Sadaddinova S.S., Abduraxmanova Yu.M., Raximova F.S.

DISKRET MATEMATIKA

O'quv qo'llanma

Tashkent 2014

So’z boshi

Diskret matematika fani nimani o`rganadi?

Diskret tushunchasi “uzluksizlik” tushunchasiga teskari tushuncha hisoblanib, to`plamlar nazariyasi, diskret avtomatlar nazariyasi, matematik mantiq, graflar va zanjirlar nazariyasi, kombunatorika, halqa va maydonlar nazariyasi, algebraik sistemalar va algoritmlar nazariyasi kabi bir qancha bo`limlardan iborat bo`ladi.

Diskret matematikaning kirish qismini o’rganmay turib, informatika va dasturlashdan muvaffaqiyatga erishib bo’lmaydi. Bundan ko’rinadiki, diskret matematika fani “Informatika va hisoblash texnikasi”, “Raqamli qurilmalar va ularning matematik asoslari”, “Elektrotexnika” kabi fanlar bilan chambarchas bog’liqdir. Ushbu kitobda mazkur fanning fundamental tushunchalari – to’plamlar, munosabatlar, kombinatorika, mantiq hamda graflar qiziqarli misollar tarzida tushunarli bayon qilingan. Nazariy bilimlar oliy matematikaning bo’limlaridan xabari bo’lmagan kishilar uchun ham tushunarli tilda yozilgan.

I BOB
TO`PLAMLAR NAZARIYASI
KIRISh

To‘plamlar nazariyasi – bu matematika minorasining eng kerakli g’ishtlaridan biri bo’lib, matematika singari informatikada ham ma’lumotlarni eng qulay tilda ifodalash imkoniyatini beradi. Ushbu bo`limda to`plam, to’plamning berilish usullari, to’plamlar ustida amallar, to’plamlarni Eyler-Venn diagrammasi orqali tasvirlash, to’plamlarni akslantirish, munosabatlar va ularning kompozitsiyasi, akslantirishlar va ularning turlari, akslantirishlar superpozitsiyasi, to’plamlar nazariyasining aksiomatik tuzilishi haqida so`z boradi.

Inson ongi olamni alohida “ob`yekt” lardan iborat deb tasavvur qiladi, faylasuflar esa antik davrdan buyon olamni ajralmas bir butunlikdir deb hisoblashgan.

To‘plamlar nazariyasiga chex faylasufi va matematik-mantiqchisi Bernardo Boltsano (1781-1848 yy) va nemis matematiklari Rixard Dedekind (1831-1916 yy) hamda Georg Kantor (1845-1918 yy) lar asos solishdi. Asosan G.Kantorning hizmatlari katta bo`ldi, shuning uchun ham ko`pgina tushunchalar uning nomi bilan bog`liq.

Keyinchalik to`plamlar nazariyasi rivojiga ingliz matematigi, mantiqchi va faylasuf Al`fred Nort Uaytxed (1861-1947 yy), golland matematigi, hissiy matematika asoschisi Leytzen Egbert yan Brauer (1881-1966 yy), nemis matematigi, fizik va faylasufi German Veyl (1885-1955 yy), amerikalik matematik, mantiqchi va faylasuf Xaskell Bruks Karri (1900-1998 yy), ingliz matematigi Bertran Rassel (1872-1970 yy) va boshqalar hissa qo`shdilar.

J. Adamar (1865-1963 yy) va A. Gurvitslar 1897 yilda I Xalqaro matematiklar kongressida nutq so`zlab, turli matematik jumboqlarni yechishda to`plamlar nazariyasining tadbiqlariga doir bir qancha misollarni keltirishdiki, natijada to`plamlar nazariyasi matematikaning alohida bo`limi sifatida rasman tan olindi.

Hozirda o’zbek matematiklari ham to’plamlar algebrasi yo’nalishi bo’yicha katta izlanishlar olib borishmoqda. O’zFA akademiklari Sh. A. Ayupov, Sh. A. Alimov va ularning ko’plab shogirdlari mazkur fanga o’z hissalarini qo`shishmoqda.

To‘plam tushunchasiga birinchi bo‘lib 1896 yilda G. Kantor ta’rif bergan:

Ta`rif: To‘plam bu birgalikda deb idrok etiladigan juda ko‘plikdir.

To`plamlar nazariyasiga kantorcha yondoshishni aksiomatik asosda qurilgan nazariyadan farq qilish uchun “nafis to`plamlar nazariyasi” deb atala boshlandi. Atoqli matematik va uslubchi N. N. Luzin (1883-1950 yy) o`zining to`plamlar nazariyasiga bag`ishlangan ma`ruzalarida to`plamni “To`plam – bu turlicha ob`yektlarni solish mumkin bo`lgan qop” deb ta`riflar edi.

Demak, to`plamlar nazariyasi chekli va cheksiz to`plamlarning umumiy xossalarini o`rganuvchi matematikaning bo`limidir.

1.1. TO`PLAM. TO`PLAM ELEMENTLARI.

1.1.1. To`plamlarning berilishi.

Ta’rif 1. **To‘plam deb**, biror bir umumiy xususiyatga ega bo‘lgan ob’yektlar majmuasiga aytiladi.

To`plamni tashkil qiluvchi ob’yektlar uning **elementlari** deyiladi.

To`plam elementlari katta qavs ichiga olib yoziladi: { }. To`plamning bunday belgilanishi 1961 yilda Xalqaro matematiklar kongressida qabul qilingan.

Misol 1. {Toshkent, Samarqand, Urganch} – shaharlar to’plami;

{stol, stul, parta, divan} – jihozlar to’plami;

{5, 6, 7, 8, 9} – sonlar to’plami.

Eslab qoling: To'plam haqida faqat uning elementlari biror xususiyati bilan farqlanadigan bo'lsagina gapirish mumkin. Masalan, stakandagi suv tomchilari to'plami deyish mumkin emas.

Matematikada "to'plam" terminining quyidagi sinonimlari ishlatiladi: tizim, sinf, oila, majmua.

To‘plamlarni belgilash uchun lotin alifbosining bosh harflari:

A, B, C, ..., P, Q, S, … , X, Y, Z

yoki indekslar bilan berilgan bosh harflar qo'llaniladi:

A_1, A_2, …, P_1, P_2, … , X_1, X_2, …,

to‘plamning elementlari esa lotin alifbosining kichik harflari

a, b, c, ... p, q, s, … x, y, z,

yoki indekslar bilan berilgan kichik harflar

a_1, a_2, ... p_1, p_2, … x_1, x_2, …

bilan belgilanadi.

To‘plam elementining to‘plamga tegishliligini bildiruvchi $\in$ belgisi - bu grekcha "$\varepsilon\sigma\tau\iota$" so`zining bosh harfi "$\varepsilon$" dan olingan bo'lib, u rus tilida "есть", ya`ni "bor", "bo‘lmoq" ma`nolarini beradi. Shunday qilib, x element X to‘plamga tegishli bo`lsa, $x \in X$ kabi, tegishli bo`lmasa, $x \notin X$ yoki $\overline{x \in A}$ kabi belgilanadi va ular mos ravishda "x element X to`plamga tegishli" , "x element X to`plamga tegishli emas" deb o`qiladi.

Misol 2. A to`plam sifatida (-1;9) oraliqni oladigan bo`lsak, bu to'plam $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ ko'rinishida yoziladi. Bundan

$0 \in (-1;9)$, ya`ni $0 \in A$

$2 \in (-1;9)$, ya`ni $2 \in A$

$10 \notin (-1;9)$, ya`ni $10 \notin A$.

Misol 3. 1) juft sonlar to'plami $A = \{x : x = 2n, n \in N\}$,

2) toq sonlar to'plami $B = \{x : x = 2n-1, n \in N\}$,

3) Barcha raqamlar to’plami $D=\{x:0\le x\le 9\}$.

To`plamda bir xil ma`noni anglatuvchi element faqat bir marta yoziladi.

Ta’rif 2. Birorta ham elementi bo‘lmagan to‘plam **bo‘sh to‘plam** deyiladi va Ø kabi belgilanadi. Bitta elementi bo`lgan to`plam **singleton** deyiladi (inglizcha *“single”* - *“yakka”* degan ma`noni beradi).

To‘plamlar 3 xil usulda beriladi:

1) To`plamga tegishli elementlarning barchasini keltirish orqali beriladi, bunda elementlar katta qavs ichiga olinib, vergul bilan ajratiladi, ya`ni agar $x_1, x_2,...., x_n$ lar A to‘plamning elementlari bo‘lsa, u holda $A=\{x_1,x_2,....,x_n\}$ kabi yoziladi;

2) To‘plam elementlarini qanoatlantiradigan xossalarini keltirish bilan berish mumkin – bu xarakteristik predikat deyiladi: $A=\{x:\mathrm{P}(x)\}$;

3) To‘plam elementlari formula ko’rinishida berilishi mumkin.

Misol 4. Toq natural sonlar to‘plamini 3 xil usulda yozing.

Yechilishi: 1) barcha elementlarini keltirish: $A=\{1,3,5,7,...\}$;

2) xarakteristik predikat:

$$A=\{\exists x:\ x-\text{toq natural sonlar}\}.$$

3) formula shaklida: $A=\{2n-1:\ \mathrm{n}\in N\}$.

Misol 5.

1) barcha elementlarini keltirish: $P=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

2) xarakteristik predikat:

$$P=\{n\,|\,n:=0;\text{for } i \text{ from} 1 \text{ to } 9 \text{ do } n:=n+1;\text{ yield } n \text{ end for}\};$$

3) formula shaklida: $P=\{n:\mathrm{n}\in\mathrm{N},\mathrm{n}<10\}$.

To‘plam elementlarining xossalari bilan berilganda, to‘plamni unga tegishli elementlarning barchasini keltirish orqali berishga qaraganda ko`proq ma`lumot keltiriladi. Masalan, $B=\{\exists x:\ x^2-x-2=0\}$, B to`plam elementlari berilgan tenglamaning yechimlaridan iborat to`plam deb o`qiladi, bu to`plam $A = \{-1;2\}$ ko`rinishda berilganiga qaraganda mukammalroqdir.

Misol 6. Quyidagi to'plamni soddaroq usulda yozing:

$$A = \{x:\ x\text{-butun son va } x^2 + 5x - 6 = 0\}$$

Yechilishi: Agar $x^2 + 5x - 6 = 0$ bo'lsa, u holda tenglamani yechib, ildizlari topiladi. Natijada $A = \{-6;1\}$ ko'rinishga kelamiz.

Ta'rif 3. Agar to'plam elementlari soni chekli bo'lsa, u holda to'plam **chekli to'plam** deyiladi, aks holda esa **cheksiz to'plam** bo`ladi.

Misol 7. a) Barcha uch xonali sonlar to`plami chekli:

$$\{100,101,102,\ldots,998,999\};$$

b) Tub sonlar to`plami cheksiz bo`ladi.

Cheksiz to'plamlar asosan xarakteristik predikat orqali beriladi, masalan, $N = \{n \mid n := 0;\text{while true do } n := n + 1 \text{ yield } n \text{ end while}\}$.

Cheksiz to'plamlar ikkiga bo'linadi:

1) sanoqli to'plamlar;
2) sanoqsiz to'plamlar.

Ba'zi to'plamlar birmuncha ko'p ishlatilganligi bois o'zining nomi va belgilanishiga ega:

natural sonlar to'plami $N = \{1,2,3,\ldots\ldots,n,\ldots\}$,

butun sonlar to'plami $Z = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\ldots\ldots\}$ va

ratsional sonlar to'plamini $Q = \left\{\frac{m}{n}, m,n \in Z, n \neq 0\right\}$,

irratsional sonlar to'plamini $I = \{\sqrt[p]{m^q},\ p,q,m \in Z,\}$,

haqiqiy sonlar to'plamini $R = Q \cup I$ va

kompleks sonlar to'plamini C harflari bilan belgilashga kelishib olingan.

Ta'rif 4. Agar cheksiz to'plam elementlarini natural sonlar qatori bilan raqamlab chiqish mumkin bo'lsa, u holda bu to'plam **sanoqli to'plam** deyiladi, aks holda **sanoqsiz to'plam** bo`ladi.

Bo'sh to'plam chekli va sanoqli to'plam hisoblanadi va $\varnothing \neq \{0\}$.

Misol 8. a) butun sonlar to`plamini sanoqli,

b) irratsional sonlar to`plamini sanoqsiz deb qarash mumkin.

d) juft sonlar to'plami ham sanoqli to`plamga misol bo`la oladi.

Ta'rif 5. Chekli va sanoqli to'plamlarga **diskret to'plamlar** deyiladi.

m dan n gacha bo'lgan butun sonlar to'plami – diskret to'plam bo'lib, uni

$$\{k \in Z \mid m \leq k \text{ va } k \leq n\} = \{k \in Z \mid \text{for } k \text{ from } m \text{ to } n \text{ do yield } k \text{ end for}\}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

Shunday to'plamlar borki, ularning barcha elementlari boshqa biror kattaroq to'plamga tegishli bo'ladi. Masalan, $K = \{0,2,4,.......2n,...\}$ning barcha elementlari $Z = \{0,\pm1,\pm2,\pm3,......\}$ ning ichida yotibdi.

Ta'rif 6. Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamning **qism to'plami** yoki **to'plam ostisi** deyiladi va $A \subset B$, ba`zan **xos qism to`plam** deb ham yuritiladi.

Ø to'plam va to'plamning o'zi **xosmas qism to`plam** deyiladi.

Ø to'plam ixtiyoriy to'plamning xosmas qism to'plami bo'ladi.

$N \subseteq Z$, $N \subseteq R$, $Z \subseteq R$, bunga N , Z , R – mos ravishda natural, butun, haqiqiy sonlar to`plami.

Misol 9. A – barcha daraxtlar to'plami,

B – mevali daraxtlar to'plami bo'lsa, $B \subset A$ bo'ladi.

Teorema. Sanoqli to'plamning har qanday qism to'plami chekli yoki sanoqli bo'ladi.

Isboti: A - sanoqli to'plam va $B \subseteq A$ bo'lsin. Agar $B = \varnothing$ bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra u sanoqli bo'ladi. $B \neq \varnothing$ bo'lsin. Sanoqli to'plam ta'rifi ga ko'ra A to'plamning barcha elementlari raqamlangan, lekin to'plamning o'zi $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ cheksiz ketma-ketlik shaklida tasvirlanishi mumkin. Agar $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda $a_{n1} -$element B to'plamning birinchi elementi, $a_{n2} -$ikkinchi elementi va hakozo deyish mumkin. Bunda 2 hol bo'ladi: bir qancha qadamdan keyin B to'plamning barcha elementlarini ajratib olish mumkin yoki B to'plamning elementlari $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...$ cheksiz ketma-ketlikdan iborat bo'ladi.

Birinchi holda B to'plam chekli, ikkinchi holda esa sanoqli bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Nazorat uchun savollar:

1. To'plamlar nazariyasining asoschilari deb kimlarni bilasiz?
2. To'plam tushunchasiga kim birinchi ta'rif bergan?
3. To`plamlar nazariyasi matematikaning alohida bo`limi sifatida qachon rasman tan olindi?
4. To'plamlar qanday belgilanadi?
5. To'plam elementlari qanday belgilanadi?
6. Bo`sh to`plam deb nimaga aytiladi?
7. Sanoqli to`plam deb nimaga aytiladi?
8. Qism to`plam deb nimaga aytiladi?
9. Xos qism to`plam deb nimaga aytiladi?
10. Xosmas qism to`plam deb nimaga aytiladi?
11. Chekli to`plam deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.

12. Cheksiz to`plam deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.

13. Diskret to`plam deb nimaga aytiladi?

14.To‘plam qanday usullarda beriladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Quyidagi to’plamlar uchun soddaroq berilish usulini yozing:

a) $A=\{x:\ x\text{-butun son va } x^2+4x-12=0\}$;

b) $B=\{x:\ x\text{- "r" harfi qatnashmaydigan oy nomlari}\}$;

c) $C=\{n:\ \text{n-butun son}\}$.

2. Quyidagi to’plamlar elementlarini yozing:

a) $A=\{x:\ x\in Z,\ 16\le x\le 23\}$;

b) $B=\{x:\ x\in \mathrm{Z},\ \mathrm{x}^2<18\}$;

c) $C=\{x:\ x\in N,\ -6\le x\le 3\}$;

d) $D=\{x:\ x\in N,\ \mathrm{x}^2<36\}$.

3. Butun sonlar to’plamining qism to’plamlarini yozing:

a) $A=\{3k:\ \mathrm{k}\in Z,\ \mathrm{k}\ge 1\}$;

b) $B=\{2k:\ \mathrm{k}\in \mathrm{Z}\}$;

c) $C=\{n:\ \mathrm{n}\in Z,\ \mathrm{n}^2\le 81\}$.

4. Quyidagi to’plamlarni formula va xarakteristik predikat shaklida yozing:

a) $A=\{1;3;5;\ldots;2n-1;\ldots\}$;

b) $B=\{2;4;6;\ldots;2n;\ldots\}$;

c) $C=\{0;1;2;3;\ 4;5\}$.

1.1.2. To’plamlarning tengligi.

Ta’rif 1. Ikkita **to’plam teng** deyiladi, agar ular bir xil elementlardan iborat bo’lsa (ya’ni to’plamlar bir xil elementlarni saqlasa va elementlarning tartibi inobatga olinmasa) va $A = B$ kabi belgilanadi.

Aksincha, A va B **to’plamlar teng emas** deyiladi, agarda yo A da B ga tegishli bo’lmagan element mavjud, yoki B to’plam A ga tegishli bo’lmagan elementga ega bo’lsa. Bunda $A \neq B$ kabi belgilanadi.

$A \subset B$ va $A = B$ bajarilsa, $A \subseteq B$ kabi belgilanadi.

Teorema 1. Ixtiyoriy A, B, C to`plamlar uchun quyidagilar o`rinli:
a) $A \subseteq A$;

б) $A \subseteq B$ va $B \subseteq C$ bo’lsa, u holda $A \subseteq C$ o’rinli.

Isboti: a) Haqiqatan ham $x \in A$ bo`lishidan $x \in A \Rightarrow x \in A$ ekanligi kelib chiqadi, ya`ni $x \in A \Rightarrow x \in A$ implikatsiya o`rinli.

b) Haqiqatan ham $(x \in A \Rightarrow x \in B) \cap (x \in B \Rightarrow x \in C) \Rightarrow$ $(x \in A \Rightarrow x \in C)$ni to`g`riligini ko`rsatish yetarli. Teorema isbotlandi.

Teorema 2. Ixtiyoriy A va B to`plamlar uchun $A = B$ tenglik o`rinli bo`ladi, faqat va faqat $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa.

Demak, to‘plamlarning sonli qiymatlarining tengligi ularning bir-biriga tegishli ekanligini bildirmaydi, shuning uchun ham quyidagi shartlarni kiritamiz:

$\forall a \in A$ uchun $\exists в \in B$ topilsaki, $a = b$ bolib, $a \in B$ va $b \in A$ shart bajarilsa , u holda $A = B$ bo‘ladi.

Misol 1. Teng va teng bo`lmagan to`plamlar:

a) {a, b, c, d} = {c, d, a, b}.

b) {a, b, c, d} $\neq$ {a, c, b}.

d) {x|x^2-3x+2=0} = {1,2}

Misol 2. $A=\{1^2;2^2;3^2\}$ va $B=\{\sqrt{1};\sqrt{16};\sqrt{81}\}$ bu to`plamlar teng emas, chunki ularning berilish shakliga ko`ra elementlari mos kelmaydi. Agar ularni matematik amallarni bajarib, bir xil ko`rinishga keltirilsa, ya`ni $A=B=\{1;4;9\}$ ko`rinishda teng deb hisoblanadi.

Misol 3. $A=\{n:n^2$ - toq butun son$\}$ va $B=\{n:n$ - toq butun son$\}$ to’plamlarning tengligini isbotlang.

Yechilishi: Agar $x\in A$ bo’lsa, u holda x^2 - toq butun son. Toq sonning kvadrati har doim toq son bo’ladi, demak, x ning o’zi ham toq va butun son. Bundan, $x\in B$, ya’ni $A\subset B$ ekanligi kelib chiqadi.

Teskarisini isbotlaymiz: aytaylik, $x\in B$ bo’lsin. U holda x - toq va butun son, demak, x^2 ham toq butun son, ya’ni $x\in A$. Olingan x elementni ixtiyoriy ekanligidan B ning barcha elementlari A ga tegishli, ya’ni $B\subset A$. Xulosa $A=B$.

Teorema 3. Ixtiyoriy A, B, C to`plamlar uchun $A\subseteq B$ va $B\subset C$ munosabat o`rinli bo`lsa, u holda $A\subset C$ bo`ladi.

Ta’rif 2. Agar to’plamning elementlari ham to`plamlardan iborat bo’lsa, bu berilgan to’plamga **to`plamlar oilasi** deyiladi va lotin alifbosining bosh harflarini yozma shaklida belgilanadi.

Misol 4. 1) $A=\{\{0\},\{3,\ d,\ e\},\{1,\ 2\}\}$,

2) agar KP580 mikroprotsessor qurilmasining 8-razryad buyruq tizimi qaralayotgan bo`lsa, $D$ to`plamlar oilasi quyidagicha yoziladi.

$$D=\{P_i : P_i - \text{buyruq berish guruhi}\},$$

bunda P_1- jo`natish buyruqlari to`plami,

P_2- arifmetik amallar buyruqlari to`plami,

P_3- mantiqiy amallar buyruqlari to`plami va hakozo.

3) $C=\{\{a\},\{b,\ c\},\{e,\ f,\ g\}\}$ va $E=\{b,\ c\}$ bo'lsa, $E\not\subset C$, chunki bu holda E to'plamning o'zi C to'plamlar oilasining elementi bo`ladi.

Ta'rif 3. A to'plamning barcha xos va xosmas qism to'plamlaridan tuzilgan to'plamga **Bul to'plami** deyiladi va 2^A kabi belgilanadi.

Tasdiq 1. Agar to'plam chekli bo'lib, n ta elementdan iborat bo'lsa, u holda bu to'plamning barcha qism to'plamlari soni 2^n tani tashkil etadi.

Misol 5. $A=\{3,\ 5,\ 6\}$ to'plamning barcha qism to'plamlarini yozamiz:

$$A_1=\{3\},\quad A_4=\{3,\ 5\},\quad A_7=\{3,\ 5,\ 6\},$$
$$A_2=\{5\},\quad A_5=\{3,\ 6\},\quad A_8=\{\emptyset\}.$$
$$A_3=\{6\},\quad A_6=\{5,\ 6\},$$

$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$- to'plamlar A to'plamning xos qism to'plamlari,

A_7, A_8- to'plamlar A to'plamning xosmas qism to'plamlari,

$2^A=\{\{3\},\{5\},\{6\},\{3;5\},\{3;6\},\{5;6\},\{3;5;6\},\{\emptyset\}\}$ - Bul to'plami hisoblanadi, demak 3 ta elementdan iborat to`plamning $2^3=8$ ta qism to`plami mavjud.

Nazorat uchun savollar:

1. Bul to'plami qanday tuzilgan?
2. Qanday to'plamlar teng deyiladi?
3. Ixtiyoriy A to`plam uchun $A\subseteq A$ o'rinli bo'lishini ko'rsating.
5. Ixtiyoriy A, B, C to`plamlar uchun $A\subseteq B$ va $B\subseteq C$ bo'lsa, u holda $A\subseteq C$ o'rinli bo'lishini ko'rsating.
6. To'plamlar oilasi deganda nimani tushunasiz?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Quyidagi to'plamlarning qism to'plamlarini yozing va Bul to'plamini tuzing:

a) $A=\{1;3;4;5\}$;

b) $B=\{a;b;c;d\}$;

c) $C=\{n\colon n\in N,\ 1\le n<4\}$.

d) $A=\{x:\ x\in Z,\ 16\le x\le 23\}$;

e) $B=\{x:\ x\in \mathrm{Z},\ \mathrm{x}^2<18\}$;

f) $C=\{x:\ x\in N,\ -6\le x\le 3\}$;

g) $D=\{x:\ x\in N,\ \mathrm{x}^2<36\}$.

1.1.3. To‘plamlarda tartib munosabati tushunchasi.

Amaliyotda to`plam elementlarining biror tartibi bilan bog`liq masalalar ko'p uchraydi.

1) agarda to`plam elementlari $x_1<x_2<\ldots<x_n$ ketma-ketlikda joylashgan ($x_1,x_2,\ldots,x_n$) harfiy elementlardan iborat bo`lsa, "oldin" va "keyin" tushunchalarini farqlaymiz.

2) agarda to`plam elementlari $1<2<\ldots<7$ ketma-ketlikda joylashgan $(1,2,\ldots,7)$ sonlardan iborat bo`lsa, "kichik" va "katta" tushunchalaridan foydalanamiz.

3) agar to`plam va qism to`plamlar ustida fikr yuritsak, $\subseteq$ va $\subset$ belgilashlardan foydalanamiz.

Bularning barchasida to`plam elementlarini ma`lum bir tartibda joylashtirish mumkin, ya`ni tartib munosabati tushunchasi kiritiladi.

Ta`rif 1.** $X = \{(x;y)\}$ to‘plam **tartiblangan to‘plam** deyiladi, agarda to`plam elementlari uchun $x < y$ yoki $x = y$ yoki $x > y$ munosabatlari kiritilgan bo`lsa. $(x;y)$ juftlikka **tartiblangan juftlik deyiladi.

Bundan keyin tartiblangan to`plam elementlarini farqlash uchun oddiy qavs bilan belgilaymiz.

Teorema. Agar $(a;b) = (x;y)$ bo`lsa, u holda $a = x$, $b = y$.

Isboti: $(a;b) = (x;y)$ tenglikdan $\{\{a\};\{a;b\}\} = \{\{x\};\{x;y\}\}$ kelib chiqadi. Bu yerda 2 ta holat bo`lishi mumkin:

1) $\{a\} = \{x\}$, $\{a;b\} = \{x;y\}$

yoki 2) $\{a\} = \{x;y\}$, $\{a;b\} = \{x\}$.

Birinchi holda $\{a\} = \{x\}$ tenglikdan $a = x$ ekanligi kelib chiqadi, ikkinchi tenglikdan esa $\{a;b\} = \{x;y\}$ bo`lib, $a = x$ va $b = y$ ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi holda $\{a\} = \{x;y\}$ tenglikdan $a = x = y$ ekanligi kelib chiqadi, $\{a;b\} = \{x\}$ ekanligidan $x = a = b$ kelib chiqadi. Shunday qilib, $a = x$ va $b = y$ bo`ladi.

Teorema isbotlandi.

Ta`rif 2. Quyidagi 3 ta xossani qanoatlantiruvchi tartib munosabatiga **qisman tartiblangan munosabat** deyiladi:

1) $x \le x$ (refleksivlik xossasi)

2) $x \le y$ va $y \le x \Rightarrow x = y$ (simmetriklik xossasi)

3) $x \le y$ va $y \le z \Rightarrow x \le z$ (tranzitivlik xossasi)

Har qanday to`plamni tartiblash mumkin, masalan, biror bir to`plam elementlarini ro`yhat qilib chiqib, ro`yhatdagi har bir elementni raqamlab chiqish yordamida tartiblash mumkin.

Ikkita va undan ortiq elementi bo`lgan to`plamni bir nechta usul bilan tartiblab chiqish mumkin. Tartiblangan to`plamlar elementlarining turlicha bo`lishi bilan yoki elementlarning joylashish tartibi turlicha bo`lishi bilan farqlanadi.

Misol 1. 1) Navbat kutib turgan odamlar to`plami;

2) so`zdagi harflar to`plami;

3) analitik geometriyada nuqtalarning koordinatalari.

Agar X tartiblangan to`plamda $a<x<b$ bo`lsa, x element a va b elementlar orasida yotibdi deyiladi. a va b lar orasida yotgan barcha elementlardan iborat to`plamga $X$ tartiblangan to`plamning $(a;b)$ **intervali** deyiladi.

Agar $(a;b)$ intervalga uning oxirlarini, ya`ni a va b elementlar ham kiritilsa, **[a;b] segment** hosil bo`ladi.

Ushbu tushunchalarni sonlar o`qida tasvirlaydigan bo`lsak, bizga ma`lum bo`lgan sonlar ustida matematik analizning oraliq (interval) va kesma (segment) tushunchalariga kelamiz.

$(a;b)$ intervalga uning oxirlaridan bittasi kiritilsa, [a;b)= a$\cup$(a;b) va (a;b]= (a;b) $\cup$b yarim interval (yarim segment) hosil bo`ladi.

Tartiblangan to`plam bo`sh intervalni ham o`zida saqlaydi.

Misol 2. Tartiblangan to`plamda elementlari natural sonlar bo`lgan (n;n+1) ko`rinishdagi barcha oraliqlar bo`sh intervalga misol bo`la oladi.

Agar $(a;b)$ interval elementlaridan iborat to’plam bo`sh bo`lsa, u holda X tartiblangan to`plamning a va b elementlari **qo`shni** deyiladi.

Ta`rif 3. $y \in X$ elementni qisman tartib “$\leq$” munosabatiga nisbatan **eng kichik element** deyiladi, agarda barcha $x \in X$ lar uchun $y \leq x$ bajarilsa.

Biror bir tartiblangan to`plamda eng kichik element mavjud bo`lsa, u yagonadir.

Ta`rif 4. $y \in X$ elementni qisman tartib “$\leq$” munosabatiga nisbatan **eng katta element** deyiladi, agarda barcha $x \in X$ lar uchun $x \leq y$ bajarilsa.

Biror bir tartiblangan to`plamda eng katta element mavjud bo`lsa, u yagonadir.

Ta`rif 5.** Agar $\{X;\leq\}$ qisman tartiblangan to`plam bo`lib, $A\subseteq X$ va istalgan $a\in A$ uchun $a\leq x$ bajarilsa, u holda $x\in X$ element A to`plamning **yuqori chegarasi deyiladi.

Ta`rif 6.** Agar $\{X;\leq\}$ qisman tartiblangan to`plam bo`lib, $A\subseteq X$ va istalgan $a\in A$ uchun $x\leq a$ bajarilsa, u holda $x\in X$ element A to`plamning **quyi chegarasi deyiladi.

To`plam bir nechta yuqori chegaraga ega bo`lishi mumkin.

Ta`rif 7.** Agar $x\in A$ yuqori chegara bo`lib, barcha $y\in A$ yuqori chegaralar uchun $x\leq y$ munosabat bajarilsa, $x\in X$ elementga A to`plamning **ehg kichik yuqori chegarasi yoki **supremum** deyiladi va **supA** kabi belgilanadi.

Ta`rif 8.** Agar $x\in A$ quyi chegara bo`lib, barcha $y\in A$ quyi chegaralar uchun $x\geq y$ munosabat bajarilsa, $x\in X$ elementga A to`plamning **ehg katta quyi chegarasi yoki **infimum** deyiladi va **infA** kabi belgilanadi.

Nazorat uchun savollar:

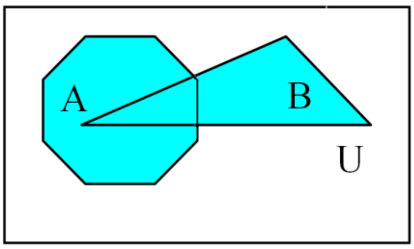
1. Tartiblangan to‘plam deb nimaga aytiladi?
2. Tartiblangan juftlik deb nimaga aytiladi?
3. Qisman tartiblangan to‘plam deganda nimani tushunasiz?
4. To’plamning intervali nima?
5. To`plamning supremumi nima?
6. To`plamning infimumi nima?

1.1.4. To`plamlar ustida amallar.

To`plamlarni tekislikda shakllar yordamida tasvirlash XIII asrda boshlangan. Birinchi “falsafiy komp`yuter” ixtirochisi R.Lulliy (taxminan 1235-1315 yy) aylanalar yordamida sonlar, harflar va ranglar ustida amallar bajargan.

Shvetsariyalik matematik, mexanik va fizik Leonard Eyler (1707-1783 yy) va ingliz matematigi va mantiqchisi Jon Venn (1834-1923 yy) turli tabiatli to`plamlarni o`rganishda diagramma nazariyasiga asos solishgan. Hozirda to`plamlarni chizmalar orqali tasvirlash **Eyler-Venn diagrammalari** deb yuritiladi.

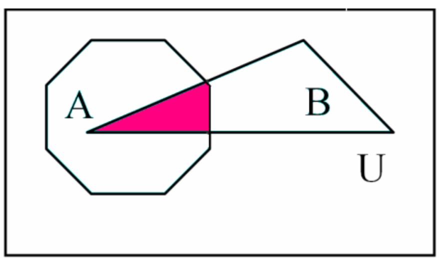
Ta’rif 1. A va B to‘plamlarning **birlashmasi** deb, bu to‘plamlarning hech bo‘lmaganda bittasiga tegishli bo‘lgan elementlardan iborat to‘plamga aytiladi va u $A \cup B$ kabi belgilanadi. Ba`zi hollarda $A$ va $B$ to`plamlarning birlashmasiga **yigindi** deb ham yuritiladi. U inglizcha *“union”* – *“qo`shma*” so`zining birinchi harfidan olingan.



Misol 1. A={1;3;5} va B={4;5;6} to`plamlar berilgan bo`lsin. U holda

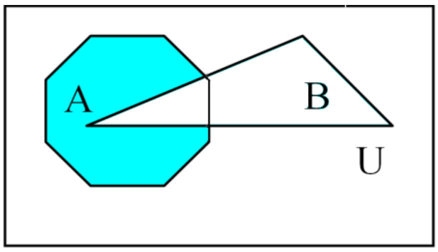
$A \cup B$={1;3;4;5;6} bo`ladi.

Ta’rif 2. A va B to‘plamlarning **kesishmasi** deb, ham A to`plamga, ham B to`plamga tegishli elementlardan iborat to‘plamga aytiladi va $A \cap B$ kabi belgilanadi. Ba`zi hollarda $A$ va $B$ to`plamlarning kesishmasiga **ko`paytma** deb ham yuritiladi.



Misol 2. $A=\{1;3;5\}$ va B={4;5;6} to\`plamlar berilgan bo\`lsin. U holda ularning kesishmasi $A\cap B=\{5\}$ bo\`ladi.

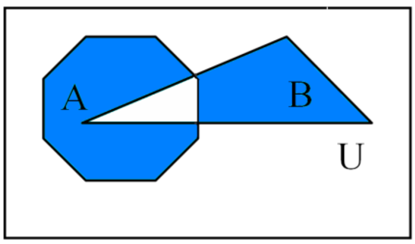
Ta'rif 3. A to'plamdan B to'plamning **ayirmasi** deb, A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va $A\setminus B$ ko\`rinishida belgilanadi.



Misol 3. $A=\{1;3;5\}$ va $B=\{4;5;6\}$ to\`plamlar berilgan bo\`lsin. U holda ularning ayirmasi $A\setminus B$ ={1;3} va B\A={4;6} ga teng.

Ta'rif 4. A va B to'plamlarning **simmetrik ayirmasi** deb, A to'plamning B to'plamga, B to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan iborat to'plamga aytiladi va $A\Delta B$ kabi belgilanadi. Ba\`zi hollarda halqali yig'indi deb ham yuritiladi:

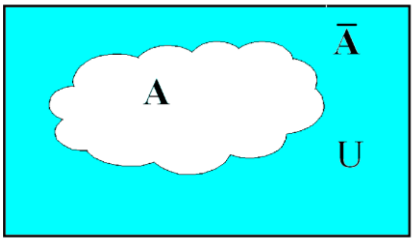
$$A\Delta B=A\oplus B=(\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}\setminus\mathrm{A})$$



Misol 4. $A=\{1;3;5\}$ va $B=\{4;5;6\}$ to\`plamlar berilgan bo\`lsin. Ularning ayirmalari $A\setminus B=\{1;3\}$ va B\A={4;6} ga teng bo\`lsa, simmetrik ayirmasi $A\Delta B=A\oplus B=\{1;3;4;6\}$ bo\`ladi.

Ta'rif 5. U to'plamning A to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan tuzilgan $\overline{\mathbf{A}}$ to'plamga A to'plamning **to'ldiruvchisi** (**qarama-qarshisi**) deyiladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \backslash \mathbf{A} = \{\exists x : x \in U,\ x \notin A\}$$



Misol 5. U – haqiqiy sonlar to`plami va $A$ - ratsional sonlar to`plami bo`lsa, u holda $\overline{\mathbf{A}}$ irratsional sonlar to`plami bo`ladi.

Ta'rif 6. A va B to'plamlarning **dekart ko'paytmasi** deb, barcha tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladi va $A \times B = \{< a_i, b_j >, a_i \in A, b_j \in B\}$ kabi belgilanadi.

Misol 6. $A = \{a_1, a_2\}$ va $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ to`plamlarning dekart ko`paytmalarini toping.

Yechilishi: $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$

$$B \times A = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_3, a_1), (b_3, a_2)\}.$$

Ta`rif 7.** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ta to`plamning **dekart (to`g`ri) ko'paytmasi deb, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$ ko`rinishidagi to`plamga aytiladi.

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$ to`plamga $A$ to`plamning **dekart n-darajasi** deyiladi. $A^2 = A \times A$ ko`rinishidagi to`plamga **dekart kvadrat** deyiladi.

Teorema 1. A, B, C - ixtiyoriy to`plamlar bo`lsin. U holda quyidagi tengliklar o`rinli:

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

б) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

в) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

Isboti: a) $(x,y)\in A\times(B\cup C)$ bundan $x\in A$ va $y\in B\cup C$ bo\`ladi. Agar $x\in A$ va $y\in B$ yoki $y\in C$ bo\`lsa, ($x\in A$ va $y\in B$) yoki ($x\in A$ va $y\in C$) hosil bo\`ladi. $(x;y)\in A\times B$ yoki $(x;y)\in A\times C$. Bundan $(x;y)\in(A\times B)\cup(A\times C)$ kelib chiqadi. Demak, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, qolgan tengliklar ham isbotlanadi.

Teorema 2. Agar A to\`plam $m$ ta, $B$ to\`plam esa n ta elementdan tashkil topgan bo\`lsa, u holda ularning $A\times B$ dekart ko\`paytmasi $m\times n$ ta elementdan iborat bo\`ladi.

Misol 7. B={0; 1} to'plam uchun B^n to'plamni yozing.

Yechilishi: B^n uzunligi *n* ga teng 0 va 1 lardan iborat to'plam bo'ladi. Ularni dasturlash tilida *n* uzunlikdagi **"bit qatori"** deyiladi.

Chekli to'plamlarda amallarni modellashtirish uchun "bit qatori" qanday qo''llaniladi?

Aytaylik, $S=\{s_1,s_2,...,s_n\}$ bo'lsin. Agar $A\subset S$ bo'lsa, u holda A to'plamga n-bit qatori $(b_1,b_2,...,b_n\}$ ni mos qo'yamiz, bunda $b_i=1$ bo'ladi. Aksincha, agar $s_i\in A$ bo'lsa, $b_i=0$ bo'ladi. Bunday bit qatoriga A **qism to'plamning xarakteristik vektori** deyiladi.

Misol 8. Universal to'plam $U=\{1;2;3;4;5\}$ va

$A=\{1;3;5\}$, $B=\{3;4\}$ bo'lsin.

1) A va B to'plamlarning xarakteristik vektorlarini toping.

2) $A\cup B$; $A\cap B$; $\overline{A}$ to'plamlarning xarakteristik vektorlarini toping.

Yechilishi: A to'plamning xarakteristik vektori $a=(1;0;1;0;1)$,

B to'plamning xarakteristik vektori $b=(0;0;1;1;0)$ bo'ladi.

$A\cup B$ esa $a\cup b=(1;0;1;0;1)\cup(0;0;1;1;0)=(1;0;1;1;1)$

$A \cap B$ to'plam uchun $a \cap b = (1;0;1;0;1) \cap (0;0;1;1;0) = (0;0;1;0;0)$

$\bar{A}$ ning xarakteristik vektori $\bar{a} = (0;1;0;1;0)$.

Demak, $A \cup B = \{1;3;4;5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $\bar{A} = \{2;4\}$ qism to'plamlar hosil bo'ladi.

1.1.5. To`plamlar ustida amallar bajarish mumkin bo'lish sharti

Ta'rif 1. Agar qaralayotgan to'plamlarning barchasi biror U to'plamning qism to'plamlaridan iborat bo'lsa, U to'plamga **universal to'plam** yoki **universum** deyiladi.

Masalan, sonlar nazariyasida C kompleks sonlar to'plami universal to'plam bo'ladi. Analitik geometriyada esa tekislik barcha koordinata juftliklar to'plami uchun universum bo'ladi.

A va B to'plamlar bitta U universal to`plamga tegishli bo'lsagina ular ustida amallar bajarish mumkin.

Agar A va B to'plamlar turli xil universal to`plamlarga tegishli bo'lsa-chi, ya'ni $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}_1$ va $\mathrm{B} \subset \mathrm{U}_2$ bo'lsa, ular ustida amallar bajarish uchun quyidagi 3 ta bosqichni amalga oshirish kerak:

1) A va B to'plamlar bitta universumga keltiriladi, bunda ular uchun universal to'plam $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \times U_2$ ularning dekart ko'paytmasidan iborat bo'ladi.

2) A va B to'plamlarning yangi U universumdagi A^1 va B^1 ko`rinishi aniqlanadi.

3) Hosil bo'lgan A^1 va B^1 to'plamlar ustida amallar bajarish mumkin bo'ladi.

Misol. $A = \{1\}$ va $B = \{a, b\}$ berilgan bo`lsa, hamda $A \subset \mathrm{U}_1 = \{1,2,3\}$ va $B \subset \mathrm{U}_2 = \{a, b, c\}$ ekanligi ma`lum bo`lsa, $A \cap B$ to`plamlar kesishmasini toping.

Yechilishi:

1) U_1 va U_2 universumlarning dekart ko'paytmasi topiladi:

$$U = U_1 \times U_2 = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

2) Hosil qilingan U universal to`plamdagi A va B larning yangi ko'rinishi aniqlanadi: $A^1 = \{(1,a),(1,b),(1,c)\}$,

$$B^1 = \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

3) yangi ko`rinishdagi A^1 va B^1 to'plamlarning kesishmasi topiladi:

Natija $A^1 \cap B^1 = \{(1,a),(1,b)\}$ ko'rinishida bo'ladi.

1.1.6. To'plamning bo'laklari.

To'plamni qism to'plamlarga ajratish amali – bu to'plamlar ustida amallarning eng ko'p uchraydigan turi hisoblanadi.

Misol 1. 1) Laboratoriya qurilmalari to'plami asstillograf, vol`tmetr, generator va hakozolarga ajratiladi.

2) Natural sonlar to'plamini toq va juft sonlar to'plamlariga ajratish mumkin.

Aytaylik, $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ biror to'plamlar oilasi va qandaydir elementlar to'plami $S^/$ berilgan bo'lsin.

Ta`rif. S to'plamlar oilasi $S^/$ **to'plamning bo'lagi** deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoanlantirsa:

1) S to'plamlar oilasidan olingan ixtiyoriy A_i to'plam $S^/$ to'plamning qism to'plami bo'lsa, ya'ni $\forall A_i : A_i \in S \to A_i \subseteq S^|$;

2) S to'plamlar oilasidan olingan ixtiyoriy A_i va A_j to'plamlar o'zaro kesishmaydigan to'plamlar bo'lsa, ya'ni $\forall A_i \in S, \forall A_j \in S : A_i \neq A_j \to A_i \cap A_j = \varnothing$;

3) Bo'laklarning birlashmasi $S^{/}$ to'plamni hosil qilsa, ya'ni $\bigcup\limits_{A_i \in M} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = S^{|}$;

A_i - to'plamlar **bo'laklar sinflari** deyiladi.

Misol 2. $S^{/} = \{a;b;c;d\}$ to'plam uchun $S_1 = \{\{a;b\};\{c;d\}\}$ va $S_2 = \{\{a\};\{b;c\};\{d\}\}$ to'plamlar oilasini hosil qilish mumkin. U holda $S^{|} = S_1 \cup S_2$ bo'ladi, bunda S_1 uchun $A_1 = \{a;b\}$, $A_2 = \{\text{c;d}\}$ va S_2 uchun $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b;c\}$, $A_3 = \{d\}$ bo'laklar bo'ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. To'plamlar ustida qanday amallar bajarish mumkin?
2. Dekart ko`paytma qanday topiladi?
3. To'plamlarning birlashmasi deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
4. To'plamlarning kesishmasi deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
5. To'plamlarning ayirmasi deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
6. To'plamlarning simmetrik ayirmasi deb nimaga aytiladi?
7. To'plamning to'ldiruvchisi deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
8. Eyler-Venn diagrammalari deb nimaga aytiladi?
9. Formulaning analitik ko'rinishi deb nimaga aytiladi?
10. A va B to'plamlar turli xil universumlarga tegishli bo'lsa, ular ustida amallar bajarish mumkinmi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. "Filologiya" va "filosofiya" so'zlaridagi harflar to'plamining birlashmasi hamda kesishmasini toping.

2. "Matematika" va "grammatika" so'zlaridagi harflar to'plamining birlashmasi hamda kesishmasini toping.

3. U={1; 2; 3; 4; a; b; c; d; e} universal to'plamda A va B to'plamlar berilgan bo'lsin. $A\cup B$; $A\cap B$; $A\oplus B$; $A\times B$; $\overline{A}$; $\overline{A\cap B}$ to'plamlarni toping va Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlang.

a) A={1; 2; a; b; c}, B={3; 4; b; c; e}

b) A={1; 3; 4; a; c}, B={3; b; c; e}

c) A={1; 2; 3; 4}, B={ a; b; c; d; e}

d) A={1; 4; a; c; d; e} B={1; a; b; c; d}

e) A={3; 4; a; b} B={1; 2; 3; 4; a; b; c; d; e}.

4. U={p; q; r; s; t; x; y; z} universal to'plamda A={p; q; r; s}, B={r; s; t; y} va C={q; s; x; z} to'plamlar berilgan bo'lsin. Quyidagi to'plamlarni toping:

a) $A\cup B$ d) $A\times B$

b) $A\cap B$ e) $\overline{A}$

c) $A\oplus B$ f) $\overline{A\cap B}$

5. Universal to'plam $U=\{1;2;3;4;5;6\}$ va $A=\{1;2;3;5\}$, $B=\{3;4;5\}$ bo'lsin. Quyidagi to'plamlarning xarakteristik vektorlarini toping: a) $A\cup\overline{B}$ c) $A\cap B$

b) $A\Delta B$ d) $\overline{A\cap B}$

Hosil bo'lgan to'plamlar elementlarini yozing.

1.1.7. Eyler-Venn diagrammalari berilgan bo'lsa, to'plam ko'rinishini tiklash.

Yuqorida kiritilgan birlashma, kesishma, ayirma, simmetrik ayirma, to'ldiruvchi amallari yordamida ayrim to'plamlarni boshqalari orqali ifodalash mumkin, buning uchun amallarni bajarish ketma-ketligi kelishib olingan: 1) to'ldiruvchi amali;

2) kesishma;

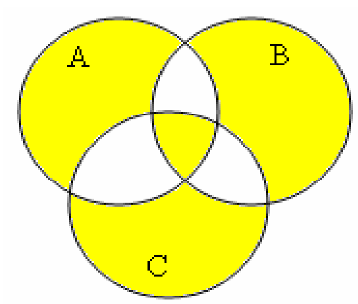
3) yig'indi va ayirma amallari bajariladi.

Bu tartibni ozgartirish uchun qavslardan foydalaniladi.

Shunday qilib, to'plamni boshqa to'plamlar orqali amallar va qavslardan foydalangan holda ifodalash **to'plamning analitik ifodasi** deyiladi.

Biz 1.1.4-paragrafda to'plamning analitik ifodasi berilgan bo'lsa, uni geometrik tasvirlagan edik, endi esa teskari masala, ya'ni berilgan diagrammaga ko'ra to'plamning analitik ifodasini aniqlaymiz:

Misol 1. Eyler-Venn diagrammasidagi shtrixlangan sohaning analitik ifodasini A, B, C to'plamlar orqali ifodalang. Bunda A, B, C to`plamlar bitta universumga tegishli.

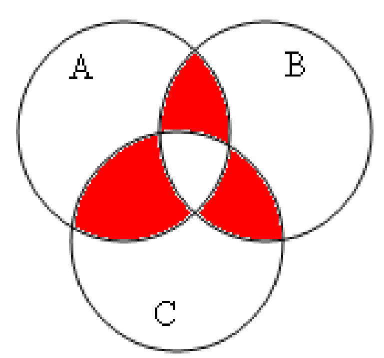


1-usul: $(A\cap B\cap C)\cup(A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(A\cup C))\cup(C\setminus A\setminus B)$

2-usul: $A\Delta B\Delta C=[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\Delta C=[((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\setminus C]\cup[C\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))]$

Misol 2. Strixlangan sohani A, B, C top`lamlar orqali tasvirlang. Bunda $A$, $B$, $C$ to`plamlar bitta universumga tegishli.

Bu masalani yechishning ham bir nechta usullari mavjud.



1-usul: $(A \cap B \setminus C) \cup (A \cap C \setminus B) \cup (B \cap C \setminus A)$

2-usul: $\overline{A \Delta B \Delta C}$

1.1.8. To‘plamlar ustida amallarning asosiy xossalari.

U universal to‘plamning A, B, C qism to‘plamlari uchun quyidagi xossalar o‘rinli (ba’zi xossalarning isbotini keltiramiz, qolganlari shunga o’xshash isbotlanadi. Isbotni Eyler-Venn diagrammasida bajarish ham mumkin):

Kommutativlik (o`rin almashtirish) xossasi: 1^0) $A \cup B = B \cup A$

2^0) $A \cap B = B \cap A$

1^0 –xossaning isboti: $x \in A \cup B$ bo`lsa, u holda $x \in A$ va $x \in B$ bo`ladi. Shuningdek, $x \in B \cup x \in A$ bo`lsa, $x \in B \cup A$ kelib chiqadi. Bundan $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A$ hosil bo`ladi. Bularni umumlashtirilsa, $A \cup B = B \cup A$ kommutativlik xossasi isbotlanadi.

Assotsiyativlik (guruhlash) xossasi: 3^0) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4^0) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivlik (taqsimot qonunlari) xossasi:

$$5^0)\quad (A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$$

$$6^0)\quad (A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$$

Yutilish qonunlari: $7^0)\quad A\bigcap(A\bigcup B)=A$

$$8^0)\quad A\bigcup(A\bigcap B)=A$$

De Morgan qonunlari (Ogastes de-Morgan (1806-1871yy) Shotlandiyalik matematik va mantiqchi, mantiqiy munosabatlar asoschisi):

$$9^0)\quad \overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$$

$$10^0)\quad \overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$$

9^0 – xossaning isboti: $\overline{A\bigcap B}=\{x: x\notin(A\cap B)\}=\{x:\overline{x\in(A\cap B)}\}=\{x:\overline{((x\in A)\cap(x\in B))}\}$;

$$\overline{A}\bigcup\overline{B}=\{x:(x\notin A)\cup(x\notin B)\}=\{x:\overline{x\in A}\cup\overline{x\in B}\}=\{x:\overline{((x\in A)\cup(x\in B))}\}.$$

0 va 1 (bo`sh va universal to`plam) qonunlari:

$11^0)\quad A\bigcap A=A$	$12^0)\quad A\bigcup U=U$
$13^0)\quad A\bigcup\overline{A}=U$	$14^0)\quad A\bigcap\varnothing=\varnothing$
$15^0)\quad A\bigcap\overline{A}=\varnothing$	$16^0)\quad \overline{U}=\varnothing$
$17^0)\quad A\bigcup\varnothing=A$	$18^0)\quad \overline{\varnothing}=U$
$19^0)\quad A\bigcap U=A$	$20^0)\quad A\setminus A=\varnothing$

Ayirishdan qutilish qonuni: $21^0)\quad A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$

Ikkilangan rad etish qonuni: $22^0)\quad \overline{\overline{A}}=A$

To'plamlar ustida amallarning xossalariga e'tibor berib qaraydigan bo'lsak, ular juft – juft yozilgan va har ikkinchisi birinchi xossada amalni o'zgartirish bilan hosil qilingan deyish mumkin, masalan, $\cup$ amali $\cap$ ga, $\varnothing$

to'plam U ga almashtirib hosil qilingan. Xossalarning bunday mosligi **ikkiyoqlamalik qonunlari** deyiladi.

1.1.9. Murakkab ifodalarni soddalashtirish.

To'plamlar ustida amallarning asosiy xossalariga asoslanib, to'plamlarning murakkab ifodalarini isbotlash yoki soddalashtirish mumkin.

Misol 1. $A\Delta B=(A\cup B)\cap\overline{A\cap B}$ (1) ifodani isbotlang.

Yechilishi: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

yoki Eyler-Venn diagrammasidan

$$A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) \qquad (2)$$

tenglikni hosil qilish mumkin.

$(A\cup B)\cap\overline{A\cap B}=$($9^0$-xossadan foydalanamiz) $=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=$($2^0$-xossa)

$=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)=$($5^0$-xossa)$=\left(\overline{A}\cap(A\cup B)\right)\cup\left(\overline{B}\cap(A\cup B)\right)=$(5^0-xossa)

$=\left((\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)\right)\cup\left((\overline{B}\cap A)\cup(\overline{B}\cap B)\right)=$($15^0$-xossa)$=\left(\varnothing\cup(B\cap\overline{A})\right)\cup\left((A\cap\overline{B})\cup\varnothing\right)=$

$=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}).$

Bundan talab qilingan tenglikni hosil qilamiz. $A\Delta B=(A\cup B)\cap\overline{A\cap B}.$

Misol 2. $\overline{A\cup(A\setminus\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{A}\setminus\overline{\mathrm{B}})}$ ifodani soddalashtiring.

Yechilishi: $\overline{A\cup(A\setminus\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{A}\setminus\overline{\mathrm{B}})}=$($21^0$-xossa)$=\overline{A\cup(A\cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{A}\cap\overline{\overline{B}})}=$

(22^0-xossa)$=\overline{A\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)}=$($10^0$-xossa)$=\overline{A}\cap\overline{A\cap B}\cap\overline{\overline{A}\cap B}=$($9^0$-xossa)=

$[\overline{A}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})]\cap(\overline{\overline{A}}\cup\overline{B})=$($22^0$-xossa)$=\left[(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})\right]\cap(A\cup\overline{B})=$($15^0$-xossa).

$$=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap A\right)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{B})=\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\overline{B}.$$

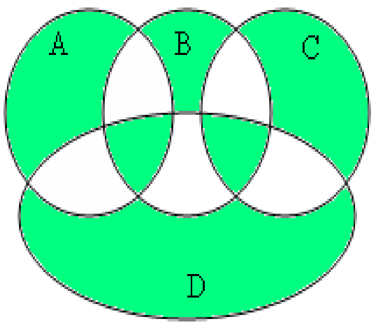
Nazorat uchun savollar:

1. Kommutativlik xossasini keltiring va isbotlang.
2. Distributivlik xossasini keltiring va isbotlang.
3. Assotsiativlik xossasini keltiring va isbotlang.
4. Yutilish xossasini keltiring va isbotlang.
5. De-Morgan xossasini keltiring va Eyler-Venn diagrammasidan foydalanib isbotlang.
6. 0 va 1 qonunlarini keltiring.

7. Ayirilishdan qutilish qonunini keltiring va isbotlang.
8. Ikkilangan rad etish qonunini keltiring va isbotlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Eyler-Venn diagrammasidagi shtrixlangan sohaning analitik ifodasini A, B, C, D to'plamlar orqali ifodalang. Bunda A, B, C, D to`plamlar bitta universumga tegishli.



2. Murakkab ifodalarni soddalashtiring:

a) $(A \cup B \cap \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup A \cap B)$

b) $\overline{X \cup Y} \cap \overline{\overline{X} \cup Y} \cup \overline{X \cap Y}$

e) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap \overline{C}$

j) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \overline{C})$

v) $\overline{A\cap B\cup\overline{A}}\cap\overline{B\cap\overline{A}\cup\overline{B}}$

g) $(A\setminus B\bigcup A\bigcap B)\bigcap\overline{A}$

d) $(B\setminus A)\cap(\overline{A}\cup B\setminus A)$

i) $(A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cup B\cup C)$

k) $(A\cup B\cup C)\cap(A\cup\overline{B}\cup C)$

l) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\cup A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cup A\cap B\cap\overline{C}$

1.1.10. Chekli to'plam quvvati.

Chekli to'plamning asosiy xarakteristikasi bu uning elementlar sonidir. A chekli to'plamdagi elementlar sonini $n(A)$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi va A **to'plamning tartibi** yoki **quvvati** deb ham yuritiladi.

Misol 1. A={a,b,c,d} to`plamning quvvati n(A)=4;

B={ Ø} bo`sh to`plamning quvvati n(B)=0.

Teorema. Ikkita to'plam birlashmasidan iborat to'plamning quvvati $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$ ga teng.

Isboti: Haqiqatan ham, $A\bigcup B$ to'plam umumiy elementga ega bo'lgan $A\setminus B, A\bigcap B, B\setminus A$ qism to'plamlardan tashkil topgan, buni Eyler – Venn diagrammasida ko'rish mumkin.

Bundan tashqari, $A=(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap B)$ va $B=(B\setminus A)\bigcup(A\bigcap B)$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $|A\setminus B|=m$, $|A\bigcap B|=n,$ $|B\setminus A|=p.$ U holda $|A|=m+n,$ $|B|=n+p$ va bulardan

$$|A\bigcup B|=m+n+p=(m+n)+(n+p)-n=|A|+|B|-|A\bigcap B|.$$

Teorema isbotlandi.

Natija 1. Uchta A, B, $C\in$U to'plamlar birlashmasidan iborat to'plam quvvatini topish formulasi:

$$n(A\bigcup B\bigcup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\bigcap B)-n(A\bigcap C)-n(B\bigcap C)+n(A\bigcap B\bigcap C)$$

Natija 2. Ixtiyoriy n ta $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \in U$ to‘plamlar uchun ularning birlashmasidan iborat to‘plam quvvatini topish formulasi quyidagicha bo`ladi:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{i \neq j=1}^{n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k=1}^{n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - ....(-1)^{n-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

Misol 2. Diskret matematika fanini o’rganuvchi 63 nafar talabadan 16 kishi ingliz tilini, 37 kishi rus tilini va 5 kishi ikkala tilni ham o’rganmoqda. Nechta talaba nomlari keltirilgan fanlardan qo’shimcha darslarga qatnashmayapti?

Yechilishi: A ={ingliz tili fanini o’rganuvchilar},

B ={rus tilini o’rganuvchilar},

$A \cap B$ = { ikkala tilni ham o’rganuvchilar} bo`lsin. U holda $|A| = 16,\ \ |B| = 37,\ \ |A \cap B| = 5.$

Yuqoridagi teoremaga asosan,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 16 + 37 - 5 = 48\,.$$

Bundan, $63 - 48 = 15$ nafar talaba nomlari keltirilgan qo’shimcha darslarga qatnashmayotganligi aniqlanadi.

Nazorat uchun savollar:

1. Chekli to'plam tartibi yoki quvvatiga ta'rif bering.
2. Ikkita to'plam yig'indisi uchun elementlar sonini topish formulasini keltiring.
3. Uchta va n ta to'plamlar yig'indisidagi elementlar sonini topish formulalarini keltiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Shahardagi 110 ta qandalotchilik sexlaridan 40 tasi A mahsulotni, 30 tasi B mahsulotni, 48 tasi C mahsulotni, 10 tasi A va B, 13 tasi B va C, 12 tasi A va C, 14 tasi faqat 2 xil mahsulot ishlab chiqarsa, ushbu mahsulotlarni ishlab chiqarmayatgan sexlar nechta?

2. 30 ta turistdan 19 tasi ingliz, 18 tasi nemis tilini biladi. Ulardan nechtasi faqat ingliz tilini biladi?

3. 42 turistdan 25 tasi ingliz, 28 tasi nemis tilini biladi. Ulardan nechtasi faqat nemis tilini, nechtasi faqat ingliz tilini, nechtasi ikkala tilni ham biladi?
4. Guruhda 40 talaba bolib, ulardan 25 tasi yigitlar, qolgani qizlar. Imtixonda ulardan 18 tasi "4", 22 tasi "5" baho olgan. Agar qizlardan 9 tasi "5" olgan bolsa, "4" olgan yigitlar nechta?

5. Guruhdagi talabalardan 17 tasi volleybol, 16 tasi futbol, 18 tasi tennis boyicha togaraklarga qatnashadi. Ulardan 5 tasi futbol va voleybol 7 tasi voleybol, tennis, 6 tasi futbol va tennis, 2 tasi esa 3 ta to'garakka ham qatnaydi. Guruhda nechta talaba bor?

6. Tumanda 32 ta fermer bolib, ular paxta, bugdoy va kartoshka yetishtirishadi. Ulardan 26 tasi paxta, bugdoy yetishtirishi ma’lum bolsa, faqat kartoshka yetishtiradigan fermer nechta?

7. Potokda 100 talabadan 61 tasi ingliz tilini, 48 tasi fransuz tilini, 56 kishi kishi nemis tilini o‘rganishadi. 24 kishi ingliz va fransuz, 36 kishi ingliz va nemis, 30 kishi fransuz va nemis tilini o‘rganishadi. Faqat 2 tadan til o‘rganadiganlar 24 kishi bo‘lsa, umuman til o‘rganmayatganlar nechta? Faqat bittadan til o‘rganayatganlar nechta? Uchchala tilni ham necha kishi o‘rganayapti?

8. Oktyabr oyida 10 kun sovuq, 20 kun yomg‘rli, 16 kun shamolli kun bo‘ldi. Agar 2 kun faqat sovuq, 7 kun faqat yomg‘ir, 5 kun faqat shamol, 4 kun sovuq, yomg‘ir, shamolli kun bo‘lgan bo‘lsa, necha kun quyosh charaqlab turgan?

1.1.11. To‘plamlar algebrasi.

Ta`rif 1. Agar to’plamning $\forall x_i \in M, \forall x_j \in M$ elementlari uchun $(x_i \alpha x_j) \in M$ shart bajarilsa, to’plam α amalga nisbatan **yopiq** deyiladi va unga **algebraik amal** deyiladi.

Misol. 1) N – natural sonlar to’plami yig’indi va ko’paytma amallariga nisbatan yopiq, chunki $\forall a \in N, \forall b \in N$ uchun $a + b \in N, a \cdot b \in N$ o’rinli.

2) Z – butun sonlar to’plami yig’indi, ayirma va ko’paytma amallariga nisbatan yopiqdir.

Ta`rif 2. Bo'sh bo'lmagan qism to'plamlar oilasi U birlashma, kesishma va to'ldiruvchi amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, bu tizimga **to'plamlar algebrasi** deyiladi.

Teorema. A va B ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. U holda birlashma va ayirma amallarini simmetrik ayirma va kesishma amallari yordamida ifodalash mumkin:
$$A \bigcup B = (A \Delta B) \Delta (A \bigcap B),$$
$$A \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \Delta (\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}).$$

Bunday yondoshish matematikaning turli sohalarida o`z tadbiqini topdi. Bunday yondoshishning rivojlanishiga asos bo'lib, to'plamlar halqasi tushunchasi xizmat qildi.

Ta'rif 3. Agar bo'sh bo'lmagan C to'plamlar oilasi kesishma va simmetrik ayirma amallariga nisbatan yopiq bo'lsa, u holda C ga **to'plamlar halqasi** deyiladi, ya'ni $A, B \in C \Rightarrow \mathrm{A \Delta B} \in \mathrm{C}$ va $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \in \mathrm{C}$ o`rinli bo'lsa.

To'plamlar halqasi assotsiativlik va kommutativlik xossalariga bo`y sunadi. Bo'sh to'plam **halqaning noli** deyiladi.

Ta'rif 4. Agar ixtiyoriy $A \in C$ uchun $A \bigcap E = A$ bo'lsa, u holda $E \in C$ to'plam **halqaning biri** deyiladi.

Halqalarda algebraik hisoblashlar oddiy arifmetik qoidalarga o'xshash amalga oshiriladi. Bunda "yig'indi" amali o'rniga "simmyetrik ayirma" amali, "ko'paytma" amali o'rniga "kesishma" amali ishlatiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. To'plamlar algebrasi nima?
2. Qachon to'plam biror amalga nisbatan yopiq bo'ladi?
3. To'plamlar halqasi deb nimaga aytiladi?
4. Halqaning biri va noli deb nimaga aytiladi?

5. Natural sonlar to'plamining yig'indi amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.
6. Natural sonlar to'plamining ko'paytma amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.
7. Butun sonlar to'plamining ayirma amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.
8. Ratsional sonlar to'plamining bo'linma amaliga nisbatan yopiqligini isbotlang.

1.2. MUNOSABATLAR

KIRISh

Turmushda ikki inson, aytaylik Barno va Nargizaning qarindoshligi haqida gapirganda shuni nazarda tutiladiki, shunday ikkita oila mavjud, Barno va Nargizaning shu oilalarga qandaydir aloqasi bor. Tartiblangan (Barno, Nargiza) juftligi boshqa tartiblangan kishilar juftligidan shunisi bilan farq qiladiki, ularning orasida opa-singillik yoki ona-qizlik, jiyanlik kabi munosabatlar bo'lishi mumkin.

Diskret matematikada ham dekart ko'paytmaning barcha tartiblangan juftliklari orasidan o'zaro qandaydir "qarindoshlik" munosabatlariga ega bo'lgan juftliklarni ajratib ko'rsatish mumkin. Ixtiyoriy ikki to'plamning elementlari orasidagi munosabatlar uchun binar munosabat tushunchasini kiritamiz. Bu tushuncha matematika kabi informatikada ham ko'p uchraydi. Bir nechta to'plam elementlari orasidagi munosabat ma'lumotlar jadvali shaklida beriladi. Ushbu bob tadbiqini ma'lumotlar bazasini boshqarish tizimini tasvirlashda ishlatiladigan n – ar munosabatlarda ko'rish mumkin.

1.2.1. Munosabatlar va ularning turlari.
Moslik (binar munosabat).

Ta’rif 1. Ixtiyoriy A va B to‘plamlarning **dekart** yoki **to’g’ri ko`paytmasi** deb, birinchi elementi $A$ to`plamga, ikkinchi elementi B to`plamga tegishli bo`lgan $(x,\ y)$ tartiblashgan juftliklardan iborat to`plamga aytiladi va quyidagicha belgilanadi: $A\times B=\{(x,\ y),\ \ x\in A,\ y\in B\}$.

Bunda x va y lar $(x,\ y)$ juftlikning **koordinatalari** yoki **komponentlari** deyiladi, demak mos ravishda x juftlikning birinchi koordinatasi, y esa juftlikning ikkinchi koordinatasi deyiladi.

Misol 1. Dekart ko’paytmaga misol qilib to’g’ri burchakli dekart koordinata sistemasida nuqtalar to’plamini olish mumkin, ya’ni tekislikda har bir nuqta ikkita koordinataga ega: abssissa va ordinata.

Misol 2. $A=\{a_1,a_2\}$ va $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ to’plamlar berilgan bo‘lsin. U holda

$$A\times B=\{a_1,a_2\}\times\{b_1,b_2,b_3\}=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$$

Ta’rif 2. $R=A\times B$ dekart ko`paytmaga **to`g`ri dekart ko`paytma,** $R^{-1}=B\times A$ ifodaga **teskari dekart ko`paytma** deyiladi.

Dekart ko’paytmaning xossalari:

1^0. Dekart ko’paytma kommutativ emas:

$$A\times B\neq B\times A$$

2^0. Dekart ko’paytma assotsiativ emas:

$$((A\times B)\times C)\neq(A\times(B\times C)).$$

Ta'rif 3. $P \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ dekart ko'paytmaning ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan P qism to`plamiga $A_1, A_2, ..., A_n$ to'plamlar orasida aniqlangan n **o'rinli munosabat** yoki n o'rinli P **- predikat** deyiladi.

Agar $(a_1, a_2, ..., a_n) \in P$ bo`lsa, $P$ munosabat $(a_1, a_2, ..., a_n)$ elementlar uchun **rost munosabat** deyiladi va $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ bo`ladi, agar $(a_1, a_2, ..., a_n) \notin P$ bo`lsa, $P$ munosabat **yolg`on munosabat** deyiladi va $P(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$ yoki $\overline{P}(a_1, a_2, ..., a_n)$ kabi yoziladi.

Ta'rif 4. Agar $P \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ n o'rinli munosabatda n=1 bo`lsa, $P$ munosabat $A_1$ to'plamning qism to'plami bo'ladi va **unar munosabat** (bir o`rinli munosabat) yoki **xossa** deyiladi.

n=2 bo`lganda esa **binar munosabat (**ikki o'rinli munosabat) yoki **moslik** deyiladi.

Agar $P \subseteq A^2$ bo`lsa, $P$ ga $A$ to`plamning elementlari orasidagi munosabat deyiladi.

Misol 3. Unar munosabatlarga misollar keltiramiz:

1) $A_1 = Z$ butun sonlar to'plamidan iborat bo`lsin. $P(x) \subseteq Z$ unar munosabat *P(x)=1* shart bilan aniqlansin, bunda $x$ – juft son, u holda $P$ munosabat quyidagi ko`rinishda bo`ladi: *P={...;-4;-2;0;2;4;...}.*

2) $A_1 = R$ haqiqiy sonlar to`plamidan iborat, $P \subseteq R$ munosabat *P(x)=1* shart bilan aniqlansin, bunda $x$ – irratsional son bo`lsin, u holda P munosabat quyidagi ko`rinishlarda bo`ladi:

$$P\left(\sqrt{2}\right) = P(e) = P(\pi) = 1,$$

$$P(0) = P(1) = P\left(-\frac{1}{3}\right) = 0.$$

3) A_1 – barcha odamlar to`plami, $P(x) \subseteq A_1$ munosabatda x – erkak kishi bo`lsin. Javob: *P(x)*=1 bo`ladi.

4) A_1 – tekislikdagi barcha uchburchaklar to`plami bo`lsa, x – teng yomli uchburchaklar bo`lsin. Javob: *P(x)*=1 bo`ladi.

Misol 4. Binar munosabatlarga misollar keltiramiz:

1) $P_1 \subseteq Z \times Z$ binar munosabat *P(x,y)=1* shart bilan aniqlansin, bunda *x-y* 3 ga bo`linadigan sonlar, u holda $P$ munosabat quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

P={(4;1);(5;2); (6;3);...}.

2) $P_2 \subseteq Z \times Z$ munosabat P(x,y)=1 shart bilan aniqlansin, bunda x+y 2 ga bo`linadigan sonlar bo`lsin, u holda P munosabat quyidagi ko`rinishlarda bo`ladi:

P={(1;1);(0;2); (5;3);...}.

3) $P_3 \subseteq R \times R$ munosabat $,P_3(x,y) = 1$ shart bilan aniqlansin, bunda *x-y* ratsional son. U holda quyidagilar o`rinli:

$$P_3(1;4) = P_3\left(\sqrt{2}+2;\sqrt{2}\right) = P_3(e;e-1) = 1,$$

$$P_3\left(1;\sqrt{2}\right) = P_3(1;e) = P_3(1;\pi) = 0.$$

$$P_3\left(\sqrt{2};\pi\right) = P_3(e;\pi) = 0$$

4) A – to‘plam elementlari kitob nashriyotlari nomlari bo‘lsin.

B - to‘plam elementlari ushbu kitoblarni sotadigan firmalar bo‘lsin, u holda P -munosabatga nashriyot va firmalar o‘rtasida tuzilgan shartnomalar to‘plami deb, ma‘no berish mumkin.

Ta’rif 5. Dekart ko‘paytmaning ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan qism to‘plamiga **munosabat** deyiladi.

P-munosabat bo‘lsin, u holda $P \subset A \times B$ bo‘ladi. $< x,\ y > \in R$ yozuv o‘rniga ko‘pincha $x P y$ yozishadi va “x element y ga nisbatan P munosabatda” deb o‘qiladi.

Misol 5. $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ va $B = \{1\ ,\ 2\}$ bo‘lsin, u holda

$$A \times B = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,\ 2>, <3,\ 1>, <3,\ 2>\}$$

Munosabat 1) $R_1 = \{<1,\ 1>, <3,\ 2>\}$

2) $R_2 = \{<1,\ 1>, <1,\ 2>, <2,2>\}$ ko‘rinishda bo‘lishi mumkin.

Ta’rif 6. $P \subseteq A \times B$ binar munosabat uchun $P^{-1} \subseteq B \times A$ **teskari munosabat** deyiladi, agar ixtiyoriy $x \in A$ va $y \in B$ elementlar uchun $P(x, y) = 1$ dan $P^{-1}(y, x) = 1$ kelib chiqsa.

Ta’rif 7. $x = y$ bo`lganda $I_A(x, y) = 1$ shart bajarilsa, $I_A \subseteq A \times A$ binar munosabatga **dioganal munosabat** yoki **ayniy munosabat** deyiladi. Ayniy munosabat uchun $I_A^{-1} = I_A$ tenglik o`rinli.

Binar munosabat, ya’ni moslik haqida alohida to’xtalib o’tamiz, chunki munosabatlar orasida eng ko’p uchraydigani bu moslikdir.

X va Y to’plamlar berilgan bo’lsin.

X va Y to’plamlar elementlarini qandaydir usul bilan mos qo’yib, tartiblangan juftliklarni hosil qilaylik. Agar har bir $x \in X$ element uchun $y \in Y$

element mos qo’yilgan bo’lsa, u holda X va Y to’plamlar o’rtasida **moslik o’rnatildi** deyiladi. Moslikni berish uchun quyidagilarni ko’rsatish zarur:

1) elementlari boshqa biror to’plam elementlari bilan mos qo’yiladigan X to’plam;

2) elementlari X to’plam elementlari bilan mos qo’yiladigan Y to’plam;

3) moslikni aniqlovchi qoida, ya’ni $R \subseteq X \times Y$ to’plam, uning elementlari moslikda qatnashuvchi barcha (x, y) juftliklardan iborat.

Shunday qilib, f moslik $f =< X, Y, R >$ to’plamlar uchligidan iborat bo’ladi, bunda $R \subseteq X \times Y$. Agar $(x, y) \in R$ bo’lsa, y element x elementga mos qo’yilgan deyiladi.

Misol 6. Laboratoriya xonasida 8 ta laboratoriya qurilmasi bor: $X = \{x_1, x_2, ..., x_8\}$. Laboratoriya ishini bajarish uchun 10 nafar talaba 5 ta guruhga ajralishdi: $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. U holda quyidagicha moslik bo’lishi mumkin:

$f = \{X, Y, (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_3, y_3), (x_5, y_4), (x_8, y_5)\}$, bu yerda $(x_1, x_2, ... x_8)$ - moslikning aniqlanish sohasi, $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ - moslikning qiymatlari sohasi bo’ladi.

Moslik 4 xilda bo’ladi:

1. **Birga-bir qiymatli moslik**, bu X va Y to’plamlar elementlari orasidagi shunday moslikki, bunda X ning har bir elementiga Y ning bitta yagona elementi mos qo’yiladi. Masalan, musbat butun sonning kvadrati butun musbat sonning o’zi bilan birga-bir mos qo’yilgan.

2. **Birga-ko’p qiymatli moslik**, bunda X ning bitta elementiga Y danikkita va undan ortiq element mos qo’yilgan bo’ladi.

Masalan, X - butun musbat sonlar to’plami bo’lsin: $X = \{4, 9, 16\}$

Y - X dan olingan kvadrat ildiz bo’lsin: $Y = \{-2, 2, -3, 3, -4, 4\}$.

3. **Ko'pga-bir qiymatli moslik**, bunda Y to'plamning har bir elementiga X to'plamdan bir nechta qiymat mos qo'yiladi. Masalan, imtihon topshiruvchi talabalar to'plami X ga baholar to'plami Y mos qo'yiladi. Bunda har bir talaba bittadab baho oladi, lekin 1 ta baho bir nechta talabaga qo'yiladi.

4. **Ko'pga-ko'p qiymatli moslik**, bunda X to'plamning bitta elementiga Y to'plamdan bir nechta qiymat mos qo'yiladi, shuningdek, Y ning bitta elementiga X dan bir nechta qiymat mos qo'yiladi. Masalan, X - biror qurilmaning bajaruvchi sxemalari, Y - esa elementlar tipi deyish mumkin.

Misol 7. Odamlar o'rtasidagi "qarindoshlik" munosabati binar munosabat bo'lib, bu to'plam umumiy ajdodga ega bo'lgan odamlar juftligini o'z ichiga oladi.

Binar munosabatlar 3 xil usulda beriladi:

1. Juftliklarning (sanab o'tilgan) ro'yhati.
2. Matritsa (jadval) orqali.
3. Grafik – struktura ko'rinishida.

$T \subset A \times A$ berilgan bo'lsin, bu yerda $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. U holda, agar a va b orasida T munosabat bo'lsa, C kvadrat matritsaning i-satri va j-ustuni kesishgan joyda joylashgan q element 1 ga teng bo'ladi; aks holda $C_{ij} = 0$.

$$C_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_1, \ a_j) \in T \\ 0, \text{ если } (a_i, \ a_j) \notin T \end{cases}$$

Misol 8. $M=\{1,2,3,4,5\}$ to'plamda aniqlangan

$$T=\{(a,b):(a-b)\text{- juft son}\}$$

munosabat berilgan bo'lsin. Munosabatni ro'yhat va matritsa bilan bering.

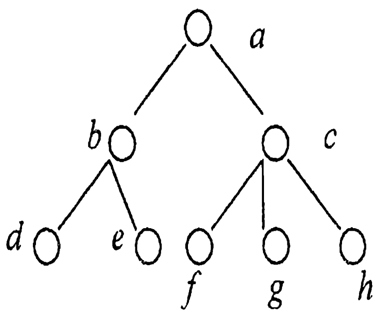
1) T = {(1, 1), (1; 3), (1, 5), (2; 2), (2; 4), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (4; 2), (4; 4), (5; 1), (5; 3), (5; 5)}.

2) Matritsa ko'rinishi:

T	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

yoki $\|T\|=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$

Misol 9. $M=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ odamlar to'plami bo'lsin va struktura ko'rinishida berilgan bo'lsin.



Quyidagi munosabatlar haqida gapirish mumkin:

a) R_1 – "yaqin o'rtoq bo'lish" munosabati:

$$R_1 = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,f),(c,g),(c,h),(b,a),$$
$$(c,a),(d,b),(e,b),(f,c),(g,c),(h,c)\}$$

$$\|R_1\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) R_2 – "boshliq bo'lish" munosabati:

$$R_2 = \{(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(a,h),(b,d),(b,e),(c,f),(c,g),(c,h)\}$$

c) R_3 – "ota bo'lish" munosabati:

$$R_3 = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,e),(c,f),(c,g),(c,h)\}.$$

Misol 10. $A=\{4,\ 5,\ 6\}$ va $B=\{1, 2, 3, 4\}$ to'plamlar uchun $U \subseteq A\times B$ va $R \subseteq A\times B$ bo'lgan $U=\{(x,y):\ \mathrm{x+y=8}\}$, $R=\{(x,y):\ \mathrm{x<y}\}$ binar munosabatlarni tuzing.

Yechilishi: $U=\{(4,4),(5,3),(6,2)\}$ va $R=\{(x,y):\ \mathrm{x<y}\}=\varnothing$.

Nazorat uchun savollar:

7. Dekart ko'paytma ta'rifini keltiring, Misol keltiring.
8. Daraja aksiomasini keltiring.
9. Dekart ko'paytma xossalarini ayting.

10. n –o‘rinli munosabat ta’rifini keltiring?

11. Teskari munosabat deb nimaga aytiladi?

12. Ayniy yoki dioganal munosabat deb nimaga aytiladi?

13. Moslik (binar munosabat) deb nimaga aytiladi?

14. Moslik turlarini sanab bering.

15. Moslik qanday beriladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ bo’lsin. R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 munosabatlarini ro’yhat va matritsa bilan bering, agar:

a) R_1 – “qat’iy kichik bo’lish”;

b) R_2 – “1 dan farqli umumiy bo’luvchiga ega bo’lish”;

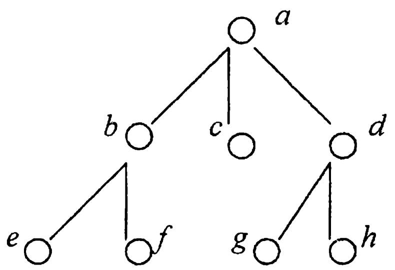
v) R_3 – “3 ga bo’linganda bir xil qoldiqqa ega bo’lish”;

g) R_4 – “(a – b) – toq son”;

d) R_5 – “(a+b) – juft son”.

Barcha munosabatlar uchun D_l va D_r ni ko’rsating.

2. Quyidagi struktura ko’rinishidagi munosabatlarni ro’yhat shaklida yozing:



R_1 – “to’g’ridan-to’g’ri boshliq bo’lish”

R_2 – “bobo bo’lish”

R_3 – “o’g’il yoki qiz bo’lish”.

1.2.2. Munosabatlar superpozitsiyasi.

Ta’rif. $P \subseteq A \times B$ va $Q \subseteq B \times C$ binar munosabatlar uchun $P \circ Q \subseteq A \times C$ predikat quyidagicha aniqlangan bo`lsin: $(P \circ Q)(x,z) = 1$ shart bilan aniqlangan ixtiyoriy $x \in A,\ z \in C$ uchun shunday $y \in B$ topiladiki, $P(x,y) = 1,\ Q(y,z) = 1$ o`rinli bo`ladi. $P \circ Q$ ga P va Q munosabatlarning **superpozitsiyasi** deyiladi.

Demak , $P \circ Q = \{(x,z) : \forall \mathrm{x} \in \mathrm{A}, \mathrm{z} \in \mathrm{C}$ ва $\exists\, \mathrm{y} \in \mathrm{B} \Rightarrow (\mathrm{x}, \mathrm{z}) \in P$ va $(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \in Q\}$

Misol 1. A={1,2,3}, B={a, b, c} va C={x, y, z} to`plamlar berilgan bo`lsin.

P $\subseteq$ A$\times$B={(1;a);(1:c);(2;b);(2;c);(3;a)};

Q $\subseteq$ B$\times$C={(a; x);(a; y);(b; y);(b; z);(c; x);(c; z)};

$P \circ Q \subseteq$ A$\times$C$\setminus${(3;z)}={(1;x);(1;y);(1;z);(2;x);(2;y);(2;z);(3;x);(3;y)}.

Misol 2. A={a, b, c, d} to`plam berilgan bo`lsin.

P $\subseteq A \times A$ ={(a; a);(a; b);(a; d);(c; a);(c; b);(d; a)},

u holda teskari munosabat

P^{-1} ={(a; a);(b; a);(d; a);(a; c);(b; c);(a; d)} bo`ladi.

Quyidagilarni hisoblaymiz: $P \cap P^{-1}, P \circ P^{-1}, P^{-1} \circ P$:

a) $P \cap P^{-1}$ = {(a; a);(a; d);(d; a)};

b) $P \circ P^{-1}$ ={(a; a);(a; c);(a; d);(c; a);(c; c);(c; d);(d; a);(d; c);(d; d)};

v) $P^{-1} \circ P$ ={(a; a);(a; b);(a; d);(b; a);(b; b);(b; d);(d; a);(d; b);(d;d)}.

Bundan ko`rinadiki, $P \circ P^{-1} \neq P^{-1} \circ P$, ya`ni superpozitsiya amali kommutativ emas.

Teorema 1. $P \subseteq A \times B$ munosabat uchun quyidagilar o`rinli

а) $I_A \circ P = P$;

б) $P \circ I_B = P$.

Isboti: a) $(x;y)\in I_A \circ P$ ni olib qaraylik, uning uchun shunday $z\in B$ topiladiki, $(x;z)\in I_A$ va $(z;y)\in P$. Biroq $(x;z)\in I_A$ dan x=z kelib chiqadi, demak $(x;y)\in P$, u holda $I_A \circ P\subseteq P$.

Endi $(x;y)\in P$ bo`lgan holni qaraymiz, bu holda $(x;x)\in I_A$ va $(x;y)\in P$ hosil bo`ladi. Ya`ni shunday $z\in(z=x)$ topiladiki, uning uchun $(x;z)\in I_A$ va $(z;y)\in P$ bo`ladi, demak $(x;y)\in I_A \circ P$.

б) shart ham shunga o`xshash isbotlanadi.

Teorema 2. $P\subseteq A\times B$ va $Q\subseteq B\times C$ binar munosabatlar uchun

$(P\circ Q)^{-1}=Q^{-1}\circ P^{-1}$ tenglik o`rinli.

Isboti: $(z;x)\in(P\circ Q)^{-1}\leftrightarrow(x;z)\in P\circ Q$ uchun shunday $y\in B$ element topiladiki, uning uchun $(x;y)\in P$ va $(y;z)\in Q\leftrightarrow(y;x)\in P^{-1}$ va $(z;y)\in Q^{-1}\leftrightarrow(z;x)\in Q^{-1}\circ P^{-1}$ bo`ladi. Teorema isbotlandi.

Teorema 3. $P\subseteq A\times B,\ Q\subseteq B\times C,\ R\subseteq C\times D$ binar munosabatlar uchun $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$ superpozitsiyaning assotsiativligi o`rinli.

Isboti: $(x;t)\in(P\circ Q)\circ R$ uchun shunday $z\in C$ element topiladiki, uning uchun $(x;z)\in(P\circ Q)\circ R$ va shunday $y\in B$ element topiladiki, uning uchun $(x;y)\in P$, $(y;z)\in Q$ va $(z;t)\in R$ munosabatlar o`rinli. Ularning

superpozitsiyasini hisoblab, $(x;y)\in P$ va $(y;t)\in Q\circ R$ dan $(x;t)\in P\circ(Q\circ R)$ ga kelamiz. Demak, $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$. Teorema isbotlandi.

Nazorat uchun savollar:

1. Munosabatlarning superpozitsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. $P \subseteq A \times B,\ \ Q \subseteq B \times C,\ \ R \subseteq C \times D$ binar munosabatlar uchun $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$ superpozitsiyaning assotsiativligini isbotlang.
3. $P \subseteq A \times B$ va $Q \subseteq B \times C$ binar munosabatlar uchun $(P \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ P^{-1}$ tenglik o\`rinli ekanligini isbotlang.
4. $P \subseteq A \times B$ munosabat uchun $I_A \circ P = P$ o\`rinli ekanligini isbotlang.
5. $P \subseteq A \times B$ munosabat uchun $P \circ I_B = P$ o\`rinli ekanligini isbotlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

A=$\{a,b,c\}$, B=$\{1,2,3\}$, C=$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ to‘plamlarda aniqlangan $R_1 \subset A \times B$ va $R_2 \subset B \times C$ binar munosabatlarning **superpozitsiyasini** toping:

a) $R_1=\{(a,2),(a,3),(b,1),(c,2)\}$, $R_2=\{(1,\alpha),(2,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\}$

b) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(2,\gamma),(1,\alpha),(1,\beta)\}$

c) $R_1=\{(a,3),(b,2),(c,1),(c,2)\}$, $R_2=\{(1,\beta),(2,\alpha),(3,\beta),(3,\gamma)\}$

d) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(1,\gamma),(3,\alpha),(1,\beta)\}$

e) $R_1=\{(a,1),(a,3),(c,1),(c,3)\}$, $R_2=\{(2,\alpha),(2,\gamma),(1,\beta),(3,\alpha)\}$

f) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(1,\gamma),(1,\alpha),(3,\beta)\}$

g) $R_1=\{(a,2),(b,1),(c,3)\}$, $R_2=\{(1,\beta),(2,\beta),(3,\alpha)\}$

i) $R_1=\{(a,3),(a,2),(a,1)\}$, $R_2=\{(3,\gamma),(2,\alpha),(2,\beta)\}$

1.2.3. Ekvivalentlik munosabati.

Binar munosabatlarda $(x;y) \in P$ o\`rniga $x\,P\,y$ yozuv ham ishlatiladi.

Ta’rif 1. Agar X to’plamdagi ixtiyoriy x element to’g’risida u o’z-o’zi bilan P munosabatda deyish mumkin bo’lsa, X to’plamdagi munosabat **refleksiv munosabat** deyiladi va xPx ko’rinishida belgilanadi.

Ta'rif 2. Agar X to'plamdagi x elementning y element bilan P munosabatda bo'lishidan y elementning ham x element bilan P munosabatda bo'lishi kelib chiqsa, X to'plamdagi P munosabat **simmetrik munosabat** deyiladi va $xPy \Rightarrow yPx$ ko'rinishida belgilanadi.

Ta'rif 3. Agar X to'plamdagi x elementning y element bilan P munosabatda bo'lishi va y elementning z element bilan P munosabatda bo'lishidan x elementning z element bilan P munosabatda bo'lishi kelib chiqsa, X to'plamdagi P munosabat **tranzitiv munosabat** deyiladi va $xPy,\ yPz \Rightarrow xPz$ ko'rinishida belgilanadi.

Ta'rif 4. Agar X to'plamning turli x va y elementlari uchun x elementning y element bilan P munosabatda bo'lishidan y elementning x element bilan P munosabatda bo'lmasligi kelib chiqsa, X to'plamdagi P munosabat **antisimmetrik munosabat** deyiladi va $xPy \Rightarrow y\overline{P}x$ ko'rinishida belgilanadi.

Ta'rif 5. $P \subseteq A \times A$ binar munosabat ham refleksivlik, ham simmetriklik, ham tranzitivlik shartlarini qanoatlantirsa, P munosabatga **ekvivalentlik munosabati** deyiladi, ya'ni P uchun

a) $\forall x \in A$ uchun xPx;

b) $xPy \Rightarrow yPx$;

c) $\forall\ (x,\ y) \in P,\ (y;z) \in P$ uchun xPy va yPz dan xPz kelib chiqsa.

Misol 1. 1) "=" munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

2) Qarindoshlik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'ladi.

3) "Sevgi" munosabati ekvivalent munosabat bo`la olmaydi.

Misol 2. $A = Z$ butun sonlar to`plami va unda aniqlangan $P \subseteq Z \times Z$ munosabat shunday *x-y* larki, ular 3 ga bo`linadi.

a) $x-x=0$ soni 3 ga bo`linadi.

b) *x-y* ifoda 3 ga bo`linsa, $y-x=-(x-y)$ ham 3 ga bo`linadi.

c) *x-y* ifoda 3 ga bo`linsa va *y-z* ifoda 3 ga bo`linsa, u holda $(x-y)+(y-z)=x-z$ ham 3 ga bo`linadi.

Demak, $P\subseteq Z\times Z=\{x\in Z, y\in Z \mid x-y\vdots 3 \text{ ga bo'linadi}\}$ munosabat ekvivalentlik munosabati bo'lar ekan.

Ta'rif 6. $x\in A$ elementning **ekvivalentlik sinfi** deb, $E(x)=\{{}^{y}/_{x\sim y}\}$ to'plamga aytiladi.

Ta'rif 7. A to'plam elementlarining E ekvivalentlik bo'yicha ekvivalent sinflar to'plami **faktor – to'plam** deyiladi va ${}^{A}/_{E}=\{{}^{E(x)}/_{x\in A}\}$ kabi belgilanadi.

Misol 3. Agar *{(a;b), (c;d)}*$\in$*Q* to'plam elementlari uchun $a+d=b+c$ tenglik bajarilsa, u holda *Q* munosabat $N\times N$ to'plamda ekvivalentlik munosabati bo'lini ko'rsating.

Yechilishi:

1) *Refleksivlik:* agar A to'plamda *Q* refleksivlik munosabati bo'lsa, u holda $\forall x\in Q,\ (x;x)\in Q$. Bizning misolda A t o'plam o'rnida $N\times N$ to'plam va *x* element o'rnida *(x;y)* juftlik. Bunda $N\times N$ to'plamda *Q* munosabat refleksiv bo'ladi, agarda $\forall (x;y)\in Q,\ \{(x;y),(x;y)\}\in Q$. Ta`rifga ko'ra, *Q:* $a+d=b+c$, lekin $a+b=b+a$, demak, *Q* - refleksiv munosabat.

2) *Simmetriklik:* agar *{(a;b), (c;d)}*$\in$*Q* bo'lsa, u holda *{(c;d), (a;b)}*$\in$*Q* , $a+d=b+c$ bundan c+b= $d+a$. Demak, *Q* – simmetrik munosabat.

3) *Tranzitivlik:* agar *{(a;b), (c;d)}*$\in$*Q*, *{(c;d),(f;g)}*$\in$*Q* bo'lsa, u holda *{(a;b),(f;g)}*$\in$*Q* bo'ladi, chunki $a+d=b+c$ va $c+g=d+f$. U holda

$(a+d)+(c+g)=(b+c)+(d+f) \Rightarrow a+d+c+g=b+c+d+f \Rightarrow a+g=b+f,$

ya`ni *Q* – tranzitiv munosabat.

Demak, *Q* munosabat ham refleksiv, ham simmetrik, ham tranzitiv bo'lganligi uchun ekvivalent munosabat bo'ladi.

Ta'rif 8. Har bir elementi *A* to'plamning faqat va faqat bitta qism to'plamiga tegishli bo'lgan kesishmaydigan qism to'plamlar majmuasi *A* to'plamning **bo'laklari** deyiladi.

Teorema. A/E faktor-to'plam *A* to'plamning bo'lagi bo'ladi. Va aksincha, agar $R=\{A_i\}$ – *A* to'plamning biror bo'lagi bo'lsa, u holda bu bo'lakka biror *i* va A_i dan olingan $x;y$ elementlar uchun xEy qoida bo'yicha *E* ekvivalentlik munosabatini topish mumkin.

Nazorat uchun savollar:

1. Munosabatlarning kompozitsiyasi va uning xossalari.
2. Refleksivlik shartini ayting.
3. Simmetriklik shartini ayting.
4. Tranzitivlik shartini ayting.
5. Antisimmetrik munosabat deb nimaga aytiladi?
6. Ekvivalent munosabat deb nimaga aytiladi?
7. Faktor – to'plam deb nimaga aytiladi?
8. Ekvivalentlik sinfi deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Birdan farqli natural sonlar to'plami dekart kvadratida aniqlangan R={***(x,y)*: *x*** va ***y*** lar birdan farqli umumiy bo'luvchiga ega} munosabat ekvivalent munosabat bo'ladimi?

2. A={a, b, c} to‘plam dekart kvadratida simmetrik bo‘lgan, refleksiv, tranzitiv bo‘lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.

3. A={a, b, c} to‘plam dekart kvadratida tranzitiv bo‘lgan, refleksiv, simmetrik bo‘lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
4. A={a, b, c} to‘plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik bo‘lgan, tranzitiv bo‘lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
5. K-kalit so‘zlar, P- web sahifalar to‘plami bo‘lsin, R munosabat ushbu to‘plamlar dekart ko‘paytmasida aniqlangan bo‘lsin. ***(x,y)*** juftlik R munosabatga tegishli bo‘lsin, agar ***x*** kalit so‘z ***y*** web-sahifada bo‘lsa. R munosabat ekvivalent munosabat bo‘ladimi?
6. A={1,2,3,4} to‘plam dekart kvadratida refleksiv bo‘lgan, simmetrik, tranzitiv bo‘lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
7. A={1,2,3,4} to‘plam dekart kvadratida refleksiv, simmetrik, tranzitiv bo‘lmagan munosabatga misol keltiring va isbotlang.
8. A={1,2,3,4} to‘plam dekart kvadratida ekvivalent munosabatga misol keltiring va isbotlang.

1.2.4. Munosabatning aniqlanish, qiymatlar sohalari. Munosabatlar maydoni.

Biror A va B to`plamlar hamda unda aniqlangan $P \subseteq A \times B$ munosabat berilgan bo`lsin.

Ta‘rif 1. P -munosabatning **chap sohasi** yoki **aniqlanish sohasi** $\boldsymbol{D_l}$ deb, P -munosabatga tegishli juftliklar birinchi elementlaridan iborat to‘plamga aytiladi va D_l={∃x: (x,y)∈ P} kabi belgilanadi. *l*- *“left”*, ya`ni “chap” so`zidan olingan.

Ta‘rif 2. P -munosabatning **o‘ng sohasi** yoki **qiymatlar sohasi** D_r deb, P -munosabatga tegishli juftliklarning ikkinchi elementlar to‘plamiga aytiladi va $D_r=\{\exists y: (x,y)\in P\}$ kabi belgilanadi. *r*- *“right”*, ya`ni “o`ng” so`zidan olingan.

Geometrik ma‘noda D_l - P munosabatning X to‘plamga proyektsiyasi, D_r - P munosabatning Y to’plamdagi proyektsiyasi hisoblanadi.

Ta’rif 3. Aniqlanish va qiymatlar sohalarining birlashmasi $D_l \cup D_r$ ga P **munosabat maydoni** deyiladi va $F(P)$ kabi belgilanadi.

P munosabatning chap va o‘ng sohalaridagi bir xil qiymatga ega bo‘lgan elementlari, ikkala tomonga ham tegishli deb hisoblanadi, xususan A^2 dekart kvadrat uchun $F(P)=A$ bo`ladi.

Ta’rif 4. $R^{-1}=\{(y, x): (x, y)\in R\}$ to‘plamga R munosabatga **teskari munosabat** deyiladi.

Misol. A={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} to‘plamda binar munosabat

$$R=\{(x, y): x, y\in A, x \text{ element } y \text{ ni bo`ladi va } x\le 3\}$$

shart bilan aniqlangan bo`lsin. U holda

R={(2,2), (2, 4), (2,6), (2, 8), (3, 3), (3, 6)};

D_l = {2, 3};

D_r={2, 3, 4, 6, 8};

R^{-1} = {(2, 2), (4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3)}.

Nazorat uchun savollar:

1. Munosabatlarning aniqlanish sohasi ta’rifini keltiring.
2. Munosabatlarning qiymatlar sohasi ta’rifini ayting.
3. A to‘plamning R munosabatga nisbatan asli deb nimaga aytiladi?
4. A to‘plamning R munosabatga nisbatan tasviri deb nimaga aytiladi?

5. Teskari munosabatga ta’rif bering.
6. Munosabat maydoni deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

A={a,b,c,d,e}, B={1,2,3,4} to‘plamlarda quyidagicha munosabatlar berilgan:

$R_1 \subseteq A \times B$ va $R_2 \subseteq B \times B = B^2$ bo’lsa,

1) R_1, R_2 munosabatlarni grafik ko‘rinishda ifodalang;
2) R_1, R_2 munosabatlarning aniqlanish va qiymatlar sohalarini toping;
3) R_1, R_2 , R_1^{-1}, R_2^{-1}, R_2^2 , $R_2 \cap R_2^{-1}$ - munosabatlarning matritsasini toping;
4) R_2 munosabatni refleksivlik, simmetriklik, antisimmetriklik, tranzitivlik xossalariga tekshirilsin.

1.

$$R_1 = \{<a;3>,<b;1>,<b;3>,<c;2>,<c;4>,<d;3>,<e;1>,<e;2>,<e;3>,<e;4>\},$$
$$R_2 = \{<1;4>,<2;1>,<2;2>,<2;3>,<3;2>,<3;3,<4;1>,<4;3>\}.$$

2.

$$R_1 = \{<a;1>,<a;3>,<a;4>,<d;3>,<c;1>,<c;3>,<c;4>,<d;1>,<d;3>,<e;4>\},$$
$$R_2 = \{<1;1>,<1;4>,<2;1>,<2;3>,<3;2>,<4;1,<4;3>,<4;4>\}.$$

3.

$$R_1 = \{<a;1>,<a;3>,<b;1>,<b;3>,<c;1>,<c;3>,<d;3>,<d;4>,<e;2>,<e;4>\},$$
$$R_2 = \{<1;1>,<1;2>,<1;4>,<2;3>,<3;2>,<3;4,<4;1>,<4;4>\}.$$

4.

$$R_1 = \{<a;3>,<b;3>,<c;2>,<c;3>,<c;4>,<d;2>,<d;3>,<d;4>,<e;2>,<e;4>\},$$
$$R_2 = \{<1;2>,<1;4>,<2;1>,<2;3>,<3;2>,<3;4,<4;1>,<4;3>\}.$$

5.

$$R_1 = \{< a;3 >, < a;4 >, < b;2 >, < b;3 >, < c;2 >, < c;3 >, < c;4 >, < d;3 >, < d;2 >, < d;4 >\},$$
$$R_2 = \{< 1;3 >, < 1;4 >, < 2;3 >, < 2;4 >, < 3;2 >, < 3;3, < 4;1 >, < 4;3 >\}.$$

6.

$$R_1 = \{< a;1 >, < a;3 >, < b;2 >, < b;4 >, < c;1 >, < c;3 >, < c;4 >, < d;4 >, < e;3 >, < e;4 >\},$$
$$R_2 = \{< 1;1 >, < 2;1 >, < 2;4 >, < 3;1 >, < 3;2 >, < 3;3, < 3;4 >, < 4;4 >\}.$$

7.

$$R_1 = \{< a;3 >, < b;1 >, < b;3 >, < c;2 >, < c;4 >, < d;3 >, < e;1 >, < e;2 >, < e;3 >, < e;4 >\},$$
$$R_2 = \{< 1;4 >, < 2;1 >, < 2;2 >, < 2;3 >, < 3;2 >, < 3;3, < 4;1 >, < 4;3 >\}.$$

8.

$$R_1 = \{< b;1 >, < b;4 >, < c;1 >, < c;2 >, < c;4 >, < d;4 >, < e;1 >, < e;2 >, < e;3 >, < e;4 >\},$$
$$R_2 = \{< 1;1 >, < 1;2 >, < 1;3 >, < 2;1 >, < 2;4 >, < 3;1, < 3;4 >, < 4;4 >\}.$$

9.

$$R_1 = \{< b;1 >, < b;2 >, < b;3 >, < b;4 >, < c;2 >, < c;4 >, < d;2 >, < d;4 >, < e;2 >, < e;4 >\},$$
$$R_2 = \{< 2;1 >, < 2;2 >, < 2;3 >, < 2;4 >, < 3;2 >, < 3;4, < 4;2 >, < 4;4 >\}.$$

1.3. AKSLANTIRIShLAR

KIRISh

Ushbu bobda akslantirish, ya’ni funktsiya tushunchalari ham kiritiladi. Zamonaviy dasturlash tillarida funktsiyalar juda keng qo’llaniladi. Ular bisga qism dasturlarni alohida agratib hisoblash imkoniyatini beradi. Ba’zi dasturlash tillarida birmuncha ko’p uchraydigan *sinx, logx,* $|x|$ kabi funktsiyalar uchun maxsus bazalar mavjud. Funktsional dasturlash tillarida sodda funktsiyalardan foydalanib, murakkab funktsiyalarni tadqiq qilish uchun biz funktsiyalar kompozitsiyalarini yaxshi bilishimiz kerak bo’ladi. Ushbu bobning amaliy tadbiqi sifatida funktsiyalar kompozitsiyalarini hisoblashni o’rganib chiqamiz.

1.3.1. Chekli to`plamda akslantirish tushunchasi.

Ta’rif 1. Agar biror X to’plamning har bir x elementiga qandaydir qonuniyat bo’yicha yagona $f(x)$ ob’yekt mos qo’yilgan bo’lsa, bu f moslik **funktsiya** deyiladi.

Ta’rif 2. $f \subset \mathrm{A}\times\mathrm{B}$ munosabat **funktsiya** yoki A to‘plamdan B to‘plamga **akslantirish** deyiladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $D_l(f) = A$, $D_r(f) \subseteq \mathrm{B}$,

2) $(x, \mathrm{y}_1) \in f$, $(x, \mathrm{y}_2) \in f$ ekanligidan $y_1 = y_2$ ekanligi kelib chiqsa.

Funktsiya $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ yoki $A \xrightarrow{f} B$ kabi belgilanadi, agar $(x, y) \in f$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$ kabi yoziladi va f funktsiya x elementga y elementni mos qo‘yadi deb gapiriladi. $y \in B$ elementga x elementning **tasviri**, $x \in A$ elementga y ning **asli** deyiladi.

Agar $D_l(f) \subset A$ bo`lsa, f funktsiya **qismiy funktsiya** deyiladi.

Ixtiyoriy funktsiya $f: A \to B$ bu binar munosabat. Shuning uchun teskari munosabat f^{-1} ni qurish mumkin. Agar buning natijasida yana funktsiya hosil bo’lsa, u holda f ga teskarilanuvchi funktsiya deyiladi va teskari funktsiya $f^{-1}: B \to A$ ko’rinishda belgilanadi.

Misol 1. 1) $g = \{(1,2),(2,3),(3,2)\}$ - munosabat funktsiya bo‘ladi.

2) $R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ - munosabat funktsiya bo‘lmaydi.

3) $f = \{(x, x^2 - 2x + 3),\ x \in R\}$ - munosabat funktsiya bo‘ladi va

$y = x^2 - 2x + 3$ ko`rinishda ham yoziladi.

Ta’rif 3. Agar

1) $D_l(f) = D_l(g)$;

2) ixtiyoriy $x \in D_l(f)$ uchun $f(x) = g(x)$ bajarilsa, $f: A \to B$ va $g: C \to D$ akslantirishlarga **teng akslantirishlar** deyiladi.

Teorema 1. $f: A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq A$ lar uchun $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ tenglik o’rinli.

(Birlashmaning obrazi obrazlar birlashmasiga teng.)

Isboti: Aytaylik, $b \in f(X \cup Y)$ bo’lsin. Demak, shunday $a \in X \cup Y$ mavjudki, uning uchun $f(a) = b$. Agar $a \in X$ bo’lsa, u holda $f(a) = b \in f(X)$, bundan esa $b \in f(X) \cup f(Y)$ kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $a \in Y$ ham isbotlanadi. Demak , $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ ekanligi isbotlandi.

Endi $b \in f(X) \cup f(Y)$ bo'lsin. Aniqlik uchun $b \in f(X)$ ni qaraylik, demak, shunday $a \in X$ mavjudki, uning uchun $f(a) = b$. Bundan $a \in X$ va $a \in X \cup Y$ ekanligi, demak, $b \in f(X \cup Y)$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, $b \in f(Y)$ ham isbotlanadi. Demak, $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ ekanligi isbotlandi. $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ va $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ o'rinli bo'lsa, demakki, $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ tenglik o'rinli.

Teorema isbotlandi.

Teorema 2. $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq B$ lar uchun $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ tenglik o'rinli.

(Birlashmaning proobrazi proobrazlar birlashmasiga teng.)

Isboti: $a \in f^{-1}(X \cup Y)$ elementni olaylik, bu $f(a) \in X \cup Y$ ekanini bildiradi, ya'ni $f(a) \in X$ yoki $f(a) \in Y$. Agar $f(a) \in X$ bo'lsa, u holda proobraz ta`rifiga ko'ra $a \in f^{-1}(X)$ bo'ladi, bundan esa $a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek, agar $f(a) \in Y$ bo'lsa, u holda $a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$. Bundan

$$f^{-1}(X \cup Y) \subseteq f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$$

kelib chiqadi.

Endi aksincha qism to'plam bo'lishini ko'rsatamiz.

$a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ bo'lsin, bundan $a \in f^{-1}(X)$ yoki $f(a) \in Y$. Agar $a \in f^{-1}(X)$ bo;lsa, u holda $f(a) \in X$ bo'ladi. Shuningdek, $f(a) \in X \cup Y$ bo'ladi, bundan $a \in f^{-1}(X \cup Y)$ kelib chiqadi. $a \in f^{-1}(Y)$ bo'lgan hol gam shunday yo'l bilan isbotlanadi va $F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y) \subseteq F^{-1}(X \cup Y)$ hosil qilinadi. Bu ikkita isbotlangan qism to'plamlar birlashtirilsa, talab qilingan tenglikka kelamiz.

$$F^{-1}(X \cup Y) = F^{-1}(X) \cup F^{-1}(Y).$$

Teorema isbotlandi.

Teorema 3. $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq A$ lar uchun $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$ tenglik o'rinli.

Isboti: $b \in f(X \cap Y)$ bo'lsin. Obraz ta'rifiga ko'ra, shunday $a \in X \cap Y$ elementlar to'piladiki, ular uchun $f(a) = b$ tenglik o'rinli. $a \in X \cap Y$ ekanligidan $a \in X \cap a \in Y$ kelib chiqadi, demak, $f(a) = b \in f(X)$ va $f(a) = b \in f(Y)$, ya'ni $b \in f(X) \cap f(Y)$. Bulardan talab qilingan tasdiq kelib chiqadi: $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

Teorema isbotlandi.

Misol 2. Teskari tasdiq o'rinli bo'lmasligini misol yordamida ko'ramiz.

$$f(x) = x^2 : R \to \cup R_+ \cup \{0\}$$

akslantirish bo'lsin.

X va Y to'plamlar sifatida $X = [-1;0]$, $Y = [0;1]$ larni ko'raylik. Ravshanki, $f(X) = [0;1]$, $f(Y) = [0;1]$, demak ularning kesishmasi $f(X) \cap f(Y) = [0;1]$. So'ngra $[-1;0] \cap [0;1] = \{0\}$ ekanligidan $f(X \cap Y) = f(\{0\}) = \{0\}$ ni aniqlaymiz. Bu holda qism to'plam bo'lish $f(X) \cap f(Y) \not\subset f(X \cap Y)$ munosabati bajarilmaydi.

Teorema 4. $f : A \to B$ akslantirish va $X, Y \subseteq B$ to'plamlar uchun $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ tenglik o'rinli.

Isboti: $a \in f^{-1}(X \cap Y)$ bo'lsin, ya'ni $f(a) = b \in X \cap Y$, demak, $b \in X \cap b \in Y$, shuning uchun $a \in f^{-1}(X)$ va $a \in f^{-1}(Y)$ bundan $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Demak, $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Endi teskari munosabatni isbotlash uchun $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ ni olamiz, bundan $a \in f^{-1}(X)$ va $a \in f^{-1}(Y)$, demak, $f(a) \in X$ и $f(a) \in Y$, ya'ni $f(a) \in X \cap Y$, shuningdek, $a \in f^{-1}(X \cap Y)$ o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa

$f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)\subseteq f^{-1}(X\cap Y)$. Olingan qism to'plamlar birlashtirilsa, talab qilingan tenglikka kelamiz:

$$F^{-1}(X\cap Y)=F^{-1}(X)\cap F^{-1}(Y).$$

Teorema isbotlandi.

Ta'rif 4. Agar f^{-1} munosabat qismiy funktsiya bo'lsa, ya'ni $\forall x_1,\ x_2\in D_l(f)$ dan olingan $x_1\neq x_2$ uchun $f(x_1)\neq f(x_2)$ bajarilsa, f funktsiyaga **o'zaro bir qiymatli funktsiya** yoki **in'yektiv funktsiya** deyiladi va $f:\mathrm{A}\xrightarrow{1-1}B$ kabi belgilanadi.

Demak, in'yektiv funktsiyada takrorlanuvchi qiymatlar bo'lmaydi. Bundan $f(x_1)=f(x_2)$ dan $x_1=x_2$ kelib chiqadi.

Misol 3. $f(x)=4x+3$ funktsiya $f(x):R\to R$ in'yektiv funktsiya bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi: Faraz qilaylik, $f(x_1)=f(x_2)$ bo'lsin, ya'ni $4x_1+3=4x_2+3$, bundan $4x_1=4x_2$, $x_1=x_2$ kelib chiqadi. Demak, f - in'yektiv funktsiya bo'ladi.

Ta'rif 5. Agar $D_r(f)=\mathrm{B}$ bo'lsa, $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ funktsiya A **ni** B **ga ustiga akslantirish** yoki **syur'yektiv funktsiya** deyiladi va $f:\mathrm{A}\xrightarrow{\text{ustiga}}B$ kabi belgilanadi.

Misol 4. 3-misoldagi $f(x)=4x+3$ funktsiyaning syur'yektivlikka tekshiramiz.

Yechilishi: Aytaylik, $\mathrm{b}\in\mathrm{R}$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, f - syur'yektiv funktsiya bo'lishi uchun $D_r(a)=b$ o'rinli bo'ladigan shunday haqiqiy son $a\in R$ ni topish mumkin. Buning uchun $b=4a+3$ deb olsak, $a=\dfrac{b-3}{4}$ son topiladi. Demak, f - syur'yektiv funktsiya.

Ta'rif 6. Ham in'yektiv, ham syur'yektiv bo`lgan f funktsiya A va B to'plamlarning **biyektiv funktsiyasi** deyiladi va $f: A \longleftrightarrow B$ kabi belgilanadi.

Misol 5. $f(x) = 4x + 3$ funktsiya ham in'yektiv, ham syur'yektiv, demak biyektiv ham bo'ladi.

Umuman olganda, $f(x) = ax + b \ (a \neq 0)$ akslantirishlarning barchasi $f(x): R \to R$ biyektsiya bo'ladi.

Misol 6. $f(x) = \sin x$ tenglik uchun:

a) $f(x): R \to R$ akslantirish in'yektsiya ham, syur'yektsiya ham bo'lmaydi.

b) $f(x): R \to [-1;1]$ akslantirishni olsak, bu syur'yektiv akslantirish bo'ladi, lekin in'yektiv bo'lmaydi.

v) $f(x): [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1;1]$ deb oladigan bo'lsak, bu akslantirish biyektsiya bo'ladi.

Misol 7. $f(x) = x^2$ tenglik uchun:

a) $f(x): R \to R$ akslantirish in'yektiv ham, syur'yektiv ham emas.

b) $f(x): [0;\infty) \to R$ in'yektiv bo'ladi, syur'yektiv emas.

v) $f(x): R \to [0;\infty)$ syur'yektiv bo'ladi, in'yektiv emas.

g) $f(x): [0;\infty) \to [0;\infty)$ biyektiv akslantirish bo'ladi.

Keltirilgan misollardan ko'rinadiki, $f: A \to B_x$ akslantirishlarda nafaqat f amalning tuzilishi, balki A va B to'plamlarning ham tuzilishi muhim rol o'ynaydi..

Ta'rif 7. 1) $f: A \to B$ – biyektiv akslantirish bo'lsin. f akslantirishga **teskari akslantirish** f^{-1} deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirishga aytiladi:

a) $D_l(f^{-1}) = D_r(f) = B$;

b) $D_r(f^{-1}) = D_l(f) = A$;

v) ixtiyoriy $x \in A$ uchun $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

2) $Id_A : \mathrm{A} \longleftrightarrow A$ akslantirish quyidagicha aniqlanadi;

a) $D_l(Id_A) = D_r(Id_A) = A$;

b) ixtiyoriy $x \in A$ uchun $Id_A(x) = x$.

Id_A ga A da **birlik akslantirish** yoki **ayniy akslantirish** deyiladi.

Misol 8. $f_i : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad i = 1, 2, 3,$ funktsiyalarni qaraylik.

1) $f_1(x) = e^x$ funktsiya in’yektiv, lekin syur’yektiv emas.

2) $f_2(x) = x\sin x$ funktsiya in’yektiv emas, lekin syur’yektiv.

3) $f_3(x) = 2x - 1$ funktsiya ham in’yektiv, ham sur’yektiv, demak biyektiv bo‘ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Akslantirish tushunchasiga ta’rif bering.
2. Qismiy funktsiya deb nimaga aytiladi?
3. Birlashmaning obrazi obrazlar birlashmasiga tengligini isbotlang.
4. Birlashmaning proobrazi proobrazlar birlashmasiga teng ekanini isbotlang.
5. In’yektiv funktsiya ta’rifini keltiring. Misol keltiring.
6. Syur’yektiv funktsiyaga ta’rif bering.
7. Biyektiv funktsiyaga ta’rif bering.
8. Ayniy akslantirish deganda nimani tushunasiz?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d} to‘plamlar dekart ko‘paytmasida aniqlangan quyidagicha R munosabatlar funksiya bo‘ladimi? U holda in’yektivlik, syur’yektivlik va biyektivlikka tekshiring:

a) R={(1,a),(1,b),(2,a),(3,d)}

b) R={(1,a),(2,b),(3,a),(4,d)}

c) R={(1,a),(2,c),(3,b),(3,d)}

d) R={(2,a),(1,b),(2,c),(4,d)}

e) R={(3,b),(2,a),(1,c),(4,d)}

f) R={(4,c),(3,b),(3,a),(4,d)}

g) R={(4,a),(1,b),(2,a),(3,c)}

i) R={(3,b),(2,c),(1,a),(4,d)}

2. Agar $f_i(x)$:(-∞;+∞)→(-∞;+∞) berilgan bo’lsa, ularni in’yektivlik, syur’yektivlik, biyektivlikka tekshiring:

a) $f(x)=x^2$	e) $f(x)=lnx$
b) $f(x)=tgx$	f) $f(x)=2x+1$
c) $f(x)=cosx$	g) $f(x)=ctgx$
d) $f(x)=log_a x$	i) $f(x)=2x+1$

3. $A=\{x: x\in \mathrm{R},\quad x\neq 1\}$ to’plam va $f: \mathrm{A}\to \mathrm{A}$ akslantirish $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ formula bilan berilgan bo’lsin. f ni biyektivlikka tekshiring va unga teskari funktsiyani toping.

1.3.2. Akslantirishlar superpozitsiyasi.

Ta'rif 1. $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ va $g:\mathrm{C}\to D$ akslantirishlar berilgan bo`lsin. f va g **akslantirishlar superpozitsiyasi** deb,

1) $D_l(g\circ f)=A$;

2) $D_r(g\circ f)=C$;

3) ixtiyoriy $x\in D_l(g\circ f)$ uchun $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

shartlarni qanoatlantiruvchi $g\circ f:A\to C$ akslantirishga aytiladi.

Akslantirishlar superpozitsiyasi **kompozitsiya** yoki **funktsional ko`paytma** yoki **murakkab funktsiya** deb ham ataladi $g(f(x))$.

Teorema 1. $F\!:A\to B$ biyektiv akslantirish bo`lsin. U holda:

1) F^{-1} ham biyektiv akslantirish bo`ladi;

2) $F\,\mathrm{o}F^{-1}=I_B$;

3) $F^{-1}\,\mathrm{o}F=I_A$;

4) $I_B\,\mathrm{o}F=F$;

5) $F\,\mathrm{o}I_A=F$;

6) $\left(F^{-1}\right)^{-1}=F$.

Isboti: 1). F^{-1} ham biyektiv akslantirish bo`lishini ko`rsatamiz. Aytaylik, $F^{-1}(y_1)=F^{-1}(y_2)=x$, u holda $F(x)=y_1$ va $F(x)=y_2$, lekin ta`rifga ko`ra akslantirish in`yektiv bo`lishi kerak, shuning uchun $y_1=y_2$.

Endi sur`yektivligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, $x \in A$ va $F(x) = y$, u holda teskari funksiya ta`rifiga ko`ra $F^{-1}(y) = x$, ya`ni A to`plamdan olingan ixtiyoriy elementning proobrazi mavjud F^{-1}.

2). Ixtiyoriy $y \in B$ elementni olaylik va $F^{-1}(y) = x$ bo`lsin, u holda $F(x) = y$, ya`ni $F\left(F^{-1}(y)\right) = y$, bundan ixtiyoriy $y \in B$ uchun $F\left(F^{-1}(y)\right) = I_B(y)$, demak, $F \circ F^{-1} = I_B$.

3). 2) – kabi isbotlanadi.

4). $x \in A$ va $F(x) = y \in B$ bo`lsin, u holda $I_B(y) = y$ yoki ixtiyoriy $x \in A$ element uchun $I_B(F(x)) = F(x)$, demak, $I_B \circ F = F$.

5). 4) – kabi isbotlanadi.

6). $D(F) = A$, $V(F) = B$. Bundan $D\left(F^{-1}\right) = B$, $V\left(F^{-1}\right) = A$. Shuningdek, $D\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = A$, $V\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = B$, ya`ni $D\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = D(F)$, $V\left(\left(F^{-1}\right)^{-1}\right) = V(F)$.

$x \in A$ element va $F(x) = y$ berilgan bo`lsin, u holda $F^{-1}(y) = x$ va yana teskari akslantirish ta`rifidan foydalanib, $\left(F^{-1}\right)^{-1}(x) = y$ ni hosil qilamiz, bu degani ixtiyoriy $x \in A$ uchun $\left(F^{-1}\right)^{-1}(x) = F(x)$, shuning uchun $\left(F^{-1}\right)^{-1} = F$.

Teorema isbotlandi.

Teorema 2. f va g akslantirishlar uchun quyidagi shartlar o`rinli:

1) Agar $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ bo‘lsa, u holda $g \circ f : A \to C$

2) Agar $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bo‘lsa, u holda $id_A \circ f = f$, $f \circ id_B = f$.

3) Agar $f : \mathrm{A} \xrightarrow{ni} B$, $g : \mathrm{B} \xrightarrow{ni} C$ bo‘lsa, u holda $f \circ g : \mathrm{A} \xrightarrow{ni} C$.

4) Agar f va g lar in`yektiv akslantirish bo‘lsa, u holda $f \circ g$ ham in`yektiv akslantirish bo‘ladi.
5) Agar $f: A \longleftrightarrow B$, $g: B \longleftrightarrow C$ bo‘lsa, u holda $f \circ g: A \longleftrightarrow C$ bo‘ladi.

Teorema 3. Agar $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: G \to D$ akslantirishlar uchun $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ munosabat o`rinli (superpozitsiyaning assotsiativligi).

Isboti: Ko`rish mumkinki, akslantirishlar kompozitsiyasi binar munosabatlar kompozitsiyasining xususiy holidan iborat. Binar munosabatlar uchun assotsiativlik qonuni bajarilganligi uchun akslantirishlar kompozitsiyasi uchun ham bajariladi.

Misol 1. Ikkita $f: R \to R$, $f(x) = x^2$ va $g: R \to R$, $g(x) = 4x + 3$ funktsiyalar uchun $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ kompozitsiyalarni toping.

Yechilishi: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x+3) = (4x+3)^2 = 16x^2 + 24x + 9;$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2;$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = x^4;$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(4x+3) = 4(4x+3) + 3 = 16x + 15.$$

Agar f akslantirish va $X \subset D_l(f)$ bo‘lsa, u holda $\{f(x):\ x \in X\}$ to‘plam X to‘plamning f akslantirishi natijasida **tasviri** deyiladi va f (X) kabi belgilanadi.

A ni B ga akslantiruvchi barcha funktsiyalar to‘plami B^A bilan belgilanadi. $B^A = \{f:\ f: A \to B\}$.

Ta’rif 2. $f : \mathrm{A}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{B}$ funktsiya A dan B ga *n*- **o‘rinli funktsiya** deyiladi, agar y qiymat n o‘rinli f funktsiyaning (x_1, x_2,...., x_n) argument qiymatidagi qiymati bo‘lsa, va u $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ kabi yoziladi.

Ta’rif 3. $f : \mathrm{A}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{A}$ funktsiya A to‘plamda ***n*** **- o‘rinli algebraik amal** deyiladi.

n=1 bo`lganda, $f$ funktsiyaga **unar amal**, n=2 bo`lganda esa f funktsiyaga **binar amal** deyiladi. $n = 0$ bo‘lganda $f : \mathrm{A}^0 \to \mathrm{A}$ amal {(Ø,*a*)} biror bir $a \in A$ uchun bo‘ladi. Ko‘p hollarda A to‘plamda 0 o‘rinli amal {(Ø,*a*)} ni A to‘plamdagi **konstanta** deb ataladi va ***a*** element bilan ifodalanadi.

Misol 2. **1)** Haqiqiy sonlarni qo‘shish amali 2 o‘rinli, ya‘ni binar amal $+ : R^2 \to R$ bo‘ladi, chunki qo‘shish amali bir juft (*a*, *b*) songa *a*+*b* sonni mos qo‘yadi.
2) R – to‘plamning ixtiyoriy ajratib ko‘rsatilgan elementini, masalan $\sqrt{2}$ ni 0 o‘rinli amal deyish mumkin, ya’ni R da konstantadir.

Ta’rif 4. {0, 1} qiymatlardan ixtiyoriy birini qabul qiladigan funktsiyaga **binar funktsiya** deyiladi.

Ta’rif 5. a) $F_1 : A_1 \to B, F_2 : A_2 \to B$ akslantirishlar berilgan bo`lsin. F_1 va F_2 **akslantirishlar kelishilgan** deyiladi, agarda ixtiyoriy $x \in D(F_1) \cap D(F_2)$ uchun $F_1(x) = F_2(x)$ tenglik bajarilsa.
б) $F_i : A_i \to B$ $(i \in I)$ akslantirishlar oilasi berilgan bo`lsin. $F_i$ $(i \in I)$ **akslantirishlar oilasi kelishilgan** deyiladi, agarda $F_i$ akslantirishlar o`zaro kelishilgan bo`lsa, ya`ni ixtiyoriy $i, j \in I$ va $x \in D(F_i) \cap D(F_j)$ lar uchun $F_i(x) = F_j(x)$ tenglik bajarilsa.

Agar akslantirishlarning $D(F_i)$ aniqlanish sohalari o`zaro kesishmasa, u holda $F_i\ (i\in I)$ akslantirishlar oilasi kelishilgan bo`ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Funktsiya kompozitsiyasi va uning xossalarini keltiring.
2. n – o'rinli funktsiya va *n-o*'rinli algebraik amal tushunchalari farqini ayting.
3. Kelishilgan akslantirish deb nimaga aytiladi?
4. Kelishilgan akslantirishlar oilasi deb nimaga aytiladi?
5. $f: A\to B$, $g: B\to C$, $h: G\to D$ akslantirishlar uchun $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ superpozitsiya amalining assotsiativligini isbotlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyida keltirilgan *f*, *g*: R→R funksiyalar uchun $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$, $g\circ g$ kompozitsiyalar aniqlansin.

1. $f(x)=x^2-2$ va $g(x)=2x^3+5x+1$

2. $f(x)=x^2$ va $g(x)=\begin{cases}1+2x, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa,}\\ -x, & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{agar } x\ge 0 \text{ bo'lsa,}\\ 1-x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases}1+x & \text{agar } x\ge 1 \text{ bo'lsa,}\\ 2x-2 & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.}\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar } x\geq 1 \text{ bo'lsa,} \\ x & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{agar } x<2 \text{ bo'lsa,} \\ 4-x & \text{agar } x\geq 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar } x\leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ e^{-x+1} & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} \cos x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x+1 & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,} \\ -x^2+1 & \text{agar } x\geq -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{agar } x\leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ -x+2 & \text{agar } x>1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{agar } x<-1 \text{ bo'lsa,} \\ \sin x & \text{agar } x\geq -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} |x| & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa,} \\ -(x-1)^2+1 & \text{agar } x\geq 1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{agar } x<-2 \text{ bo'lsa,} \\ x+2 & \text{agar } x\geq -2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{agar } x\leq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x^2+1 & \text{agar } x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ va $g(x)=\begin{cases} \sin x & \text{agar } x<\dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa,} \\ -x+\pi & \text{agar } x\geq \dfrac{\pi}{2} \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1-x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} |x| & \text{agar } x<2 \text{ bo'lsa,} \\ 4-x & \text{agar } x\geq 2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar } x\geq 1 \text{ bo'lsa,} \\ x & \text{agar } x<1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $g(x)=\begin{cases} \cos x & \text{agar } x<0 \text{ bo'lsa,} \\ 2x+1 & \text{agar } x\geq 0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{agar} \quad x\le 1 \text{ bo'lsa,} \\ e^{-x+1} & \text{agar} \quad x>1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{agar} \quad x<-1 \text{ bo'lsa,} \\ -x^2+1 & \text{agar} \quad x\ge -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & \text{agar} \quad x\le 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x & \text{agar} \quad x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{agar} \quad x<-1 \text{ bo'lsa,} \\ \sin x & \text{agar} \quad x\ge -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{agar} \quad x\le 1 \text{ bo'lsa,} \\ -x+2 & \text{agar} \quad x>1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{agar} \quad x<-2 \text{ bo'lsa,} \\ x+2 & \text{agar} \quad x\ge -2 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & \text{agar} \quad x\le 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2+1 & \text{agar} \quad x>0 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases} -x^2 & \text{agar} \quad x<-1 \text{ bo'lsa,} \\ \sin x & \text{agar} \quad x\ge -1 \text{ bo'lsa.} \end{cases}$

1.3.3. Dirixle printsipi

$f:A\to B$ funktsiya A chekli to'plamni B chekli to'plamga akslantirsin. Deylik, A to'plam n ta elementdan iborat bo'lsin: $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

Dirixle printsipi: Agar $|A|>|B|$ bo'lsa, u holda hech bo'lmaganda f ning bitta qiymati bir martadan ortiq uchraydi, ya'ni $a_i\ne a_j$ elementlar juftligi topiladiki, ular uchun $f(a_i)=f(a_j)$ bo'ladi.

Oddiy qilib aytadigan bo'lsak, Dirixle printsipining ma'nosi: 10 ta quyonni 9 katakka har bir katakda bittadan quyon o'tiradigan qilib joylash mumkin emas.

Misol 1. Avtobusda 15 nafar yo'lovchi ketyapti. Ulardan hech bo'lmaganda 2 tasining tug'ilgan kuni bir xil oyda bo'lishi mumkinligini ko'rsating.

Yechilishi: Avtobusdagi odamlar to'plamini A, 12 ta oy nomlarini esa B deb belgilaymiz. $f:A\to B$ funktsiya avtobusdagi har bir kishiga uning tug'ilgan oyini mos qo'ysin. $|A|=15$, $|B|=12$ demak, $|A|>|B|$. Dirixle printsipiga ko'ra, f

funktsiya takrorlanuvchi qiymatga ega. Bundan esa, hech bo'lmaganda 2 ta kishining tug'ilgan kuni bir xil oyda bo'lishi kelib chiqadi.

Misol 2. Agar hech bo'lmaganda 2 ta kishining familiyasi bir xil harfda boshlanib, bir xil harf bilan tugaydigan bo'lsa, telefon

ma'lumotnomasiga yozilgan familiyalarning minimal soni qanday bo'ladi?

Yechilishi: A - ma'lumotnomadagi familiyalar to'plami,

B- o'zbek alifbosi 26 ta harfidan olingan harflar juftligi to'plami. $f: A \to B$ bir xil familiyalarning birinchi va oxirgi harflarini mos qo'yuvchi funktsiya. Masalan, f (Abdullayev)=(a,v).

B to'plam $26 \cdot 26 = 676$ juft harfdan iborat. Dirixle printsipiga ko'ra, agar $|A| > |B| = 676$ bo'lsa, familiyasi bir xil harfda boshlanib, bir xil harf bilan tugaydigan hech bo'lmaganda 2 ta kishi topiladi. Shuning uchun telefon ma'lumotnomasi 676 tadan kam bo'lmagan familiyadan tuzilgan bo'lishi kerak.

1.3.4. To'plamlarning quvvati va kardinal sonlar.

Har qanday A to'plam uchun uning barcha qism to'plamlari to'plami P(A) $=2^A$ mavjud bo'lib, ushbu to'plamlar oilasini tahlil qilish juda mihim ahamiyatga ega.

Teorema 1. n ta elementdan iborat $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami X to'plamda aniqlangan, soni 2^n ta bo'lgan binar funktsiyalar to'plamiga biyektiv bo'ladi.

Teorema 2. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan A to'plamning barcha qism to'plamlaridan iborat to'plam quvvati A to'plam quvvatidan katta bo'ladi.

Isboti: Ushbu teorema A bo'sh to'plam bo'lgan holda ham o'rinli. $A=\varnothing$ bo'sh to'plamning barcha qism to'plamlari $\{\varnothing\}$ ko'rinishda bo'ladi, ya'ni quvvati 1 ga teng, shuning bilan birga $|\varnothing| = 0$.

N natural sonlar to'plamining $M = \{0;1\}$ to'plamiga barcha akslantirishlar to'plamini qaraylik. Bu turdagi har qanday akslantirish har bir natural soniga 0 yoki 1 ni mos qo'yadi va bu moslik cheksiz ketma-ketlikni hosil qiladi: $i_1, i_2, ..i_n, ...,$ bunda $i_n = 0$ yoki 1 bo'ladi, ya'ni cheksiz o'nli kasrni ifodalaydi: $0, i_1, i_2, ..i_n, ...$ Shunday qilib, barcha cheksiz kasrlar to'plami N natural sonlar to'plamining barcha qism to'plamlari quvvatiga teng bo'ladi. N natural sonlar to'plami quvvatini $|N| = \alpha_0$ deb olsak, u holda barcha cheksiz kasrlar to'plamining quvvati 2^{α_0} ga teng bo'ladi.

Ta'rif 1. Agar A to'plamning quvvati N natural sonlar to'plami quvvatidan katta bo'lsa, u holda A to'plam **sanoqsiz to'plam** deyiladi.

Har bir qism to'plam Z ga <y_1, y_2, ... , y_n > binar funktsiyani biyektiv mos qo'yamiz, y_i elementlar quyidagicha aniqlanadi:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_i \in Z \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x_i \notin Z \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Natijada quyidagicha 2^3 ta binar funktsiyalar to'plamiga ega bo'lamiz:

000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111.

Misol. A={1, 2, 3} to'plamning qism to'plamlari to'plami

$$2^A = \{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Cheksiz to'plamlar (masalan to'g'ri chiziq, tekislik, …)ni soniga ko'ra taqqoslashda, ularning elementlari soni cheksiz bo'lganligi sababli bu to'plamlar tarkibining yanada aniqroq baholari zarur bo'ladi. Ma'lum baholar to'plamlarning quvvati va ekvivalentligi tushunchalariga asoslanadi.

Ta'rif 2. A chekli yoki cheksiz to'plamlar oilasidan olingan X va Y to'plamlar uchun $f : X \to Y$ biyektsiya mavjud bo'lsa, u holda X **va** Y **to'plamlar ekvivalent** deyiladi.

Ekvivalentlik munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitivlik xossalariga ega bo'lganligi uchun ham biyektiv munosabat A to'plamlar oilasini ekvivalent elementlar sinfiga ajratadi.

Teorema 3. Agar f funktsiya chekli X to'plamni Y to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lsa, u holda $|X| = n$ va $|Y| = n$ shartlar ekvivalent bo'ladi.

Shunday qilib, quvvat turli chekli ekvivalent to'plamlar uchun umumiy mezon hisoblanadi.

Elementlari soni cheksiz bo'lgan ekvivalent to'plamlar uchun ham bu printsip o'rinli. Cheksiz to'plamlar uchun quvvat tushunchasini aniqlash maqsadida **kardinal son** tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif 3. Cheksiz to'plam elementlari sonini aniqlaydigan simvolga **kardinal son** deyiladi.

Natural qatorning kardinal soni α_0 simvol bilan belgilanadi va **alfa nol** deb o'qiladi.

Ixtiyoriy chekli X to'plam uchun $|X| = n$ o'rinli bo'lsin. U holda, tabiiyki $n < \alpha_0$ taqqoslash o'rinli. Natural qator barcha to'plam ostilar to'plami kardinal sonini α bilan belgilanadi va 1- teoremaga ko'ra $\alpha = 2^{\alpha_0}$.

$\alpha = \alpha_0$ mi yoki $\alpha > \alpha_0$ bo`ladimi?

Aytaylik, $\alpha > \alpha_0$ bo‘lsin. U holda natural sonlar to’plami quvvati uning to‘plam ostilari to‘plami quvvatidan kichik bo’lishi kelib chiqadi.

Bundan quyidagi imkoniyatlarga ega bo‘lamiz.

1. X dan P(X) ga o‘tib yanada quvvatliroq to‘plamlarni qurish;
2. Quvvatlar shkalasini (cheksiz to‘plamlar uchun ham) tuzib chiqish.

Nazorat uchun savollar:

1. Cheksizlik aksiomasini keltiring.
2. T‘oplamning quvvati deganda nimani tushunasiz?
3. Ekvivalent t‘oplam tushunchasini ta’riflang.
4. Kardinal son deb nimaga aytiladi?

1.3.5. Sanoqli va kontinual to‘plamlar.

Tasdiq 1. Musbat juft sonlar to‘plamining quvvati α_0 ga teng.

Isboti: {2, 4, 6, ...} bilan natural sonlar to’plami quvvatlarini taqqoslash uchun juft sonlar to‘plamining elementlarini quyidagicha nomerlab chiqamiz:

$$\begin{array}{cccc} 2, & 4, & 6, & 8,\dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4,\dots \end{array}$$

Bu usul bilan $k = 2n$ biyektsiyani o‘rnatdik, bu erda n – natural son. Demak, musbat juft sonlar to‘plami natural sonlar to’plamining qismi bo‘lsa-da, ularning quvvatlari teng ekan.

Tasdiq 2. Natural sonlar to‘plamining quvvati α_0 ga teng.

Isboti: Natural va butun sonlar to‘plamlari o‘rtasida biyektsiya qurishga urinib ko‘ramiz. Buning uchun butun sonlar qatorini quyidagicha yozib chiqamiz va mos ravishda natural sonlar bilan nomerlaymiz:

$$\begin{array}{ccccc} 0, & -1, & 1, & -2, & 2,\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5,\ldots \end{array}$$

Shunday qilib, butun va natural sonlar o‘rtasida ekvivalentlik munosabati o‘rnatildi, ya’ni $|Z| = \alpha_0$.

Tasdiq 3. Ratsional sonlar to‘plamining quvvati α_0 ga teng.

Isboti: Bilamizki ixtiyoriy q ratsional sonni qisqarmaydigan kasr ko‘rinishida ifodalash mumkin: $q = \frac{m}{n}$, bu erda m va n lar butun sonlar. Ratsional son q ning balandligi deb, $|m| + n$ yigindiga aytiladi. Masalan, 1 balandlikka faqat $\frac{0}{1}$ son ega bo‘ladi, 2 balandlikka $\frac{1}{1}$ va $-\frac{1}{1}$ sonlar, 3 balandlikka $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{2}$ sonlar ega bo‘ladi. Tushunarliki, berilgan balandlikdagi sonlar soni chekli bo‘ladi. Shuning uchun ham barcha ratsional sonlarni balandliklari oshishiga qarab, raqamlab chiqish mumkinki, bunda hatto bir xil balandlikka ega bo‘lgan sonlar ham o‘z raqamlariga ega bo‘lishadi. Natijada natural va ratsional sonlar o‘rtasida biyektsiya o‘rnatiladi.

Ma’lumki, to‘plam sanoqli bo‘lishi uchun u natural sonlar qatoriga biyektiv mos qo‘yilgan bo‘lishi kerak.

Sanoqli to‘plamlarning muhim xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Sanoqli to‘plamning har qanday qism to‘plami yo chekli, yoki sanoqli bo’ladi.

2-xossa. Chekli yoki sanoqlita sanoqli to‘plamlarning yig‘indisi yana sanoqli bo‘ladi.

Aytaylik A_1, A_2, ... – sanoqli to‘plamlar bo‘lsin. A_1, A_2, ... to‘plamlarning barcha elementlarini quyidagicha cheksiz jadval ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\begin{array}{lllll}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\
\multicolumn{5}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

i-qatorda A_i to‘plamning barcha elementlari joylashgan. Ushbu elementlarni dioganal bo‘yicha raqamlab chiqamiz:

$$\begin{tikzcd}
a_{11} \arrow[r] & a_{12} \arrow[dl] & a_{13} \arrow[r] & a_{14} \arrow[dl] & \ldots \\
a_{21} \arrow[d] & a_{22} \arrow[ur] & a_{23} \arrow[dl] & a_{24} & \ldots \\
a_{31} \arrow[ur] & a_{32} \arrow[dl] & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
a_{41} \arrow[d] & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{tikzcd}$$

Shu bilan birga bir nechta to‘plamlarga tegishli bo‘lgan elementlarni faqat bir marta belgilaymiz. Shunda yigindidagi har bir element o‘zining raqamiga ega bo‘ladi va natural sonlar qatori bilan chekli yoki sanoqlita to‘plamlar yig‘indisi o‘rtasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi.

3-xossa. Har qanday cheksiz to‘plam sanoqlita elementga ega bo‘lgan qism to‘plamga ega.

Teorema 1. [0; 1] kesmadagi haqiqiy sonlar to‘plami cheksizdir.

Isboti: Faraz qilaylik, [0; 1] kesmadagi haqiqiy sonlar sanoqli bo‘lsin. U holda bu sonlarni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_1 = 0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}...\alpha_{1n}...$$

$$a_2 = 0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}...\alpha_{2n}...$$

....

$$a_n = 0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}...\alpha_{nn}...$$

....

$b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_n...$ haqiqiy sonni quyidagicha qoida bo‘yicha quramiz. Birinchi nol va vergul qo‘yamiz. Keyin β_i larni quyidagicha tanlaymiz.

$$\beta_i = \begin{cases} 2 \quad \text{agar} \quad \alpha_{ii} = 1 \quad \text{bolsa,} \\ 1 \quad \text{agar} \quad \alpha_{ii} \neq 1 \quad \text{bolsa.} \end{cases}$$

Shu printsipda barcha sonlarni ko‘rib chiqamiz. Natijada biror bir a_i songa teng bo‘lmagan b son hosil bo‘ladi. Ushbu son birinchi sondan hech bo‘lmaganda verguldan keyingi birinchi soni bilan, ikkinchi sondan hech bo‘lmaganda verguldan keyingi ikkinchi son bilan farq qiladi va hokazo. Shunday qilib [0, 1] oraliqdagi sonlar to‘plami sanoqli degan taxminimiz noto‘g‘ri, chunki [0, 1] oraliqda shunday son topiladiki, biz sanoqli deb sanab chiqqan sonlar ichida u yo‘q. Demak [0, 1] oraliqdagi sonlar to‘plami sanoqsiz. Teorema isbotlandi.

Ta'rif. [0; 1] kesmadagi nuqtalar to'plami quvvati **kontinuum** deyiladi va $\hat{C}$ kabi belgilanadi. [0, +∞) oraliq quvvati ham $\hat{C}$ ga teng, chunki : -ln[0, 1]=[0, +∞) biyeksiya o'rinli. Aynan shu funksiya orqali [0, +∞) va (-∞, +∞) oraliqlar o'rtasida biyeksiya o'rnatish mumkin. Demak [0, 1], [0, +∞), (-∞, +∞) oraliqlar ekvivalent.

$[0;1]\times[0;1]$ **kvadrat quvvati kontinuumga teng.**

Isboti: Haqiqatdan, A(x, y) nuqta $[0;1]\times[0;1]$kvadratga tegishli bo'lsin. **x** va **y**larni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$x=0.x_1x_2....$; $y=0,y_1y_2….$ va har bir A(x, y) nuqtaga $a=0,x_1y_1x_2y_2…$ haqiqiy son mos qo'yamiz. Tushunarliki, kvadratning turli xil nuqtalariga turli xil haqiqiy sonlar mos keladi. Teskari moslik ham o'rinli ekanligini Kantor isbotlagan.

Kantorning ushbu g'oyasi kubdagi va ixtiyoriy n-o'lchovli jismdagi nuqtalar to'plamining sanoqsizligi isbotiga kalit beradi.

Teorema 2. Natural sonlar qatorining barcha qism to'plamlari to'plamining quvvati kontinuumga teng.

Misol. [1, 5] kesma quvvatini aniqlash uchun [1;5] kesma bilan [0;1] kesma o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatamiz. $f(x)=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$ funksiya [1;5] oraliqni [0;1] oraliqqa akslantiruvchi biyektiv funksiya

bo'ladi. Shunday qilib, [1;5] kesmaning tartibi [0;1] kesma tartibiga teng, [0;1] kesmaning quvvati esa kontinuumga teng. $|[1;5]|=|[0;1]|=\hat{c}$.

Teorema 3. Haqiqiy sonlar to‘plam sanoqsiz va quvvati 2^{α_0} kontinuumga teng.

Nazorat uchun savollar:

1. Sanoqli va kontinual to‘plamlarni tushuntiring.
2. Sanoqli to‘plamlarning xossalarini keltiring.
3. Natural sonlar to’plamining quvvati nimaga teng?
4. Ratsional sonlar to’plamining quvvati nimaga teng?
5. Ratsional sonlar to‘plamining quvvati α_0 ga tengligini isbotlang.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Sanoqsiz to‘plamlar quvvatini toping:

1. (+4, +∞) oraliq quvvati aniqlansin.
2. (+2, +∞) oraliq quvvati aniqlansin.
3. (+5, +∞) oraliq quvati aniqlansin.
4. (+3, +∞) oraliq quvvati aniqlansin.
5. (-∞, -4] oraliq quvvati aniqlansin.

1.4. TO’PLAMLAR NAZARIYASINING AKSIOMATIK TIZIMI

To’plamlar nazariyasi barcha matematik bilimlar tizimining baquvvat poydevori bo’lib xizmat qiladi. Har bir tadqiqot ob`yektini biror to’plam sifatida tasavvur qilish mumkin. Biroq to’plamlar universumini erkin holda, hech bir shartlarsiz qo’llash ba`zan ziddiyatga olib kelishi mumkin. Ziddiyatlar matematikada **paradoks** deb yuritiladi. To’plamlarga bog’liq bo`lgan 2 ta paradoksni keltiramiz. Bular ingliz matematigi Bertran Artur Uil`yam Rassel (1872 – 1970 yy) va Kantor paradokslari.

Rassel paradoksi. R barcha to'plamlar to'plami bo'lsin va bu to'plamlar o'z-o'zining elementlari bo'lmasin, ya`ni $R = \{x \mid x \notin x\}$. U holda ixtiyoriy x to'plam uchun $x \in R \quad \leftrightarrow \quad x \notin x$. Agar x o'rniga R ni qo'ysak, u holda $R \in R$ bajariladi, faqat va faqat $R \notin R$ da, bu esa ziddiyat.

Kantor paradoksi. *P(A)* – *A* to'plamning barcha qism to'plamlari oilasi va $P(A) \subseteq A$, ya`ni $|P(A)| \le |A|$ bo'lsin. Ammo, boshqa tomondan olib qaraydigan bo'lsak, ixtiyoriy *A* to'plam uchun $|P(A)| \ge |A|$. U holda Kantor – Bernshteyn teoremasiga ko'ra $|P(A)| = |A|$ bo'lishi kerak. Bu esa i**xtiyoriy bo'sh bo'lmagan *A* to'plamning barcha qism to'plamlari to'plamining quvvati *A* to'plamni o'zining quvvatidan katta bo'ladi,** teoremaga zid.

1.4. To'plamlar nazariyasining aksiomatik tizimi 93

Ma`lumki, barcha aksiomatik nazariyalarda avvalo asosiy tushunchalar ta`rifsiz tanlab olinadi va undan keyin bu tushunchalar uchun aksiomalar tuziladi.

To'plamlar nazariyasining asosiy tushunchasi to'plamning o'zidir. To'plam biror ob`yektlarni saralab olish bilan tuziladi, bu ob`yektlar ixtiyoriy tabiatli bo'lishi mumkin. Paradokslarga duch kelmaslik maqsadida to'plamning elementlari tushunchasini birmuncha aniqlashtirish va ba`zi cheklovlar qo'yish mumkin. Masalan, ob`yektlar majmuasini 2 xil turga ajratish mumkin:

1) sinflar;
2) to'plamlar, ya`ni boshqa bir sinfning elementi bo'lgan sinflarlar.

To'plamlar mantiqiy nuqtay nazardan qadam ba qadam quriladi, masalan, "oldin" munosabati qadamni tartiblaydi. Har bir to'plam ma`lum qadamdan keyin quriladi va keyingina foydalanish mumkin bo'ladi.

Bunday tizim nemis matematigi Ernst Fridrix Ferdinand Sermelo (1871-1953 yy) tomonidan 1908 yilda ishlab chiqildi va isroillik matematik Abraxam

Adol`f Frenkel (1891-1965 yy) tomonidan kengaytirildi. Hozirda ***Sermelo – Frenkel aksiomatik tizimi*** (ZF) deb yuritiladi.

ZF tizimi quyidagi aksiomalardan iborat:

1^0. Hajm aksiomasi: To'plam o'zining elementlari bilan to'liq aniqlanadi. Ikkita to'plam teng deyiladi, faqat va faqat ular bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa: $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B.$

2^0. Birlashma (yig'indi) aksiomasi: Har qanday A to'plamning barcha elementlari birlashmasi yana to'plam bo'ladi, ya`ni ixtiyoriy A to'plam uchun A to'plam elementlaridan tuzilgan $\bigcup A$ to'plam mavjud. Agar $\exists A$, u holda $\exists \bigcup A = \{a \mid biror \;\; b \in A \;\; uchun \;\; a \in b\}$.

3^0. Daraja (barcha qism to'plamlar to'plami) aksiomasi: Ixtiyoriy A to'plamning barcha qism to'plamlari jamlanmasi yana to'plam hosil qiladi. $\exists A$, u holda $\exists P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

4^0. O'rniga qo'yish (almashtirish) aksiomasi: A da aniqlangan har bir A to'plam va *f* funktsiya uchun $x \in A$ bo'lganda $f(x)$ ob`yektlarni saqlovchi to'plam mavjud: $\exists B = \{y \mid x \in A \;\; va \;\; y = f(x)\}$.

$5^{0.}$ Regulyarlik aksiomasi: agar A to'plamdagi har bir to'plam minimal elementga ega bo'lsa, u holda A to'plamga **regulyar to'plam** deyiladi.

Har qanday bo'sh bo'lmagan A to'plam $a \cap A = \varnothing$ bo'lgan $a \in A$ elementga ega va bu element minimaldir.

Bu aksiomani boshqacha talqin qilish ham mumkin: Cheksiz kamayuvchi to'plamlar ketma-ketligi $a_1 \supseteq a_2 \supseteq ...$ mavjud emas.

6^0. Cheksizlik aksiomasi: Hech bo'lmaganda bitta cheksiz to'plam natural sonlar qatori mavjud, ya`ni $\exists N = \{0;1;2;...;n;...\}$, bunda $0 \neq \varnothing, \;\; n+1 = n \cup \{n\}$.

7^0. Ajratish aksiomasi: ixtiyoriy $a \in A$ da *F(x)* tasdiq yo rost, yoki yolg'on bo'lgan ixtiyoriy A to'plam va F xossa berilgan bo'lsin. U holda A to'plamning F

rost bo'lgan elementlaridan tashkil topgan $\exists B = \{a \mid a \in A$ va $F(a) = 1\}$ to'plam mavjud.

Aksioma nomlanishi shuni bildiradiki, biz *A* to'plamning barcha elementlari orasidan *F(x)* ni qanoatlantiruvchi $a \in A$ elementlarni ajratyapmiz.

Ba`zan ajratish aksiomasi o'rniga aksiomalar tizimiga quyidagi ikkita aksioma qo'shiladi:

1. Bo'sh to'plamning mavjudligi aksiomasi $\exists\varnothing$.
2. To'plamlar juftligining mavjudligi aksiomasi: agar $\exists A$ va $\exists B$, u holda $\exists\{A, B\}$.

Ushbu ikkita aksiomani keltirilgan 7 ta aksiomadan oson keltirib chiqarish mumkin. Masalan, $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$. Cheksizlik aksiomasiga asosan biror bir *A* to'plam berilgan bo'lsin. U holda $\forall x(x \neq x \to x \in A\}$ va ajratish aksiomasiga ko'ra $\exists\varnothing = \{x \mid x \neq x, x \in A\}$.

To'plamlar nazariyasining aksiomalar tizimi to'liq bo'lishi, ya`ni barcha ma`lum matematik mulohazalarni qamrab olishi uchun ZF aksiomalar tizimiga bir-biriga raqib bo'lgan ikkita aksiomadan birini kiritish zarur. Bular AC (*axiom of choice*) **tanlash aksiomasi** va AD (*axiom of determinateness*) **ixchamlash aksiomasi**dir. Tanlash aksiomasi qo'shilgan ZF aksiomalar tizimiga **ZFC aksiomalar tizimi** deyiladi.

Tanlash aksiomasi 1904 yilda Sermelo tomonidan taklif qilingan.

Aytaylik, har bir $x \in X$ uchun $A_x \neq \varnothing$ to'plam berilgan bo'lsin. A_x to'plamdan qandaydir $y \in A_x$ elementni tanlab, barcha $x \in X$ uchun $f(x) \in A_x$ funktsiyani hosil qilamiz, bunda $f(x) = y$ bo'ladi. Bu **tanlash funktsiyasi** deyiladi.

Tanlash aksiomasi. Bo'sh bo'lmagan har qanday to'plamlar oilasi A_x uchun tanlash funktsiyasi mavjud, ya`ni $\forall A_x \neq \varnothing \ \exists f : P(A_x) \to A_x$, bunda $\forall X \subseteq A_x, X \neq \varnothing$ uchun $f(X) \in X$.

Ixchamlash aksiomasini 1962 yilda Miychelskiy va Gyugo Dionisiy Shteyngauz (1887-1972 yy)lar taklif qilishgan.

Ixchamlash aksiomasi. Har qanday $A \subseteq I$ to'plam ixchamlangan bo'ladi. Bu yerda I to'plam **Ber fazosi** (natural sonlarning barcha cheksiz ketma-ketliklari to'plami) deyiladi. Rene Lui Ber (1874-1932 yy) frantsiz matemati.

Nazorat uchun savollar:

1. Paradoks nima?
2. Rassel paradoksini tushuntiring.
3. Kantor paradoksini ayting.
4. Hajm aksiomasi qanday ta'riflanadi?
5. Birlashma (yig'indi) aksiomasini keltiring.
6. Daraja (barcha qism to'plamlar to'plami) aksiomasi.
7. O'rniga qo'yish (almashtirish) aksiomasini ayting.
8. Regulyarlik aksiomasi qanday ta'riflanadi?
9. Cheksizlik aksiomasini keltiring.
10. Ajratish aksiomasini keltiring.
11. To'plamlar nazariyasining aksiomatik tizimi asoschilarini ayting.

II BOB.

KOMBINATORIKA

KIRISh

Kombinatorika – diskret matematikaning bir bo‘limi bo‘lib, u ehtimollar nazariyasi, matematik mantiq, sonlar nazariyasi, hisoblash texnikasi va kibernetika sohalarida qo‘llanilgani uchun muhim ahamiyatga ega.

Insoniyat o`z faoliyati davomida ko‘p marotaba ayrim predmetlarni barcha joylashtirish usullari sonini sanab chiqish yoki biror bir harakatni amalga oshirishdagi barcha mavjud usullarni aniqlash kabi masalalarga duch keladi.

1) 26 kishini kassada navbatga necha xil usulda joylashtirish mumkin?

2) Xokkey bo‘yicha olimpiya birinchiligida necha xil usulda oltin, kumush va bronza medallarini taqsimlash mumkin.

Bunday tipdagi masalalarga **kombinatorika masalalari** deyiladi.

2.1. Kombinatorikaning asosiy masalalari.

Kombinatorika masalalari oson degan tushuncha hozirgi kunda eskirdi. Kombinatorika masalalari soni va turi tez sur`atlarda o`smoqda. Ko`pgina amaliy masalalar bevosita yoki bilvosita kombinatorika masalalariga keltirilib yechiladi.

Hozirgi kunda kombinatorika usullaridan foydalanib yechiladigan zamonaviy masalalarga quyidagi 5 turdagi masalalar kiradi:

1. Joylashtirish masalalari – tekislikda predmetlarni joy-joyiga qo`yish;
2. To`ldirish va qamrab olish masalalari – masalan, berilgan fazoviy shakllarni berilgan shakl va o`lchamdagi eng kam sonli jismlar bilan to`ldirish haqidagi masala;
3. Marshrutlar haqidagi masala – mukammal reja masalasi, masalan, eng qisqa yo`lni topish masalasi;

4. Graflar nazariyasining kombinatorik masalalari – tarmoqlarni rejalashtirish masalasi: transport yoki elektr tarmoqlari masalalari, grafni bo`yash haqidagi masala;
5. Ro`yhatga olish masalasi – biror qoidani kuzatish uchun berilgan elementlar naborini tashkil etuvchi predmetlar sonini topish masalari kabi.

Kombinatorika masalalarini yechishda diskret to`plam tadqiq qilinadi, ya`ni bu to`plam alohida ajratilgan elementlardan tashkil topgan deb

qaraladi. Ko`p hollarda bu top`lamlar chekli bo`ladi, lekin elementlar soni cheksiz bo`lgan to`plamlar inkor qilinmaydi.

2.2. Guruhlash, joylashtirish va o‘rin almashtirishlar.

Kombinatorika masalalarini yechish asosiy ikki turga bo`linadi:

a) qism to`plamlarni tanlashga ko`ra;
b) elementlar tartibiga ko`ra.

Qism to`plamlarni tanlash usuli tanlanma tushunchasi bilan bog`liq.

Ta`rif 1.** $n$ elementli $A_n$ to`plamdan k elementli qism to`plam ajratib olish $(n,k)-$tanlanma** deyiladi, bunda k - **tanlanma hajmi** deyiladi.

Ajratilgan qism to‘plamning har bir elementi bilan 1 dan ***n*** gacha bo`lgan sonlar o`rtasida bir qiymatli moslik o`rnatilgan bo‘lsa, to‘plam **tartiblangan tanlanma**, aksincha tartiblanmagan deyiladi.

Agar to‘plam elementlaridan biror bir ro‘yxat tuzib, keyin har bir elementga ro‘yxatda turgan joy raqami mos qo‘yilsa, har qanday chekli to‘plamni tartiblash mumkin. Bundan ko`rinadiki, bittadan ortiq elementi bo`lgan to‘plamni bir nechta usul bilan tartiblash mumkin. Agar tartiblangan to`plamlar elementlari bilan farq qilsa, yoki ularning tartibi bilan farq qilsa, ular turlicha deb hisoblanadi.

Ta`rif 2.** Agar tanlangan qism to`plamda elementlar tartibi ahamiyatsiz bo`lsa, u holda tanlanmalarga $(n,k)-$guruhlash** deyiladi va

C_n^k ko`rinishida belgilanadi. C – inglizcha **"combination", ya`ni "guruhlash"** so`zining bosh harfidan olingan.

Tanlanmalarda elementlar takrorlanishi va takrorlanmasligi mumkin.

**Ta`rif 3.** Elementlari takrorlanuvchi tartiblanmagan $(n,k)-$tanlanmaga $n$ elementdan $k$ tadan **takrorlanuvchi guruhlash** deyiladi va $\tilde{C}_n^k$ ko`rinishida belgilanadi.

**Ta`rif 4.** Elementlari takrorlanuvchi tartiblangan $(n,k)-$tanlanma $n$ elementdan $k$ tadan **takrorlanuvchi joylashtirish** deyiladi va $\tilde{A}_n^k$ kabi belgilanadi. A inglizcha **"arrangement" – "tartibga keltirish"** so`zining bosh harfidan olingan.

Ta`rif 5.** Agar tartiblangan tanlanmalarda elementlar o`zaro turlicha bo`lsa, u holda **takrorlanmaydigan joylashtirish deyiladi va A_n^k kabi belgilanadi.

Ta`rif 6.** $n$ tadan $n$ ta tartiblangan tanlanmaga **o`rin almashtirish deyiladi va P_n kabi belgilanadi. O`rin almashtirish joylashtirishning xususiy xoli hisoblanadi.

P inglizcha **"permutation" – "o`rin almashtirish"** so`zining bosh harfidan olingan.

Misol. $A_3=\{m,n,l\}$ to`plamning 3 ta elementdan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan, takrorlanuvchi va takrorlanmaydigan tanlanmalarini ko`rsating.

1) $A_3^2 = \{\{m;n\},\{m;l\},\{n;l\},\{n;m\},\{l;m\},\{l;n\}\}$=6 ta takrorlanmaydigan joylashtirish;

2) $\tilde{A}_3^2 = \{\{m;m\},\{m;n\},\{m;l\},\{n;n\},\{n;l\},\{n;m\},\{l;m\},\{l;n\},\{l;l\}\} = 9$ ta takrorlanadigan joylashtirish;

3) $C_3^2 = \{\{m;n\},\{m;l\},\{n;l\}\} = 3$ ta takrorlanmaydigan guruhlash;

4) $\tilde{C}_3^2 = \{\{m;m\},\{m;n\},\{m;l\},\{n;n\},\{n;l\},\{l;l\}\} = 6$ ta takrorlanuvchi guruhlashlar mavjud.

Nazorat uchun savollar:

1. Kombinatorika usullaridan foydalanib yechiladigan zamonaviy masalalarga qanday masalalar kiradi?
2. Kombinatorika masalalarini yechish asosan nechta turga bo`linadi va ular nimalardan iborat?
3. Tanlanma deb nimaga aytiladi?
4. Tartiblangan to‘plam deb nimaga aytiladi?
5. Tartiblangan va tartiblanmagan to’plamlarning farqi nimada?
6. O’rin almashtirish ta’rifini ayting.
7. Joylashtirish deb nimaga aytiladi?
8. Guruhlashga ta’rif bering.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. {4, 5, 6} to`plamning 3 ta elementidan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan, takrorlanuvchi va takrorlanmaydigan tanlanmalarini tuzing.

2. {0, 1, 2, 3) to`plamning 4 ta elementdan 2 tadan barcha tartiblangan va tartiblanmagan tanlanmalarini ko`rsating.

3. (2, 3, 4, 5) to`plamning 4 ta elementdan 3 tadan barcha takrorlanuvchi va takrorlanmaydigan tanlanmalarini ko`rsating.

2.3. KOMBINATORIKANING ASOSIY QOIDALARI

Kombinatorikaning asosiy masalalaridan yana biri, bu turli shartlarga ko`ra chekli to'plamda elementlar sonini aniqlash masalasidir.

Oson ko'ringan to'plam quvvatini topish masalasiga ko'p hollarda javob berishda taraddudlanib qolamiz. Biz bu savolga I bobning 1.1.10. va 1.3.3. mavzularida to'xtalganmiz. Bu bobda esa to'plam elementlari sonini topish kombinatorikaning ikkita yangi printsipi: yig'indi va ko'paytma qoidalari asosida amalga oshiriladi.

2.3.1. Yig`indi qoidasi.

**Ta`rif.** Agar $S$ to`plamdan A qism to`plamni $n$ usul bilan tanlash mumkin bo`lsa, undan farqli boshqa B qism to`plamni m usulda tanlash

mumkin bo`lsa va bunda $A$ va $B$ larni bir vaqtda tanlash mumkin bo`lmasa, u holda S to`plamdan $A \cup B$ tanlanmani $n+m$ usulda olish mumkin.

Agar $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar **kesishmaydigan to'plamlar** deyiladi.

Xususiy holda, agar barcha $i, j = 1,2,...,k,\ i \neq j$ lar uchun $A_i \cap A_j = \varnothing$ bo'lsa, u holda $S = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ to'plam S to'plamning **o'zaro kesishmaydigan qism to'plamlari** yoki oddiygina qilib **bo'laklari** deyiladi. Demak, yig'indi qoidasida A va B lar S to'plamning bo'laklaridir.

Misol. 219-12 guruh talabalari 16 nafar yigit va 8 nafar qizlardan iborat bo'lib, ular orasidan bir kishini ajratib olish kerak bo`lsa, ularning soni qo'shiladi va 16+8=24 talaba orasidan tanlab olinadi.

2.3.2. Ko`paytma qoidasi.

**Ta`rif.** Agar $S$ to`plamdan A tanlanmani n usulda va har bir n usulda mos B tanlanmani m usulda amalgam oshirish mumkin bo`lsa, u holda $A$ va $B$ tanlanmani ko`rsatilgan tartibda $n\cdot m$ usulda amalga oshirish mumkin.

To'plamlar nazariyasi nuqtai nazaridan qaraydigan bo'lsak, bu qoida to'plamlarning Dekart ko'paytmasi tushunchasiga mos keladi.

Misol. "Zukhrotravel" turistik kompaniyasi "Xiva – Chirchiq" yo`nalishida sayohat uyushtirmoqchi bo`lsa, necha xil usulda sayohat smetasini ishlab chiqish mumkin.

Xivadan Chirchiqqa to`g`ridan to`g`ri jamoat transporti yo`q, shuning uchun "Xiva – Toshkent – Chirchiq" yo'nalishi bo'yicha harakatlanishga to`g`ri keladi.

Xivadan Toshkentga samolyo't, avtobus yoki poyezdda yetib borish mumkin, demak, 3 xil usuldan birini tanlash mumkin;

Toshkentdan Chirchiqqa esa avtobus yoki poyezdda borish mumkin, ya`ni 2 xil tanlanma mavjud.

"Xiva – Chirchiq" sayohatini $3\cdot 2=6$ xil usulda tashkil qilish mumkin.

2.3.3. Ko`paytma qoidasini umumlashtirish.

Ta`rif. Aytaylik birin-ketin k ta harakatni amalga oshirish kerak bo‘lsin. Agar birinchi harakatni n_1 usulda, ikkinchi harakatni n_2 usulda, va hokazo k-harakatni n_k usulda amalga oshirish mumkin bo‘lsa, u holda barcha k ta harakat $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ usulda amalga oshiriladi.

Misol 1. Ikkinchi bosqich talabalari III semestrda 12 ta fanni o`rganishadi. Seshanba kuniga 3 ta turli fanni nechta usulda dars jadvaliga joylash mumkin?

Bu misolda 12 ta fanni takrorlamasdan 3 tasini joylashtirish kerak. Buning uchun birinchi fanni 12 usulda, ikkinchi fanni 11 usulda va uchinchi fanni 10 ta usulda tanlash mumkin. Ko`paytirish qoidasiga asosan $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Demak, 3 ta turli fanni 1320 usulda joylash mumkin ekan.

Misol 2. Diskret matematika fanidan talabalar o`rtasida bo`ladigan olimpiadaning mamlakat bosqichida 16 nafar talaba qatnashmoqda. Necha xil usulda I, II va III o`rinlar taqsimlanishi mumkin?

Yechilishi: I o`rinni 16 talabadan biri egallashi mumkin. I o`rin sohibi aniqlangandan keyin, II o`rinni qolgan 15 talabadan biri egallaydi va nihoyat III o`rin qolgan 14 talabadan biriga nasib qiladi. Demak I, II va III o`rin g`oliblarini $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ xil usulda aniqlash mumkin.

Misol 3. 5 soniga bo`linadigan 4 xonali sonlar nechta?

Yechilishi: Masalada takrorlanuvchi joylashtirish haqida so`z bormoqda. Birinchi xonaga $Z = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ to`plamning 10 ta elementidan bittasini tanlash mumkin, lekin 0 ni birinchi xonaga qo`yish mumkin emas, aks holda son 3 xonali bo`lib qoladi. Bo`linish belgisiga ko`ra son 5 ga bo`linishi uchun 0 yoki 5 bilan tugashi kerak.

Demak, 1- xona raqami uchun 9 ta tanlash mavjud;

2- va 3- xona raqamlari uchun esa 10 ta tanlash usuli bor;

4- xona, ya`ni oxirgi raqam uchun 0 yoki 5 raqamlari bo`lib, 2 ta tanlash mavjud. U holda ko`paytirish qoidasidan

foydalansak, $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$ ta 5 ga bo`linadigan 4 xonali son borligini aniqlaymiz.

Agar biror *m* murakkab son berilgan bo’lsa, uning bo‘luvchilar sonini topish uchun oldin tub sonlar ko’paytmasi shakliga keltiriladi:

$$m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

bunda $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – tub sonlar, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ daraja ko’rsatkichlari bo’lib, *m* murakkab sonning bo‘luvchilari soni

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$$

ga teng bo’ladi.

Misol. 48 soning bo’luvchilari sonini topish uchun $48 = 2^4 \cdot 3$ ni topamiz.

U holda 48 ning bo‘luvchilari soni $(4+1) \cdot (1+1) = 5 \cdot 2 = 10$ ekanligi topiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Kombinatorikaning 1-qoidasini keltiring.
2. Kombinatorikaning 2-qoidasini keltiring.
3. Ko’paytmaning umumlashgan qoidasini ayting.
4. Tub va murakkab son deb nimaga aytiladi?
5. Berilgan sonning bo‘luvchilari soni qanday topiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Qandolat do'konida kun oxiriga kelib bir nechta pishiriq qoldi: 4 ta vaflili, 3 ta shakoladli va 1 ta mevali. Xaridor pishiriqni nechta usulda tanlashi mumkin?

2. Musobaqada qatnashish uchun universitetning 8 nafar yigit, 6 nafar qizdan iborat tennis komandasidan juftlik nechta usulda ajratiladi?

3. Yengil avtomobillarning davlat belgisi 3 ta raqam va o'zbek alifbosining 3 ta harfidan iborat. Raqam va harflar ixtiyoriy ketma-ketlikda bo'lishi mumkin deb hisoblasak, DAN idorasi nechta turli xil avtomobil raqamini berishi mumkin?

4. Quyida berilgan sonlarning nechta turli bo'luvchilari bor?

a) 635016;	b) 2474;	c) 17645;	d) 30599;
e) 2520;	f) 5480;	g) 12600;	k) 12600;

2.4. O‘RIN ALMASHTIRISH, JOYLASHTIRISH va GURUHLASHLARNI HISOBLASH FORMULALARI

2.4.1. Takrorlanmaydigan joylashtirishlar

Avvalo barcha mumkin bo`lgan $A_n^k$ joylashtirishlarni topib olamiz. Bu masalani yechish uchun ko`paytma qoidasidan foydalanamiz.

n ta elementi bo`lgan $S$ to‘plamda birinchi elementni tanlash uchun $n$ ta imkoniyat bor, ikkinchi elementni tanlash uchun esa $n-1$ ta imkoniyat qoladi. Joylashtirish takrorlanmaydigan bo`lgani uchun tanlab olingan element keyingi tanlanmalarda ishtirok etmaydi. Shuning uchun k- elementni tanlash uchun $n-(k-1)=n-k+1$ imkoniyat qoladi. U holda barcha takrorlanmaydigan joylashtirishlar soni:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

ga teng bo`ladi.

Bu formulani boshqacha ko`rinishda yozish mumkin:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) =$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Bu yerda **“!”** belgisi **faktorial** deb o`qiladi.

1 dan n gacha bo`lgan barcha natural sonlar ko`paytmasi $n!$ ga teng. Faktorialni hisoblashda 0!=1 va 1!=1 deb qabul qilingan.

Teorema. n elementga ega bo`lgan $S$ to`plamning k elementli tartiblangan takrorlanmaydigan qism to`plamlari soni

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ga teng.

Misol 1. 7 kishidan iborat nazorat guruhini 4 nafar a`zosi bo`lgan nechta kichik guruhlarga ajratish mumkin?

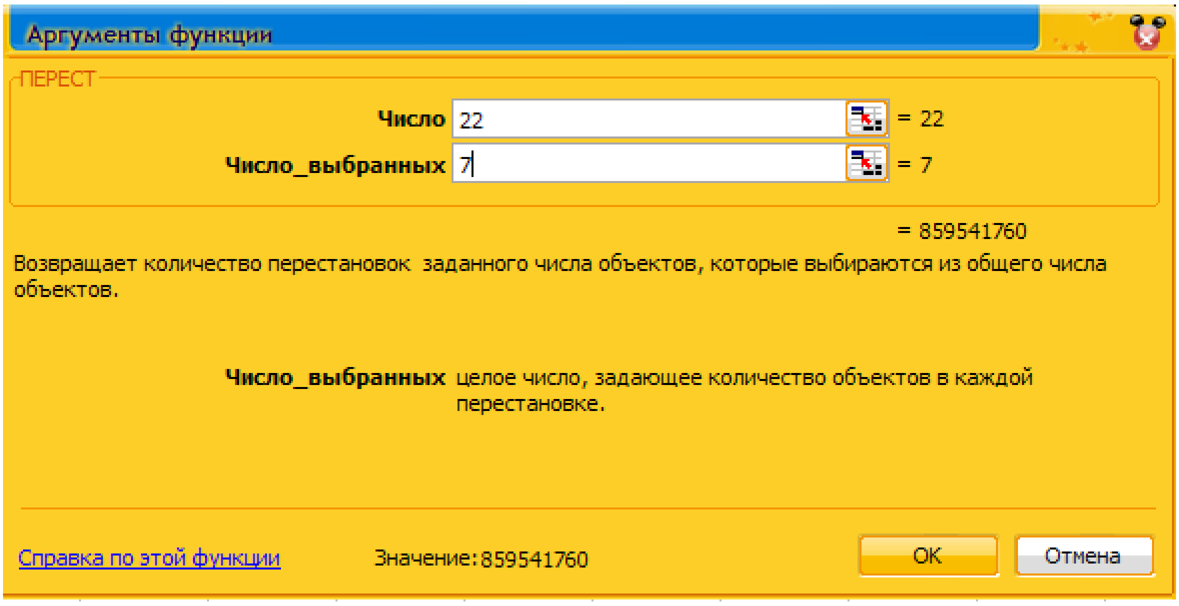
Izlanayotgan usullar soni 7 ta elementdan 4 tadan joylashtirishlar soniga teng, ya`ni

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{3!} = 840$$

Misol 2. Talaba 3 ta imtixonni bir hafta davomida topshirishi kerak. Bu harakatni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Javob: $A_6^3 = 120$

Shu o‘rinda eslatib o‘tamiz, tadqiqotlarda joylashtirishlar sonini hisoblashga to‘g‘ri kelsa, unda Excel dasturlar paketidagi **ПЕРЕСТ** komandasidan foydalanish mumkin, masalan A_{22}^{7}=859541760 ni hisoblang:



2.4.2. Berilgan to‘plamning o‘rin almashtirishlari soni.

Avval aytganimizdek, o`rin almashtirish joylashtirishning xususiy xolidan iborat, shuning uchun ham o`rin almashtirishni n ta elementdan n dan joylashtirish deb qarash mumkin:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

Bu son n elementli qism to’plamni tartiblash usullari soniga teng bo’ladi.

Misol 1. 2.1. paragrafdagi 26 kishini kassada navbatga necha xil usulda joylashtirish mumkin degan savolga endi javob berish mumkin: $P_n = 26!$

Misol 2. Uchta elementdan iborat A={a, b, c} to‘plamning elementlaridan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni 6 ga teng:

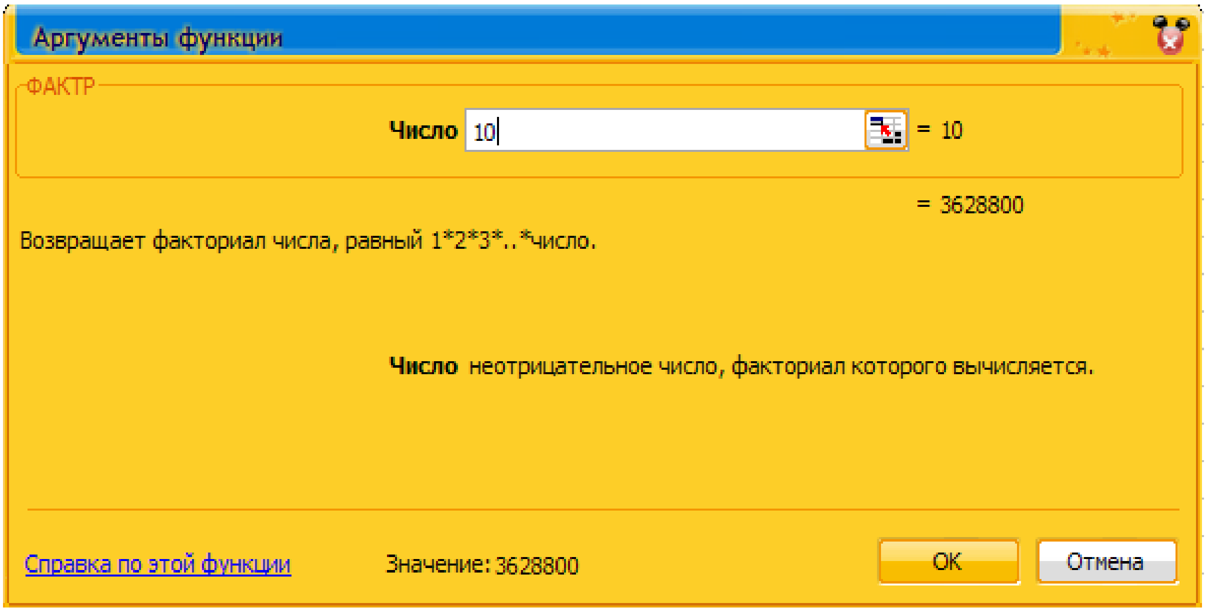
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Teorema. n elementga ega bo`lgan $S$ to`plamning barcha o`rin almashtirishlari soni $P_n = n!$ ga teng.

Misol 3. Javonga 5 ta kitobni necha xil usulda joylashtirish mumkin.

$$P_5 = 5! = 120$$

Tadqiqotlarda o'rin almashtirishlarni hisoblashga to'g'ri kelsa, unda Excel dasturlar paketidagi **ФАКТР** komandasidan foydalanish mumkin, masalan 10! ni hisoblash uchun quyidagicha ish tutiladi:



Misol 4. {1, 2, 3, ... , 2n} to'plam elementlarini juft sonlari juft o'rinlarda keladigan qilib necha xil usulda tartiblashtirish mumkin?

Yechilishi:

Juft sonlarni juft nomerli o'rinlarga (bunday joylar n ta) $n!$ ta usulda qo'yib chiqish mumkin, bu usullarning har biriga toq sonlarni toq nomerli o'rinlarga $n!$ ta usulda qo‘yib chiqish mos keladi. Shuning uchun ham ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra barcha o‘rniga qo‘yishlar soni

$$n!\cdot n! = (n!)^2$$

ga teng bo‘ladi.

Misol 5. n ta elementdan berilgan ikkita elementi yonma-yon turmaydigan nechta o‘rin almashtirish bajarish mumkin.

Yechilishi:

a va b elementlar berilgan bo‘lsin. Bu elementlar yonma-yon turgan o‘rin almashtirishlar sonini aniqlaymiz.

Birinchi hol a element b elementdan oldin kelishi mumkin, bunda a birinchi o‘rinda, ikkinchi o‘rinda, va hokazo (n-1)- o‘rinda turishi mumkin.
Ikkinchi hol b element a elementdan oldin kelishi mumkin, bunday holatlar ham (n-1) ta bo‘ladi. Shunday qilib, a va b elementlar yonma-yon keladigan holatlar soni $2\cdot(n-1)$ ta bo‘ladi. Bu usullarning har biriga qolgan (n-2) ta elementning (n-2)! ta o‘rin almashtirishi mos keladi. Demak, a va b elementlar yonma - yon keladigan barcha o‘rin

almashtirishlar soni $2\cdot(n-1)\cdot(n-2)! = 2(n-1)!$ ta bo‘ladi. Shuning uchun ham yonma-yon turmaydigan o‘rin almashtirishlar soni

$$n! - 2(n-1)! = (n-1)!\cdot(n-2)$$

ga teng bo`ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Biror bir natural sonning bo‘luvchilari soni qanday topiladi?
2. O’rin almashtirish deganda nimani tushunasiz?

3. O‘rin almashtirishni Excel dasturlar paketidan foydalanib hisoblash qanday amalga oshiriladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Ifodaning qiymatini toping:

a) $\frac{14!}{12!}$; b) $\frac{10!}{4!\cdot 6!}$; c) $\frac{17!-16\cdot 16!-15\cdot 15!}{15!}$ d) $\frac{(m+3)!}{m!}$

2. Kasrni qisqartiring:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$; b) $\frac{(n-2)!}{n!}$; c) $\frac{(n-3)!}{(n-1)!}$ d) $\frac{2n(2n-1)}{2n!}$, $n\in N$.

3. 36 ta karta aralashtirilganda necha xil variant mavjud?

4. Stipendiya uchun 5 ta sardor kassaga necha xil usulda navbatga turishlari mumkin?

2.4.3. Takrorlanuvchi joylashtirishlar.

n ta elementi bo`lgan $S$ to‘plamda birinchi elementni tanlash uchun $n$ ta imkoniyat bor, joylashtirish takrorlanuvchi bo`lgani uchun qolgan ixtiyoriy element uchun ham n ta imkoniyat qoladi. Ko`paytirish qoidasiga ko`ra barcha takrorlanadigan joylashtirishlar soni quyidagiga teng bo`ladi:

$$\tilde{A}_n^k=\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{k\ ta}=n^k$$

2.4.4. Takrorlanmaydigan guruhlashlar.

Bizga tartiblanmagan takrorlanmaydigan n ta elementi bo`lgan $S$ to‘plam berilgan bo`lsin. C_n^k bilan A_n^k ni taqqoslaymiz. Bilamizki, k ta elementni $k!$ ta usulda tartiblash mumkin, ya` ni

$$k!\cdot C_n^k = A_n^k$$

bo`ladi. Bundan $$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

kelib chiqadi.

Misol 1. Har uchtasi bir to’g’ri chiziqda yotmagan n ta nuqta berilgan. Nuqtalarni ikkitalab tutashtirish natijasida nechta kesma o’tkazish mumkin?

Yechilishi: masala shartiga ko’ra chizmada qavariq n burchak hosil bo’ladi. U holda 1-nuqta (n-1) ta nuqta bilan, 2-nuqta (n-2) ta nuqta bilan va h.k., (n-1) – nuqta 1 ta nuqta bilan tutashtiriladi/ Bunda hosil bo’lgan to’g’ri chiziqlar soni

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+2+1=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}=C_n^2$$

ga teng bo’ladi.

Misol 2. Restoranida 7 ta asosiy taomdan 3 tasini tanlash imkoniyati berilsa, nechta usulda buyurtma qilish mumkin?

Yechilishi: Bu misolda takrorlanmaydigan 7 ta elementdan 3 tadan guruhlashni topish kerak:

$$C_7^3=\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=35.$$

Misol 3. Sportloto lotareya o'yinida 36 ta natural sondan 6 tasini topgan kishi asosiy yutuqqa ega bo'ladi. Asosiy yutuqni olish imkoniyati qanday?

Yechilishi: Yutuq raqamlar oltitaligi 36 tadan 6 ta takrorlanmaydigan guruhlashga teng:

$$C_{36}^{6}=\frac{36!}{(36-6)!\cdot 6!}=\frac{36!}{30!\cdot 6!}=\frac{31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=1947\,792.$$

Misolning javobidan ko'rinadiki, asosiy yutiqni olish imkoniyati judayam kam, ya'ni 1 947 792 tadan 1 taga teng.

5, 4, va 3 ta raqamni topgan kishilarga ham yutuq beriladi, lekin bu yutuq shi kishilar o'rtasida teng taqsimlanadi. Bu holda 2 xil guruhlash mavjud, biri C_6^3 omadli tanlov va ikkinchisi C_{30}^3 omadsiz tanlov. U holda 3 ta raqamni topgan yutuq egalari imkoniyati:

$$C_{30}^{3}\cdot C_{6}^{3}=\frac{30!}{27!\cdot 3!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}=\frac{28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 4\cdot 5=81\,200.$$

Yutuqli bo'lish ehtimoli $\frac{81200}{1947792}\approx 0.042$ ga teng.

Teorema 1. n ta elementi bo`lgan S to'plamning barcha tartiblanmagan k elementli qism to'plamlari soni

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ga teng.

Ushbu teoremani umumlashtiramiz:

n ta elementi bo`lgan $S$ to'plamni $k$ ta qism to'plamlar yig'indisi ko'rinishida necha xil usulda yoyish mumkin degan savolni qo'yamiz. Buning uchun S to`plamni $S=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m$ o`zaro kesishmaydigan $k$ ta qism to‘plamlarga ajratish mumkin bo`lsin. Bunda ularning elementlari soni mos ravishda

$$N(A_1)=k_1\,,\ N(A_2)=k_2\,,\ \dots\,,\ N(A_m)=k_m$$

bo‘lib, $k_1, k_2 ,..., k_m$ berilgan sonlar uchun

$$k_i \ge 0,\quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

shartlar bajariladi. $A_1, A_2, \ldots, A_m$ to‘plamlar umumiy elementga ega emas.

S to‘plamning k_1 elementli A_1 qism to‘plamini $C_n^{k_1}$ usulda tanlash mumkin, qolgan n-k_1 element ichidan k_2 elementli A_2 qism to‘plamini $C_{n-k_1}^{k_2}$ usulda tanlash mumkin va hokazo. Turli xil $A_1, A_2, \ldots, A_m$ qism to‘plamlarni tanlash usullari ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra

$$C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot C_{n-k_1-k_2}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!\cdot(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!\cdot(n-k_1-k_2-k_3)!} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!\cdot(n-k_1-k_2-\ldots-k_m)!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$$

Demak, quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema 2. Aytaylik $k_1, k_2 ,..., k_m$ butun nomanfiy sonlar bo‘lib, $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ va S to‘plam n ta elementdan iborat bo‘lsin. S ni elementlari mos ravishda $k_1, k_2 ,..., k_m$ ta bo‘lgan $A_1, A_2, \ldots, A_m$ m ta qism to‘plamlar yigindisi ko‘rinishida ifodalash usullari soni

$$C_n(k_1,\ldots,k_m) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$$

ta bo‘ladi.

$C_n(k_1,...,k_m)$ sonlarga **polinomial koeffitsiyentlar** deyiladi.

Misol 4. “Baraban” so‘zidagi harflarni qatnashtirib, nechta so‘z (ma`nosi bo`lishi shart emas!) yasash mumkin?

Yechilishi: “b” harfi k_1=2 ta,
“a” harfi k_2 =3 ta,
“r” harfi k_3 =1 ta,
“n” harfi k_4=1 ta, jami harflar soni n =7 ta, demak,

$$C_7(2,3,1,1) = \frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!} = 420.$$

Misol 5. “Lola” so‘zidagi harflardan nechta so‘z yasash mukin?

$$C_4(2,1,1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12.$$

Teorema 2(a). Elementlarining k_1 tasi 1- tipda, k_2 tasi 2-tipda, va hokazo k_m tasi m-tipda bo‘lgan n elementli to‘plamning barcha o‘rin almashtirishlar soni

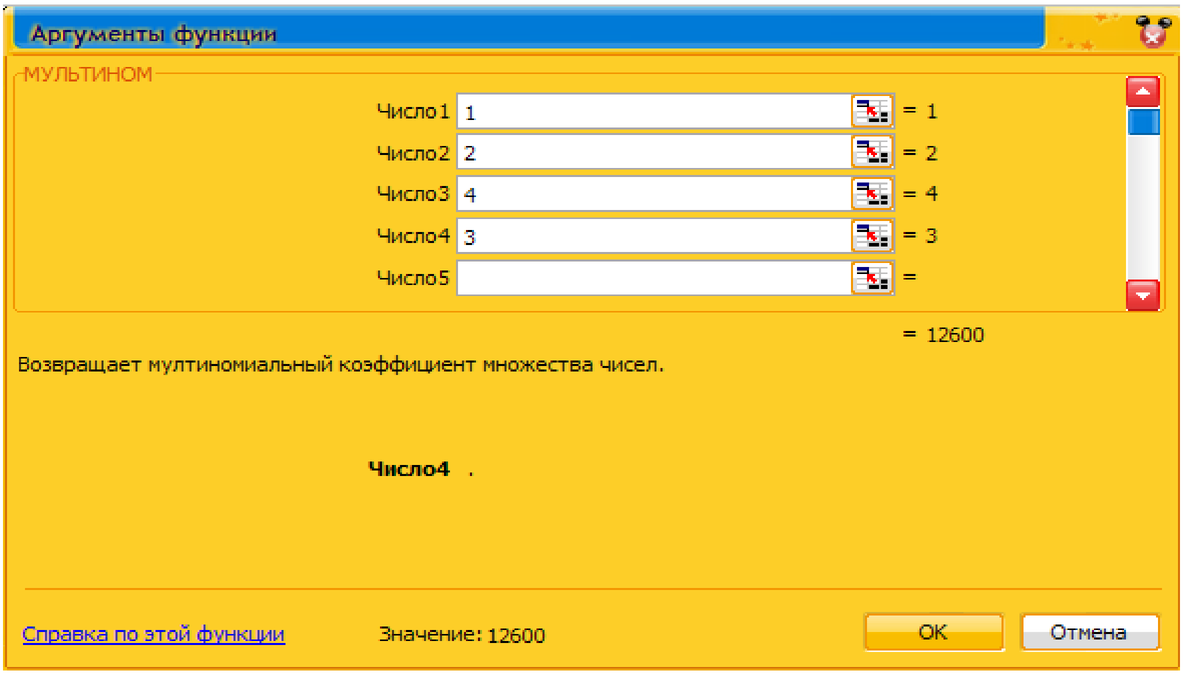
$$C_n(k_1,...,k_m) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot \ldots \cdot k_m!}$$

ta bo‘ladi.

Tadqiqotlarda ko‘p miqdordagi takrorlanuvchi o‘rin almashtirishlarni hisoblashga to‘g‘ri kelsa, unda Excel dasturlar paketidagi **МУЛЬТИНОМ** komandasidan foydalanish mumkin, masalan

$$C_{10}(1,2,4,3)=\frac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 3!}=12600$$

ekanligini tezlik bilan hisoblash hech qanday qiyinchilik tug‘dirmaydi.



2.4.5. Guruhlashning xossalari

1^0. $C_{n+m}^{n}=C_{n+m}^{m}$

2^0. $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$

3^0. $C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2$

Ushbu xossalarni isbotlash uchun kombinatsiyalarni faktorial ko’rinishida yozib chiqish va hisoblash yetarli.

Teorema. n elementli to‘plamning barcha qism to‘plamari soni 2^n ga teng va quyidagi tenglik o‘rinli:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k .$$

Haqiqatdan ham, C_n^k - n elementli to‘plamning barcha k elementli to‘plam ostilari soni bo‘lgani uchun, tushunarliki barcha to‘plam ostilar soni

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$$

yig‘indiga teng bo‘lib, ularning yig‘indisi 2^n ga teng bo‘ladi.

Misol. 30 ta talabadan 20 tasi o‘g‘il bolalar, tavakkaliga jurnaldagi ro’yhat bo‘yicha 5 talaba chaqirildi, ularning ichida ko‘pi bilan 3 tasi o‘g‘il bola bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlash mumkin?

Yechilishi: Masala shartida berilgan to‘plamni sodda to‘plamlar yig‘indisi shaklida yozib olamiz:

A={0 tasi o‘g‘il bola, 5 tasi qiz bola}

B={1 tasi o‘g‘il bola, 4 tasi qiz bola }

C={2 tasi o‘g‘il bola, 3 tasi qiz bola }

D={3 tasi o‘g‘il bola, 2 tasi qiz bola }

{Ko‘pi bilan 3 tasi o‘g‘il bola}=A∪B∪C∪D kesidhmaydigan to‘plamlar yig‘indisining quvvati, ushbu to‘plamlar quvvatlari yig‘indisiga teng bo‘ladi:

n({ko‘pi bilan 3 tasi o‘g‘il bola})=n(A∪B∪C∪D)=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)=

$$=C_{20}^{0}\cdot C_{10}^{5}+C_{20}^{1}\cdot C_{10}^{4}+C_{20}^{2}\cdot C_{10}^{3}+C_{20}^{3}\cdot C_{10}^{2}=1\cdot\frac{10!}{5!\cdot5!}+\frac{20!}{1!\cdot19!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot6!}+\frac{20!}{2!\cdot18!}\cdot\frac{10!}{3!\cdot7!}+\frac{20!}{3!\cdot17!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot8!}=$$

$$=504+4200+190\cdot120+1140\cdot45=26478900.$$

Demak, 30 ta talabadan ko‘pi bilan 3 tasi o‘g‘il bola bo‘ladigan 26.478.900 tanlash usuli mavjud.

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorlanadigan joylashtirish deb nimaga aytiladi?
2. Takrorlanmaydigan joylashtirish deb nimaga aytiladi?
3. Takrorlanadigan guruhlash deb nimaga aytiladi?
4. Takrorlanmaydigan guruhlash deb nimaga aytiladi?
5. Faktorial nima?
6. Excel dasturlar paketidagi **МУЛЬТИНОМ** komandasidan qachon foydalaniladi?
7. Excel dasturlar paketidagi **ПЕРЕСТ** komandasi vazifasi nimadan iborat?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Xonada ***n*** ta chiroq bor. ***k*** ta chiroqni yoqib xonani necha xil usulda yoritish mumkin? Xonani hammasi bo‘lib necha xil usulda yoritish mukin?

2. ***n*** ta nuqta berilgan, ularning ixtiyoriy 3 tasi bitta chiziqda yotmaydi. Ixtiyoriy ikkita nuqtani tutashtirib nechta chiziq o‘tqazish mumkin?

3. Har bir keyingi raqami oldingisidan katta bo‘lgan nechta 4 xonali sonni tuzish mumkin?
4. Har bir keyingi raqami oldingisidan kichik bo‘lgan nechta 4 xonali sonni tuzish mumkin?
5. Xalqaro komissiya 9 kishidan iborat. Komissiya materiallari seyfda saqlanadi. Kamida 6 kishi yig‘ilgandagina seyfni ochish imkoni bo‘lishi uchun, seyf nechta qulfdan iborat bo‘lishi kerak va ular uchun nechta kalit tayyorlash kerak va ularni komissiya a’zolari o‘rtasida qanday taqsimlash kerak?
6. Kitob javonida tasodifiy tartibbda 15 ta darslik terilgan bo‘lib, ularning 9 tasi o‘zbek tilida, 6 tasi rus tilida. Tavakkaliga 7 ta darslik olindi. Olingan darsliklarning roppa-rosa 4 tasi o‘zbekcha, 3 tasi ruscha bo‘ladigan qilib necha xil usulda tanlab olish mumkin?
7. $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$ yig‘indi hisoblansin.
8. $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots$ yig‘indi hisoblansin.
9. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ tenglik isbotlansin.

10. Necha xil usulda 5 ta kitobdan 3 tadan qilib tanlab olish mumkin?
11. Necha xil usulda 7 odamdan 3 kishidan qilib komissiya tuzish mumkin?
12. $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$ tenglikni isbotlang.
13. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ tenglikni isbotlang.
14. $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$ ayniyatni isbotlang.
15. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ ayniyatni isbotlang.
16. $C_n^0 = C_n^n$ tenglikni isbotlang.
17. $C_n^1 = C_n^{n-1}$ tenglikni isbotlang..
18. $C_n^k = C_n^{n-k}$ tenglikni isbotlang.

19. Quyidagi so‘zlarni nechta usulda shifrlash mumkin?

a) BALLI;
b) GIPERBOLA;
c) SIMMETRIK;
d) DADA;
e) PARABOLA;
f) ELLIPS;
g) SUMMA;
j) GURUH.

20. Tarkibida Aziz va Go’zal ham bo’lgan 12 nafar kishidan 5 kishilik komissiya tashkil qilinmoqchi. Nechta turlicha komissiya tashkil qilish mumkin? Agar

a) komissiya tarkibiga Aziz ham, Go’zal ham kirgan bo’lsa;

b) komissiya tarkibiga Aziz ham, Go’zal ham kirmagan bo’lsa;

v) komissiya tarkibiga yoki Aziz, yoki Go’zal kirgan bo’lsa.

2.4.6. Takrorlanuvchi guruhlashlar.

Ta’rif. n ta elementli to‘plamning barcha tartiblanmagan takrorlanuvchi k ta elementli qism to‘plamlarini ajratish t**akrorlanuvchi guruhlash** deyiladi.

S to`plamning elementlari $1;2;\ldots;n$ sonlari bilan raqamlangan bo`lsin. S to`plam chekli yoki sanoqli bo`lgani uchun, har doim S to`plam elementlari va $N$ natural sonlar to`plami elementlari o`rtasida bir qiymatli moslik o`rnatish mumkin. U holda S to`plam o`rniga o’zaro bir qiymatli moslik kuchiga asosan, unga ekvivalent bo`lgan $S^{/}=\{1;2;...;n\}$ to`plamning C_n^k guruhlashlarini topish mumkin.

$S^{/}$ to`plamning har qanday tanlanmasini $\{n_1;n_2;...;n_k\}$ ko`rinishda yozish mumkin, bunda $n_1 \le n_2 \le ... \le n_k$ ketma-ketlik o’rinli bo’lib, “tenglik” amali tanlanma takrorlanuvchi bo`lishi mumkinligini bildiradi.

k ta elementli tanlanma $\{n_1;n_2;...;n_k\}$ ga k ta elementli to`plam $\{n_1;n_2+1;...;n_k+k-1\}$ ni mos qo`yamiz, bunda elementlar turlicha bo`ladi.

$\{n_1; n_2; ...; n_k\}$ va $\{n_1; n_2 + 1; ...; n_k + k - 1\}$ to`plamlar orasidagi moslik yana o`zaro bir qiymatli bo`lib, $\{n_1; n_2 + 1; ...; n_k + k - 1\}$ to`plam $S^{/} \bigcup \{1; 2; ...; k-1\}$ to`plamdan $n + k - 1$ tadan takrorlanmaydigan $k$ elementli guruhlash bo`ladi.

U holda takrorlanmaydigan C_{n+k-1}^{k} guruhlashlar soni $\tilde{C}_n^k$ takrorlanuvchi guruhlash soniga teng bo'ladi, ya`ni

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot ... \cdot (n+k-1)}{k!}$$

Teorema. n ta elementdan k ta elementli takrorlanuvchi guruhlashlar soni $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k}$ ga teng.

Misol. 4 ta o'yin kubigini tashlab, nechta turlicha variant hosil qilish mumkin?

Yechilishi: Har bir o'yin kubigida 1 dan 6 gacha raqamlardan bittasi tushishi mumkin, ya'ni har bir kubikda 6 ta variant bo'lishi mumkin. Agar 4 ta o'yin kubigi tashlansa, har bir variantni 4 ta ob'yektning tartiblanmagan takrorlanuvchi ketma-ketligi deyish mumkin, ularning har biri uchun esa 6 ta imkoniyat bor:

$$\tilde{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{(6+4-1)!}{4! \cdot 5!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

Nazorat uchun savollar:

1. Takrorlanuvchi guruhlash deb nimaga aytiladi?
2. n ta elementdan k ta elementli takrorlanuvchi guruhlashlar soni nimaga teng?
3. Polinimial koeffitsiyentlar qanday hisoblanadi?
4. Takrorlanuvchi guruhlashlarning tadbiqiga misol keltiring.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. *0,1,2,3,4,5,6* raqamlaridan iborat DOMINO o‘yini toshlari nechta?

2. *0,1,2,…,k* raqamlaridan iborat DOMINO o‘yini toshlari nechta?

3. Qandalotchilik sexida 11 turdagi shirinlik ishlab chiqariladi. 6 ta bir xil yoki 6 ta har xil shirinlikni necha xil usulda tanlash mumkin?

4. Muzqaymoq do‘konida 8 xil turdagi muzqaymoq sotilayapti. 5 kishiga necha xil usulda muzqaymoq olish mumkin?

5. $\left(C_x^0\right)^2+\left(C_x^1\right)^2+\left(C_x^2\right)^2=5A_7^2$

6. $A_x^{x-3}=\left(C_{x-1}^{x-3}+C_{x-1}^{x-4}\right)P_3$

7. $A_x^3=P_{x-2}+C_x^4-P_{x-1}=39$

8. $1{,}5\cdot C_x^{x-2}=0{,}5\cdot A_{x+1}^{x-1}$

9. $A_x^{x-6}=x\cdot C_{x-1}^{x-6}$

10. $C_{x-2}^{x-3}:C_x^{x-1}=A_{x-1}^{x-4}:30$

11. $A_{x+1}^2\cdot A_x^2\cdot A_{x-1}^2=P_3\cdot P_{x+1}$

12. $A_x^4\cdot P_{x-4}=42\cdot P_{x-2}$

13. $P_x=C_x^{x-2}\cdot P_4\cdot 2!$

14. $120\cdot A_{2x}^x=\left(P_x\right)^2\cdot C_{2x}^x$

15. $\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2} \\ C_x^2=153 \end{cases}$

16. $\begin{cases} C_x^{y+1}=2{,}5x \\ C_{x-1}^y=0 \end{cases}$

17. $C_{m+1}^{n+1}:C_{m+1}^{n}:C_{m+1}^{n-1}=5:5:3$ munosabat berilgan bo’lsa, n va m ni toping.

2.5. N’YUTON BINOMI. POLINOMIAL TEOREMA

2.5.1. N’yuton binomi.

Maktab kursidan qisqa ko`paytirish formulalari bilan tanishsiz, masalan ikki son yig`indisining kvadrati

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2$$

yoki ikki son yig`indisining kubini topish

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

kabi masalalarda a va b lar oldidagi koeffitsiyentlarni topish masalasi kelib chiqadi. Koeffitsiyentlarni topish usulini frantsuz matematigi Blez Paskal (1623 – 1662 yy) fanga kiritgan, hozirda **Paskal uchburchagi** deb ataladi:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccl}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & & n=0\\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & n=1\\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & n=2\\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & n=3\\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & n=4\\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & n=5\\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & n=6\\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & n=7
\end{array}$$

. . . .

n soni yetarlicha katta bo`lganda, $(a+b)^n$ uchun Paskal uchburchagini tashkil qiluvchi sonlar C_n^k ga teng bo’ladi:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

$$\ldots \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots$$

$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots \quad \ldots. \quad \ldots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Paskal uchburchagining tashqi tomonlaridagi sonlar har doim 1 ga teng bo'ladi, chunki $C_n^0 = C_n^n = 1.$ Paskal uchburchagining yana bir qonuniyati, uchburchakdagi 2 ta ketma-ket sonni qo'shish natijasida keyingi qatordagi shu 2 son o'rtasida turgan sonni topish mumkin. Bu xossa **Paskal formulasi** deb nomlanadi:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$$

Bunda $0 < k < n.$

Isboti:

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!(k-1)!} \cdot \frac{n}{(n-k)k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

Teorema (Binomial teorema). Quyidagi tenglik o'rinli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} =$$

$$= C_n^0 \cdot a^0 \cdot b^n + C_n^1 \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \ldots + C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k} + \ldots + C_n^n \cdot a^n \cdot b^0$$

bu yerda C_n^k sonlarga **binomial koeffitsiyentlar**, tenglamaga esa **N'yuton binomi** deyiladi.

Isboti: Formulani matematik induktsiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatan ham,

$n=1$ bo`lganda $(a+b)^1 = C_1^0 \cdot a^0 \cdot b^1 + C_1^1 \cdot a^1 \cdot b^0 = b+a;$

$n=2$ da $(a+b)^2 = C_2^0 \cdot a^0 \cdot b^2 + C_2^1 \cdot a^1 \cdot b^{2-1} + C_2^2 \cdot a^2 \cdot b^0 = b^2 + 2ab + a^2.$

Endi formulani $n-1$ uchun o`rinli deb faraz qilib, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = a\cdot(a+b)^{n-1} + b\cdot(a+b)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{(n-1)-k+1}.$$

Yig'indida indekslarni almashtiramiz: $k = j-1,\ j = k+1,$ u holda

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^{k+1} b^{(n-1)-k} = \sum_{j=1}^{n} C_{n-1}^{j-1} a^j b^{n-j}$$

bo'ladi. Bundan

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k a^k b^{n-k}.$$

Oxirgi tenglikda yig'indilar chegaralarini tenglashtiramiz. Buning uchun yordamchi $C_{n-1}^{-1} = 0,\quad C_{n-1}^{n} = 0$ tengliklarni kiritamiz, u holda

$$\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k}$$

va

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k} a^k b^{n-k}$$

tengliklar hosil bo'ladi.

Bu tengliklarni o'rniga qo'yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}\right) a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Teorema isbotlandi.

Hozirda N'yuton binomi deb yuritiladigan yuqoridagi formulani Isaak N'yuton(1643-1727 yy)gacha O'rta osiyolik olimlar, yurtdoshlarimiz: matematik, astronom, shoir Umar Xayyom (1048-1122 yy) va Mirzo Ulug'bekning shogirdi G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy "Arifmetika kaliti" asarida yorqin misollarda ko'rsatib bergan. Yevropada esa B. Paskal o`z ishlarida qo`llagan. N'yutonning xizmati shundaki, u formulani daraja ko`psatkichi n ning butun bo'lmagan holi uchun umumlashtirdi.

$|x|<1$ uchun n ning butun bo'lmagan qiymatida N'yuton binomi formulasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

Binom yoyilmasi ko'pgina konbinatorika formulalarida asos bo'lib xizmat qiladi, masalan:

1. $a=b=1$ bo'lganda $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ hosil bo'ladi. Bu son n ta elementli S to'plamning barcha mumkin bo'lgan tartiblanmagan qism to'plamlari soniga teng.

2. $a=1,\ b=-1$ bo'lganda $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0$ ga teng, ya'ni toq va juft o'rinda turgan binomial koeffitsiyentlar yig'indisi 2^{n-1} ga va ular o'zaro ham teng bo'ladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Qisqa ko'paytirish formulalarini keltiring.
2. Binomial koeffitsiyent formulasini yozing.
3. N'yuton binomi deb ataluvchi formulani yana kimlarning ishlarida uchratish mumkin?
4. n ning butun bo'lmagan qiymatida N'yuton binomining ko'rinishi qanday?
5. Binomial teoremani isbotlang.
6. Paskal uchburchagi deganda nimani tushunasiz?

7. Binom yoyilmasini qaysi konbinatorika formulalarida ko'rish mumkin?
8. Paskal formulasini isbotlang.
9. G'iyosiddin Jamshid al-Koshiy "Arifmetika kaliti" asarida nima haqda yozgan?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Paskal uchburchagining 8-qatori quyidagicha bo'lsa,

1 7 21 35 35 21 7 1

a) 9-qator elementlarini aniqlang;

b) 10-qator elementlarini aniqlang;

v) Agar $a,\ b,\ c$ – 8-qatordagi ketma-ket joylashgan sonlar bo'lsa, u holda 10-qatordagi sonlardan biri $a+2b+c$ yig'indiga teng bo'lishini ko'rsating;

g) $C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}$ tenglikni $0\le k\le n-2$ bo'lgan hol uchun Paskal formulasidan foydalanib isbotlang.

2.5.2. Polinomial teorema.

Teorema (N’yuton binomining umumlashgan teoremasi).

k ta qo’shiluvchiga ega bo’lgan $(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n$ ifoda uchun N’yuton formulasi quyidagiga teng:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 \geq 0, ..., r_k \geq 0 \\ r_1 + r_2 + ... + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!} \cdot a_1^{r_1} \cdot a_2^{r_2} \cdot ... \cdot a_k^{r_k}$$

ya’ni yig’indi $r_1 + r_2 + ... + r_k = n$ tenglamaning barcha nomanfiy butun yechimlari uchun hisoblanadi.

Misol 1. N’yuton polinomi formulasidan foydalanib $(a + b + c)^3$ ni hisoblaymiz.

Agar qavslarni ochib, soddalashtiradigan bo’lsak, bir qancha amallarni bajargandan keyin quyidagi tenglikka kelamiz:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc.$$

Barcha hisoblashlardan keyin 10 ta haddan iborat bo’lgan tenglik hosil bo’ladi.

Bu tenglikni polynomial formuladan oson topish mumkin: bizning misolda $n = 3, \quad k = 3$, ya’ni

$$\begin{cases} r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, r_3 \geq 0, \\ r_1 + r_2 + r_3 = 3. \end{cases}$$

Turli koeffitsiyentlar ham 3 ta, bular:

$$\frac{3!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} = 1, \quad \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot 0!} = 3, \quad \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6.$$

Natijani yozish uchun chekli sondagi r_1, r_2, r_3 indekslarni barcha mumkin bo'lgan kombinatsiyalari jadvalini tuzgan ma`qul:

r_1	r_2	r_3
3	0	0
0	3	0
0	0	3
2	1	0
2	0	1
1	2	0
0	2	1
1	0	2
0	1	2
1	1	1

U holda

$$(a+b+c)^3 = 1\cdot(a^3+b^3+c^3)+3\cdot(a^2b+a^2c+ab^2+b^2c+ac^2+bc^2)+6\cdot abc.$$

hosil bo'ladi.

Misol 2. $(x+y+z)^9$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^3y^2z^4$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.

Yechilishi: $\dfrac{9!}{3!2!4!} = 1260.$

Misol 3. 15 talabani nechta usulda 3 ta o’quv guruhiga 5 nafardan guruhlarga ajratish mumkin?

Yechilishi: Bizda 15 ta ob’yekt bor, ularni 5 tadan 3 ta guruhga ajratish kerak. Bu ishni

$$\frac{15!}{5!5!5!} = 68796$$

usulda bajarish mumkin.

Misol 4. “MASALA” so’zidagi harflarni necha xil usulda o’rin almashtirish mumkin?

Yechilishi: Ushbu so’z 6 ta harfdan iborat bo’lgani uchun uni 6! Usulda o’rin almashtirish mumkin. Biroq unda 3 ta “A” harfi qatnashgan, “A” harflarini o’rin almashtirgan bilan yangi so’z hosil bo’lmaydi. 3 ta harfni o’rin almashtirishlar soni 3! ga tengligidan $\frac{7!}{3!} = 840$ qiymat topiladi.

Demak, “MASALA” so’zidagi harflarni o’rin almashtirish bilan 840 ta turli “so’z” hosil qilish mumkin ekan.

Nazorat uchun savollar:

1. Polinomial koeffitsiyentlar formulasini yozing.
2. Polinomial teoremani ayting va formulasini yozing.
3. Polinomial koeffitsiyentlarning xossalarini yozing.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. $(x+y+z)^9$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^5y^2z^2$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.
2. $(x+y+3)^7$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan x^3y^2 had oldidagi koeffitsiyentni toping.
3. $(2x+y+z)^9$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^4y^2z^3$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.
4. $(x+y+z-1)^6$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan $x^2y^2z^2$ had oldidagi koeffitsiyentni toping.
5. $(a+b)^{12}$ darajani yoyishdan hosil bo'lgan a^5b^7 had oldidagi koeffitsiyentni toping.
6. "MATEMATIKA" so'zidan nechta turli xil so'z yasash mumkin?
   a) Ulardan nechtasi "T" harfi bilan boshlanadi?
   b) Ulardan nechtasida ikkita "M" yonma-yon joylashgan bo'ladi?

2.6. TO'PLAMLARNI BO'LAKLARGA AJRATISh

Ushbu mavzu to'plamlar nazariyasi bo'limida qaralmadi, chunki, bo'laklarga ajratish masalasi biroz murakkab bo'lib, uni hisoblash formulalari kombinatorika formulalaridan kelib chiqadi.

2.6.1. Bo'laklarga ajratish.

Ta'rif. Aytaylik, $\Im = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ to'plam m ta elementdan iborat X to'plamning o`zaro kesishmaydigan $n$ ta qism to'plamga **ajratilgan bo'laklari** bo`lsin. Bunda $B_i \subset X$, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = X$, $B_i \neq \varnothing$, agar $i \neq j$ bo'lsa, $B_i \cap B_j = \varnothing$.

B_i qism to'plamlar bo'lakning **bloklari** deyiladi.

Bo'sh bo'lmagan bloklarga ega bo'laklar bilan ekvivalentlik munosabati o'rtasida o'zaro bir qiymatli akslantirish mavjud.

Agar E_1 va E_2 X to'plamning bo'laklari bo'lib, har bir E_2 blok E_1 bloklarning birlashmasidan iborat bo'lsa, u holda E_1 bo'lak E_2 ning **maydalangan bo'lagi** deyiladi.

Maydalangan bo'laklar qisman tartiblangan bo'ladi.

2.6.2. II tur Stirling sonlari.

Ta’rif (Jeyms Stirling (1699-1770 yy)). m ta elementli to’plamning n ta bo’lakka ajratish soniga **II tur Stirling soni** deyiladi va quyidagicha belgilanadi: S_m^n. Ta’rifga ko’ra

$$S_m^m = 1, \quad m > 0 \text{ bo'lsa } S_m^0 = 0,$$

$$S_0^0 = 1, \quad n > m \text{ bo'lsa } S_m^n = 0.$$

Teorema 1. $S_m^n = S_{m-1}^{n-1} + nS_{m-1}^n$ tenglik o’rinli.

Isboti: $\Im$ to’plam $M = \{1,2,\ldots,m\}$ to’plamning n ta blokka ajratilgan bo’laklari bo’lsin.

$$\Im_1 = \{X \in \Im \mid \exists B \in X \quad (B = \{m\})\},$$

$$\Im_2 = \{X \in \Im \mid \neg\exists B \in X \quad (B = \{m\})\},$$

ya’ni m ta element alohida blok hosil qiladigan bo’lak $\Im_1$ ga, qolgan barcha bo’laklar $\Im_2$ ga tegishli bo’ladi. Bundan $\Im_2 = \{X \in \Im \mid \mathrm{m} \in X \Rightarrow |X| > 1\}$ ekanligi ma’lum. U holda $\Im = \Im_1 \bigcup \Im_2$, $\Im_1 \bigcap \Im_2 = \varnothing$ o’rinli. Barcha $\Im_2$ bo’laklar quyidagicha hosil qilinadi: $\{1,2,\ldots,m-1\}$ to’plamning barcha bo’laklarini n ta blokka ajratamiz, ular S_{m-1}^n ta bo’ladi va har bir blokka navbat bilan m - elementni joylashtiramiz. Natijada $S_m^n = |\Im| = |\Im_1| + |\Im_2| = S_{m-1}^{n-1} + nS_{m-1}^n$ tenglik hosil bo’ladi.

Teorema isbotlandi.

Teorema 2. $S_m^n = \sum_{i=n-1}^{m-1} C_{m-1}^i S_i^{n-1}$ tenglik o'rinli.

Isboti: $\Im$ to'plam $M = \{1,2,\ldots,m\}$ to'plamning n ta blokka ajratilgan bo'laklari bo'lsin. $\overline{B} = \{B \subset 2^M \mid m \in B\}$ to'plamlar oilasini qaraymiz. U holda $\Im$ to'plam $\Im = \bigcup_{B\in\overline{B}} \Im_B$ ko'rinishida bo'ladi, bunda $\Im_B = \{X \mid X \in \Im \text{ va } B \in X\}$ va agar $B^{|} \neq B^{||}$ bo'lsa, $\Im_{B^{|}} \bigcap \Im_{B^{||}} = \varnothing$.

Aytaylik, $B \in \overline{B}$ va $b = |B|$ bo'lsin. U holda

$$\left|\Im_B\right| = S_{m-b}^{n-1}.$$

$$\left|\{B \in \overline{B} \mid b = |B|\}\right| = C_{m-1}^{b-1}$$

ekanligidan

$$S_m^n = |\Im| = \sum_{b-1}^{m-(n-1)} \left| \bigcup_{B\in\overline{B}, |B|=b} \Im_B \right| = \sum_{b=1}^{m-(n-1)} C_{m-1}^{b-1} S_{m-b}^{n-1} = \sum_{i=m-1}^{n-1} C_{m-1}^{m-i-1} S_i^{n-1} = \sum_{i=n-1}^{m-1} C_{m-1}^{i} S_i^{n-1}$$

tenglik hosil bo'ladi, bu yerda $i = m - b.$

Teorema isbotlandi.

2.6.3. I tur Stirling sonlari.

Ta'rif . Syur'yektiv funktsiyalar soni , ya'ni m ta predmetni n ta idishga taqsimlash soniga **I tur Stirling soni** deyiladi (bunda idishlarning barchasi band qilingan bo'ladi) va quyidagicha belgilanadi: s_m^n.

Teorema. I va II tur Stirling sonlari o'rtasida $s_m^n = n! S_m^n$ bog'liqlik o'rinli.

Isboti: $\{1, 2, \ldots, m\}$ to'plamning har bir bo'lagiga to'plamlar oilasi syur'yektiv funktsiya sifatida mos qo'yiladi. Shunday qilib, turli to'plamlar oilasining syur'yektivlik darajasi – bu II tur Stirling sonlidir S_m^n. Barcha syur'yektiv funktsiyalar soni

$$s_m^n = n! S_m^n \ .$$

Teorema isbotlandi.

2.6.4. Bell soni.

Ta'rif (Erik Bell (1883-1960 yy))**.** m ta elementli to'plamning barcha bo'laklar soni **Bell soni** deyiladi va $B(m)$ ko'rinishida belgilanadi:

$$B(m) = \sum_{n=0}^{m} S_m^n \quad \text{va} \quad B(0) = 1.$$

Teorema 1. $B(m+1) = \sum_{i=0}^{m} C_m^i B(i)$ tenglik o'rinli.

Isboti: $\Im$ to'plam $M_1 = \{1,2,...,m+1\}$ to'plamning barcha bo'laklari to'plami bo'lsin. M_1 to'plamning $m+1$ elementdan iborat qism to'plamlari to'plamini qaraylik: $\overline{B} = \{B \subset 2^{M_1} \mid m+1 \in B\}$. U holda $\Im = \bigcup_{B \in \overline{B}} \Im_B$ ko'rinishida bo'ladi, bunda $\Im_B = \{X \in \Im \mid B \in X\}$. $B \in \overline{B}$ va $b = |B|$ bo'lsin. U holda $|\Im_B| = B(m+1-b)$. $|\{B \in \overline{B} \mid b = |B|\}| = C_m^{b-1}$ ekanligidan

$$B(m+1) = |\Im| = \sum_{b=1}^{m+1} C_m^{b-1} B(m-b+1) = \sum_{i=m}^{0} C_m^{m-i} B(i) = \sum_{i=0}^{m} C_m^{i} B(i)$$

tenglik hosil bo'ladi, bu yerda $i = m-b+1$.

Teorema isbotlandi.

Nazorat uchun savollar:

1. To'plamlarni bo'laklarga ajratish deganda nimani tushunasuz?
2. Bloklar deb nimaga aytiladi?
3. II tur Stirling sonlari deb nimaga aytiladi?
4. I tur Stirling sonlari deb nimaga aytiladi?
5. Bell soni deb nimaga aytiladi?
6. II tur Stirling sonlarining xossalarini keltiring.

III BOB.
MATEMATIK MANTIQ ASOSLARI
KIRISH

Matematik mantiq diskret matemetikaning asosiy bo`limi bo`lib, bu bo`lim mulohazalar algebrasi bilan boshlanadi. Matematik mantiq hamda to`plamlar nazariyasi birgalikda hozirgi zamonaviy matematikaning fundamenti hisoblanadi.

Amaliy nuqtai nazardan qaraydigan bo`lsak, matematik mantiq ma`lumotlar bazasini qurishda, elektrotexnika, informatika va hisoblash texnikasi va umuman barcha raqamli qurilmalarda dasturlash tili uchun asos bo`lib hizmat qiladi. Shuning uchun ham tahliliy mulohaza yuritishga qiziquvchi har bir kishi matematik mantiq bo`limini o`rganishi kerak bo'ladi.

Insoniyat tomonidan to'plangan matematik bilimlarni jamlashda greklarning hissasi nihoyatda salmoqli bo`lgan, shuningdek, ular mantiq, ya`ni to`g`ri mulohaza yuritish san`ati bilan ham shug'ullanishgan.

Er. av. 389 yilda **Platon (er.av. 427-347 yy)** asos solgan falsafiy maktabda matematikaning ilk nazariy asoslari qurildi. Platon mantiqiy teoremalarni isbotlashning quyidagi 3 ta metodini ishlab chiqdi:

1) analitik metod;
2) sintetik metod;
3) apagogik metod.

Analitik metod – har biri o'zidan oldingisining bevosita natijasi bo'lgan gaplar zanjirini hosil qilishdan iborat. Bu zanjirning birinchi elementini isbotlash kerak bo'lgan mulohaza, oxirgi elementini esa isbotlangan haqiqat tashkil qiladi.

Sintetik metod – analitik metodning aksibo'lib, unda birinchi element isbotlangan haqiqat va har bitta mulohaza o'zidan keyingisining natijasi bo'ladi.

Apagogik metod – teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlash metodi bo'lib, unda zanjirning birinchi elementi isbotlash kerak bo'lgan mulohazani inkor qilish bo'ladi, oxirida esa ziddiyatga olib kelinadi.

Platonning shogirdlaridan **Aristotel Stagirit (er.av. 384 -322 yy)** alohida ajralib turadi. Aristotelni mantiq ilmining asoschisi desak, yanglishmaymiz, chunki u o’zigacha bo’lgan barcha mantiqiy bilimlarni jamladi va mantiqiy qonuniyatlar sistemasini yaratdi. Bu qonunlardan tabiatni tadqiq qilishda mulohazalar quroli sifatida foydalandi. Aristotelning olamni o’rganishdagi bilimlari yagona bo’lib, **naturfalsafa** deb nom olgan.

Qadimgi greklar matematikani ikkiga ajratib o’rganishgan:

1) mantiqni hisoblash san`ati deb,
2) arifmetikani sonlar nazariyasi deb nomlashgan.

Ushbu bobda mulohazalar va ular ustida amallar, mantiqiy bog‘liqliklar, Bul (mantiqiy) formulalari, mantiq qonunlari, mantiq funksiyalari, mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvalini tuzish va aksincha, rostlik jadvali berilgan bo’lsa, mantiq funksiyasi ko‘rinishini tiklash, mukammal diz’yunktiv va kon’yunktiv normal shakllar, rele - kontakt sxemalari, rele - kontakt sxemalarida analiz, sintez, minimallashtirish masalalari, Karno kartalari, Veych diagrammalari, yechimlar daraxti haqida so’z yuritiladi.

Shuningdek, elementlari 0 va 1 dan tashkil topgan to`plamlar ustida ish ko`riladi. Bu elementlar son sifatida emas, balki mantiqiy “ha”, “yo`q” ma`nolarida ishlatiladi.

3.1. MULOHAZALAR ALGEBRASI

3.1.1. Sodda va murakkab mulohazalar.

Ta’rif 1. Rost yoki yolg‘onligi aniq bo‘lgan darak gap **mulohaza** deyiladi.

So`roq va undov gaplar mulohaza hisoblanmaydi, ya`ni: “Bugun kinoga kiramizmi?” yoki “Kitobga tegma!”

Mulohazalar lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilanadi: A, B, C, ….

Agar mulohaza rost bo`lsa A=1, yolg‘on bo`lsa A=0 deb belgilaymiz, ba`zi adabiyotlarda, shuningdek, “Informatika va hisoblash texnikasi” fanining **“ALGOL”, “BOOLEAN”, “C++”** dasturlash tillarida rost mulohazaga “T”, ya`ni “true” so´zining, yolg`on mulohazaga “F”, ya`ni “false” so`zining bosh harflari ishlatiladi.

Misol 1. 1. A=”Ikki ko`paytiruv olti 14 ga teng”=0

2. B=”Ikki qo`shuv ikki 4 ga teng”=1

3. C=”Qor oq”=1

4. Д="Bugun dushanba bo`lsa, u holda ertaga seshanba bo`ladi”=1

5. Z=”agar 1+1=3 bo`lsa, u holda jumadan keyin yakshanba keladi”=?

5-mulohazaning rost yoki yolg`onligi haqida hozircha bir nima deyish qiyin, biroq mantiqiy amallarni kiritganimizdan keyin bu savolga osongina javob topasiz.

Shunday fikrlar borki, ular tuzilishi bo`yicha mulohazaga o`xshaydi, lekin mulohaza emas. Masalan, ikki varaq qog`oz olamiz-da, ularni 1- va 2- deb raqamlaymiz. Birinchi qog`ozga “Ikkinchi varaqda yolg`on yozilgan” deb, ikkinchi qog`ozga esa “Birinchi varaqda rost yozilgan” degan mulohazani yozamiz. Bir qaraganda sodda mulohazaga o`xshaydi, biroq …! Savol beramiz, bu mulohazalar rostmi yoki yolg`onmi? Bu fikrlar ziddiyatga olib keladi, ya`ni ularni rost yoki yolg`onligi haqida aniq gapirib bo`lmaydi. Bunday mulohazalar matematikada **mantiqiy paradoks** deyiladi.

Demak, ko`rinishidan mulohazaga o`xshagan har qanday gap ham mulohaza bo`lavermaydi.

Mulohazalar sodda yoki murakkab bo‘lishi mumkin.

Ta’rif 2. Agar A mulohazaning o‘zi bir tasdiq bo‘lib, ma’nosi bo’yicha u bilan ustma - ust tushmaydigan bir qismini ajratib ko‘rsatish mumkin bo‘lmasa, u holda A mulohazaga **sodda mulohaza** deyiladi.

Misol 2. A: ”0 soni 1 sonidan kichik”

B: “Bugun havo iliq”.

Ta’rif 3. Sodda mulohazalardan mantiqiy bog`lovchilar yoki mantiqiy amallar yordamida hosil qilingan mulohazaga **murakkab mulohaza** deyiladi.

Misol 3. C: “7 tub son va 6 toq son”

D: “Oy Yer atrofida aylanadi yoki O`zbekiston Yevropada joylashgan”

Mulohaza ikkita qiymatdan birini “rost”, ya`ni “1” yoki “yolg‘on”, ya`ni “0” ni qabul qiladi. Bu qiymatlarga mulohazaning **rostlik qiymatlari** deyiladi.

Ta’rif 4. Mulohazaning rostlik qiymatlaridan tuzilgan jadvalga **rostlik jadvali** deyiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Platon mantiqiy teoremalarni isbotlashning qanday metodlarini ishlab chiqdi?
2. Mulohaza deb nimaga aytiladi? Misol keltiring.
3. Mantiqiy paradoks deganda nimani tushunasiz?
4. Sodda mulohaza deb nimaga aytiladi?
5. Murakkab mulohaza qanday tuziladi?
6. Rostlik qiymatlariga ta’rif bering.
7. Rostlik jadvali nima?

3.1.2. Asosiy mantiqiy bog‘liqliklar.

Sodda mulohazalardan murakkab mulohazalarni hosil qilish uchun mulohazalar ustida bajarilishi mumkin bo`lgan mantiqiy amal(bog’liqlik)larning belgilaridan foydalaniladi.

Mulohazalar ustida quyidagi asosiy 5 ta mantiqiy amal bajariladi: **i**nkor qilish amali, kon’yunktsiya amali, diz’yunktsiya amali, implikatsiya amali va ekvivalentlik amali.

Ta`rif 1.** A mulohazaning **inkori deb**, shunday yangi mulohazaga aytiladiki, agarda A mulohaza yolg`on bo`lsa, uning inkori chin bo`ladi va aksincha. A mulohazaning inkori **¬A yoki **$\bar{A}$** kabi belgilanadi va “A emas” deb o`qiladi.

Inkor qilish amali uchun rostlik jadvalini tuzish mumkin:

A	**¬A**
1	0
0	1

**Ta`rif 2.** A va B mulohazalarning **kon’yunktsiyasi deb**, A va B mulohazalar bir vaqtda rost bo`lgandagina rost bo`lib, qolgan barcha hollarda yolg`on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning kon’yunktsiyasi **A&B** yoki **A/\B** kabi belgilanadi hamda “va” deb o`qiladi. A mulohaza kon’yunktsiyaning **birinchi hadi**, B mulohaza esa **ikkinchi hadi** deyiladi. Kon’yunktsiya amali xuddi 0 va 1 sonlarini ko`paytirishga o`xshagani uchun ham uni ko`pincha mantiqiy ko`paytirish deb ham atashadi.

Kon’yunktsiya amalining rostlik jadvali quyidagicha:

A	**B**	**A&B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Ta`rif 3.** A va B mulohazalarning **diz’yunktsiyasi deb**, A va B mulohazalardan kamida bittasi rost bo`lganda rost bo`lib, qolgan hollarda yolg`on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning kon’yunktsiyasi **A\/B** kabi belgilanadi hamda “yoki” deb o`qiladi. A mulohaza diz’yunktsiyaning **birinchi hadi**, B esa **ikkinchi hadi** deyiladi.

Diz'yunktsiya amalining rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	A∨B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ta`rif 4. {0; 1; ¬; &; ∨} - to'plamga **mulohazalar algebrasi** yoki **Bul algebrasi** deyiladi.

**Ta`rif 5.** A va B mulohazalarning **implikatsiyasi deb**, A mulohaza rost bo`lib, B yolg`on bo`lgandagina yolg`on, qolgan barcha hollarda rost qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning implikatsiyasi **A→B** kabi belgilanadi va "A dan B kelib chiqadi" yoki "Agar A o`rinli bo`lsa, B o`rinli bo`ladi" deb o`qiladi. A mulohaza implikatsiyaning **birinchi hadi**, B esa **ikkinchi hadi** hisoblanadi.

Implikatsiya amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Misol. A : "Bugun yomg`ir yog`di" va B: "Men soyabon oldim" mulohazalar bo`lsin. Agar yomg`irda ho`l bo`lganimizni 0, quruq bo`lganimizni 1 qiymatlar bilan belgilasak, implikatsiyani shunday tushuntirish mumkin:

A	B	A→B
Bugun yomg`ir yog`madi	Menda soyabon yo`q	1 (quruq)
Bugun yomg`ir yog`madi	Men soyabon oldim	1 (quruq)
Bugun yomg`ir yog`di	Menda soyabon yo`q	0 (ho`l)
Bugun yomg`ir yog`di	Men soyabon oldim	1 (quruq)

**Ta`rif 6.** A va B mulohazalarning **ekvivalentligi deb**, A va B mulohazalarning bir xil qiymatlarida rost bo`lib, har xil qiymatlarida esa yolg`on bo`luvchi mulohazaga aytiladi.

A va B mulohazalarning ekvivalentligi **A~B, A↔B** kabi belgilanadi va “A va B teng kuchli”, “A bo`ladi, qachonki B bo`lsa” yoki “A mulohaza B uchun yetarli va zarur” deb o`qiladi. A mulohaza ekvivalentlikning **birinchi hadi**, B esa **ikkinchi hadi** hisoblanadi.

Ekvivalentlik amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Halqali yig‘indi amali A⊕B.

Bu amal ekvivalentlik amalining inkoriga teng bo’ladi, ya’ni

$$A \oplus B = \neg(A \sim B)$$

Halqali yig‘indi amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	A⊕B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sheffer shtrixi A│B.

Ushbu amalni kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallari yordamida hosil qilish mumkin, ya'ni

$$A \mid B = \neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$$

Sheffer shtrixi amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	A│B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Sheffer shtrixi amali uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $A \vee B = \neg A \mid \neg B = (A \mid A) \mid (B \mid B)$

2^0. $A \& B = \neg(A \mid B) = (A \mid B) \mid (A \mid B)$

3^0. $\neg A = A \mid A$

Pirs strelkasi A↓B.

Ushbu amalni ham kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallari yordamida hosil qilish mumkin, ya'ni

$$A\downarrow B = \neg(A\vee B) = \neg A \& \neg B$$

Pirs strelkasi amali uchun rostlik jadvali quyidagicha:

A	**B**	**A↓B**
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Pirs strelkasi amali uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $A\vee B = \neg(A\downarrow B) = (A\downarrow B)\downarrow(A\downarrow B)$

2^0. $A\& B = \neg A\downarrow\neg B = (A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)$

3^0. $\neg A = A\downarrow A$

Pirs strelkasi qatnashgan Bul ifodasini Sheffer shtrixi yordamida hosil qilish mumkin:

$$A\downarrow B = \neg A\&\neg B = \neg\neg(A\mid B) = \neg[(A\mid A)\mid(B\mid B)] =$$
$$= [(A\mid A)\mid(B\mid B)]\mid[(A\mid A)\mid(B\mid B)] \qquad (1)$$

yoki Sheffer shtrixi qatnashgan Bul ifodasini Pirs strelkasi yordamida hosil qilish mumkin:

$$A\mid B = \neg A\vee\neg B = \neg(\neg A\downarrow\neg B) = \neg[(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)] =$$
$$= [(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)]\downarrow[(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)] \qquad (2)$$

Bundan ko’rinadiki, ixtiyoriy ifodani faqat Sheffer shtrixi yordamida yo Pirs strelkasi yordamida yoki faqatgina kon`yunktsiya va inkor yordamida yoki faqatgina diz`yunktsiya va inkor yordamida yozish mumkin ekan.

Nazorat uchun savollar:

1. Mantiqiy amallarni sanab bering.
2. Mulohazaning inkorini tushuntiring.
3. Mulohazalarning diz’yunktsiyasi deb nimaga aytiladi?
4. Mulohazalarning kon’yunktsiyasi deb nimaga aytiladi?
5. Implikatsiya amalini tushuntiring.
6. Qanday mulohazalar ekvivalent bo’ladi?
7. Halqali yig‘indi amalini tushuntiring.
8. Sheffer shtrixi qanday vazifani bajaradi?
9. Sheffer shtrixi amalining xossalarini ayting.
10. Pirs strelkasi qanday vazifani bajaradi?
11. Pirs strelkasi amalining xossalarini ayting.
12. Ifodada Pirs strelkasidan Sheffer shtrixiga qanday o’tish mumkin?
13. Ifodada Sheffer shtrixidan Pirs strelkasiga qanday o’tish mumkin?

3.1.3. Predikatlar. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari.

Bizga natural sonlar to’plami N berilgan bo’lsin.

x element N to’plamning ixtiyoriy elementi bo’lsin. U holda quyidagi jumlalar

$A(x)=\{x$ soni 7 ga bo'linadi$\}$;

$B(x)=\{x>10\}$;

$C(x)=\{x$ tub son$\}$;

$D(x)=\{(x-5)^2<10\}$

darak gaplar bo'lganligi uchun mulohaza hisoblanadi, lekin ularning rost yoki yolg'onligi haqida hech narsa ayta olmaymiz.

Ta'rif. Rost yoki yolg'onligi noma`lum bo'lgan mulohazalar **aniqmas mulohazalar** yoki **predikatlar** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda x ning o'rniga turli qiymatlarni qo'ysak, turlicha mulohazalar hosil bo'ladi, ya'ni

$A(5)=\{7$ soni 7 ga bo'linadi$\}=1$;

$A(13)=\{10$ soni 7 ga bo'linadi$\}=0$

Natural sonlar to'plamida berilgan biror $P(x)$ predikatni olaylik.

Agar $P(x)$ predikat bo'lsa, u holda **$(\forall x)P(x)$** – yozuv N to'plamda ixtiyoriy x uchun $P(x)$ mulohaza o'rinli degan ma`noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo'ladi, qachonki x ning ixtiyoriy qiymatida $P(x)$ o'rinli bo'lsa. Agarda x ning bittagina qiymatida o'rinli bo'lmasa, $P(x)$ mulohaza yolg'on bo'ladi. $\forall$ - belgi **umumiylik kvantori** deyiladi.

Misol 1. $A(x)=\{4^x+1$ soni tub son$\}$ mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko'ramiz:

$A(1)=\{4^1+1=5$ soni tub son$\}=1$;

$A(2)=\{4^2+1=17$ soni tub son$\}=1$;

$A(3)=\{4^3+1=257$ soni tub son$\}=1$;

$A(4)=\{4^4+1=65537$ soni tub son$\}=1$;

$A(5)=\{4^5+1=4294967296+1=4294967297$ soni tub son$\}=0$,

demak, $x=5$ da bu mulohaza yolg'on bo'ladi.

Shuning uchun ham $(\forall x)A(x)$ mulohaza yolg'on mulohaza hisoblanadi.

Misol 2. $(\forall x)B(x)=\{x^2-x$ soni 2 ga bo'linadi$\}$ mulohazani ixtiyoriy x uchun tekshirib ko'ramiz:

B(1), B(2), B(3), … larda mulohaza o'rinli, lekin bu usul bilan barcha sonlarni tekshirib chiqishning iloji yo'q, shuning uchun mulohazahi rostligini quyidagicha isbotlash mumkin:

$x^2-x=x(x-1)$ ketma-ket kelgan 2 ta sonning ko'paytmasida bittasi albatta juft son bo'ladi, demak bu ko'paytma har doim 2 ga bo'linadi.

Bundan $(\forall x)B(x)$ mulohazaning rostligi kelib chiqadi.

Agar P(x) predikat bo'lsa, u holda **$(\exists x)P(x)$** – yozuv N to'plamda shunday x element topiladiki, uning uchun P(x) mulohaza o'rinli degan ma`noni bildiradi. Bu mulohaza rost bo'ladi, qachonki x ning kamida bitta qiymatida P(x) o'rinli bo'lsa. $\exists$ - belgi **mavjudlik kvantori** deyiladi.

Yuqoridagi misollarda $(\exists x)A(x)$ mulohaza ham, $(\exists x)B(x)$ mulihaza ham chin bo'ladi.

Umumiylik va mavjudlik kvantorlari uchun quyidagi xossalar o'rinli:

1^0. $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

2^0. $\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$

3^0. $(\forall x)[P(x)\&D(x)]=(\forall x)P(x)\&(\forall x)D(x)$

4^0. $(\exists x)[P(x)\&D(x)]\Rightarrow(\exists x)P(x)\&(\exists x)D(x)$

5^0. $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)D(x)\Rightarrow(\forall x)[P(x)\vee D(x)]$

6^0. $(\exists x)[P(x)\vee D(x)]\Rightarrow(\exists x)P(x)\vee(\exists x)D(x)$

Nazorat uchun savollar:

1. Predikat deb nimaga aytiladi?
2. Mavjudlik kvantorini tushuntiring.
3. Umumiylik kvantorini qanday tushutirish mumkin?
4. Umumiylik va mavjudlik kvantorlarining xossalarini aytib bering.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. $P(x)=\{x^2+1=0,$ x-haqiqiy son$\}$ bo'lsa, $(\exists x)P(x)$ predikatni so'z bilan ifodalang va rostligini tekshiring.

2. $P(y)=\{y^2=25,$ y - butun son$\}$ mulohaza uchun $(\exists y)P(y)$ ni ifodalang va rostligini tekshiring.

3.1.4. Formulalar. Formulalarning teng kuchliligi.

Ta'rif 1. To'g'ri tuzilgan murakkab mulohazaga **formula** deyiladi. Formulalar grek harflari bilan belgilanadi: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.

Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohazalar α formulada qatnashadigan barcha mulohazalar bo'lsa, $\alpha=\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ kabi belgilanadi.

Misol 1. a) $\alpha(A)=\neg A$;

b) $\beta(A, B, C)=A\&B\rightarrow C$;

c) $\gamma(A, B)=A\&B \vee \neg A\&\neg B)$

bunda A, B, C, … sodda mulohazalar **argument** yoki **mantiqiy o'zgaruvchilar**, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ formulalar esa **funktsiya** deb ham yuritiladi.

Formulaning to'g'ri tuzilgan bo'lishida qavslarning o'rni juda muhim. Mantiqda ham xuddi algebra va arifmetikadagi singari qavslar amallar tartibini belgilab beradi.

Formulalarda qavslarni kamaytirish maqsadida amallarning bajarilish tartibi quyidagicha kelishib olingan. Agar formulada qavslar bo`lmasa,

birinchi inkor amali - $\neg$,

ikkinchi kon`yunktsiya - &,

uchinchi bo’lib diz`yunktsiya - $\vee$,

undan so’ng implikatsiya - $\rightarrow$ va

oxirida ekvivalentlik - ~ amali bajariladi.

Agar mulohazada bir xil amal qatnashgan bo`lsa, u holda ularni tartibi bilan ketma-ket bajariladi: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D = (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow D)$.

Tashqi qavslar qo`yilmaydi. Shuning uchun ham $A \rightarrow B$ mulohazani $A \leftrightarrow (B \wedge C)$ ko`rinishda yozish mumkin.

Kon`yunktsiya amali diz`yunktsiyaga qaraganda kuchliroq bog`lovchi hisoblanadi, ya`ni $A \vee B \wedge C = A \vee (B \wedge C)$.

Diz`yunktsiya implikatsiyaga qaraganda kuchliroq bog`laydi, shuning uchun ham quyidagi tenglik o`rinli:

$$A \wedge B \vee C \rightarrow D = ((A \wedge B) \vee C) \rightarrow D.$$

Implikatsiya ekvivalentlikka qaraganda kuchliroq, ya`ni

$$A \leftrightarrow B \rightarrow C = A \leftrightarrow (B \rightarrow C).$$

Misol 3.

$$A \rightarrow \overline{B \vee C} \leftrightarrow C \leftrightarrow \overline{A} \vee B \rightarrow C \cdot \overline{A} \vee B \rightarrow A =$$

$$= A \rightarrow \overline{B \vee C} \leftrightarrow \overline{A} \vee B \rightarrow \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right) \rightarrow A =$$

$$= A \rightarrow \overline{B \vee C} \leftrightarrow \left(\overline{A} \vee B\right) \rightarrow \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right) \rightarrow A =$$

$$= \left(A \rightarrow \overline{B \vee C}\right) \leftrightarrow \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \rightarrow \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right)\right) \rightarrow A =$$

$$= \left(\left(A \rightarrow \overline{B \vee C}\right) \leftrightarrow \left(\left(\overline{A} \vee B\right) \rightarrow \left(\left(C \cdot \overline{A}\right) \vee B\right)\right) \rightarrow A\right).$$

Ta’rif 2. Argumenti va funksiya qiymati 0 yoki 1 qiymatni qabul qiluvchi n ta o‘zgaruvchi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ga bog‘liq bo‘lgan har qanday $\alpha = \alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ funksiya **Bul funksiyasi** deyiladi.

Ta‘rif 3. $\alpha(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ formulaning **mantiqiy imkoniyati** deb, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o‘zgaruvchilarning bo‘lishi mumkin bo‘lgan barcha rosrlik qiymarlariga aytiladi.

Ta‘rif 4. α formulaning barcha mantiqiy imkoniyatlarini o‘z ichiga olgan jadvalga α formulaning **mantiqiy imkoniyatlari jadvali** deyiladi.

Teorema 1. n ta o`zgaruvchi qatnashgan formulaning 0 va 1 qiymatlarni qabul qiluvchi mumkin bo`lgan manrtiqiy imkoniyatlari soni 2^n ga teng.

Isboti: Ushbu sonni I_n ko`rinishida belgilab va $I_n = 2^n$ ekanligini isbotlaymiz.

Aytaylik, n=1 bo`lsin. Bir o`zgaruvchili 0 va 1 qiymatlarni qabul qiluvchi formulaning barcha mumkin bo`lgan manrtiqiy imkoniyatlari soni 2 ta, ya`ni 0 va 1. Bundan $I_1 = 2^1$ kelib chiqadi.

Matematik induktsiya qonunidan foydalanib, n=2, n=3 da, … , n=k da to`g`ri deb faraz qilib, n=k+1 da to`g`riligini, ya`ni $I_{k+1} = 2^{k+1}$ tenglik to`g`riligini isbotlaymiz.

Haqiqatan, qandaydir k elementli formula $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ qiymatlarni qabul qilsin. U holda bu qiymatlarga 0 va 1 ni kiritish bilan 2 ta k+1 uzunlikdagi qiymatlarni qabul qilish mumkin, ya’ni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0)$ va $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 1)$.

Demak, k+1 ta elementdan iborat formulaning mantiqiy imkoniyatlari soni *k* elementli formula mantiqiy imkoniyatlaridan 2 marta ko`p, ya`ni $I_{k+1} = 2 \cdot I_k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Teorema isbotlandi.

Ta'rif 5. Agar α va β formulalar uchun umumiy bo'lgan mantiqiy imkoniyatlarda α va β bir xil qiymat qabul qilsa, u holda α va β formulalar **teng kuchli** deyiladi va $\boldsymbol{\alpha \equiv \beta}$ kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda, agarda formulalarning rostlik jadvallari mos bo'lsa, ular teng kuchli bo`ladi.

Ta'rif 6. Agar barcha mantiqiy imkoniyatlarda α formula faqat 1 ga teng qiymat qabul qilsa, α formula **ayniy haqiqat** yoki **tavtologiya** deyiladi va $\alpha\equiv 1$ yoki $|=\alpha$ kabi belgilanadi.

n ta o`zgaruvchi qatnashgan formulaning mumkin bo`lgan barcha mantiqiy imkoniyatlarini yozish uchun qabul qilingan tartib mavjud. Bu ketma-ketlik (0,0,..,0,0) dan boshlanadi. Har bir keyingi qatorda ikkilik sanoq sistemasida oldingi qatordagi qiymatlarga 1 ni qo`shamiz va nihoyat hamma qiymatlar 1 lardan iborat bo`lganda ishni tugatamiz: (1,1,..,1,1).

Ikkilik sanoq sistemasida qo`shish qoidasini eslatib o`tamiz:

$$0+0=0,$$

$$0+1=1+0=1,$$

$$1+1=10.$$

Agar o'zgaruvchilar soni 3 ta yoki 4 ta bo'lsa, u holda mos ravishda 8 ta yoki 16 ta qator hosil bo'ladi:

n=3 bo`lsa

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

n=4 bo`lsa

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Misol 2. $\alpha(A, B) = \neg (A\&B) \to (\neg A \vee \neg B)$ formulaning tavtologiya bo'lish yoki bo'lmasligini rostlik jadvalini tuzib tekshirib ko'rish mumkin:

A	**B**	$\neg(A\&B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\alpha(A, B) = \neg(A\&B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

Teorema 2. Agar α va $\alpha \rightarrow \beta$ formulalar tavtologiya bo’lsa, u holda β ham tavtologiya bo’ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilish yo’li bilan isbotlaymiz, ya`ni β tavtologiya bo’lmasin, u holda β ning barcha qiymatlari 0 bo’ladi. Lekin α tavtologiya bo’lgani uchun har doim 1 qiymat qabul qiladi. Bundan $\alpha \rightarrow \beta = 0$ ekenligi kelib chiqadi, bu esa $\alpha \rightarrow \beta$ tavtologiya degan teorema shartiga zid. Biz qarama – qarshilikka duch keldik. Demak, β tavtologiya bo’lar ekan. Teorema isbotlandi.

Ta’rif 7. Agar barcha mantiqiy imkoniyatlarda α formula faqat 0 ga teng qiymat qabul qilsa, α formula **ayniy yolg‘on** yoki **ziddiyat** deyiladi va $\alpha \equiv 0$ kabi belgilanadi.

Misol 3. $\alpha(A) = \neg A \sim A$ formulaning ziddiyat ekanligini rostlik jadvalini tuzib tekshirib ko’ramiz:

A	$\neg A$	$\alpha(A) = \neg A \sim A$
0	1	0

1	0	0

Nazorat uchun savollar:

1. Qanday shart bajarilsa formulalar teng kuchli bo‘ladi?
2. Qanday shart bajarilganda formulaga tavtologiya deyiladi?
3. Qanday shart bajarilganda formulaga ziddiyat deyiladi?
4. Rostlik jadvali ta’rifini keltiring.
5. Agar α va $\alpha \rightarrow \beta$ formulalar tavtologiya bo’lsa, u holda β ham tavtologiya bo’lishini isbotlang.
6. Tavtologiyaga misol keltiring.
7. Ziddiyatga misol keltiring.

3.2. MANTIQ QONUNLARI

3.2.1. Mantiq qonunlari.

Bizga biror α, β, γ mantiqiy formulalar berilgan bo’lsin. Ushbu formulalar uchun quyidagi mantiq qonunlari har doim o’rinli bo’ladi:

1. Ikkilangan rad etish qonuni: $\neg\neg\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\alpha}$
2. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining idempotentlik qonuni:

$$\boldsymbol{\alpha \& \alpha \equiv \alpha},$$

$$\boldsymbol{\alpha \vee \alpha \equiv \alpha}$$

3. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining kommutativlik qonuni:

$$\boldsymbol{\alpha \& \beta \equiv \beta \& \alpha},$$

$$\boldsymbol{\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha}$$

4. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining assotsiativlik qonuni:

$$\boldsymbol{\alpha\&(\beta\&\gamma)\equiv(\alpha\&\beta)\&\gamma,}$$

$$\boldsymbol{\alpha\vee(\beta\vee\gamma)=(\alpha\vee\beta)\vee\gamma)}$$

5. Kon`yunktsiya va diz`yunktsiya amallarining bir-biriga nisbatan distributivlik qonuni:

$$\boldsymbol{\alpha\&(\beta\vee\gamma)\equiv(\alpha\&\beta)\vee(\alpha\&\gamma)\ ,}$$

$$\boldsymbol{\alpha\vee(\beta\&\gamma)\equiv(\alpha\vee\beta)\&(\alpha\vee\gamma)}$$

6. Yutilish qonunlari: $\boldsymbol{\alpha\&(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha,}$

$$\boldsymbol{\alpha\vee(\alpha\&\beta)\equiv\alpha}$$

7. De Morgan qonunlari**:** $\boldsymbol{\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\ \&\ \neg\beta}$

A	**B**	**¬ (A∨B)**	**⌐ A & ⌐B**
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

$$\boldsymbol{\neg(\alpha\&\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta}$$

A	**B**	**¬ (A&B)**	**⌐ A∨ ⌐B**
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

8. Tavtologiya qonuni: $\alpha \lor \neg \alpha \equiv 1$
9. Ziddiyat qonuni: $\alpha \,\&\, \neg \alpha \equiv 0$
10. 0 va 1 qonunlari: $\alpha \& 1 \equiv \alpha$, $\alpha \& 0 \equiv 0$

$\alpha \lor 1 \equiv 1$, $\alpha \lor 0 \equiv \alpha$

$\neg 1 \equiv 0$, $\neg 0 \equiv 1$

11. Kontrpozitsiya qonuni: $\alpha \to \beta \equiv \neg \beta \to \neg \alpha$

12. Implikatsiyadan qutilish qonuni: $\alpha \to \beta \equiv \neg \alpha \lor \beta$

13. Ekvivalentlikdan qutilish qonuni:

$$\alpha \sim \beta \equiv (\alpha \to \beta) \& (\beta \to \alpha) \equiv \alpha \& \beta \lor \neg \alpha \& \neg \beta$$

14. Implikatsiya xossalari: $0 \to \alpha \equiv 1$, $1 \to \alpha \equiv \alpha$,

$\alpha \to 1 \equiv 1$, $\alpha \to 0 \equiv \neg \alpha$.

Mantiq qonunlarini isbotlash uchun ularning rostlik jadvallarini tuzish yetarli.

Nazorat uchun savollar:

1. Ikkilangan rad etish qonunini keltiring va isbotlang.
2. & va $\lor$ amallarining idempotentligi qonunini keltiring va isbotlang.
3. & va $\lor$ amallarining kommutativligi qonunini keltiring va isbotlang.
4. & va $\lor$ amallarining assosiativligi qonunini keltiring va isbotlang.
5. & va $\lor$ amallarining bir-biriga nisbatan distributivlik qonunlarini keltiring va isbotlang.
6. Yutilish qonunlarini keltiring va isbotlang.

7. De Morgan qonunlarini keltiring va isbotlang.

8. $\alpha \vee \neg \alpha \equiv 1$ ekanligini isbotlang.

9. Qarama-qarshilik qonunini keltiring va isbotlang.

10. Tavtologiya va qarama-qarshilik qonunlarini isbotlang.

11. Kontrpozitsiya qonunini keltiring va isbotlang.

12. Implikatsiyadan qutilish qonunini keltiring va isbotlang.

13. Ekvivalentlikdan qutilish qoidasini keltiring va isbotlang.

14. Quyida keltirilgan qonunlarni to‘g‘riligini isbotlang

$$\alpha\to\alpha\equiv 1,\ 0\to\alpha\equiv 1,\ 1\to\alpha\equiv\alpha,\ \alpha\to 1\equiv 1,\ \alpha\to 0\equiv\neg\alpha.$$

3.2.2. Mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvalini tuzish.

Misol 1. $\alpha(A,B,C)=(A\vee B)\leftrightarrow\left(C\to\overline{A}\right)$

formulaning rostlik jadvalini tuzish uchun amallarni bajarish ketma-ketligidan foydalanamiz:

$$\alpha(0,0,0)=(0\vee 0)\leftrightarrow\left(0\to\bar{0}\right)=0\leftrightarrow(0\to 1)=0\leftrightarrow 1=0;$$

$$\alpha(0,0,1)=(0\vee 0)\leftrightarrow\left(1\to\bar{0}\right)=0\leftrightarrow(1\to 1)=0\leftrightarrow 1=0;$$

$$\alpha(0,1,0)=(0\vee 1)\leftrightarrow\left(0\to\bar{0}\right)=1\leftrightarrow(0\to 1)=1\leftrightarrow 1=1;$$

$$\alpha(0,1,1)=(0\vee 1)\leftrightarrow\left(1\to\bar{0}\right)=1\leftrightarrow(1\to 1)=1\leftrightarrow 1=1;$$

$$\alpha(1,0,0)=(1\vee 0)\leftrightarrow\left(0\to\bar{1}\right)=1\leftrightarrow(0\to 0)=1\leftrightarrow 1=1;$$

$$\alpha(1,0,1)=(1\vee 0)\leftrightarrow\left(1\to\bar{1}\right)=1\leftrightarrow(1\to 0)=1\leftrightarrow 0=0;$$

$$\alpha(1,1,0)=(1\vee 1)\leftrightarrow\left(0\to\bar{1}\right)=1\leftrightarrow(0\to 0)=1\leftrightarrow 1=1;$$

$$\alpha(1,1,1)=(1\vee 1)\leftrightarrow\left(1\to\bar{1}\right)=1\leftrightarrow(1\to 0)=1\leftrightarrow 0=0.$$

Rostlik jadvalini tuzamiz:

A	B	C	A∨B	⌐A	C→⌐A	α (A,B,C)= (A∨B)~(C→⌐A)
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Misol 2. α(A, B, C)= ⌐(A&B)→(A∨B~C)

formulaning rostlik jadvalini topish uchun amallarni bajarilish ketma-ketligi: 1) qavs ichidagi amal bajariladi, 2) ⌐, 3) &, 4) ∨ , 5) ~ va 6) → amallari birin-ketin bajariladi va formulaning rostlik jadvali tuziladi.

A	B	C	A&B	⌐ (A&B)	A∨B	A∨B~C	α(A, B, C)= ⌐(A&B)→(A∨B~C)
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1

1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	1

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyidagi mantiq funksiyalari uchun rostlik jadvallarini tuzing:

1. $\alpha(A,B,C)= \neg A\&B\vee\neg(A\vee C)$
2. $\alpha(A,B,C)=C\rightarrow(\neg A\vee\neg B)$
3. $\alpha(A,B,C)=A\&B\rightarrow\neg(A\vee\neg B)$
4. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\&\neg C)\sim(\neg A\vee B)$
5. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\vee\neg C)\sim B$
6. $\alpha(A,B,C)=(A\rightarrow B)\rightarrow\neg C$
7. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\rightarrow\neg B)\&(B\rightarrow C)$
8. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\rightarrow C)\vee\neg B$
9. $\alpha(A,B,C)=\neg(A\&B\vee C)$

10. $\alpha(A,B,C)=(A\sim B)\&(\neg B\sim\neg C)$
11. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\rightarrow\neg C)\sim B$
12. $\alpha(A,B,C)=(\neg B\vee\neg C)\rightarrow(A\vee C)$
13. $\alpha(A,B,C)=A\rightarrow(\neg B\vee\neg C)$
14. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\rightarrow B)\&(\neg B\rightarrow A)\&\neg C$
15. $\alpha(A,B,C)=C\vee A\&\neg B$
16. $\alpha(A,B,C)=A\&(\neg A\&B\vee C)\&(A\vee\neg C)$
17. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\vee B)\&(\neg B\vee A\&C)$
18. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\sim A)\&(\neg A\vee\neg C)$
19. $\alpha(A,B,C)=(A\rightarrow B)\&A\&\neg C$
20. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\&B)\rightarrow(C\&A)$
21. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\sim C)\&A\&\neg C$

22. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\vee\neg A\&\neg B)\&(C\to B)$

23. $\alpha(A,B,C)=(A\vee B\ \&\neg C\vee\neg A\&\neg B\&C)\&A\&\neg B$

24. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\&(C\to A)$

25. $\alpha(A,B,C)=(A\&\neg B\&C\vee\neg A\&\neg C)\&B$

26. $\alpha(A,B,C)=(A\oplus B\&C)\to A\vee C$

27. $\alpha(A,B,C)=(A\mid B)\to(\neg C\&B\oplus A)$

28. $\alpha(A,B,C)=(A\to\neg B)\oplus(C\vee A)$

29. $\alpha(A,B,C)=(A\vee B)\oplus(\neg C\sim B)$

30. $\alpha(A,B,C)=((A\downarrow B)\&\neg C)\to A\mid((\neg B\oplus\neg C)\sim\neg(A\vee C)$

31. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\vee\neg B)\&(A\to B)$

32. $\alpha(A,B,C)=(A\vee C\ \&\neg B\vee\neg A\&\neg B\&\neg C)\&A\&\neg B$

33. $\alpha(A,B,C)=(A\to C)\&(B\to A)$

3.3. MUKAMMAL DIZ`YUNKTIV VA KON`YUNKTIV NORMAL ShAKLLAR

3.3.1. Normal shakllar.

Barcha mulohazalarni tadqiq qilish oson bo'lishi uchun mantiqiy qonunlar yordamida biror umumiy standart ko'rinishga keltirish mumkin.

Ta`rif 1. A mulohaza va $\alpha\in\{0;1\}$ uning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bo'lsin. U holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$A^{\alpha}=\begin{cases}A, & agar \quad \alpha=1\\ \neg A, & agar \quad \alpha=0.\end{cases}$$

Tasdiq 1. $A^{\alpha}=1$ bo'ladi, faqat va faqat A=α bo'lsa.

Isbot qilish uchun rostlik jadvalini tuzish yetarli:

A	α	A^{α}

0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Barcha mulohazalarni tadqiq qilish oson bo'lishi uchun mantiqiy qonunlar yordamida ularni biror umumiy standart ko'rinishga keltirish mumkin. Masalan, har qanday Bul algebrasi formulasi uchun unga teng kuchli bo'lgan va faqatgina inkor $\neg$, kon'yunksiya & va diz'yunksiya $\vee$ amallarini o'z ichiga olgan formulani yozish mumkin. Buning uchun implikasiya va ekvivalentlikdan qutilish qonunlaridan foydalanish yetarli.

Ta'rif 2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarning yoki ularni inkorlarining kon'yunksiyasi **kon'yunktiv birhad** deyiladi.

Misol. $\neg A_1 \& A_2 \& A_3$, $\neg A_1 \& A_2 \& A_3 \& \neg A_4$, $A \& B$, $\neg A \& B$, $A \& \neg C$;

$\neg(A \& C)$ – kon`yunktiv birhad bo'la olmaydi, chunki agar qavs ochilsa, kon`yunktsiya amali diz`yunktsiya amaliga aylanib qoladi.

Ta'rif 3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohaza o'zgaruvchilarning yoki ularni inkorlarining diz'yunksiyasi **diz'yunktiv birhad** deyiladi.

Misol. $\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3$, $A \vee B \vee \neg C$.

Ta'rif 4. Kon'yunktiv birhadlarning diz'yunksiyaga d**iz'yunktiv normal shakl (DNSh)** deyiladi.

Misol. $\neg A_1 \& A_2 \& A_3 \vee \neg A_1 \& A_2 \& A_3 \& \neg A_4$, $A \& B \vee \neg A \& B \vee A \& \neg C$;

Ta'rif 5. Dizyunktiv birhadlarning kon'yunksiyasiga **kon'yunktiv normal shakl (KNSh)** deyiladi.

Misol. $(\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \& (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3)$.

Har bir formulaning cheksiz ko'p KNSh, DNSh lari mavjud.

3.3.2. Mukammal normal shakllar

Ta’rif 1. Agar birhadda A_i yoki $\neg A_i$ formulalar juftligidan faqat bittasi qatnashgan bo‘lsa, A_1, A_2, …, A_n mulohaza o‘zgaruvchilarining kon’yunktiv yoki diz’yunktiv birhadlari **mukammal** deyiladi.

Ta‘rif 2. Agar kon’yunktiv normal shakldа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohaza o‘zgaruvchilarning takrorlanmaydigan mukammal diz’yunktiv birhadlari qatnashgan bo‘lsa, u holda **mukammal kon’yunktiv normal shakl** (MKNSh) deyiladi.

Ta‘rif 3. Agar diz’yunktiv normal shakldа $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulohaza o‘zgaruvchilarning takrorlanmaydigan mukammal kon’yunktiv birhadlari qatnashgan bo‘lsa, u holda **mukammal diz’yunktiv normal shakl** (MDNSh) deyiladi.

Misol 1. $A \& B \vee \neg A \& B \vee A \& \neg B$ – MDNSh;

$(\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \& (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3)$ – MKNSh bo‘ladi.

Misol 2. $\alpha = \left(A \& B \to \overline{C}\right) \Leftrightarrow \left(C \to B \& \overline{A}\right)$ formulani DNSh ga keltiramiz.

$$\alpha = \left(\overline{A \& B} \vee \overline{C}\right) \leftrightarrow \left(\overline{C} \vee \overline{A} \& B\right) = \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \leftrightarrow \left(\overline{C} \vee \overline{A} \& B\right) = \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \& \left(\overline{C} \vee \overline{A} \& B\right) \vee$$

$$\vee \left(\overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}}\right) \& \left(\overline{\overline{C} \vee \overline{A} \& B}\right) = \overline{A} \& \overline{C} \vee \overline{B} \& \overline{C} \vee \overline{C} \& \overline{C} \vee \overline{A} \& \overline{A} \& B \vee \overline{B} \& \overline{A} \& B \vee$$

$$\vee \overline{C} \& \overline{A} \& B \vee \overline{\overline{A}} \& \overline{\overline{B}} \& \overline{\overline{C}} \& \overline{\overline{C}} \& \left(\overline{\overline{A}} \vee \overline{B}\right) = \overline{A}\,\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{C} \vee \overline{A}B \vee 0 \cdot \overline{A} \vee$$

$$\vee \overline{A}B\overline{C} \vee ABC \& \left(A \vee \overline{B}\right) = \overline{A}\,\overline{C} \vee \overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{C} \vee ABC =$$

$$= \overline{C}\left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{A}B \vee 1\right) \vee \overline{A}B \vee ABC = \overline{C} \vee B\left(\overline{A} \vee A\right)\left(\overline{A} \vee C\right) = \overline{C} \vee \overline{A}B \vee BC =$$

$$= \overline{C} \vee B \vee \overline{A}B = B \vee \overline{C} \ – \ \text{MDNSH.}$$

Misol 3. $\alpha = (A \leftrightarrow BC) \to \left(\overline{B} \leftrightarrow A\right)$ formulani MDNSh ga keltiramiz.

$$\alpha = \left(A \cdot B \cdot C \vee \overline{A} \cdot \overline{BC}\right) \to \left(\overline{B} \cdot A \vee \overline{\overline{B}} \cdot \overline{A}\right) = \overline{ABC \vee \overline{A} \cdot \left(\overline{B} \vee \overline{C}\right)} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$

$$= \overline{ABC \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{C}} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B = \overline{ABC} \cdot \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{C}} \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$

$$= \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)\left(A \vee B\right)\left(A \vee C\right) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B = \left(\overline{A}B \vee A\overline{B} \vee \overline{C}A \vee \overline{C}B\right)\left(A \vee C\right) \vee A\overline{B} \vee \overline{A}B =$$

$$=\overline{A}BC\vee\overline{B}AA\vee\overline{B}AC\vee\overline{C}AA\vee\overline{C}BA\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=$$

$$=\overline{A}BC\vee A\overline{B}\vee A\overline{B}C\vee A\overline{C}\vee AB\overline{C}\vee A\overline{B}\vee\overline{A}B=\overline{A}B(C\vee 1)\vee A\overline{B}(1\vee C)\vee A\overline{C}(1\vee B)=$$

$$=\overline{A}B\vee A\overline{B}\vee A\overline{C}\ -\text{MDNSH.}$$

Xuddi shuningdek, ixtiyoriy formulani MKNSh ga keltirish mumkin.

Nazorat uchun savollar:

1. Kon’yunktiv birhad deb nimaga aytiladi?
2. Diz’yunktiv birhad ta’rifini ayting.
3. Diz’yunktiv normal shakl deb nimaga aytiladi?
4. Kon’yunktiv normal shakl ta’rifini bering.
5. Mukammal kon’yunktiv (diz’yunktiv) birhad deganda nimani tushunasiz?
6. Mukammal kon’yunktiv normal shaklga ta’rif bering.
7. Mukammal diz’yunktiv normal shakl ta’rifini ayting.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyidagi formulalarni MDNSh va MKNShga keltiring:

1. α(x,y,z)=(x⊕y&z)→x∨z
2. α(x,y,z)=(x│y)→(¬z&y⊕x)
3. α(x,y,z)=(x→¬y)⊕(z∨x)
4. α(x,y,z)=(x∨y)⊕(¬z~y)
5. α(x,y,z)=((x↓y)&¬z)→x│((¬y⊕¬z)~¬(x∨z)
6. α(x,y,z)=(x&y∨¬y)&(x→z)
7. α(x,y,z)=(x∨z &¬y∨¬x&¬y&¬z)&x&¬y
8. α(x,y,z)=(x→z)&(y→x)
9. α(x,y,z)=((x↓y)│z)│x)↓y

10. $\alpha(x,y,z)=((x\to y)\oplus(x\to y\&z))\vee(x\downarrow y)$
11. $\alpha(x,y,z)=(x\to y)\oplus((y\to\neg z)\to x\&y)$
12. $\alpha(x,y,z)=(x\vee\neg y)\downarrow(\neg x\to(y\to z))$
13. $\alpha(x,y,z)=x\to((y\to z)\to y\&z)$
14. $\alpha(x,y,z)=(x\vee(y\to z))\&(x\oplus y)$
15. $\alpha(x,y,z)=\neg(x\downarrow y)\vee(x\sim z))\mid(x\oplus y\&z)$
16. $\alpha(x,y,z)=(\neg x\vee y)\&((y\mid\neg z)\to(x\sim x\&z))$
17. $\alpha(x,y,z)=(x\mid\neg y)\&((y\downarrow\neg z)\to(x\oplus z))$
18. $\alpha(x,y,z)=x\&((y\&z)\oplus(\neg x\to z))$

A	**B**	**C**	**α=α(A,B,C)**

19. $\alpha(x,y,z)=(((x\mid y)\downarrow\neg z)\mid y)\&(\neg y\to z)$
20. $\alpha(x,y,z)=((x\mid y)\downarrow(y\mid\neg z))\vee(x\oplus(y\to z))$
21. $\alpha(x,y,z)=(x\&y\to z)\&((x\downarrow y)\mid z)$
22. $\alpha(x,y,z)=(x\sim y)\downarrow(x\vee x\&y\vee\neg y\&z\vee\neg(x\&y\&z))$

3.3.3. Rostlik jadvali bo‘yicha mantiq funksiyasi ko‘rinishini tiklash.

Biz shu paytgacha berilgan formula uchun rostlik jadvallarini tuzishni qarab chiqdik. Savol tug’iladi: Aksincha, rostlik jadvali berilgan bo‘lsa, mantiq funksiyasini tiklash mumkinmi?

Aytaylik, bizga A, B, C mulohaza o’zgaruvchilariga bo‘liq bo‘lgan $\alpha=\alpha(A,B,C)$ formula berilgan bo‘lsin.

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ushbu rostlik jadvaliga ega bo‘lgan cheksiz ko‘p teng kuchli formulalar mavjud. Ulardan ikkitasini, ya`ni rostlik jadvalidagi birlar qatori bo’yicha va rostlik jadvalidagi nollar qatori bo’yicha mantiq funksiyasi ko‘rinishini tiklashni ko‘rib chiqamiz,

1) **Rostlik jadvalida α=α(A,B,C) formula 1 ga teng bo‘lgan qator raqamlarini yozib chiqamiz.**

2-qator

3-qator

6-qator

8-qator

Har bir qatorning mantiqiy imkoniyatlaridagina 1 ga teng bo‘lgan, boshqa imkoniyatlarda esa 0 ga teng bo‘lgan formulalarni yozib chiqamiz. Buning uchun 1 ga teng bo‘lgan qatordagi mulohazalar qiymatlarini rostga aylantirib, mantiq qonunlariga asosan mulohazalar kon’yunksiyalarini olish kerak.

2-qator uchun: $\neg A\&\neg B\&C$;

3- qator uchun: $\neg A\&B\&\neg C$;

6-qator uchun: $A\&\neg B\&C$;

8-qator uchun: $A\&B\&C$

bo‘ladi. Agar 2-,3-,6-,8-qatorlar bo‘yicha olingan formulalar diz’yunksiyalari olinsa, hosil bo‘lgan formula izlanayotgan formula bo‘ladi:

$$\alpha=\alpha(A,B,C)=\neg A\&\neg B\&C\vee\neg A\&B\&\neg C\vee A\&\neg B\&C\vee A\&B\&C \qquad (1)$$

2) **Rostlik jadvalida $\alpha=\alpha(A,B,C)$ formula 0 ga teng bo‘lgan qator nomerlarini yozib chiqamiz:** 1-qator

4-qator

5-qator

7-qator

Har bir qator mantiqiy imkoniyatlaridagina 0 ga teng bo‘lgan, boshqa imkoniyatlarda esa 1 ga teng bo‘lgan formulalarni yozib chiqamiz. Buning uchun 0 ga teng bo‘lgan qatordagi fikr o‘zgaruvchilari qiymatlarini 0(yolg‘on) ga aylantirib, fikr o‘zgaruvchilari diz’yumksiyasini olish lozim. U holda

1-qator uchun: $A\vee B\vee C$;

4-qator uchun: $A\vee\neg B\vee\neg C$;

5-qator uchun: $\neg A\vee B\vee C$;

7-qator uchun: $\neg A\vee\neg B\vee C$

bo‘ladi.

Agar qatorlar bo‘yicha olingan formulalar kon’yunksiyasi olinsa, hosil bo‘lgan formula izlanayotgan formula bo‘ladi.

$$\alpha=\alpha(A,B,C)=(A\vee B\vee C)\&(A\vee\neg B\vee\neg C)\&(\neg A\vee B\vee C)\&(\neg A\vee\neg B\vee C) \qquad (2)$$

(1) - MDNSh va (2) - MKNShlar teng kuchli, chunki ularning rostlik jadvallari bir xil. Shuning uchun ham ulardan qaysi birini tuzish kamroq vaqt talab qilsa, shu ko’rinishini tiklash maqsadga muvofiq.

Rostlik jadvali berilgan ixtiyoriy formulani yuqoridagi uslubda qurish mumkin.

Teorema 1. Har bir ayniy yolg‘on bo‘lmagan formula yagona mukammal diz’yunktiv normal shaklga ega.

Teorema 2. Har bir tavtologiya bo‘lmagan formula yagona mukammal kon’yunktiv normal shaklga ega.

Nazorat uchun savollar:

1. Mantiq formulasi ko‘rinishi 0 ga teng qiymatlari bo‘yicha qanday tiklanadi?
2. Mantiq formulasi ko‘rinishi 1 ga teng qiymatlari bo‘yicha qanday tiklanadi?
3. Tavtologiya va ziddiyat formulalari uchun MKNSh va MDNSh haqidagi teoremalarni ayting.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyidagi rostlik jadvali berilgan mantiq funksiyalarining formulasini tiklang:

A	***B***	***C***	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**

3.3.4. Jegalkin polinomi.

Ta'rif 1. Mantiqiy formulaning kon'yunktsiya va simmetrik ayirma amallari bilan ifodalangan shakliga **Jegalkin polinomi** (ko'phadi) deyiladi.

Mantiqiy formulani Bul ifodasidan Jegalkin polinomi ko'rinishiga keltirish uchun 4 ta bosqich amalga oshiriladi:

1-bosqich: Berilgan formulani DNSh ga keltirish;

2-bosqich: Quyidagi formuladan foydalanib, diz'yunktsiya amalidan qutilish kerak:

$$x \vee y = \overline{\neg x \,\&\, \neg y}\,;$$

3-bosqich: Inkor amalini simmetrik ayirma amali bilan almashtirish:

$$\neg x = x \oplus 1;$$

4-bosqich: Hosil bo'lgan ifodani soddalashtirish, bunda

$$x \oplus x = 0$$

tenglikdan foydalaniladi.

Misol. $x \to y = \neg x \vee y = \overline{\neg\neg x \,\&\, \neg y} = \overline{x \,\&\, \neg y} = (x \,\&\, (y \oplus 1)) \oplus 1 =$

$$= (x \,\&\, y \oplus x) \oplus 1 = x \,\&\, y \oplus x \oplus 1.$$

Ta'rif 2. O'zgaruvchilarida inkor qatnashmagan kon'yunktsiyaga **monoton kon'yunktsiya** deyiladi.

Ko'yunktsiya amali bilan birlashtirilgan o'zgaruvchilar soniga **polinom rangi** deyiladi.

Ta'rif 3. Polinomda qatnashgan hadlarning eng katta rangi **Jegalkin ko'phadi darajasi** deyiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Jegalkin polinomi ta'rifini ayting. Misol keltiring.
2. Jegalkin ko'phadi darajasi deganda nimani tushunasiz?
3. Bul ko'phadlari bilan Jegalkin ko'phadining farqi nimada?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyidagi Bul formulalarini Jegalkin polinomiga o'tkazing:

1. $\alpha(A,B,C)= \neg A\&B\vee\neg(A\vee C)$
2. $\alpha (A,B,C)=C\to(\neg A\vee\neg B)$
3. $\alpha (A,B,C)=A\&B\to\neg(A\vee\neg B)$
4. $\alpha (A,B,C)=(A\&B\&\neg C)\sim(\neg A\vee B)$
5. $\alpha (A,B,C)=(\neg A\vee\neg C)\sim B$
6. $\alpha (A,B,C)=(A\to B)\to\neg C$

7. $\alpha (A,B,C)=(\neg A\to\neg B)\&(B\to C)$
8. $\alpha (A,B,C)=A\&(B\to C)\vee\neg B$
9. $\alpha (A,B,C)=\neg(A\&B\vee C)$
10. $\alpha(A,B,C)=(A\sim B)\&(\neg B\sim\neg C)$
11. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\to\neg C)\sim B$
12. $\alpha (A,B,C)=A\to(\neg B\vee\neg C)$
13. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\to B)\&(\neg B\to A)\&\neg C$
14. $\alpha(A,B,C)=C\vee A\&\neg B$
15. $\alpha(A,B,C)=A\&(\neg A\&B\vee C)\&(A\vee\neg C)$

16. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\vee B)\&(\neg B\vee A\&C)$

17. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\sim A)\&(\neg A\vee\neg C)$

18. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\&A\&\neg C$

19. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\&B)\to(C\&A)$

20. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\sim C)\&A\&\neg C$

21. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\vee\neg A\&\neg B)\&(C\to B)$

22. $\alpha(A,B,C)=(A\vee B\&\neg C\vee\neg A\&\neg B\&C)\&A\&\neg B$

23. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\&(C\to A)$

24. $\alpha(A,B,C)=(A\&\neg B\&C\vee\neg A\&\neg C)\&B$

25. $\alpha(A,B,C)=(A\oplus B\&C)\to A\vee C$

3.4. RELE KONTAKT SXEMALARI

3.4.1. Ikkilik mantiqiy elementlar.

Bul ifodalari Djorj Bul (1815-1864 yy) tomonidan rivojlantirilib, XX asrning 30-yillarida raqamli mantiqiy sxemalarda qo‘llanilgan edi.

Raqamli elektron qurilmalarni tuzish bilan shug‘ullanuvchi mutaxassislar Bul algebrasi masalalarini chuqur o‘rganishlari kerak bo’ladi. Bul algebrasi funktsiyalarining asosiy tadbiqlaridan biri bu funktsional elementlar sxemasini qurishdir. Bunga misol qilib, EVM, mikrokal'kulyator va boshqa raqamli elektron qurilmalarning ishlash printsipini ko'rsatishimiz mumkin.

Har qanday raqamli sxemalarning asosiy tarkibiy qismini mantiqiy elementlar tashkil etadi.

Agar C zanjirdan tok o'tayotgan bo'lsa, u holda $C=1$ deb;

agar C zanjirdan tok o'tmasa, u holda $C=0$ deb yozishimiz mumkin.

Demak, mantiqiy elementlar ikkita raqam, 0 va 1 raqamlari bilan ish ko'radi, shuning uchun ham **ikkilik mantiqiy elementlar** deyiladi.

Raqamli elektrotexnika sohasida ishlaydigan mutaxassislar ikkilik mantiqiy elementlarga bilan har kuni ro'para kelishadi. Mantiqiy elementlarni oddiy o‘chirib-yoqgichlarda, releda, vakuum lampa, tranzistorlar, diodlar yoki integral sxemalarda yig‘ish mumkin. Integral

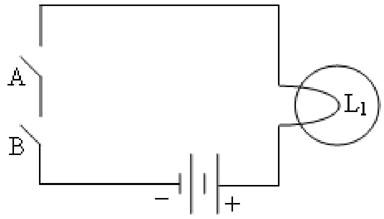
sxemalarning keng qo‘llanilishi va arzonligini hisobga olsak, raqamli qurilmalarni faqat integral sxemalarning o‘zidan yig‘ish maqsadga muvofiq. Asosiy mantiqiy elementlar 7 xil: “va”, “yoki”, “emas”,“va-emas”, “yoki-emas”, “birortasi, lekin hammasi emas”, “birortasi, lekin hammasi emasga yo'l qo'ymaydigan”.

Mantiqiy elementlar u yoki bu vazifani bajarganligi sababli ularni **funktsional elementlar** deyiladi. Funktsional elementlarni bir-biriga ulash natijasida **funktsional sxemalar** hosil qilinadi.

1. “Va” mantiqiy elementi.

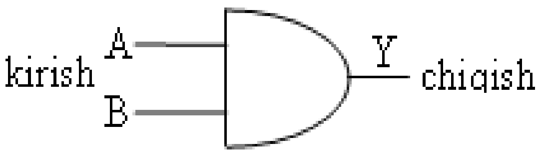
“Va” mantiqiy elementini ba'zan “hammasi yoki hech narsa” elementi deb ham yuritiladi. Mexanik o‘chirib-yoqgich orqali “va” mantiqiy elementining ishlash printsipini ko‘rib chiqamiz.

Agar zanjirda A va B kalitlar ketma-ket ulangan bo‘lsa, u holda C zanjirda L_1 lampa yonishi uchun A va B kalitlarning ikkalasi ham yopilishi kerak, ya’ni *A=1* va *B=1* bo’lishi kerak. Kon’yunktsiya xuddi shu xossalarga ega. Demak, “va” mantiqiy elementining ishlash printsipi kon’yunktsiya bilan bir xilda ekan.



3.4. Rele kontakt sxemalari 185

“Va” mantiqiy elementining sxematik tasvirida ikkita kirish, bitta chiqish bo’lib, u quyidagicha:



“Mantiqiy” terminidan odatda biror bir qarorni qabul qilish jarayonida foydalaniladi. Shuning uchun ham mantiqiy elementni shunday sxema deyish mumkinki, unda kirish signallariga asoslanib, chiqishda “ha” yoki “yo‘q” deyish hal qilinadi. Yuqorida ko‘rganimizdek, lampa yonishi uchun uning ikkala kirish joyida “ha” signali (kalitlar yopilishi kerak) berilishi kerak.

Rostlik jadvali “va” mantiqiy elementining ishlashi haqida to‘liq ma’lumot beradi:

A	B	Y=A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

“Va” mantiqiy elementi uchun kiritilgan belgilash A va B kirish signallari “va” mantiqiy funktsiyasi bilan bog‘langan bo‘lib, chiqishda Y

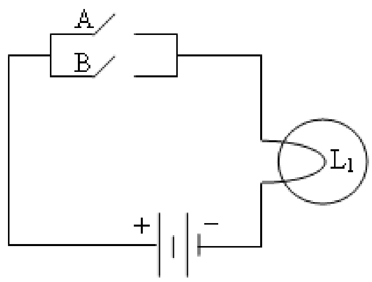
signal paydo bo‘ladi” deb o‘qiladi. Ushbu tasdiqning qisqartirilgan ifodasi **Bul ifodasi (A&B)** deyiladi. Bul ifodasi – universal til bo‘lib, injenerlar va texnik xodimlar tomonidan raqamli texnikada keng qo‘llaniladi.

2. “Yoki” mantiqiy elementi

“Yoki” mantiqiy elementini ba’zan “hech bo‘lmasa birortasi yoki hammasi” deb ham yuritiladi. Oddiy o‘chirib-yoqgichlar yordamida “yoki” mantiqiy elementining ishlash printsipini quyidagicha tushuntirish mumkin:

C zanjirda A va B kalitlar parallel ulangan bo‘lsa, “yoki” mantiqiy elementi ishlaydi:

Chizmadan ko’rinadiki,



kalitlarning hech bo‘lmaganda bittasini yoki ikkalasini ham yopganda L_1 lampa yonadi.

“Yoki” mantiqiy elementi sxematik ko’rinishi quyidagicha:

.

Bul ifodasi $A \cup B$ (yoki $A+B=Y$) ko‘rinishda bo‘1adi.

“Yoki” mantiqiy elementining rostlik jadvali uning ishlashi haqida to‘liq ma’lumot beradi:

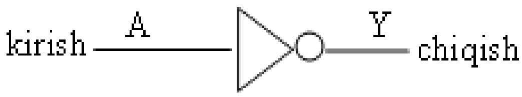
A	**B**	**A$\vee$B**

0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. “Emas” mantiqiy elementi

“Va” hamda “yoki” mantiqiy elementlari ikkita kirish va bitta chiqishga ega edi. “Emas” sxemasida esa bitta kirish va bitta chiqish mavjud. “Emas” mantiqiy elementini **invertor** deb ham yuritiladi. Uning asosiy vazifasi chiqishda kirish signaliga teskari bo‘lgan signalni ta’minlashdan iborat.

Invertor quyidagicha belgilanadi:



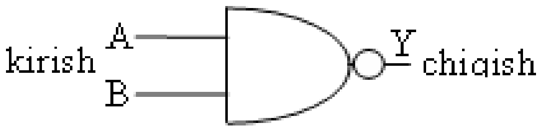
Bul ifodasi $\overline{A}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

“Emas” mantiqiy elementi uchun rostlik jadvali:

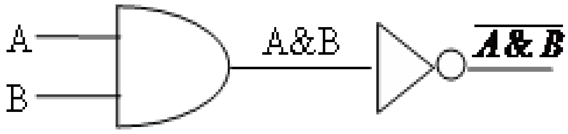
A	**¬A**
1	0
0	1

4. “Va-emas” mantiqiy elementi

“Va-emas” mantiqiy elementini Sheffer shtrixi deb ham yuritiladi, u inventorlangan “va”ni amalga oshiradi. Ushbu mantiqiy amal quyidagicha belgilanadi:



Bu belgini quyidagicha yoyib ham yozish mumkin.



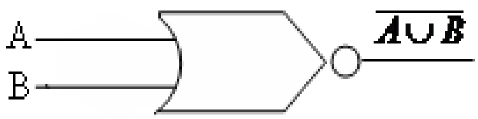
“Va-emas” mantiqiy elementining Bul ifodasi $\overline{A\& B}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Va-emas” mantiqiy elementining rostlik jadvali yordamida ishlash printsipini ko’rish mumkin:

A	B	A&B	Y= $\overline{A\& B}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

5. “Yoki-emas” mantiqiy elementi

“Yoki-emas” mantiqiy elementini Pirs strelkasi deb ham yuritiladi, u inventorlangan “yoki”ni amalga oshiradi, sxematik ko’rinishi quyidagicha:



Bu belgini quyidagicha yoyib ham yozish mumkin:

“Yoki-emas” mantiqiy elementining rostlik jadvali yordamida uning ishlash printsipini ko’rish mumkin:

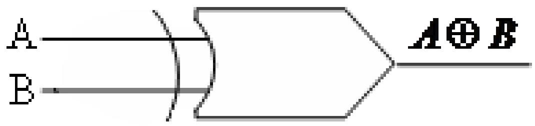
A	B	A\/B	Y= $\overline{A \vee B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

6. “Birortasi, lekin hammasi emas”

Ushbu mantiqiy elementning Bul ifodasi:

$$A \oplus B = \neg(A \sim B)$$

Uning sxematik ko’rinishi quyidagicha:



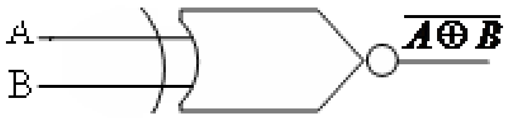
“Birortasi, lekin hammasi emas” mantiqiy elementining ishlash printsipi quyidagicha:

A	**B**	**A⊕B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7. “Birortasi, lekin hammasi emasga yo’l qo’ymaydigan”

Mantiqiy elementning Bul ifodasi: $\neg(A \oplus B) = A \sim B$

Uning sxematik ko’rinishi quyidagicha:

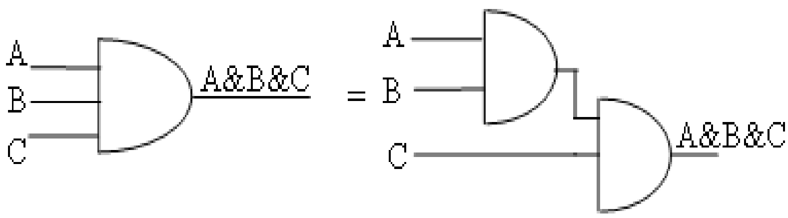


“Birortasi, lekin hammasi emasga yo’l qo’ymaydigan” mantiqiy elementining ishlash printsipi quyidagicha:

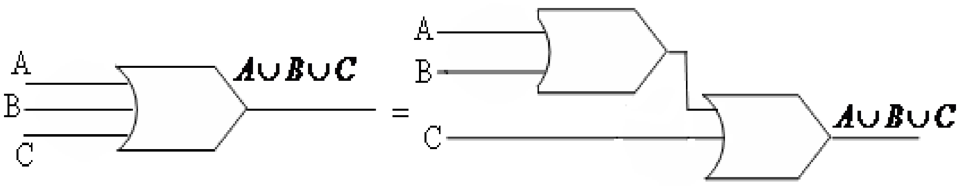
A	B	A⊕B	¬(A⊕B) =A~B
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Ikkitadan ortiq kirishga ega bo‘lgan mantiqiy elementlar uchun ham mos ravishda quyidagicha belgilashlar ishlatiladi.

3 ta kirishga ega “va” mantiqiy elementi:



3 ta kirishga ega bo’lgan “yoki” mantiqiy elementining sxematik ko’rinishi quyidagicha:



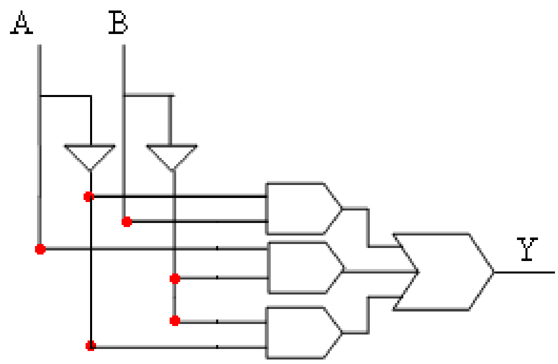
3.4.2. Ikkilik mantiqiy elementlarining qo‘llanilishi.

Mantiqiy elementlarning shartli belgilanishi, rostlik jadvallari va Bul ifodalari elektrotexnika sohasidagi real masalalarni yechishda juda qo‘l keladi. Har qanday fikrlar algebrasi formulasini “inkor - ¬”, “va - &”, “yoki – V” amallari orqali yozish mumkin, buning uchun “implikatsiya - →”, “ekvivalentlik - ~” dan qutilish qoidalarini qo‘llash yetarli.

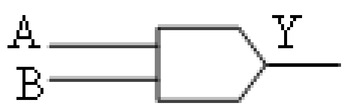
¬, & va V amallaridan iborat formulaga mos paralel va ketma-ket ulash qoidalariga asoslangan sxemalar tuzish mumkin va aksincha, ixtiyoriy raqamli sxemaga mos ¬, & va V amallaridan foydalanib, Bul formulasini tuzish mumkin.

Agar biror bir murakkab sxema berilgan bo‘lsa, unga mos formulani yoyib, mantiq qonunlariga asosan soddalashtirib, soddalashgan formulaga mos sxemani qayta tuzilsa, hosil bo‘lgan soddalashgan sxema boshlang‘ich sxemaning vazifasini bajaradi. Bu amaliyotga **minimallashtirish** deyiladi.

Misol. Ushbu $(\overline{A} \& B) V (A \& \overline{B}) V (\overline{A} \& \overline{B})$ formulaga mos sxema:



Yuqoridagi sxemani mantiq qonunlari yordamida soddalashtirib, tuzilgan sxema



Ikkala sxema ham bir xil vazifani bajaradi, chunki ularning rostlik jadvallari bir xil.

3.4.3. Mantiqiy sxemalarda analiz va sintez masalalari.

Sintez. Mantiqiy sxemalarning sintezi masalasi quyidagi 3 ta bosqichdan iborat:

1) berilgan fizikaviy ma`lumotlar bo'yicha biror matematik ifoda (tenglama, formula) tuziladi va minimallashtiriladi;

2) minimallashtirilgan matematik ifodaning qandaydir funktsiyani bajaruvchi sxemasi chiziladi;

3) hosil qilingan sxema biror vazifani bajaruvchi haqiqiy sxemaga aylantiriladi.

Analiz. Analiz masalasi – bu ikkinchi bosqichning teskarisi hisoblanadi, ya`ni berilgan mantiqiy sxema bo'yicha matematik ifodani tuzish va tadqiq qilish.

Bizni bu uchta bosqichdan ikkinchisi ko'proq qiziqtiradi. Shuning uchun har doim sintez masalasini yechishda biror mantiqiy $\alpha=\alpha(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ funktsiya berilgan bo'ladi, maqsad chiqishda berilgan mantiqiy funktsiya α ning vazifasini bajaruvchi mantiqiy zanjir sxemasini tuzishdan iborat.

Bundan keyin mantiqiy zanjir sxemasi deganda „va", „yoki", „emas" Bul algebrasi bazislari orqali hosil qilingan sxemani tushunamiz.

Misol. (Sintez) Talabalarga 3 kishi yashirin ovoz berganda ko'pchilik ovoz bilan qaror qabul qiladigan sxemani tuzish vazifasi yuklatilgan bo'lsin. Chiqarilgan qarorga ovoz beruvchilar rozi bo'lishsa,
o'zlariga tegishli tugmachani bosishadi, aks holda tugmachalarga tegishmaydi. Agar ko'pchilik, ya`ni kamida ikki kishi „ha" deb ovoz berib, o'zlariga tegishli tugmachalarni bosganda signal chirog'i yonishi kerak.

Hayotiy masalani mantiqiy ko'rinishga o'tkazish maqsadida ovoz beruvchilarni A, B, C mulohaza o'zgaruvchilari deb olamiz, u holda

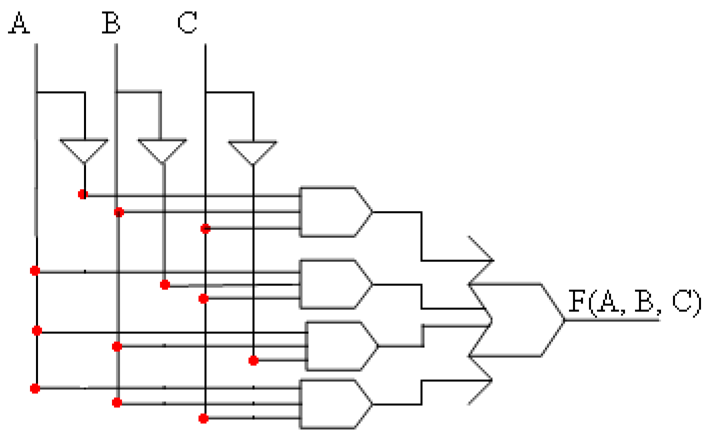
A,B, C, mulohaza o'zgaruvchilari 2 xil qiymat qabul qilishi mumkin: ha deb ovoz berishganda – 1, yo’q deb ovoz berishganda esa – 0 qiymat, betaraf bo’lgan holni inobatga olmaymiz. U holda berilgan masalaning rostlik jadvali quyidagi ko’rinishda bo’ladi.

A	B	C	α=α(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Ushbu rostlik jadvalining birlar qatori bo’yicha MDNSh dagi formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$\alpha(A, B, C)= \neg A\&B\&C \vee A\&\neg B\&C \vee A\&B\&\neg C \vee A\&B\&C$

Yuqoridagi formulaga mos sxema esa quyidagicha bo‘ladi:



3 ta invertor, 4 ta uchtadan kirishga ega bo‘lgan “va”, 1 ta to‘rtta kirishga ega bo‘lgan “yoki”, jami 8 ta elementdan iborat sxema hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi formulani mantiq qonunlariga ko‘ra soddalashtiramiz:

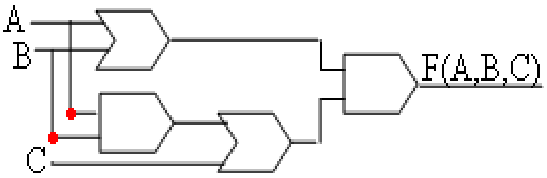
$$\alpha(A,B,C)=\neg A\&B\&C\vee A\&\neg B\&C\vee A\&B\&\neg C\vee A\&B\&C=$$

$$=A\&B\&(\neg C\vee C)\vee C\&(\neg A\&B\vee A\&\neg B)=$$

$$=A\&B\vee C)\&(A\&B\vee\neg A\&B\vee A\&\neg B)=(A\&B\vee C)\&(B\vee A\&\neg B)=$$

$$=(A\vee B)\&(A\&B\vee C)$$

Minimallashtirilgan formulaga mos sxema quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.



Ikkala sxema ham bir xil vazifani bajaradi, chunki ularga mos formulalarning rostlik jadvali bir xil, lekin soddalashgan sxema ikki baravar kam elementdan iborat bo‘lsa-da, qiymat jihatdan undan ham ko‘proq sarf xarajatni talab qiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Nima uchun mantiqiy elementlarga ikkilik mantiqiy elementlar deyiladi?
2. Bul ifodalari qachondan boshlab raqamli elektron sxemalarda qo’llanila boshlandi?

3. Asosiy mantiqiy elementlarni sanab bering.
4. “Va” mantiqiy elementining ishlash printsipini tushuntiring.
5. “Yoki” mantiqiy elementi qachon ishlaydi?
6. Invertorning ishlash printsipini tushuntiring.
7. “Va-emas” ikkilik mantiqiy elementi qanday ishlaydi?
8. “Yoki-emas” ikkilik mantiqiy elementining ishlash printsipini tushuntiring.
9. Minimallashtirish masalasi deganda nimani tushunasiz?
10. Ikkitadan ortiq kirishga ega bo‘lgan mantiqiy elementlar uchun qanday belgilashlar ishlatiladi?
11. Mantiqiy sxemalar sintezini tushuntiring.
12. Mantiqiy sxemalarda analiz deganda nimani tushunasiz?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

Quyidagi mantiq algebrasi formulalar uchun mantiqiy sxemalar tuzing:

1. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\&\neg C)\sim(\neg A\vee B)$
2. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\vee\neg C)\sim B$
3. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\to\neg C$
4. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\to\neg B)\&(B\to C)$
5. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\to C)\vee\neg B$
6. $\alpha(A,B,C)=\neg(A\&B\vee C)\&(\neg B\sim\neg C)$
7. $\alpha(A,B,C)=(A\sim B)\&(\neg B\sim\neg C)$
8. $\alpha(A,B,C)=(A\oplus B\&C)\to A\vee C$
9. $\alpha(A,B,C)=((A\to B)\oplus(A\to B\&C))\vee(A\downarrow B)$
10. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\oplus((B\to\neg C)\to A\&B)$
11. $\alpha(A,B,C)=(A\vee\neg B)\downarrow(\neg A\to(B\to C))$

12. $\alpha(A,B,C)=(\neg A\&B)\to(C\&A)$

13. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\sim C)\&A\&\neg C$

14. $\alpha(A,B,C)=(A\&B\vee\neg A\&\neg B)\&(C\to B)$

15. $\alpha(A,B,C)=(A\vee B\ \&\neg C\vee\neg A\&\neg B\&C)\&A\&\neg B$

16. $\alpha(A,B,C)=(A\to B)\&(C\to A)$

17. $\alpha(A,B,C)=(A\oplus C\vee\neg A\&\neg C)\&B$

18. $\alpha(A,B,C)=(A\&B)\vee((B\to\neg C)\to A\&B)$

19. $\alpha(A,B,C)=(A\vee\neg B)\vee(A\to(B\to C))$

20. $\alpha(A,B,C)=A\&(B\to C)\ \&B$

3.4.4. Minimallashtirishning jadval (grafik) usullari.

Mukammal diz'yunktiv normal shakllarni minimallashtirishda Bul ifodalarida bir-biriga qo'shni hadlarni topish va bu hadlarni birlashtirish katta mehnat talab qiladi. Bu esa soddalashtirishda analitik usulning kamchiligi hisoblanadi.

Amaliyotda mantiq funktsiyalarini minimallashtirish uchun mantiqiy o'zgaruvchilar soni kamroq bo'lsa, jadval usuli birmuncha qulay hisoblanadi. Jadval usulining ustunligi:

1) birlashtiriladigan hadlarni izlash oson;

2) topilgan hadlarni birlashtirish oson;

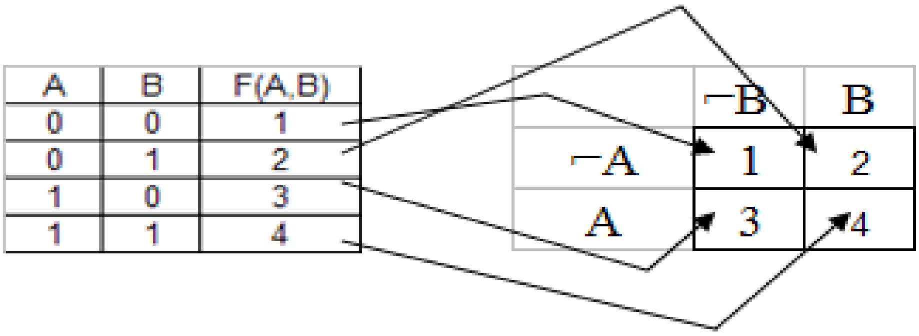
3) funktsiyaning barcha minimal shakllarini topish mumkin.

Jadval usullari quyidagilar: Karno kartalari, Veych, Venn diagrammalari, yechimlar daraxti hisoblanadi. Ushbu mavzuda biz Karno kartalari metodi bilan tanishamiz.

1953 yil Moris Karno Bul ifodalarini soddalashtirish va grafik tasvirlash tizimini ishlab chiqqanligi haqida maqola e’lon qildi. Hozirda bu metod Karno kartalari metodi deb yuritiladi. Karno kartalarining quyidagi turlarini ko’rib chiqamiz:

1. Ikki o‘zgaruvchili Karno kartasi.

Aytaylik, Bul ifodasi ikkita mulohaza o’zgaruvchisidan tashkil topgan bo’lsin va quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo’lsin. U holda ikki o‘zgaruvchili Karno kartasi quyidagicha bo’ladi:



Agar F(A,B) formula MDNSh da berilgan bo’lsa, u holda

№1 o’ringa ¬A&¬B

№2 o’ringa ¬A&B

№3 o’ringa A&¬B

№4 o’ringa A&B

hadlar mos kelib, shunday hadlar F(A,B) formulada mavjud bo’lsa, Karno kartasida bu hadlarga mos o’rinlarga 1, qolgan o’rinlarga 0 raqami yoziladi.

Ikki o‘zgaruvchili Karno kartasi to’ldirilgandan keyin 2 ning darajalaricha birlarni o’z ichiga oladigan (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …) konturlar chiziladi. Bu konturlar gorizontaliga yoki vertikaliga bir-biriga qo’shni bo’lgan birlarni o’z ichiga olishi kerak. Konturga olish jarayoni barcha birlar kontur ichida ichida qolguncha davom ettiriladi va konturlar iloji boricha maksimal ikkining darajalaricha birlarni o’z ichiga olishi kerak.

Konturga olish jarayoni tugagandan keyin har bir kontur ichida qatnashgan bir-biriga teskari bo'lgan fikr o'zgaruvchilari tushirib qoldiriladi va har bir konturda qolgan o'zgaruvchilarning diz'yunktsiyasi olinadi. Hosil bo'lgan ifoda Karno kartasi bo'yicha minimallashgan ifoda bo'lib, undan ortiq minimallashtirish mumkin emas.

Misol 1. Quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan ifodani soddalashtiring:

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	$\neg$B	B
$\neg$A	1	0
A	1	1

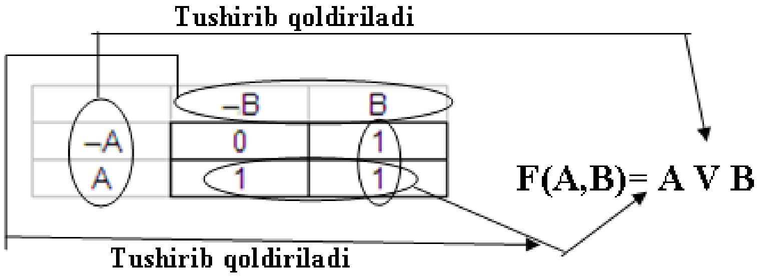
Ifodaning to'liq ko'rinishi: $F(A,B)=\neg A\&\neg B\vee A\&\neg B\vee A\&B$

minimal ko'rinishi esa: $F(A,B)= A\vee\neg B$

Misol2. $(A,B)=\neg A\&B\vee A\&\neg B\vee A\&B$ formulaga mos

Karno kartasi quyidagi ko'rinishni oladi, ya'ni karta MDNSh bo'yicha tuziladi:

	$\neg$B	B
$\neg$A	0	1
A	1	1



Yuqorida keltirilgan sxemaga muvofiq gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo‘shni bo‘lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to‘ldiruvchi o‘zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o‘zgaruvchilarning diz’yunksiyasi olinadi. Natijada formula quyidagi ko‘rinishni oladi: F(A, B)= A$\vee$B.

2. Uch o‘zgaruvchili Karno kartalari

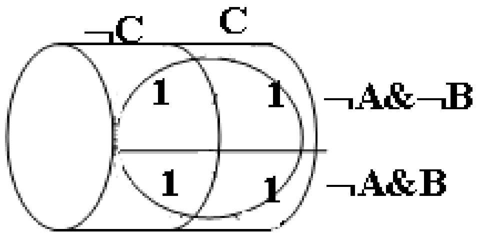
Aytaylik, Bul ifodasi uchta mulohaza o’zgaruvchisidan tashkil topgan bo’lsin va quyidagi rostlik jadvali bilan berilgan bo’lsin. U holda uch o‘zgaruvchili Karno kartasi quyidagicha bo’ladi:

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	№1
0	0	1	№2
0	1	0	№3
0	1	1	№4
1	0	0	№5
1	0	1	№6
1	1	0	№7
1	1	1	№8

	¬C	C
¬A&¬B	№1	№2
¬A&B	№3	№4
A&B	№7	№8
A&¬B	№5	№6

3.4. Rele kontakt sxemalari 203

Uch o‘zgaruvchili Karno kartalarida ham ikki o‘zgaruvchili Karno kartalaridagidek gorizontaliga, vertikaliga bir-biriga qo‘shni bo‘lgan birlar konturlarga birlashtiriladi. Har bir kontur iloji boricha ko‘proq ikkini darajalaricha birlarni (2^1, 2^2, 2^3,…) o‘z ichiga olishi va kontur olish jarayoni barcha birlar kontur ichida qolguncha davom ettirilishi lozim. Har bir kontur soddalashtirilgan Bul ifodasining yangi a’zosini bildiradi. Har bir konturda qatnashgan bir-birini to‘ldiruvchi o‘zgaruvchilar tushirib qoldiriladi, har bir konturdan qolgan o‘zgaruvchilarning diz’yunksiyasi olinadi. Bundan tashqari uch o‘zgaruvchili Karno kartalarida 1- va 4-qatorlar bir-biriga qo‘shni hisoblanadi, chunki karta gorizontaliga o‘ralganda 1- va 4- qatorlar bir-biriga qo‘shni bo‘lib qoladi.

F(A,B,C) formula 

quyidagicha rostlik jadvali bilan berilgan bo‘lsin:

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

	¬C	C
¬A&¬B	1	0
¬A&B	1	1
A&B	1	1
A&¬B	1	0

¬A va A, ¬B va B lar bir-birini to‘ldiradi

	¬C	C
¬A&¬B	1	0
¬A&B	1	1
A&B	1	1
A&¬B	1	0

$$F(A,B,C)=B\vee\neg C$$

¬C va C, ¬A va A lar bir-birini to‘ldiradi

3. To‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalari

To‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalarida ikki va uch o’zgaruvchili Karno kartalaridagi usullar qo‘llaniladi. Faqatgina to‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalarida birinchi va to‘r tinchi ustunlar, birinchi va to‘rtinchi qatorlar bir-biriga qo‘shni hisoblanadi, chunki ular mos ravishda vertikal yoki gorizontal silindrlarga o‘ralsa, ushbu ustunlar yoki qatorlar bir-biriga qo‘shni bo‘lib qoladi. To‘rt o‘zgaruvchili Karno kartalarining to‘rtta burchagi ham bir-biriga qo‘shni hisoblanadi, chunki karta

	¬C&¬D	¬C&D	C&D	C&¬D
¬A&¬B	1	0	0	1
¬A&B	1	1	1	1
A&B	1	1	1	1
A&¬B	1	0	0	1

“sferaga” o‘ralsa, to‘rtta burchak bir-biriga qo‘shniga aylanadi.

Masalan, F(0,0,0,1)=F(0,0,1,1)=F(1,0,0,1)=F(1,0,1,1)=0

Karno kartasi bo‘yicha formulaning soddalashgan ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi: F(A,B,C)= B∨¬D.

Misol. Rostlik jadvali quyidagicha bo`lgan formula uchun minimizatsiyalash masalasini qaraymiz:

A	B	C	D	$a\ (A, B, C, D)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Bu jadvalga mos funksiya uchun mukammal diz’yunktiv normal shaklni quyidagicha tuzamiz:

$$a(A, B, C, D) = \neg A \wedge B \wedge C \wedge D \vee A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \vee A \wedge B \wedge \neg C \wedge D \vee$$
$$\vee A \wedge B \wedge C \wedge \neg D \vee A \wedge B \wedge C \wedge D.$$

Bu formulani Karno kartasidan foydalanib soddalashtiramiz:

	$\neg C \wedge \neg D$	$\neg C \wedge D$	$C \wedge D$	$C \wedge \neg D$
$\neg A \wedge \neg B$	0	0	0	0
$\neg A \wedge B$	0	0	1	0
$A \wedge B$	0	1	1	1
$A \wedge \neg B$	0	0	1	0

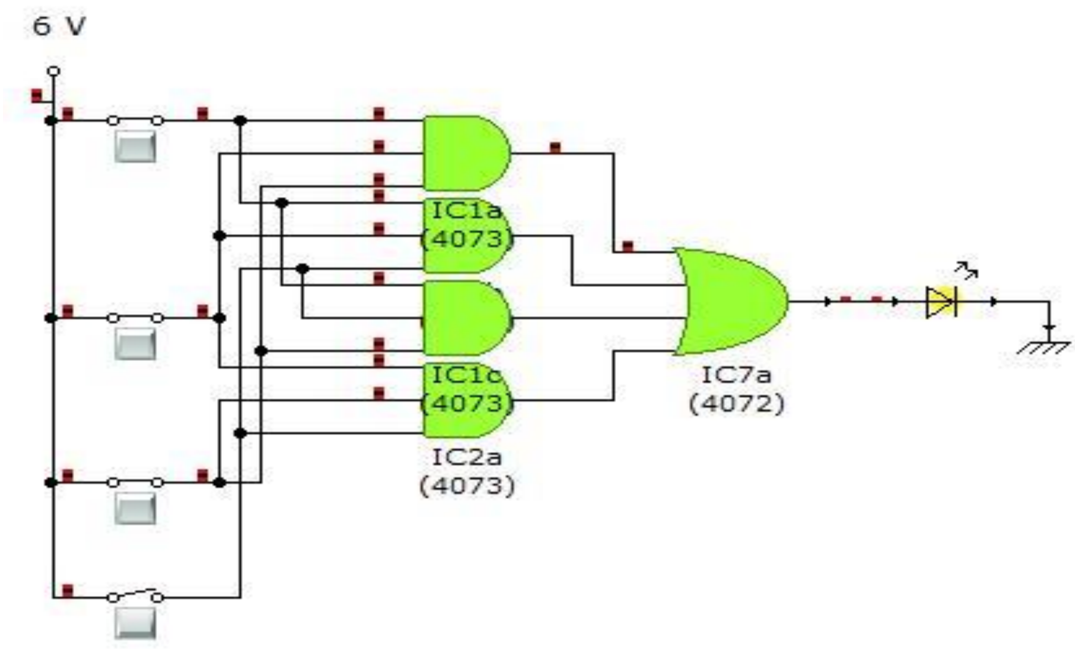
Karno kartasidan ko`rinib turibdiki, funksiyaning ko`rinishi

$$a(A, B, C, D) = A \wedge B \wedge C \vee A \wedge B \wedge D \vee B \wedge C \wedge D \vee A \wedge C \wedge D$$

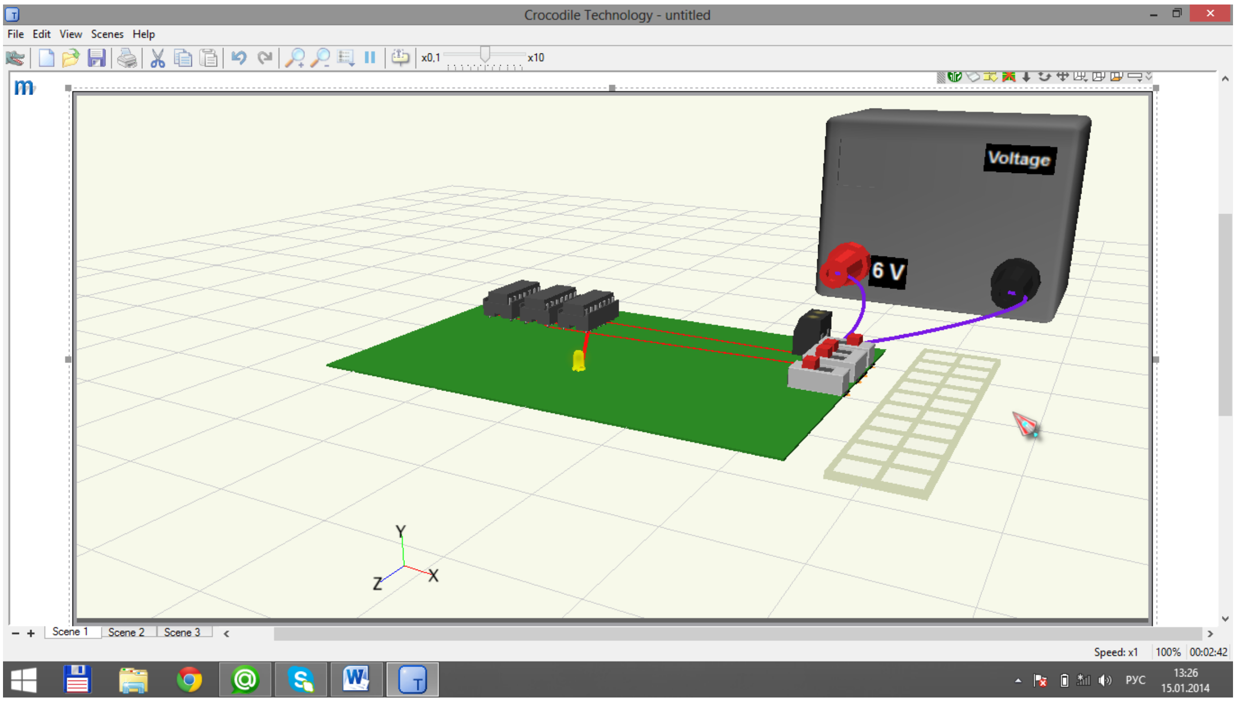
shaklda bo`ladi:

Ushbu formulaga mos sxemaning ***Crocodile*** **dasturiy ta’minoti** yordamida ishlab chiqilgan ko`rinishini keltiramiz:

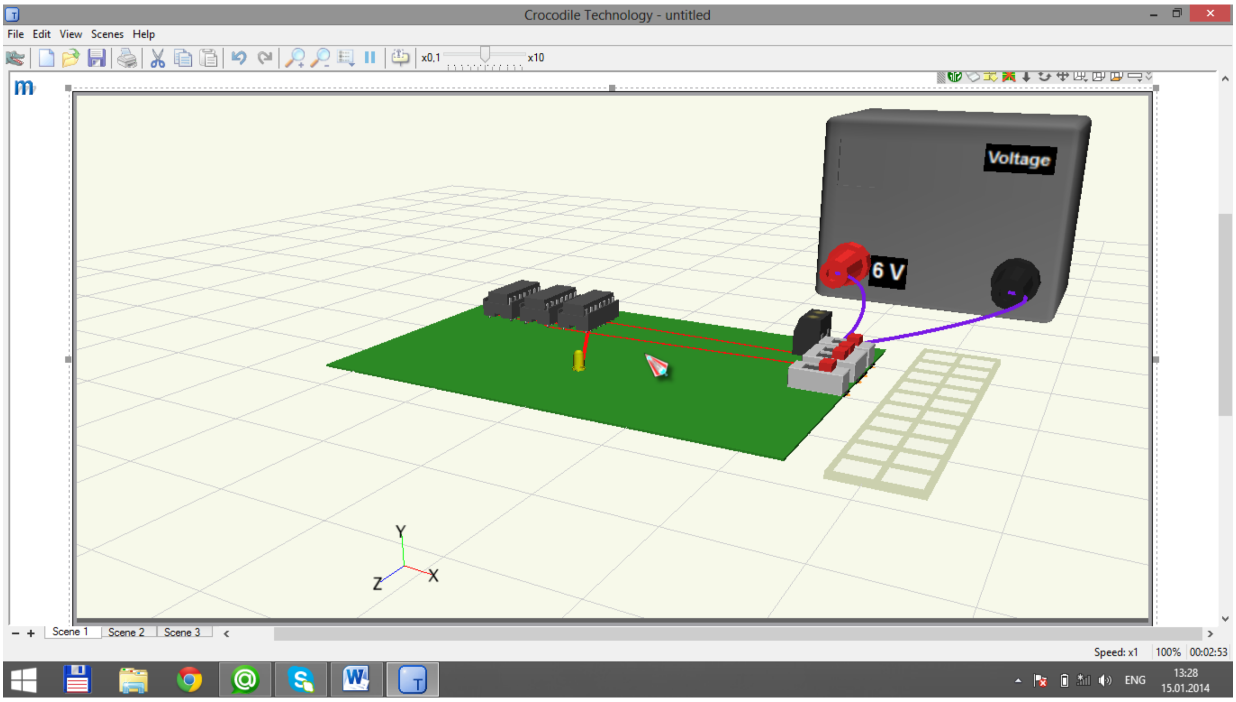
Sxemaning fizik ko`rinishi quyidagicha bo`ladi:



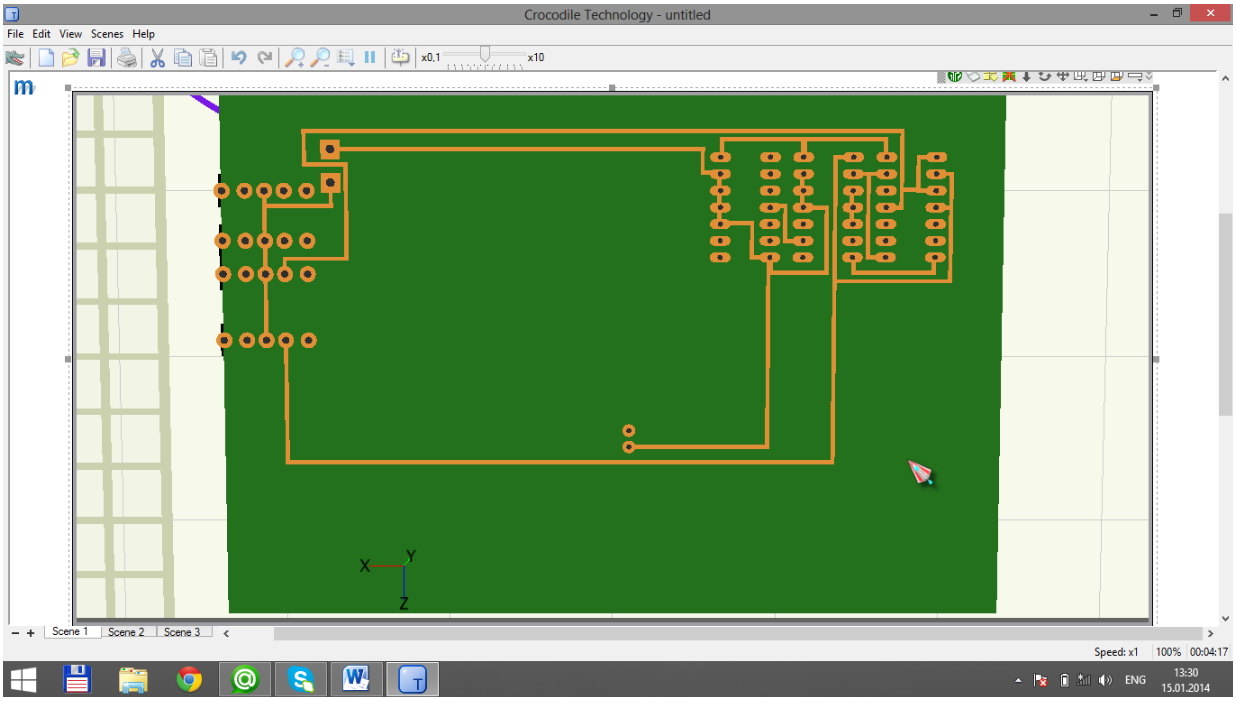
Ulanish amalga oshgan holatning, ya’ni yoqiq holatning tasviri quyidagicha bo`ladi:



Ulanish amalga oshmagan holatning, ya’ni o`chiq holatning tasviri quyidagicha bo`ladi:



Plataning orqa tomonidan sxemani ko’rinishi quyidagicha bo`ladi:

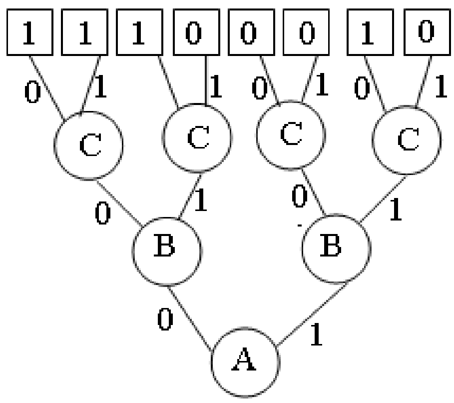


3.4.5. Yechimlar daraxti

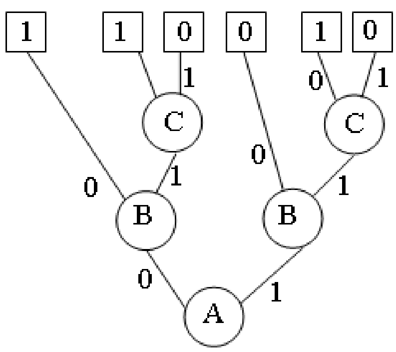
Dasturlashda xotirani va vaqtni tejash maqsadida mantiq algebrasi funksiyalari bilam ishlaganda, ularni “tabiiy” (massivlarda) ifodalamasdan, mantiqiy amallarni bajarishga maxsus yo‘naltirilgan ko‘rinishda ifodalash samaraliroq hisoblanadi. Buning uchun n o‘zgaruvchili Bul funksiyasi rostlik jadvalini n+1 balandlikdagi to‘liq binar daraxt ko‘rinishida ifodalash mumkin. Daraxt yaruslari (qavatlari) o‘zgaruvchilarga mos keladi, daraxt shoxlari esa o‘zgaruvchilar qiymatlariga mos keladi. Har bir mulohaza o’zgaruvchisidan ikkita shih chiqib, chap shoxga – 0, o‘ng shoxga esa – 1 qiymat mos qo‘yiladi. Daraxt yaproqlari – oxirgi yarusda esa daraxt ildizidan shu yaproqgacha bo‘lgan yo‘lga mos kortejdagi funksiya qiymatlari mos qo‘yiladi. Bunday daraxt **yechimlar daraxti** yoki **semantik daraxt** deyiladi.

Buni quyidagicha misolda ko‘rib chiqamiz. F(A,B,C) funksiya quyidagicha rostlik jadvali bilan berilgan bo‘lsin:

A	B	C	F(A, B, C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



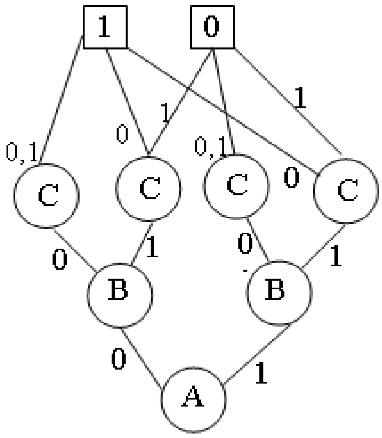
1)Yechimlar daraxtini ayrim hollarda barcha barglarni bir xil qiymatga ega bo‘lgan daraxt ostilarini, shu qiymat bilan almashtirilsa yechimlar daraxti hajmining sezilarli darajada ixchamlashtiradi.



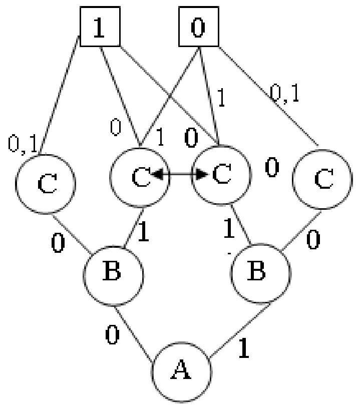
Agar bog‘liqliklarning daraxt

ko‘rinishidan voz kechilsa, yechimlar daraxtini anchagina kompaktlashtirish mumkin. Quyidagicha uchta ketma-ket shakl almashtirishlardan so‘ng binary yechimlar daraxtidan binar yechimlar diagrammasi hosil bo‘ladi:

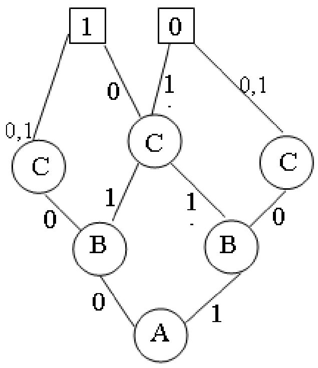
2) 0 va 1 qiymatlarni qabul qilgan yaproqlar birlashtiriladi. Natijada daraxt quyidagi ko‘rinishni oladi:



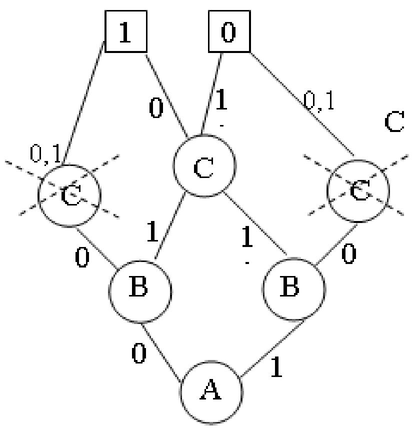
⇒



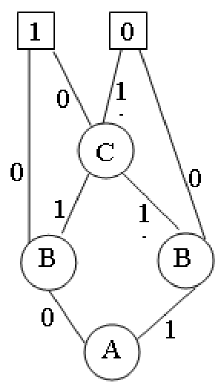
3) Diagrammada izomorf (o‘xshash) diagramma ostilari birlashtiriladi:



4) Ikkala chiquvchi shoxi ham bitta joyga boradigan tugunlar ahamiyatsiz o‘zgaruvchi sifatida tushirib qoldiriladi va bu tugunga kiruvchi shox chiquvchi shoxlar boradigan tugunlargacha davom ettiriladi.



⇒

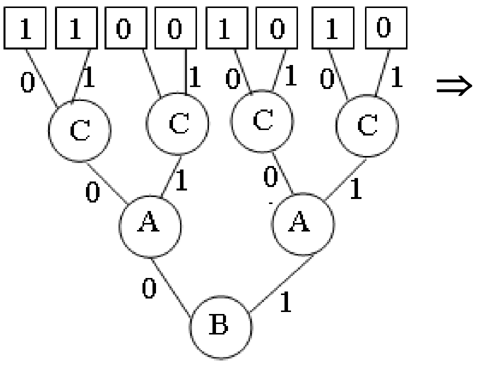


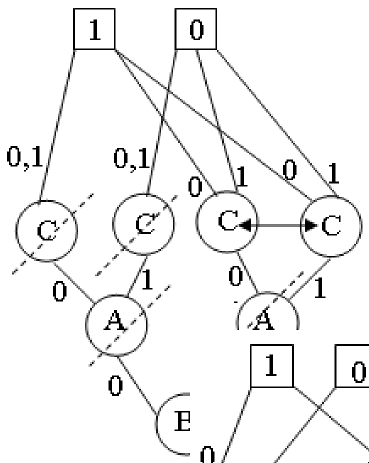
Natijada F(A,B,C) funksiya qiymatlarini yechimlarning binar diagrammasi orqali berish mumkin:

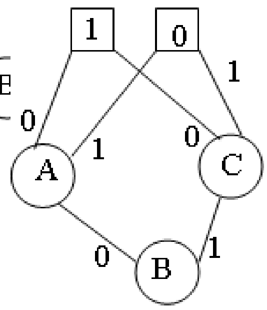
if A=B=0 **or** A=C=0 **and** B=1 **or** A=B=1 **and** C=0
then F(A,B,C)=1
else F(A,B,C)=0

Yechimlar daraxtidan yechimlar diagrammasiga o‘tish natijasi boshlang‘ich yechimlar daraxtida o‘zgaruvchilarni yaruslarga qaysi tartibda qo‘yilganligiga ham sezilarli darajada bog‘liq.

Yuqoridagi misolda yechimlar daraxtida o‘zgaruvchilarni yaruslarga B, A, C tartibida joylashtirilsa, u holda yechimlar diagrammasi yanada ixchamlashadi:







Natijada F(A,B,C) funksiya qiymatlarini yechimlarning binar diagrammasi orqali berish mumkin:

if B=1 **then** F(A,B,C)=¬C **else** F(A,B,C)=¬A

Ushbu ko‘rilgan misol shundan dalolat beradiki, ayrim hollarda funksiyalarning shunday maxsus ko‘rinishlarini qurish mumkinki, funksiyalarni massivlar yoki formulalar yordamida ifodalash kabi universal usullarga nisbatan, xotirada kam ma’lumot saqlashni va shu bilan birga hisoblashni tezroq amalga oshirish imkonini beradi.

Nazorat savollari:

1. Minimallashtirishda jadval usulining afzalligi nimada?
2. Ikki o‘zgaruvchili Karno kartasida minimallashtirish usulini tushuntiring.
3. Uch o‘zgaruvchili Karno kartasi mohiyati nimadan iborat?
4. To’rt o‘zgaruvchili Karno kartasida minimallashtirish qanday amalgam oshiriladi?
5. O’zgaruvchilar soni 4 tadan oshib ketsa, nima uchun Karno kartasi samarasiz bo’ladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

a) Quyida keltirilgan misollar uchun Karno kartalarini tuzib, minimallashtiring va soddalashgan formulaga mos rele-kontakt sxemasi chizing:

1. F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
2. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
3. F(0,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
4. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=1
5. F(0,1,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=1

6. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
7. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
8. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1

b) Quyida keltirilgan misollar uchun yechimlar daraxtini tuzing va soddalashtiring:

1. F(0,0,0)=F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,1,0)= F(1,1,1)=F(1,0,0)=1
2. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)= F(1,1,0)=F(1,0,0)=1
3. F(0,1,0)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1

4. F(0,1,1)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=F(1,1,0)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
5. F(0,1,0)=F(0,0,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)= F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
6. F(0,1,1)=F(1,1,1)=0
7. F(0,1,0)=F(1,1,0)=0
8. F(0,0,1)=F(1,0,1)=0
9. F(0,0,0)=F(1,0,0)=0
10. F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,0)=1
11. F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
12. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=1
13. F(0,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=0
14. F(0,1,0)=F(0,1,1)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=1
15. F(0,1,1)=F(1,1,0)=F(1,1,1)=F(1,0,1)=0

IV BOB.

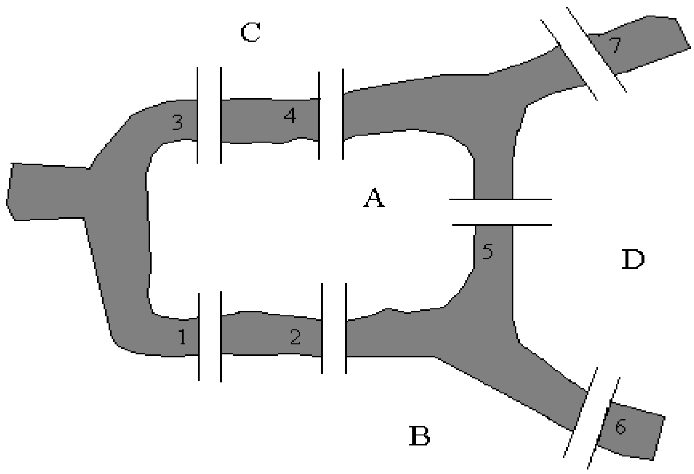
GRAFLAR NAZARIYASI

KIRISh

XVIII asrda mashhur shvetsariyalik matematik, mexanik va fizik Leonard Eyler (1707-1783 yy) Kyonigsberg ko'prigi haqidagi masalani yechish uchun birinchi marta graf tushunchasidan foydalanadi. Hozirda bu masala klassik yoki Eyler masalasi nomi bilan mashhur:

Shu davrda Kyonigsberg shahrida 2 ta orol bo'lib, ular Pregol daryosining 7 ta ko'prigi bilan birlashtirilgan edi. Masala quyidagicha qo'yilgan edi: Shahar bo'ylab shunday sayr uyushtirish kerakki, bunda har bir ko'prikdan bir marta o'tib yana sayr boshlangan joyga qaytib kelish kerak.

Eyler bunday sayr marshruti yo'qligini isbotladi.



Eski Kyonigsberg shahri sxemasi

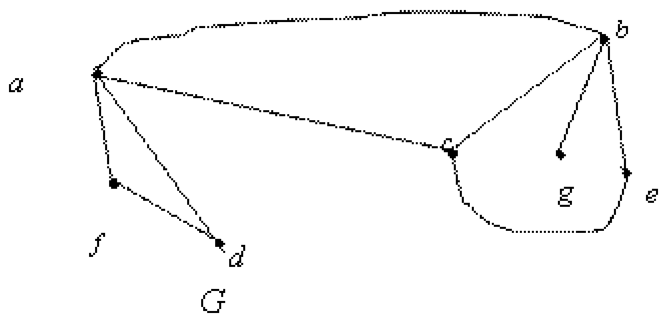
Graflar nazariyasi diskret matematika fanining bir bo'limi bo'lib, unda masalalar yechimlari chizmalar shaklida izlanadi. Keyingi paytlarda turli xil diskret xususiyatlarga ega bo'lgan xisoblash qurilmalarini loyihalashda graflarning ahamiyati yanada oshdi.

4.1. Graflar nazariyasining asosiy tushunchalari

Ta'rif 1. (V, E) sonlar juftligiga graf deyiladi, bu yerda V – ixtiyoriy bo`sh bo`lmagan to`plam, $E$ esa $V^{(2)}$ning qism to`plami $(E \subseteq V^{(2)})$, bunda $V^{(2)}$ V to`plam elementlarining tartiblanmagan juftliklari to`plami. V to`plam elementlari **grafning uchlari** deyiladi, $E$ to`plam elementlari esa **grafning qirralari** deyiladi. Agar V chekli bo`lsa, graf **chekli** deyiladi, aks holda **cheksiz graf** deyiladi.

Qirra ikkita uch bilan aniqlanadi. Umumiy uchga ega bo`lgan ikkita qirra qo`shni hisoblanadi.

Grafning uchlari va qirralari to`plamini mos ravishda $V(G)$ va $E(G)$ kabi belgilanadi.



rasm 2

$$V(G)=\{a,b,c,d,e,f,g\}, E(G)=\{(a,b),(a,c),(a,d),(a,f),(b,c),$$
$$(b,g),(b,e),(c,e),(d,f)\}.$$

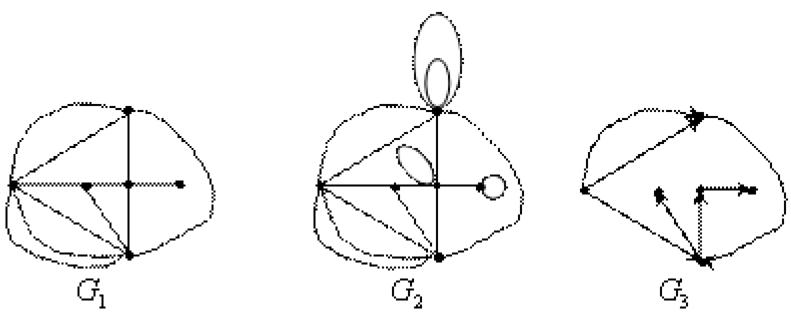
Ta'rif 2. a) Agar grafda takroriy (karrali) qirralar mavjud bo`lsa, bunday grafga **multigraf** deyiladi.

b) Agar grafda karrali qirralar bilan birga uchni o`z-o`zi bilan tutashtiruvchi ilmoqlar ham mavjud bo`lsa, bunday grafga **psevdograf** deyiladi.

c) Yo`nalishga ega bo`lgan qirralari mavjud graf **oriyentirlangan graf** (orgraf) deyiladi.

Orgrafning qirralari ularning yo`nalishini ko`rsatuvchi strelkalar bilan belgilanadi.

Misol:



G_1 – multigraf, G_2 – psevdograf, G_3 – oriyentirlangan multigraf.

Ta'rif 3. Agar *V* to`plamning quvvati *n* ga teng bo`lsa, *n* soni **grafning tartibi** deyiladi.

Ta'rif 4. Agar *V* to`plamning quvvati *n* ga teng bo`lsa, E to`plamning quvvati *m* ga teng bo`lsa, graf **(*n*, *m*) graf** deyiladi.

Ta'rif 5. Agar grafning ikkita uchi qirra bilan tutashtirilgan bo`lsa, bu uchlar **qo`shni uchlar** deyiladi.

Ta'rif 6. Grafning bir uchdan chiqqan ikki qirrasi **qo`shni qirralar** deyiladi.

Ta'rif 7. Agar berilgan uch qirraning oxiri bo`lsa, qirra va uch **intsident** deyiladi.

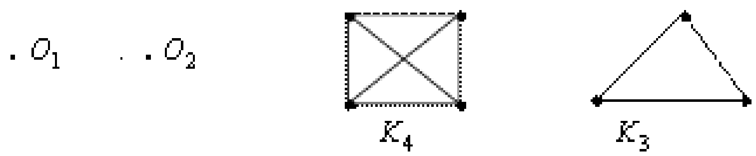
Ta'rif 8. Agar graf bironta qirraga ega bo`lmasa, bunday graf **bo`sh graf** deyiladi.

n tartibli bo`sh grafni O_n yoki E_n bilan belgilanadi.

Ta'rif 9. Agar grafning ixtiyoriy ikki uchi qirralar bilan tutashtirilgan bo`lsa, bunday graf **to`la graf** deyiladi.

n tartibli to`la grafni K_n yoki F_n bilan belgilanadi.

Misol:



Teorema. *n* tartibli to`la grafning qirralari soni $\frac{n(n-1)}{2}$ ga teng.

Nazorat uchun savollar:

1. Oddiy graf ta'rifini ayting.

2. Grafning uchi deb nimaga aytiladi?

3. Grafning qirrasi deb nimaga aytiladi?

4. Psevdograf deb nimaga aytiladi?

5. Multigrafning ta’rifini yozing.

6. Oriyentirlangan graf deb nimaga aytiladi?

7. To`la grafga ta’rif bering.

8. To`la graf qirralari soni haqidagi teoremani ayting.

9. Oddiy grafga misollar keltiring.

10. Psevdografga misollar keltiring.

11. Oriyentirlangan grafga misollar keltiring.

12. Multigrafga misollar keltiring.

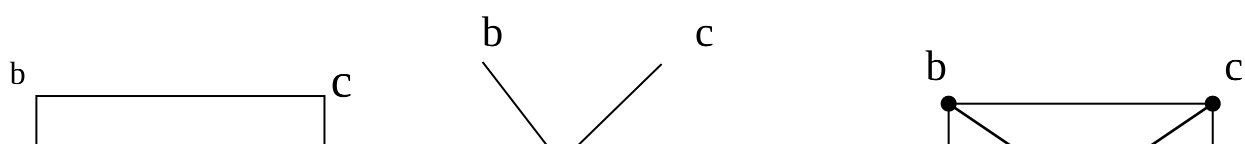
13. To`la grafga misollar keltiring.

4.2. Graflarning to`ldiruvchilari

Ta’rif 1. G' graf G **grafning qismi** deyiladi, agar G' ning uchlari to`plami $G$ ga tegishli bo`lsa, ya’ni $V' \subseteq V$ bo`lsa, hamda $G'$ ning barcha qirralari G ning ham qirralar bo`lsa, ya’ni $E' \subset E$

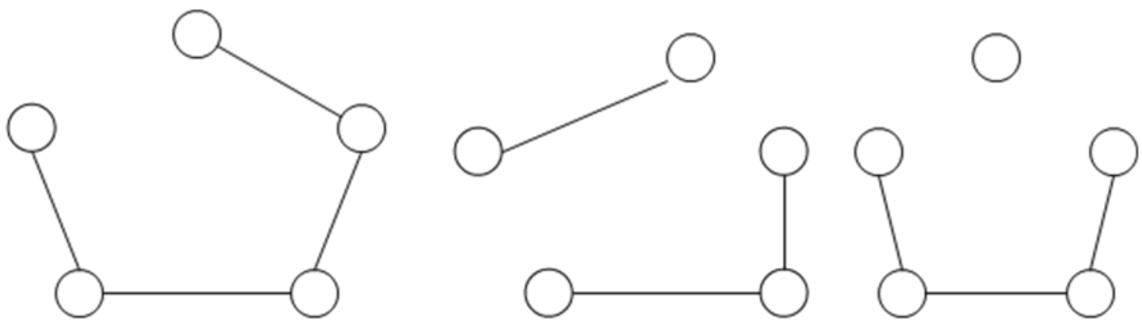
$$V=\{a, v, c, d\}, \quad V'=\{a', b', c', d'\}, \quad V' \in V .$$

G^* graf G **grafning to`ldiruvchisi** deyiladi, agarda uning barcha uchlari G grafga tegishli bo`lib, birorta ham qirrasi G ga tegishli bo`lmasa.

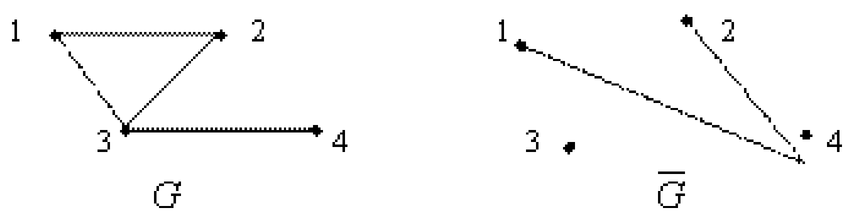


Ta’rif 2. Agar $G=(X,U)$ grafning bo‘lagi $G'=(X',U')$ uchun $X' = X$ bo‘lsa, u holda graf **sugraf** deb ataladi.

Sugraflarni hosil qilish uchun faqat qirralarga murojaat qilamiz. Quyidagi graflar sugraflardir.

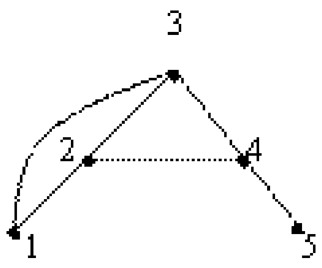


Misol 1:

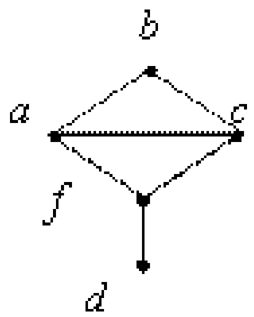


Ta'rif 2. Agar graflarning uchlari to`plami orasida qo`shnilik munosabatini saqlovchi biyeksiya mavjud bo`lsa, bu ikkita **graf izomorf** deyiladi. $G$ graf $H$ grafga izomorf bo`lsa, $G \cong H$ kabi belgilanadi.

Misol 2:



G_1

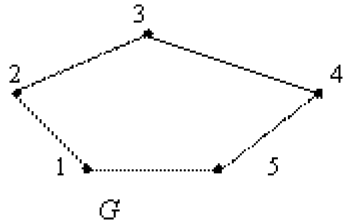


G_2

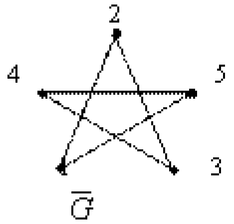
$\varphi: V(G_1) \to V(G_2)$ qo`shnilik munosabatini saqlovchi biyeksiya $\varphi(1) = b, \varphi(2) = a, \varphi(3) = c, \varphi(4) = f, \varphi(5) = d.$ mavjud bo`lgani uchun $G_1 \cong G_2$ bo`ladi .

Ta'rif 3. Agar graf o`zining to`ldiruvchisiga izomorf bo`lsa, graf o`zini o`zi **to`ldiruvchi** deyiladi.

Misol 3.



G



$\overline{G}$

Ta'rif 4. Qo`shni yoylar ketma-ketligi *yo`l*, qo`shni qirralar ketma-ketligi **zanjir** deyiladi. Yopiq yo`l **kontur** deyiladi, yopiq zanjir esa **sikl** deyiladi.

Ta’rif 5. Grafning har bir uchidan bir martadan o`tgan **yo`l elementar** deyiladi. Graf yoylari orqali bir martadan o`tgan yo`l **oddiy yo`l** deyiladi. Aks holda **murakkab yo`l** deyiladi.

Ta’rif 6. Agar zanjir grafning barcha uchlaridan bir martadan o`tsa, bunday zanjirga **gamilton zanjiri** deyiladi.

Ta’rif 7. Grafning barcha qirralaridan bir martadan o`tgan zanjir **eyler zanjiri** deyiladi.

Ta’rif 8. Ixtiyoriy ikkita uchini marshrut bilan birlashtirish mumkin bo`lgan graf **bog`liq graf** deyiladi.

Ta’rif 9. Grafning barcha uchlaridan o`tuvchi karrali qirralar va ilmoqlarga ega bo`lmagan graf **eyler grafi** deyiladi.

Ta’rif 10. Agar bog`liqli grafda har bir uchdan faqat bir martadan o`tuvchi tsikl (yoki marshrut) mavjud bo`lsa, bunday graf **gamilton grafi** deyiladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Graflar qachon izomorf bo`ladi?
2. Sugraf deb nimaga aytiladi?
3. Grafning to`ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
4. Eyler grafi deb nimaga aytiladi?
5. Bog`liq graf ning ta’rifini yozing.
6. Gamilton zanjiri deb nimaga aytiladi?
7. Gamilton grafiga ta’rif bering.

8. Sikl deb nimaga aytiladi?

9. To`ldiruvchi grafning ta’rifini bering.

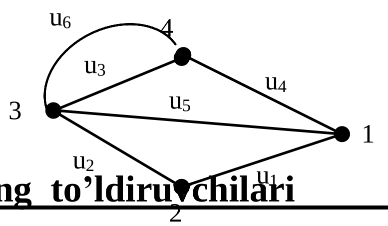
10. Marshrut deb nimaga aytiladi?

11. Zanjir deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Izomorf graflarga misollar keltiring.

2. Chizmadagi graf uchun keltirilgan marshrutlardan qaysi biri oddiy zanjir bo`ladi?

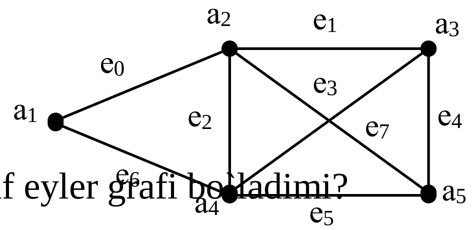


3. Eyler grafiga misollar keltiring.

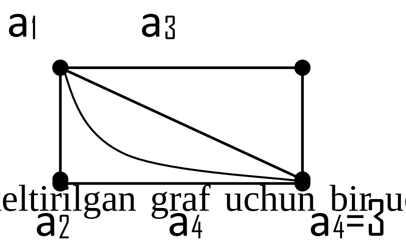
4. Gamilton grafiga misollar keltiring.

5. Bog`liq grafga misollar keltiring.

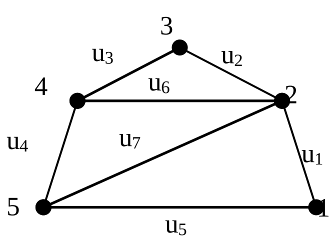
6. Quyidagi graf uchun gamilton sikli mavjudmi?



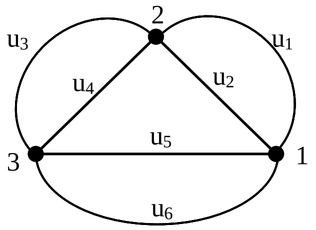
Quyidagi graf eyler grafi bo`ladimi?



7. Chizmada keltirilgan graf uchun bir uchidan chiqqan oddiy sikl bo`lsa ko`rsating:



8. Chizmada keltirilgan graf uchun eyler sikli bo`lsa ko`rsating:



4.3. Graf uchlari darajasi. Graf qirralari soni

Ta'rif 1. Qirraning boshi yoki oxirini ifodalovchi uchga bu qirraga **intsident uch** deyiladi.

Ta'rif 2. Graf uchining darajasi deb bu uchga **intsident qirralar** soniga aytiladi.

x_i uchning darajasini $P(x_i)$ bilan belgilanadi.

Boshqacha aytganda uchdan chiquvchi qirralar soni uchning darajasi hisoblanadi. Darajasi 1 ga teng uch osilgan uch bo`ladi.

Ta'rif 3. Hech qanday yoy yoki qirralarga ega bo`lmagan va izolyatsiyalangan uchlardan iborat graf **nol graf** deyiladi. Ko`rinib turibdiki, nol grafning uchlari darajasi nolga teng.

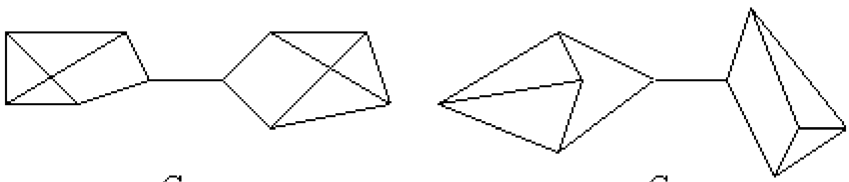
Lemma 1. Agar grafning barcha uchlarining darajalari 2 dan katta yoki 2 ga teng bo`lsa, graf, albatta, konturni o`z ichiga oladi.

Ta'rif 4. Agar grafning uchlari va qirralari to`plamida refleksivlik va simmetriklik xossalarini qanoatlantiruvchi binar munosabat mavjud bo`lsa, bunday graf **tolerant graf** deyiladi.

Teorema 1. Oriyentirlanmagan graf eyler sikli bo`lishi uchun uning uchlari juft darajalarga ega bo`lishi va uning bog`liq graf bo`lishi zarur va yetarlidir.

Teorema 2. Oriyentirlanmagan graf *A* va *V* uchlarni birlashtiruvchi eyler zanjiriga ega bo`ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar graf bog`liq bo`lsa hamda faqatgina *A* va *V* uchlar toq darajalarga, qolgan uchlar juft darajalarga ega bo`lsa.

Ta'rif 5. Grafni tekislikka yotqizish mumkin bo`lsa, bunday graf **planar graf** deyiladi. Tekislikka yotqizilgan graf **tekis graf** deyiladi.



G_1 G_2

G_1 graf planar va G_2 tekis grafga izomorf.

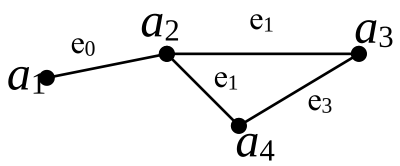
Teorema 3. Agar grafda karrali qirralari hamda ilmoq mavjud bo`lmasa, *n* ta uchga ega bo`lgan va bog`liq komponentasi *K* ga teng bo`lgan grafning qirralari soni eng ko`pi bilan aniqlanadi.

$$M=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

Mashrutning uzunligi deb, shu marshrutda mavjud qo`shni (e_{i-1}, e_i) qirralar soniga aytiladi.

Grafning ixtiyoriy *a* va ixtiyoriy *v* uchlari orasidagi **masofa** deb, shu uchlarni bog`lovchi eng kichik uzunlikka ega bo`lgan zanjirga aytiladi.

Misol 1.



$d(a_1,a_3)= (e_0, e_1)=2;$

$d(a_1,a_4)=(e_0, e_2)=2;$

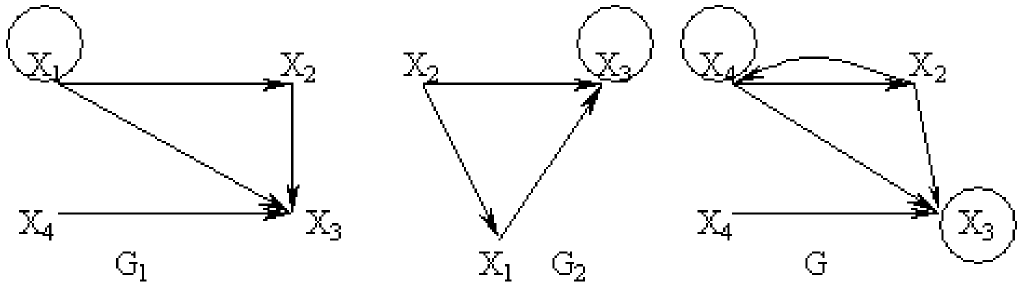
$d(a_1,a_4)=(e_0, e_1, e_3)=3$

Grafning diametri deb, uchlari orasidagi eng katta uzunlikka ega bo`lgan masofaga aytiladi.

$$d(\Gamma)=\max_{a,в\in V} d(a,в)$$

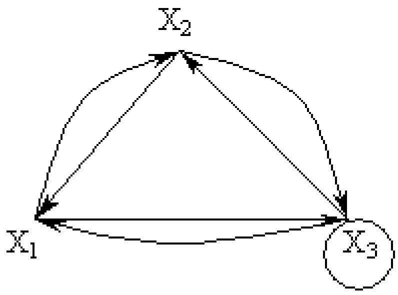
Misol 2. $d(a_1,a_4)=(e_0, e_1, e_3)=3$.

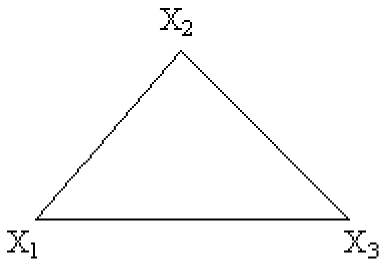
S uch *G* grafning fiksirlangan uchi bo`lsin. *X* esa grafning ixtiyoriy uchi bo`lsin. *S* uch uchun maksimal masofani hisoblaymiz. Qandaydir S_0 uch uchun bu maksimal masofa boshqa uchlarga nisbatan minimal bo`lsa, u holda S_0 *G* **grafning markazi** deyiladi va S_0 uchun aniqlangan masofa *G* **grafning radiusi** deyiladi.



**Yig`indi graf** ikkita qo`shiluvchi graflardan hech bo`lmaganda bittasida uchraydigan uch va qirralarni o`z ichiga oladi.

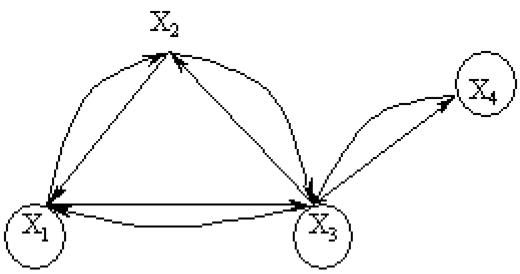
**Ko`paytma graf** ko`paytirilayotgan graflarning umumiy uchlari va qirralaridan iborat.

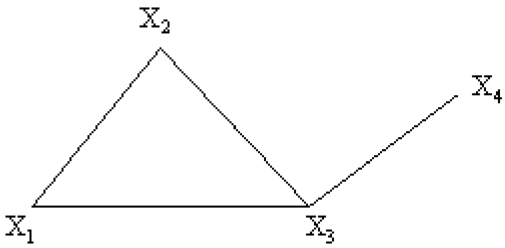




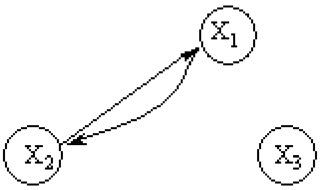
Simmetrik graf

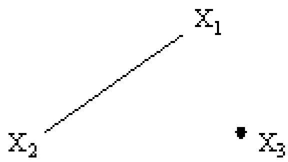
Oriyentirlanmagan graf



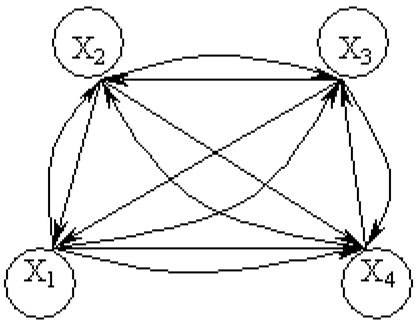


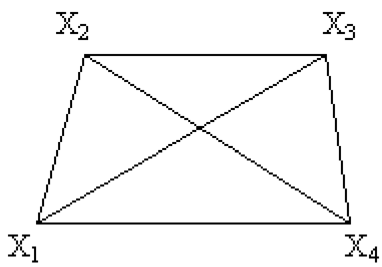
Tolerant graf Oriyentirlanmagan graf





Tolerant graf Oriyentirlanmagan graf

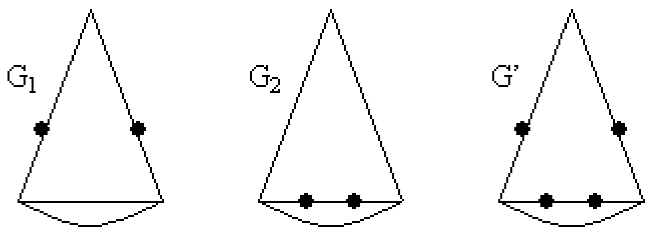




Graf-dekart ko`paytma Oriyentirlanmagan to`la graf

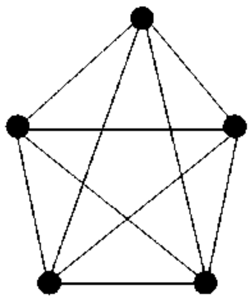
Ta’rif 3. Agar G_1 grafdan, shuningdek, G_2 grafdan chekli sonli martadagi qirralarni ajratish amali bilan olinishi mumkin bo`lgan shunday $G'$ graf mavjud bo`lsa, G_1, G_2 graflar **gomeomorf graf** deyiladi,

Quyidagi rasmda tasvirlangan G_1 va G_2 graflar gomeomorfdir.

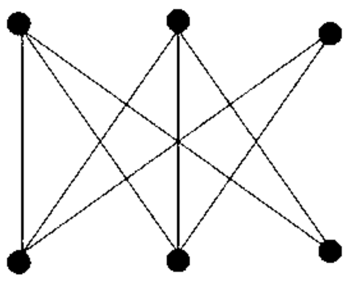


G' graf G_1 va G_2 graflardan ikki marta o`tkazilgan qirralar bo`linishi amalidan olinishi mumkin.

1-teorema (Pontryagin-Kuratovskiy). G graf planar bo‘ladi, faqat va faqat shu holdaki, G graf K_5 yoki $K_{3;3}$ ga gomemorof bo‘lgan, qism graflarga ega bo`lmasa.



K_5



$K_{3,3}$

Planarlik kriteriyasini ekvivalent formasini quyidagi teoremada keltirilgan.

2-teorema. Oriyentirlanmagan G graf K_5 yoki $K_{3\ 3}$ graflarga tortiluvchi qism graflarga ega bo`lmasa.

3-teorema. Ko‘pi bilan 2^W uchdan iborat bo‘lgan har qanday graf R^3 fazoda uchlaridan tashqarisida yoylarining kesishmalarsiz tasvirlash mumkin.

Isboti. G’ = (МД) graf uchun | M | < 2^W bo‘lgan bo‘lsin. Unda | R < 2^W ga ega bo‘lamiz. G grafning barcha nuqtalarini biror L to‘g‘ri chiziqqa joylashtiramiz va R dagi har bir qirraga L to‘g‘ri chiziqni saqlovchi tekislikni har xil qiymatli mos qo‘yamiz.

Izlanayotgan G graf tasviri, barcha qirralami mos tekisliklarga o‘tkazgandagi keyin hosil bo‘ladi.

Planar graflaming xromatik sonining bahosi ma’lum.

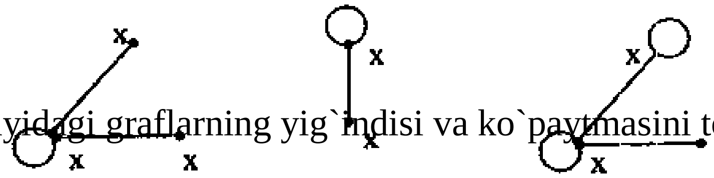
Nazorat uchun savollar:

1. Insidentlik tushunchasini ta’rifini bering.
2. Nol graf nima?
3. Tolerant graf ta’rifini bering.

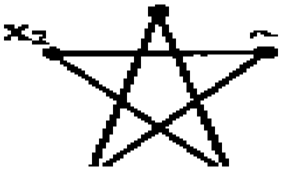
4. Planar graf nima?
5. Qanday graflar gomeomorf deyiladi?
6. Yig`indi graf deb nimaga aytiladi?
7. Ko`paytma graf deb nimaga aytiladi?
8. Grafning diametri deb nimaga aytiladi?
9. Pontryagin-Kuratovskiy teoremasini ayting.

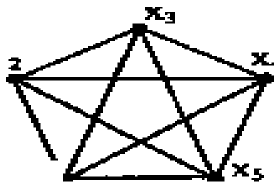
Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Quyidagi graflarning yig`indisi va ko`paytmasini toping:



2. Quyidagi graflarning yig`indisi va ko`paytmasini toping:





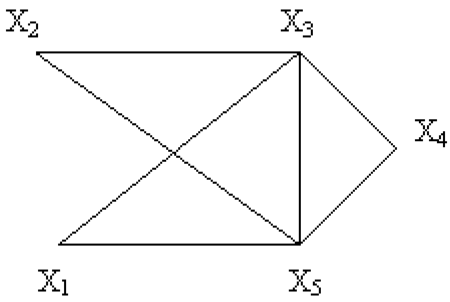
4.4. Graflarni xarakterlovchi sonlar

Ta’rif 1. Grafning **siklomatik soni** deb, N-n+p songa aytiladi, bu yerda N-grafning qirralari soni, n – grafning uchlari soni, P – bog`liqlik komponenti soni. Bog`liq graf uchun N-n+1.

Teorema 1. Grafning siklomatik soni erkli sikllarning eng katta miqdoriga teng.

Misol 1.

Quyidagi chizmada tasvirlangan grafning siklomatik soni 3 ga teng.



Ta’rif 2. Agar grafning uchlar to‘plamini o‘zaro kesishmaydigan shunday ikkita qism to‘plamlarga (bo‘laklarga) ajratish mumkin bo‘lsaki, grafning ixtiyoriy qirrasi bu to‘plamlarning biridan olingan qandaydir uchni ikkinchi to‘plamdan olingan biror uch bilan tutashtiradigan bo‘lsa, u holda bunday graf **ikki bo‘lakli graf (bixromatik** yoki **Kyonig grafi**) deb ataladi.

Nazorat uchun savollar:

1. Siklomatik son nima?
2. Siklomatik sonni formula orqali ifodalang.
3. Kyonig grafi deb nimaga ataladi?

4.5. Daraxtlar

Ta’rif. Agar G grafning *u* qirrasi kamida bitta siklga tegishli bo`lsa, *u* **siklik qirra**, aks holda **atsiklik qirra** deb ataladi.

G graf uchun

$$\lambda(G)=m(G)-n(G)+k(G)$$

Ifoda uning **siklomatik soni** deb ataladi, bu yerda $m(G)$ G grafning qirralar soni. $n(G)$- uchlari soni, $k(G)$- komponental soni.

Osongina ko`rish mumkinki,

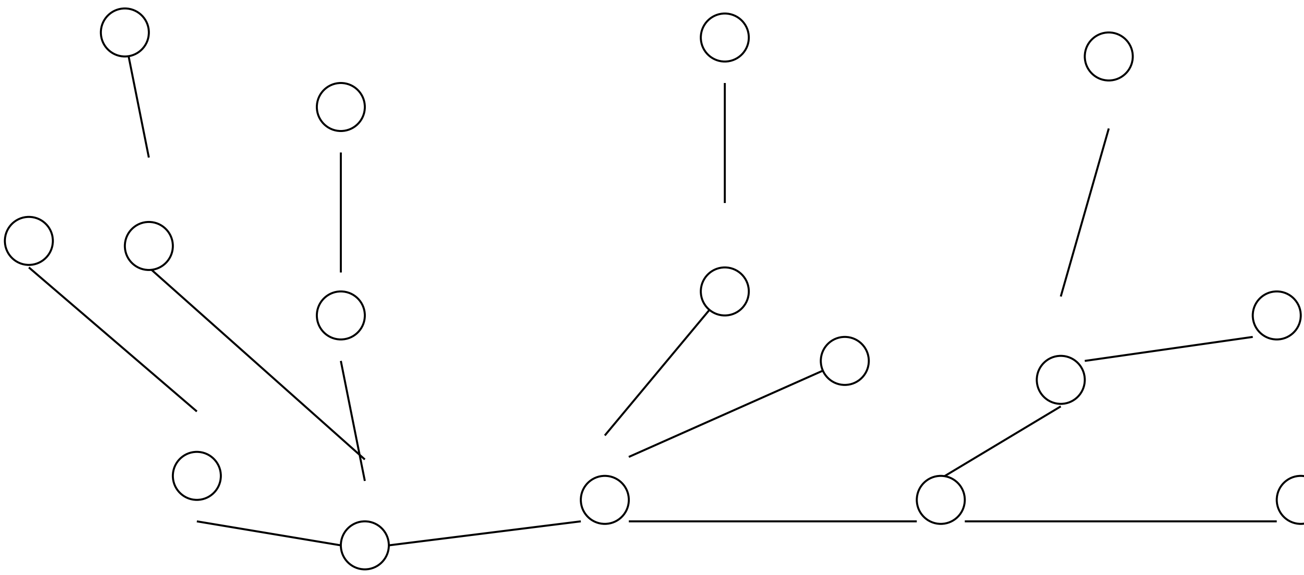
$$K(G\backslash u)=\begin{cases} K(G), \text{ agar } u \text{ siklik qirra bo`lsa,} \\ K(G)+1, \ u \ \text{ atsiklik qirra bo`lsa;} \end{cases}$$

$$\lambda(G\backslash u)=\begin{cases} \lambda(G)-1, \text{ agar } u \text{ siklik qirra bo`lsa,} \\ K(G), \text{ agar } u \text{ atsiklik qirra bo`lsa.} \end{cases}$$

O`z-o`zidan ravshanki, $n(G\backslash u)=n(G)$, $m(G\backslash u)=\lambda(G)-1$, $\lambda(G)\geq 0$ va faqat sikllari bo`lmagan graf uchun $\lambda(G)=0$.

Ta'rif. Barcha qirralari atsiklik bo`lgan bog`liq graf **daraxt** deb ataladi. Bir necha daraxtlardan tashkil topgan bog`liqmas graf **o`rmon** deyiladi.

Daraxtning istalgan 2 uchi yagona zanjir bilan bog`langandir. Daraxtning istalgan $x_0$ uchini tanlab olib, uni **ildiz** yoki **nolinchi pog`onali uch** deb ataymiz. x_0 ga qo`shni bo`lgan barcha uchlarni birinchi pog`ona uchlari deymiz va hokazo.



Daraxtning bunday tasvirlanishidan kelib chiqadiki u chetki, faqat bitta qirraga intsident bo`lgan uchlarga ega. Masalan, 14 shaklda oxirgi pog`onadan uchlari.

Bog`liq $G$ grafning ketma-ket barcha siklik qirralarni olib tashlaymiz. Natijada hamma qirralar atsiklik bo`lgan bo`g`liq N grafni –daraxtni hosil qilamiz. Bu daraxt G **grafning asosi** deyiladi. N asosga nisbatan G N bo`lakning barcha qirralari **vatarlar** deb ataladi.

Teorema 1. Chekli bog`liq $G$ graf daraxt bo`lishi uchun uning qirralari soni uchlari sonidan bittaga kam bo`lishi zarur va yetarli.

Teorema (*Keli*) 2. Uchlar soni tartiblangan n ta bo`lgan daraxtlar soni $n^{n-2}$ teng. ($n$ ta elemenlardan n-2 tadan tuzilgan barcha takrorish o`rinlashtirishlar soni).

Teorema 3. Agar G graf daraxt bo`lsa, u holda uning qirralari soni $m$ va uchlari soni $n$ $m = n - 1$ munosabat bilan bog`langan.

Teorema 4. Quyidagi 4 ta shart teng kuchli:

- G graf daraxt hisoblanadi;
- Grafning qirralari soni m va uchlari soni n $m = n - 1$ munosabat bilan bog`langan;
- Grafning ixtiyoriy ikki uchi oddiy yo`l bilan bog`langan bo`lishi mumkin va bu yo`l yagonadir.
- G graf bog`langan va konturlarga ega emas.

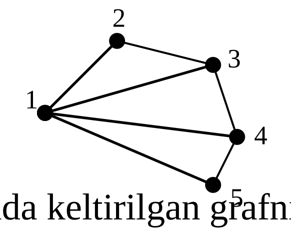
Nazorat uchun savollar:

1. Siklik qirra nima?
2. Atsiklik qirra nima?
3. Siklomatik sonni formula orqali ifodalang.

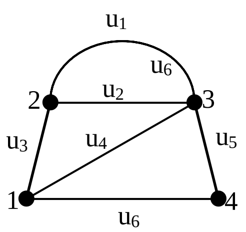
4. Qanday graf daraxt deb ataladi?
5. Pog`ona uchlari deb nimaga aytiladi?
6. Grafning asosi deb nimaga aytiladi?
7. Chekli grafda qirralar va uchlar soni orasidagi munosabatni keltiring.
8. Keli teoremasini ayting.

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Chizmada keltirilgan grafning xromatik sonini toping:



2. Chizmada keltirilgan grafning xromatik sonini toping:



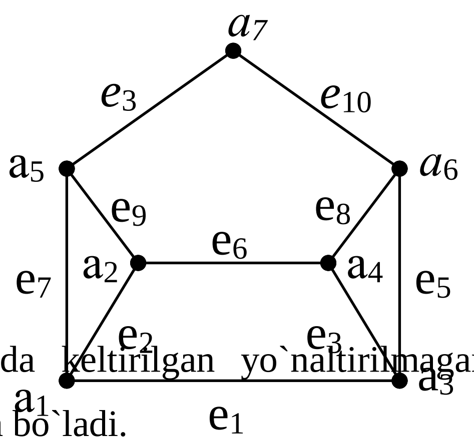
4.6. Qo`shnilik matritsasi

Faraz qilaylik, *G* graf yo`naltirilmagan bo`lsin. Grafning qo`shnilik matritsasida $A_{ij}$ ning ustunlariga ham qatorlariga ham grafning uchlarini mos qo`yamiz. U holda

$$A_{ij}=\begin{cases} k, \text{ agar } \grave{a}_i \text{ va } \grave{a}_j \text{ uchlarni k ta qirra birlashtirsa,} \\ 0, \text{ agar } \grave{a}_i \text{ va } \grave{a}_j \text{ uchlarni birlashtiruvchi qirra mavjud bo`lmasa.} \end{cases}$$

qoidadan foydadanib qo`shnilik matritsasini hosil qilamiz.

Misol.



Rasmda keltirilgan yo`naltirilmagan graf uchun qo`shnilik matritsasi quyidagicha bo`ladi.

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix} \end{array}$$

G yo`naltirilgan graf bo`lsin. U holda qo`shnilik matritsasi $A_{ij}$ ning ustunlariga ham satrlariga ham grafning uchlarini mos qo`yamiz. U holda quyidagi qoidadan foydadanib qo`shnilik matritsasini hosil qilamiz.

$$A_{ij}= \begin{cases} 1, \text{ agar } a_i \text{ uch } a_j \text{ uchning boshlanishi bo`lsa,} \\ 0, \text{ agar } a_i \text{ uch } a_j \text{ uchga qo`shni bo`lmasa va } a_i \text{ uch } a_j \text{ uchning oxiri bo`lsa.} \end{cases}$$

Qo`shnilik matritsasining diagonalida turgan birlar grafning ilmoqlariga mos keladi.

Izolyatsiyalangan uchga nollardan tashkil topgan satr va ustun mos keladi.

Qo`shnilik matritsasidagi birlar soni grafdagi qirralar soniga teng.

Nazorat uchun savollar:

1. Qo`shnilik matritsasini ta’rifini bering.

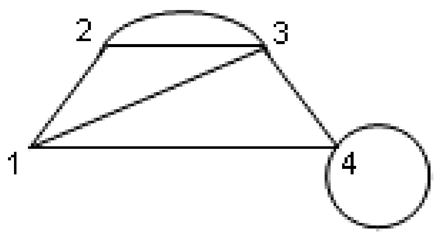
2. Oriyentirlangan graf uchun qo`shnilik matritsasi qanday topiladi?

Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Berilgan qo`shnilik matritsasiga ko`ra grafning tasvirini toping:

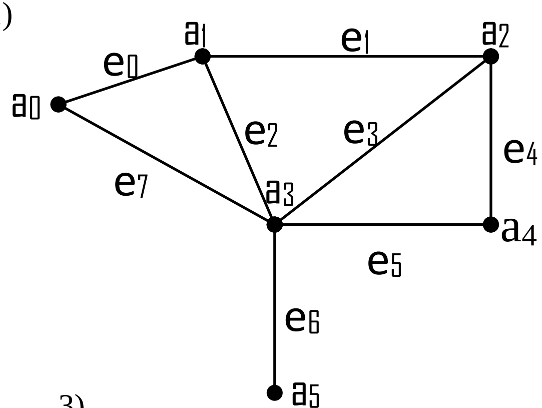
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Berilgan qo`shnilik matritsasiga ko`ra grafning tasvirini toping:

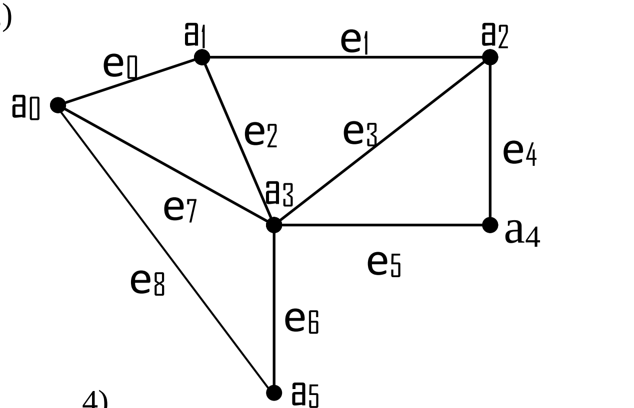


3. Rasmda tasvirlangan graflar uchun qo`shnilik matritsasini yozing:

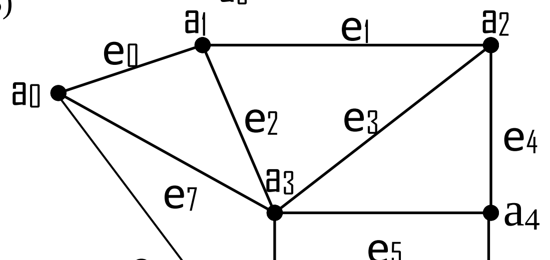
1)



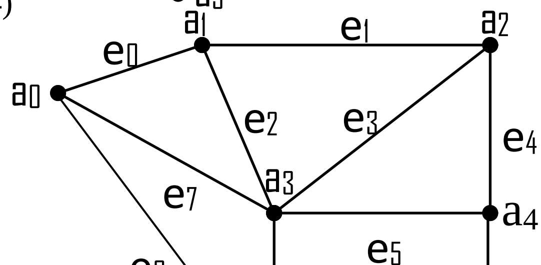
2)



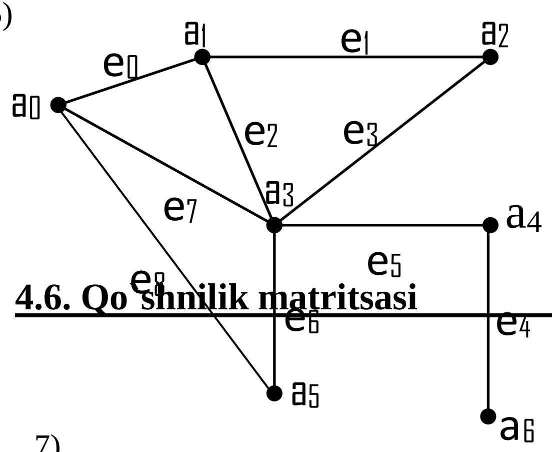
3)



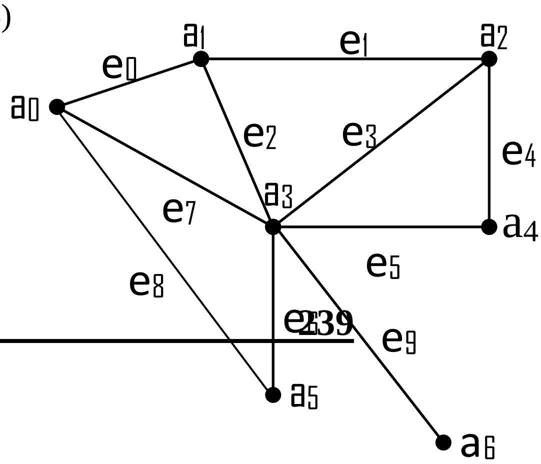
4)



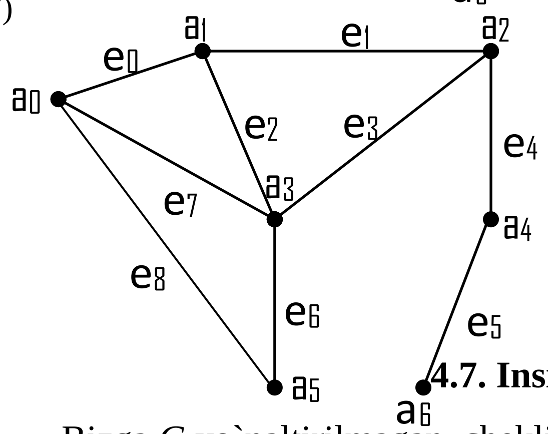
5)



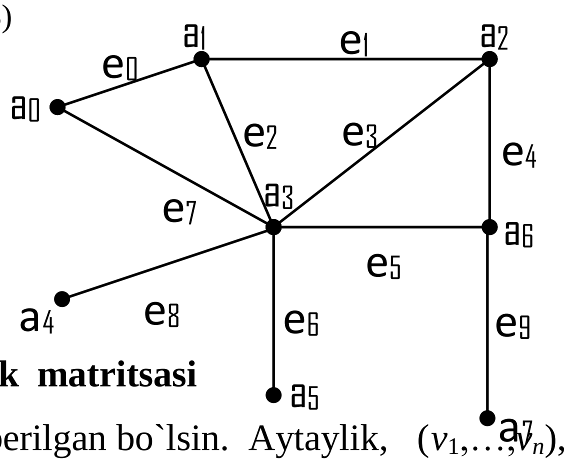
6)



7)



8)



4.7. Insidentlik matritsasi

Bizga *G* yo`naltirilmagan, chekli graf berilgan bo`lsin. Aytaylik, $(v_1,\dots,v_n)$, *G* grafning uchlari bo`lsin. U holda insidentlik matritsasi $\|A_{ij}\|$ ($i$=1,...,$m$, $j$=1,..., $n$) deb $m$ ta qator va $n$ ta ustundan iborat quyidagi ko`rinishda hosil qilingan matritsaga aytiladi:

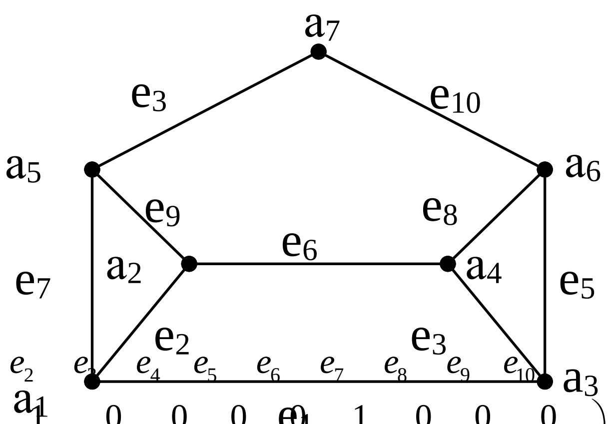
a) A_{ij} matritsaning satrlariga G ning uchlari, ustunlariga G ning qirralari mos qo`yiladi;

b) U holda

$$A_{ij}=\begin{cases}1, & \text{agar } e_i \text{ qirra } à_j \text{ uchga insident bo`lsa,}\\ 0, & \text{aks holda.}\end{cases}$$

qoidadan foydalanib, intsidentlik matritsasini hosil qilamiz.

Misol 1.



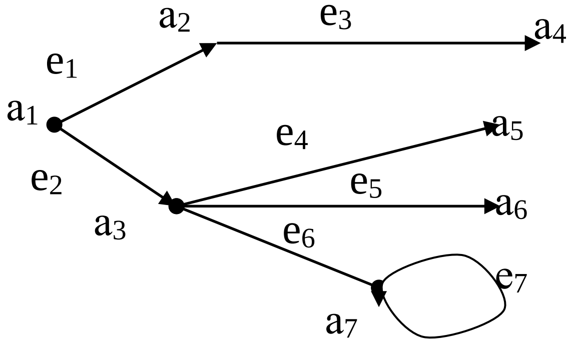
$$
\begin{array}{c}
 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Agar *G* yo`naltirilgan graf bo`lsa, u holda

$$
A_{ij}=\begin{cases}
-1, \text{ agar } \grave{a}_j \text{-uch } \mathring{a}_i \text{-qirraning boshlanishi bo`lsa,} \\
1, \text{ agar } \grave{a}_j \text{-uch } \mathring{a}_i \text{-qirraning oxiri bo`lsa,} \\
0, \text{ agar } \grave{a}_j \text{-uch } \mathring{a}_i \text{-qirraga insident bo`lmasa,} \\
2, \text{ agar } \grave{a}_j \text{-uch } \mathring{a}_j \text{-qirraga insident bo`lsa.}
\end{cases}
$$

qoidadan foydadanib insidentlik matritsasini hosil qilamiz.

Misol 2.

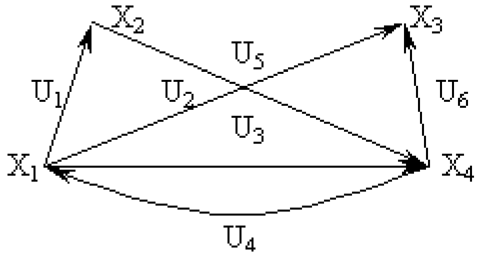


$$
\begin{array}{c}
 \\
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Oriyentirlangan graf uchun insidentlik matritsasi deb har bir elementi a_{ij} quyidagicha aniqlangan [n * m] tartibli to`g`ri burchakli matritsaga aytiladi, bu erda n – uchlar to`plamining quvvati, $m$ – qirralar to`plamining quvvati

$$
\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_i \;\; u_i \text{ uchning boshi bo`lsa,} \\ -1, & \text{agar } x_i \;\; u_i \text{ uchning oxiri bo`lsa,} \\ 0, & \text{agar } x_i \;\; u_i \text{ qirraga insident bo`lmasa.} \end{cases}
$$

Misol 3. Rasmda tasvirlangan graf uchun insidentlik matritsasini yozamiz:



Buning uchun qirralarni u_1, u_2,…, u_6 bilan belgilab chiqamiz. Insidentlik matritsasining ko`rinishi quyidagicha bo`ladi.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Nazorat uchun savollar:

1. Insidentlik matritsasini ta’rifini bering.
2. Oriyentirlangan graf uchun insidentlik matritsasi qanday topiladi?

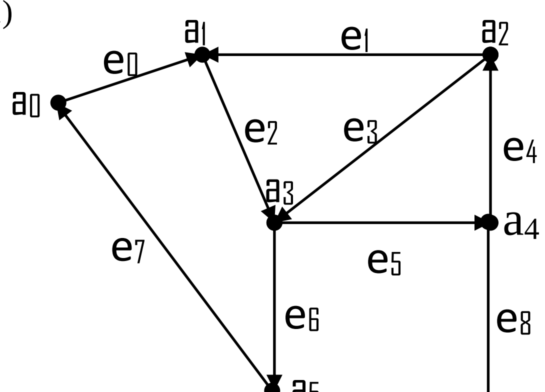
Mustaqil yechish uchun masalalar:

1. Berilgan insidentlik matritsasiga ko`ra grafning tasvirini toping:

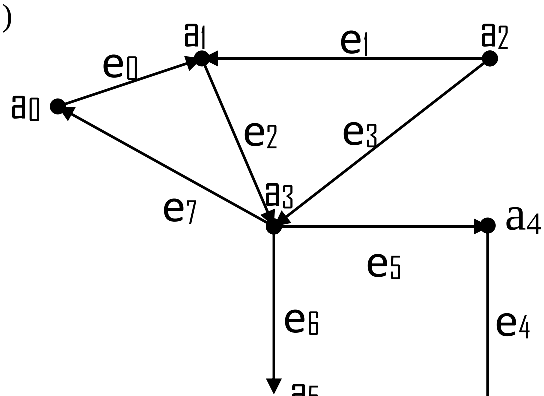
$$
A_u = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0\,0 \end{pmatrix}
$$

2. Quyidagi yo`naltirilgan va yo`naltirilmagan graflar uchun insidentlik matritsalarini aniqlang:

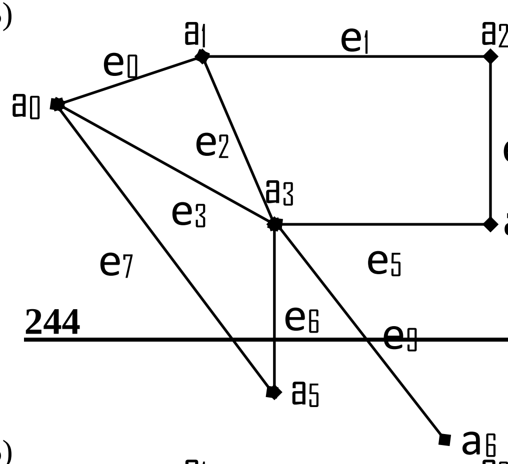
1)



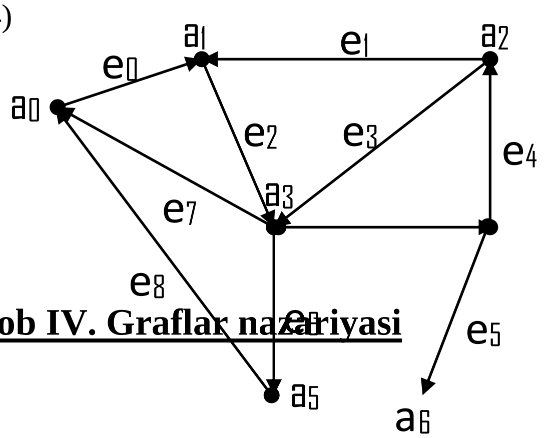
2)



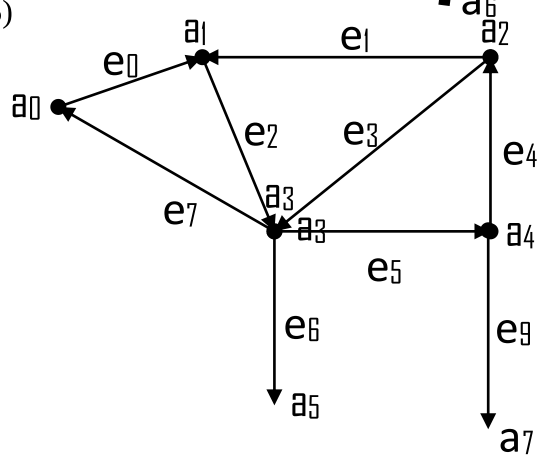
3)



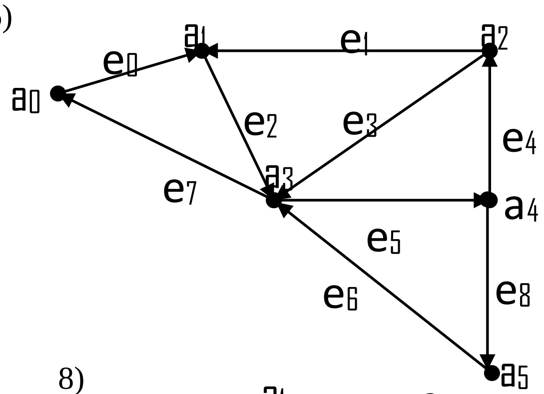
4)



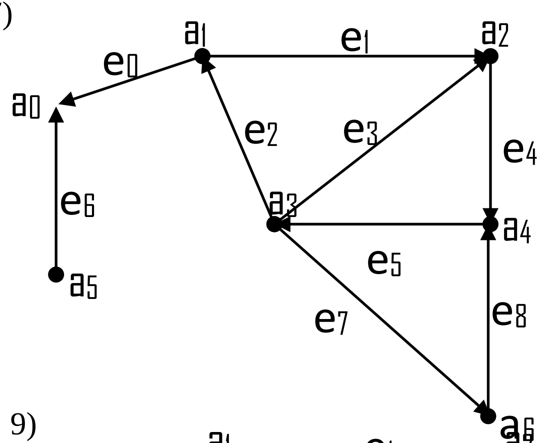
5)



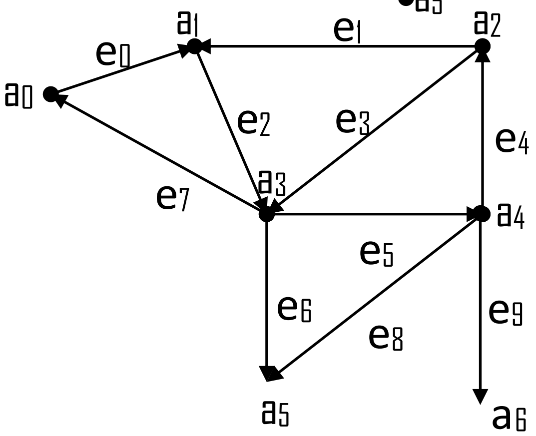
6)



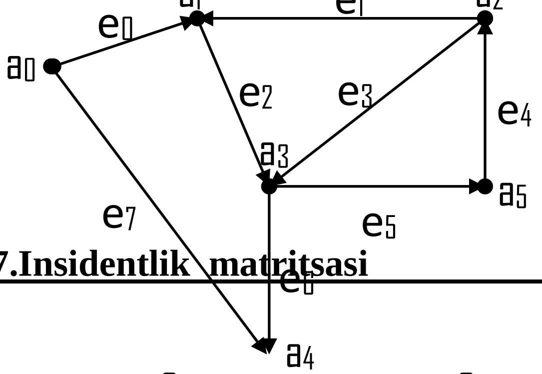
7)



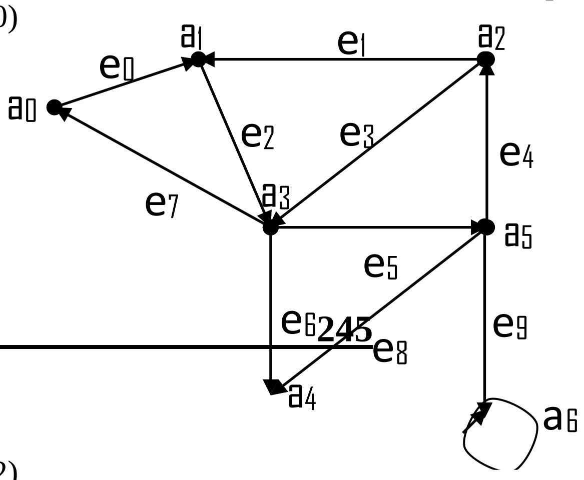
8)



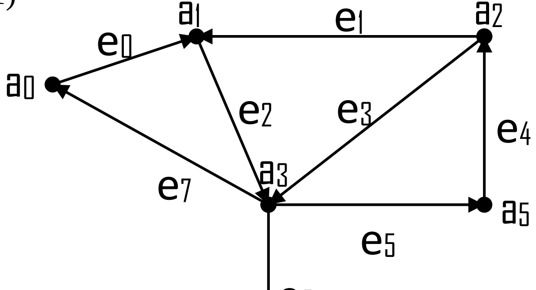
9)



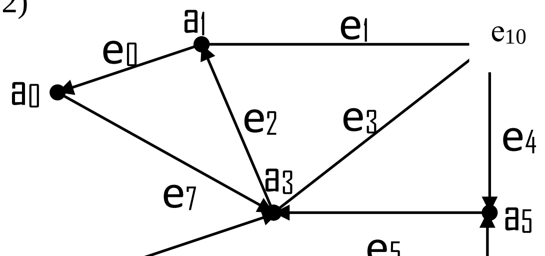
10)



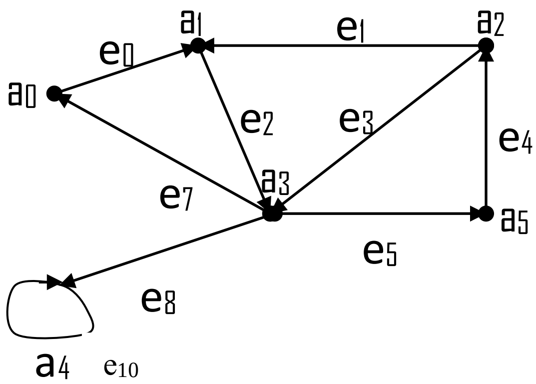
11)



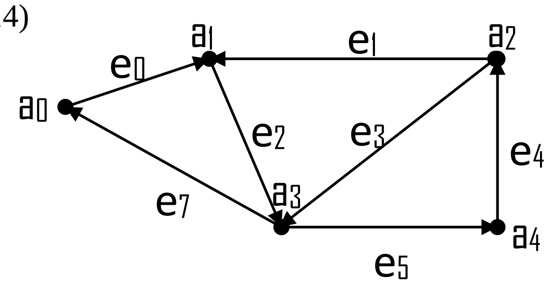
12)



13)



14)



4.8. Graflarni bo’yash

Planar graflarni bo`yash masalasi graflar nazariyasining eng mashhur muammolaridan biri hisoblanadi. Ushbu masala o`tgan asrning o`rtalarida paydo bo`lgan bo’lsa ham hamon mutaxassis va qiziquvchilar e’tiboriga sazovor. Graflarni bo’yash masalasi quyidagicha paydo bo’lgan: geografik kartani bo`yash uchun ixtiyoriy 2 ta qo`shni davlatni rangi har xil bo`lishini ta’minlashda 4 xil rang yetadimi? Bunda ixtiyoriy davlat chegarasi yopiq chiziqdan iboratligi, qo`shni mamlakatlar esa

umumiy chegara uzunligini tashkil etishini ko`rib chiqiladi. Keyinchalik karta tushunchasi va uning bo`yalishi boshqacharoq ko`rinishda talqin etilgan. Aytish mumkinki, ko`priklarsiz bog`langan tekis multigraf karta deb ataladi. Umumiy qirraga ega bo`lgan karta tomonlari chegaradosh hisoblanadi.

f funksiya mavjud bo`lib, unda *G*- 1 dan *k* gacha raqamlardan iborat va *f(G)*- chegara rangi, *G*- esa *k*-rang hisoblanadi( qo`shni chegaralar turli xil bo`lganda). *K*- rang mavjud bo`lsa, karta *k*- bo`yalgan deyiladi. 1879 yilda britaniyalik matematik A.Keli kartalarni bo`yash muammosini 4 ta rang gipotezasi orqali ta`riflab berdi. 4 bo`yoq farazi: har qanday karta 4 xil bo`yoq bilan bo`yaladi.

Ko`pincha 4 bo`yoq farazini boshqacha ta`bir bilan foydalaniladi: har qanaqa planar graf 4 bo`yoqda bo`yaladi.

**Ta`rif.** Agar geometrik ikkilik graf *G\** uchi k- bo`yalgan bo`lsa, karta G *k-bo`yalgan* deyiladi,.

Eslatib o`tamizki, shunday tekis graflar mavjudki, ular 4 rangdan kamroq rangda to`g`ri bo`yalgan. Masalan, *K*4 grafi.

4 ta rang gipotezasi unchalik qiyindek tuyilmadi va uning bir nechta isbotlari paydo bo`ldi.

Teorema. Ixtiyoriy 3 ta sikldan kam bo`lmagan yassi graf 3 xil rangda bo`yaladi.

Graflarning qirralarinigina emas, uchlarini ham bo`yash mumkin.

Nazorat uchun savollar:

1. Graf qachon k- bo`yalgan deyiladi?
2. Qaysi shart bajarilganda graf 3 xil rangda bo`yaladi?

4.9. To`rt xil rang masalasi

To`rt xil rang gipotezasi o`sha davrlarda ko`pgina izlanuvchilarning diqqatiga tushgan. 1880 yilga kelib esa bu masalaning birinchi isbotini A. Kemp taqdim etdi. 1890 yilda R. Xivud bu isbotning xatosini aniqladi. Shu bilan birga u agar to`rt so`zini besh so`ziga o`zgartirilganda, uni usbotlash osonroq bo`lishini ta'kidlagan.

To`rt xil rang gipotezasi masalasini quyidagi uchta tasdiq yordamida hal qilinadi:

1. Ixtiyoriy yassi graf 4 xil rangda bo`yaladi.
2. Har bir kub karta 4 ta rangda bo`yaladi.
3. 3 xromatik indeks ixtiyoriy kub kartaga teng bo`lishi mumkin.

Teorema 1. (*to‘rtta bo‘yoqlar haqida teorema*) Agar *G* planar graf bo‘lsa, unda $x(G) < 4$.

Agar *G* graf planar bo‘lmasa, uni geometrik tasvirlash uchun ayrim qirralarni olib tashlaymiz (boshqa tekislikka o‘tkaziladi).

Grafni tekislikdagi tasvirini hosil qilish uchun, olib tashlashi zarur bo‘lgan qirralarining minimal sonini *G* grafning planarlik soni deyiladi. Bu qirralami ikkinchi tekislikka o‘tkazish natijasida, grafni qismi hosil bo`ladi, lekin u tekis bo`lmasligi mumkin. U holda yana ayrim qirralami keyingi tekislikka o‘tkazish masalasi yechiladi.

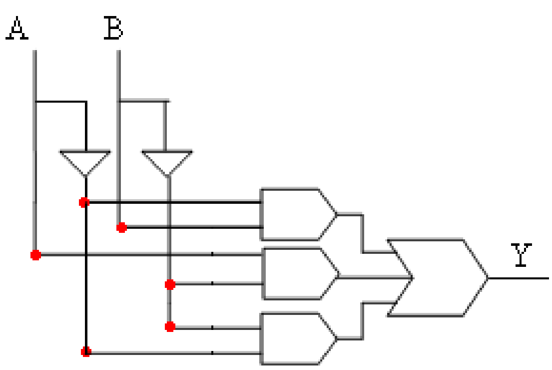
Nazorat uchun savollar:

1. To`rt xil rang gipotezasi masalasini hal qiluvchi uchta tasdiqni keltiring.
2. To`rtta bo`yoq haqidagi teoremani ayting.

Misol. Ushbu

$$\alpha(A,B) = (A\vee B)\to(\overline{A}\,\&\,B\vee \mathrm{A}\,\&\,\overline{\mathrm{B}}) = \overline{A\vee B}\vee(\overline{A}\,\&\,B\vee A\,\&\,\overline{B})$$

formulaga mos sxema



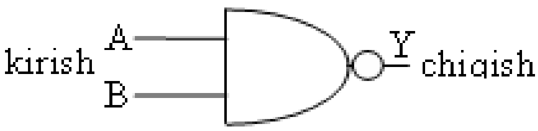
Yuqoridagi sxemani mantiq qonunlari yordamida soddalashtirib,

$$\alpha(A,B) = (A \vee B) \to (\overline{A} \& B \vee A \& \overline{B}) = \overline{A \vee B} \vee (\overline{A} \& B \vee A \& \overline{B}) =$$

$$= \overline{A} \& \overline{B} \vee \overline{A} \& B \vee A \& \overline{B} = \overline{A} \& (\overline{B} \vee B) \vee A \& \overline{B} = \overline{A} \vee (A \& \overline{B}) =$$

$$= (\overline{A} \vee A) \& (\overline{A} \vee \overline{B}) = \overline{A \& B}$$

tuzilgan sxema



Ikkala sxema ham bir xil vazifani bajaradi, chunki ularning rostlik jadvallari bir xil.

V BOB. ALGEBRAIK SISTEMALAR

5.1.1. Algebraik sistemalar

Ko'pgina hollarda diskret matematika va uning tatbiqlarida o'rganish ob'yekti sifatida to'plam bilan birga uning tuzilishi ham ahamiyatga ega bo`ladi.

Ma'lumki, odatdagi arifmetika, geometriya ob'yektlari bilan sonli amallarni bog'laydigan chiziqli fazo hamda biror binar munosabat aniqlangan to'plamlar asosida maydon tushunchasi kiritiladi. Barcha bunday strukturalar **algebraik sistemalar**ni tashkil etadi. Algebraik sistemalarning aniq ta'rifini keltiramiz.

Ta'rif 1. Bo'sh bo'lmagan A to'plamni qaraymiz. Bu to'plamda n-o'rinli f akslantirishni kiritamiz: $f : A^n \to A$. f funksiya bo'lganligi sababli, ixtiyoriy $(x_1, x_2, \dots x_n) \in A^n$ elementlar uchun f amalini qo'llash natijasi $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ bir qiymatli aniqlanadi. f amalining qiymatlar sohasi A to'plamga tegishli bo'lgani uchun f amalni A to'plamda **yopiq amal** deb ataymiz.

Ta'rif 2. Signatura yoki **til** $\sum$ deb o'rni ko'rsatilgan predikat va funksional simvollar to'plamiga aytiladi. 0-o'rinli funksional simvolga **constanta** deyiladi.

Agar α funksional yoki predikat simvoli bo'lsa, u holda uni o'rni $\mu(\alpha)$ yordamida belgilanadi.

n-o'rinli predikat va funksional simvollarni mos ravishda P^n va $f^{\,n}$ orqali belgilaymiz. Agar qaralayotgan signaturada standart simvollar foydalanilayotgan bo'lsa, masalan: qo'shish amali uchun +, tartiblash munosabati uchun ≤, bo'lish amali uchun /, constant uchun 0 va shu kabilar, u holda biz quyidagicha yozamiz: $\Sigma = \{\le, +, 0\}$, $\Sigma = \{+, -, /, 0, 1\}$

Ta'rif 3. ∑ signaturali algebraik sistema U={A, ∑} deb bo'sh bo'lmagan A to'plamga aytiladi, bunda har bir n o'rinli predikat (funksional) simvolga A to'plamda aniqlangan n-o'rinli predikat mos qo'yilgan. A to'plam {A, ∑} algebraik sistemaning **tashuvchisi** yoki **universumi** deb ataladi.

Ta'rif 4. ∑ dagi simvollarga mos keluvchi predikatlar va funksiyalar **interpretatsiyalar** deyiladi.

Interpretatsiyalarni ham signaturaning mos simvollari bilan belgilaymiz. Ixtiyoriy constant simvolning interpretatsiyasi A to'plamning biror bir elementi bo'ladi. Algebraik sistemalar odatda U, B,… kabi harflar bilan, ularning tashuvchilari esa A, B,… kabi harflar bilan belgilanadi. Ko'p hollarda algebraik sistema o'rniga "algebraik" so'zi tushirib qoldirilib, sistema yoki struktura so'zi ishlatiladi.

Ta'rif 5. Algebraik sistemaning **quvvati** deb A "tashuvchi"ning quvvatiga aytiladi.

Agar ∑ signatura predikat (funksional) simvollarga ega bo'lmasa, u funksional (predikat) signatura deb ataladi.

Agar sistemaning signaturasi funksional (predikat) bo'lsa, unga **algebra** (model) deyiladi.

Misol 1. $\omega = 0,1,2\ldots$ bo'lsin, u holda $\{\omega, +, \cdot\}$ to`plam ikkita ikki o'rinli amallar bilan algebra tashkil etadi.

Misol 2. $\{\omega, \le, +, \cdot, {}', 0,1\}$ to`plam ≤(μ (≤) =2) binar munosabatli, +, $\cdot$ $(\mu(+) = \mu(\cdot) = 2)$ ikki o'rinli amallar, ‘: n→ n+1 bir o'rinli amal (μ(‘)=1) va ikkita nol o'rinli amallar (constantalar) 0,1 $(\mu(0) = \mu(1) = 0)$ sistemasidir.

Misol 3. $\{Z, +, :, \sqrt{2}\}$ majmua algebra tashkil etmaydi, chunki bo'lish Z to'plam amali hisoblanmaydi, masalan 2:3 $\notin$ Z, $\sqrt{2}$ element ham Z to'plamga tegishli emas.

Misol 4. $\{P(U), U, \cap, -, 0, 1\}$ majmua ikki o'rinli amallar-, : U,$\cap$; bir o'rinli amal - : A → Ā; constantalar 0=∅ va 1=U bilan algebra tashkil etadi, uni Kantor algebrasi deb yuritiladi.

Misol 5. Ixtiyoriy halqa algebra bo'ladi.

Misol 6. $\left\{\{f(x)| \quad f: R \to \mathrm{R}\} \ \frac{d}{dx}\right\}$ juftlik (bunda $\frac{d}{dx}$ differensiallash amali) algebra bo'la olmaydi, chunki hamma funksiyalar ham differensiallanuvchi emas. Agar cheksiz marotaba differensiallanuvchi funksiyalar A={*f(x)*} to'plami qaralsa, u holda differensiallash amali $\frac{d}{dx}$ A to'plamda akslantirish bo'ladi va $\left\{A, \frac{d}{dx}\right\}$ juftlik algebra tashkil etadi.

Aytib o'tish kerakki, A^n to'plamni A to'plamga akslantiruvchi *f* qisman amalni (n+1) o'rinli munosabat deb qarash mumkin:

$$R_f = \{ (x_1, x_2, \ldots x_n, y) | \ (x_1, x_2, \ldots x_n,) \epsilon A^n, y = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \}$$

Shu sababli oxirgi misoldagi $\left\{\{f(x)| \, f: R \to R\} \frac{d}{dx}\right\}$ juftlikni, $\frac{d}{dx}$ amalni binar munosabat $\left\{(f, g) | \ g = \frac{df}{dx}\right\}$ deb hisoblansa, algebraik sistema deb qarash mumkin.

5.1.2. Gruppa va yarim gruppalar.

Ta'rif 1. ∑={ *f* } μ(*f*)=2, signaturali U algebraga **gruppoid** deb ataladi. Bundagi birgina f amali odatda · kabi belgilanadi, U={A, ·}.

Agar A to'plam chekli bo'lsa, amalni jadval orqali berish mumkin, bunda har bir $(a_i, a_j) \epsilon A^2$ juftlik natijasi jadvalda ko'rsatiladi.

Ta'rif 2. Bunday jadvalga U gruppoidning **Keli jadvali** deyiladi. Agar · amali assotsiativlik xossasiga ega, ya'ni barcha x,y,zϵA elementlar uchun $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ tenglik bajarilsa, U gruppoidga **yarimgruppa** deb ataladi.

Agar bir deb ataladigan $e \epsilon A$, element mavjud gruppaga, barcha $x \epsilon A$ elementlar uchun $e \cdot x = x \cdot e = x$ tenglik bajarilsa, U yarim guruhga monoid deb ataladi. Yarim gruppa va monoidlar til nazariyasida so'zlarni qayta ishlashda muhim o'rin tutadi.

Misol 1. Faraz qilaylik W(X) X alfavitdagi so'zlar to'plami bo'lsin. W(X) to'plamda KONKATENATSIYA amalini quyidagicha aniqlaymiz: Agar α,β $\epsilon W(X)$, u holda $\alpha\hat{}\beta\hat{} = \alpha\beta$ yani amal natijasi α va β so'zlarni birlashtirishdan iborat bo'ladi, masalan, xyz^zx=xyzzx. Assotsiativlik xossasi bajariladi, ya'ni ixtiyoriy α, β, γ so'zlar uchun $(\alpha\hat{}\beta\hat{})\hat{}\gamma = \alpha\hat{}(\beta\hat{}\gamma)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shu sababli {W(X), ˆ} sistema yarim gruppa hosil qiladi.

Shu bilan birga barcha α $\epsilon W(X)$ lar uchun $\Lambda\hat{}\alpha = \alpha\hat{}\Lambda = \alpha$, bunda $\Lambda -$ bo'sh so'z, bajarilgani uchun Λ birlik element vazifasini bajaradi. Shunday qilib {W(X), ˆ} sistema monoid hosil qiladi.

Agar istalgan $x \epsilon A$ element uchun shunday $x^{-1} \epsilon A$ element mavjud bo'lsaki $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda U={A, ·} monoidga gruppa deb ataladi. x^{-1} element $x \epsilon A$ elementga teskari element deb ataladi. Agar istalgan $x, y \epsilon A$ elementlar uchun $x \cdot y = y \cdot x$ tenglik o'rinli bo'lsa, U gruppa kommutativ yoki **Abel gruppasi** deb ataladi.

Misol 2. Agar $\{K, +, \cdot\}$ halqa bo'lsa, u holda {K,+} abel gruppasi bo'ladi.

Misol 3. <GL_n(K), ·> sistema, bunda GL_n(K)= { A |A-K maydonda aniqlangan n- tartibli matritsa va $detA \neq 0$}, n≥2 bo'lganda, kommutativ bo'lmagan gruppa hosil qiladi.

5.2. Morfizmlar

Faraz qilaylik U={A, ∑} , B={B,∑} algebraik sistemalar berilgan bo'lsin. **Ta`rif 1.** Agar $\varphi: A \rightarrow B$ akslantirish uchun quyidagi shartlar bajarilsa,

1) U va B sistemalardagi f_U va f_B funksiyalarga mos keluvchi istalgan funksional simvol $f^{(n)} \epsilon \sum$ uchun va istalgan α_1, α_2, … $\alpha_n \epsilon \sum$ uchun $\varphi(f_U(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)) = f_B(\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_n))$;

2) U va B sistemalardagi P_U va P_B predikatlarga mos keluvchi istalgan $P^{(n)} \epsilon \sum$ predikat simvollar uchun va ixtiyoriy $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \epsilon A$ uchun $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n \epsilon P_U \Longrightarrow (\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \dots, \varphi(\alpha_n)) \in P_B$ unga U sistemani B sistemaga akslantiruvchi **gomomorfizm** deb ataladi.

Agar $\varphi: A \to B$ gomomorfizm bo'lsa, uni quyidagicha belgilaymiz: $\varphi: U \to B$.

Gomomorfizmda amallar harakati va munosabati saqlanadi. Bu bir sistemaning xossalarini o'rganishda boshqa sistemaga ko'chirishga imkon beradi.

Misol. U = {Z, +, ≤} va B={Z^2 , + ,≤} sistemalarni qaraymiz, B sistemada qo'shish quyidagi qoida bo'yicha amalga oshiriladi.

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2,\ b_1 \leq b_2$, tartiblash munosabati

$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \quad va \quad b_1 \leq b_2$.

$\varphi: Z \to Z^2$ akslantirish $\varphi(a) = (a, 0)$ sharti bo'yicha aniqlansa u gomomorfizm bo'ladi. Haqiqatdan, ham istalgan a,b $\in Z$ uchun $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$ agar a ≤ b bo'lsa, u holda (a,0) ≤ (b,0) , ya'ni $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ munosabatlar bajariladi.

Ta`rif 2. In'yeksiya bo'lgan $\varphi: U \to B$. gomomorfizmga **monomorfizm** deb, syur'eksiya bo'lgan gomomorfizmga **epimorfizm** deb ataladi va bu holda B sistema U sistemaning **gomomorf obrazi** deyiladi. $\varphi: U \to U$ gomomorfizmga **endomorfizm** deb ataladi. $\varphi: U \to U$ monomorfizm syur'eksiya bo'lsa va φ^{-1}–gomomorfizm bo'lsa, unga **izomorfizm** deb ataladi va quyidagicha belgilanadi $\varphi: U \leftrightarrows B$. Agar $\varphi: U \leftrightarrows B$ izomorfizm mavjud bo'lsa, U va B **sistemalar izomorf** deyiladi va $\varphi: U \leftrightarrows B$ kabi belgilanadi.

$\varphi: U \leftrightarrows U$ izomorfizmga U sistemaning **avtomorfizmi** deb ataladi. $\varphi: U \leftrightarrows B$ izomorfizm biyeksiya sistemalar teng quvvatli bo'ladi.

Lemma.

1. $id_A : U \leftrightarrows U$
2. Agar: $\varphi: U \leftrightarrows B$, u holda $\varphi^{-1}: B \leftrightarrows U$.

3. Agar $\varphi: U_1 \rightleftharpoons U_2$ va $\varphi: U_2 \rightleftharpoons U_3$ bo'lsa, u holda $\varphi_1\varphi_2: U_1 \rightleftharpoons U_3$ bo'ladi.

Misol 1. Geometrik vektor fazoda vektorlarni qo'shish va haqiqiy songa ko'paytirish amallari bilan berilgan E_3 to'plamni qaraymiz. Cheksiz signaturali $U = \{E_3\,, +, \{\lambda\,\cdot\}_{\lambda\in R}\}$ sistemaga ega bo'lamiz, bunda bir o'rinli $\lambda\cdot$ funksiyalar har bir $\bar{a}$ vektorga $\lambda\cdot\bar{a}$ vektorni mos qo'yadi. Shu bilan birga $B = \{R^3, +, \{\lambda\,\cdot\}_{\lambda\in R}\}$ sistemani qaraymiz, uning "tashuvchisi" uchta (x,y,z) haqiqiy sonlardan , ikki o'rinli koordinatalar bo'yicha qo'shish amali (+), va uchlikni λ haqiqiy songa ko'paytirish amali.

U va B sistemalar R-haqiqiy sonlar maydonida chiziqli fazo bo'ladi. Biror tayin $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ bazisda $\bar{a} \in E_3$ vektorga uni koordinata qatori (x,y,z) ni mos qo'yuvchi φ akslantirish biyeksiya bo'ladi, $\varphi: E_3 \leftrightarrow R^3$; bunda $\varphi = (\bar{a}+\bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b})$, $\varphi(\lambda\cdot\bar{a})$ tengliklar o'rinli bo'ladi. Shunday qilib φ akslantirish U va B chiziqli fazolarda izomorfizm bo'ladi, bundan geometrik vektorlarni o'rganish asosida uchlik sonlarni o'rganish mumkin va aksincha.

Misol 2. Berilgan U to'plam uchun $\{P(U), \cap, U, 0{,}1\}$ sistema $\langle P(U), U, \cap, 0{,}1\rangle$ sistemaga $\varphi: A \leftrightarrow A'$ biyeksiya mavjudligi sababli izomorf bo'ladi. Haqiqatdan ham, De-Morgan qonuniga ko'ra istalgan B va C $\in P(U)$ to'plam uchun:

$\varphi(B\cap C) = \overline{B\cap C} = \overline{B} \cup \overline{C} = \varphi(B)\cup\varphi(C)$,

$\varphi(B\cup C) = \overline{B\cup C} = \overline{B}\cap\overline{C} = \varphi(B)\cap\varphi(C)$

Shu bilan birga $\overline{0} = 1,\ \ \overline{1} = 0.$

Misol 3. $U = \langle(0,\infty,\cdot)\rangle$, $B = \langle R, +\rangle$ gruppalarda aniqlangan $\varphi: (0,\infty) \to R$ akslantirishni qaraymiz, $\varphi(x) = \log_p x$, $p \in (0,\infty)$ - tayin musbat son, $P \neq 1$. φ akslantirish U, B sistemalarda aniqlangan izomorfizm bo'ladi. Bu musbat sonlarni ko'paytirish amalini haqiqiy sonlarni qo'shish amali yordamida amalga oshirishga imkon beradi, bu quyidagi tenglikka asoslangan:

$$a\cdot b = \varphi^{-1}\big(\varphi(a) + \varphi(b)\big)$$

5.3. Qism sistemalar.

Agar $U = \langle A, \sum \rangle$, $B = \langle B, \sum \rangle$, algebraik sistemalar uchun quyidagi shartlar

a) $A \subseteq B$

b) f_U, f_B funksiyalarga mos istalgan $f^{(n)} \in \sum$ funksional simvol uchun va istalgan $a_1, a_2 \dots a_n \in A$ elementlar uchun $f_U(a_1, a_2 \dots a_n) = f_B(a_1, a_2 \dots a_n)$ tenglik bajarilsin, ya'ni f simvolning interpretatsiyasi A to'plam elementlarida ham bir xil harakat qilsin.

c) P_U va P_B predikatlarga mos bo'lgan ixtiyoriy $P^{(n)}$ $\sum$ predikat simvol uchun $P_U = P_U \cap A^n$ tenglik o'rinli bo'lsin, bajarilsa U sistema B sistemaga qismsistema deb ataladi va $U \leq B$ kabi belgilanadi.

Agar $\sum$ funksional (predikat) signatura bo'lsa, B algebraning (modelning) U qismsistemasi qismalgebra (qismmodel) deb ataladi.

Misol 1. Agar V' va V –chiziqli fazoning qism fazosi bo'lsa, u holda V' V sistemaning qismsistemasi (qismalgebrasi) bo'ladi.

Misol 2. Agar $\sum = \{P^{(n)}\}$, $B = \langle B, \sum \rangle$, $\emptyset \neq A \leq B$ u holda $U = \langle A, \sum \rangle$ B sistemaning qismsistemasi bo'lishi uchun $P_U = P_B \cap A^n$ tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teorema. Agar B-algebraik sistema bo'lsa va $X \subseteq B$ $X \neq \emptyset$ u holda носители B(X) bo'lgan yagona qismto'plam B(X)C mavjud bo'ladiki, bunda istalgan qismsistema $U \subseteq B$ $X \subseteq A$ uchun $X \subseteq B(X)$ va $B(X) \subseteq U$ munosabat bajariladi.

Isboti: B(X) o'rnida barcha qism $U \subseteq B$ sistemalarning X to'plamni o'z ichiga olgan tashuvchini kesishmalarini qaraymiz.

$X \subseteq B(X)$ bo'lgani uchun $B(X) \neq \emptyset$. B(X)qismsistemaning yagonaligini tushunish qiyin emas. Keltirilgan teoremadagi B(X)qismsistema B sistemadagi X to'plamdan hosil qilingan qismsistema deb ataladi. Bu qismsistema B sistemaning X to'plamini o'z ichiga olgan eng kichik qism sistemasi bo'ladi.

Misol 3. V chiziqli fazo bo'lsin. S to'plam V fazoning bo'sh bo'lmagan vektorlar to'plami bo'lsin, u holda V fazodagi S to'plamning $\mathcal{E}(S)$ chiziqli qobig'i S to'plamdagi vektorlarning barcha chiziqli kombinatsiyalaridan iborat bo'ladi. $\mathcal{E}(S)$ algebra V fazoning S to'plamdan hosil qilingan qism algebrasi B(x)qism sistemaning tuzilishini indeksiya bo'yicha $\sum$ signatura termasi tushunchasini aniqlash bo'yicha keltiramiz.

1) $\sum$ signaturadagi o'zgaruvchi va constant simvollar termalaridir.

2) Agar $f\sum -n$ o'rinli funksional simvol va $t_1,t_2,\ldots..t_n$ termalar bo'lsa, u holda $f(t_1,t_2,\ldots..t_n)$terma bo'ladi.

3) 1) va 2) punktlar bo'yicha hosil qilingan termalardan boshqa hech qanday terma mavjud emas.

Shunday qilib signaturadagi funksional simvollar yordamida tuzilgan funksional ifodalar termalar bo'ladi.

$\sum$ signaturaning barcha termalar to'plami T($\sum$) orqali belgilanadi.

Misol. $\sum = \{+,\cdot,\leq,0\}$ signaturada, masalan, 0, x, x+y, zx(x+z)+0xy termalar bo'ladi. $x + y \leq (0 + z) \cdot x$ terma bo'lmaydi.

5. 4. Kongruyensiya. Faktor – algebra

Agar $\theta \leq A^2$ ekvivalentlik munosabati uchun istalgan n$\in w$, ixtiyoriy n o'rinli $f \in \sum$ simvol uchun, ixtiyoriy $(a_1, a_2 \ldots a_n)$ va $(b_1, b_2 \ldots b_n) \in A^n$ majmualar uchun $a_1\theta\, b_1,\, a_2\theta\, b_2, \ldots, a_n\theta\, b_n$ bajariladigan $f(a_1, a_2 \ldots a_n)\,\theta\, f(b_1, b_2 \ldots b_n)$ bajarilishidan kelib chiqsa, θ ekvivalent munosabatga $U = \langle A, \sum \rangle$ algebrada kongruensiya deb ataladi.

Bu barcha amallarni θ ekvivalentlik munosabati bilan moslanganligini bildiradi.

Masalan, qo'shish amali uchun quyidagicha ifodalanadi: Istalgan $x, y \in A$ elementlar uchun, ixtiyoriy $a \in \theta(x),\ b \in \theta(y),$ a+b element $\theta(x + y)$ sinfga tegishli bo'ladi.

A to'plamning θ konguensiyasi bo'yicha faktor to'plamini qaraymiz:

$$A/\theta = \{\theta(x)/x \in A\}$$

bu to'plamda $\sum$ signaturali algebrani aniqlaymiz. A algebraning konstanti C ga $\theta(c)$ elementni mos qo'yamiz, bu element A/θ to'plamda constant simvol C ga mos keladi. Agar f n-o'rinli $\sum$ dagi simvol bo'lsa, u holda A/θ to'plamda f funksiyani quyidagi qoida bo'yicha aniqlaymiz:

$$f(\ \theta(x_1), \theta(x_2), \dots\ \theta(x_n) = \theta\big(f(x_1, x_2 \dots x_n)\big).$$

Ixtiyoriy $x_1, x_2 \dots x_n \in A$ elementlar uchun bu ta'rifni korrektligi ya'ni ekvivalentlik sinfidagi qaysi element olinganiga bog'liq emasligiga ishonch hosil qilamiz. Haqiqatdan ham, agar $\theta(x_i) = \theta(y_i), i = 1,2 \dots n,$ bo'lsa, u holda $x_i \theta y_i$ bo'ladi, bundan kongruentlik xossasiga ko'ra $f(x_1, x_2 \dots x_n) \theta f(y_1, y_2 \dots y_n),$ ya'ni $\theta\big(f(x_1, x_2 \dots x_n)\big) = \theta\big(f(y_1, y_2 \dots y_n)\big)$ bajariladi.

Bunday hosil qilingan $U/\theta = \langle A/0,\ \sum\rangle$ algebraga U algebraning θ konguensiya bo'yicha faktor algebrasi deb ataladi.

$x \in A$ elementga $\theta(x)$ sinfni mos qo'yuvchi $A \to A/\theta$ akslantirish U algebra va U/θ algebradagi epimorfizm bo'ladi. Bu epimorfizmga tabiiy gomomorfizm deb ataladi.

Agar $\varphi: U \to B$ gomomorfizm bo'lsa, u holda Ker $\varphi = \{(a, a')|\ \varphi(a')\}$ to'plam U algebrada kongruensiya bo'ladi, bu to'plamni φ gomomorfizmning yadrosi deb ataladi.

Algebraning gomomorf obrazi (aksi) gomomorfizm yadrosi bo'yicha faktor algebrasi izomorfligi haqidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. (gomomorfizm haqidagi teorema) Agar $\varphi: U \to B$ epimorfizm va

$$\varphi: U \to U/Ker\varphi$$

tabiiy gomomorfizm bo'lsa, u holda $\varphi_0 \chi = \psi$ tenglikni qanoatlantiruvchi

$\varphi: U \to U/Ker\varphi$

izomorfizm mavjud bo'ladi.

Isboti. $a \in A$ uchun $\chi(b) = \psi(a)$ deb olamiz, bunda $b = \varphi(a)$. Agar $b = \varphi(a')$ bo'lsa, u holda $(a, a') \in Kech\varphi$, bundan $\psi(a) = \psi(a')$ tenglik kelib chiqadi, ya'ni χ akslantirish korrekt aniqlangan. $\varphi_0\chi = \psi$ tenglikning bajarilishi tushunarli, bundan uning syureksiya ekanligi kelib chiqadi. χ akslantirishning gomomorfizm bo'lishi to'g'ridan to'g'ri tekshiriladi. Agar $\chi(b) = \chi(b')$ bo'lsa, u holda $\psi(a) = \psi(a')$, bunda

$b = \psi(a),\ b' = \psi(a')$. Bundan

$$(a, a') \in Ker\varphi,$$

ya'ni b=b' bo'ladi, bu esa χ akslantirishning o'zaro bir qiymatli ekanligini isbotlaydi. Signaturaning funksional ekanligi va χ^{-1} akslantirishning mavjudligidan χ ning izomorfizm ekanligi kelib chiqadi.Teoremada keltirilgan $\varphi, \psi\ va\ \chi$ akslantirishlar quyidagi diagrammada keltirilgan:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\simeq"] & B \arrow[dl, "\chi"] \\
U/Ker\varphi &
\end{tikzcd}$$

1-rasm

5. 5. Algebralarining dekart ko'paytmasi. Birkgof teoremasi.

A_i, i∈I to'plamlar oilasi bo'lsin.

A_i, i∈I to'plamlarni dekart ko'paytmasi deb $\prod_{i \in I} Ai = \{f; f: I \to \bigcup_{i \in I} Ai$, bu yerda barcha i lar uchun f(i) ∈ Ai} to'plamga aytiladi.

Agar I={1,2,…,n} indekslarni chekli to'plami bo'lsa, unda

$\prod_{i \in I} Ai = \{f; f: I \to \bigcup_{i=1}^{n} Ai$, bu yerda f(1) ∈ A_i,…., f(n) ∈ A_i } dekart ko'paytmani

$\prod_{i=1}^{n} Ai = \{(f(1), \dots f(n));$ f:I→ $\bigcup_{i=1}^{n} Ai$, bu yerda f(1) ∈ A_i, ..., f(n) ∈ A_n } to'plam sifatida bir qiymatni qarashimiz mumkin. Shunday qilib, bu ta'rif chekli to'plamlar uchun kiritilgan dekart ko'paytmani ta'rifi bilan mos tushadi.

Bizga ∑ signaturani biror U_i=<A_i,∑>, i∈T algebrasi berilgan bo'lsin.

U_i, i∈I algebrani dekart ko'paytmasi deb, shunday $\prod_{i\in I} Ui = \langle \prod_{i\in I} Ai, \Sigma\rangle$ algebraga aytiladiki, qaysiki undagi $F^{(n)} \in \Sigma$ funksional simvollar quyidagi qoidaga ko'ra talqin qilinadi: ixtiyoriy $f_1,\ldots,f_n \in \prod_{i\in I} Ai$ funksiyalar uchun $F(f_1\ldots,f_n)=f$ deb olamiz, bu yerda ixtiyoriy i∈I uchun $f(i)=F_{Ui}(f_1(i),\ldots,f_n(n))$.

Agar I={1,2,….n} bo'lsa, unda $\prod_{i\in I} Ui$ algebralarni dekart ko'paytmalarni huddi to'plamlaridek $U_1\cdot U_2\cdot\ldots\cdot U_n$ ko'rinishda belgilaymiz.

1-misol. $U_1=\langle A_1,+1\rangle$ $U_2=\langle A_2,+2\rangle$ algebralar uchun $U_1\cdot U_2=\langle A_1\cdot A_2,+\rangle$ dekart + amali quyidagi $(a_1 a_2)+(a_1^1,a_2^1)=(a_1+_1+a_1^1, a_2+_2 a_2^1)$ munosabatlar orqali beriladi.

t_1 t_2 lar ∑ signaturaning termlari bo'lsin. Ushbu $t_1 \approx t_2$ yozuv ∑ signaturaning ayniyati deyiladi. Bu yozuv, t_1…. orqali hisoblangan har qanday qiymatlar, t_2 term orqali hisoblangan qiymatlar bilan ustma-ust tushishini bildiradi.

2-misol. Agar $t_1=x+y$ va $t_2=y+x$ lar $\Sigma=\{+\}$ signaturaning termlari bo'lsa, unda $x+y\approx y+x$ ayniyat + simvolga kommutativlik qonuni o'rinli ekanligini bildiradi.

Σ signaturaning algebralarining ξ sinfi ko'pxillik deyiladi, agar Σ signaturaning shunday $T=\{t_1^j \approx t_2^j \mid j\in J\}$ ayniyatlar to'plami mavjud bo'lib, Σ signaturaning algebralari Σ sinfiga qarashli bo'ladi, qachonki unda T to'plamdagi barcha ayniyatlar bajarilsa.

3-misol. $\Sigma=\{\cdot^{(2)}, e^{(0)}\}$ signaturani $\{x\cdot(y\cdot z)\approx(x\cdot y)\cdot z, x\cdot e\approx e\}$ ayniyatlar to'plami barcha monoidlardan tashkil topgan ko'pxillikni aniqlaydi.

Teorema. (Birkgof teoremasi) Σ signaturani bo'sh bo'lmagan ξ algebralar sinfi, faqat va faqat ξ qism algebra, faktor-algebra va dekart ko'paytmaga nisbatan yopiq bo'lgandagina, ya'ni ξ sinfi har bir algebra bilan birgalikda uning ixtiyoriy qism algebrasini, faktor-algebrasini, hamdab ixtiyoriy algebralar oilasi bilan birgalikda ularning dekart ko'paytmasini o'zida saqlasagina ko'pxillik algebralar sinfi bo'ladi.

5. 6. Panjara va Bul algebrasi.

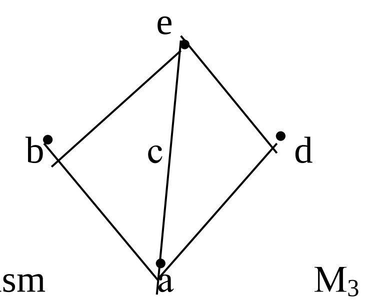
Agar qisman tartiblangan U=<A,B> to'plamning har bir juft elementi supremumi va infinumiga ega bo'lsa, u panjara deyiladi.

Berilgan x,y ЄA elementlar uchun inf{x,y} x va y elementlarni kesishmasi (x^y orqali belgilanadi), sup{x,y} element esa birlashmasi ($x \vee y$ orqali belgilanadi) deyiladi.

Agar U kesmada $\wedge$ va $\vee$ amallar kiritilgan bo'lsa, unda $\leq$ munosabatni bu amallar orqali quyidagicha aniqlash mumkin: $x\leq y\leftrightarrow x\wedge y=x$, hamda $x\leq y\leftrightarrow x\vee y=y$ Panjarani eng kichik(eng katta) elementi agar u mavjud bo'lsa, nol (bir) deb ataladi. Bu elementlarni mos ravishda 0 va 1 orqali belgilaymiz. Chekli panjaralarda doimo 0 va 1 bo'ladi.

1-misol. Har qanday chekli chiziqli tartiblangan to'plam panjara bo'ladi.

2. Qisman tartiblangan U=<{a,b,c,d}≤} to'plamni qaraylik. Bunda a<b, a<c, a<d, b<c, c<b, d<e, hamda b,c,d elementlar o'zaro taqqoslanmaydi. U sistema 2-rasmda ko'rsatilgan panjarani tashkil qiladi. Bu panjarada a=0, e=1.



2-rasm M_3

2-misol. Agar |A|>1 bo'lsa, qisman tartiblangan <A,id_A> to'plam panjara bo'lmaydi,qaysiki ixtiyoriy turli x va y elementlari uchun inf {x,y} va sup{x,y} amallari id_A nisbatan aniqlanmagan.

Bo'sh bo'lmagan X $\subseteq$B to'plamni saqlovchi ξ=<B,Σ> sistemaning qism sistemalar panjarasini aniqlaymiz. Buning uchun

$$\ell(\xi)=\left\{\cup \mid \cup =< A,\sum >\subseteq \zeta va X \subseteq A\right\}$$

to'plamni qaraymiz va unda qisman tartiblanishini quyidagicha kiritamiz:

$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \leq U_2 . < \ell(\xi,\leq)$juftlik qism sistemalar panjarasini tashkil qiladi. Bu panjarada $\ell(\xi)$ olingan ixtiyoriy U_1=<$A_1,\Sigma >$,U_2=<$A_2,\Sigma >$ sistemalar uchun $U_1 \wedge U_2$ kesishma $< A_1 \wedge A_2,\Sigma >$ qism sistemalardir.

$U_1 \vee U_2$ birlashma esa $A_1 \vee A_2 : \xi(A_1 \vee A_2)$ to'plamdan ko'rilgan qism sistemalardir.

3-misol. V chiziqli fazo va V chiziqli fazoni qism fazolar $\ell(V)$ to'plamni qaraylik.

$< \ell(V), \leq>$ sistema bu yerda $V_1 \leq V_2 \Leftrightarrow V_1 - V_2$ ni qism fazasi, qism faza panjarasini tashkil qiladi, unda $V_1 \wedge V_2 = V_1 \wedge V_2$, $V_1 \wedge V_2 = Z(V_1 \wedge V_2)$.

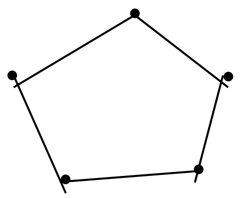
$U =< A, \leq>$ panjara distribut deyiladi, agar u barcha x,y,z$\subset$A lar uchun

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Distribut qonunlariga bo'ysunsa.

Hamma panjaralar ham distribut bo'lavermaydi. 2-rasmda tasvirlangan M_3 panjara distribut emas, qaysiki unda $b \wedge (d \vee c) = b \wedge e = b$ bo'ladi, lekin $(b \wedge d) \vee (b \wedge c) = a \wedge a = a$ bo'ladi.



3-rasm P_5

P_5 panjara ham distribut bo'lmaydi.

Teorema. $U =< A, \leq>$ panjara distribut bo'ladi, qachonki U M_3 yoki P_5 larga izomorf bo'lgan qism panjaralarga ega bo'lmasa.

Distribut U=$< A, \leq>$ panjara Bul algebrasi deyiladi, a u 0 ga , 1 ga 0≠1 ega va ixtiyoriy $x \in A$ element uchun $x \vee \bar{x} = 1$ va $x \wedge \bar{x} = 0$ tengliklarni qanoatlantiruvchi shunday $\bar{x}$ element (x to'ldiruvchi deb ataluvchi) mavjud bo'lsa.

Agar U Bul algebrasi bo'lsa, unda ixtiyoriy elementning to'ldiruvchisi x yagonadir.

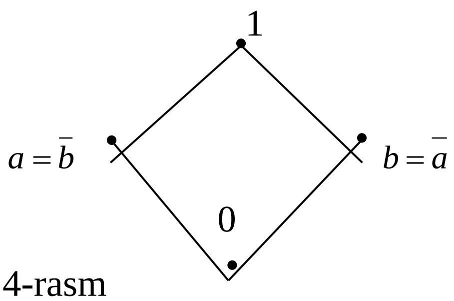
Isbot. Faraz qilaylik x element 2 ta y va z to'ldiruvchilarga ega bo'lsin, ya'ni $x \vee y = 1, x \wedge y = 0$ va $x \vee z = 1, x \wedge z = 0$. Distributivlik qoidalaridan foydalanib $y \vee z$ va $y \wedge z$ elementlar ham x ning to'ldiruvchi ekanligiga kelamiz, ya'ni

$z \vee (y \vee z) = 1, x \wedge (y \vee z) = 0, x \vee (y \wedge z = 1, x \wedge (y \wedge z) = 0$. Bundan esa $\{x, y \wedge z, y \vee z, x, 1\}$ U panjaraning qism panjarasi P_5 panjarani hosil qiladi, bu esa U panjarani distributivligiga ziddir. Shunday qilib , x elementning 2ta turli to'ldiruvchi elementlari mavjud emas ekan.

Shunday qilib Bul algebrani $\wedge$ kesishma va $\wedge$ yig'indi amallari algebra ko'rinishida, $x \to \bar{x}$ to'ldiruvchi amal bir o'rinli va 0 va 1 o'zgarmasli $\xi =< B, \wedge, \vee, 0, 1 >$ algebra ko'rinishida tasvirlashimiz mumkin.

4-misol. 1.Agar X{0,1} to'plamda 0<1shartli chiziqli tartiblanish kiritsak, unda 2 elementli <{0,1}, $\wedge, \vee, 0, 1$> Bul algebrasini hosil qilamiz.

2. A={0,a,b,1} to'plamni qaraymiz va $\leq$ tartiblanishni quyidagiga qaraymiz: 0<a, 0<b, a<1, b<1, a va b lar taqqoslanmaydi. <A,$\leq$ > sistema Bul algebrasi bo'ladi, bunda $b = \bar{a}$, $a = \bar{b}$.



4-rasm

3. $< P(U), \wedge, \vee, 0, U >$qator algebrasi Bul algebrasi bo'ladi.

Teorema. Agar $\xi =< B, \wedge, \vee, 0, 1 >$ Bul algebrasi bo'lsa, unda ixtiyoriy $x, y, z \in \xi$ uchun ξ da quyidagi qonunlar bajariladi.

1) $\vee$ va $\wedge$ amallarning assosiativligi:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$$

2) $\vee$ va $\wedge$ amallarning kommutativligi:

$$x \vee y = y \vee z, x \wedge y = y \wedge x;$$

3) Idempotentlik qonuni:

$$x \vee x = x, x \wedge x = x;$$

4) Distributivlik qonuni:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

5) Yutilish qonuni:

$$x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x;$$

6) De Morgan qonuni:

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y};$$

7) 0 va 1 qonunlari:

$$x \vee 0 = x, x \wedge 0 = 0, x \vee 1 = 1, x \wedge 1 = x, x \vee \overline{x} = 1, x \wedge \overline{x} = 0, 0 \neq 1;$$

8) Ikkilangan inkor qonuni:

$$\overline{\overline{x}} = x;$$

Quyidagi teoremagacha aniqlikda barcha chekli Bul algebralari tasvirlanadi.

Teorema. (**Stoun teoremasi)** Har qanday Bul algebrasi biror Kantor algebrasiga izomorfdir.

Qaysiki, ixtiyoriy U tuplamning P(U) quvvati $2^{|U|}$ ga teng bo’lgani uchun Stoun teoremasidan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Elementlar soni teng bo’lgan 2 ta ixtiyoriy 2 ta Bul algebralari izomorfdir. Chekli Bul algebralarning elementlar soni biror $n \in w \setminus \{0\}$ uchun 2^n ga teng.

Shunday qilib, chekli Bul algebralar elementlarining soni orqali izomorfizm aniqlikda aniqlanadi.

$$< B, \wedge, \vee, -, 0, 1 > \quad \text{va} \quad < B, \vee, \wedge, -, 1, 0 >$$

Bul algebralar $\varphi : B \to B$ izomorfizm orqali izomorfizmdir, bu yerda $\varphi(x) = \overline{x}$. Bunga quyidagi Bul algebralar ikkilamchi prinsipga asoslangan: agar $\leq$ munosabat va $\vee, \wedge, -, 0, 1$ amallar uchun o’rinli bo’lgan Bul algebralar haqidagi tasdiqda barcha $\leq$ lar $\geq$ lar, $\wedge$ lar, $\vee$ lar, 0 lar, 1 lar, 1 lar 0 lar bilan almashtirilganda, ya'ni o'rinli tasdiq hosil bo'ladi. Hosil qilingan bunday tasdiq berilgan tasdiqqa ikkilamchi deyiladi.

5-misol. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ de Morgan qonuni $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ de Morgan qonuniga nisbatan ikkilamchi, $x \wedge \overline{x} = 0$ qonun esa $x \vee \overline{x}$ qonunga nisbatan ikkilamchidir.

Endi Bul algebralarining halqalar bilan aloqasini qaraymiz.

<R,+,*> halqa Bul halqasi deyiladi, agar barcha $a \in R$ lar uchun $a^2=a$ bo'lsa.

Bul halqa kommutativ va barcha $a \in R$ lar uchun a+a=0.

Isbot. Birinchidan $a+a=(a+a)^2=a^2+a^2+a^2+a^2=a+a+a+a$, bu yerda a+a=0, ya'ni a=-a. Ikkinchidan, $a+b=(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+b+ab+ba$. Bu yerda ab+ba=0. Unda ab=ab+(ab+ba)=(ab+ab)+ba=ba.

R halqani birlik elementi deb barcha $a \in R$ lar uchun a*e=e*a=a tenglikni qanoatlantiruvchi e elementga aytiladi.

$\xi = < B, \wedge, \vee, 0, 1 >$ Bul algebra bo'lsin. B da halqaviy qo'shish va ayirish amallarini quyidagi qoida bo'yicha aniqlaymiz.

$$x \oplus y = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y), x \otimes y = x \wedge y .$$

Barcha x,y$\in$B lar uchun. +amal to'plamlarning yig'indisi, *amal esa to'plamlarning kesishmasi amaliga mos keladi.

Teorema. <B,+,*> sistema 1 birlik elementi Bull halqasini tashkil etadi.

Birlik elementi <B,+,*> halqaga ega bo'lsak , unda $\wedge, \vee$ amallarni x$\wedge$y=x*y va x$\vee$y=x+y(x*y), x=1+x qoidalar orqali Bull qiymatni ko'rishimiz mumkin.

5.7. Bul algebrasi filtrlari va ideallari.

B=<B, $\wedge, \vee, \bar{}, 0, 1 >$ Bull algebra berilgan bo'lsin. I$\subseteq$B to'plam ideal deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) a,b$\in$I ekanligidan a$\vee b \in I$ ekanligidan kelib chiqsa;

2) agar b$\in I$, $a \in B$ va a$\in b$ bo'lsa, unda a$\in I$.

Agar I$\neq 0$ bo'lsa, unda 0$\in$I.

I ideal bosh deyiladi, agar shunday C$\in I$ element mavjud bo'lib, $I=\{a\in b \mid a\le c\}$ bo'lsa.

1-misol. $<P(\cup),\cap,\cup,\bar{},0,1>$ Kantor algebrasini qaraymiz va ixtiyoriy $C\subseteq U$ qism to'plamni tanlaymiz. Unda $I=\{A\mid A\subseteq C\}$ to'plam bosh idealni tashkil qiladi.

Haqiqatdan, agar $A,B\in I$ bo'lsa, unda $A,B\subseteq C$, bu yerdan $A,B\subseteq C$ va, demak $A,B\in I$ bo'ladi.

Agar $B\subseteq C$ va $A\subseteq B$ bo'lsa, unda $\subseteq$ munosabatni tranzitivligi $A\subseteq C$, ya'ni $A\subset I$ ega bo'lamiz.

Filtr tushunchasi ideal tushunchasiga ikkilamchidir.

$F\subseteq B$ to'plam filtr deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $a,b\in F$ ekanligidan $a\wedge b\in F$ ekanligi kelib chiqsa,

2) agar $b\in I$, $a\in B$ va $b\subseteq a$ bo'lsa, unda $a\in F$

F filtr bosh deyiladi, agar shunday $C\in F$ element topilib, $F=\{a\in b\mid a\ge c\}$ bo'lsa.

2-misol. P(U) Kantor algebrasida ixtiyoriy $C\subseteq U$ to'plam uchun $F=\{A\mid A\in P(U)\hat{a}\grave{a}C\subseteq A\}$ to'plam bosh filtr deyiladi.

1-teorema**.** Agar B chekli Bul algebrasi bo'lsa, unda B dagi barcha ideallar va filtrlar boshdir.

Agar I B Bul algebrasining ideali bo'lsa, unda $\bar{I}=\{\bar{a}\mid a\in I\}$ ideal I idealga ikkilamchi deb ataluvchi filtr bo'ladi.

2-teorema. $I\to\bar{I}$ akslantirish ideallar to'plami va filtrlar to'plami orasidagi bieksiyadir.

5.8. Munosabatlar algebrasi.

Munosabatlar algebrasi algebraik sistemalarning muhim sinfi hisoblanadi. Tashuvchi munosabatlar to'plami $R=\{P_1.P_2,.....,P_m....\}$ Σ signaturasi esa birlashma $\cup$, kesishma $\cap$, ayirma va dekart ko'paytma x amallarning qisman ikki o'rinli amallarining simvolidan iborat bo'lgan munosabatlar algebrasini qaraymiz.

P_i va P_j munosabatlar birgalikda deyiladi, agar biror A to’plam va $n \in w$ son uchun $P_i, P_j \in A^n$ bo’lsa.

Birgalikda bo’lgan ikkita P_i ва P_j munosabatlarning birlashmasi $P_i U P_j$ deb har biri hech bo’lmaganda bu munosabatlarning biriga tegishli bo’lgan kortejlarning to’plamiga aytiladi:

$$P_i \cup P_j = \{X \mid X \in P_i ¸\hat{e}\grave{e}x \in P_j\}$$

Birgalikda bo’lgan ikkita P_i ва P_j munosabatlarning ayirmasi $P_i \setminus P_j$ deb P_i munosabatga tegishli va P_j munosabatga tegishli bo’lmagan barcha kortejlar to’plamiga aytiladi.

$$P_i \setminus P_j = \{X \mid X \in P_i \hat{a}\grave{a} X \notin P_j\}$$

1-misol. Agar $P = \{(a,b,d)(b,c,e)\}, Q = \{(a,b,d)(b,d,e)\}$ bo’lsin unda

$$P \cup Q = \{(a,b,d),(b,c,e),(b,d,e)\}, P \cap Q = \{(a,b,d)\}, P \setminus Q = \{(b,c,e)\}$$

Ikkita P_i va P_j munosabatlarning dekart ko’paytmasi deb, agar $x = (x_1,......,x_2) \in P_i)$, y=($y_1$,…..,$y_s$) bo’lganda $z = x^\wedge y = (x_1,....,x_2, y_1.....,y_2)$ bo’lgan barcha kortejlar to’plamiga aytiladi. Demak,

$$P_i \times P_j = \{x^\wedge y \mid x \in P_i, y \in P_j\}.$$

2-misol. p={(a,b),(b,c)}, Q={(b,c,a)(c,a,a)} bo’lsin, unda P*Q={(a,b,b,c,a),(a,b,c,a,a),(b,c,b,c,a)(b,c,c,a,a)}.

Nazorat savollari.

1. To’plamlar dekart ko’paytmasi ta’rifini keltiring.
2. N-o’rinli binar munosabat ta’rifini keltiring.
3. Signatura yoki til deb nimaga aytiladi?
4. Predikat va funksional simvol to’plamiga misollar keltiring.
5. Algebraik sistema tarifini keltiring.
6. Algebraga ta’rif bering va misollar keltiring.
7. Gruppoidga ta’rif bering va misollar keltiring.
8. Yarim gruppoidga ta’rif bering va misollar keltiring.
9. Gruppa tushunchasiga ta’rif bering va misollar keltiring.

10. Abel gruppasiga misollar keltiring.
11. Gomomorfizm ta’rifini ketiring.
12. Monomorfizm, epimorfizm va endomorfizmlarga ta’rif bering va misollar keltiring.
13. Izomorfizm va avtomorfizmlarga tarif bering va misollar keltiring.
14. Qismsistemaga ta’rif bering.
15. Qism algebra deb nimaga aytiladi?
16. Terma tushunchasiga ta’rif bering.
17. Kongruensiyaga ta’rif bering.
18. Faktor to’plamiga ta’rif bering.
19. Gomomorfizmning yadrosini tushuntirib bering.
20. Algebralar dekart ko’paytmasi ta’rifini keltiring.
21. Signature algebralarining qachon ko’p xil deb ataladi?
22. Birkgof teoremasini ayting.
23. Panjara deb nimaga aytiladi?
24. Panjaraning qanday elementi nol (bir) deb aytiladi?
25. Qanday sistemalar kongruensiyalar panjarasini tashkil etadi?
26. Qanday panjara distributiv deb ataladi?
27. Bull algebra ta’rifini keltiring.
28. Bull algebra qoidalarini ayting.
29. Smoul teoremasini keltiring.
30. Bull algebrasining ikkilamchisi prinsipini keltiring.
31. Qanday halqa bull halqa bo’ladi.
32. Ideal ta’rifni keltiring.
33. Qanday ideallar bosh deb ataladi?
34. Qanday to’plam filtr deb ataladi?
35. Qanday filtr freme filtiri bo’ladi?
36. Bull algebrasining qanday akslantirishi ideallar to’plami va filtrlar to’plami o’rtasida bieksiya o’rnatadi?
37. Qanday munosabatlar birgalikda deyiladi?

38. Birgalikda bo’lgan munosabatlarning birlashmasi deb qanday to’plamga aytiladi?
39. Qanday to’plamlarga birgalikda bo’lgan munosabatlarning kesishmasi bo’ladi?
40. Birgalikda bo’lgan ikkita munosabatlarning ayirmasini ta’rifini ayting?
41. Ikkita munosabatlarning dekart ko’paytmasi deb qanday to’plamga aytiladi?

Misollar.

1. Quyidagi sistemalarni algebra tashkil qilishini tekshirish:

a) $\langle \omega,+,- \rangle$, b) $\langle Z,:,\cdot \rangle$, c) $\langle R,\cdot,-,1-2i \rangle$.

2. A to’plamda aniqlangan funksiyalar to’plamini F orqali belgilaymiz. $\langle F,0 \rangle$ sistema

a) yarim gruppa, b) monoid, c)gruppa tashkil etadimi?

3. $\langle \{1,2,3,4\}, \{(1,3),(1,4),(2,4),(3,2)\} \rangle$ va $\langle \{a,b,c,d\},\{(b,a),(c,b),(c,d),(d,a)\} \rangle$ sistemalarining izomorizimini tuzing.

4. Ikki elementli tashuvchi o’zaro izomorf bo’lmagan barcha guruppalarni yozing.

5. Ushbu

	a	b	c	d
a	a	a	b	a
b	c	d	a	b
c	a	c	d	d
d	d	a	d	a

KELI jadvali orqali aniqlangan $U=\langle \{a,b,c,d\}, \cdot \rangle$ algebrani qaraylik. U algebra tashuvchi

a) {a,b,c}; b) {a}; c) {c,d} bo’lgan qism algebra ega bo’ladimi?

6. Quyidagi ifodalarning qaysi biri $\Sigma=\{f^{(1)}, g^{(2)}, h^{(3)}\}$ signaturini termi bo'ladi:

a) $f(g(x;y))$;· b) $g(f(x), h(,y,z))$; c) $(f(x), h(,y,z))$?

7. Quyidagi berilgan X to'plamning ξ(X) qism sistemasini tuzing.

a) $\xi=<R, \sqrt[3]{.}>$, X={2};

b) $\xi=<\omega,+>$, X={2,3};

c) $\xi=<C,\cdot>$, X={i};

d) $\xi=<C,\cdot,2>$, X={i};

8. Ushbu

	a	b	c	d	e
a	c	d	a	b	e
b	d	c	b	b	e
c	a	a	b	a	c
d	b	a	a	b	d
e	a	b	e	e	c

KELI jadvali orqali aniqlangan $U=<\{a,b,c,d,e\},\cdot>$ algebrani qaraymiz. Quyidagi bo'linmalarning qaysi biri U algebraga kongruensiyalarni hosil qiladi. Topilgan kongruensiyalar bo'yicha U algebraning faktor algebrasini tuzing.

9. Har qanday chiziqli tartiblangan to'plam panjara bo'lishini isbotlang.

10. Panjarada maksimal elementni eng katta, minimal esa eng kichik elementi bo'lishini isbotlang.

11. Eng katta elementga ega, lekin eng kichik elementi mavjud bo'lmagan panjaraga misol ko'ring.

12. Uchta elementli to'plamning qism to'plamlari Bul algebrasini tuzing.

13. To'rtta elementli to'plamning qism to'plamlari Bul algebrasi ko'ring.

14. Bul algebrasini $\overline{x \cup (y \cap z)}$ termiga mos bo'lgan Bul halqa termini toping.

M U N D A R I J A

Mundarija.

“Algoritmlash va matematik modellashtirish” kafedrasining
majlisida (26.06.2014y. 46-bayonnoma)
muhokama qilindi va Dasturuy injiniring
fakulteti ilmiy-uslubiy kengashi
(1.07.2014 ___-bayonnoma)
tomonidan nashrga tavsiya qilindi.

Tuzuvchilar:
fiz.-mat.fanlari nomzodi: S.S.Sadadddinova
dotsent: Abduraxmanova Yu.M.
assistent: Raximova F.S.

Adabiyotlar

1. Азларов Т.А. ва бошқ. Математикадан қўлланма. Т.: «Ўқитувчи», 1990. -352 б.
2. Асеев Г.Г., Абрамов О.М., Ситников Д.Е. Дискретная математика. – Ростов на Дону, «Феникс», 2003. – 246 с.
3. Гаджиев А.А. Основый дискретной математики. Махачкала, 2006. – 365 с.
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математики. М.: Наука. 2005. – 122 с.
5. Гильберт Д., Бернойс П. Основания математики. М.: Наука, 1979. – 156 с.

6. Горбатов В.А. Основый дискретной математики. М.: высшая школа, 1986. – 198 с.
7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: “Наука”, 1979.
8. Ежов И.И. Элементый комбинаторики. М.: «Наука», 1977.- 80 с.
9. Еруссалимский Я. М. Дискретная математика теория, задачи, приложения. М.: «Вузовская книга», 2002.- 268 с.
10. Емиличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Теория графов. М.: «Наука» 1991. – 243 с.
11. Ершов Ю.Л. и др. Математическая логика. М., «Наука» 1987.
12. Игошин В.И. Задачник-практикум по математической логике. М. “Просвешение”.1986.
13. Кулабухов С.Ю. Дискретная математика. Таганрог, 2001. - 150 с.
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: “Мир”, 1970.
15. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. ЗАО Издательский дом «Питер», 2007.
16. Малцев А.И. Алгебраические системы. М.: “Наука”, 1970.
17. Мендельсон Н. Введение в математическую логику. – М.:”Мир”, 1974.
18. Судоплатов С.В., Овчанникова Е. В. Элементый дискретной математики. М.: «Инфра-М», 2002.
19. Тўраев Х. Математик мантиқ ва дискрет математика. Т.: “Ўқитувчи”, 2003.
20. Шопарев С.Д. Дискретная математика. Курс лекций и практических занятий. Санкт-Петербург. «БХВ-Петербург» 2009.
21. Зиков А.А. Основый теории графов. М., «Наука» 1987.
22. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

ЗАО РИТС “Техносфера», 2003.-313 с.

23. O‘.N. Qalandarov, H.A. Abduvaitov, Z.S. Chay Matematik mantiq masalalari, tadbiqi va ularni yechish uchun uslubiy ko’rsatmalar.Toshkent, 2012 y.- 30 b.