IV BO'LIM

FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI

10 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLARNING OZARO JOYLASHUVI

Fazodagi ikkita a va b to 'g‘ri chiziq bir tekislikda yotsa va kesishmasa, ular *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi. a va b to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi $a||b$ tarzda yoziladi.

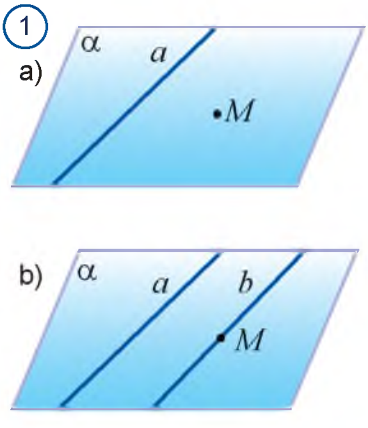
Tekislikda berilgan nuqta orqali berilgan to‘gri chiziqqa yagona parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Bunday xossa - fazoda ham o‘rinli bo‘ladi:

Teorema 3.1. Fazoda berilgan to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa yagona parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.

Isbot: a - berilgan to‘g‘ri chiziq va M - bu to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsin (1.a- rasm). Isbotlangan 2.1- teoremaga ko‘ra, a - berilgan to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan M nuqta orqali yagona α tekislik o‘tkazish mumkin.

α tekislikda esa M nuqta orqali a - berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel yagona b to‘g‘ri chiziqni o‘tkazish mumkin (1.b- rasm).

1

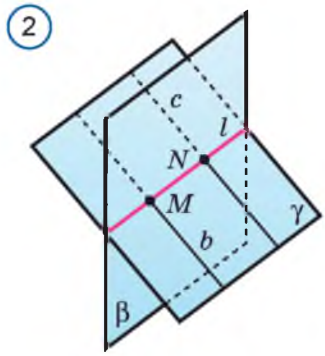


Xuddi shu - b to‘g‘ri chiziq izlangan yagona to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. ❑

Tekislikda ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlardan biri uchinchi to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tsa, ularning ikkinchisi ham bu to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi. Shunga o‘xshash xossa - fazoda ham o‘rinli bo‘ladi:

Teorema 3.2. Fazoda ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlardan biri tekislikni kesib o‘tsa, ularning ikkinchisi ham bu tekislikni kesib o‘tadi.

Isbot: b va c parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, ularning biri - b to‘g‘ri chiziq



berilgan β tekislikni M nuqtada kesib o‘tsin (2.a- rasm).

b va c to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lgani uchun ular bitta tekislikda yotadi. Bu - γ tekislik bo‘lsin.

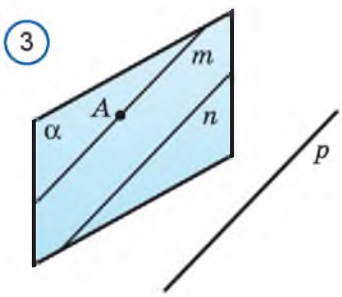
β va γ tekisliklar uchun M umumiy nuqta. Unda S3 aksiomaga ko‘ra, bu tekisliklar bitta l to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Bu to‘g‘ri chiziq γ tekislikda yotadi va b to‘g‘ri chiziqnl M nuqtada kesib o‘tadi. Shuning uchun, bu to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa parallel c to‘g‘ri chiziqni ham N nuqtada kesib o‘tadi.

l to‘g‘ri chiziq β tekislikda ham yotgani uchun N nuqta bu β tekislikka ham tegishli bo‘ladi. Demak, N nuqta β va γ tekisliklar uchun umumiy nuqta.

Endi c to‘g‘ri chiziqning β tekislik bilan boshqa umumiy nuqtasi yo‘qligini ko‘rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. Aytaylik, c to‘g‘ri chiziqning β tekislik bilan yana boshqa K umumiy nuqtasi bor bo‘lsin. Unda S2 aksiomaga ko‘ra, c to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotadi. Unda, c to‘g‘ri chiziq β va γ tekisliklar uchun umumiy bo‘ladi. Lekin, l - bunday to‘g‘ri chiziq edi. Bundan c to‘g‘ri chiziqning l to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushishi kelib chqadi. Buning esa bo‘lishi mumkin emas. Chunki b to‘g‘ri chiziq c to‘g‘ri chiziqqa parallel va l to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi. Ziddiyat, farazimizning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi. ❑

Planimetriyadan sizga ma'lumki, ikki to‘gri chiqizlarning har biri uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ular o‘zaro parallel bo‘ladi. Bu xossa fazoda ham o‘rinli bo‘lib, u to‘gri chiqizlarning parallellik alomati deb yuritiladi.

Teorema 3.3. Uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel ikki to‘gri chiziq o‘zaro paralleldir.



Isbot: Aytaylik, m va n to‘g‘ri chiziqlar p to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin. m va n to‘g‘ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishi va o‘zaro kesishmasligini, ya'ni parallel ekanligini ko‘ratamiz.

m to‘g‘ri chiziqda A nuqtani olamiz va bu nuqta va n to‘g‘ri chiziq orqali α tekislik o‘tkazamiz. m to‘g‘ri chiziqning α tekislikda yotishini isbotlaymiz.

Aytaylik, bunday bo‘lmasin. m to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lgani uchun, u tekislikni kesib o‘tadi. Unda 3.2 teoremaga ko‘ra,bu tekislikni m to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan p to‘g‘ri chiziq ham, p to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan n to‘g‘ri chiziq ham kesib o‘tadi. Lekin, buning bo‘lishi mumkin emas, chunki n to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi.

Demak, m va n to‘g‘ri chiziqlar α tekislikda yotadi.

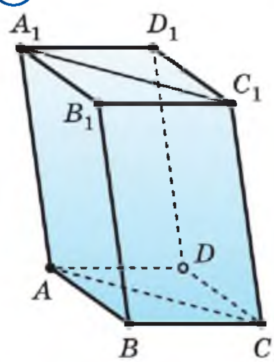
Endi bu to‘gri chiziqlarning kesishmasligini isborlaymiz. Yana teskarisini faraz qilamiz. m va n to‘g‘ri chiziqlar qandaydir B nuqtada kesishsin. Unda B nuqta orqali p to‘g‘ri chiziqqa parallel ikikita m va n to‘g‘ri chiziqlar o‘tadi. Buning esa 3.1 teoremaga ko‘ra bo‘lishi mumkin emas.❑

Endi parallelepipedning quyidagi xossalarini isbotlaymiz.

Xossa 1. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedda (4-rasm) asos diagonallari va yon qirralardan tuzilgan ACC_1A_1 to'rtburchak parallelogrammdan iborat bo'ladi.***

Haqiqatan, parallelepipedning ABB_1A_1 va BCC_1B_1 yoqlari ta'rifiga ko'ra, parallelogrammdan iborat.

4



Bu parallelogrammlarning qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng bo'ladi. Xususan, $AB = A_1B_1$ va $BC = B_1C_1$.

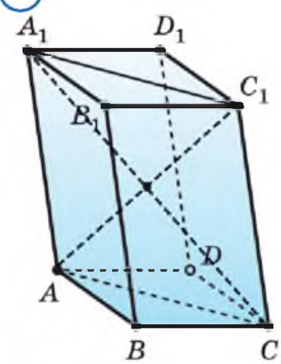
Parallelepiped ta'rifiga ko'ra, $AA_1 \parallel BB_1$ va $BB_1 \parallel CC_1$. Unda 3.2 teoremaga ko'ra, $AA_1 \parallel CC_1$ va $AA_1 = CC_1$ bo'ladi. Demak, AC_1CA_1 to'rtburchak - parallelogramm.

Xossa 2. ***$ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedning (4-rasm) qarama-qarshi yoqlari o'zaro teng.***

Yuqoridagi xossaga ko'ra, AC_1CA_1 - parallelogramm va $AC = A_1C_1$. Unda ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar uchta tomon bo'yicha teng bo'lib, ABC va $A_1B_1C_1$ burchaklar ham o'zaro teng bo'ladi. Natijada, $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammlar ham o'zaro teng bo'ladi.

Boshqa qarama-qarshi yoqlarning tengligi ham shu tariqa isbotlanadi.

5



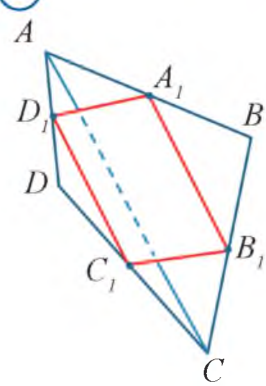
Xossa 3. ***Parallelepipedning barcha diagonallari bitta nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi (5-rasm).***

1- xossaga ko'ra, AC_1CA_1 parallelogramm. Unda bu parallelogramm diagonallari A_1C va AC_1 bitta nuqtada kesishadi va keshshish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Qolgan diagonallarning kesishishi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linishi shunga o'xshash isbotlanadi.

Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi kesmalar (nurlar) o'zaro *parallel kesmalar (nurlar)* deb ataladi.

6



Masala. Uchlari bitta tekislikda yotmaydigan fazoviy to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari bo'lishini isbotlang.

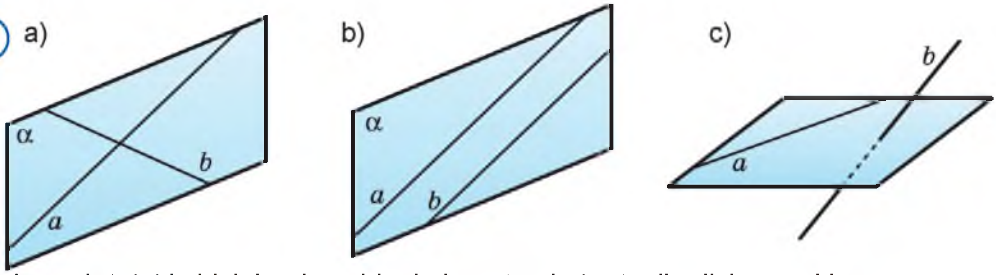
Isbot: $ABCD$ - fazoviy to'rtburchak va A_1, B_1, C_1 va D_1 - to'rtburchak tomonlarining o'rtalari bo'lsin (6- rasm). U holda, A_1B_1 kesma - ABC uchburchakning AC tomoniga parallel o'rta chizig'i, C_1D_1 - ACD uchburchakning AC tomoniga parallel o'rta chizig'i bo'ladi.

3.3 teoremaga ko'ra A_1B_1 va C_1D_1 to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi. Demak, ular bir tekislikda yotadi.

A_1D_1 va B_1C_1 to'g'ri chiziqlarning parallelligi ham xuddi shunday isbotlanadi.

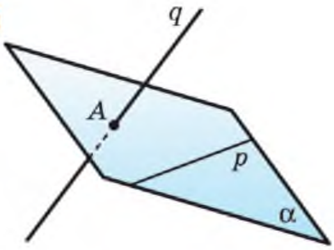
Shunday qilib, $A_1B_1C_1D_1$ to'rtburchak bitta tekislikda yotadi va uning qarama-qarshi tomonlari parallel. Demak, u parallelogrammdir.❑

Agar fazoda ikki to'g'ri chiziq o'zaro kesishsa yoki o'zaro parallel bo'lsa, ular bitta tekislikda yotadi (7.a va 7.b- rasm). Fazoda bitta tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi (7.c- rasm).

7


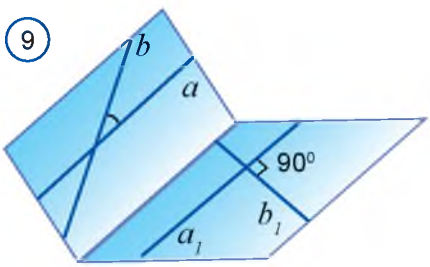
Ayqash to‘g‘ri chiziqlarni quyidagi alomatga ko‘ra tanib olish mumkin:

Teorema 3.4. Agar ikki to‘g‘ri chiziqlardan biri biror tekislikda yotsa, ikkinchisi esa bu tekislikni birinchi to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtada kesib o‘tsa, u holda bu to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘ladi.

8


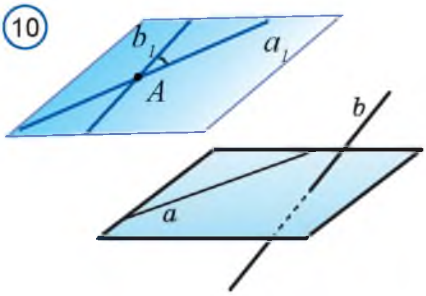
Isbot. Aytaylik, p to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotsin. q to‘g‘ri chiziq esa bu tekislikni p to‘g‘ri chiziqqaregishli bo‘lmagan A nuqtada kesib o‘tsin (8- rasm). p va q to‘g‘ri chiziqlarning ayqash ekanligini isbotlatmiz.

Teskarisini faraz qilamiz: p va q to‘g‘ri chiziqlar birorta β tekislikda yotsin. U holda β tekislikka p to‘g‘ri chiziq va A nuqta tegishli bo‘ladi. O'z navbatida A nuqta q tekislikka ham tegishli. Demak, α va β tekisliklar ustma-ust tushadi. Natigada, shartga ko‘ra α tekislikka tegishli bo‘lmagan q to‘g‘ri chiziq bu tekislikka tegishli bo‘lib qoldi. Ziddiyat, farazimizning noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatadi❑

9


Ikki to'g'ri chiziqning kesishishidan hosil bo'lgan qo'shni burchaklarning kichigiga *ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak* deyiladi.

Ayqash to‘gri chiziqlar orasidagi burchak deb, bu to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi (9- rasm).

10


Amalda a va b ayqash to‘g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish uchun (10- rasm)

1) biror A nuqta tanlanadi:

2) A nuqtadan ayqash to‘g‘ri chiziqlarga parallel a_1 va b_1 to‘g‘ri chiziqlar o‘tkaziladi;

3) bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak o‘lchanadi.

Bu algoritm natijasi - A nuqtaga bog'liq emasligi haqida o'ylab ko'ring.

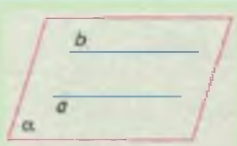
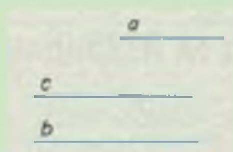
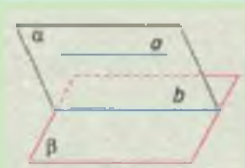
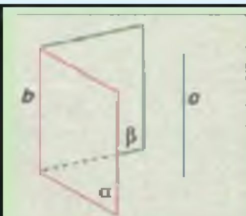
Orasidagi burchak 90^0 ga teng to'g'ri chiziqlar *perpendikular to'g'ri chiziqlar* deb ataladi. Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak 0^0 ga deb hisoblanadi.

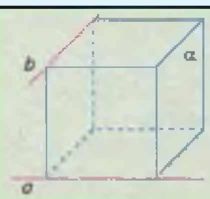
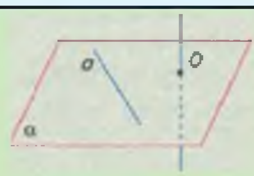
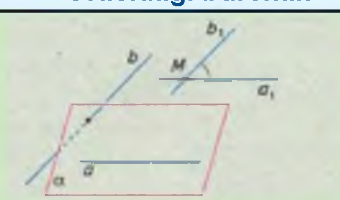
Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Parallel to‘g‘ri chiziqlarning qanday xossalarini bilasiz?*
2. *To‘g‘ri chiziqlarning parallellik alomatini ayting*
3. *Parallelepipedning qanday xossalarini bilasiz?*
4. *To‘g‘ri chiziqlarning ayqashlik alomatini ayting.*
5. *To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?*
6. *Ayqash to'gri chiziqlar parallel bo'lishi mumkinmi?*

10- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

Shakllar	O'zaro joylashuni		
a va b **to'g'ri chiziqlar**	bitta tekislikda yotadi	bitta umumiy nuqtaga ega	perpendikular $a \perp b$
			perpendikular emas
		umumiy nuqtaga ega emas	parallel $a \parallel b$
	bitta tekislikda yotmaydi	umumiy nuqtaga ega emas	parallel $a \parallel b$
			ayqash $a \dot{-} b$

Parallel to'g'ri chiziqlar			
Ta'rifi	**Alomatlari**		
 $a \parallel b$, a va b to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotsa va kesishmasa	 Agar $a \parallel b$, $a \parallel c$ bo'lsa, $a \parallel c$ bo'ladi	 Agar α x $\beta = b$, $a \subset \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $b \parallel a$ bo'ladi	 Agar α x $\beta = b$, $a \parallel \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $a \parallel b$ bo'ladi

Ayqash to'g'ri chiziqlar		
Ta'rifi	**Alomatlari**	**Orasidagi burchak**
 $a \dot{-} b$, a va b to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotmasa	 Agar $a \subset \alpha$, a x $\beta = O$, $O \notin \alpha$ bo'lsa, $a \dot{-} b$ bo'ladi	 Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb ularga parallel bo'lgan, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.

4.1. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipeddagi; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmadagi parallel qirralar juftlarini aniqlang.

4.2. Qanday piramidlarda parallel qirralar bo'ladi?

4.3. Ma'lumki, tekislikda to'g'ri chiziq parallel to'g'ri chiziqlardan birini kesib o'tsa, ikkinchisini ham kesib o'tadi. Bu xossa fazoda ham o'rinli bo'ladimi?

4.4. To'g'ri tasdiqni toping.

A) Fazoda to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan unga parallel ko'plab to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin;

B) Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar o'zaro kasishadi;

C) Agar ikki to'g'ri chiziq tekislikda yotsa, ular kesihsadi;

*D) T*o'g'ri chiziqdan va unda yotmagan nuqtadan ikkita turli tekislik o'tkazish mumkin;

E) Fazoning tekislikda yotmagan nuqtasidan ko'plab bu tekislikni kesadigan to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin.

4.5. A uchi α tekislikda yotgan AB kesmadan C nuqta tanlangan. B va C nuqtalardan o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziqlar α tekislikni mos ravishda B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o'tadi. Agar a) C nuqta B kesmaning o'rtasi, va BB_1 = 14 sm; b) $AC : CB$ = 3 : 2 va BB_1 = 50 sm bo'lsa, CC_1 kesmaning uzunligini toping.

4.6. Bitta tekislikda yotmaydigan $MNOP$ parallelogramm va EK asosli $MNEK$ trapetsiya berilgan. a) PO va EK to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini aniqlang. b) tarpetsiyaning asoslari MN = 45 sm, EK = 55 sm ga teng bo'lib, unga ichki aylana chizish mumkin. Trapetsiyaning perimetrini toping.

4.7. a va b to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotadi. Bu to'g'ri chiziqlarning mumkin bo'lgan o'zaro joylashishishini ko'rsating.

A) a va b parallel; *B)* a va b kesishadi; *C)* a va b kesishmaydi; *D)* a va b ayqash; *E)* a va b parallel emas.

4.8. a va b to'g'ri chiziqlar c to'gri chiziqqa parallel. a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishishi mumkin?

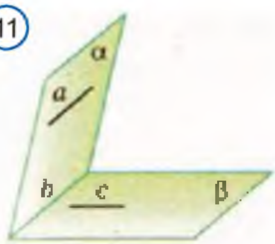
4.9. 11- rasmda α va β tekisliklar b to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi. Agar $a//b$, c va b to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmsa, a va c to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishishi mumkin?

4.10. 12- rasmda M nuqta ABC uchburchak tashqi sohasida yotibdi. MA, MC, MB to'g'ri chiziqlarga ayqash to'gri chiziqlarni aniqlang.

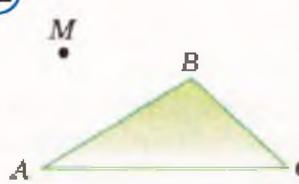
4.11. 13- rasmda PQ to'g'ri chiziq $ABCD$ to'rtburchakning tashqi sohasida yotadi va BC ga parallel. a) PQ va AB; b) PQ va CD; c) PQ va AD qanday to'g'ri chiziqlar?

4.12. 14- rasmda M nuqta ABC uchburchak tashqi sohasida yotibdi. MA, MB,

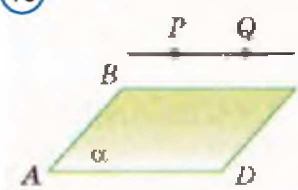
11

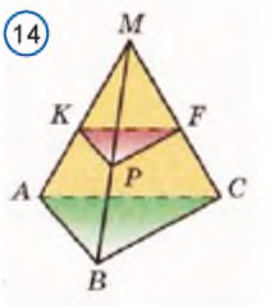


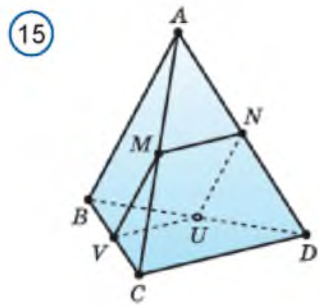
12

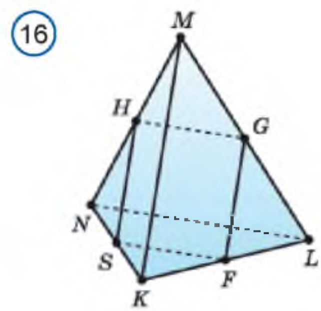


13









MC kesmalarning o'rtalari mos ravishda K, F, P nuqtalar bilan belgilangan. 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC to'g'ri chiziqlardan qaysilari o'zaro papallel?

4.13. M, N, U, V nuqtalar $ABCD$ piramidaning mos ravishda AC, AD, BD va BC qirralarining o'rtalari (15- rasm). Agar AB = 20 sm, CD = 30 sm bo'lsa, $MNUV$ to'rtburchakning perimetrini toping.

4.14. H, G, F, S nuqtalar $KLMN$ uchburchakli piramidaning mos ravishda MN, ML, LK va KN qirralarining o'rtalari (16- rasm). Agar LK = 18 mm, MN = 22 mm bo'lsa, $HGFS$ to'rtburchakning perimetrini toping.

4.15. To'g'ri chiziqdan turli ikkita tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

4.16. Bitta tekislikda yotmagan to'rtta nuqta berilgan. Ularning uchtasidan o'tuvchi nechta tekislik o'tkazish mumkin?.

4.17. A, B, C nuqtalar berilgan ikkita tekisliklarning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

4.18. a to'g'ri chiziq bo'ylab kesishuvchi ikkita tekislik berilgan. b to'g'ri chiziq ulardan birida yotadi va ikkinchisini kesib o'tadi. a va b to'g'ri chiziqlarning kesishishini isbotlang.

4.19. Uchta tekislikning har ikkitasi o'zaro kesishadi. Tekisliklarning kesishish to'g'ri chiziqlaridan ikkitasi biror nuqtada kesishsa, uchunchi kesishish chizig'i ham bu nuqtadan o'tishini isbotlang.

4.20. Agar to'rtbuchak diagonallari kesishsa, unda uning uchlari bitta tekislikda yotishini isbotlang.

4.21. K,Z,M,N nuqtalar mos ravishda $SABC$ uchburchakli piramidaning SA, AC, BC, SB kesmalarining o'rtalari. Agar piramidaning yon qirralari b, asosining tomoni a ga teng bo'lsa, $KZMN$ to'rtburchak perimetrini toping.

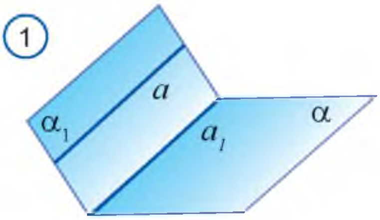
4.22. XU va VT to'g'ri chiziqlar parallel, XY va VT to'g'ri chiziqlar esa ayqash. Agar a) $\angle YXU = 40°$; b) $\angle YXU = 135°$; c) $\angle YXU = 90°$ bo'lsa, XY va VT to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

4.23. l to'g'ri chiziq $ABCD$ parallelogrammning BC tomoniga parallel va uning tekisigida yotmaydi. l va CD to'g'ri chiziqlar ayqash ekanligini isbotlang. Agar piramidaning burchaklaridan biri a) 58°; b) 133° bo'lsa, l va CD to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

11 FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKNING O'ZARO JOYLASHUVI

Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishmasa, *to‘g‘ri chiziq va tekislik parallel* deyiladi. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallelligi quyidagi alomat orqali aniqlanadi.

Teorema 3.5. Agar tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq shi tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning o‘ziga ham parallel bo‘ladi.



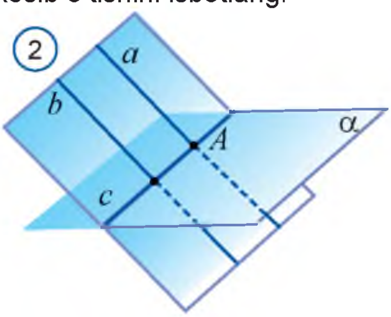
Isbot. Aytaylik, α - tekislik, a - unda yotmagan to‘g‘ri chiziq, a_1 esa α tekislikda yotgan va a ga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘lsin.

a va a_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali α_1 tekislikni o‘tkazamiz (1- rasm). Ravshanki, α va α_1 tekisliklar a_1 to‘g‘ri chiziq, bo‘yicha kesishadi.

Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tsa, u holda kesishish nuqtasi a_1 to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lar edi. Ammo buning iloji yo‘q, chunki a va a_1 to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel. Shunday qilib, a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tma olmaydi.

Demak, a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel. ❑

Masala. Agar tekislik ikki parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tsa, ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang.

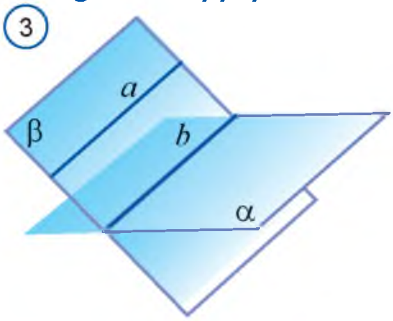


Isbot. a va b - ikki parallel to‘g‘ri chiziq, α esa a to‘gr`i chiziqni A nuqtada kesib o‘tuvchi tekislik bo‘lsin (2- rasm).

a va b to‘g‘ri chiziqlardan tekislik o‘tkazamiz. U α tekislikni biror c to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. c to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqni A nuqtada kesib o‘tadi.

Demak unga parallel bo‘lgan b to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tadi. c to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgani uchun α tekislik b to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tadi.

Teorema 3.6. Agar bir tekislik ikkinchi tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tsa, bu tekisliklarning kesishish to'g'ri chizig'i ham berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi.



Isbot. Aytaylik, a to‘g‘ri chiziq α - tekislikka parallel va β tekislikda yotsin. b to‘g‘ri chiziq esa α va β tekisliklarning kesishish chizig'i bo‘lsin (3-rasm). U holda, a va b to‘g‘ri chiziqlar β tekislikda yotadi va o'zaro kesishishmaydi. Aks holda, a to‘g‘ri chiziq β tekislikni kesib o'tar edi.

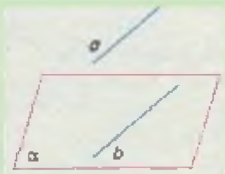
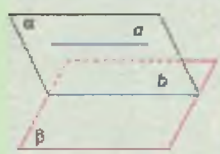
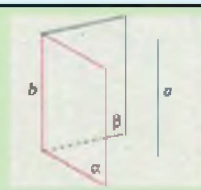
Demak, a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel. ❑

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. To'g'ri chiziq va tekislik fazoda o'zaro qanday joylashishi mumkiin?
2. To'g'ri chiziq va tekislik qachon parallel bo'ladi?
3. To'g'ri chiziqning tekislikka parallellik alomatini ayting.
4. Fazoda to'g'ri chiziq va tekisliklarning joylashuvi bilan bog'liq qanday xossalarni bilasiz?

11- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

a to'g'ri chiziq va α tekislik	ko'p umumiy nuqtalarga ega	to'g'ri chiziq tekislikda yotadi	$a \subset \alpha$
	bitta umumiy nuqtaga ega	to'g'ri chiziq tekislikni kesadi	$a \times \alpha$
	umumiy nuqtaga ega emas	to'g'ri chiziq tekislikka parallel	$a \parallel \alpha$

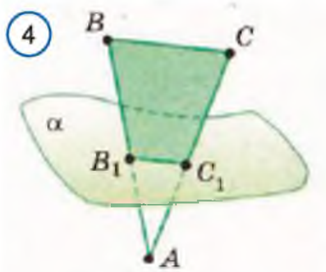
TO'G'RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI			
Ta'rifi	**Alomatlari**	**Xossalari**	
 $a \parallel \alpha$, agar a va α kesishmasa	 Agar a - α tekislikda yotmasa va $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ bo'lsa, $a \parallel \alpha$ bo'ladi	 Agar b - α va β tekisliklar kesishish chizig'i, $a \subset \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $b \parallel a$ bo'ladi	 Agar b - α va β tekisliklar kesishish chizig'i, $a \parallel \alpha$ va $a \parallel \beta$ bo'lsa, $a \parallel b$ bo'ladi

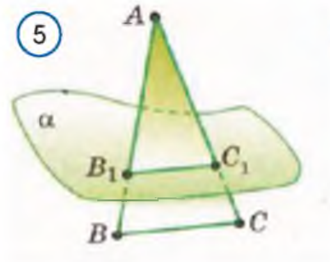
4.24. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ muntazam oltiburchakli prizmaning bir-biriga parallel bo'lgan qirra va yoqlarini aniqlang.

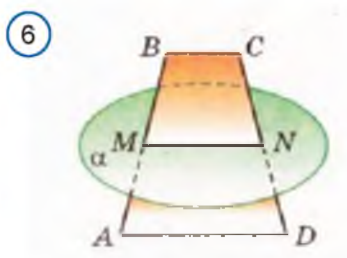
4.25. To'g'ri tasdiqni tanlang:
A) Fazoda to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa parallel ko'plab to'gri chiziqlar o'tkazish mumkin;
B) Uchinchi to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi;
C) Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, to'gri chiziq tekislikni kesib o'tadi;
D) to'g'ri chiziq va unda yotmagan nuqtadan ikkita har xil tekislik o'tkazish mumkin;
E) fazoda tekislikda yotmagan nuqtadan berilgan tekislikni kesib o'tuvchi ko'plab to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin.

4.26. A va C nuqtalar α tekislikda yotadi. B va D nuqtalar β tekislikda yotadi. AC, CD, BD, AB, BC va AD to'g'ri chiziqlardan qaysilari β tekislikni kesib o'tadi?

4.27. ABC uchburchak α tekislikni B_1 va C_1 nuqtalarda kesib o'tadi (4- rasm). Agar $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ sm, $BC \parallel B_1C_1$ bo'lsa, B_1C_1 kesmaning uzunligini toping.







4.28. α tekislik ABC uchburchakmimg AB va AC tomonlarini B_1 va C_1uqtalarda kesib o'tadi (5- rasm). Agar $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12$ sm, $BC // \alpha$ bo'lsa, BC kesmaning uzunligini toping.

4.29. α tekislik $ABCD$ trapetsiyaning AD asosiga parallel va yon tomonlarini M va N nuqtalarda kesib o'tadi (6- rasm). Agar $AD = 17$ sm, $BC = 9$ sm bo'lsa, MN kesmaning uzunligini toping.

4.30. Tekislikka unda yotmagan nuqtadan unga nechta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin?

4.31. a to'g'ri chiziq α tekislikka parallel. To'g'ri tasdiqlarni toping.

A) a to'g'ri chiziq α tekislikning faqat bitta to'g'ri chizig'iga parallel bo'ladi;

B) a to'g'ri chiziq α tekislikning bitta to'g'ri chizig'idan boshqa barcha to'g'ri chiziqlariga ayqash bo'ladi;

C) α tekislikkda a to'g'ri chiziqqa parallel va ayqash bo'lgan ko'plab to'g'ri chiziqlar topiladi;

D) α tekislikkda faqat bitta a to'g'ri chiziqqa parallel va bu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq mavjud.

4.32. A, B, C, D nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. M, N, K, Z nuqtalar mos ravishda AD, BD, BC, AC kesmalarning o'rtalari.Agar $CD=AB$ bo'lsa, MK va NZ to'g'ri chiziqlarning perpendikularligini isbotlang.

4.33. $ABCD$ parllelogrammning AB va BC tomonlari α tekislikni kesib o'tadi. AD va DC to'g'ri chiziqlar ham α tekislini kesib o'tishini isbotlang.

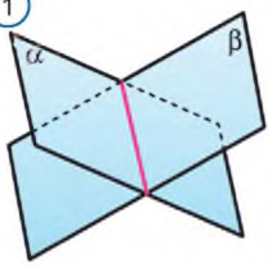
4.34. ABC va ABD uchburchaklar bitta tekislikda yotmaydi. CD to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ixtiyoriy to'g'ri chiziqning bu uchburchaklar tekisligini kesib o'tishini isbotlang.

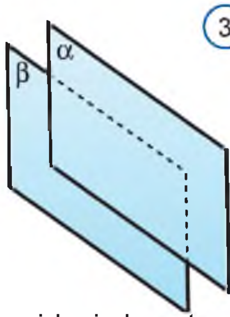
4.35. Berilgan ikki to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning bir tekidlikda yotishini isbotlang.

12 FAZODA TEKISLIKLARNING O'ZARO JOYLASHUVI

Ikki to'g'ri chiziq yoki umumiy nuqtaga ega, yoki umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi mumkin. Birinchi holda S3 aksiomaga ko'ra bu tekisliklar umumiy to'g'ri chiziqqa ham ega bo'ladi, ya'ni to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi (1- rasm). Ikkinchi holda tekisliklar kesishmaydi (2- rasm).

Kesishmaydigan tekisliklar *parallel tekisliklar* deb ataladi. Parallel tekisliklar haqida xonaning poli va shifti, qarama-qarshi devorlar tasavvur berishi mumkin (3-rasm).

1


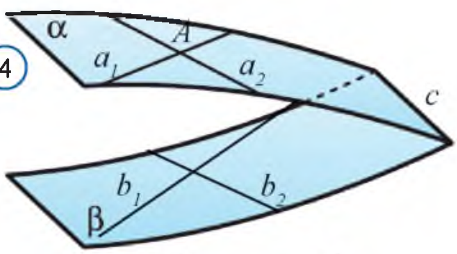
2


3

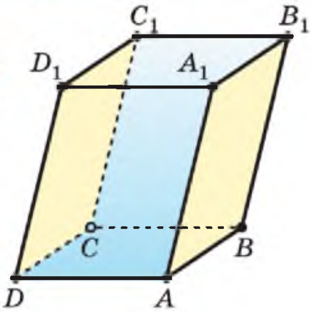

Ikki tekislikning paralleligi quyidagi alomat orqali aniqlanadi.

Teorema 3.7. ***Agar bir tekislikdagi kesishuvchi ikki to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqqa mos ravishda parallel bo'lsa, bu tekisliklar parallel bo'ladi.***

Isbot. Aytaylik, α va β - berilgan tekisliklar, a va b - α tekislikda yotgan va A nuqtada kesishuvchi to'g'ri chiziqlar, a_1 va b_1 esa - β tekislikda yotgan va mos ravishda a va b to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri chiziqlar bo'lsin (4- rasm).

4


Faraz qilamiz, α va β - tekisliklar o'zaro parallel bo'lmasin, ya'ni qandaydir c to'g'ri chiziq bo'ylab kesishsin. U holda 3.6 teoremaga ko'ra, a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar - mos ravishda b_1 va b_2 to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lib, β tekislikka ham parllel bo'ladi. Shuning uchun, ular bu tekislikda yotgan c to'g'ri chiziqni ham kesib o'tmaydi.

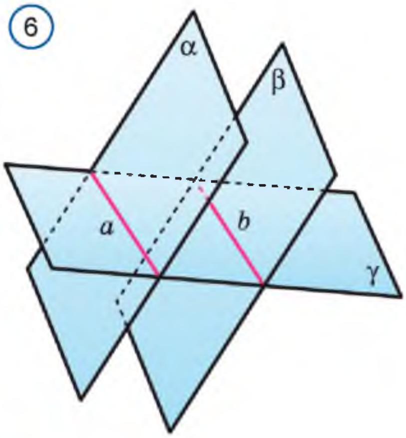
5


Shunday qilib, α tekislikda yotgan A nuqta orqali c to'g'ri chiziqqa parallel ikkita: a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar o'tmoqda. Parallellik aksiomasiga ko'ra, bunday bo'lishi mumkin emas. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. ❑

Bu teorema foyadlanib, parallelepipedning yon yoqlari (5- rasm) parallel bo'lishini mustaqil isbotlang.

Teorema 3.8. ***Ulkki parallel to'g'ri chiziqlarning uchinchi tekislik bilan kesishish to'g'ri chiziqlari o'zaro parallel bo'ladi.***

6

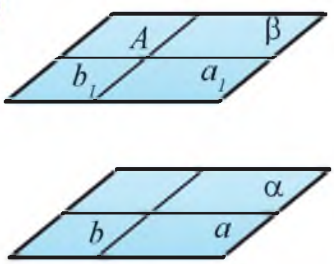


Isbot. Aytaylik, α va β parallel tekisliklar γ tekislikni mos ravishda a va b to‘g‘ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tsin (6- rasm). a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilamiz, a va b to‘g‘ri chiziqlar biror Q nuqtada kesishsin. U holda Q nuqta α tekislikda yotadi, chunki a to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. Shuningdek, Q nuqta β tekislikda yotadi, chunki b to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotadi. Natijada, α va β tekisliklar umumiy Q nuqtaga ega bo'lmoqda. Buning esa shartga ko'ra iloji yo'q. Ziddiyat farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. ❑

Teorema 3.9. ***Berilgan tekislikka undan tashqaridagi nuqtadan yagona parallel tekislik o’tkazish mumkin.***

7

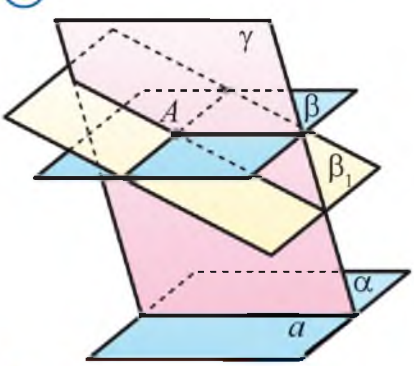


Isbot. Berigan α tekislikda kesishadigan ikkita a, b to’g’ri chiziqlarni o’tkazamiz. Berilgan A nuqtadan ularga parallel a_1, b_1 to’g’ri chiziqlarni o’tkazamiz (7- rasm).

a_1, b_1 to’g’ri chiziqlar orqali β tekislik o’tkazamiz. Bu tekislik 3.7 teoremaga ko’ra, α tekislikka parallel bo'lib, izlanayotgan tekislik bo'ladi.

Endi bu tekislikning yagonaligini ko'rsatamiz. Faraz qilamiz, α tekislikka parallel yana bitta β_1 tekislik mavjud bo'lsin (8- rasm). A nuqtadan va a to’g’ri chiziqdan o'tuvchi γ tekislikni o'tkazamiz. Bu tekislik β tekislikni a_1 to’g’ri chiziq bo'ylab, β_1 tekislikni a_2 to’g’ri chiziq bo'ylab kesib o'tadi. a_1 a_2 to’g’ri chiziqlar 3.6 teoremaga ko'ra a to’g’ri chiziqqa parallel bo'ladi. Lekin, buning bo'lishi mumkin emas, chunki tekislikda unda yotmagan nuqtadan faqat bitta parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin. Ziddiyat - farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. ❑

8



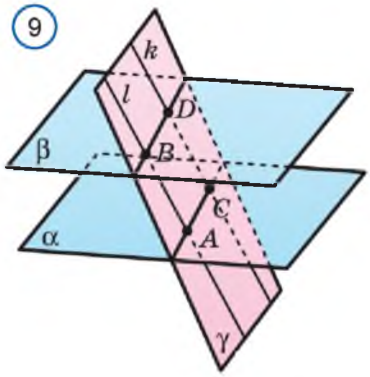
Teorema 3.10. ***Uchinchi tekislikka parallel ikki tekislik o'zaro parallel bo'ladi.***

Bu teoremani mustaqil isbotlang.

Teorema 3.11. ***Parallel tekisliklar orasidagi parallel to’g’ri chiziqlar kesmalari tengdir.***

Isbot. Aytaylik, α va β tekisliklar k va l to’g’ri chiziqlardan AC va BD kesmalarni ajratsin (9- rasm). Bu kesmalarning tengligini ko'rsatamiz.

k va l to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi γ tekislik parallel tekisliklarni AC va BD to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tadi. Natijada, qarama-qarshi tomonlari parallel bo'lgan $ABCD$ to'rtburchakka, ya'ni parallelogrammga ega bo'lamiz. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari o'zaro teng bo'ladi. Xususan, $AB = CD$.❑



Teorema 3.11. Uchta parallel tekisliklar orasidagi ixtiyoriy to'g'ri chiziqlar kesmalari o'zaro proporsional bo'ladi.

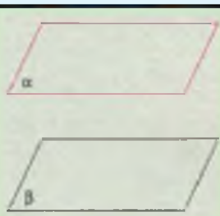
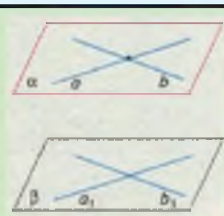
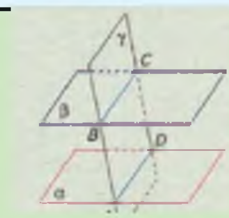
Bu teoremani ham mustaqil isbotlang.

? *Mavzuga doir savollar va mashqlar*

1. Tekisliklar fazoda qanday joylashishi mumkiin?
2. Parallel tekisliklar deb qanday tekisliklarga aytiladi?
3. Tekisliklarning parallellik alomatini ayting.
4. Fazoda tekisliklarning joylashuvi bilan bog'liq qanday xossalarni bilasiz?
5. Parallelepipedning yon yoqlari parallel bo'lishini asoslang.

12- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

α va β tekisliklar	umumiy nuqtaga ega	kesishadi	α x β
	umumiy nuqtaga ega emas	parallel	$\alpha // \beta$

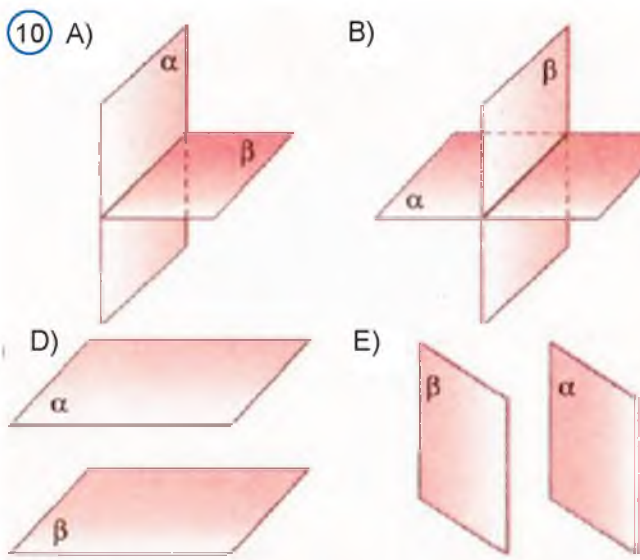
TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI		
Ta'rifi	**Alomati**	**Xossasi**
 $\alpha // \beta$, agar α va β kesishmasa	 Agar $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, a x b, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, a_1 x b_1, $a // a_1$, $b // b_1$ bo'lsa, $\alpha // \beta$ bo'ladi	 Agar $\alpha // \beta$ va γ kesuvchi tekislik, α x $\gamma = AD$ va β x $\gamma = BC$ bo'lsa, $AD // BC$ bo'ladi

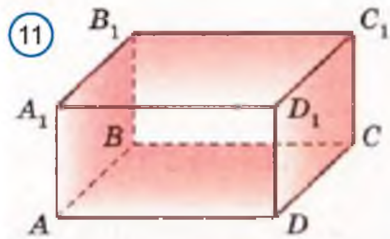
4.36. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedning; b) $ABCA_1B_1C_1$ prizmaning parallel yoqlarini aniqlang.

4.37. Birorta ham umumiy nuqtasi bo'lmagan α va β tekisliklar fazoda qanday joylashadi?

4.38. α va β tekisliklar parallel. a va b to'g'ri chiziqlar α tekislikkda yotadi, c va d to'g'ri chiziqlar esa β tekislikda yotadi. Quyidagi tasdiqlardan qaysilari to'g'ri?

1) a // b; 2) c // b; 3) b // b; 4) b // a; 5) c// a; 6) d // b; 7) a//a; 8) d //a.





4.39. Kesishuvchi ikkita tekislik tasvirlangan uchta rasmni ko'rsating (10-rasm).

4.40. α va β tekisliklar parallel. Ularning hech biriga tegishli bo'lmagan nuqtadan γ tekislik o'tkazilgan. To'g'ri tasdiqlarni ko'rsating.

A) γ tekislik α tekislikka parallel bo'lgan yagona tekislik;

B) γ tekislik β tekislikni kesib o'tuvchi yagona tekislik;

C) γ tekislik parallel bo'lgan yagona tekislik;

D) γ tekislik α tekislikni kesib o'tuvchi yagona tekislik;

E) γ tekislik α tekislikka ham, β tekislikka ham parallel bo'lgan yagona tekislik.

4.41. 11-rasmda $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. a) $A_1B_1C_1D_1$ va $B_1A_1D_1C_1$; b) ADD_1A_1 va $ABCD$; c) ABB_1A_1 va C_1D_1DC; d) $BADC$ va ABB_1A_1; e) CC_1B_1B va ADD_1A_1 tekisliklarning o'zaro joylashishi aniqlang.

4.42. AB, BC kesmalar $ABCD$ parallelogrammning tomonlari bo'lib, ular mos ravishda a va b to'g'ri chiziqlarga parallel (12- pasm). a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi va α tekislikka tegishli. $ABCD$ va α tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

4.43. a va b ayqash to'g'ri chiziqlar berilgan. a to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va β tekislikka parallel bo'lgan nechta tekislik o'tkazish mumkin?

4.44. Ikkita α va β tekisliklarning kesishish chizig'i uchinchi γ tekislikka paralel. α va β tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

4.45. AB va CD parallel to'g'ri chiziqlar orqali o'tkazilgan γ tekislik α va β parallel tekisliklarni mos ravishda AC va BD to'g'ri chiziqlar bo'ylab kesib o'tadi (13-rasm). Agar BD = 15 sm bo'la, AC kesma uzunligini toping.

4.46. Ixtiyoriy ikkita ayqash to'g'ri chiziqlar orqali yagona parallel tekisliklar juftini o'tkazish mumkinligini isbotlang.

4.47. α va β tekisliklar parallel. α tekislikda yotuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq β tekislikka parallel bo'lishini isbotlang.

4.48. O nuqta - bir tekisikda yotmayddigan AA_1, BB_1, CC_1 kesmalarning umumiy o'rtasi. ABC va $A_1B_1C_1$ tekisliklar parallel ekanligini isbotlang.

4.49. $ABCD$ parallelogramm va uni kesmaydigan tekislik berilgan. Parallelogramning A, B, C, D uchlaridan tekislikni mos ravishda A_1, B_1, C_1, D_1 nuqtalarda kesib o'tadigan parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar AA_1 = 4 m, BB_1 = 3 m va CC_1 = 1 m bo'lsa, DD_1 kesma uzunligini toping.

4.50. Ikkita parallel tekislik berilgan. Bir tekislikning A va B nuqtalaridan ikkinchi tekislikni A_1 va B_1 nuqtalarda kesib o'tuvchi parallel to'gri chiziqlar o'tkazilgan. Agar $AB = a$ bo'lsa, A_1B_1 kesma uzunligini toping.

4.51. α va β tekisliklar parallel. α tekislikning M va N nuqtalaridan β tekislikni K va L nuqtalarda kesib o'tuvchi parallel to'gri chiziqlar o'tkazilgan. $MNLK$ parallelogramm ekanligini isbotlang. Agar ML = 14 sm, NK = 8 sm va $MK : MN = 9 : 7$ bo'lsa, $MNLK$ to'rtburchak perimetrini toping.

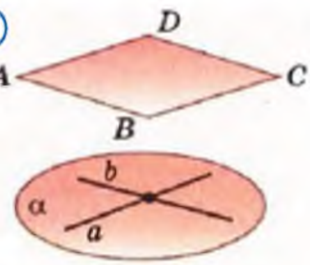
4.52. OF va OP nurlar α va β parallel tekisliklarni mos ravishda F_1, P_1, F_2, P_2 nuqtalarda kesib o'tadi. Agar F_1P_1 = 3 sm, F_2P_2 = 5 sm va P_1P_2 = 4 sm bo'lsa, OP_1 kesma uzunligini toping.

4.53. OA va OB nurlar α va β parallel tekisliklarni mos ravishda A_1, B_1, A_2, B_2 nuqtalarda kesib o'tadi. Agar OA_1 = 16 sm, A_1A_2 = 24 sm va A_2B_2 = 50 sm bo'lsa, A_1B_1 kesma uzunligini toping.

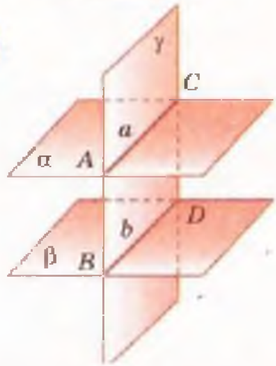
4.54. D nuqta ABC uchburchak tekisligiga tegishli emas (14- rasm). K, M, Z nuqtalar mos ravishda DA, DB va DC kesmalarning o'rtasi. ABC va KZM tekislikjlarning o'zaro joylashuvuni aniqlang.

4.55. S nuqta $ABCD$ parallelogramm tekisligiga tegishli emas (15- rasm). K, Z, M, N nuqtalar mos ravishda SA, SB, SC va SD kesmalarga tegishli. Agar $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ bo'lsa, $ABCD$ va $KZMN$ tekislikjlarning o'zaro joylashuvuni aniqlang.

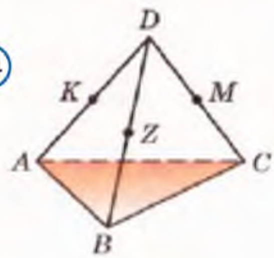
12



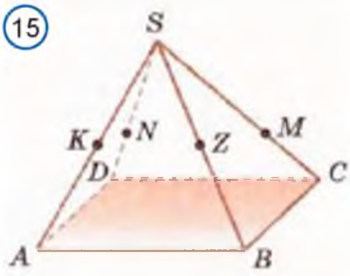
13



14



15



13 FAZODA PARALLEL PROYEKSIYA

Fazodagi shakllar turli usullar bilan tekislikda tasvirlanadi. Quyda ular bilan tanishamiz.

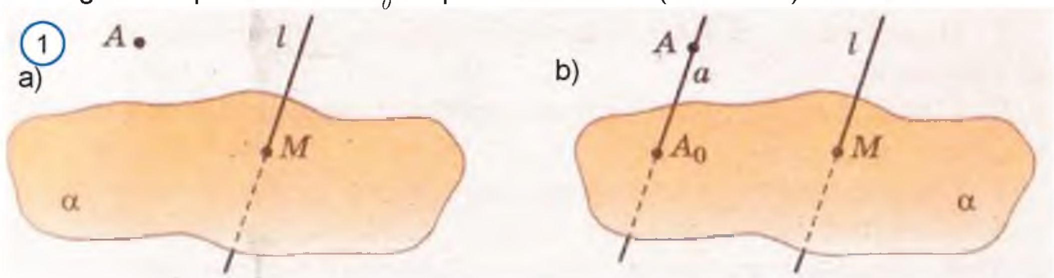
Fazodagi shaklni tekislikka *parallel proyeksiyalash* deb shunday akslantirishga aytiladiki, unda shaklning har bir nuqtasi berilgan proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar bo'ylab tekislikka ko'chiriladi.

Parallel proyeksiyalashni yorug'lik nurlari yordamida biror narsaning devor yoki poldagi soyasiga qiyoslash mumkin.

Shunday qilib, parallel preoyeksiyalashda biror shakl va *proyeksiylash tekisligi* deb nomlanuvchi tekislik olinadi hamda *proyeksiyalash yo'nalishi*, ya'ni biror to'g'ri chiziq tanlanadi. Albatta, bu to'g'ri chiziq proyeksiya tekisligi bilan kesishishi lozim.

Aytaylik, ixtiyoriy α tekislik va proyeksiyalash to'g'ri chizig'i l va tekislikda ham, to'g'ri chiziqda ham yotmagan A nuqta berilgan bo'lsin (1.a- rasm).

A nuqtadan α tekislikka i to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq α tekiislikni A_0 nuqtada kesib o'tsin(1.b- rasm).



Topilgan A_0 nuqta A nuqtaning α tekislikka *parallel proyeksiyasi* deb ataladi.

Aytaylik, biror F shaklni α tekislikka l yonalish bo'yicha parallel proyeksiyalash lozim bo'lsin. Buning uchun F shaklning ixtiyoriy nuqtasini olamiz, undan l ga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning α tekislik bilan kesishish nuqtasini belgilaymiz. Bunday nuqtalar α tekislikda qandaydir F_1 shaklni hosil qiladi, Aynan shu F_1 shakl F shakilning α tekislikdagi parallel proyeksiyasi bo'ladi. 2- rasmda F shaklning α tekislikka proyeksiyasi - F_1 shakl tasvirlangan.

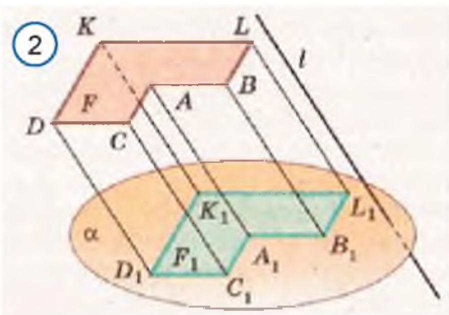
Parallel proyeksiyalashninh quyidagi xossalarini keltirib o'tamiz. Ularni mustaqil isbotlab ko'ring.

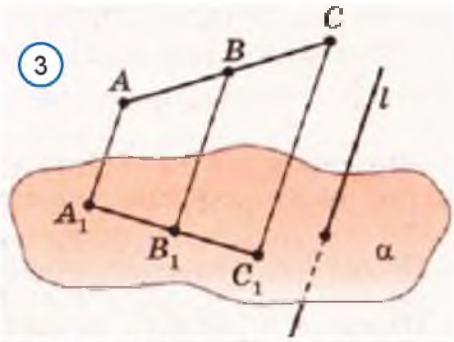
Parallel proyeksiyalashda: nuqta - nuqtaga, kesma - kesmaga, to'g'ri chiziq-to'g'ri chiziqqa o'tadi.

Parallel to'g'ri chiziqlar proyeksiyalari parallel bo'ladi yoki ustma-ust tushadi.

Quyidagi xossalarni isbotlaylik.

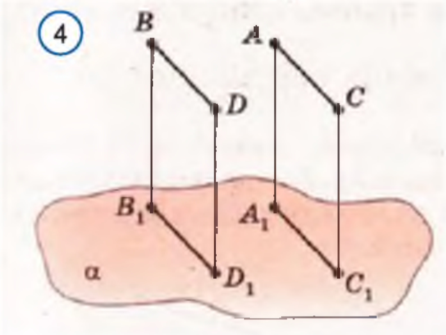
1-xossa. Shaklning to'g'ri chiziqli kesmlari proyeksiyasi ham kesmalardan iborat bo'ladi.





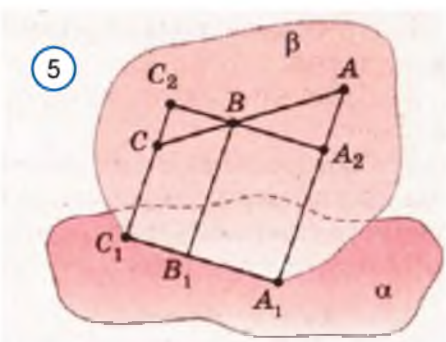
Haqiqatan, AC kesmaning nuqtalarini proyeksiyalaovchi barcha to'g'ri chiziqlar α tekislikni A_1C_1 to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tuvchi tekislikda yotadi (3-rasm). AC kesmadan ixtiyoriy B nuqtasi A_1C_1 kesmaning B_1 nuqtasiga o'tadi.❑

2-xossa. Shaklning parallel kesmlari proyeksiyasi ham parallel kesmalardan iborat bo'ladi.



Haqiqatan, AC va BD biror shaklning parallel kesmalari bo'lsin (4-rasm). Ularning proyeksiyalari A_1C_1 va B_1D_1 kesmalar ham parallel bo'ladi, chunki ularni ikki parallel tekislikni α tekislik bilar kesganda hosil qildik. ❑

3-xossa. Bitta to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklari nisbati o'z proeksiyalari uzunliklari nisbatiga teng.



Haqiqatan, 5-rasmda AC va A_1C_1 to'g'ri chiziqlar β tekislikda yotadi. AC kesamning B nuqtasidan A_1C_1 ga parallel bo'lgan A_2C_2 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz.

Hosil bo'lgan BAA_2 va BCC_2 uchburchaklar o'xshash bo'ladi. Uchburchaklarning o'xshashligi va $A_1B_1=A_2B$ va $B_1C_1=BC_2$ tengliklardan izlanayotgan nisbatda bo'lamiz:

$AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$. ❑

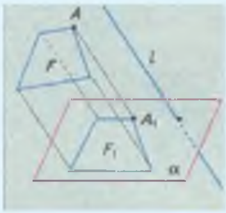
Shunday qilib, parallel proyeksilashda to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalar uzunliklari nisbati saqlanar ekan.

Xususan, kesmaning o'rtasi proyeksiya o'rtasiga o'tadi.

? *Mavzuga doir savollar va mashqlar*

1. *Fazodagi shaklni tekislikka parallel proyeksiyalash deb qanday akslantirishga aytiladi?*
2. *Nuqtaning tekislikka parallel proyeksiyasi qanday topiladi?*
3. *Parallel preoyeksiyalash tekisligi va proyeksiyalash yo'nalishi deb nimaga aytiladi?*
4. *Parallel proyeksiyalashning qanday xossalarini bilasiz?*
5. *Parallel proyeksiyalashdan qaerda foydalanish mumkin?*

13- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

<table>
<tr><th colspan="3">PARALLEL PROYEKSIYALASH</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Ta'rifi</th><th colspan="2">Parallel proyeksiyalashda shakllarning xossalari</th></tr>
<tr><th>Saqlanadi</th><th>Saqlanmaydi</th></tr>
<tr><td>
F - shakl,
$\alpha-$ proyeksiyalash tekisligi,
l - proyeksiyalash tekisligi,
F_1 - F shakl proyeksiyasi</td><td>1) Shakllarning sinflarga tegishliligi (nuqta nuqtaga, to'g'ri chiziq - to'g'ri chiziqqa, kesma - kesmaga, uchburchak - uchburchakka o'tadi)
2) nuqtalarning to'g'ri chiziqqa tegishliligi;
3) nuqtalarning to'g'ri chiziqda joylashuvi;
4) to'g'ri chiziqlarning parallelligi;
5) bitta yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarning tengligi (yoki proporsionalligi).</td><td>1) kesma uzunligi;
2) burchak kattaligi;
3) to'g'ri chiziqlarning perpendikularligi;
4) burchaklar tengligi (proporsionalligi);
5) kesishuvchi to'g'ri chiziqlarda yotgan kesmalarning tengligi (proporsionalligi).</td></tr>
</table>

4.56. Parallel proyeksiyalashda kesmaning proyeksiyasi a) kesma; b) nuqta; c) ikki nuqta; d) nur; e) to'g'ri chiziq bo'lishi mumkinmi?

4.57. Parallel proyeksiyalashda kvadratning proyeksiyasi a) kvadrat; b) parallelogramm; c) romb; d) to'g'ri to'rtburchak; e) trapetsiya; f) kesma bo'lishi mumkinmi?

4.58. Parallel tekisliklardan birida yotgan uchburchak ikkinchi tekislikka parallel proyeksiyalansa, uning yuzi o'zgarmasligini isbotlang.

4.59. Parallelogrammning parallel proyeksiyasi trapetsiya bo'lishi mumkinmi? Javobingizni asoslang.

4.60. Muntazam uchburchakning parallel proyeksiyasi mutazam uchburchak bo'ladimi?

4.61. To'g'ri burchakli uchburchakning parallel proyeksiyasi to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladimi?

4.62. ABC uchburchakning parallel proyeksiyasi $A_1B_1C_1$ uchburchakdan iborat. Bu proyeksiyalashda ABC ucburchakning a) medianasi; b) balandligi; c) bissektrisasi $A_1B_1C_1$ uchburchakning mos a) medianasi; b) balandligi; c) bissektrisasiga o'tadimi?

4.63. ABC uchburchakning parallel proyeksiyasi $A_1B_1C_1$ uchburchakdan iborat. Agar $\angle A = 30^0$, $BC = 20$ sm bo'lsa, $\angle A_1 = 30^0$, $B_1C_1 = 20$ sm bo'ladimi?

4.64. AB kesmaning parallel proyeksiyasi A_1B_1 kesmadan iborat. AB kesmadan olingan C nuqtaning proyeksiyasi esa C_1 nuqta. $AB = 48$ sm, $A_1B_1 = 36$ sm. Agar AC kesma uzunligi a) 24 sm; b) 12 sm; c) 8 sm; d) 32 sm; e) 36 sm bo'lsa, A_1C_1 kesmaning uzunligini toping.

14 AMALIY MASHQ VA TATBIQ

4.65. a) Ikki to'g'ri chiziq; b) to'g'ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik nechta umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin?

4.66. a) Ikki to'g'ri chiziq; b) to'g'ri chiziq va tekislik; c) ikki tekislik; d) uchta tekislik yagona umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkinmi?

4.67. To'rtta nuqta bitta tekislikda yotmaydi. a) ularda uchtasi bitta to'g'ri chiziqda yotishi mumkinmi? b) Ular orqali nechta tekislik o'tkazish mumkin?

4.68. m va n to'g'ri chiziqlar kesishadi, d to'g'ri chiziq esa n to'g'ri chiziqqa parallel. m va d to'g'ri chiziqlar o'zaro qanday joylashishi mumkin?

4.69. ABC uchburchakning C uchidan o'tuvchi va AB tomoniga parallel bo'lgan nechta tekislik o'tkazish mumkin?

4.70. $ABCD$ va $ABKZ$ parallelogrammlar turli tekisliklarda yotadi. Parallel to'g'ri chiziqlarni ko'rsating.

A) DA va KB; B) CD va KZ; C) BC va AZ; D) DA va ZA; E) CB va KB.

4.71. A va C nuqtalar α tekislikka, B va D nuqtalar β tekislikka tegishli. AC, CD, BD, AB, BC, AD to'g'ri chiziqlardan qaysilari β tekislikni kesib o'tadi?

4.72. AB, AC, KB, KD kesmalar α tekislikni kesib o'tadi. AK, AD, BD, KC, CD to'g'ri chiziqlardan qaysilari α tekislikni kesib o'tadi?

4.73. Bir tekislikda yormagan AB, AC va AD to'g'ri chiziqlar α tekislikni B_1, C_1 va D_1 nuqtalarda kesib o'tadi. B_1, C_1 va D_1 nuqtalar ketma-ket tutashtirilsa qanday shakl paydo bo'ladi?

4.74. α tekislikni kesib o'tmaydigan MN kesma uchlaridan va o'rtasidan parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. Agar bu to'g'ri chiziqlar α tekislikni mos ravishda M_1, N_1, va K_1 nuqtalarda kesib o'tsa va KK_1= 9 sm, NN_1 = 15 sm bo'lsa, MM_1 kesma uzunligini toping.

4.75. α tekislikning P va Z nuqtalaridan undan tashqarida uzunliklari PK = 6 sm va ZM = 9 sm bo'lgan parallel kesmalar tushirilgan. MK to'g'ri chiziq a tekislikni O nuqtada kesib o'tadi. Agar MK = 6 sm bo'lsa, MO kesma uzunligini toping.

4.76. Parallellogrammni parallel proyeksiyalashda kvadrat hosil bo'lishi mumkinmi?

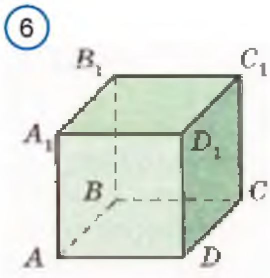
4.77. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalari qanday yasaladi?

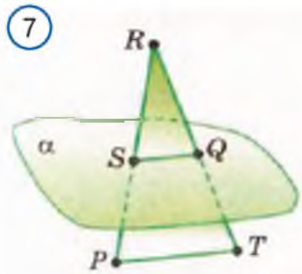
4.78. MNZ uchburchak va $MNPS$ (BC - asos) parallelogramm bitta tekislikda yotmaydi. Q va R nuqtalar CB va DA kesmalarning o'rtasi, M va N esa DP va CZ kesmalarning o'rtasi. MN va QR to'g'ri chiziqlarning parallel ekanligini isbotlang.

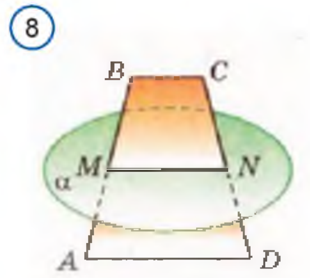
4.79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning (6- rasm) a) AA_1D_1D; b) BB_1C_1C; c) $ABCD$; d) DD_1C_1C; e) $B_1C_1D_1A_1$; f) ADD_1A_1 yoqlaridan qaysilari A_1B_1 to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi?

4.80. PRT uchburchak berilgan. PT to'g'ri chiziqqa parallel α tekislik PR tomonni S nuqtada, RT tomonni Q nuqtada kesib o'tadi (7- rasm). Agar SR = 7 sm, SQ = 3 sm va SP= 35 sm bo'lsa, PT tomonni toping.

4.81. α tekislik $ABCD$ trapetsiya asosi AD ga parllel hamda AB va CD tomonlarini M







va N nuqtalarda kesib o'tadi (8- rasm). AD = 20 sm, MN = 16 sm. Agar M nuqta AB kesma o'rtasi va AB = 8 sm bo'lsa, trapetsiya perimetrini toping.

4.82. α tekislikning P va Z nuqtalaridan undan tashqarida PK = 6 sm va ZM = 9 sm kesmalar o'tkazilgan. MK to'g'ri chiziq tekislikni O nuqtada kesib o'tadi. Agar MK = 6 sm bo'lsa, MO masofani toping.

4.83. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchkning AB tomoni α tekislikka parallel, AD tomoni esa bu tekislikka parallel emas. $ABCD$ va α tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

4.84 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedning quyida berilgan yoqlaridan qaysilari A uchi va $ABCD$ yog'iga parallel bo'ladi?

A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; C) ABB_1A_1; D) D_1C_1CD; E) D_1A_1BD;

4.85. Pombning ikki diagonali α tekislikka parallel. Pomb tekisligi va α tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

4.86. D nuqta ABC ucburchak tekisligida yotmaydi. K, Z va M nuqtalar mos ravishda DA, DB, va DC kesmalrning o'rtalari. ABC va KZM tekisliklarning fazoda o'zaro joylashuvini aniqlang.

Tatbiqlar va amaliy kompetensiyalarni shakllantirish

1. Temir yo'l vagonlarining o'qlari bir-biriga nisbatan qanday joylashgan?
2. Temir yo'l vagonlarining o'qlari relslarga nisbatan qanday joylashgan?
3. Tevarak atrofdan parallel va ayqash to'g'ri chiziqlarga misollar keltiring.
4. Nima uchun yozuv stoli tortmalari ba'zida silliq ochilmaydi?
5. Nima uchun nasos porsheni uning ichida silliq harakatlanadi?
6. Tikuvchilki tasmasi yoki istalgancha uzun tayoq yordamida dahliz poli chekasiga qoqilgan reykalarning parallelligini qanday tekshirsa bo'ladi?
7. Yog'ochdan ishlangan brus (taxta) ning hamma yoqlari to'g'ri to'rtburchak shaklida. Uni ko'ndalang qirralari bo'ylab qanday arralamang, hosil bo'lgan hamma kesimlar parallelogramm bo'lishini isbotlang.

V BO'LIM

FAZODA TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULARLIGI

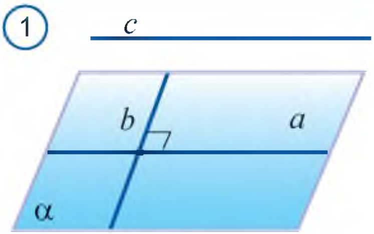
15 FAZODA PERPENDIKULAR TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIKLAR

Eslatib o'tamiz, fazoda berilgan ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak 90° ga teng bo'lsa, ular o'zaro *perpendikular to 'g‘ri chiziqlar* deyiladi. Perpendikular to'g'ri chiziqlar kesishuvchi va ayqash bo'lishi mumkin. 1- rasmda a va b peppendikular to‘g‘ri chiziqlar kesishuvchi, b va c perpendikular to'g'ri chiziqlar esa ayqashdir. a va b to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularligi $a \perp b$ tarzda yoziladi.

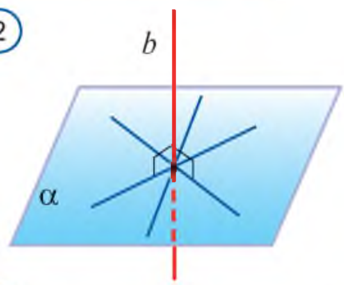
Tekislikdagi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa perpendikular to‘g‘ri chiziqqa *tekislikka perpendikular* deyiladi (2- rasm). α tekislik va b to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularligi $b \perp \alpha$ tarzda yoziladi.

Tevarak atrofgan o'zaro perpendikular shakllarga ko'plab misollar keltirish mumkin. Odatda uy devorlari va ustunlari, minoralar, chiroq ustunlari va simyog'ochlar yerga nisbatan tik, ya'ni perpendikular qilib quriladi. Xonadagi shkaf, stol va muzlatgichlar ham polga nisbatan tik qilib o'rnatiladi (3- rasm).

1



2



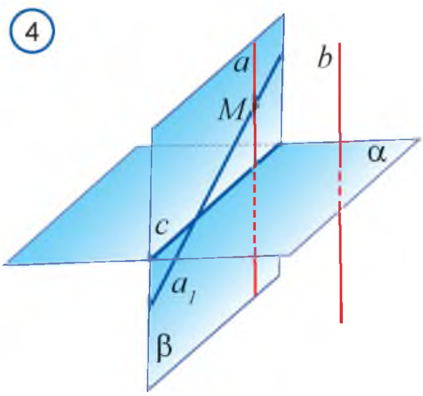
3

Endi fazodagi perpendikular to'gri chiziqlarning ba'zi xossalari haqida to'xtalamiz.

Agar a to'g'ri chiziq α tekislikda yotsa yoki unga parallel bo'lsa, unda α tekislikda yotgan, a to'g'ri chiziqqa parallell boshqa b to'g'ri chiziq ham topiladi. Shu bois, tekislikka perpendikular to'g'ri chiziq albatta bu tekislikni kesib o'tadi.

Teskari tasdiq ham o'rinli bo'ladi.

Teorema 4.1. Agar ikki to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lsa, ular o'zaro parallel bo'ladi.



Isbot: a va b to'g'ri chiziqlar α tekislikka perpendikular bo'lsin (4-rasm). Bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro parallel ekanligini isbotlaymiz.

a to'g'ri chiziqning biror M nuqtasidan b to'g'ri chiziqqa parallel a_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. U holda, $a_1 \perp \alpha$ bo'ladi.

a va a_1 to'g'ri chiziqlarning ustma-ust tushishini ko'rsatamiz. Aytaylik, unday bo'lmasin, a va a_1 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushmasin. Unda a va a_1 to'g'ri chiziqlar yotgan β tekislikdagi M nuqtadan α va β tekisliklarning kesishish chizig'i c to'g'ri chiziqqa ikkita a va a_1 perpendikular to'g'ri chiziqlar o'tadi. Buning esa bo'lishi mumkin emas. Ziddiyat - farazimizning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Demak, a va b to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel. ❑

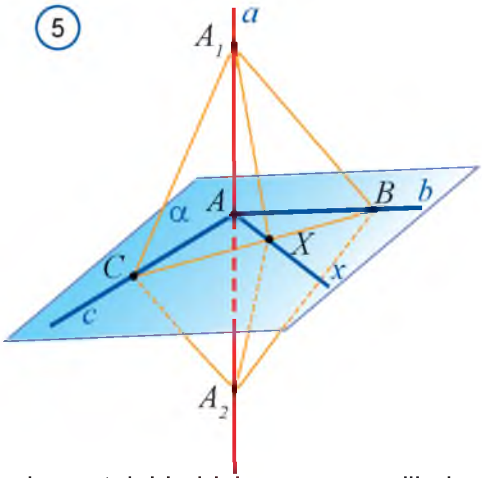
Endi to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikularlik alomatini keltiramiz.

Teorema 4.2. Agar to'g'ri chiziq tekislikda yotgan ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u tekislikka ham perpendikular bo'ladi.

Isbot: a to'g'ri chiziq α tekislikda yotgan ikkita b va c to'g'ri chiziqlarga perpendikular bo'lsin. U holda a to'g'ri chiziq b va c to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi A orqali o'tadi. a to'g'ri chiziqning α tekislikka perpendikular bo'lishini isbotlaymiz.

α tekislikning A nuqtasi orqali ixtiyoriy x to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishini ko'rsatamiz. α tekislikda A nuqtadan o'tmaydigan, b, c va x to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadigan x to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Mazkur kesishish mos ravishda B, C va X nuqtalar bo'lsin.

a to'g'ri chiziqda A nuqtaning turli tomonlarida AA_1 va AA_2 kesmalarni qo'yamiz. Hosil bo'lgan A_1BA_2 va A_1CA_2 uchburchaklar teng yonli bo'ladi (buni mustaqil asoslang). Bundan A_1BC va A_2BC uchburchaklar teng bo'lishi kelib chiqadi (buni ham mustaqil asoslang). O'z navbatida, bundan A_1BX va A_2BX burchaklarning teng bo'lishi va nihoyat A_1BX va A_2BX uchburchaklarning ham teng bo'lishi kelib chiqadi (buni ham mustaqil asoslang). Xususan, $A_1X = A_2X$ bo'ladi. Unda A_1XA_2 uchburchak teng yonli bo'ladi. Shuning uchun, uning XA medianasi uning balandligi ham bo'ladi. Bu esa o'z navbatida, x to‘g‘ri chiziqning a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishini ko'rsatadi. Demak, a to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular. ❑



Bu teoremadan natiga sifatida quyidagi xossalar kelib chiqadi, Ularni mustaqil asoslang.

Teorema 4.3. ***Agar to’g’ri chiziq ikkita parallel tekislikning biriga perpendikulyar bo'lsa, ikkinchisiga ham ham perpendikular bo'ladi.***

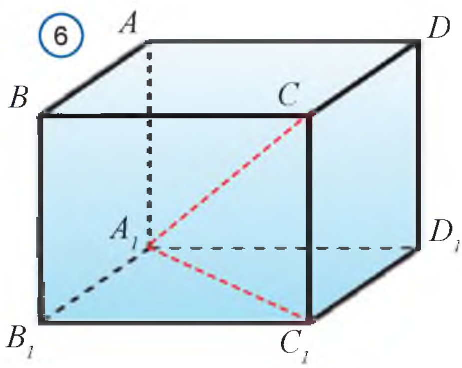
Teorema 4.4. ***Agar ikkita tekislik bitta to’g’ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, ular parallel bo'ladi.***

Quyida "mavjudlik va yagonalik teoremalari" deb ataluvchi xossalarni ham mustaqil isbotlash uchun keltiramiz.

Teorema 4.5. ***Fazoning ixtiyoriy nuqtasidan, berilgan to’g’ri chiziqqa perpendikulyar yagona tekislik o'tkazish mumkin.***

Teorema 4.6. ***Fazoning ixtiyoriy nuqtasidan, berilgan tekislikka perpendikulyar yagona to’g’ri chiziq o'tkazish mumkin.***

Natija (umumlashgan Pifagor teoremasi). To'g'ri burchakli parallelepiped diagonalining kvadrati uning uchta o'lchamlari kavadratlari yig'indisiga teng.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepiped bo'lsin (6- rasm). CC_1 qirra $A_1B_1C_1D_1$ yoqqa perpendikular bo'lgani uchun A_1C_1C to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi. Unda Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 \qquad (1).$$

$A_1D_1C_1$ ham to'g'ri burchakli uchburchak. Yana Pifagor teoremasiga ko'ra,

$$A_1C_1^2 = A_1D_1^2 + D_1C_1^2 \qquad (2).$$

Unda, (1) va (2) ga ko'ra: $A_1C^2 = CC_1^2 + A_1C_1^2 = CC_1^2 + A_1D_1^2 + D_1C_1^2$.

$A_1D_1 = B_1C_1$ bo'lgani uchun $A_1C^2 = CC_1^2 + B_1C_1^2 + D_1C_1^2$. ❑

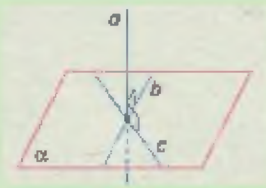
Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Fazoda qanday to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikular bo'ladi?
2. Ayqash to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'lishi mumkinmi?
3. 7- rasmda qaysi shahar tasvirlangan? Unda siz qanday to'g'ri chiziqlarni va tekisliklarni ko'rayapsiz? Rasmdan parallel, perpendikular va ayqash to'g'ri chiziqlarga misollar keltiring.
4. Qanday to'g'ri chiziq tekislikka perpendikular bo'ladi?
5. Bitta tekislikka perpendikular to‘g‘ri chiziqlarning xossalarini ayting.


7

6. To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning perpendikularlik alomatini ayting.
7. Parallel tekisliklarning biriga perpendikular bo'lgan to‘g‘ri chiziqning xossasini ayting.
8. Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo'lgan tekisliklarning xossasini ayting.
9. Umumlashgan Pifagor teoremasi nima haqida?

13- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

TO'G'RI CHIZIQNING TEKISLIKKA PERPENDIKULARLIGI	
Ta'rifi	**Alomati**
 Agar $a\perp b,\ a\perp c,\ a\perp d,\ \ldots,$ bo'lsa, $a\perp\alpha$, $b\in\alpha,\ c\in\alpha,\ d\in\alpha,\ \ldots$	 Agar $a\perp b,\ a\perp c$ bo'lsa, $a\perp\alpha$ bo'ladi, $b\in\alpha,\ c\in\alpha$

5.1. SB kesma $ABCD$ parallelogramm tekisligiga perpendikular (8-rasm). SB perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqlarni ayting.

5.2. Qandaydir l to'g'ri chiziq ABC uchburchakning AB va AC tomonlariga perpendikular. l to'g'ri chiziq va ABC uchburchak tekisligining o'zaro joylashishinui aniqlang.
A) l to'g'ri chiziq va ABC tekislikni kesib o'tadi, lekin unga perpendikular emas;
B) l to'g'ri chiziq va ABC tekislikka tegishli;
C) l to'g'ri chiziq va ABC tekislikka perpendikular;
D) l to'g'ri chiziq va ABC tekislikka parallel.

5.3. KO to'g'ri chiziq $ABCD$ parallelogramm tekisligiga perpendikular (9-rasm). KO to'g'ri chiziqqa perpendikular to'g'ri chiziqni aniqlang

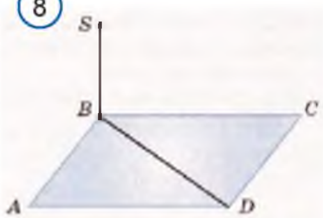
5.4 . MB to'g'ri chiziq ABC uchburchakning AB va BC tomonlariga perpendikular (10-rasm). X nuqta AC tomonning ixtiyoriy nuqtas bo'lsa, MBX uchburchak tipini aniqlang.

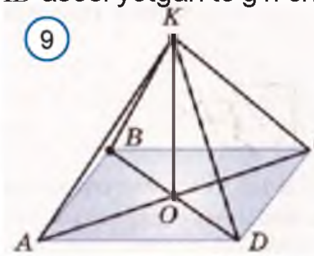
5.5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to'g'ri burchakli parallelepipedning AA_1C_1C va BB_1D_1D diagonal kesimlari o'zaro perpendikular ekanligi isbotlang.

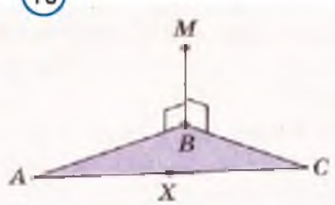
5.6. $ABCD$ to'rtburchakning tomonlari $A_1B_1C_1D_1$ to'g'ri to'rtburchakning tomonlariga mos ravishda parallel. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak ekanligini isbotlang.

5.7. α tekislik m to'g'ri chiziqqa, m to'g'ri chiziq n to'g'ri chiziqqa parallel. Tekislikning n to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lishini isbotlang.

5.8. $ABCD$ trapetsiyaning AB asosi yotgan to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular.

8


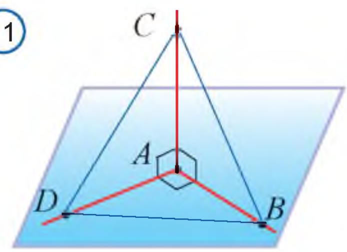
9


10


Bu trapetsiyaning CD asosi yotgan to'g'ri chiziq ham α tekislikka perpendikular bo'lishini isbotlang.

5.9. Fazodagi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

5.10. Fazodagi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga ikkita turli perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

11


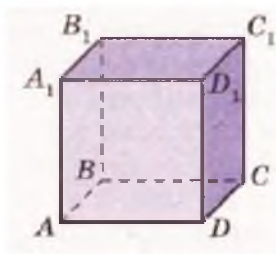
5.11. AB, AC, AD to'g'ri chiziqlar jufti-jufti bilan o'zaro perpendikular (11-rasm). Agar

1) AB = 3 sm, BC= 7 sm, AD = 1,5,sm;

2) BD = 9 sm, BC= 16 sm, AD = 5 sm;

3) $AB = b$ sm, $BC = a$ sm, $AD = d$ sm;

4) $BD = c$ sm, $BC= a$ sm, $AD = d$ sm bo'lsa, CD kesma uzunligini toping.

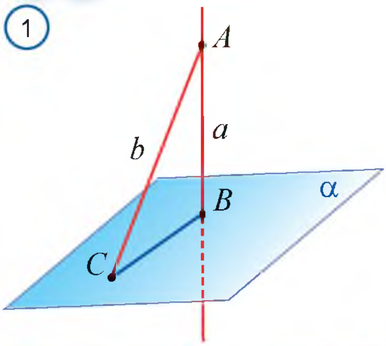
12


5.12. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning A uchida uning tekisligiga perpendikular AK to'g'ri chiziq o'tkazilgan. K nuqtadan to'g'ri to'rtburchakning boshqa uchlarigacha masofa 6 m, 7 m, 9 m. AK masofani toping.

5.13. A va B nuqtalardan α tekislikka perpendikular va uni mos ravishda C va D nuqtalarda kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Agar AC = 3 m, BD = 2 m va CD = 2,4 m bo'lsa va AB kesma a tekislikni kesib o'tmasa, A va B nuqtalar orasidagi masofani toping

5.14. 12- rasmda tasvirlangan kubning qirrasi a) 4 sm; b) 8 sm bo'lsa, AB_1C uchburchak perimetrini va DAC_1 uchburchak yuzini toping.

16 FAZODA PERPENDIKULAR, OG'MA VA MASOFA

1


α tekislikka unda yotmagan A nuqtadan perpendikular a to'g'ri chiziq o'tkazamiz (1- rasm). Bu to'g'ri chiziq tekislikni B nuqtada kesib o'tsin. Shuningdek, tekislikning biror C nuqtasini A nuqta bilan tutashtiramiz. Natijada hosil bo'lgan
AB kesma - *tekislikka tushirilgan perpendikular*,
AC kesma - *tekislikka tushirilgan og'ma,*
BC kesma - *og'maning tekislikdagi proyeksiyasi,*
B nuqta - *perpendikularning asosi*,
C nuqta - *og'maning asosi* deb ataladi.

2

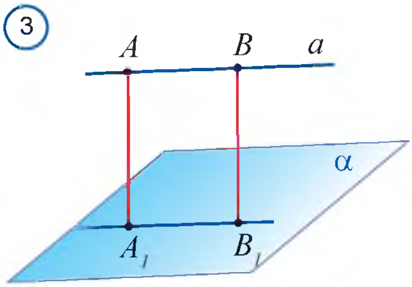

ABC uchburchak to'g'ri burchakli va unda AB katet, AC esa gipotenuza bo'lgani uchun, har doim $AB < AC$ bo'ladi.

Demak, biror nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligi shu nuqtadan o'tkazilgan ixtiyoriy og'maning uzunligidan kichik bo'ladi.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa deb nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikular uzunligiga aytiladi.

Toshketdagi soat minorasining balandligi - 30 m deyilganda, minoraning uchidan uning asos tekisligiga tushirilgan perpendikular uzunligi tushuniladi (2- rasm).

Teorema 4.7. Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'lsa, u holda uning barcha nuqtalari tekislikdan baravar masofada bo'ladi.

3


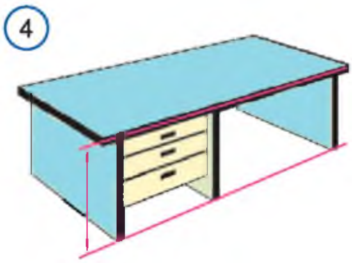
Isbot: a - berilgan to'g'ri chiziq va α - berilgan tekislik bo'lsin (3- rasm). a to'g'ri chiziqda ikkita A va B nuqta larni olamiz. Ulardan α - tekislikka perpendikularlar tushuramiz. Bu perpendikularlar asosi mos ravishda A va B nuqtalar bo'lsin. Unda A va B nuqtalardan α tekislikkacha bo'lgan masofalar mos ravishda AA_1 va BB_1 kesmalar bo'ladi. 3.6 teoremaga ko'ra AA_1 va BB_1 kesmalar parallel bo'ladi.

Demak, ular bitta tekislikda yotadi. Bu tekislik α tekislikni A_1B_1 to'g'ri chiziq bo'ylab kesadi. a to'g'ri chiziq A_1B_1 to'g'ri chiziqqa parallel bo'ladi, chunki u α tekislikni kesib o'tmaydi.

Shunday qilib, ABA_1B_1 to'rtburchakning qarma-qarshi tomonlari parallel.

Demak, u parallelogramm. Bu parallelogrammda $AA_1 = BB_1$. ❑

To'g'ri chiziqdan unga parallel bo'lgan tekislikkacha bo'lgan masofa deb to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan shu tekislikkacha bo'lgan masofaga aytiladi.

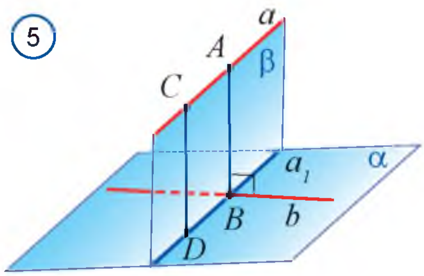


Tekislikning ixtiyoriy ikki nuqtasidan unga parallel bo'lgan tekislikkacha bo'lgan masofa bir xil bo'ladi. Bu xossa oldingi teorema isbotiga o'xshash isbotlanadi.

Ikki parallel tekisliklar orasidagi masofa deb bir tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofaga aytiladi.4- rasmda tasvirlangan stolning balandligi pol va stol tekisliklari orasidagi masofaga teng bo'ladi.

Teorema 4.8. *Ikki ayqash to'g'ri chiziq yagona umumiy perpendikularga ega bo'ladi.*

Isbot: a va b ayqash to'g'ri chiziqlar bo'lsin (5 - rasm). Bu to'g'ri chiziqlarda shunday A va B nuqtalarni talash mumkinligini ko'rsatamizki, AB to'g'ri chiziq ham a ga, ham b ga perpendikular bo'ladi. α tekislik b to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. a to'g'ri chiziqda C nuqtani olamiz va undan α tekislikka CD perpendikular tushuramiz. Kesishuvchi a va CD to'g'ri chiziqlardan β tekislikni o'tkazamiz. a_1 to'g'ri chiziq - α va β tekisliklarning kesishish chizig'i bo'lsin.



$a_1 \parallel a$ bo'lgani uchun a_1 va b to'g'ri chiziqlar qandaydir B nuqtada kesishsadi. B nuqtadan β tekislikda yotuvchi, a to'g'ri chiziqqa BA perpendikular tushuramiz.

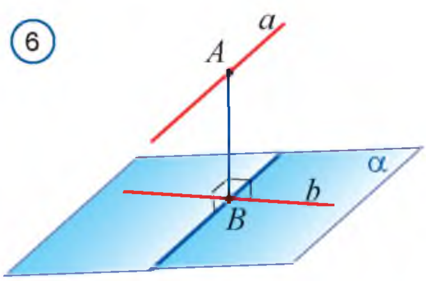
Natijada, AB va CD to'g'ri chiziqlarning har ikkalasi ham β tekislikda yotadi va a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi. Shuning uchun, $AB \parallel CD$ va $AB \perp \alpha$ bo'ladi.

Demak, $AB \perp a$ va $AB \perp b$ bo'ladi. AB izlayotgan to'g'ri chiziq bo'lib, u a va b ayqash to'g'ri chiziqlarning har ikkalasiga ham perpendikular bo'ladi.

Umumiy perpendikularning yagonaligini mustaqil isbotlang. ❑

Ikki ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa deb ularning umumiy perpendikulari uzunligiga aytiladi.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:



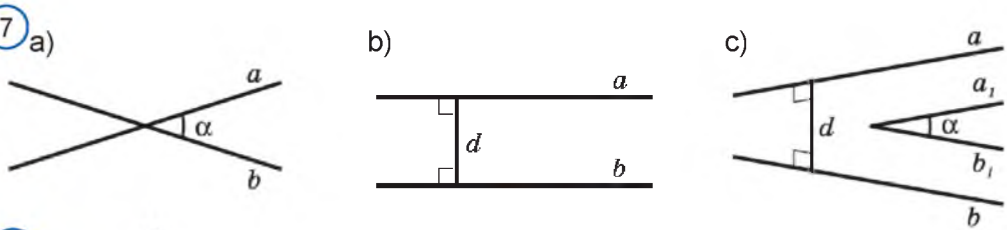
Ikki ayqash a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa (6- rasm) - a to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan, b to'g'ri chiziq yotgan va a to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan α tekislikkacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi.

Yuqoridagilarga asoslanib, endi biz fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishini sonlar yordamida tavsiflashimiz mumkin.

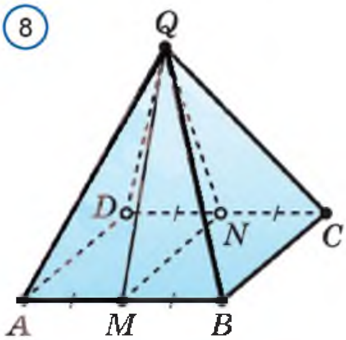
Agar fazoda ikki to'g'ri chiziq:

- o'zaro kesishsa - ular orasidagi α burchak (7.a- rasm),
- o'zaro parallel bo'lsa - ular orasidagi d masofa (7.b- rasm),
- o'zaro ayqash bo'lsa - ular orasidagi α burchak va orasidagi d masofa (7.c- rasm) mazkur to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishini sonli tavsiflaydi.

7



8



Masala. To'rtburchakli $SABCD$ piramidaning barcha qirralari a ga teng. Uning AB va SC qirralari orasidagi masofani toping (8- rasm).

Yechish: 4.8- teoremaga ko'ra, AB va SC qirralarida shunday X va Y nuqtalar borki, XY to'g'ri chiziq AB va SC qirralarning har ikkalasiga ham perpendikular bo'ladi. Shuningdek, XY to'g'ri chiziq, SC to'g'ri chiziq yotgan va AB to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan tekislikka ham perpendikular bo'ladi.

Aytaylik, α tekislik - S nuqtadan o'tuvchi va AB to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan tekislik bo'lsin. Bu tekislik AB va CD qirralarning o'rtalari M va N nuqtalardan o'tadi. Unda $XY \,||\, \alpha$ va XY kesmaning α tekislikdagi proyeksiyasi XY kesmaga teng bo'ladi.

Endi X va Y nuqtalarning α tekislikdagi qaysi nuqtalarga proyeksiyalanishini aniqlaymiz.

$AB \perp \alpha$ bo'lgani uchun AB qirraning barcha nuqtalari M nuqtaga proyeksiyalanadi. Demak, X nuqta M nuqtaga proyeksiyalanadi.

S va C nuqtalar mos ravishda S va N nuqtalarga proyeksiyalangani uchun, SC kesma SN kesmaga o'tadi. SN to'g'ri chiziq AB to'g'ri chiziqqa parallel tekislikda yotgani uchun, izlanayotgan, XY kesmaning proyeksiyasi - SN to'g'ri chiziqqa M nuqtadan tushurilgan perpendikulardan iborat bo'ladi.

Bu perpendikular uzunligi d ni, asosi a va yon tomoni $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ga teng bo'lgan SMN teng yonli uchburchak yuzidan foydalanib topamiz.

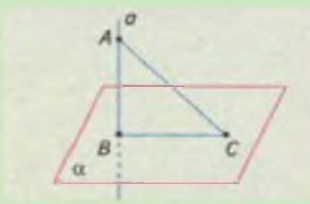
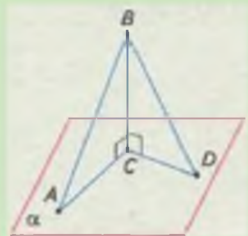
Bir tomondan bu uchburchak yuzi: $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ga teng,

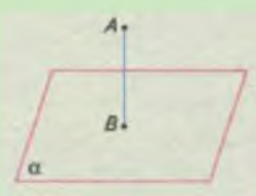
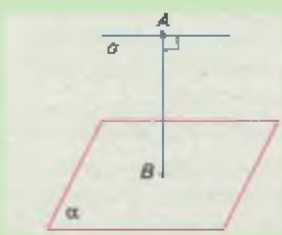
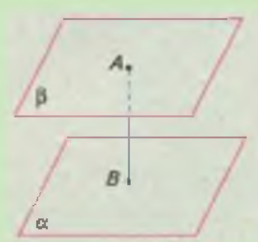
ikkinchi tomondan esa $\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} d$ ga teng. Bu tenglikdan $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

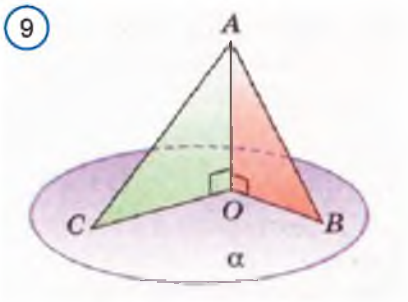
Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. Tekislikka tushurilgan perpendikular va og'maga ta'rif bering
2. Og'maning tekislikdagi proyeksiyasi deb nimaga aytiladi?
3. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa qanday aniqlanadi?
4. Tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi masofa qanday topiladi?
5. Ikki parallel tekisliklar orasidagi masofa qanday aniqlanadi?
6. Ikki ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa qanday aniqlanadi?
7. Fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishini qaysi sonli kattaliklar aniqlaydi?

13- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

<table>
<tr><th colspan="2">PERPENDIKULAR VA O'GMA</th></tr>
<tr><th>Ta'rifi</th><th>Xossalari</th></tr>
<tr>
<td>
Agar $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$ bo'lsa,
AB - α tekislikka A nuqtadan tushirilgan perpendikular,
AC - og'ma,
BC - og'maning α tekislikka proyeksiyasi</td>
<td>
$BC < AB$, $BC < BD$;
Agar $AB = BD$ bo'lsa, $AC = CD$ bo'ladi;
Agar $AC = CD$ bo'lsa, $AB = BD$ bo'ladi;
Agar $AC > CD$ bo'lsa, $AB > BD$ bo'ladi;</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">MASOFALAR</th></tr>
<tr><th>Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa</th><th>To'g'ri chiziqdan tekislikkacha bo'lgan masofa</th><th>Tekisliklar orasidagi masofa</th></tr>
<tr>
<td>
$AB \perp \alpha$</td>
<td>
$a \parallel \alpha$,
$A \in a$, $AB \perp \alpha$.</td>
<td>
$\alpha \parallel \beta$,
$A \in \beta$, $AB \perp \alpha$.</td>
</tr>
</table>



5.15. A, B, Q nuqtalar α tekislikka tegishli, M nuqta esa unga tegishli emas va $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB kesmalarning qaysi biri a) perpendikular; b) og'ma; c) og'ma proyeksiyasi ekanligini aniqlang.

5.16. A nuqtadan a tekislikka AB va AC og'malar va AO perpendikular o'tkazilgan (9- rasm). Agar AB = 2,5 sm, AC = 3 sm bo'lsa, og'malarning proyeksiyalarini o'zaro taqqoslang.

5.17. Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma tushirilgan (9- rasm). Agar og'malarning biri ikkinchisidan 26 sm uzun, proyeksiyalari esa 12 sm va 40 sm bo'lsa, bu og'malarning uzunliklarini toping.

5.18. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak uchlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

5.19. Yuzi a) 21 sm^2; b) 96 sm^2; c) 44 sm^2; d) 69 sm^2; e) 156 sm^2 bo'lgan $ABCD$ kvadrat tekisligiga uzunligi 10 sm bo'lgan DM perpendikular tushurilgan. MA og'maning uzunligini toping.

5.20. To'g'ri burchagi C bo'lgan ABC uchburchakning o'tkir burchagi uchidan uchburchak tekisligiga perprndikular AD to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Agar $AC = c$, $BC = b$ va $AD = c$ bo'lsa, D nuqtadan B va C uchlargacha bo'lgan masofalarni toping.

5.21. Bir-biridan 3,4, m uzoqlikda bo'lgan vertikal ustunning yuqori uchlari to'sim bilan tutashtirilgan. Ustunlarning balandliklari 5,8,m va 3,9 m bo'lsa, to'sim uzunligini toping.

5.22. 15 m uzunlikdagi telefon simi simyog'ochga yer sathidan 8 m balandlikda mahkamlangan va undan balandligi 20 m bo'lgan ko'pqavatli uy tomiga tarang tortilgan. Uy bilan ustun orasidagi masofani toping.

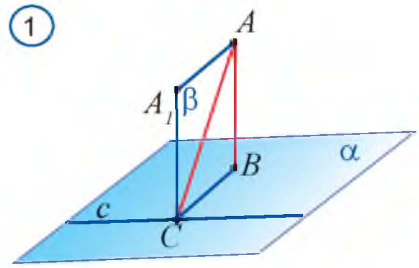
5.23. Tekislikka P nuqtadan tushirilgan PQ perpendikular uzunligi 1 ga, PA va PB og'malar uzunliklari esa 2 ga teng. C nuqta AB kesma o'rtasi. Agar a) $\angle APB$ = 90^0; b) $\angle APB$ = β bo'lsa, QC kesma uzunligini toping.

5.24. $ABCD$ parallelogrammning o'tmas B burchagi uchidan uning tekisligiga perpendikular bo'lgan BH kesma tiklangan. Agar AH = 5 sm, $HD = HC$ = 8,5 sm, AC = 1,5$\sqrt{33}$ bo'lsa, parallelogramm tomonlarini toping.

5.25. M nuqta $t$omoni 60 sm bo'lgan muntazam ABC uchburchakning har bir uchdan 40 sm masofada joylashgan. ABC uchburchak tekisligidan M nuqtagacha bo'lgan masofani toping.

17 UCH PERPENDIKULARLAR HAQIDAGI TEOREMA

Teorema 4.9. ***Agar tekislikka tushirilgan og'maning asosidan o'tuvchi to'gri chiziq og'maning proyeksiyasiga perpendikular bo'lsa, u holda u og'maning o'ziga ham perpendikular bo'ladi.***



Isbot: Aytaylik, AB kesma α tekislikka tushurilgan perpendikular, AC kesma esa og'ma bo'lsin. c to'g'ri chiziq α tekislikda yotuvchi, C nuqtadan o'tuvchi va og'ma proyeksiyasiga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq bo'lsin (1- rasm). AB ga parallel A_1C to'gri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular bo'ladi. AB va AC_1 to'g'ri chiziqlar orqali β tekislikni o'tkazamiz. c to'g'ri chiziq CA_1 to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'ladi. U shartga ko'ra, CB to'g'ri chiziqqa ham perpendikular edi. Unda c to'g'ri chiziq β tekislikka ham perpendikular bo'ladi.

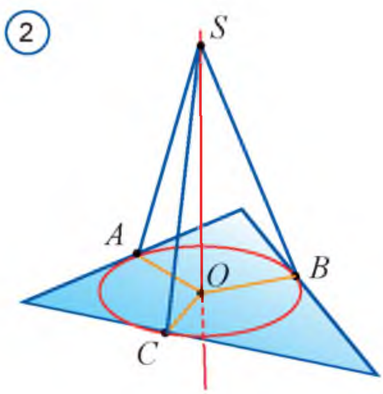
Demak, c to'g'ri chiziq β tekislikda yotgan AC og'maga ham perpendikular bo'ladi. ❑

Mazkur teoremada uchta perpendikularlar haqida gap borayotgani uchun u "Uch perpendikularlar haqidagi teorema" nomini olgan. Bu teoremaga teskari bo'lgan teorema ham o'rinli bo'ladi. Uni mustaqil isbotlang.

Teorema 4.10. ***Agar tekislikka tushirilgan og'maning asosidan o'tuvchi to'gri chiziq og'maga perpendikular bo'lsa, u holda u og'maning proyeksiyasiga ham perpendikular bo'ladi.***

1- masala. Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazilgan (2- rasm). Bu to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang.

Isbot: Aytaylik, A, B, C - uchburchak tomonla-rining aylana bilan kesishish nuqtalari, O- aylana markazi, S esa perpendikulardagi ixtiyoriy nuqta bo'lsin.



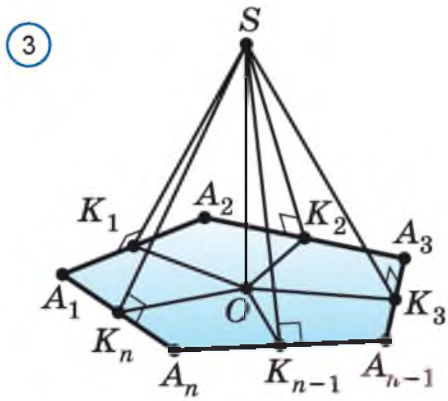
OA uchburchak tomoniga perpendikular bo'lgani uchun, uch perpendikularlar haqidagi teoremaga ko'ra, OA ham bu tomonga perpendikular bo'ladi. Unda SAO to'g'ri burchakli uchburchak bo'ladi. Bu uchburchakda Pifagor teoremasiga ko'ra,

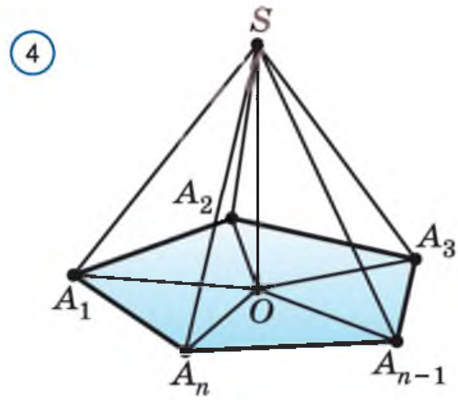
$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

bu yerda r - aylana radiusi.

Xuddi shunga o'xshash, SBO to'g'ri burchakli uchburchakdan $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ va SCO to'g'ri burchakli uchburchakdan esa $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ ekanligini topamiz.

Demak, $SA = SB = SC$. ❑



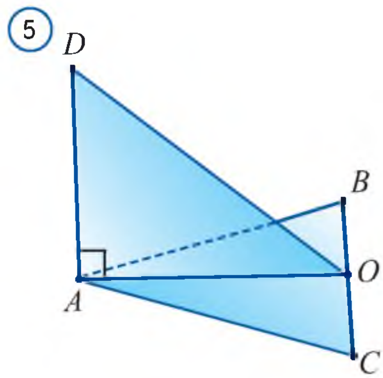


Yuqorida keltirilgan 3-4- rasmlar asosida 1- masalaga o'xshash va ixtiyoriy ko'pburchak uchun umumiyroq hollarni mustaqil isbotlash uchun keltiramiz.

2- masala. Fazodagi nuqta ko'pburchakning tomonlaridan baravar uzoqlikda joylashgan bo'lib, undan ko'pburchak tekisligiga perpendikular tushurilgan. Bu perpendikular asosi ko'pburchakka ichki chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini isbotlang (3- rasm).

3- masala. Fazodagi nuqta ko'pburchakning uchlaridan baravar uzoqlikda joylashgan bo'lib, undan ko'pburchak tekisligiga perpendikular tushurilgan. Bu perpendikular asosi ko'pburchakka tashqi chizilgan aylana markazi bilan ustma-ust tushishini isbotlang (4- rasm).

4- masala. ABC uchburchak tekisligiga uning A nuqtasidan perpendikular chiqarilgan (5- rasm). Agar $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ va $AD = 36$ ga teng bo'lsa, D nuqtadan BC to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping.



Yechish: Izlanayotgan masofa D nuqtadan BC tomonga tushurilgan perpendikular uzunligiga teng bo'ladi. Bu kesmani tushurish uchun uning BC tomondagi asosini topish lozim bo'ladi. Buning uchun ABC uchburchakning A uchidan BC tomoniga AO balandlikni tushuramiz: $AO \perp BC$.

Unda uch perpendikularlar haqidagi teoremaga ko'ra, $BC \perp DO$ bo'ladi. Demak, DO izlanayotgan kesma ekan.

Endi DO kesmaning uzunligini topamiz. Buning uchun, oldin ABC uchburchak yuzini Geron formulasidan foydalanib topamiz:

$$p = (a + b + c) / 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$$

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$$

$$DO = 2\,S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6{,}6.$$

ADO to'g'ri burchakli uchburchakda, Pifagor teoremasiga ko'ra

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6.$$

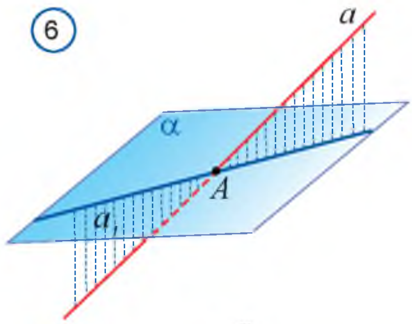
Aytaylik, α tekislik va uni kesib o'tuvchi va bu tekislikka perpendikular bo'lmagan a to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin (6- rasm). a to'g'ri chiziqning har bir nuqtasidan perpendikularlar tushuramiz. Bu perpendikularlarning asoslari a_1 to'g'ri chiziqni tashkil qiladi.

a_1 to'g'ri chiziq a to'g'ri chiziqning α tekislikdagi *proyeksiyasi* deb ataladi.

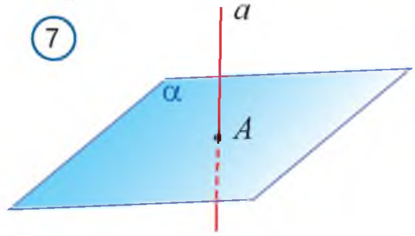
a to'g'ri chiziq va a tekislik orasidagi burchak deb, to'g'ri chiziq bilan uning bu tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi.

Agar to'g'ri chiziq tekislikka perpendikular bo'lsa (7- rasm), u bilan tekislik orasidagi burchak 90^0 ga, agar parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak 0^0 ga teng deb olinadi.

6



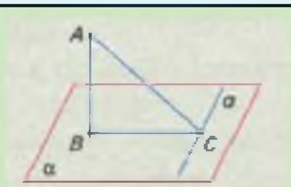
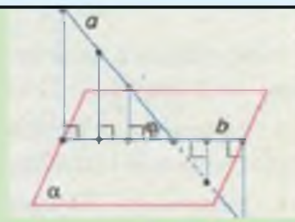
7

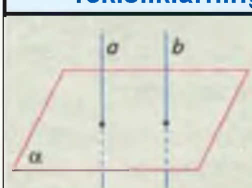
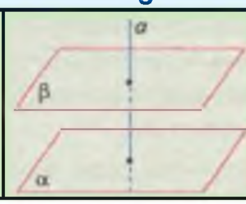


? *Mavzuga doir savollar va mashqlar*

1. Uch perpendikularlar haqidagi teoremani sharhlang. Nima sababdan u shunday nomlangan?
2. Uch perpendikularlar haqidagi teoremaga teskari teoremani ayting va izohlang.
3. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
4. Tekislik va unga perpendikular to'g'ri chiziq orasidagi burchak necha gradus?

13- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

Uch perpendikularlar haqidagi teorema	To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak
 $AB\perp\alpha$ Agar $a\perp BC$ bo'lsa, $a\perp AC$ bo'ladi. Agar $a\perp AC$ bo'lsa, $a\perp BC$ bo'ladi.	 b - a ning α tekislikdagi proyeksiyasi φ - a va α tekislik orasidagi burchak

Tekisliklarning parallelligi va perpendikularligi orasidagi bog'lanishlar			
	Agar $a\parallel b,\ \alpha\perp a$ bo'lsa, $\alpha\perp b$ bo'ladi. Agar $\alpha\perp a,\ b\perp\alpha$ bo'lsa, $a\parallel b$ bo'ladi.		Agar $\alpha\parallel\beta,\ a\perp\beta$ bo'lsa, $a\perp\alpha$ bo'ladi. Agar $\alpha\perp a,\ \beta\perp a$ bo'lsa, $\alpha\parallel\beta$ bo'ladi.

5.26. A nuqta tomoni a ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchakning uchlaridan a masofada yotadi. A nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

5.27. α tekislikning tashqarisidagi S nuqtadan unga uchta teng SA, SB, SC og'malar va SO perpendikular o'tkazilgan. Perpendikularning O asosi ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi bo'lishini isbotlang.

5.28. Teng tomonli uchburchakning tomonlari 3 m ga teng. Uchburchak har bir uchidan 2 m masofada bo'lgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

5.29. Teng yonli uchburchakda asosi va balandligi 4 m ga teng. Berilgan nuqta uchburchak takisligidan 6 m masofada va uning uchlaridan bit xil masofada yotadi. Shu masofani toping.

5.30. A nuqtadan kvadratning uchlarigacha bo'lgan masofa a ga teng. Kvardatning tomoni b ga teng bo'lsa, A nuqtadan kvadrat tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

5.31. Berilgan nuqtadan tekislikka o'tkazilgan berilgan uzunlikdagi og'malar asoslarining geometrik o'rnini toping.

5.32. Berilgan nuqtadan tekislikka uzunliklari 10 sm va 17 sm bo'lgan ikkita og'ma o'tkazilgan. Bu og'malar proyeksiyasining ayirmasi 9 sm ga teng. Og'malar proyeksiyalarini toping.

5.33. Nuqtadan tekislikka ikkita og'ma o'tkazilgan. Agar 1) ulardan biri ikkinchisidan 26 sm uzun, og'malarning proyeksiyaslari 12 sm va 40 sm bo'lsa; 2) og'malar uzunliklari 1 : 2 nisbatda bo'lib, ularning proyeksiyalari 1 sm va 7 sm ga teng bo'lsa, og'malarning uzunliklarini toping.

5.34. α tekislikdan d masofada yotgan A nuqtadan tekisik bilan 30^0 burchak tashkil qiluvchi AB va AC og'malar o'tkazilgan.Ularning α tekislikka proyeksiyalari o'zaro 120^0 li burchak tashkil qiladi. BC kesma uzunligini toping.

5.35. Agar to'g'ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri tekislikka tegishli, ikkikchisi esa u bilan 45^0 li burchak tashkil qilsa, gipitenuza bu tekislik bilan 30^0 li burchak tashkil qilishini isbotlang.

5.36. a og'ma α tekislik bilan 45^0 li burchak tashkil qiladi, tekislikning b to'g'ri chizig'i esa og'ma proyeksiyasi bilan 45^0 li burchak tashkil qiladi. a va b to'g'ri chizqlar orasidagi burchakning 30^0 ga teng ekanligini isbotlang.

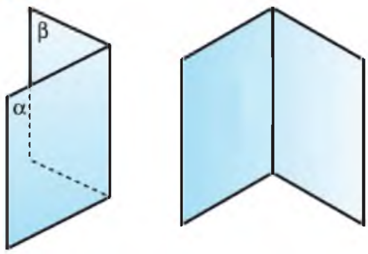
5.37. P nuqta tomoni a ga teng $ABCD$ kvadratning har bir uchidan a masofada yotadi. Kvadrat tekisligi va AP to'g'ri chiziq orasidagi burchakni toping.

5.38. Uchburchakli piramidaning hamma qirralari o'zaro teng. Piramidaning qirrasi va bu qirra tegishli bo'lmagan yog'i orasidagi burchakni toping.

5.39. To'g'ri burchakli parallelepipedning o'lchamlari a, b va c ga teng. Parallelepiped diagonali bilan uning yoqlari diagonallari orasidagi masofani toping.

18 FAZODA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULARLIGI

1



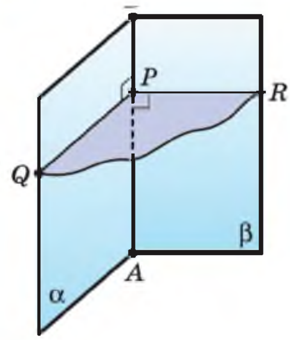
Ikkita yarimtekislik va ularni chegaralab turgan umumiy to'g'ri chiziqdan iborat geometrik shaklga *ikki yoqli burchak* deb ataladi (1- rasm). Yarimtekisliklar ikki yoqli burchakning *yoqlari*, ularni chegaralovchi to'g'ri chiziq esa ikki yoqli burchakning *qirrasi* deb ataladi.

Ikki yoqli burchaklar haqida tevarak atrofdagi quyidagi narsalar tasavvur beradi (2- rasm): kitob, noutbuk , ochilq eshik va imorat tomi.

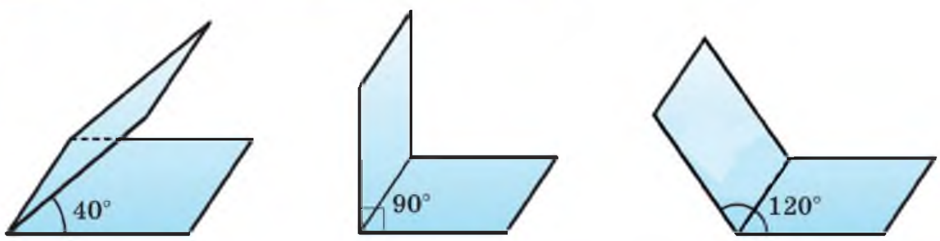
Ikki yoqli burchak qirrasining ixtiyoriy nuqtasidan uning yoqlarida yotuvchi va bu qirraga perpendikular bo'lgan nurlarni chiqaramiz. Bu nurlar hosil qilgan burchak ikki yoqli burchakning *chiziqli burchagi* deb ataladi (3- rasm).

2

3



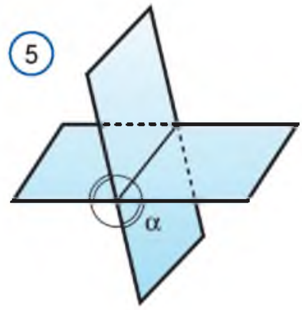
4



Ta'rifdan ko'rinadiki, ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi qirrada tanlangan nuqta bilan aniqlanadi va cheksiz ko'p bo'ladi. Shunday bo'lsada, ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi kattaligi qirrada tanlangan nuqtaga bog'liq emas, ya'ni ularning hammasi o'zaro teng bo'ladi.

Ikki yoqli burchaklar kattaligi uning chiziqli burchagi kattaligi bilan aniqlanadi. Chiziqli burchaklarning o'tkir, to'g'ri, o'tmas va yoyiq bo'lishiga qarab, ikki yoqli burchaklar ham mos ravishda o'tkir, to'g'ri, o'tmas va yoyiq ikki yoqli burchaklarga ajratiladi. 4- rasmda turli xil ikki yoqli burchaklar tasvirlangan

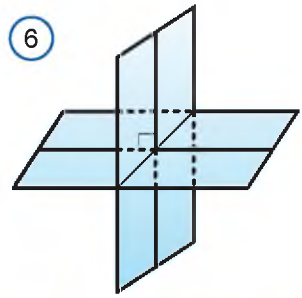
Ikki kesishuvchi tekislik butun fazoni umumiy qirraga ega bo'lgan to'rtta ikki yoqli burchakka ajratadi (5- rasm). Bu ikki yoqli burchaklarning biri α ga teng bo'lsa, ulardan yana bittasining qiymati ham α ga teng bo'ladi. Qolgan ikkitasining qiymati esa 180^0 - α ga teng bo'ladi.



Mazkur ikki yoqli burchaklar ichida 90^0 dan kichigi ham bo'ladi. Shu burchakning qiymati kesishuvchi *tekisliklar orasidagi burchak* deb olinadi.

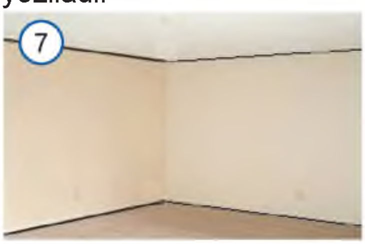
Agar ikki yoqli burchaklarning biri to'gri, ya'ni 90^0 ga teng bo'lsa, qolgan uchtasi ham to'g'ri bo'ladi (6- rasm).

To'g'ri burchak ostida kesishuvchi tekisliklar - *perpendikular tekisliklar* deb ataladi.

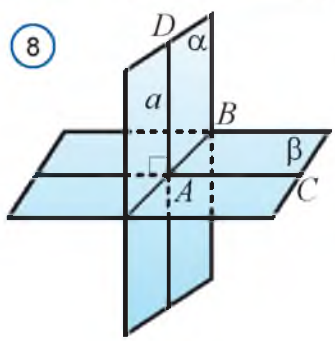


Perpendikular tekisliklarga tevarak atrofdan misol sifatida xona poli va devorlarini,umumiy qirraga ega xona devorlari, umumiy qirraga ega Rubik kubi yoqlari va yer sathi va uy devorlari hamda uyning bir-biriga tutashgan devorlarini misol tariqasida keltirish mumkin (7- rasm).

α va β tekisliklarning perpendikularligi to'g'ri chiziqlardagi kabi "⊥" belgi yordamida, $\alpha \perp \beta$ tarzda yoziladi.



Endi perpendikular tekisliklarning xossalari haqida to'xtalamiz. Quyidagi teorema - "tekisliklarning perpendikularlik alomati" deb nomlanadi.



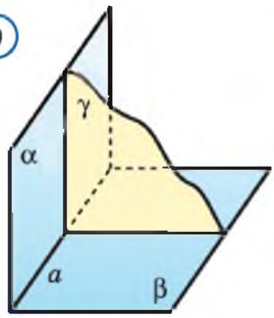
Teorema 4.11. Agar tekisliklardan biri ikkinchisiga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqdan o'tsa, bunday tekisliklar o'zaro perpendikular bo'ladi.

Isbot: Aytaylik, α va β tekisliklar berilgan bo'lib, α tekislik β tekislikka perpendikular bo'lgan a to'g'ri chiziqdan o'tsin (8- rasm). β tekislik bilan a to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi A bo'lsin. $\alpha \perp \beta$ ekanligini isbotlaymiz.

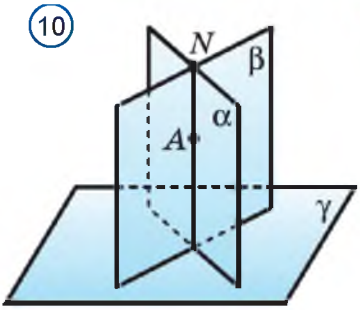
α va β tekisliklar AB to'g'ri chiziq bo'ylab kesishisha-yapti. Unda, $AB \perp a$ bo'ladi, chunki shartga ko'ra $\beta \perp a$. β tekislikda yotgan va AB to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan AC to'g'ri chiziqni otkazamiz. Natijada, hosil bo'lgan DAC burchak - $\alpha\beta$ ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi. Shartga ko'ra, $a \perp \beta$. Unda, DAC to'g'ri burchak. Demak, $\alpha \perp \beta$.❑

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

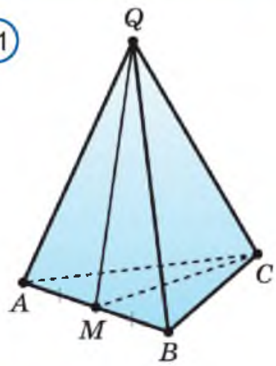
9



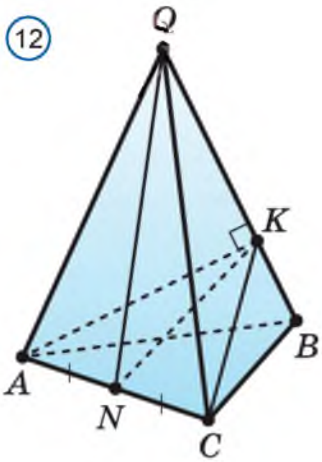
10



11



12



***Natija.* Agar tekisliklar ikki tekislikning kesishish chizig'iga perpendikular bo'lsa, bu tekisliklarning har biriga perpendikular bo'ladi (9- rasm).**

4.11 teoremaga teskari teorema ham o'rinli bo'ladi. Uni isbotsiz keltiramiz.

***Teorema 4.12.* Agar ikki perpendikular tekisliklardan birining biror nuqtasidan ikkinchisiga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazilsa, bu to'g'ri chiziq birinchi tekislikda yotadi.**

***Natija.* Agar ikki perpendikular tekislik uchinchi tekislikka perpendikular bo'lsa, ularning kesishish chizig'i ham bu tekislikka perpendikular bo'ladi (10-rasm).**

1- masala. M nuqta - $QABC$ muntazam piramida asosidagi qirrasining o'rtasi bo'lsa (11- rasm), QCM tekislik piramida asosi tekisligi ABC ga perpendikular ekanligini isbotlang.

Isbot. AB kesma teng yonli AQB va ACB uchburchaklarning asosi bo'lgani uchun bu uchburchaklar medianalari QM va CM ga ham perpendikular bo'ladi. Shu bilan birga, AB kesma QCM tekislikka ham perpendikular bo'ladi. Unda 4.12 teoremaga ko'ra, ABC tekislik QCM tekislikka perpendikular bo'ladi.❑

2- masala. $QABC$ muntazam piramidaning uchidagi yassi AQB burchagi α ga teng. Uning yon qirrasidagi ikki yoqli burchagini toping (12- rasm).

Yechish. Aytaylik, N nuqta AC qirraning o'rtasi, AK esa A nuqtadan BQ qirraga tushurilgan perpendikular bo'lsin.

ABQ va CBQ uchburchaklarning tengligidan $CK \perp BQ$ bo'ladi. Shuning uchun, AKC burchak BQ ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladi.

AKQ va ANQ to'g'ri burchakli uchburchaklardan AK = sinα, $AN = AQ$ sin(α/2) ekanligini topamiz.

AKN to'g'ri burchakli uchburchaklardan esa

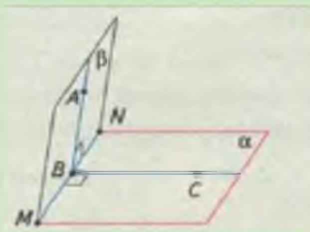
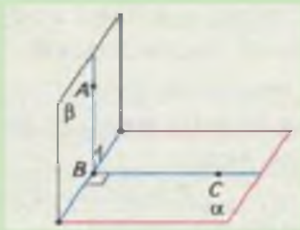
$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$$ ga egamiz.

Bundan, $\angle AKC = 2\arcsin\frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. ❑

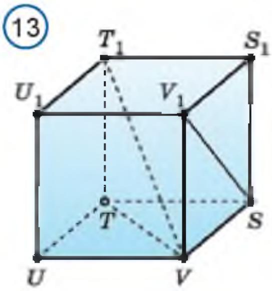
Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Ikki yoqli burchak deb nimaga aytiladi?*
2. *Qanday burchakka tekisliklar orasidagi burchak deb ataladi?*
3. *To'g'ri burchak ostida kesishuvchi tekisliklar qanday nomlanadi?*
4. *Tekisliklarning perpendikularlik alomatini ayting.*
5. *Perpendikular tekisliklarning xossalarini ayting va sharhlang.*

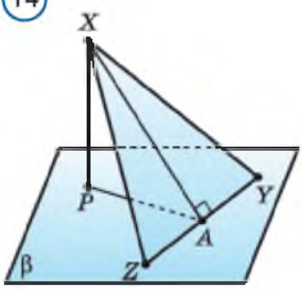
13- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

TEKISLIKLARNING PERPENDIKULARLIGI		
Tekisliklar orasidagi burchak	**Tekisliklarning perpendikularligi**	**Perpendikularlik alomati**
		
Agar $AB \perp MN$ va $CB \perp MN$ bo'lsa, $\angle ABC$ - α va β tekisliklar orasidagi burchak bo'ladi.	Agar $\angle ABC = 90^0$ bo'lsa, α va β tekisliklar perpendikular bo'ladi.	Agar $a \subset \alpha$ va $a \perp \beta$ bo'lsa, $\alpha \perp \beta$ bo'ladi..

13



14



5.40. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedning; b) $ABCA_1B_1C_1$ to'g'ri prizmaning perpendikular yoqlarini aniqlang va to'g'ri ikki yoqli burchalarini ayting.

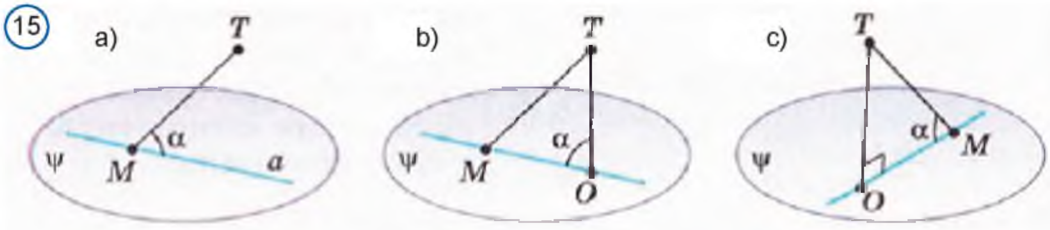
5.41. $STUVS_1T_1U_1V_1$ kubda (13- rasm) a) TVT_1 burchak; b) T_1ST burchak T_1SVT ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi bo'ladimi? V_1UTS ikki yoqli burchakning qiymatini toping.

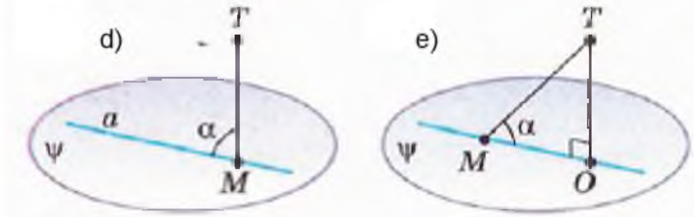
5.42. Ikkita ikki yoqli burchakning bittadan yog'i umumiy, qolgan yoqlari birgalikda tekisikni tashkil qiladi. Bu ikki yoqli burchaklarning yig'indisi 180^0 ga teng ekanligini isbotlang.

5.43. XYZ uchburchakning YZ tomoni β tekislikda yotadi. Uning X uchidan XA balandlik va β tekislikka XP perpendikular tushirilgan (14- rasm). XAP burchak $XYZP$ ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi ekanligini isbotlang.

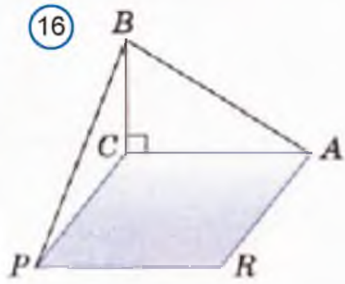
5.44. Uchburchakli $ABCD$ piramidaning CD qirrasi ABC tekislikka perpendikular. $AB = BC = AC = 6$ va $BD = 3\sqrt{7}$ bo'lsa, $DACB$, $DABC$, $BDCA$ ikki yoqli burchaklarni

15





16



toping.

5.45. T nuqtadan ψ tekislikka og'ma tushirilgan (15- rasm). Quyidagi rasmlarning qaysilarida tekislik va og'ma orasidagi α burchak to'g'ri belgilangan?

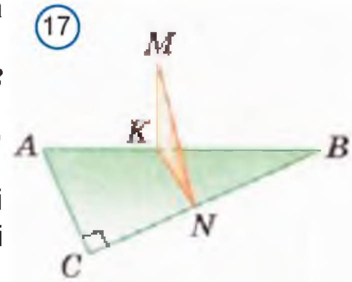
5.46. Uchburchakli $ABCD$ piramidada DAB, DAC, ACB burchaklar to'g'ri, $AC = CB = 5$ va $DB = 5\sqrt{5}$ bo'lsa, $ABCD$ ikki yoqli burchagini toping.

5.47. Ikki yoqli burchak chiziqli burchagining tekisligi uning har bir yog'ida perpendikular ekanligini isbotlang.

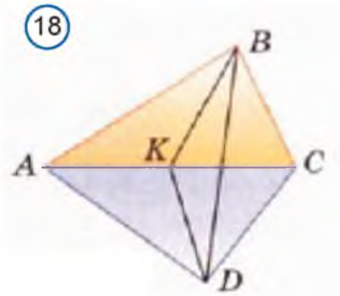
5.48. Ikki yoqli burchakning bitta yog'ida yotgan ikkita nuqta uning qirrasidan mos ravishda 51 sm va 34 sm uzoqlikda yotibdi. Bu nuqtalarning birinchisi boshqa yog'idan 15 sm uzoqlikda yotganligi ma'lum bo'lsa, shu yoqdan ikkinchi nuqtagacha bo'lgan masofani toping.

5.49. ABC to'g'ri burchakli uchburchak ($\angle C = 90^0$) va $ACPR$ kvadrat kekisliklari o'zaro perpendikular (15- rasm). Kvadrat tomoni 6 sm, uchburchak gipotenuzasi 10 sm. BP kesma uzunligini toping.

17



18



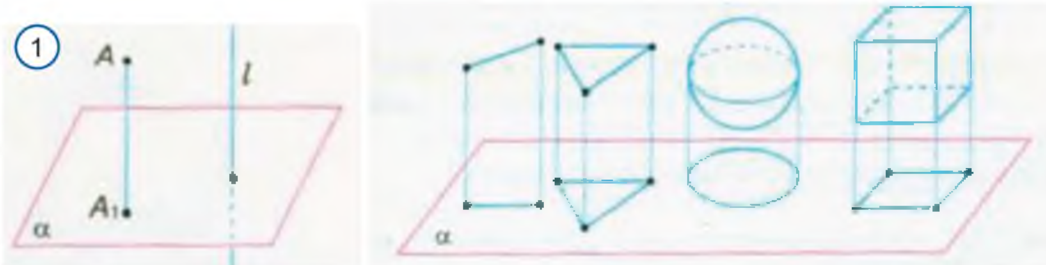
5.50. MK kesma to'g'ri burchakli ABC uchburchak ($\angle C = 90^0$) tekisligiga perpendikular (16- rasm). $KN // AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ sm, $MK = 8$ sm bo'lsa, MN kesma uzunligini toping.

5.51. ABC va ADC teng yonli uchburchaklar tekisliklari perpendikular (17- rasm). AC ularning umumiy asosi. BK kesma ABC uchburchak medianasi. $BK = 8$ sm, $DK = 15$ sm bo'lsa, BD kesma uzunligini toping.

19 FAZODA ORTOGONAL PROYEKSIYA VA UNDAN TEXNIKADA FOYDALANISH

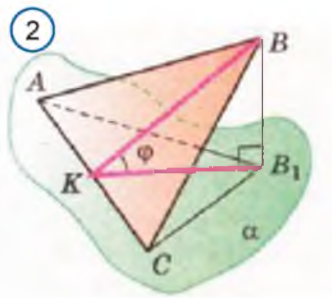
Agar proyeksiya yonalishi l proyeksiyalash tekisligi α ga perpendikular bo'lsa, bunday parallel proyeksiyalash *ortogonal proyeksiyalash* deb atalad.

Ortogonal proyeksiyalashda hosil bolgan shaklga berilgan shaklning *ortogonal proyeksiyasi* yoki qisqacha *proyeksiyasi* deb aytiladi.



Parallel proyaeksiyalashning hamma xossalari ortogonal proyeksiyalashda ham o'rinli bo'ladi. Quyida faqat ortogonal proyeksiyaga tegishli bo'lgan muhim xossani isbotlaymiz.

Teorema 4.15. ***Ko'pburchkning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi ko'pburchak yuzini uning tekisligi bilan proyeksiya tekisligi orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng.***



Isbot: 1) Avval uchburchak va uning biror tomonidan o'tuvchi tekislikdagi proyeksiyasi uchun qarab chiqamiz.

Aytaylik, ABC uchburchakning α tekislikdagi proyeksiyasi AB_1C uchburchak bo'lsin.

ABC uchburchaning BK balandligini tushiramiz. Uch perpendikularlar haqidagi teoremaga ko'ra, B_1K kesma KBB_1 uchburchakning balandligi bo'ladi.

BKB_1 burchak - uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi orasidagi φ burchakdan iborat bo'ladi. BKB_1 uchburchakda: $KB_1 = KB \cdot cos\varphi$.

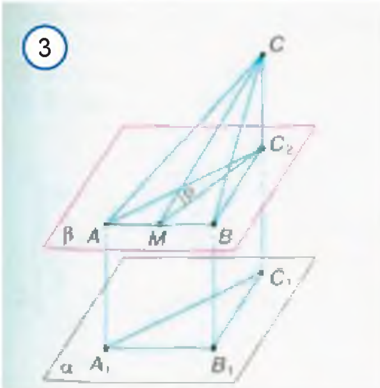
U holda, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$, $S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1$.

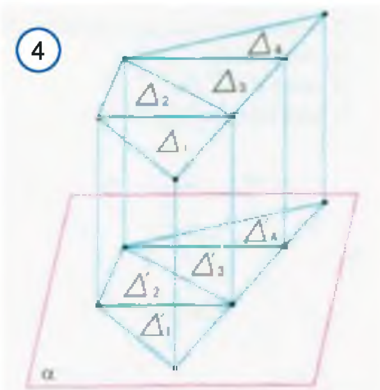
Bulardan, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot cos\varphi$ ni hosil qilamiz. 1- holda teorema isbotlandi.

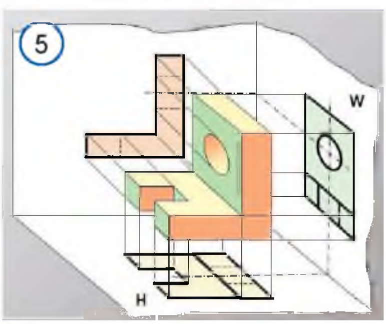
2) α tekislik o'rniga unga parallel bo'lgan, boshqa β tekislik olinganda ham teorema o'rinli bo'ladi (3-rasm). Bu parallel proyeksiyalash xossasidan foydalanib isbotlanadi.

3) Endi umumiy, ko'pburchak holiga keladigan bo'lsak (4-rasm). Bu holda teorema, ko'pburchakni diagonallari yordamida uchburchaklarga bo'lish yordamida yuqorida ko'rilgan xususiy holga keltirib isbotlanadi. ❑

Ortogonal proyeksiyadan texnik chizmachilikda turli xil detallarni loyihalashda foydalaniladi. Turli mashina detallari chizmalari bitta, ikkita yoki uchta o'zaro





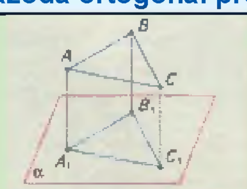
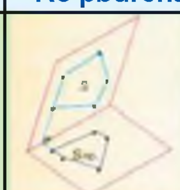


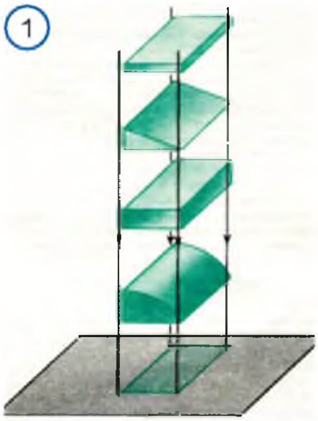
perpendikular proyeksiyalar tekisliklariga ortogonal proyeksiyalash yo'li bilan hosil qilinadi (5- rasmlar). Bu proyeksiyalar qaysi yo'nalishda proyeksiyalanganligiga qarab, vertikal (tik), gorizontal va frontal proyeksiyalar deb ham ataladi.

Mavzuga doir savollar va mashqlar

1. *Ortogonal proyeksiyalash deb nimaga aytiladi?*
2. *Ortogonal proyeksiyalash xossalarini sanang.*
3. *Ortogonal proyeksiyalashdan texnikada qanday foydalaniladi?*
4. *Bitta to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo'lgan tekislikning xossasini ayting.*
5. *Umumlashgan Pifagor teoremasi nima haqida?*
6. *Uchunchi tekislikka prependikular ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladimi?*
7. *Ikkinchi tekislikka perpendikular tekislik va to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladimi?*
8. *Berilgan to'g'ri chiziqdan berilgan tekislikka perpendikular bo'lgan nechta tekislik o'tkazish mumkin?*
9. *α tekislik β tekislikka perpendikular. α tekislikdagi harqanday to'g'ri chiziq β tekislikka perpendikular bo'ladimi?*
10. *Birinchi tekislikka og'ma bo'lgan kesmadan o'tuvchi ikkinchi tekislik birinchisiga perpendikular bo'ladimi?*
11. *To'g'ri burchakli parallelepipedning kesishuvchi yoqlari o'zaro perpendikular bo'ladimi?*

13- bandning quyiga berilgan tayanch nazariy ma'lumotlarini qaytaring va ularga doir topshiriqlarni bajaring.

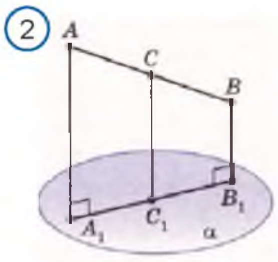
Fazoda ortogonal proyeksiya	Ko'pburchak proyeksiyasining yuzi
 Ortogonal proyeksiyada l - proyeksiyalash yo'nalishi α – prioyeksiyalash tekisligiga perpendikular	 S - ko'pburchak yuzi, S_1 - ko'pburchak proyeksiyasining yuzi, φ – ko'pburchaklar tekisligi orasidagi burchak bo'lsa, $S_1 = S \cdot cos\varphi$



5.52. Trapetsiyaning ortogonal proyeksiyasi a) kvadrat; b) kesma; c) to'g'ri to'rtburchak; d) parallelogramm; e) trapetsiya biri bo'lishi mumkinmi?

5.53. 1-rasmga qarab ortogonal proyeksiyasi to'g'ri to'rtburchak bo'lgan geometrik shakllarni ayting.

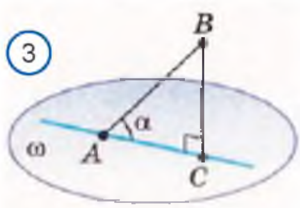
5.54. A_1B_1 kesma AB kesmaning α tekislika ortogonal proyeksiyasi (2- rasm). Agar AB = 20 sm, AC = 10 sm, A_1B_1 = 12 sm bo'lsa, B_1C_1 kesma uzunligini toping.

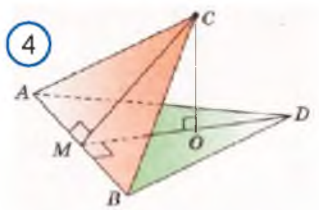


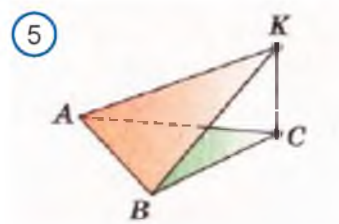
5.55. Uzunligi 5 sm bo'lgan AB kesmaning ω tekislikka ortogonal proyeksiyasi uzunligi 3 sm bo'lgan AC kesmadan iborat (3- rasm). AB kesmaning ω tekislika og'ish burchagi kosinusini toping.

5.56. Agar AB to'g'ri chiziqdan C nuqtagacha bo'lgan masofa (4- rasm) C nuqtadan ABD tekislikkacha bo'lgan masofadan ikki marta katta bo'lsa, ABC va ABD tekisliklar orasidagi burchakni toping.

5.57. ABC uchburchak yuzi 18 sm^2 ga teng. $KC \perp (ABC)$. Agar ABK va ABC uchburchaklar tekisliklari orasidagi burchak a) $\alpha = 30^0$; b) $\alpha = 45^0$; a) $\alpha = 60^0$ bo'lsa, ABK uchburchak yuzini toping.







5.58. ABC va ABD uchburchaklar tekisliklari orasidagi burchak 60^0 ga teng. Agar $AB = 4\sqrt{3}$ bo'lsa, CD masofani toping.

5.59. Yuzi 48 sm^2 ga teng bo'lgan uchburchakning ortogonal proyeksiyasi - tomonlari 14 sm, 16 sm va 6 sm bo'lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni hisoblang.

5.60. Yuzi 12 sm^2 ga teng bo'lgan uchburchakning ortogonal proyeksiyasi - tomonlari 13 sm, 14 sm va 15 sm bo'lgan uchburchakdan iborat. Bu uchburchak tekisligi va uning proyeksiyasi orasidagi burchakni hisoblang.

20 AMALIY MASHQ VA TATBIQ

Tatbiqlar va amaliy kompetensiyalarni shakllantirish

1. Ikki qo'shni xona devorlari tutashgan chiziqning polga perpendi-kularligini qanday qilib o'lchashlar yordamida tekshirsa bo'ladi?

2. Uzunlik o'lchov asbobi - puletka yordamida ustunning tikligini qanday tekshirsa bo'ladi?

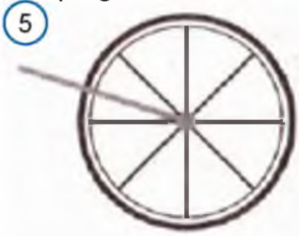
3. G'ildirak o'qi tekisligining u g'ildirayotgan tekislikka perpendikularligini qanday tekshirsa bo'ladi?

4. Nima sababdan qishda tomdan osilib turgan sumalaklarni, ularning qalinligini hisobga olmasdan, o'zaro parallel deyish mumikn?

5. O'quvchi amaliy ish bajarayapti. Bir necha o'rnatilgan ustunlarning Yerga nisbatan tikligini tekshirish uchun ulardan faqat bittasini tekshirdi. Qolgan ustunlarning tikligini quyidagicha tekshidi: hamma ustunlarning balandligini, ularning pastki asoslari va yuqori uchlari orasidagi masofalarni o'lchab qaror qabul qildi. U bu ishni to'g'ri bajardimi?

6. Nima sababdan eshik, u ochiqmi yoki yopiqmi har safar polga nisbatan perpendikular bo'ladi?

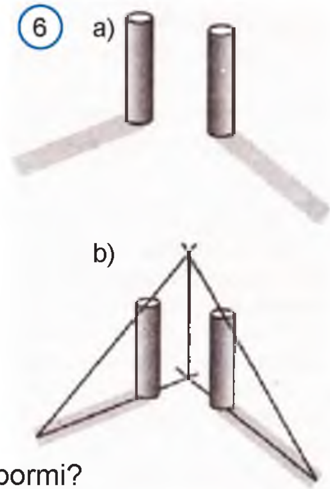
5



7. To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikularligiga yaqqol misol sifatida gildirak simlari yotgan tekislikning gildirak o'qiga bo'lan joylashuvini keltirish mumkin (5- rasm). O'q gildirakning har bir simiga perpenikular. Harakat davomida g'ildirak simlari har bir bitta nuqtada kesishadigan kesmalardan iborat doira tekisligini hosil qiladi.Agar o'q gorizontal joylashan bo'lsa, g'ildirak qanday tekislikda aylanadi? Nega?

Ko'rsatma: g'ildirak o'qiga perpendikular tekislikka perpendikular bo'ladi.

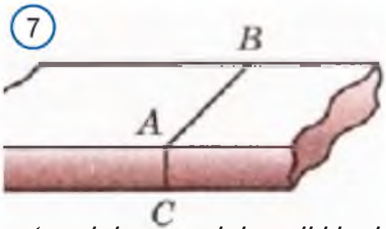
6



8. Balandlikka sakrash mashqi bajarilmoqda. To'siq tayoqni qo'yish uchun qirrsi 25 m bo'lgan kub va o'lchamlri 25x25x50 bo'lgn to'g'ri burchakli parallelepipedlardan foydalanilmoqda. 1) 125 sm; 2)150 sm; 3) 175 sm balandlikka sakrash mashqlrini qanday tashkil qilsa bo'ladi?

9. 6- rasmda ikkita vertikal ustun va ularning soyasi tasvirlangan. Shu ma'lumotlardan foyadlanib, yorug'lik manbasi (chiroq) joylashgan nuqtani va uning gorizontal tekislikka proyeksiyasini toping va quyidagi savollarga javob bering. a) Ustunlarning vertikalligining ahamiyati bormi? b) Soya tushayotgan tekislikning gorizontalligining ahamiyti bormi? c) rasmda berilgan ma'lumotlarning hammasi ham muhimmi?

7



Yechish:6-rasmda tegishli yasashlar keltirilgan. Yorug'lik manbasining joyini topishda ustunlarning yo'nalishi ahamiyatga ega emas, lekin ualrning vertikal ekanligi muhim hisoblanadi. Agar ustunlar vertikal va soya gorizontal tekislikka tushayotgan bo'lsa, masalani yechish uchun rasmdagi bitta ustunninh soyasini va ikkinchi ustundan tushayotgan soyaning yo'nalishini bilish kifoya (6.b- rasm).

10. Dumaloq stolga tomoni a ga teng bo'lgan kvadrat shaklidagi dasturxon solingan. Doira markazi kvadrat markazi bilan ustma-ust tushadi. Dasturxonning uchlari uning tomonlari o'rtalariga nisbatan qanchalar polga yaqinroq?

Javob: $a(2-1)/2= 0,207\,a$.

11. Devorlarnng tikligini shoqul (bir uchiga tosh bog'langan ip) bilan tekshiriladi. Agar shoqulning ipi devorga qanchalik yopishib tursa, shunchalik devor tik degan qarorga kelinadi. Bu qaror qanchali to'g'ri? Bu tekshirish usuli nimaga asoslangan?

12. Arralash sirti arralanayotgan taxtaning hamma qirralariga perpendikular bo'lishini ta'minlash uchun (7- rasm) taxta sirtida arralash chziqlarini qanday belgilash kerak?

13. Xonaning qo'shni devorlarining o'zaro perpendikularligini tekshirish uchun Pifagor teoremasidan qanday foydalansa bo'ladi?

14. Ustunning tikligini tekshirish uchun ustun asosi bilan bitta to'g'ri chiziqda yotmagan ikki nuqtadan kuzatiladi. Bunday tekshirish usulini asoslang.

Ko'rsatma: To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikularlik alomatidan foydalaning.

15. Borib bo'lmaydigan tepalikdagi nuqtada baland ustun o'rnatilgan. Shoqil yordamida uning tikligini qanday tekshirsa bo'ladi?

Yechish: Ustunning biror vertikal to'g'ri chiziq bilan bitta tekislikda yotishini va yana boshqa vertikal to'g'ri chiziq bilan bitta (boshqa) tekislikda yotishini ko'rsatish yetarli bo'ladi. Shoqulni shunday oldimizga qo'yamiski, uning va ustunning yuqori uchlari hamda ko'zimiz bitta to'g'ri chiziqda yotganda, shoqul ipi va ustun bitta to'g'ri chiziqda yotsin. Bu usul quyidagilarga asoslangan: 1) vertikal ustun ixtiyoriy vertikal to'g'ri chiziq bilan bitta tekislikda yotishi kerak; 2) agar ikki parallel to'g'ri chiziqlar ikkita kesishuvchi tekisliklarda yotsa, bu to'gri chiziqlar tekisliklarning kesishish chizig'iga ham parallel bo'ladi.

16. Ikki vertikal goylashgan yassi oyna berilgan. Bu oynalarning biri sirtiga parallel bo'lgan, gorizontal nur ikkinchi oynadan birinchi oyna sirtiga perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq bo'yicha qaytadi. Oynalar orasidagi burchakni toping.

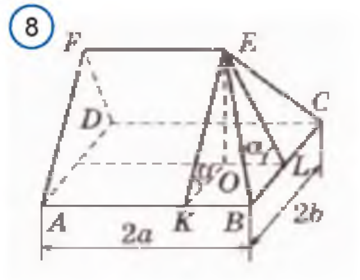
Ko'rsatma: Yorug'likning qaytish qonunidan foydalaning. *Javob;* 45^0.

17. Gorizontal nur ikki vertikal goylashgan yassi oynalardan qaytmoqda. Dastlab nur birinchi oyna sirtiga parallel bo'lgan bo'lsa, ikki marta akslanish natijasida ikkinchi oyna tekislgiga paralllel bo'lib qolmoqda. Oynalar orasidagi burchakni toping.

Javob: 60^0.

18. Qalinligi 5 m, yuzi 4 m^2 bo'lgan, kvadrat shaklidagi po'lat platforma to'rtta uchidan tros sim bilan gorizontal osilgan. Har bir tros sim uzunligi 2 m. Tros simlarning platformaga nisbatan og'ish burchagini topng. Balandligi 0,9 m, asosining diametri 0,6 m bo'lgan silindr shaklidagi bakni bu platformaga joylashtirib bo'ladimi?

Javob: 45^0, bakni joylashtirib bo'ladi.



19. Suv to'rt tomonidan oqib tushadigan tom asosiga ortogonal proyeksiyalangan. Tom qirralarining proyeksiyasi to'g'ri to'rtburchak shaklidagi tom asosi burchagining bissektrisasi bo'lishini isbotlang.

20. Asosi $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakdan iborat uyga yomg'ir suvi to'rt tomonidan oqib tushadigan tom o'rnatish kerak (8- rasm). $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Tomning hamma yuqlari asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Bu tomni yopish uchun qancha tunuka kerak bo'ladi. Bunda tom sirti yuzining k foizi miqdoridagi tunuka chiqitga ketishini hisob oling. *Javob: $4ab\,(1 + 0{,}01k) / \cos\alpha$.*

21. Shamolsiz havoda yomg'ir "qiyalab" yog'moqda. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi faner bo'lagi yordamida yomg'rning gorizont tekisligiga nisbatan qiyaligini qanday aniqlasa bo'ladi? Tegishli chizmani chizing.

Ko'rsatma: Faner bo'lagini shunday joylashtirish kerakki, uning tekisligi yomg'ir tomchlari harakat trayektoriyasi va ularning gorizontal tekislikka proyeksiyasi aniqlagan tekislikka taxminan perpendikular bo'lsin. Shunda, gorizontal tekislikda yomg'ir tushmaydigan to'g'ri to'rtburchak hosil bo'ladi. So'ng tegishli kesmalarning uzunliklari o'lchanadi va ular orasidagi burchkning tangensi hisoblanadi.

22. Yuzi S_1 ga, uzunligi n ga teng bo'lgan bolalar krovati ustini ikkita bir xil to'g'ri to'rtburchak shaklidagi pardalar bilan yopish kerak. Har bir pardaning yuzi S_2 ga, uzunligi esa krovat uzunligiga teng. Har ikkala pardaning yuqori cheti krovat ustida parallel o'rnatilgan va krovat uzunligiga teng simga mahkamlangan. Simning krovatdan qanday balandlikda o'rnatilganligini toping. Masalani quyidagi sonli shartlarda yeching: n = 1 m 20 sm, S_1= 6000 sm^2, S_2=7800 sm^2. Tegishli chizmani chizing. *Ko'rsatma:* $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$; *Javob:* 0,5 m.

23. Asosi ABCD to'g'ri to'rtburchakdan iborat uyga yomg'ir suvi to'rt tomonidan oqib tushadigan tom o'rnatish kerak (8- rasm). AB= 18 m, BC= 12 m. Tomning hamma yuqlari asos tekisligi bilan 40^0 li burchak tashkil qiladi. Agar 1 m^2 yuzani yopish uchun 15 dona cherepitsa ishlatilsa, bu tomni yopish uchun necha dona cherepitsa kerak bo'ladi?

24. Oltiyoqli qalam ba ochilgan kitob yordamida to'g'ri chiziqlar orasidagi, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi, tekisliklar orasidagi burchaklarning timsollarini ko'rsating.

25. Ikkita simmertiya o'qiga ega, 8-rasmda tasvirlangan tomdan yomg'ir suvi qaysi yo'nalishlarda oqib tushishini aniqlang.

26. Asosiga borib bo'lmaydigan minoraning balandligini aniqlash uchun qanday o'lchashlarni amalga oshirish kerak?

27. Balandligi ma'lum, lekin yaqiniga borib bo'lmaydigan binogacha bo'lgan masofani topish uchun qanday o'lchashlarni amalga oshirish kerak?

28. Nega soyalar choshgohda (tushda) yuqoladi?

29. Daraxt tepasiga chiqmasdan uning balandligini qanday o'lchasa bo'ladi?

Javoblar va ko'rsatmalar

1.24. $AB//CD$; **1.25.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm; **1.26.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm; **1.27.** 14 sm; **1.28.** $8\sqrt{3}$ sm; **1.29.** 17 sm; **1.30.** 24 sm; **1.31.** 4,8 sm; **1.32.** 18 sm; **1.33.** 20 sm, 25 sm; **1.34.** 10 sm; **1.35.** 2,5 sm, 12,5 sm; **1.36.** 54 sm^2; **1.37.** $66\sqrt{3}$ sm^2; **1.38.** 25 sm; **1.39.** 150 sm^2; **1.40.** 136 sm^2; **1.41.** $96\sqrt{3}$ sm^2; **1.42.** 100π sm^2; **1.43.** $10\sqrt{3}$ sm^2;

2.6. 256 m^2; **2.8.** $(11+\sqrt{3})$ sm^2; **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; 2000+640 tg 54^0; **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3}$ sm^2; c) $648\sqrt{3}$ sm^2; **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73}$ sm^2; c) $144+48\sqrt{73}$ sm^2; **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ m; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ m; b) 192 m^2; c) 282 m^2; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34})$ m^2; c) $8(11+\sqrt{34})$ m^2; **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2; c) $30(12+5\sqrt{3})$ sm^2; **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3)$ sm^2; **2.17.** a) 168π sm^2; b) 168π sm^2; c) $2,4\pi$ m^2; d) $1,68\pi$ m^2; **2.18.** 625π sm^2; **2.19.** 252π m^2; **2.20.** π^2 m^2; **2.21.** 4 sm; 16 sm; **2.22.** 2,11 l; **2.23.** 4,83 m^2; **2.24.** 37 mm; **2.25.** 1040π sm^2; **2.26.** a) 75π sm^2; b) 288π dm^2; c) $6,25\pi$ m^2; **2.28.** a) 88π sm^2; b) 88π sm^2; c) 540π dm^2; d) $3,24\pi$ m^2;

3.18. $\sqrt{10}$ sm; **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm; **3.20.** 72 dm^2; **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$ m^2;

4.5. a) 7 sm; b) 30 sm; **4.6.** b) 200 mm; **4.13.** 50 sm; **4.14.** 40 mm; **4.21.** $a+b$; **4.22.** a) 40^0; b) 45^0; c) 90^0; **4.23.** a)58^0; b) 47^0; **4.40.** 32 sm; **4.41.** 6 sm; **4.42.** 20 sm;

5.11. 1) 6,5 sm; 2) 15 sm; 3) $\sqrt{2a^2-b^2+d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2-c^2+2d^2}$; **5.12.** 2 m; **5.17.** 15 sm va 41 sm; **5.20.** $BD=\sqrt{2a^2+b^2+c^2}$; $CD=\sqrt{a^2+c^2}$; **5.21.** 3,9 m; **5.22.** 9 m; **5.23.** a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{(5+3\cos\beta)/2}$; **5.24.** 3 sm; 7,5 sm; **5.25.** 20 sm; **5.34.** $3d$; **5.37.** 45^0; **5.38.** arccos $\sqrt{3}/3$; **5.44.** 90^0; **5.46.** 60^0;

Darslikni tuzishda foydalanilgan va qo‘shimcha o‘rganishga tavsiya etilayotgan o‘quv-uslubiy adabiyotlari va electron resurslar

1. A’zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. «O‘qituvchi», 1993.
2. Afonina S.I. Matematika va qo‘zallik, Toshkent, O‘qituvchi, 1986.
3. Norjigitov X., Mirzayev Ch. Stereometrik masallarni yechish. Akademik litseylar uchun o’quv qo’llanma.-T., 2004 y.
4. Israilov I., Pashayev Z. Geometriya. Akademik litseylar uchun o’quv qo’llanma.II qism. -T.: O’qituvchi, 2005 y.
5. Погорелов А.В. "Геометрия 10-11", учебник, Москва. Просвешение", 2009.
6. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс. учебник, Москва, 2008
8. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
9. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
10. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
11. http://www.uzedu.uz - Xalq ta’limi vazirligining axborot ta’lim portali.
12. http://www.eduportal.uz - Multimedia markazi axborot ta’lim portali.
13. http://www.school.edu.ru - Umumta’lim portali (rus tilida).
14. http://www.problems.ru/ Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
15. http://geometry.net/ - Algebra va geometriyadan o‘quv materiallari (ingliz tilida).
16. http://mathproblem.narod.ru/ - Matematik to‘garaklar va olimpiadalar (rus tilida);
17. http://www.ixl.com - Masofadan turib o‘qitish sayti (ingliz tilida).
18. http://www.mathkang.ru - "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
19. http://www.khanakademy.org -"Xon akademiyasi" masofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida).