3^*
0	0						0	0
40	0+15	17+0					17	40
80	0+30	17+15	33+0				33	80
120	0+60	17+30	33+15	58+0			60	0
160	0+74	17+60	33+30	58+15	73+0		77	40
200	0+90	17+74	33+60	58+30	73+15	92+0	93	80

4-bosqichda $n=4$ bo'lgan holda 5-jadvalni hosil qilamiz.

5-jadval

x \ x_3	0	40	80	120	160	200	$F_4(x)$	x_4^*
0	0						0	0
40	0+17	13+0					17	0
80	0+33	13+17	35+0				35	80
120	0+60	13+33	35+17	57+0			60	0
160	0+77	13+60	35+33	57+17	76+0		77	0
200	0+93	13+77	35+60	57+33	76+17	60+0	95	80

1-5 jadvallardan 6-jadvalni hosil qilamiz.

6-jadval

x \ x_i^*	x_1^*	$F_1(x)$	x_2^*	$F_2(x)$	x_3^*	$F_3(x)$	x_4^*	$F_4(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
40	40	15	0	15	40	17	0	17
80	80	28	80	30	80	33	80	35
120	120	60	0	60	0	60	0	60
160	160	75	0	75	40	77	0	77
200	200	90	0	90	80	93	80	95

Bu jadvaldan kapital mablag'ni optimal taqsimlash rejasini topamiz. 200 birlik mablag'ni 4ta korxonaga taqsimlash natijasida birlashma

$$\max_{i=\overline{1,4}} F_i(x=200)=\max(90,\ 90,\ 93,\ 95)=95$$

birlik daromad oladi. Bunda to'rtinchi korxonaga 80 birlik mablag' beriladi va ortib qolgan 120 birlik mablag' qolgan 3 ta korxonaga taqsimlanadi. Bundan birlashma

$$\max_{i=\overline{1,3}} F_i(x=120)=\max(60,60,60)=60$$

birlik daromad oladi. Bunda uchinchi korxonaga mablag' berilmaydi, (x_3^*=0). Demak, 120 birlik mablag' birinchi va ikkinchi korxonalarga taqsimlanadi. Lekin ikkinchi korxonaga ham mablag' berilmaydi (x_2^*=0). Shunday qilib, qolgan 120 birlik mablag' birinchi korxonaga beriladi. Bundan birlashma 60 birlik daromad oladi

$$x_1 = 120, \qquad F_1(x) = 60.$$

Shunday qilib, kapital mablag'lar taqsimlashning optimal rejasini topdik:

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (120;0;0;80).$$

Bu rejaga mos keluvchi umumiy daromad 35 + 60 = 95 birlikni tashkil qiladi. Bunda to'rtinchi korxona 35 birlik, birinchi korxona esa 60 birlik foyda keltiradi.

26-MAVZU. O'YINLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI. MATRISALI O'YIN

Tayanch so'z va iboralar: O'yin, konflikt holat, nol summali o'yin, matrisali o'yin, strategiya, optimal strategiya, chekli va cheksiz o'yin, to'lovlar va yutuqlar matrisasi, o'yinning quyi va yuqori bahosi, maximin va minimax strategiyalar, egar nuqta, o'yinning yechimi, aralash va sof stategiyalar.

REJA:

1. O'yinlar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar.
2. O'yinning quyi va yuqori bahosi, egar nuqtasi va optimal bahosi.

1. O'yinlar nazariyasi haqida dastlabki tushunchalar. Matematikaning konfliktli (mojaroli) holatlarini, ya'ni qatnashuvchilarning (o'ynovchilarning) manfaatlari qarama-qarshi yoki bir-biriga mos kelmaydigan holatlarni o'rganuvchi bo'limi – "**o'yinlar nazariyasi**" deb ataladi. O'yinlar nazariyasi – konfliktli holatda qatnashayotgan har bir "o'ynovchi"ga eng katta yutuqqa (yoki eng kichik yutqazishga) erishish uchun qilinadigan harakatlarning eng yaxshisini (optimalini) aniqlashga, yo'llanma berishga imkon beruvchi matematik nazariyadir.

Ko'pgina iqtisodiy jarayonlarga ham o'yinlar nazariyasi nuqtai-nazaridan qarash mumkin. Masalan, o'yin ishtirokchilari – bir xil turdagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar, ta'minotchilar va iste'molchilar bo'lib, o'yining yutug'i – ishlab chiqarish fondlarining samaradorligi, daromad mablag'lari, mahsulotning bahosi yoki tannarxi bo'lishi mumkin.

O'yinlar nazariyasining yaratilishi XX asrning buyik matematklaridan biri Jon von Nyuman bilan bog'liq. Uning Morgenshtern bilan hamkorlikda 1944 yil nashr etgan "**Iqtisodiy jarayonlar va o'yinlar nazariyasi**" monografiyasi o'yinlar nazariyasining rivojlanishida fundamental asos bo'ldi. Keyinchalik o'yinlar nazariyasi amaliy tatbiqlarga ega bo'lgan mustaqil yo'nalish sifatida rivojlandi.
Shuni ta'qidlash lozimki, o'yinlar nazariyasining usullari va xulosalari ko'p marta takrorlanadigan konfliktli holatlarga nisbatan ishlatiladi.

Amalda, konfliktli holatlarni matematik usullar yordamida tadqiq etishda, muhim bo'lmagan faktlarni tashlab yuborib, holatlarning sodda modeli tuziladi. Bunday model **o'yin** deb ataladi. O'yinda konfliktli holat ma'lum qoida asosida rivojlanadi. O'yinning mohiyati shundaki, har bir ishtirokchi (o'yinchi) o'ziga eng yaxshi natijani beruvchi yechimni tanlashga harakat qiladi.

O'yinda ikkita yoki undan ko'p ishtirokchilarning manfaatlari to'qnashishi mumkin. Shunga muofiq, u ikki o'ynovchili va ko'p o'ynovchili bo'lishi mumkin. Yutuqlarning xarakteriga ko'ra o'yinlar nol summali va nol summali bo'lmagan o'yinlarga bo'linadi. Nol summali o'yinda o'yinchilarning umumiy kapitali o'zgarmaydi, faqat o'yin davomida qayta taqsimlanadi va shu sababli yutuqlar yig'indisi nolga teng bo'ladi, ya'ni $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n = 0$, bu yerda ν_j $j-$ o'yinchining yutug'i.

Nol summali bo'lmagan o'yinlarda o'yinchilarning yutuqlari yig'indisi noldan farqli. Masalan, lotoreya o'yinida, o'yinchilardan to'plangan badalning bir qismi lotoreya tashkilotlariga beriladi. Shuning uchun $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n < 0$ bo'ladi. Biz bu yerda amaliy ahamiyati katta bo'lgan o'yinlar, ya'ni juft o'yinlarni qarash bilan cheklanamiz. Eng sodda va keng tarqalgan o'yinning ta'rifini beramiz.

1-ta'rif. Ikki ishtirokchidan iborat nol summali o'yinning **stratigik formasi** (X, Y, A) uchlik ko'rinishida beriladi.

Bu yerda $X-$I o'yinchining, $Y-$II o'yinchining strategiyalari, $A - X \times Y$ da aniqlangan funksiya bo'lib, $A(x,y),\ x \in X,\ y \in Y$ ko'rinishda yoziladi.

Bunda I o'yinchi $x \in X$ strategiyani, II o'yinchi esa $y \in Y$ strategiyani bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda tanlaydi. Ular tanlagan strategiya ma'lum bo'lgamda esa o'yin natijasiga ko'ra I o'yinchi II o'yinchidan oladigan yutig'i yoki II o'yinchi beradigan to'lovi $A(x,y)$ bilan aniqlanadi.

Masalan, ikki shaxmatchidan iborat o'yinda I shaxmatchi bilga barcha shaxmat programmalari uning strategiyasi hisoblanadi va hakozo.

Yana bir o'yinni ko'rib chiqamiz. U toq yoki juft deb ataladi. Bunda I va II o'yinchilar bir paytning o'zida $\{1\}, \{2\}$ raqamlardan birini aytadi. I o'yinchini toq deb nomlasak, u holda yuqorida I va II oyinchilar tomonidan aytilgan raqamlar yig'indisi toq bo'lgandagina shu yig'indigo teng miqdorda pul birligi yutadi. Aks holda esa I o'yinchi yutqazib II o'yinchi yutadi. Chunki II o'yinchining nomi juft.

Strategik formani aniqlaymiz: $X = \{1,2\}$; $Y\{1,2\}$; $A(x,y) -$I o'inchi uchun yutuq II o'yinchi uchun esa to'lov bo'lib, u quyidagi jadvalda ifodalangan.

$$\begin{array}{cc} & II(juft) \quad y \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ I(toq)\ \ x & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{pmatrix} -2 & +3 \\ +3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bu yerda ikki o'yinchi ham teng imkoniyatli.

Bu o'yinni I o'yinchi nuqtai nazaridan tahlil qilamiz. Faraz qilamiz, u ixtiyoriy ravishda $\{1\}$ raqamni vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida $\{2\}$ raqamni esa vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida tanlasin. U holda,

1. Agar II o'yinchi $\{1\}$ ni tanlasa, u holda I o'yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 2 birlikda pul yutqazadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 3 birlikda pul yutadi. U holda uning o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: $-2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{2}{5}=0$.

2. Agar II o'yinchi $\{2\}$ ni tanlasa, u holda I o'yinchi vaqtning $\frac{3}{5}$ qismida 3 birlikda pul yutadi, vaqtning $\frac{2}{5}$ qismida esa 4 birlikda pul yutqazadi. U holda uning o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: $3\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Shunday qilib, II o'yinchi qanday strategiya tanlashidan qat'iy nazar har bir o'yinning oxirida I o'yinchi $\frac{1}{5}$ birlikdagi pul yutiqqa ega bo'ladi.

Endi yuqoridagi umumiy holatda ko'rib chiqamiz. Vaqt taqsimoti proportsiyasini p bilan belgilaymiz va p ning qiymatini I o'yinchining har qanday holatdagi yutig'i bir xil bo'lgan holda topamiz. Ma'lumki I o'yinchining o'rtacha yutug'i quyidagicha aniqlanadi: 1. $-2p+3(1-p)$; 2. $3p-4(1-p)$. U holda I o'yinchining yutig'ini o'zgarmaganligini e'tiborga olsak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$-2p+3(1-p)=3p-4(1-p)\Rightarrow 12p=7\Rightarrow p=\frac{7}{12}.$$

Demak, agar vaqt taqsimotini $p=\frac{7}{12}$, $q=\frac{5}{12}$ kabi olsak I o'yinchining yutig'i har doim bir xil, ya'ni o'zgarmas bo'lib, quyidagiga teng bo'ladi:

$$-2\cdot\frac{7}{12}+3\cdot\frac{5}{12}=\frac{1}{12}.$$

Shunday qilib, I o'yinchining har bir holatda o'rtacha yutig'i $\frac{1}{12}$ bo'lishi uchun $\{1\}$ raqamni $\frac{7}{12}$ ehtimollik bilan, $\{2\}$ raqamni esa $\frac{5}{12}$ ehtimollik bilan tanlash kerak.

Sof va aralash strategiyalarni birindan farlash keraj bo'ladi. Masalan, yuqorida keltirilgan (X,Y,A) uchlikdagi X va Y strategiyalar alohida-alohida qaralganda sof strategiyalar hisoblanadi. Agarda sof atrategiyalar qandaydir proportsiyada qo'llanilsa, u holda biz aralash strategiyani hosil qilamiz. Shunday qilib, toq yoki juft o'yinidagi I o'yinchining optimal strategiyasi aralash strategiydir. Unda sof strategiyalar $\frac{7}{12}$ va $\frac{5}{12}$ nisbat bilan qo'llanilmoqda. Har qanday $x \in X$ strategiyani ham 1 ehtimollik bilan qo'llanilgan x sof strategiyaning aralash strategiyasi sifatida qarash mumkin.[1].

2. O'yinning quyi va yuqori bahosi, egar nuqtasi va optimal bahosi.

O'yinchining strategiyasi deb, o'yinchi mumkin bo'lgan har qanday holatda tanlaydigan rejasiga aytiladi.

Strategiyaning soniga qarab, o'yinlar chekli yoki cheksiz o'yinlarga bo'linadi.

Optimal strategiya deb, berilgan o'yinchiga, o'yin bir necha marta takrorlanganda eng katta mumkin bo'lgan o'rtacha yutuqni ta'minlovchi strategiyaga aytiladi.

Faraz qilamiz, A o'yinchi m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ strategiyalarga, B o'yinchi esa n ta $B_1, B_2, ..., B_n$ strategiyalarga ega bo'lsin. Agar A o'yinchi A_i strategiyani B o'yinchi B_j strategiyani tanlasin. U holda A o'yinchining (A_i, B_j) juftlikka mos keluvchi yutug'ini a_{ij} bilani belgilaymiz.

Matrisa satrlarini A_i strategiyalarga, ustunlarini B_j strategiyalarga mos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

keltirib $A-$o'yin matrisasini hosil qilamiz. Bu matrisa **to'lov matrisasi** yoki **yutuq matrisasi** deb ataladi.

O'yin matrisasini qurishning mohiyatini tushunib olish uchun quyidagi misolni ko'ramiz.

Ikki o'yinchining har biri 1 yoki 2 sonlardan birini tanlaydi va shu bilan bir paytda raqib qaysi sonni tanlaganini topishga harakat qiladi. Agar o'yinchilardan ikkalasi ham raqibining tanlagan sonini topsa yoki adashsa o'yin durang bo'ladi. Agar faqat bitta o'yinchi raqib tanlagan sonni topsa ikkinchisi esa raqib o'ylagan sonni topa olmasa, u holda birinchi o'yinchining yutiq' tanlangan ikki sonning yig'indisidan ibotar bo'lib ikkinchi o'yinchi esa shuncha yutqazadi.

(s, t) sonlar juftligini o'yinchining strategiyasi deb ataymiz. Bu yerda $s-$o'yinchi tanlagan son; $t-$o'yinchining nazarida raqib tanlagan son. Shuday qilib har bir o'yinchining 4 ta strategiyasi mavjud: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$. Bu o'yin haqidagi barcha ma'lumotlarni quyidagi matrisaga joylashtirish mumkin:

[1]Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. pp. 3-12.

		II			
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
	(1, 1)	0	2	-3	0
I	(1, 2)	-2	0	0	3
	(2, 1)	3	0	0	-4
	(2, 2)	0	-3	4	0

Matrisa elementlari I o'yinchining yutiqlarini bildiradi. Masalan, agar I o'yinchi (2, 2) strategiyani tanlaganda (I o'yinchi 2 sonni o'ylab II o'yinchi ham 2 sonni o'yladi deb faraz qilmoqda) II o'yinchi (2, 1) (II o'yinchi 2 sonni o'ylab I o'yinchini 1 sonni o'yladi deb faraz qilmoqda) strategiyani tanlasa, u holda I o'yinchining yutig'i 4 birlikka teng bo'ladi, chunki I o'yinchi II o'yinchi o'ylagan sonni, ya'ni 2 ni topgan II o'yinchi esa I o'yinchi o'ylagan sonni, ya'ni 2 ni topa olmagan. Agar I (1, 2) strategiyani tanlaganda II o'yinchi (1, 1) strategiyani tanlasa, u holda I o'yinchining yutig'i -2 birlikka teng bo'ladi.

Bu misol uchun o'yin matrisasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

O'yin tugashining mohiyati quyidagicha: I o'yinchi quyidagicha fikr yuritishi kerak: agar A_{i_1} strategiyani tanlasa, u holda II o'yinchini B_j strategiyasini shinday tanlashi mumkinki, natijada $a_{i_1 j_1} = \max\limits_{1\le i\le 4} \min\limits_{1\le j\le 4} a_{ij}$ munosabat bajarilishi kerak.

Optimal strategiyani bunday aniqlash minimax usuli deb ataladi. Bu usul bilan tanishib chiqamiz. Buning uchun

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

o'yin matrisasini qaraymiz. Bu matrisada quyidagicha tanlash ishlarini amalga oshiramiz:

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\begin{matrix} a_{31} & a_{52} & \dots & a_{kn} \end{matrix}}^{\max\limits_{1\le j\le m} a_{ij}} & \\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \left.\begin{matrix} a_{13} \\ a_{27} \\ \dots \\ a_{ms} \end{matrix}\right\} \min\limits_{1\le i\le n} a_{ij} \end{array}$$

Bu yerda har bir satr bo'yicha eng kichik sonlar tanlab olinib $\min\limits_{1\le j\le n} a_{ij}=\{a_{13},a_{27},...,a_{ms}\}$ hosil qilingan; har bir ustun bo'yicha eng katta sonlar tanlab olinib $\max\limits_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{13},a_{27},...,a_{ms}\}$ hosil qilingan.

Bizning misolimizda bu tanlashlar $\min\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{-3,-2,-4,-3\}$, $\max\limits_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{3,2,4,0\}$ ko'rinishda amalga oshirilgan.

Umuman olganda B o'yinchi B_{j_1} strategiyani A o'yinchining strategiyasini bilmagan holda tanlaydi. Shu sababli yuqoridagi tanlashlar bir-biriga bog'liq emas. Endi 2-marta tanlashni quyidagicha amalga oshiramiz:

$$\max_{1\le j\le n}\left\{\min_{1\le i\le m} a_{ij}=\{a_{31},a_{52},...,a_{kn}\}\right\}=\alpha$$

$$\min_{1\le i\le m}\left\{\max_{1\le i\le n} a_{ij}=\{a_{13},a_{27},...,a_{ms}\}\right\}=\beta$$

Biz qarayotgan misolimizda bu quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\max_{1\le i\le 4}\left\{\min_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{-3,-2,-4,-3\}\right\}=-2\Rightarrow\alpha=-2$$

$$\min_{1\le i\le 4}\left\{\max_{1\le i\le 4} a_{ij}=\{3,2,4,0\}\right\}=0\Rightarrow\beta=0$$

Demak, yuqoridagi fikrlash bo'yicha I o'yinchi $a_{21}=(1;2)$ stratrgiyani tanlaydi va u $\alpha=-2$ birlikdan ko'p yutqazmaydi.

Agar xuddi shuday fikrlashni II o'yinchiga nisbatan yuritsak II o'yinchida $\beta=0$ bo'lib o'yin durang bo'ladi.

Ammo A o'yin matrisasi ikki o'yinchiga ham ma'lum bolib, I o'yinchi faqat o'zi uchun emas, balki II o'yinchi uchun ham o'ylashi mumkin va aksincha. Natijada strategiya tanlash cheksiz davom etishi mumkun.

Bu savolga javob berish uchun quyidagi o'yin matrisasini ko'ramiz:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 2 & -3 & 6 \\ -10 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bu yerda

$$a_{i_1 j_1} = \max_{1\le i\le 4}\min_{1\le j\le 4} a_{ij} = \max\{-3,\, 4,\, -3,\, -10\} = 4,$$

ya'ni $i_1 = 2,\ j_1 = 2$;

$$a_{i_2 j_2} = \min_{1\le j\le 4}\max_{1\le i\le 4} a_{ij} = \max\{7,\, 4,\, 8,\, 7\} = 4,$$

ya'ni $i_2 = 2,\ j_2 = 2$.

Shuday qilib, $i = 2,\ j = 2$ juftlik ikki o'yinchi uchun ham optimal strategiya. Birinchi misolda har bir o'yinchi kamida -2 birlikda yutiq mavjud, ammo ular ko'proq yutiq olishga umid qilishadi.

Ikkinchi misolda esa ikki o'yinchi ham qanoatlantiradigan eng optimal strategiya topilgan.

Bu ikki holatni farqlash uchun quyidagi tushunchalarni ba'zi tushunchalar kiritamiz.

2-ta'rif. Matrisali o'yin uchun $\alpha = \max_{1\le j\le n}\left\{\min_{1\le i\le m} a_{ij} = \{a_{31}, a_{52}, ..., a_{kn}\}\right\}$ son o'yinning quyi qiymati, $\beta = \min_{1\le j\le m}\left\{\max_{1\le i\le n} a_{ij} = \{a_{31}, a_{52}, ..., a_{kn}\}\right\}$ son esa **o'yinning yuqori qiymati** deb ataladi.

1-teorema. Matrisali o'yinning quyi va yuqori qiymatlari uchun quyidagi munosabat o'rinli: $\alpha \le \beta$.

3-ta'rif. Agar matrisali o'yinda $\alpha = \beta$ bo'lsa, u holda o'yin **egar nuqtaga ega** deyiladi.

Bu yerda $\alpha = \beta = V$ **o'yinning bahosi** deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $\alpha = \min_{1\le j\le n} a_{i_0 j} = \max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij}$ bo'lsa, u holda A o'yinchinning i_0 **strategiyasi maksimin** deb ataladi.

5-ta'rif. Agar $\beta = \min_{1\le i\le m} a_{ij_0} = \max_{1\le j\le n}\min_{1\le i\le m} a_{ij}$ bo'lsa, u holda B o'yinchinning j_0 strategiyasi **minimaks** deb ataladi.

Bu ikki strategiya **garantiyalovchi strategiyalar** deb ataladi.

2-teorema. Agar garantiyalovchi strategiyalarning ixtiyoriy $(i_0,\, j_0)$ juftliklari uchun

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$$

tengsizlik bajarilsagina matrisali o'yin egar nuqtaga ega bo'ladi. Demak, agar to'lov matrisasi egar nuqtaga ega bo'lsa, u holda o'yinning yechimi ma'lum va har bir o'yinchi o'zining optimal strategiyasini qo'llaydi.

Tasodifiy tanlash yo'li bilan aniqlangan strategiyalar **aralash strategiya** deb ataladi.

$m \times n$ tartibli matrisali o'yinda, $A-$o'yinchining strategiyasi $X(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_m)$ vektor orqali aniqlanadi. Bunda A o'yinchi o'zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimollik bilan qo'llaydi, deb hisoblanadi. $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor komponentlari uchun

$$x_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

shart bajariladi.

Xuddi shuningdek, B o'yinchi uchun $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektor aniqlanadi:

$$y_j \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

x_i va y_j ehtimolliklari noldan farqli bo'lgan strategiyalar **aktiv strategiyalar** deb ataladi.

A o'yinchining aralash strategiyalarni qo'llagandagi yutug'i sifatida yutuqlarning matematik kutilishi olinadi, ya'ni

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

3-teorema. Aralash strategiyalarda har bir chekli matrisali o'yin egar nuqtaga ega.

A o'yinchi tomonidan $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ optimal strategiyaning qo'llanishi, unga B o'yinchining har qanday harakatida ham o'yinning bahosi V dan kam bo'lmagan yutuqni ta'minlash kerak. Shuning uchun quyidagi munosabat bajarilishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq V, \qquad j = \overline{1,n} \tag{1}$$

Xuddi shunga o'xshash, B o'ynovchi uchun $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ optimal strategiyasi, A o'ynovchining har qanday strategiyasida V dan oshmaydigan yutqazishni ta'minlashi zarur, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V, \qquad i = \overline{1,m} \tag{2}$$

munosabat bajarilishi kerak.

Eng sodda matrisali o'yinda yutuqlar matrisasi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

bo'lib, matrisa egar nuqtaga ega bo'lmasa, $X = (x_1, x_2)$ va $Y = (y_1, y_2)$ aralash strategiyalarni va V – o'yinning bahosini topish uchun

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

Biz quyida minimax teoremasini keltirish uchun ba'zi tushunchalarni kiritib olamiz. Agar X va Y strategiyalar chekli bo'lsa, u holda nol summali (X, Y, A) o'yin chekli bo'ladi.

4-teorema. Har qanday nol summali chekli o'yin uchun quyidagilar o'rinli:

1. Bunda o'yin qiymati deb ataluvchi chekli V son mavjud;
2. I o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda I ning o'rtacha yutug'i V ning qiymati II o'yinchining harakatiga bog'liq emas;
3. II o'yinchi uchun shunday aralash strategiya mavjudki, unda uning o'rtacha to'lovi V ning qiymati I o'yinchining harakatiga bog'liq emas.

Bu yerda, agar $V > 0$ bo'lsa, demak, o'yin foydali; agar $V < 0$ bo'lsa, demak, o'yin foydasiz; agar $V = 0$ bo'lsa, demak, o'yin durrang deyiladi[2].

Adabiyotlar ro'yxati

1. Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. 420 p.

[2] Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. pp. 3-12.

27-MAVZU. MATRISALI O’YINNI CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASIGA KELTIRISH. TABIAT BILAN O’YIN

Tayanch so’z va iboralar: Matrisa, chiziqli programmalashtirish, strategiya, optimal strategiya, tabiat bilan o’yin, yechim qabul qiluvchi shaxs (YQQSh), yechim qabul qilish mezonlari.

REJA:

1. 2-tartibli matrisali o’yinning egar nuqtasini topish.

2. Matrisali o’yinning egar nuqtasini topishda chiziqli programmalashtirish usuli.

1. 2-tartibli matrisali o’yinning egar nuqtasini topish. (2×2) o’lchamli

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

o’yin matrisasini qaraymiz. Har bir o’yinchi uchun hech bo’lmaganda bitta optimal strategiya va V o’yin qiymatini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz:

1. Egar nuqtani topamiz;
2. Agar egar nuqta bo’lmasa, u holda optimal strategiyani topib, o’yinning yechimini aniqlaymiz.

Faraz qilamiz, o’yinning egar nuqtasi mavjud bo’lmasin. Agar $a\geq b$ bo’lsa, u holda $b<c$ bo’ladi. Aks holda b egar nuqta bo’lib qoladi. $b<c$ bo’lgani uchun $c>d$ aks holda c egar nuqta bo’lib qoladi. Demak, $d<a$, $a>b$. Boshqa tomondan agar $a\geq b$ bo’lsa, u holda $a>b<c>d<a$. Agar $a\leq b$ bo’lsa, u holda $a<b>c<d<a$. Bu shuni ko’rsatadiki:

Agar egar nuqta mavjud bo’lmasa, u holda $a>b,\ b<c,\ c>d$ va $d<a$ yoki $a<b, b>c,\ c<d$ va $d>a$.

Agar I o’yinchi $(p,1-p)$ aralash strategiyani tanlasin. U holda

$$ap+d(1-p)=bp+c(1-p)\Rightarrow p=\frac{c-d}{(a-b)+(c-d)},\ 0<p<1,$$

Bundan foydalanib I o’yinchining o’rtacha yutug’ini topish mumkin:

$$V=ap+d(1-p)=\frac{ac-bd}{a-b+c-d}.$$

II o’yinchining strategiyasi $q=\dfrac{c-b}{a-b+c-d},\ \ 0<q<1.$

1-misol. $A=\begin{pmatrix}0 & -10\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisa uchun optimal strategiyani toping. Bu yerda

$$p=\frac{2-1}{0+10+2-1}=\frac{1}{11},\;\; q=\frac{2+10}{0+10+2-1}=\frac{12}{11}.$$

Ma'lumki, $0<q<1$ bo'lishi kerak, ammo bu misolda yuqoridagi tengsizlik bajarilmayapdi. Chunki biz bu yerda egar nuqtani tekshirmadik. Bu matrisaning egar nuqtasi mavjud bo'lib, u $V=1$. Bu yerda $p=0, q=1$.

Ba'zi hollarda yuqori o'lchamli martitsani kichraytirib (2×2) o'lchamga keltiriladi so'ngra uning egar nuqtasi yoki optimal strategiyasi topiladi. Bu jarayon quyidagicha amalga oshiriladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matrisada barcha j lar uchun $a_{ij}\geq a_{kj}$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $k-$satr $i-$satrga **dominant** deyiladi. Xuddi shuda usulda i ustunga dominant k ustunni ham aniqlash mumkin $(a_{ij}\leq a_{ik})$.

Dominant ustun yoki dominant satrni matrisadan o'chirish mumkin. Bu jarayonni takrorlab matrisani (2×2) o'lchamli matrisaga ketirib olish mumkin. Masalan, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ o'yin matrisasining optimal strategiyasini topamiz. Bu matrisada 3-ustun 2-ustunga dominant. U holda 3-ustunni o'chirib matrisani quyidagicha yozib olamish mumkin: $A'=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Yangi hosil bo'lgan matrisada esa 1-satr 3-satrga nisbatan dominant. U holda boshlang'ich matrisa quyidagi ko'rinishga keladi: $A''=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$. Bu matrisa egar nuqtaga ega bo'lmaganligi sababli unga mos o'yinning optimal strategiyasini va qiymatini aniqlaymiz: $p=\frac{3}{4}, q=\frac{1}{4}, V=\frac{7}{4}$. Shunday qilib boshlang'ich o'yinda I o'yinchining optimal strategiyasi teng bo'ladi: $\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$; II o'yinchi uchun esa $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$.

Matrisaning satriga (ustuni) boshqa satrlarning (ustunlar) ehtimollar orqali kombinatsiyasi dominant bo'lsa ham bu satrni (ustun) o'chirish mumkin.

Bunda satr uchun $pa_{i_1 j}+(1-p)a_{i_2 k}\geq a_{kj}$, $0<p<1$; ustun uchun $pa_{ij_1}+(1-p)a_{ij_2}\leq a_{ik}$, $0<p<1$ tensizliklardan foydalaniladi.

2-misol. $A=\begin{pmatrix}0&4&6\\5&7&4\\9&6&3\end{pmatrix}$ o'yin matrisasini qaraymiz. $p=\frac{1}{2}$ ehtimollik orqali kombinatsiyasidan $\begin{pmatrix}0,5\cdot0+0,5\cdot6\\0,5\cdot5+0,5\cdot4\\0,5\cdot9+0,5\cdot3\end{pmatrix}>\begin{pmatrix}4\\7\\6\end{pmatrix}$ tensizlik hosil qilamiz va 2-ustunni tashlab yuboramiz. Yangi hosil bo'lgan $A'=\begin{pmatrix}0&6\\5&4\\9&3\end{pmatrix}$ matrisadan $p=\frac{1}{3},\ 1-p=\frac{2}{3}$ ehtimollar yordamida 2-satrni tashlab yuboramiz va $A''=\begin{pmatrix}0&6\\9&3\end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Uning qiymati $V=\frac{9}{2}$.[1]

2. Matrisali o'yinni chiziqli programmalashtirish masalasiga keltirish.

Egar nuqtaga ega bo'lmagan matrisali o'yinlarda $\alpha<\beta$ bo'ladi. Minimaks strategiyalarni qo'llash har bir o'ynovchiga α dan oshmaydigan yutuqni va β dan kam bo'lmagan yutqazishni beradi. Bunday hollarda o'yinchilar bitta emas, balki bir nechta strategiyalarni qo'llaydilar. Strategiyani tanlash tasodifan amalga oshiriladi.

Tasodifiy tanlash yo'li bilan aniqlangan strategiyalar **aralash strategiya** deb ataladi.

$m\times n$ tartibli matrisali o'yinda, A o'yinchining strategiyasi $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor orqali aniqlanadi. Bunda A o'yinchi o'zining A_i sof strategiyasini x_i ehtimollik bilan qo'llaydi, deb hisoblanadi. $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektor komponentlari uchun

$$x_i\geq 0,\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i=1$$

shart bajariladi.

Xuddi shuningdek, B o'yinchi uchun $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ vektor aniqlanadi:

$$y_j\geq 0,\qquad \sum_{i=1}^{n} y_i=1$$

x_i va y_j ehtimolliklari noldan farqli bo'lgan strategiyalar aktiv strategiyalar deb ataladi.

A o'yinchining aralash strategiyalarni qo'llagandagi yutug'i sifatida yutuqlarning matematik kutilishi olinadi, ya'ni

[1]Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. pp. 3-12.

$$V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

1-teorema. Aralash strategiyalarda har bir chekli matrisali o'yin egar nuqtaga ega.

A o'yinchi tomonidan $X(x_1, x_2, ..., x_m)$ optimal strategiyaning qo'llanishi, unga B o'yinchining har qanday harakatida ham o'yinning bahosi V dan kam bo'lmagan yutuqni ta'minlash kerak. Shuning uchun quyidagi munosabat bajarilishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* a_{ij} \geq V, \qquad j = \overline{1,n} \tag{1}$$

Xuddi shunga o'hshash, B o'ynovchi uchun $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*)$ optimal strategiyasi, A o'ynovchining har qanday strategiyasida V dan oshmaydigan yutqazishni ta'minlashi zarur, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \leq V, \qquad i = \overline{1,m} \tag{2}$$

munosabat bajarilishi kerak.

Eng sodda matrisali o'yinda yutuqlar matrisasi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ bo'lib, matrisa egar nuqtaga ega bo'lmasa, $X = (x_1, x_2)$ va $Y = (y_1, y_2)$ aralash strategiyalarni va V o'yinning bahosini topish uchun

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}};$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

formulalardan foydalaniladi.

$m \times n$ tartibli matrisa bilan berilgan quyidagi o'yinni qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrisa egar nuqtaga ega emas, deb hisoblaylik va shuning uchun o'yinning yechimini $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – aralash strategiyalar shaklida izlaymiz. A o'yinchining optimal strategiyasida (1) munosabat va B o'yinchining optimal strategiyasida (2) munosabat bajariladi. Shuning uchun, quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi (A o'ynovchining) optimal strategiyasini topish masalasini qo'yish mumkin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq V, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq V, \end{cases} \tag{3}$$

O'yinning bahosi bo'lgan V kattalik noma'lum, lekin doim $V > 0$ deb hisoblash mumkin. Bunga, agar A matrisa elementlariga bir xil musbat son qo'shish sharti bilan erishish mumkin. (3) sistemani hamma cheklamalarini V ga bo'lib, quyidagi sistemani

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases} \tag{4}$$

hosil qilamiz.

Bunda $t_1 = x_1 / V,\ t_2 = x_2 / V, \ldots, t_m = x_m / V$. $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$ shartdan

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_m = 1 / V \tag{5}$$

tenglik kelib chiqadi.

O'yining yechimi V ning qiymatini maksimallashtirish kerak. Demak, $Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m$ funksiya minimal qiymat olishi kerak. Shunday qilib, quyidagi ChPMsi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases}$$
$$t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, \ldots, t_m \geq 0, \tag{6}$$
$$Z = t_1 + t_2 + \ldots + t_m \to \min.$$

Bu masalani yechib, t_i qiymatlarni va $1/V$ kattalik topiladi, hamda undan foydalanib $x_i = Vt_i$ qiymatlar topiladi. B o'ynovchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarni yozib olamiz:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq V, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq V, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq V, \end{cases} \tag{7}$$

yoki tengsizliklarni V ga bo'lib,

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + ... + a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{2n}u_n \le 1, \\ ...., \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + ... + a_{mn}u_n \le 1, \end{cases} \tag{8}$$

sistemani hosil qilamiz. $u_1, u_2, ..., u_n$ – noma'lumni shunday olish kerakki, bunda (8) shart bajarilib,

$$W = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1/V$$

funksiya maksimum qiymatga erishsin. Shunday qilib, matrisali o'yinning yechimini topish simmetrik bo'lgan ikkilangan ikkita ChPMsiga keltiriladi. Bu ikkilangan masalalardan birini yechib, ikkinchisining yechimini undan foydalanib hosil qilish mumkin.

3-misol. Quyidagi matrisa bilan berilgan o'yinning yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Yechish: O'yinning optimal strategiyasini topish uchun quyidagi ChPMni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 4t_1 + 3t_2 + 2t_3 \ge 1, \\ 3t_1 + 4t_2 + 5t_3 \ge 1, \\ 4t_1 + 6t_2 + t_3 \ge 1, \\ 2t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0,$$

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 \to \min.$$

B o'ynovchining optimal strategiyasini topishning ikkilangan masalasi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} 4u_1 + 3u_2 + 4u_3 + 2u_4 \le 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 6u_3 + 5u_4 \le 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + u_3 + 3u_4 \le 1, \end{cases}$$

$$u_i \ge 0, \qquad (i = \overline{1,4})$$

$$W = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \to \max.$$

Bu ikkilangan masala yechimi $U = \left(\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14}\right)$, $W_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{2}{7}$ bo'ladi. Demak, $V = \frac{7}{2}$, $Y = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$. Dastlabki masalaning yechimi $T = \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, 0\right)$ va $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ bo'ladi.

Bu o'yinda tabiat va YQQSh qatnashadi. Tabiatda $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlar mavjud bo'lib, ularga qarshi YQQSh da m ta $A_1, A_2, ..., A_m$ tadbirlar mavjud. Tabiatga qarshi o'yinni quyidagi matrisa ko'rinishida ifodalash mumkin:

B_j / A_i	T_1	T_2	$\dots$	T_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

Bu yerda a_{ij} tabiatning T_j holatida YQQSh A_i tadbirni amalga oshirganda uning ko'radigan foydasi yoki zararini ko'rsatadi. Agar a_{ij} foyda (yutuq) bo'lsa, bu matrisa "yutuqlar matrisasi" deyiladi. a_{ij} zarar bo'lganda eas bu matrisa "to'lovlar matrisasi" deyiladi.

Bu matrisa asosida YQQSh o'zining foydasini (zararini) maksimallashtiruvchi (minimallashtiruvchi) yo'lni (sof strategiyani) tanlaydi.

Bunday strategiyani tanlash uchun minimax, Vald, Laplas, Sevidj va Gurvis mezonlaridan foydalanish mumkin. Bu mezonlar bilan tanishamiz.

Laplas mezoni. Bu mezonda tabiatning barcha $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari teng ehtimollik bilan ro'y beradi degan fikr asos qilib olingan. Shu sababli tabiatning $T_1, T_2, ..., T_n$ holatlari $p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ehtimollik bilan ro'y beradi. U holda agar YQQSh A_1 yo'lni tanlasa, uning yutug'i,

$$Q_1 = \frac{1}{n}a_{11} + \frac{1}{n}a_{12} + ... + \frac{1}{n}a_{1n}, \text{ yoki } Q_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar YQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning yutug'i, $Q_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{2j}$ va hokazo. Agar YQQSh A_m yo'lni tanlasa, uning yutug'i, $Q_m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{mj}$.

YQQSh maximum yutuq beruvchi yo'lni, ya'ni

$$\max\left[\frac{1}{n}\sum_j a_{1j}, \frac{1}{n}\sum_j a_{2j}, ..., \frac{1}{n}\sum_j a_{nj}\right] = \max_i \frac{1}{n}\sum_j a_{ij},$$

yo'lni tanlaydi.

4-misol. Quyidagi tabiatga qarshi uyinning optimal yechimini toping.

$A_i \backslash B_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$
A_1	7	14	14	24	$0,25 \cdot (7+14+14+24) = 14,75$
A_2	20	16	14	22	$0,25 \cdot (20+16+14+22) = 18$
A_3	9	8	10	23	$0,25 \cdot (9+8+10+23) = 12,5$
A_4	18	26	18	14	$0,25 \cdot (18+26+18+14) = 19$
p_j	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\max\limits_i \frac{1}{4}(a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{in}) = 19$

Yechish: Laplas mezoniga ko'ra YQQSh A_4 strategiyani tanlasa, uning yutug'i eng katta, ya'ni 19 ga teng bo'ladi.

Bayes mezoni. Bu mezonda tabiatning har bir T_j holati ma'lum bir q_j ehtimollik bilan ro'y berishi aniqlangan bo'ladi. Bu holda YQQSh o'z yutug'ini maksimal qiluvchi yo'lni, ya'ni $\max\limits_i \sum\limits_j a_{ij} q_i$ beruvchi yo'lni tanlaydi.

5-misol. Quyidagi jadval ko'rinishida berilgan o'yinning yechimini Bayes mezoni yordamida toping.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n$
A_1	2	3	4	7	4,2
A_2	3	6	5	4	4,8
A_3	5	8	7	3	6,2
q_j	0,1	0,2	0,5	0,2	$\max_i (a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + \ldots + a_{in}q_n) = 6,2$

Yechish: Bu misolda optimal strategiya A_3. Bu yo'lni tanlaganda YQQSh 6,2 yutuqqa ega bo'ladi.

Vald mezoni. Bu mezon o'yinlar nazariyasidagi maximin-minimax usuliga o'xshaydi. Agar a_{ij} yutuq bo'lsa, u holda YQQSh $\max\limits_i (\min\limits_j a_{ij})$ shartni ta'minlovchi yo'lni tanlaydi.

a_{ij} zarar bo'lsa, u $\min\limits_i (\max\limits_j a_{ij})$ ahartni ta'minlovchi A_i yo'lni tanlaydi.

6-misol. (a_{ij} zarar). Quyidagi jadvalda berilgan o'yinni Vald mezoni bilan yeching.

Yechish:

$$\min_j (\max_i a_{ij}) = \min(24,\ 22,\ 23,\ 26) = 22.$$

Demak, optimal strategiya A_2 va unga mos keluvchi yutug'i 22 bo'ladi.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3	T_4	$\max_j (a_{ij})$
A_1	7	11	14	24	24
A_2	20	16	14	22	22
A_3	9	8	10	23	23
A_4	18	26	18	14	26
					$\min_i \{ \max_j (a_{ij}) \} = 22$

Sevidj mezoni. Sevidj mezoni ham minimax prinsipiga asoslangan. Faqat bunda (a_{ij}) – to'lovlar yoki yutug'lar matrisasi o'rniga tavakkalchilik matrisasi deb ataluvchi (r_{ij}) matrisa ishlatiladi. Bu matrisa elementlari quyidagicha topiladi:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} = \beta_j - a_{ij},\ \ agar\ \ a_{ij} -\ yutug'\ bo'lsa, \qquad (2)$$

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij} = a_{ij} - \alpha_i,\ \ agar\ \ a_{ij} -\ yutkazuv\ bo'lsa. \qquad (3)$$

Bu yerda $\beta_i - a_{ij}$ tabiatning T_j holatidagi YQQShning maksimal yutug'i, (minimal yutkazuvi).

r_{ij} YQQSh "tabiat"ning T_j holatida to'la chora ko'rmagani oqibatida tavakkalchilikdan ko'rgan zarari yoki uning "afsuslanishi" sonini bildiradi.

7-misol. Quyidagi o'yinni Sevidj mezoni bilan yeching.

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$\max_j (a_{ij})$
A_1	110000	900	110000
A_2	100000	100000	100000
			$\min_i \{ \max_j (a_{ij}) \} = 100000$

Bu o'yinda YQQSh A_2 yo'lni tanlasa, uning minimal yutqazuvi 100000 bo'ladi. Lekin bu yerda tabiatning T_1 holati ham, T_2 holati ham bo'lishi mumkin.

Tabiatning aniq holati haqida tasavvurga ega bo'lish uchun tavakkalchilik matrisasini tuzamiz:

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	$\max\limits_j(r_{ij})$
A_1	10000	0	10000
A_2	0	99100	99100
			$\min\limits_i\left\{\max\limits_j(r_{ij})\right\} = 10000$

Demak, optimal strategiya A_1 ekan.

Gurvis mezoni. Bu mezon yasama mezondan iborat bo'lib, unga asosan a_{ij} miqdor daromadni bildirganda optimal strategiya sifatida quyidagi shartni qanoatlantiruvchi strategiya tanlanadi:

$$\max_i\left[\alpha\max_j a_{ij} + (1-\alpha)\min_j a_{ij}\right] \qquad \alpha\in[0,1]$$

a_{ij} – yutqazuvni bildirganda esa,

$$\min_i\left[\alpha\min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}\right] \qquad \alpha\in[0,1]$$

natijani ta'minlovchi A strategiyani tanlaydi.

Bu yerda α – yechim qabul qilish jarayonini sub'yektiv baholovchi parametr. Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, vaziyat og'ir va uni to'g'irlash uchun choralar ko'rish kerakligi talab qilinadi. $\alpha = 0$ da vaziyat yaxshi (optimal) hech qanday chora ko'rmasa ham bo'ladi deb faraz qilinadi. α ni [0;1] oraliqdagi qiymati optimistik yoki pessimistik nazarga qarab belgilanadi.

8-misol. Tabiat bilan bo'lgan o'yin quyidagi to'lovlar matrisasi bilan berilgan bo'lsin. $\alpha = 0,4$

$A_i \backslash T_j$	T_1	T_2	T_3
A_1	71	24	23
A_2	24	75	23
A_3	70	16	20
A_4	16	27	13

Bu o'yinga Gurvis mezonini qo'llab optimal strategiyani topamiz. Buning uchun quyidagi ko'rinishdagi jadval chizamiz va optimal strategiyani yuqoridagi shart bo'yicha tekshiramiz:

$$\gamma = \min_i \left[\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	$\min\limits_j (a_{ij})$	$\max\limits_j (a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	51,8
A_2	24	75	23	23	75	54,2
A_3	70	16	20	16	70	48,4
A_4	16	27	13	13	27	21,4
						$\min\limits_i \gamma = 21{,}4$

Demak, a_{ij} – yutqazuv bo'lganda optimal strategiya A_4 dan iborat ekan. Agar a_{ij}– daromad bo'lsa, u holda yechim quyidagi ko'rinishda topiladi:

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	$\min\limits_j (a_{ij})$	$\max\limits_j (a_{ij})$	γ
A_1	71	24	23	23	71	42,2
A_2	24	75	23	23	75	43,2
A_3	70	16	20	16	70	37,6
A_4	16	27	13	13	27	18,6
Optimal strategiya A_2						$\min\limits_i \gamma = 43{,}2$

9-misol. Savdo korxonasida 500 birlik mavsumiy mahsulot sotilmay qolgan bo'lsin. Bu mahsulotning oldingi narxi 20 birlikni tashkil etgan bo'lsin. Endi savdo korxonasi oldida mahsulotning narxini tushirish masalasi turibdi. Mahsulot narxini necha foizga tushirganda uning ko'radigan zarari minimal bo'ladi?

Savdo korxonasi mahsulot narxini 20% (A_1 yo'l), 30% (A_2 yo'l), 40% (A_3 yo'l), 50% (A_4 yo'l) tushirishga mo'ljallaydi. Bu yo'llarni YQQShning strategiyalari deb qaraymiz. "Tabiat"ning ikkita yo'li bor:

1) Talabning kam egiluvchan bo'lishligi (T_1 yo'l);

2) talabning ko'p egiluvchanligi (T_2 yo'l).

Ana shularni nazarga olib quyidagi jadvallarni tuzamiz:

YQQSh strategiya	Narxining tushishi (%)	Eski bahosi	Yangi bahosi	Sotiladigan tovar miqdori	Ko'riladigan zarar
A_1	20	20	16	100	4400
A_2	30	20	14	150	3900
A_3	40	20	12	220	3360
A_4	50	20	10	230	3700
	4400=500·12-16·100 3360=500·12-12·220			3900=500·12-14·150 3700=500·12-10·230	

Bu yerda bir birlik mahsulotni savdo korxonasiga keltirish uchun sarf qilinadigan harajat 12 birlik, deb qabul qilingan.

Xuddi shuningdek, jadval talab egiluvchanligi kuchli bo'lgan hol uchun tuziladi.

YQQSh stratgiya	Narxining tushishi (%)	Eski bahosi	Yangi bahosi	Sotiladigan tovar miqdori	Ko'riladigan zarar
A_1	20	20	16	150	3600
A_2	30	20	14	350	1100
A_3	40	20	12	400	1200
A_4	50	20	10	450	1500

I va II jadvaldan foydalanib to'lovlar matrisasini tuzamiz va yuqoridagi usullarni qo'llab yechamiz:

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max\limits_i(a_{ij})$
A_1	4400	3600	4400
A_2	3900	1100	3900
A_3	3360	1200	3360
A_4	3700	1500	3700
			$\min\limits_i \max\limits_j a_{ij} = 3360$

Demak, savdo korxonasi mahsulot narxini 40% ga tushirganda zarar minimal bo'ladi, ya'ni 3360 ga teng bo'ladi.

Masalani Laplas mezoniga asosan yechamiz.

A_i \ T_j	T_1	T_2	$a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n$
A_1	4400	3600	4000
A_2	3900	1100	2500
A_3	3360	1200	2280
A_4	3700	1500	2600
Q	0,5	0,5	$\min_i \left(a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 + ... + a_{in}q_n \right) = 2280$

Bu mezon bo'yicha ham narx 40% tushirilsa zarar 2280 bo'ladi.

Sevidj mezonini qo'llash uchun (r_{ij}) matrisa tuzamiz va optimal strategiyani topamiz.

A_i \ T_j	T_1	T_2	$\max_j(a_{ij})$
A_1	1100	2500	2500
A_2	600	0	600
A_3	0	100	100
A_4	400	400	400
			$\min_i \max_j r_{ij} = 100$

Bu mezonga ko'ra ham narx 40% ga tushirilishi ma'qul.

Adabiyotlar ro'yxati

1. Brian Weatherson. Lecture Notes on Game theory. Oxford University Press. 2011. 420 p.

AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

19-MAVZU. TRANSPORT MASALASI

1-masala. Quyidagi transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini "shimoliy-g'arb burchak" usuli bilan toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Talab hajmi	150	120	80	50	

Yechish: Masalaning shartlarini quyidagi hisoblash matrisasi ko'rinishda yozamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
170	5	8	12	7

Bu yerda a_i-ta'minotchilardagi mahsulot zahirasini, b_j-iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabini bildiradi.

Shimoliy-g'arbdagi (1;1) katakka $x_{11} = \min(100;150) = 100$ ni joylashtiramiz va 1-qatorni o'chiramiz hamda b_1 ni $b_1' = 150 - 100 = 50$ ga almashtiramiz. So'ngra (2;1) katakka $x_{21} = \min(130,50) = 50$ ni joylashtiramiz. Bu holda 1-ustun o'chiriladi va 2-qatordagi a_2 ni $a_2' = 130 - 50 = 80$ ga almashtiramiz. Keyin (2;2) katakka o'tib $x_{22} = \min(80,120) = 80$ ni yozamiz. Shunday yo'l bilan (3;2) katakka $x_{32} = \min(170,40) = 40$ ni, (3;3) katakka $\min(130,80) = 80$ ni va (3;4) katakka $\min(50,50) = 50$ ni yozamiz. Natijada rejalar matrisasini hosil qilamiz:

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3 100	5	7	11
130	1 50	4 80	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

topilgan boshlang'ich bazis yechim quyidagidan iborat:

$$X=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0 & 0\\ 50 & 80 & 0 & 0\\ 0 & 40 & 80 & 50\end{pmatrix}.$$

Tuzilgan rejaga mos keluvchi harajatni hisoblaymiz.

$$F(X)=100\cdot3+50\cdot1+80\cdot4+40\cdot8+80\cdot12+50\cdot7=2300.$$

2-masala. Yuqorida berilgan transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini "minimal harajatlar" usuli bilan toping.

Yechish: Masalaning shartlarini quyidagi hisoblash matrisasi ko'rinishda yozamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3	5	7	11
130	1	4	6	2
170	5	8	12	7

So'ngra $\min\limits_{i,j} c_{ij}=c_{21}=1$ ni topib (2;1) katakka $x_{21}=\min(130,150)=130$ ni yozamiz. 2-ta'minotchida mahsulot qolmagani uchun ikkinchi qatorni o'chiramiz, b_1 ning qiymatini esa $b_1'=150-130=20$ ga almashtiramiz. Ikkinchi qadamda qolgan harajatlar ichida eng kichigini topamiz:

$$\min_{i,j} c_{ij}=c_{11}=3$$

bo'lgani uchun (1;1) katakka $x_{11}=\min(20,100)=20$ ni yozamiz. Bu holda birinchi ustun ham o'chiriladi va a_1 ning qiymati $a_1'=100-20=80$ ga almashadi. Shunday yo'l bilan 3-qadamga (1;2) katakka $x_{12}=80$ ni, 4-qadamda (3;4) katakka $x_{34}=50$ ni, 5-qadamda (3;2) katakka $x_{32}=40$ ni va 6-qadamda (3;3) katakka $x_{33}=80$ ni yozamiz. Natijada quyidagi rejalar matrisasiga ega bo'lamiz.

a_i \ b_j	150	120	80	50
100	3 20	5 80	7	11
130	1 130	4	6	2
170	5	8 40	12 80	7 50

Bu holda bazis yechim quyidagicha bo'ladi.

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}.$$

Bunda ham band katakchalar soni $n+m-1=3+4-1=6$ ga teng bo'ldi, ya'ni tuzilgan boshlang'ich bazis yechim xosmas bazis yechim bo'ladi. Bunday yechim tuzilayotganda yo'l harajati inobatga olinadi. Shu sababdan tuzilgan rejaga mos keluvchi transport harajati ko'pincha "shimoliy-g'arb burchak" usuldagi harajatdan kichik va optimal yechimga yaqinroq bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$F(X)=20\cdot3+80\cdot5+130\cdot1+40\cdot8+80\cdot12+50\cdot7=2200.$$

Boshlang'ich bazis yechim qurishning yana boshqa usullari ham mavjud.

Masalan, "ustundagi minimal harajatlar usuli", "qatordagi minimal harajatlar" usuli va boshqalar.

Bunday usullar yordamida transport masalasining boshlang'ich bazis yechimini topish mumkin. Odatda optimal yechimga yaqin bo'lgan boshlanqich bazis yechimni topishga yordam beruvchi usullardan foydalangan ma'qul.

Tuzilgan boshlang'ich bazis yechimni optimal yechimga aylantirish uchun potensiallar usuli deb ataluvchi algoritmdan foydalanish mumkin.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalalarning matematik modelini tuzing hamda "shimoliy-g'arb burchak" usuli va "minimal harajatlar" usulidan foydalanib boshlang'ich bazis yechimlarini toping.

1.

Ta'minotchilar	**Iste'molchilar**				**Zahira hajmi**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
Talab hajmi	70	40	70	45	

2.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**			
	75	80	60	85
100	6	7	3	5
150	1	2	5	6
50	8	10	20	1

3.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	120	160	120
90	9	8	10
85	11	12	8
75	7	10	13
150	12	7	10

4.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	400	380	120
330	6	5	3
270	5	9	8
300	8	3	7

5.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	300	300	220
270	5	3	2
290	1	6	7
260	3	1	3

6.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	450	450	450
500	7	9	3
370	3	7	9
480	9	3	5

7.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	240	240	240
278	8	9	7
192	7	8	9
250	9	7	8

8.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi		
	180	360	360
150	7	6	5
180	5	7	6
270	6	5	7
300	7	8	9

9.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	300	200	200
125	10	9	8
190	8	10	9
210	9	7	10
175	7	8	7

10.

Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi	**Iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabi**		
	500	450	350
310	6	7	9
290	9	8	6
300	5	9	4
400	7	5	7

20-MAVZU. POTENTSIALLAR USULI

1-masala. Quyidagi transport masalasining optimal yechimini potensiallar usulidan foydalanib toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	^{3}	^{5}	^{7}	^{11}	100
A_2	^{1}	^{4}	^{6}	^{2}	130
A_3	^{5}	^{8}	^{12}	^{7}	170
Iste'molchilarning talabi	150	120	80	50	

Yechish: Masalaning berilganlaridan foydalanib hisoblash jadvalini tuzamiz va boshlang'ich bazis rejani "minimal xarajatlar" usulidan foydalanib topamiz.

1-jadval

b_j / a_i	150	120	80	50	U_i
100	^{3} 20	^{5} 80- θ	^{7} $\boxed{2}$ θ	^{11} $\boxed{-7}$	$U_1 = 0$
130	^{1} 130	^{4} $\boxed{-1}$	^{6} $\boxed{1}$	^{2} $\boxed{0}$	$U_2 = -2$
170	^{5} $\boxed{1}$	^{8} 40+ θ	^{12} 80- θ	^{7} 50	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 3$	$V_2 = 5$	$V_3 = 9$	$V_4 = 4$	θ=80

Topilgan boshlang'ich reja

$$X_0 = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Ushbu rejaga mos kelgan umumiy transport xarajati

$$F(X_0) = 2220.$$

Topilgan boshlang'ich bazis rejani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun ta'minotchilarga mos ravishda U_1, U_2, U_3 iste'molchilarga mos ravishda V_1, V_2, V_3, V_4 potensiallarni mos qo'yamiz hamda band kataklar uchun potensial tenglamalar tuzamiz:

$$U_1 + V_1 = 3; \quad U_1 + V_2 = 5; \quad U_2 + V_1 = 1;$$
$$U_3 + V_2 = 8; \quad U_3 + V_3 = 12; \quad U_3 + V_4 = 7.$$

Hosil bo'lgan sistemaning aniq bir yechimini topish uchun $U_1 = 0$ deb qabul qilamiz va qolgan potensiallarning son qiymatini topamiz.

$$U_1 = 0;\ U_2 = -2;\ U_3 = 3;$$
$$V_1 = 3;\ V_2 = 5;\ V_3 = 9;\ V_4 = 4.$$

Topilgan potensiallarning son qiymatini 1-jadvalning o'ng tomoni va pastiga (m+1 – qator va n+1 – ustunga) joylashtiramiz. Ushbu hisob kitoblarni jadvalning o'zida bajarsa ham bo'ladi.

Endi bo'sh katakchalarda optimallik baholarini hisoblaymiz:

$$\Delta_{13} = 9 + 0 - 7 = 2; \quad \Delta_{14} = 0 + 4 - 11 = -7;$$
$$\Delta_{22} = 5 - 2 - 4 = -1; \quad \Delta_{23} = 9 - 2 - 6 = 1;$$
$$\Delta_{24} = 4 - 2 - 2 = 0; \quad \Delta_{31} = 3 + 3 - 5 = 1.$$

Topilgan sonlarni 1-jadvaldagi bo'sh kataklarning pastki chap burchagiga joylashtiramiz. Optimallik baholari orasida musbatlari ham bor:

$$\Delta_{13} = 2 > 0;\ \ \Delta_{23} = 1 > 0;\ \ \Delta_{31} = 1 > 0.$$

Demak, topilgan bazis reja optimal reja emas. Unda

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \max(2;1;1) = 2$$

shartni qanoatlantiruvchi (A_1, B_3) katakchaga $x_{13} = \theta$ sonni kiritamiz va to'rtburchakli

$$(A_1, B_3) \to (A_3, B_3) \to (A_3, B_2) \to (A_1, B_2) \to (A_1, B_3)$$

yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymatini topamiz:

$$\theta = \min(80; 80) = 80.$$

Yuqoridagi (5) formulalar yordamida yangi X_1 bazis rejani aniqlaymiz. X_1 xos reja bo'lmasligi uchun (A_2, B_2) va (A_3, B_3) katakchalardan bittasini, ya'ni xarajati katta bo'lgan (A_3, B_3) ni bo'sh katakchaga aytantirib, (A_2, B_2) katakchadagi taqsimotni esa 0 ga teng, deb qabul qilmiz va bu katakchani band katakcha deb qaraymiz. Bu holda yangi bazis reja quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

2-jadval

a_i \ b_j	150	120	80	50	U_i
100	3 20- θ	5 0+ θ	7 80	11 -7	$U_1 = 0$

130	1 130	4 -1	6 -1	2 0	$U_2=-2$
170	5 1 Θ	8 120-θ	12 -2	7 50	$U_3=3$
V_j	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	θ=20

Jadvaldan foydalanib band katakchalarga mos keluvchi potensial tenglamalar tuzib, potensiallarning son qiymatini topamiz:

$$U_1+V_1=3; \quad U_1+V_2=5; \quad U_1+V_3=7;$$
$$U_2+V_1=1; \quad U_3+V_2=8; \quad U_3+V_4=7.$$
$$U_1=0;\ U_2=-2; U_3=3;$$
$$V_1=3;\ V_2=5; V_3=7; V_4=4.$$

Endi bo'sh katakchalar uchun optimallik baholarini tuzamiz:

$$\Delta_{14}=0+4-11=-7; \quad \Delta_{23}=-2+7-6=-1;$$
$$\Delta_{22}=-2+5-4=-1; \quad \Delta_{31}=3+3-5=1;$$
$$\Delta_{24}=-2+4-2=0; \quad \Delta_{33}=3+7-12=-2.$$

Bundan ko'rinadiki, (A_3,B_1) katakchadagi optimallik bahosi $\Delta_{31}=1>0$. Demak, X_1 reja optimal reja emas. (A_3,B_2) katakchaga $x_{31}=\theta$ ni kiritib, bazis rejani optimal rejaga yaqinlashtirish mumkin. (A_3,B_2) katakchaga θ ni kiritib, uni band katakchaga aytantiramiz va

$$(A_3,B_1)\to(A_3,B_2)\to(A_1,B_2)\to(A_1,B_1)$$

to'rtburchakli yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymati 20 ga teng bo'ladi. (5) formulalar yordamida yangi X_2 bazis rejani aniqlaymiz.

3-jadval

a_i \ b_j	150	120	80	50	U_i
100	3 -1	5 20	7 80	11 -7	$U_1=0$
130	1 130-θ	4 0	6 0	2 1 θ	$U_2=-1$
170	5 20+ θ	8 100	12 -2	7 50- θ	$U_3=3$
V_j	$V_1=2$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	θ=50

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}; \qquad F(X_2) = 2040.$$

Yangi X_2 bazis rejani optimallikka tekshiramiz. Buning uchun potensiallarning son qiymatini va bo'sh kaktaklardagi optimallik baholarini jadvalning o'zida hisoblaymiz.

Jadvaldan ko'riladiki, $\Delta_{24} = 1 > 0$. Demak, X_2 bazis reja optimal reja bo'lmaydi. (A_3, B_4) katakchaga θ sonni kiritib,

$$(A_2, B_4) \to (A_3, B_4) \to (A_3, B_1) \to (A_2, B_1)$$

yopiq kontur tuzamiz. θ ning son qiymatini topamiz.

$$\theta = \min(130; 50) = 50.$$

(5) formuladan foydalanib yangi bazis yechimni topamiz.

4-jadval

a_i \ b_j	150	120	80	50	U_i
100	3 -1	5 20	7 80	11 -8	$U_1 = 0$
130	1 80	4 0	6 0	2 50	$U_2 = -1$
170	5 70	8 100	12 -2	7 -1	$U_3 = 3$
V_j	$V_1 = 2$	$V_2 = 5$	$V_3 = 7$	$V_4 = 3$	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad F(X_4) = 1990.$$

X_4 xosmas bazis yechim. Bu yechim optimal yechim bo'ladi, chunki u optimallik shartlarini qanoatlantiradi:

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - c_{11} = -1; \qquad \Delta_{23} = (U_2 + V_3) - c_{23} = 0;$$
$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - c_{14} = -8; \qquad \Delta_{33} = (U_3 + V_3) - c_{33} = -2;$$
$$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) - c_{22} = 0; \qquad \Delta_{34} = (U_3 + V_4) - c_{34} = -1.$$

Demak, $X_4 = X_{opt}$; $F_{\min} = F(X_4) = 1990.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi transport masalalarining boshlang'ich bazis yechimlarini hamda optimal yechimi potensiallar usuli bilan topilsin.

1.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahra hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190
A_3	3	5	8	9	90
Talab hajmi	80	60	170	80	

2.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
Talab hajmi	40	60	80	60	

3.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	30
A_3	3	2	4	4	10
Talab hajmi	30	30	10	20	

4.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar					Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Talab hajmi	110	90	120	80	150	

5.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	7	9	5	120
A_2	4	2	6	8	230
A_3	3	8	1	2	160
Talab hajmi	130	220	90	70	

6.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	3	4	160
A_2	3	2	5	5	140
A_3	1	6	3	2	60
Talab hajmi	80	100	80	100	

7.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	1	70
A_2	6	3	5	6	140
A_3	3	2	6	3	80
Talab hajmi	80	50	50	110	

8.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	2	180
A_2	5	1	4	3	90
A_3	3	2	6	2	170
Talab hajmi	95	85	100	160	

9.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	3	5	2	180
A_2	4	1	6	7	140
A_3	1	9	4	3	200
Talab hajmi	100	60	280	80	

10.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	1	3	3	40
A_2	2	6	4	7	40
A_3	3	3	6	4	40
Talab hajmi	20	30	20	50	

11.

b_j \ a_i	35	25	20
20	5	2	3
30	8	6	7
20	2	5	4

12.

b_j \ a_i	60	60	60
50	5	7	6
40	6	3	1
110	1	9	11

13.

b_j \ a_i	100	110	120	90
115	9	8	10	11
125	11	10	9	8
160	3	7	5	6

14.

b_j \ a_i	90	90	90	90
100	2	7	9	10
120	3	3	6	8
180	4	2	7	4

15.

b_j \ a_i	60	90	40	60
50	8	6	5	4
70	3	4	5	6
70	6	7	8	9
90	9	6	5	4

16.

b_j \ a_i	120	45	90	55
110	2	5	3	6
100	5	2	7	9
90	9	6	5	3

17.

b_j \ a_i	35	25	20
20	5	2	3
30	3	5	2
20	2	5	3

18.

b_j \ a_i	120	120	120
150	2	1	3
140	1	3	2
110	3	2	4

19.

b_j \ a_i	45	75	90	90
80	1	5	3	2
120	6	3	2	1
120	2	6	5	3

20.

b_j \ a_i	150	170	80	70
117	5	6	3	1
123	1	4	7	8
160	6	9	5	4

21. 3 ta omborxonaning har birida mos ravishda 750, 350 va 200 tonna bir jinsli mahsulot joylashgan. Ushbu mahsulotlarni talablari mos ravishda 300, 400, 250 va 350 tonna bo'lgan 4 ta do'konga yuborish kerak. Har bir omborxonadan har bir do'konga bir tonna mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi xarajatlar matritsasi ko'rinishida berilgan:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 9 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Omborxonalardan do'konlarga minimal xarajat sarf qilib mahsulot tashish rejasini aniqlang.

22. Uchta zavodda ishlab chiqarilgan betonlar 4 ta qurilish ob'ektiga yuboriladi. Har bir zavodning ishlab chiqarish quvvati, har bir qurilish ob'ektining betonga bo'lgan talabi hamda har bir zavoddan har bir qurilish ob'ektiga bir tonna betonni tashish xarajatlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

Beton zavodlari	Qurilish ob'ektlari				Zavodlarning ishlab chiqarish quvvati
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	18	13	11	15	500
A_2	12	21	16	14	850
A_3	10	16	14	15	600
Betonga bo'lgan talab hajmi	400	550	700	300	

Umumiy transport xarajatlarini minimallashtiruvchi tashish rejasini aniqlang.

23. 3 ta omborxonada guruch saqlanadi. Ulardan birinchisida 135 tonna, ikkinchi va uchinchisida mos ravishda 165 va 160 tonnadan guruch zaxirasi mavjud. Bu guruchlar 4 ta do'konga yuboriladi. Birinchi do'konning guruchga bo'lgan talabi 110 tonna, ikkinchisiniki 120 t., uchinchi va to'rtinchi do'konlarning talabi mos ravishda 110 tonna va 120 tonnani tashkil qiladi. 1 tonna mahsulotni tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari matritsasi quyidagi ko'rinishga ega.

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Qaysi omborxonani qaysi do'koniga biriktirilganda sarf qilinadigan umumiy transport xarajatlari minimal bo'ladi?

24. Uchta fermer xo'jaligidan 4 ta paxta tozalash zavodlariga paxta yuboriladi. Fermer xo'jaliklardagi paxta zaxirasi, paxta tozalash zavodlarining talabi va bir tonna paxtani tashish uchun sarf qilinadigan transport xarajatlari quyidagi jadvalda aks ettirilgan.

Fermer xo'jaliklari	Paxta tozalash zavodlari				Paxta zahirasi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	2	3	6	125
A_2	2	5	6	3	155
A_3	5	2	3	5	150
Paxtaga bo'lgan talab hajmi	100	110	105	115	

Xo'jaliklardagi paxtani paxta tozalash zavodlariga optimal taqsimlash rejasini toping.

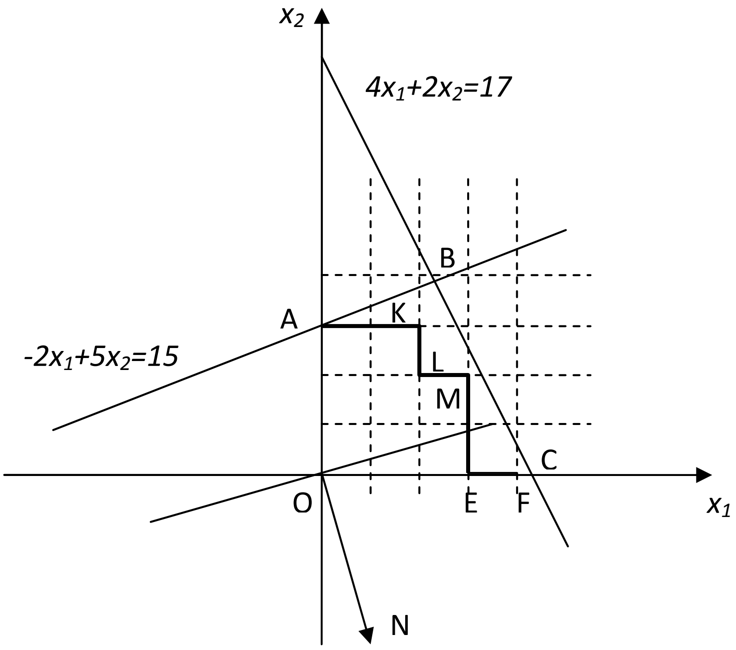
21-MAVZU. BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

1-masala.

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 17, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 4x_2 \to \max.$$

Yechish: R^2 tekislikda berilgan masala o'zgaruvchilarining butun sonli bo'lishi shartiga e'tibor bermasdan, uni oddiy chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida grafik usulda yechamiz (1-chizma).



1-chizma

Natijada $OABC$ qavariq ko'pburchakni, ya'ni joiz rejalar to'plamini hosil qilamiz hamda $C(17/4;0)$ nuqta maqsad funksiyasiga maksimum qiymat beruvchi nuqta ekanligini aniqlaymiz. Bu holda masalani optimal yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$X^0 = \left(\frac{17}{4};0\right), \qquad F_{\max} = \frac{17}{4}.$$

Topilgan yechim butun sonli emas. Shuning uchun $OABC$ ko'pburchakni uchlari butun sonlardan iborat bo'lgan $OAKLMEF$ ko'pburchak bilan almashtiramiz. Bu ko'pburchakning burchak nuqtalarining koordinatlari butun sonlardan iborat bo'ladi. Ana shu burchak nuqtalarning birida maqsad funksiya maksimumga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun $x_1 - 4x_2 = 0$ chiziqni $N(1;-4)$ vektor yo'nalishida o'z-o'ziga parallel ravishda surib boramiz va shu yo'nalishdagi burchak nuqta $F(4;0)$ ni topamiz. Ushbu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan butun sonli programmalashtirish masalasining optimal yechimi quyidagidan iborat bo'ladi:

$$X^0 = (4;0), \qquad F_{\max} = 4.$$

2-masala. Quyidagi butun sonli programmalashtirish masalasini Gomori usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 \le 40, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 29, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \to \min.$$

Masalaga x_3 va x_4 qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib quyidagi, kanonik ko'rinishdagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -x_1 + 10x_2 + x_3 = 40, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 29, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 20x_2 \to \min.$$

Chegaraviy shartlarning barcha koeffisiyentlari butun sonlardir. Shu sababdan x_1, x_2 o'zgaruvchilarning butunligi x_3, x_4 o'zgaruvchilarning butun bo'lishligiga olib keladi.

Demak, kanonik ko'rinishga keltirilgan masalani to'la butun sonli chiziqli programmalashtirish masalasi sifatida qarash mumkin. Gomori usulidan foydalanamiz.

Masalani oldin simpleks usuli yordamida yechamiz.

Bazis	C_{baz}	P_0	1	-20	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4
X_3	0	40	-1	10*	1	0
X_4	0	29	4	2	0	1
Δ_j		0	-1	**20**	0	0
X_2	-20	4	-1/10	1	1/10	0
X_4	0	21	21/5*	0	-1/5	1
Δ_j		-80	**2**	0	-2	0
X_2	-20	9/2	0	1	2/21	1/42
X_1	1	5	1	0	-1/21	5/21
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21

X_{opt}=(5; 9/2; 0; 0), $F_{\min}=-85$. Yechimning butun bo'lishlik shartini qanoatlantirmaydi. Shu sababdan oxirgi simpleks jadvalga qo'shimcha satr kiritamiz. Buning uchun quyidagi belgilashlar kiritish orqali

$$q_1=\frac{9}{2}-\left[\frac{9}{2}\right]=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}; \qquad q_{11}=q_{12}=0;$$

$$q_{13}=\frac{2}{21}-0=\frac{2}{21}; \qquad q_{14}=\frac{1}{42}-0=\frac{1}{42}.$$

quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz.

$$q_{13}x_3+q_{14}x_4\geq q_1;$$

ya'ni

$$\frac{2}{21}x_3+\frac{1}{42}x_4\geq\frac{1}{2}.$$

Ushbu tengsizlikdan quyidagi kesuvchi tenglamani hosil qilamiz.

$$-\frac{2}{21}x_3-\frac{1}{42}x_4+x_5=-\frac{1}{2}.$$

Ana shu tenglamalardagi x_5 ni bazis o'zgaruvchi deb qabul qilib simpleks jadvalining 4-satriga joylashtiramiz. So'ng ikkilangan simpleks usulni qo'llab x_5 ni bazisdan chiqarib x_4 ni kiritamiz.

Bazis	C_{baz}	P_0	1	-20	0	0	0
			X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_2	-20	9/2	0	1	2/21	1/42	0
X_1	1	5	1	0	-1/21	5/21	0
Δ_j		-85	0	0	-41/21	-5/21	0
X_5	0	-1/2	0	0	-2/21	-1/42	1
X_2	-20	4	0	1	0	0	1
X_1	1	0	1	0	-1	0	10
X_4	0	21	0	0	4	1	-42
Δ_j		-80	0	0	-1	0	-10

Hosil bo'lgan yechim butun sonli yechim bo'ladi. Demak, u butun sonli programmalashtirish masalasining optimal yechimi bo'ladi. Bu yechim quyidagidan iborat.

$$\tilde{X}_{opt}(0;4), \ \ F_{\min}=-80.$$

Eslatib o'tamizki, shartlari tengsizlik

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (*)$$

bilan berilgan to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasidan kanonik ko'rinishga o'tishda, umuman olganda, to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasi hosil bo'lmaydi, chunki x_{n+i} qo'shimcha o'zgaruvchilar butun bo'lish shartiga bo'ysunmaydi.

Ammo (*) da barcha a_{ij} va b_i lar butun sonlar bo'lgan holda butun bo'lishlik shartini x_{n+i} larga ham tarqatish mumkin bo'ladi.

Agar (*) a_{ij} va b_i lar ratsional sonlar bo'lganda ham, kanonik ko'rinishga o'tishda to'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini hosil qilish mumkin.

Buning uchun (*) ni a_{ij} va b_i lar maxrajlarining eng kichik umumiy karralisiga ko'paytirib faqat shundan so'ng x_{n+i} qo'shimcha o'zgaruvchilarni kiritish kerak bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. To'la butun sonli chiziqli programmalash masalasini grafik usul bilan yeching.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 36, \\ x_1 \le 13, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -9x_1 - 11x_2 \to \min.$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5, \\ x_1 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$

4. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min.$

5. $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 29, \\ 3x_1 - x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 38, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = 3x_1 + x_2 \to \min.$

6. $\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \le 78, \\ 5x_1 - 6x_2 \le 26, \\ x_1 + 4x_2 \ge 25, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_j \in Z, j = 1,2. \end{cases}$

$F(x) = 5x_1 + 7x_2 \to \min.$

7. Mebel fabrikasi stol va stullar ishlab chiqarishga moslashgan. Bu mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun ikki xil yog'och va mehnat sarf qilinadi. Bir birlik mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan resurslar miqdori (normasi), resurslar zahirasi va mahsulotlar birligidan olinadigan daromad miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	**Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan resurslar miqdori**		**Resurslar zahirasi**
	Stol	**Stul**	
1 tur yog'och	0,2	0,1	40
2 tur yog'och	0,1	0,3	60
Mehnat	1,2	1,5	371,4
Mahsulot birligidan olinadigan daromad (sh.b.)	6	8	

Fabrika qancha stol va stul ishlab chiqarsa uning daromadi maksimal bo'ladi?

8. Zavodda ikki *A* va *B* turdagi detallarni ishlab chiqarish uchun 3 xil uskunalar ishlatiladi. Mahsulot birligini ishlab chiqarishga uskunalarning sarf qiladigan vaqt normasi, ularning umumiy vaqt fondi hamda detallar birligidan zavodga keladigan daromadlar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Uskunalar	**Bitta detalni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan vaqt normasi**		**Uskunalarning umumiy ish vaqti fondi (soat)**
	A	*B*	
I	10	8	168
II	5	10	180
III	6	12	144
Mahsulot birligidan olinadigan daromad (sh.b.)	14	18	

A va *B* detallardan qanchadan ishlab chiqarilganda zavodning oladigan daromadi maksimal bo'ladi?

9. Ikki xil mahsulot – kir yuvish mashinalari va muzlatgichlarni sotish uchun do'konda 4 xil resursdan foydalaniladi. Mahsulotlarning bittasini sotish uchun sarf qilinadigan turli resurslar miqdori, har bir resursning zahirasi hamda mahsulot birligidan olinadigan daromadlar quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	**Mahsulot birligini sotishga sarf qilinadigan resurslar miqdori**		**Resurslar zahirasi**
	Kir yuvish mashinasi	**Muzlatgich**	
I	2	2	12
II	1	3	9
III	4	2	16
IV	3	4	12
Mahsulot birligidan olinadigan daromad	12	15	

Chegaralangan resurslardan foydalanib savdo korxonasining daromadini maksimallashtiruvchi mahsulotlar sotish rejasini tuzing.

10. Fermer xo'jaligida qo'y va echkilar parvarish qilinadi. Ularni boqish uchun 3 turdagi ozuqa ishlatiladi. Bir kunda qo'y va echkilar uchun zarur bo'lgan turli ozuqalar miqdori, ozuqalarning zahirasi hamda har bir qo'y va echkini boqishdan fermerning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Ozuqa turlari	**Bir kunlik zarur bo'ladigan ozuqa miqdori**		**Ozuqa zahirasi**
	Qo'ylar	**Echkilar**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Har bir molni boqishdan fermerning oladigan daromadi	16	12	

Fermer eng katta daromad olishi uchun nechta qo'y va echki boqishi kerak?

II. Quyidagi to'la butun sonli chiziqli programmalashtirish masalalarini Gomori usuli bilan yeching.

11. $$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 + x_4 \to \min.$$

12. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$
$$F(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min.$$

13. $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min.$$

14. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$$

15. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min.$$

16. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, x_j \in Z, j = 1,2,3,4. \end{cases}$$
$$F(x) = -x_1 - x_2 \to \min.$$

17. Tikuv fabrikasida 4 xil ayollar ko'ylagi tikiladi. Buning uchun 3 xil gazmoldan foydalaniladi. Har bir ko'ylakka sarf qilinadigan gazmollar miqdori, gazmollar zahirasi va har bir tikilgan kiyimning narxi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Gazmol turlari	Bitta ko'ylakka sarf qilinadigan gazmol miqdori (m)				Gazmollar zahirasi
	A	*B*	*C*	*D*	
I	1	-	2	1	180
II	-	1	3	2	210
III	4	2	-	4	800
Tikilgan ko'ylaklar narxi	9	6	4	7	

Tikuv fabrikasida qaysi ko'ylakdan qancha tikilganda uning daromadi maksimal bo'ladi?

18. Bolalar tuflisi, botinkasi va yengil poyafzalini ishlab chiqarish uchun 4 xil xom ashyodan foydalaniladi. Bir juft oyoq kiyimini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom-ashyolar miqdori, xom-ashyolar zahirasi hamda bir juft oyoq kiyimini sotishdan olinadigan daromadlar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

Xom-ashyo turlari	Bir juft poyafzalga sarf qilinadigan xom-ashyo miqdori			Xom-ashyolar zahirasi
	Tufli	**Botinka**	**Yengil poyafzal**	
I	4	3	3	6600
II	1	2	4	7200
III	3	3	5	5000
IV	2	5	5	4300
Bir juft poyafzaldan olinadigan daromad	8	6	9	

Daromadni maksimallashtiruvchi bolalar poyafzalini ishlab chiqarishning optimal rejasini tuzing.

19. Korxonada 3 xil *A*, *B*, *C* rusumdagi avtomobillar ta'mirlanadi. Buning uchun 3 xildagi uskunalardan foydalaniladi. Har bir avtomobilni ta'mirlashga turli uskunalarning sarf qiladigan vaqti, uskunalarning bir kunlik quvvati hamda avtomobillarni ta'mirlashdan olinadigan daromad hajmi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Uskunalar	Bitta avtomobilni ta'mirlashga uskunalarning sarf qilinadigan vaqti			Uskunalarning bir kunlik quvvati
	A	*B*	*C*	
I	1	2	4	32
II	2	1	2	42
III	3	2	2	30
Bitta avtomobilni ta'mirlashdan olinadigan daromad	6	10	12	

Daromadni maksimallashtiruvchi avtomobillarni ta'mirlashning optimal rejasini aniqlang.

20. Zavodda 3 xil *A*, *B*, *C* turdagi motorlar ishlab chiqariladi. Ushbu motorlarni ishlab chiqarishga sarf qilinadigan resurslar miqdori, resurslarning bir smenadagi sarfi, har bir motorni ishlab chiqarishdan olinadigan daromad quyidagi jadvalda keltirilgan.

Resurslar	**Bitta motorni ishlab chiqarish uchun sarf qilinadigan resurslar miqdori**			**Resurslarning bir smenadagi sarfi**
	A	*B*	*C*	
I	3	2	-	51
II	1	4	-	48
III	3	3	1	67
Bitta motorni sotishdan olinadigan daromad	4	5	1	

Har bir motordan qancha miqdorda ishlab chiqarilganda zavodning daromadi maksimal bo’ladi?

22-MAVZU. CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI VA UNING GEOMETRIK TALQINI

Grafik usulidan foydalanib, quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = 2(x_1 - 7)^2 + 4(x_2 - 3)^2 \to \min(\max).$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = x_1 \cdot x_2 \to \max.$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$

$Z = 4(x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2 \to \min(\max).$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 3x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max.$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$

6. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = x_1 \cdot x_2 \to \max.$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2 \to \min.$

8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min(\max).$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min\ (\max).$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \to \min.$

11. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = 2x_1 + x_2 \to \min(\max).$

12. $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \leq 8, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \end{cases}$

$Z = x_1 + 3x_2 \to \min(\max).$

13. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min(\max).$

14. $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \ge 2, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \\ Z = 3x_1 + x_2 \to \min(\max). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8, \\ x_2 \le 6. \\ Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max) \end{cases}$.

16. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le -20, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \\ Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min(\max). \end{cases}$

17. Korxonaning ikki sexida bir xil mahsulot ishlab chiqariladi. Kelgusi yilda ushbu mahsulotga bo'lgan talab ko'pi bilan 50 tonna bo'lishi kutilmoqda. Birinchi sexda ishlab chiqariladigan x_1 miqdordagi mahsulot uchun $9(x_1 - 30)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Ikkinchi sexda ishlab chiqariladigan x_2 tonna mahsulot uchun $4(x_2 - 50)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Har bir sexda qancha mahsulot ishlab chiqarilganda sarf qilingan xarajat miqdori eng kam bo'ladi va mahsulotga bo'lgan talab qondiriladi?

18. Ma'lum bir xududda A mahsulotga bo'lgan maksimal talab 70 birlikni tashkil qiladi. Ushbu mahsulot 2 ta korxonada ishlab chiqariladi. Birinchi korxonada ishlab chiqarilgan x_1 mahsulotga $4(x_1 - 40)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Ikkinchi korxonada ishlab chiqarilgan x_2 miqdordagi mahsulotga $25(x_2 - 60)^2$ miqdorda xarajat sarf qilinadi. Har bir korxonada qanchadan mahsulot ishlab chiqarilganda mahsulotga bo'lgan talab qondiriladi va sarf qilingan jami xarajat miqdori minimal bo'ladi?

19. Do'konda ikki xil mahsulot sotiladi. Birinchi mahsulotning x_1 birligini $(x_1 - 40)^2$ so'mdan, ikkinchi mahsulotning x_2 birligini $(x_2 - 15)^2$ so'mdan sotiladi. Tovarlarning maksimal sotish hajmi 54 birlikni tashkil qiladi. Do'konda qaysi mahsulotdan qanchadan sotilganda uning daromadi maksimal bo'ladi?

20. Firma o'zi ishlab chiqargan mahsulotlarni 2 xil yo'l bilan, ya'ni do'kon orqali yoki savdo agentlari orqali sotadi. Firma x_1 miqdordagi mahsulotni do'konlarda sotish uchun $(x_1 - 60)^2$ sh.b. miqdorida, x_2 miqdordagi mahsulotni savdo agentlari orqali sotganda $(x_2 - 80)^2$ sh.b. miqdorida xarajat sarf qiladi. Firmada ko'pi bilan 120 birlik mahsulot ishlab chiqariladi. Ushbu mahsulotlarni qanday yo'l bilan sotganda firmaning umumiy xarajati minimal bo'ladi?

23-MAVZU. QAVARIQ PROGRAMMALASHTIRISH MASALASI

1-misol. Quyidagi funksiyaning qavariqligini tekshiring.

$$F(X) = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1 - 4x_2 + 6.$$

Yechish: $F(X)$ funksiyadan x_1 va x_2 lar bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_1} = 10x_1 - 3x_2 + 3,$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_2} = 4x_2 - 3x_1 - 4,$$

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = -3, \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = -3.$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalardan foydalanib Gesse matritsani tuzamiz:

$$H = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ushbu matritsaning bosh minorlari

$$\Delta_1 = 10 > 0, \quad \Delta_2 = |H| = 31 > 0.$$

Demak, $F(X)$ funksiya qat`iy botiq funksiya bo'ladi.

2-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 \to \min.$$

masalani grafik usulda yeching va topilgan yechim uchun Kun-Takker shartlari o'rinli ekanligini ko'rsating.

Yechish: Masalani grafik usulda yechib, $X^0(2;2)$ va $f(2;2) = 0$ ekanligini aniqlaymiz.

Endi shunday Λ^0 mavjud bo'lib, (X^0, Λ^0) nuqtada Kun-Takker shartlarining bajarilishini ko'rsatamiz.

Berilgan masala uchun Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$f(X, \Lambda) = \lambda_0 \left(x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8\right) + \lambda_1 (2x_1 + x_2 - 2) + \\ + \lambda_2 (8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_3 (6 - x_1 - x_2)$$

X^0 nuqtada masalaning barcha shartlari qat'iy tengsizlikka aylanadi, ya'ni Sleyter sharti bajariladi, bu holda $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilishimiz mumkin.

Lagranj funksiyasidan $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lar bo'yicha xususiy hosilalar olamiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_{3,};\qquad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + x_2 - 2;\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 8 - 2x_1 - x_2;\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \lambda_3} = 6 - 2x_1 - x_2;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_1} = 2 \cdot 2 + 2 - 2 = 4 > 0.\qquad \frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_2} = 8 - 2 \cdot 2 - 2 = 4 > 0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_3} = 6 - 2 - 2 = 2 > 0;\qquad \lambda_i^0 \frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial \lambda_i} = 0$$

shartga ko'ra, λ_1, λ_2 va λ_3 larning qiymatlari nolga teng.

Demak, $(X^0, \Lambda^0) = \left(2; 2; 0; 0; 0\right)$ nuqtada haqiqatdan ham, Kun-Takker shartlari bajarilayapti. Demak u egar nuqta bo'ladi.

3-misol. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, $X_0 = \left(1; 0\right)$ nuqta quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini ko'rsating.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z = f\left(x_{1,} x_{_2}\right) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 \to \min.$$

Yechish: $X^0\left(1; 0\right)$ nuqtada chegaraviy shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi, demak Sleyter sharti bajariladi. Bu holda $\lambda_0 = 1$ deb qabul qilish mumkin, u holda Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$F\left(x_{1,} x_{2,} \lambda_{1_2} \lambda_2\right) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 + \lambda_1\left(4x_1 + 5x_2 - 8\right) + \lambda_2\left(2x_1 + x_2 - 4\right),$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshiramiz.

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial x_1} = \left(2x_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2\right)_{X^0} \ge 0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0, \Lambda^0\right)}{\partial x_2} = \left(6x_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2\right)_{X^0} \ge 0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_1}=\left(4x_1+5x_2-8\right)_{X^0}=-4<0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_1}\cdot\lambda_1^{\,0}=0\Rightarrow\lambda_1^{\,0}=0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_2}=(2x_1+x_2-4)_{X^0}=-2<0;$$

$$\frac{\partial F\left(X^0,\Lambda^0\right)}{\partial\lambda_2}\cdot\lambda_2^{\,0}=0,\qquad\Rightarrow\qquad\lambda_2^{\,0}=0.$$

Demak, $\left(X^0,\Lambda^0\right)=\left(1;0;0;0\right)$ nuqta Kun-Takker shartlarini qanoatlantiradi. Bundan u Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo’lishi kelib chiqadi. Shuning uchun $X^0\left(1;0\right)$ nuqta berilgan masalaning yechimi bo’ladi.

Endi Kun-Takker teoremasidan foydalanib qavariq programmalashtirish masalasini yechish jarayoni bilan tanishamiz.

Buning uchun quyidagi masalaga murojaat qilamiz.

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 8,\\ 2x_1-x_2\le 12,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\end{cases}$$

$$Z=f(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2\to\max.$$

Bu masaladagi maqsad funksiya chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ va $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ kvadratik funksiyalarning yig’indisidan iborat. Bunda $f_2=-x_1^2-2x_2^2$ funksiya manfiy aniqlangan kvadratik formadan iborat bo’lgani uchun botiq funksiya bo’ladi. Chiziqli $f_1=2x_1+4x_2$ funksiyani ham botiq funksiya, deb qarash mumkin. Shunday qilib, berilgan masalaning chegaraviy shartlari chiziqli tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa botiq funksiyadan iborat bo’lgan qavariq programmalashtirish masalasidan iborat. Ushbu masalaga Kun-Takker teoremasini qo’llash mumkin.

Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2^2+\lambda_1(8-x_1-2x_2)+$$
$$+\lambda_2(12-2x_1+x_2)$$

Lagranj funksiyasining egar nuqtasining mavjudligini ifodalovchi Kun-Takker shartlarini yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0; \\ x_2 \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0; \\ \lambda_1 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0; \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \qquad \text{(III)}$$

(I) sistemaga v_1, v_2, w_1, w_2 nomanfiy qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, uni tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$

$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, w_1 \ge 0, w_2 \ge 0.$$

Ushbu sistemani yana quyidagicha yozish mumkin.

$$\begin{cases} v_1 = (2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2); \\ v_2 = (4 - 4x_2 - 2\lambda_1 - \lambda_2); \\ w_1 = (8 - x_1 - 2x_2); \\ w_2 = (12 - 2x_1 - x_2); \end{cases} \qquad \text{(V)}$$

$$x_1 v_1 = 0, \ \ x_2 v_2 = 0, \ \ \lambda_1 w_1 = 0, \ \ \lambda_2 w_2 = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Ushbu tengliklarni (II) ni nazarga olib quyidagicha yozish mumkin. Endi (IV) sistemaning (VI) shartni qanoatlantiruvchi bazis yechimini topamiz.

Demak, ushbu yechimni ifodalovchi nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi va berilgan masalaning optimal yechimini beradi.

(IV) sistemaning (1) va (2) tenglamasiga mos ravishda z_1 va z_2 sun'iy o'zgaruvchilarni kiritib quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini tuzamiz.

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - v_1 + z_1 = 2; \\ 4x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 - v_2 + z_2 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8; \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0,$$

$$v_1 \ge 0, v_2 \ge 0, w_1 \ge 0, w_2 \ge 0, z_1 \ge 0, z_2 \ge 0.$$

$$Z = Mz_1 + Mz_2 \to \min.$$

Ushbu masalani sun'iy bazis vektor usuli bilan yechamiz.

Baz.	C_{baz}	P_0	0	0	0	0	0	0	M	M	0	0
			X_1	X_2	Λ_1	Λ_2	V_1	V_2	Z_1	Z_2	W_1	W_2
Z_1	M	2	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
Z_2	M	4	0	$\boxed{4}$	2	-1	0	-1	0	1	0	0
W_1	0	8	1	2	0	0	0	0	0	0	1	0
W_2	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		$6M$	$2M$	**$4M$***	$3M$	M	$-M$	$-M$	0	0	0	0
Z_1	M	$\boxed{2}$	2	0	1	2	-1	0	1	0	0	0
X_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	6	1	0	-1	1/2	0	1/2	0	-1/2	1	0
W_2	0	13	2	0	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		**$2M$***	$2M$	0	M	$2M$	$-M$	0	0	0	0	0
X_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	1/2	0	0	0
X_2	0	1	0	1	1/2	-1/4	0	-1/4	0	1/4	0	0
W_1	0	5	0	0	-3/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	1	0
W_2	0	11	0	0	-1/2	-9/4	1	-1/4	-1	1/4	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tuzilgan chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi:

$$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 1,\ \lambda_1^0 = 0,\ \lambda_2^0 = 0,$$

$$v_1^0 = 0,\quad v_2^0 = 0,\quad w_1^0 = 5,\quad w_2^0 = 11.$$

Ushbu yechim (IV) sistemaning (VI) shartni qanoatlantiruvchi bazis yechimi bo'ladi.

Demak, $(X^0, \Lambda^0) = (1;1;0;0)$ Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Bunda $X^0 = (1;1)$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'lib, unda $f(X^0) = 3$ bo'ladi.

4-misol. [1]Chiziqsiz programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin.

$$G^i(x) \geq r_i, \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

$$x > 0,$$

$$C = F(x) \to \min.$$

I. (a) maximallashtirish masalasiga aylantiring;

(b) masalada F va G^i funsiyalarning Kun-Takkerning yetarlilik teoremasidagi ekvivalaentlari qaysilar?

(c) F va G^i funksiyalarida yetarli maksimallashtirish shartlarini tuzish uchun botiqlik yoki qavariqlik shartlari qanday qo'yiladi?

(d) yuqoridagilar asosida, funksiyani minimallashtirish uchun Kun Takkerning yetarlilik shartlarini qanday qilib qo'llash mumkin?

II. Kun-Takkerning yetarlilik teoremasini qo'llab masalani yeching.

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$C = x_1 \to \min.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$C = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min.$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$C = 2x_1 + x_2 \to \min.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. Quyidagi funksiyalarning qavariq yoki qavariq emasligini ko'rsating.

1. $f\left(x_{1,} x_2\right) = 2x_1{}^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + 5x_1 - 6x_2 + 8;$

2. $f\left(x_{1,} x_2\right) = x_1{}^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2;$

3. $f\left(x_{1,} x_2\right) = x_1{}^2 + x_2^2 - 4x_1 + 5x_2;$

4. $f\left(x_{1,} x_2\right) = 3x_1{}^2 - 4x_1 x_2 + 5x_2^2 - 5x_1 - 12x_2;$

---

[1] Alpha C.Chiang., Kevin Wainwright. "Fundamental methods of mathematical economics". 2013. pp. 427.

5. $f\left(x_{1,}x_2\right)=5x_1^{\ 2}-x_1x_2-2x_2^2-2x_1+3x_2;$

6. $f\left(x_{1,}x_2\right)=2x_1^{\ 2}-3x_1x_2+2x_2^2+3x_1+5x_2;$

7. $f\left(x_{1,}x_2\right)=8x_1+6x_2+3x_1x_2-2x_1^{\ 2}-x_2^2;$

8. $f\left(x_{1,}x_2\right)=3x_1^{\ 2}+3x_2^2+5x_1x_2-6x_1-4x_2+20;$

9. $f\left(x_{1,}x_2\right)=4x_1^{\ 2}+2x_2^2-x_1x_2-4x_1-2x_2;$

10. $f\left(x_{1,}x_2\right)=5+x_1^{\ 2}-x_2^2+2x_1x_2+5x_1+7x_2;$

II. Quyidagi 11-14- masalalarda Kun-Takker shartlaridan foydalanib, berilgan nuqta qavariq programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini aniqlang.

11. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8, \\ 3x_1+x_2\le 15, \\ x_1+x_2\ge 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$

$Z=f(x_1;x_2)=(x_1-6)^2+(x_2-2)^2\to\max.$

12. $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 24, \\ x_1+2x_2\le 15, \\ 3x_1+2x_2\ge 24, \\ x_2\le 4, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$

$Z=f(x_1;x_2)=x_2^2+6x_1^2-6x_1+6\to\max.$

13. $\begin{cases} -2x_1+x_2\le 0, \\ x_1-2x_2\le 0, \\ x_1+x_2\ge 1 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$

$Z=f(x_1;x_2)=x_1^2+4x_2^2\to\min.$

14. $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 3, \\ 2x_1-x_2\le 8, \\ x_1+x_2\le 6, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, \end{cases}$

$Z=f(x_1;x_2)=x_1^2+x_2^2\to\min.$

III. Quyidagi 15-19-masalalarni grafik usulda yeching va topilgan yechim Kun-Takker shartlarini qanoatlantirishini ko’rsating.

15. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 8x_1 - x_2 \le 8, \\ -6x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = (x_1 - 3+)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min.$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = 4x_1^2 + 6x_2^2 - 8x_1 - 12x_2 + 10 \to \max.$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 + 17 \to \max.$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 6 \to \max.$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 - x_2 \le 6, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1; x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - 90x_1 - 48x_2 + 369 \to \max.$

IV. Quyidagi 20-25- masalalarni Kun-Takker teoremasidan foydalanib yeching.

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 \to \min.$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_1 + 4 \to \max.$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 \to \min.$

23. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1 - 2x_2 \to \min.$

24. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \ge -8, \\ x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

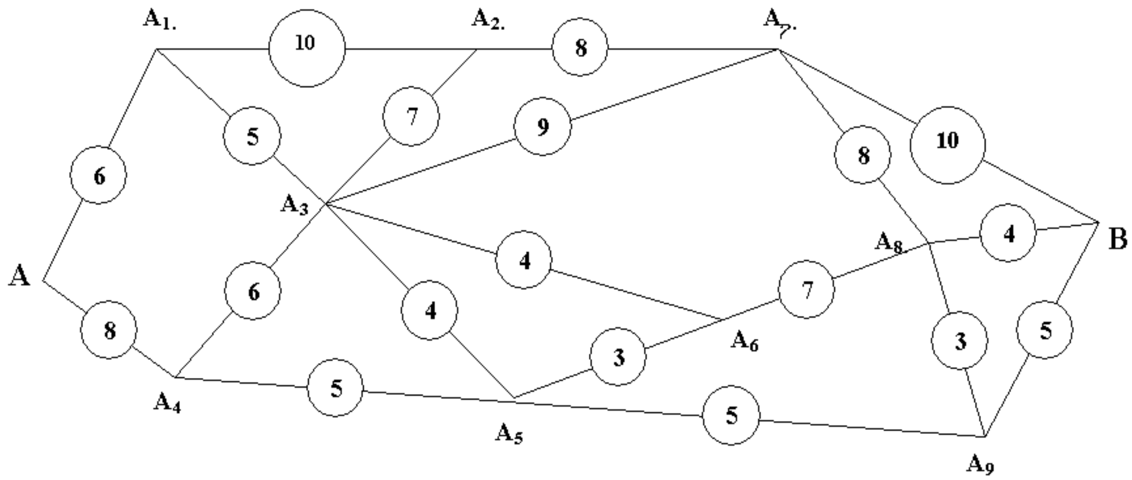
$Z = f(x_1, x_2) = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max.$

25. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$

$Z = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 \to \min.$

24-MAVZU. DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH MASALALARI

1-misol. Faraz qilaylik, *A* va *B* punktlarni o'zaro bog'lovchi temir yo'llar to'ri berilgan bo'lsin (1-chizma). Bunda har qanday ikki qo'shni punkt orasidagi masofa ma'lum va bu masofaning uzunligi 1-chizmadagi har ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma oraligidagi aylanachalarga yozilgan sonlardan iborat bo'lsin. *A* va *B* punktlarni eng qisqa yo'l bilan tutashtiruvchi marshrutni aniqlash talab qilinadi.



1-chizma

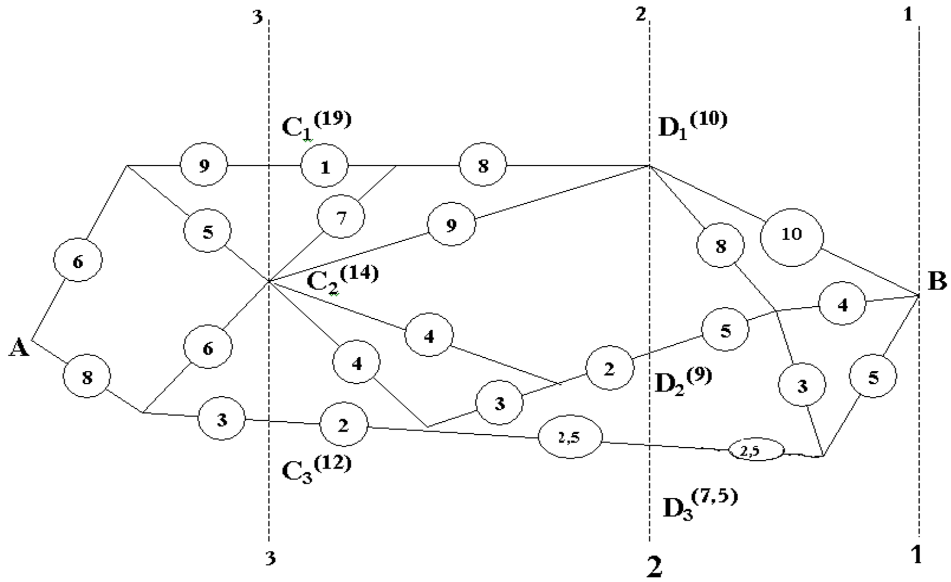
Masalani yechish uchun (1-1), (2-2), (3-3) chiziqlar yordamida berilgan temir yo'llar to'rini ayrim qismlarga (bosqichlarga) ajratamiz (2-chizma).

(2-2) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan nuqtalarini D_1, D_2, D_3 lar bilan, (3-3) chiziqning kesishgan nuqtalarini esa C_1, C_2, C_3 lar bilan belgilaymiz. Birinchi qadamda *B* nuqtadan D_1, D_2 va D_3 nuqtalargacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz:

$B - D_1$:min (10, 8+4, 5+3+8)=10;

$B - D_2$:min(10+8+5, 4+5, 5+3+5)=9;

$B - D_3$:min (5+2,5, 4+3+2,5)=7,5.



2-chizma

2-chizmada D_1, D_2 , D_3 nuqtalardan so'nggi B punktgacha bo'lgan eng qisqa masofa qavs ichida yozilgan. So'ngra (3-3) chiziqning transport yo'llari to'ri bilan kesishgan C_1, C_2, C_3 nuqtalarni ko'ramiz. Bu nuqtalardan B nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofani aniqlaymiz. Bu masofa

C_1 nuqta uchun min(1+8+10, 1+7+4+2+9, 1+7+4+3+2+9, 1+7+4+2,5+7,5) =

= min(19, 23, 26, 22) = 19.

C_2 nuqta uchun min(7+8+10, 9+10, 4+2+9, 2+3+2+9, 4+2,5+7,5) =

= min(25, 19, 15, 16, 14) = 14.

C_3 nuqta uchun min(2+2,5+7,5, 4+3+2+9) = min(12, 18) = 12.

Bu masofalar shaklda C_1, C_2, C_3 nuqtalar yonidagi qavs ichida yozilgan. 3 bosqichda A nuqtadan B nuqtagacha bo'lgan eng qisqa masofa topiladi. Bu masofa quyidagicha aniqlanadi:

min(6+9+19, 6+5+14, 8+6+14, 8+3+12) = 23.

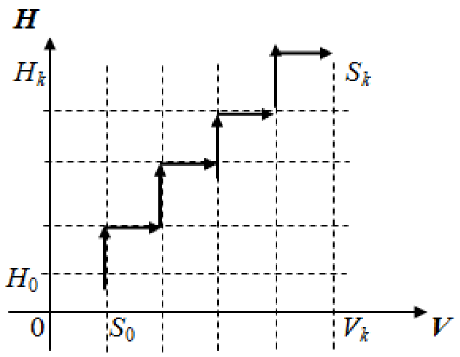
So'ngra A nuqtadan eng qisqa masofa bo'ylab B nuqtaga boradigan yo'lni belgilaymiz: $A \to A_4 \to A_5 \to A_9 \to B$.

2-misol. Samolyot dastlab H_0 balandlikda V_0 tezlik bilan uchayotgan bo'lsin. Uning uchish balandligini H_k va tezligini V_k gacha ko'tarish kerak bo'lsin. Samolyotning uchish balandligini H_0 dan H_k gacha, tezligini esa V_0 dan V_k gacha oshirishda sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini minimallashtirish masalasini hal qilish talab etiladi. Bunda aniq bir tezlik bilan uchayotgan samolyotning H_1 balandlikdan $H_2>H_1$ balandlikkacha ko'tarilishi uchun, hamda aniq bir balandlikda uchayotgan samolyotning tezligini V_1 dan $V_2>V_1$ gacha ko'tarish uchun sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorlari ma'lum deb qaraladi. Bu masala dinamik programmalashtirish masalasi sifatida quyidagicha tavsiflanadi: Samolyotning uchish balandligi va tezligini shunday boshqarish kerakki, natijada sarf qilingan umumiy yoqilg'i miqdori minimal bo'lsin.

Yechish: Samolyotning osmondagi holati ikkita parametr – tezlik (V) va balandlik (H) bilan aniqlanadi. Shuning uchun yechimni VOH tekislikda qidiramiz, ya'ni shu tekislikdagi $H=H_0$, $H=H_k$ va $V=V_0$, $V=V_k$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'g'ri to'rtburchakka qaraymiz.

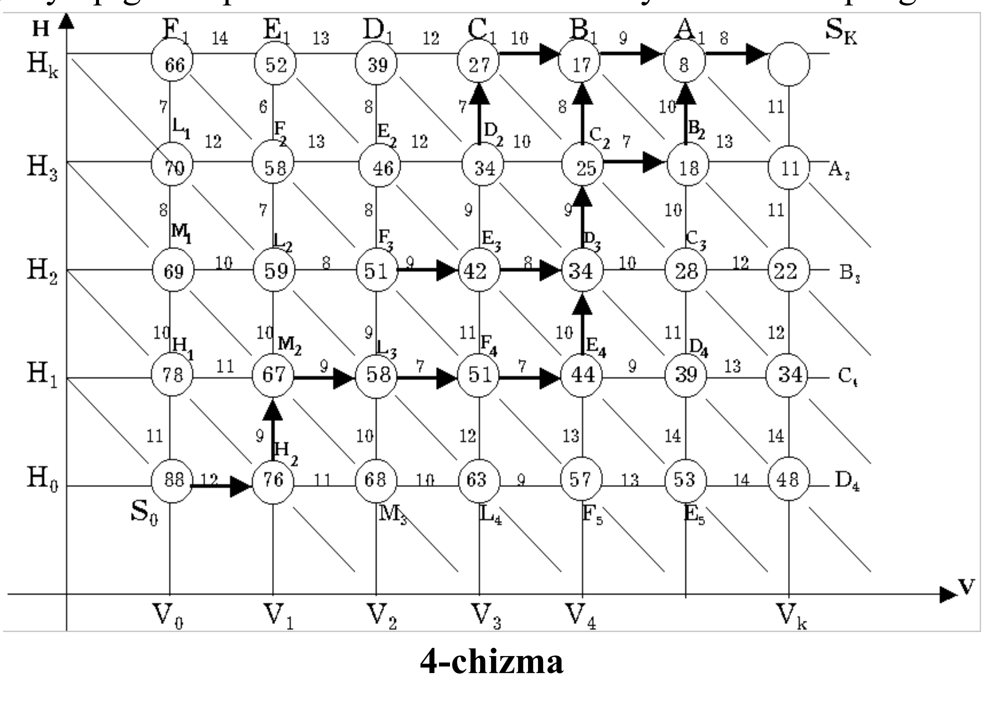
Samolyotni $S_0(V_0, H_0)$ holatdan $S_k(V_k, H_k)$ holatga, eng kam xarajat qilib, o'tkazish masalasi qo'yiladi. Bu masalani dinamik programmalashtirish usullari bilan yechish uchun (H_k –H_0) kesmani n_1 ta teng kesmachalarga, (V_k–V_0) kesmani esa n_2 ta teng kesmachalarga bo'lamiz, hamda har bir qadamda samolyot yo balandligini ($\Delta H = (H_k - H_0)/n_1$ birlikka), yoki tezligini ($\Delta V = (V_k - V_0)/n_2$ birlikka) oshiradi, deb qabul qilamiz.

S nuqtani S_0 holatdan S_k holatga turli yo'llar bilan o'tkazish mumkin. Bu yo'llar ichida eng kam yoqilg'i miqdoriga mos keluvchisini tanlash kerak.



3-chizma

3-misol. Masaladagi aniq ma'lumotlar quyidagi jadvalda tasvirlangan. Samolyotning H_k balandlikka ko'tarilishi va tezligini V_k gacha oshirishda sarf qilinadigan yoqilg'i miqdorini minimallashtiruvchi yechimni aniqlang.



4-chizma

Ushbu shakldagi vertikal chiziqlardagi sonlar samolyot balandligini oshirgandagi, gorizontal chiziqlardagi sonlar esa u tezligini oshirgandagi sarf qiladigan yoqilg'i miqdorini ko'rsatadi.

Masalani yechish jarayonini n_1+n_2=4+6=10 qadamlarga bo'lamiz.

Optimallashtirish jarayonini eng oxirgi qadamdan boshlaymiz. Bunda S_k ni o'z ichiga oluvchi o'ng tomondagi eng yuqori to'rtburchakka qaraymiz. Jadvaldan ko'rinadiki, S_k nuqtaga A_1 va A_2 nuqtalardan o'tish mumkin. Agar A_1 dan S_k ga o'tilsa (tezlik oshirilsa), u holda 8 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Agar A_2 nuqtadan S_k ga o'tilsa (balandlik oshirilsa), u holda 11 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. Ushbu raqamlarni A_1 va A_2 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga yozamiz. Bu qadamda eng kam yoqilg'i sarfiga mos keluvchi $A_1 \to S_k$ yo'nalish shartli optimal yechim deb qabul qilinadi va strelka bilan belgilanadi.

9-qadamda B_1, B_2, B_3 nuqtalardan S_k nuqtaga eng kam yoqilg'i sarf qilib o'tish yo'lini aniqlaymiz. B_1 nuqtadan S_k ga $B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalishi orqali o'tib 17 birlik yoqilg'i sarf qilish mumkin. B_2 nuqtadan S_k ga ikkita yo'l bilan o'tish mumkin: I. $B_2 \to A_1 \to S_k$; II. $B_2 \to A_2 \to S_k$

Bunda I yo'lda 18 birlik, II yo'lda esa 24 birlik yoqilg'i sarf qilinadi. B_3 nuqtadan S_k ga yagona $B_3 \to A_2 \to S_k$ yo'l bilan o'tish va 22 birlik yoqilg' sarf qilish mumkin. B_1, B_2, B_3 nuqtalar qoshidagi aylanachalarga ulardan S_k nuqtagacha sarf qilinadigan xarajatlardan eng kami yoziladi. Eng kam xarajat bilan bog'liq bo'lgan $B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalish shartli optimal yo'nalishi sifatida strelka bilan belgilanadi.

8-qadamda C_1, C_2, C_3, C_4 nuqtalardan S_k nuqtagacha eng kam xarajat sarf qilib o'tiladigan yo'l qidiriladi. Bunda C_1 nuqtadan S_k ga yagona $C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ yo'nalish orqali o'tib, 27 birlik yoqilg'i sarflash mumkin.

C_2 nuqtadan B_1 va B_2 nuqtalar orqali S_k nuqtaga o'tilganda teng miqdordagi (25 birlik) yoqilg'i sarf qilinadi.

C_3 nuqtadan S_k ga 2 ta o'tish yo'li mavjud:

I. $C_3 \to B_2 \to A_1 \to S_k$; II. $C_3 \to B_3 \to A_2 \to S_k$.

Bunda I yo'l bilan o'tilganda 28 birlik va II yo'l bilan o'tilganda esa 34 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

C_4 nuqtadan S_k nuqtaga yagona

$$C_4 \to B_3 \to A_2 \to S_k$$

yo'l bilan o'tiladi va 34 birlik yoqilg'i sarf qilinadi.

Bu bosqichda shartli optimal boshqarish eng kam yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan $C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$ va $C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$ yo'nalishlardan iborat bo'ladi. Bu yo'nalishlar strelka bilan ko'rsatiladi.

Shunday yo'l bilan davom etib, 7-qadamda 34 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 3 ta shartli optimal yo'nalish aniqlanadi:

a) $D_2 \to C_1 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

b) $D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

c) $D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$.

6-qadamda 42 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan 2 ta shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi:

a) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

b) $E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$.

5-qadamda 51 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan shartli optimal yo'nalishlar quyidagilar bo'ladi:

a) $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

b) $F_3 \to E_3 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$;

c) $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k$;

d) $F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k$.

4-qadamda 58 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan shartli optimal yo'nalish topiladi:

$$L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k.$$

3-qadamda 67 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k;$$

$$M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k;$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

2-qadamda 76 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k;$$

$$H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k;$$

shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi.

Oxirgi 1-qadamda 88 birlik yoqilg'i sarfi bilan bog'liq bo'lgan

$$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_2 \to A_1 \to S_k;$$

$$S_0 \to H_2 \to M_2 \to L_3 \to F_4 \to E_4 \to D_3 \to C_2 \to B_1 \to A_1 \to S_k;$$

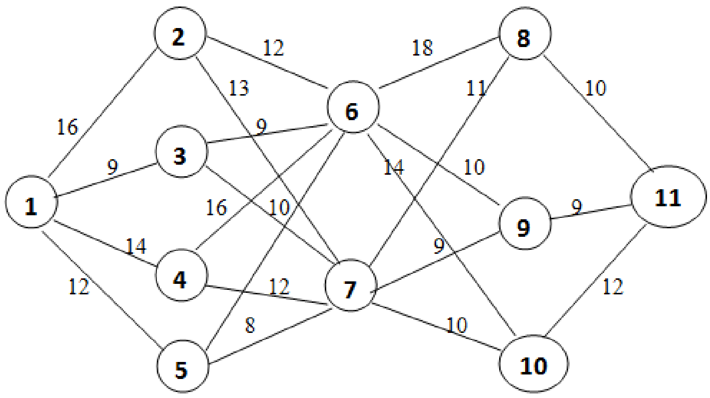
shartli optimal yo'nalishlar aniqlanadi. Bu yo'nalishlar optimal yo'nalish bo'ladi.

Optimal yechimga, asosan, samolyot 1-qadamda tezligini $V_0 + \Delta V$ darajagacha oshiradi, 2-qadamda u balandligini $H_0 + \Delta H$ gacha oshiradi. 3, 4, 5-qadamlarda samolyotning tezligi mos ravishda $V_0 + 2\Delta V$, $V_0 + 3\Delta V$, $V_0 + 4\Delta V$ ga oshishi, 6, 7, 8-qadamlarda esa uning balandligi mos ravishda $H_0 + 2\Delta H$, $H_0 + 3\Delta H$, $H_0 + 4\Delta H$ darajagacha oshishi kerak.

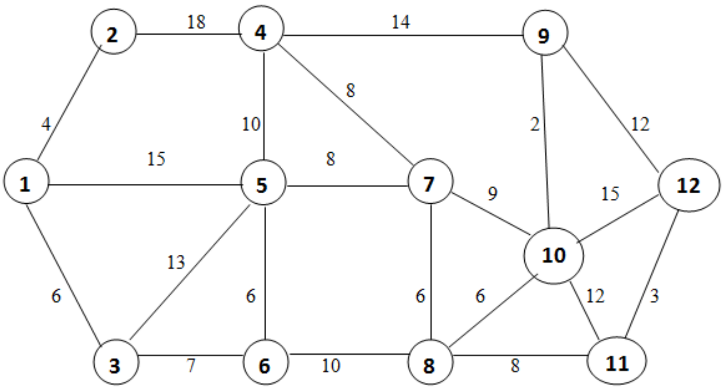
9 va 10-qadamlarda samolyot tezligini mos ravishda $V_0 + 5\Delta V$ va $V_0 + 6\Delta V$ darajagacha oshirishi kerak. Natijada u eng kam, ya’ni 88 birlik yoqilg’i sarf qiladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

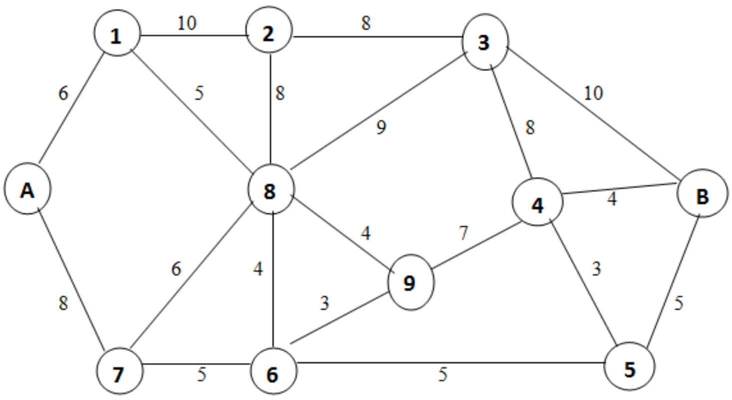
1. Quyidagi shaklda keltirilgan ma’lumotlar asosida 1-punktdan 11-punktgacha eng qisqa yo’lni aniqlang. Har ikkita punktni tutashtiruvchi kesma ustiga ular orasidagi masofa yozilgan.



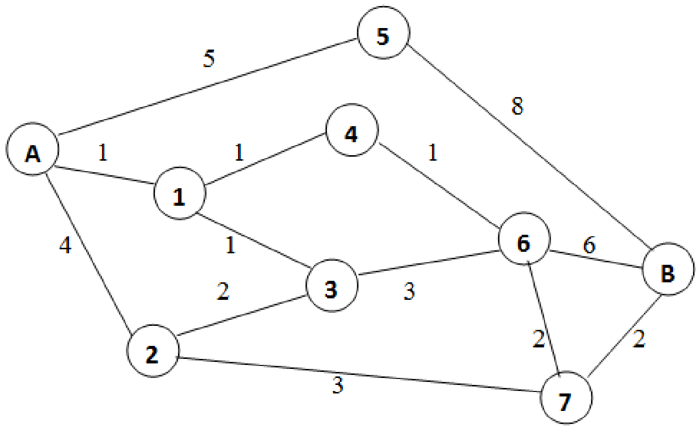
2. Quyidagi shaklda keltirilgan ma’lumotlar asosida 1-punktdan 12-punktgacha eng qisqa yo’lni aniqlang.



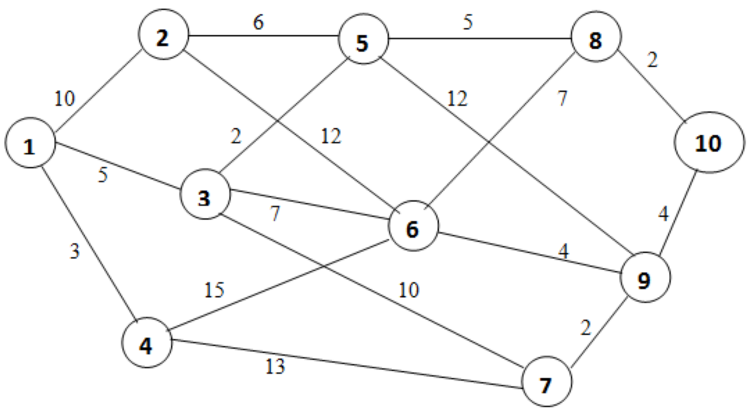
3. Quyida A va B punktlarni tutashtiruvchi yo’llar to’ri tasvirlangan. A -punktdan B punktgacha bo’lgan eng qisqa marshrutni aniqlang.



4. *A* punktdan *B* punktga mahsulot tashish rejalashtirilgan. Har bir oraliq punktlarda mahsulot birligini tashish uchun sarf qilinadigan xarajatlar ma’lum va ular tegishli kesmalar ustiga yozilgan. Mahsulotni *A* punktdan *B* punktga qaysi yo’nalish bo’yicha tashiganda umumiy transport xarajatlari minimal bo’ladi.

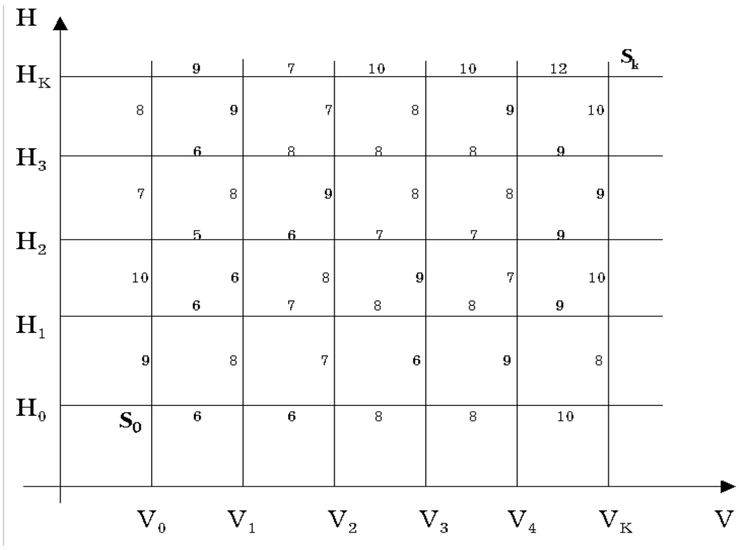


5. Quyidagi skakldа keltirilgan ma’lumotlar asosida 1-10 punktlar orasidagi eng qisqa masofani aniqlang.

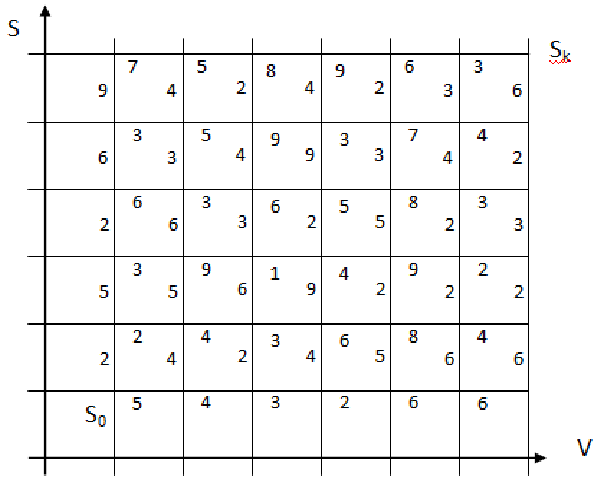


6-8-masalalarda samolyotning tezligi va balandligini boshqarish masalasini quyidagi jadvalda tasvirlangan ma’lumotlar asosida yeching va sarf qilinadigan eng kam yoqilg’i miqdorini aniqlang.

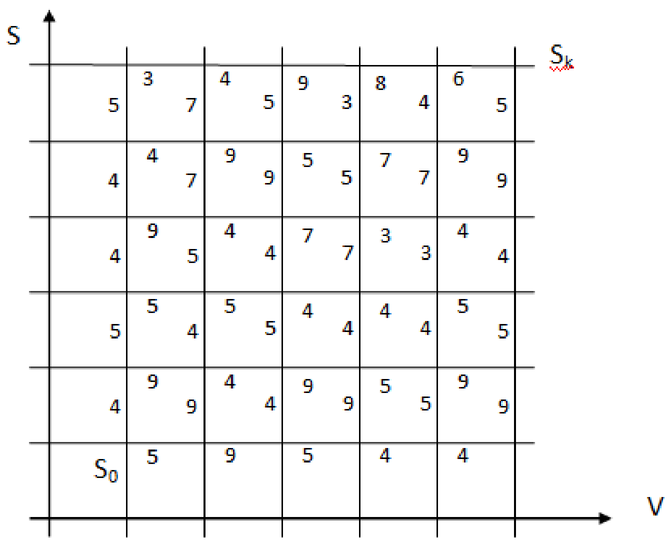
6.



7.



8.



25-MAVZU. INVESTISIYANI OPTIMAL TAQSIMLASH MASALASI

1. 5000 shartli birlikdagi investisiyani 3 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo’lsin. Har bir korxonaning o’ziga ajratilgan mablag’ miqdoriga bog’liq ravishda oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Korxonalarga ajratiladigan investisiyalar miqdori	**Korxonalar daromadi**		
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$
1000	1500	2000	1700
2000	2000	2100	2400
3000	2500	2300	2700
4000	3000	3500	3200
5000	3600	4000	3500

2. S=100 ming sh.p.b. dagi investisiyani 4 ta korxona orasida shunday taqsimlash kerakki, natijada olinadigan umumiy daromad maksimal bo’lsin. Har bir korxonaning ajratilgan mablag’ miqdoriga bog’liq ravishda oladigan daromadlari quyidagi jadvalda keltirilgan:

Investisiya hajmi (x_i) (sh.p.b.)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

3. Masalaning dastlabki shartlari quyidagi jadvalda keltirilgan. 100 mln. so’m pulni 4 ta korxona orasida shunday taqsimlash kerakki, olingan umumiy daromad maksimal bo’lsin.

Investisiya hajmi (mln. so’m)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

4. 120 mln. so'minvestisiyani 4 ta korxonagashunday taqsimlash kerakki, natijadaolingan umumiy daromad maksimal bo'lsin. Investisiya hajmiga bog'liq ravishda korxonalarningoladigan daromadlariquyidagi jadvalda keltirilgan.

Investisiya hajmi (mln. so'm)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
20	9	11	13	12
40	17	33	29	35
60	28	45	38	40
80	38	51	49	54
100	46	68	61	73
120	68	80	81	92

5. 200 mln. so'm kapital mablag'ni 4 ta korxonaga shunday taqsimlash kerakki, natijada olingan umumiy daromad maksimal bo'lsin. Ajratilgan mablag' hajmiga bog'liq ravishda korxonalarning oladigan daromadi quyidagi jadvalda keltirilgan.

Kapital mablag'ning hajmi (mln. so'm)	**Korxonalar daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
50	10	9	4	6
100	11	11	7	8
150	12	13	11	13
200	18	15	18	16

Quyidagi jadvallarda keltirilgan ma'lumotlar asosida birlashmaga ajratilgan kapital mablag'ni 5 ta korxonaga maksimal foyda olish maqsadida taqsimlangan.

6.

Korxonaga ajratilgan mablag'lar miqdori	**Korxonalar daromadi**				
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$Z_5(x)$
0	0	0	0	0	0
100	10	15	6	24	10
200	20	25	13	36	17
300	30	37	20	42	23
400	38	47	27	46	24
500	43	55	33	48	29

7.

Korxonaga ajratilgan mablag'lar miqdori	Korxonalar daromadi				
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$Z_5(x)$
0	0	0	0	0	0
30	3	5	8	6	10
60	5	8	13	10	16
90	7	10	17	13	21
120	8	12	20	15	24
150	9	13	23	16	27

8.

Korxonaga ajratilgan mablag'lar miqdori	Korxonalar daromadi				
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$Z_5(x)$
0	0	0	0	0	0
20	5	20	15	26	5
40	10	34	24	30	8
60	14	45	30	35	10
80	17	50	38	40	11
100	19	48	46	45	21

9.

Korxonaga ajratilgan mablag'lar miqdori	Korxonalar daromadi				
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$Z_5(x)$
0	0	0	0	0	0
40	28	20	18	25	32
80	42	27	26	20	33
120	51	30	37	29	45
160	57	31	47	36	47
500	61	32	53	41	58

10.

Korxonaga ajratilgan mablag'lar miqdori	Korxonalar daromadi				
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$	$Z_5(x)$
0	0	0	0	0	0
60	28	25	15	20	22
120	45	41	25	33	29
180	65	55	40	42	56
240	78	65	50	48	58
300	90	75	62	53	73

26-MAVZU. O’YINLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI. MATRISALI O’YIN

Misol. Berilgan matrisali o’yin uchun quyi va yuqori baholarni, hamda o’yinning optimal bahosini toping.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Yechish: Matrisaning qatorlaridagi eng kichik elementlar quyidagidan iborat:

$$\min_j (3, \quad 1, \quad 2) = 1;$$
$$\min_j (2, \quad 4, \quad -1) = -1;$$
$$\min_j (5, \quad 7, \quad 6) = 5.$$

Demak, o’yinning quyi bahosi

$$\alpha = \max_i (\min_j a_{ij}) = \max_i (1, \quad -1, \quad 5) = 5$$

bo’ladi. Endi har bir ustundagi eng katta elementlarni topamiz:

$$\max_i (3, \quad 2, \quad 5) = 5;$$
$$\max_i (1, \quad 4, \quad 7) = 7;$$
$$\max_i (2, \quad -1, \quad 6) = 6.$$

U holda o’yinning yuqori bahosi quydagiga teng bo’ladi:

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right) = \min (5, \quad 7, \quad 6) = 5.$$

Ushbu o’yindagi quyi va yuqori baholar o’zaro teng. Demak, o’yinning optimal bahosi

$$V = \alpha = \beta = 5$$

bo’ladi. Ushbu bahoni (yechimni) ta’minlovchi a_{31} element o’yinning egar nuqtasi, A_3 va B_1 strategiyalar esa optimal strategiyalar bo’ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi matrisali o'yinlarni minimax va maxmin usullari bilan yeching.

1. $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 15 & 24 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

27-MAVZU. MATRISALI O'YINNI CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH MASALASIGA KELTIRISH. TABIAT BILAN O'YIN

Misol.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisali o'yinni aralash strategiyalardagi yechimini toping.

Yechish: 1-o'ynovchi uchun o'yinni ChPMsiga aylantiramiz. Buning uchun eng avval quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge V; \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \ge V; \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \ge V; \end{cases}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

sistemadagi har bir tengsizlikning ikki tomonini (V>0) ga bo'lib va $t_i = \frac{x_i}{V}$ belgilash kiritib quydagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \ge 1; \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1; \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \ge 1; \end{cases}$$
$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{1}{V};$$
$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0.$$

Bu sistemani quyidagi ChPMsi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\begin{cases} 5t_1 + 3t_2 + 6t_3 \ge 1; \\ 3t_1 + 5t_2 + 3t_3 \ge 1; \\ 2t_1 + 5t_2 + 4t_3 \ge 1; \end{cases}$$
$$t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_3 \ge 0;$$
$$Z = \frac{1}{V} = t_1 + t_2 + t_3 \to \min.$$

2-o'ynovchi uchun berilgan matrisali o'yin quyidagi ChPMsiga aylanadi.

$$\begin{cases} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 \le 1; \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 \le 1; \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 \le 1; \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0;$$

$$F = \frac{1}{V} = u_1 + u_2 + u_3 \to \max.$$

Bu masalalar o'zaro ikkilangan masalalardir. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birini yechib, ikkinchisining yechimini osonlikcha topish mumkin.

Biz masalani simpleks usuli bilan yechamiz. Buning uchun uni normal holga keltirib, simpleks jadvalga joylashtiramiz:

$$\begin{cases} 5u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4 = 1; \\ 3u_1 + 5u_2 + 5u_3 + u_5 = 1; \\ 6u_1 + 3u_2 + 4u_3 + u_6 = 1; \end{cases}$$

$$u_j \geq 0; \quad \left(j = \overline{1,6}\right),$$

$$F = -u_1 - u_2 - u_3 \to \min.$$

Bazis	C_b	P_0	-1	-1	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_4	0	1	5	3	2	1	0	0
P_5	0	1	3	5	5	0	1	0
P_6	0	1	6^*	3	4	0	0	1
Δ_j		0	**1**	1	1	0	0	0
P_4	0	$1/6$	0	$1/2$	$-4/3$	1	0	$-5/6$
P_5	0	$1/2$	0	$7/2^*$	3	0	1	$-1/2$
P_1	-1	$1/6$	1	$1/2$	$2/3$	0	0	$1/6$
Δ_j		-1/6	0	**1/2**	1/3	0	0	-1/6
P_4	0	$2/21$	0	0	$-25/21$	1	$-1/7$	$-16/21$
P_2	-1	$1/7$	0	1	$6/7$	0	$2/7$	$-1/7$
P_1	-1	$2/21$	1	0	$5/21$	0	$-1/7$	$5/21$
Δ_j		-5/21	0	0	-2/21	0	-1/7	-2/21

Optimal yechim:

$$U = \left(\frac{2}{21}; \quad \frac{1}{7}; \quad 0\right); \; F_{\max} = \frac{1}{V} = \frac{5}{21};$$

$$V = \frac{21}{5}. \; y_1 = V \cdot u_1 = \frac{21}{5} \cdot \frac{2}{21} = \frac{2}{5};$$

$$y_2 = V \cdot u_2 = \frac{21}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{5};$$

$$y_3 = V \cdot u_3 = \frac{21}{5} \cdot 0 = 0; \; Y = \left(\frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad 0\right).$$

Endi 1-o'ynovchi uchun optimal aralash strategiyani topamiz.

$$T=\left(t_1;\quad t_2;\quad t_3\right)=\left(0;\quad \frac{1}{7};\quad \frac{2}{21}\right)$$

hamda quyidagi munosabatlar asosida $X=(x_1,x_2,x_3)$ aralash strategiyani topamiz:

$$x_1=V\cdot t_1=\frac{21}{5}\cdot 0=0; \qquad x_3=V\cdot t_3=\frac{21}{5}\cdot\frac{2}{21}=\frac{2}{5};$$

$$x_2=V\cdot t_2=\frac{21}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{3}{5}; \qquad X^*=\left(0;\quad \frac{3}{5};\quad \frac{2}{5}\right);$$

Javob: $X^*=\left(0;\quad \frac{3}{5};\quad \frac{2}{5}\right),\quad Y^*=\left(\frac{2}{5};\quad \frac{3}{5};\quad 0\right),\quad V=\frac{21}{5}.$

Mustaqil yechish uchun masalalar

I. Quyidagi matrisali o'yinlarni chiziqli programmalashtirish usullari bilan yeching:

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ **5.** $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ **6.** $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **8.** $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

II. O'yinlar nazariyasiga doir quyidagi masalalarni yeching.

9. Ikkita A va B o'ynovchi bir vaqtning o'zida 1, 2 yoki 3 ta barmog'ini ko'rsatadi. Agar ikkala o'ynovchi ko'rsatgan raqamlarining ikkalasi ham juft yoki toq bo'lsa, u holda A o'ynovchi shu raqamlar summasiga teng bo'lgan yutuqqa ega bo'ladi. Agar bu o'ynovchilar ko'rsatgan raqamlarining biri juft, ikkinchisi toq son bo'lsa, u holda B o'ynovchi shu raqamlar yig'indisi miqdorida yutuqqa ega bo'ladi. Ushbu o'yin uchun yutug'lar matrisasini tuzing va ikkala o'ynovchi uchun optimal strategiyani va o'yinning bahosini aniqlang.

10. Ikkita o'ynovchining birinchisi 1 dan 3 gacha bo'lgan ixtiyoriy butun sonni tanlaydi. Ikkinchi o'ynovchi ushbu sonni o'ylab topishi kerak. Agar ikkinchi o'ynovchi to'g'ri topsa, u holda u topgan soni miqdorida yutuqqa ega bo'ladi. Aks holda shunday miqdordagi yutuqqa birinchi o'ynovchi ega bo'ladi. Masalaning yutug'lar matrisasini tuzing hamda o'yinning optimal yutug'ini hisoblang.

11. Ikkita o'zaro raqobatli yuridik shaxslar 3 ta korxonani qayta ta'mirlashda ishtirok etmoqda. Ushbu yuridik shaxslarning foydasi ular sarf qilgan kapital mablag' hajmiga va investisiya sharoitiga bog'liq bo'ladi. Birinchi yuridik shaxsning foydasi ikkinchisining yutqazuviga teng deb qaralganda A o'ynovchining yutug'lar matrisasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A shaxsning yutug'ini maksimallashtiruvchi optimal strategiyani toping va o'yinning yutug'ini aniqlang.

12. A va B tarmoqlar 4 ta korxonani qayta ta'mirlash uchun kapital mablag' sarf qiladi. Sarflangan kapital mablag' va mahalliy sharoitga bog'liq ravishda A korxonaning foydasi quyidagi matrisa elementlari ko'rinishida ifodalangan:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A va B tarmoqlarning optimal strategiyalarini toping.

13. Ikkita A va B o'ynovchi 3 dan 6 gacha bo'lgan ixtiyoriy bir sonni yozadi. Agar A o'ynovchi x sonni yozib, B o'ynovchi y sonni yozsa, u holda agar $\frac{x}{y}>1$ bo'lsa, A o'ynovchi xy miqdordagi yutug'ga ega bo'ladi. Aks holda, agar $\frac{x}{y}<1$ bo'lsa, B o'ynovchi $x+y$ miqdordagi yutuqqa ega bo'ladi. Agar $\frac{x}{y}=1$ bo'lsa, u holda o'yin durang natija bilan tugaydi. To'lovlar matrisasini tuzib o'yinning yechimini toping.

14. A o'ynovchi 2 ta joydan bittasiga berkinishi mumkin. B o'ynovchi uni qidirib topsa, A o'ynovchidan bir pul birligidagi jarima undiradi. Aks holda B o'ynovchi A o'ynovchiga bir pul birligidagi jarima to'laydi. Ushbu o'yin uchun yutug'lar matrisasini tuzing va o'yinning yutug'ini aniqlang.

15. Quyida berilgan jadvaldagi ma'lumotlar asosida yutug'larni maksimallashtiruvchi strategiyani toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	15	17	20
A_2	25	27	23
P	0,2	0,7	0,1

16. Quyidagi keltirilgan yutug'lar matrisasidan foydalanib, YQQShning optimal strategiyasini Laplas mezoni asosida toping.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	17	21	24	34
A_2	30	26	24	32
A_3	19	18	20	33
A_4	28	36	28	24

17. Tabiat bilan o'yin quyidagi to'lovlar matrisasi orqali berilgan.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3
A_1	61	14	13
A_2	14	65	13
A_3	60	6	10
A_4	6	17	3

Vald, Sevidj va Gurvis mezonlari asosida optimal strategiyani toping.

18. Deylik, fermer ho'jaligi paxta yetishtirishga ixtisoslashgan bo'lsin. Paxta hosildorligiga "tabiat"ning 4 xil holat ta'sir ko'rsatishi mumkin bo'lsin. T_1 – yog'ingarchilik me'yoridan yuqori bo'ladi – ehtimoli P_1=0,3; T_2 – qurg'oqchilik bo'ladi – ehtimoli P_2=0,3; hamda ehtimollari o'zaro teng bo'lgan 2 ta o'rtacha holat (P_3=P_4=0,2). Tabiatning bu holatlariga qarshi fermer 3 ta A_1, A_2, A_3 chora tadbirlarni ko'rishi oqibatida turli miqdorda daromad olishi mumkin. Quyida daromadlar matrisasi keltirilgan.

A_i \ T_j	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	1	2	3	6
A_2	2	5	4	3
A_3	4	7	6	2
R	0,3	0,3	0,2	0,2

Bayes mezoniga asosan maksimal daromadni ta'minlovchi optimal strategiyani toping.