Ю. Н. ЁҚУБОВ, С. А. САИДОВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

*Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими
вазирлиги педагогика олий ўқув юртларининг
талабалари учун ўқув қўлланмаси
сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1997

Тақризчилар: **Техника фанлари доктори,**
профессор *Д. М. Муродов,* физика-математика
фанлари номзоди, доцент *М. С. Яҳёев,* техника фанлари
номзоди, доцент *О. Ҳ. Шодиев*

Ушбу ўқув қўлланма педагогика институтлари учун назарий механика бўйича белгиланган дастур асосида ёзилган. Қўлланмада бутун курс статика, кинематика ва динамика қисмларига ажратилган ҳолда баён этилди. Кўпгина мавзулардан сўнг масалалар ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил ечиш учун масалалар берилган.

Мазкур қўлланмадан сиртдан таълим олаётган ўрта махсус ўқув юртларида ўқийдиган талабалар ҳам фойдаланишлари мумкин.

$Ё\frac{1603020000-202}{353\ (04)-97}155-96$

ISBN 5—645—02676—4

КИРИШ

Назарий механика макрожисмларнинг нисбатан кичик тезликлардаги механик ҳаракатларини ўрганади. Барча ҳаракатлар ичида энг оддийси механик ҳаракатдир. Механиканинг ўзи релятивистик ва норелятивистик механика қисмларига бўлинади. Норелятивистик механикада жисмнинг тезлиги ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигидан (ёруғликнинг бўшлиқда тарқалиш тезлиги $3 \cdot 10^8$ м/с) анча кичик бўлган ҳаракатлар ўрганилади. Агар жисмнинг ўлчамлари атом ва молекулалар ўлчамлари даражасида кичик бўлиб, ҳаракат тезликлари ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигига яқин бўлса, бундай масалалар билан квант механикаси шуғулланади.

Ҳар қандай ҳаракат фазонинг маълум жойида ва маълум вақтда содир бўлганлиги учун бу тушунчалар: фазо, вақт ва ҳаракат ўзаро узвий боғланган. Ҳаракат материянинг яшаш шакли бўлиб, ҳаракатсиз материя ва материясиз ҳаракат бўлмайди. Ҳаракат материя яшашининг энг умумий шакли бўлганлиги учун механиканинг қонун ва қоидалари барча табиий ҳодисаларга тегишлидир.

Назарий механика барча техника фанлари учун назарий асос бўлиб хизмат қилади. Назарий механиканинг ривожланиши натижасида эластиклик назарияси, материаллар қаршилиги, машина ва механизмлар назарияси, гидроаэродинамика ва кўпгина бошқа техника фанлари юзага келди. Назарий механика бошқа фанлар, айниқса математика билан боғлиқ бўлиб, бу ерда механика қонунлари математика ютуқларини ҳисобга олинган ҳолда чуқурроқ ўрганилади.

Кўпчилик ҳолларда жисмларнинг ўлчамларини ҳисобга олмасдан механика масалаларини ечишга имконият туғилади. Ана шунинг учун моддий нуқта тушунчаси киритилади ва нуқта механикаси ҳамда жисм механикаси алоҳида-алоҳида ўрганилади. Мутлақо деформацияланмайди, деб фараз қилиш мумкин бўлган жисм абсолют қаттиқ жисм деб айтилади, бу ҳолда жисм нуқталари орасидаги масофа ўзгармайди, деб қаралади.

Жисмларнинг ўзаро таъсирини характерлайдиган физик катталик куч, жисм инерциясини ифодалайдиган катталик эса массадир. Куч, масса, фазо, вақт, энергия, импульс, куч моменти ва бошқалар назарий механиканинг асосий тушунчаларидир. Шу тушунчалар орқали назарий механика ўзининг қонунларини ва қоидаларини ифодалайди.

Назарий механика уч қисмга бўлиб ўрганилади: статика, кинематика ва динамика. Ҳар бир қисмда нуқта ва жисм учун механик масалалар мустақил ҳолда, алоҳида-алоҳида шаклларда ўрганилади.

Маълумки, физиканинг асоси механикадир. Механика жуда тарихий фан бўлиб, у эрамиздан олдин бошланган ва шунинг учун яхши ривожлангандир. Механиканинг ривожланиш тарихини учта асосий даврга бўлиш мумкин: 1) қадимий давр механикаси — Аристотель (э. ав. 384—322 й.й) давридан 16 асргача бўлган давр; 2) уйғониш даври —16 асрдан 20 асрнинг бошигача бўлган давр; 3) 20 аср механикаси — ҳозирги давргача бўлган механика.

Биринчи давр бошида Аристотель (Осиё халқлари орасида Арасту деб аталган) ўзининг «Механика» деган асарида механикани бошқа фанлардан ажратади. Архимед (э. ав. 287—212 й.й.) оғирлик марказини аниқлаш бўйича янги таълимот билан ричагга қўйилган кучларнинг мувозанати, жисмларнинг сузиш шартлари ва суюқликларнинг гидростатик босими ҳақидаги тушунчаларни илмий асослаб беради. Шу давр ичида геоцентрик назария ҳукмронлик қилди.

Иккинчи даврда, уйғониш даврининг бошида Николай Коперник (1473—1543) ўша вақтгача ҳукм суриб турган ва Птоломей ишлаб чиққан геоцентрик назария ўрнига янги гелиоцентрик назарияни илмий-назарий томондан асослаб берди. Бу гелиоцентрик назария оламнинг тузилиши ҳақидаги таълимотни бутунлай ўзгартирди — бу назария чинакам инқилобчи назария эди. Бу назарияга асосан оламнинг марказида Қуёш жойлашган бўлиб, Қуёш атрофида ҳамма сайёралар айланади. Коперниккача бу гелиоцентрик назарияни Ўрта Осиё олимлари Беруний ва Абу Али ибн Сино ҳам сифат жиҳатдан тавсифлаб берган эдилар. Булар оламнинг марказида Ер бўлиши мумкин эмас, чунки Ернинг массаси Қуёшга нисбатан анча кичик ва, демак, оламнинг марказида Қуёш туради ва Қуёш атрофида сайёралар, шу жумладан Ер ҳам айланиши мумкин, деган фикрни илгари сурдилар. Бироқ бу фикр фақат сифат жиҳатидан, ҳисоб-китоб қилинмасдан айтилган эди. Коперник эса гелиоцентрик назариянинг тўғрилигини, тўлиқ математик ҳисоблаш методини ишлаб чиқди ва исботлади.

Кеплер (1571—1630), Галилео Галилей (1564—1642), Исаак Ньютон (1643—1727) ишлари классик механика қонунларини кашф қилиб, системага киритди ва улар алоҳида қонунлар шаклида эълон қилинди. Чет эллардаги Иван Бернулли (1667—1748), Даниил Бернулли (1700—1782), Даламбер (1717—1783), Лагранж (1736—1813), Шаль (1733—1880), Вариньон (1654—1722), Пуансо (1777—1859) ва бошқа шу каби олимларнинг ишлари механиканинг ривожланишига катта таъсир қилди. Шу жумладан, Россия Фанлар Академиясидаги Леонардо Эйлернинг (1707—1783) механика соҳасидаги ишлари ҳам, шубҳасиз, механикани асословчи пойдевор вазифасини бажарди, деб айтиш мумкин. М. В. Остроградский, П. Л. Чебишев, К. Э. Циолковский, И. В. Мешчерский ва бошқа бир неча олимларнинг хизматлари ҳам механиканинг ривожланишида жуда муҳим аҳамият касб этди. Айниқса, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплигин, С. П. Королевларнинг қилган ишлари гидроаэродинамика соҳасида, космонавтика соҳасида бебаҳодир.

Учинчи давр махсус ва умумий нисбийлик назариясининг асосий ғояларини ишлаб чиқиш билан бошланади ва ҳозирги даврда механика қонунларининг қўлланилиши билан узвий боғланади. Ернинг сунъий йўлдошларини учириш, космик кемаларни ясаш ва у билан парвоз этиш, Ой сиртига қўндириш, Марс ва Плутон сайёраларига яқинлашиш ва уларнинг фотосуратини олиш, космик кемалардан фойдаланиб Ердаги қазилма бойликларининг картограммаларини тузиш, космонавтика ютуқларини қишлоқ хўжалиги ва тиббиётда қўллаш каби муҳим халқ хўжалик масалаларини ечишда механика қонунлари ва қоидалари асосий аҳамиятга эга эканлигини таъкидласак, ҳеч муболаға бўлмайди.

Ҳар қандай жараён ёки ҳоднсанинг асосида ҳаракат ётганлиги учун механика қонунлари барча табиат ҳодиса ва жараёнларига тегишлидир ҳамда шу билан бирга, механика барча ҳозирги замон техникасининг асосий илмий базаси бўлиб хизмат қилади.

I қисм. СТАТИКА

I БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМ СТАТИКАСИ

1-§. Статиканинг масалалари ва асосий тушунчалари

Статика механиканинг қаттиқ жисмга таъсир этаётган кучлар системасини бошқа эквивалент системаларга айлантириш методларини ва кучлар системасининг таъсири остида жисмнинг мувозанатда бўлиш шартларини ўрганадиган бўлимидир.

Қаттиқ жисм статистикасининг мазмунини қуйидаги иккита асосий масала ташкил этади:

1. Берилган кучлар системасини бошқа эквивалент бўлган соддароқ ёки қулайроқ кучлар системаси билан алмаштириш. Бу вақтда жисмга таъсир этадиган ҳамма кучлар маълум деб ҳисобланади ва шу маълум кучларни бошқа кучлар системаси билан қандай қилиб алмаштириш мумкинлиги ўрганилади.

2. Кучлар системасининг таъсири остида нуқта ёки жисмнинг мувозанатда бўлиш шартларини аниқлаш. Бунда жисм ёки нуқта мувозанатда эканлиги олдиндан маълум деб олинади. Ана шундай мувозанат ҳолати мавжуд бўлиши учун жисм ёки нуқтага таъсир этадиган кучлар қандай мувозанат шартларини бажариши лозимлиги аниқланади. Бу мувозанат шартлари жисм ёки нуқтага қўйилган кучлар орасидаги боғланишларни белгилайди. Кучлар орасидаги боғланишларни ифодалайдиган мувозанат тенгламалари кўп ҳолларда номаълум кучларни аниқлашга имкон беради.

Статикани ўрганишдан олдин асосий механик тушунчаларни аниқлаб олиш лозим. *Нуқта, нуқталар системаси, жисм, куч, кучлар системаси, эквивалент ва мувозанатлаштирувчи кучлар, тенг таъсир этувчи куч, ички ҳамда ташқи кучлар* ва бошқа тушунчалар статиканинг асосий тушунчалари ҳисобланади.

Ўлчамлари маълум шароитда ҳисобга олинмайдиган жисм *моддий нуқта* ёки *нуқта* дейилади. Таъкидлаймизки, нуқтанинг фақат ўлчамлари ҳисобга олинмайди, аммо унинг массаси, энергияси ва бошқа катталиклари бор ҳамда бошқа жисмларга таъсир этиш қобилияти мавжуд, деб қаралади. Масалан, Ер ва бошқа планеталарнинг Қуёш атрофида ҳаракат қонунларини ўрганиш вақтида уларнинг ўлчамлари ҳисобга олинмаслиги мумкин. Планеталарнинг ўлчамлари Қуёшгача бўлган масофага нисбатан жуда ҳам кичик бўлгани учун планеталарни нуқта деб ҳисоблайдилар. Эркин тушаётган жисмни ҳам айрим ҳолларда нуқта деб ҳисоблаш мумкин.

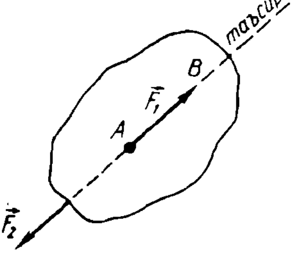
Ҳар бир нуқтанинг вазияти ва ҳаракати бошқа нуқталарнинг вазияти ҳамда ҳаракатига боғлиқ бўлган нуқталар тўплами *нуқталар системаси* ёки *механик система* дейилади.

Исталган нуқталари орасидаги масофалар ўзгармасдан қоладиган жисмлар *абсолют қаттиқ жисм* ёки *қаттиқ жисм* дейилади. Қаттиқ жисмни деформацияланмайди, деб фараз қилайлик. Бундай фараз кўпчилик ҳолларда жисмга таъсир этувчи кучларнинг мувозанат шартларини ўрганиш масалаларини анча ойдинлаштиради. Бироқ, реал жисмларда ҳар доим деформация мавжуд бўлади, шунга қарамай абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат шартларини, тегишли қўшимчалар киритиш билан реал деформацияланувчи жисмлар учун ҳам қўллаш мумкин.

Қаттиқ жисм тинч ҳолатини сақлаши ёки ҳаракатда бўлиши мумкин. Шу ҳолатлар *кинематик ҳолатлар* дейилади. Жисм ёки нуқтани маълум кинематик ҳолатда бўлиши таъсир этадиган кучга боғлиқдир.

Жисмлар ўзаро таъсирининг миқдори ва йўналишини ифодалайдиган катталик *куч* дейилади.

Куч учта элемент билан характерланади: сон қиймати (модули), йўналиши ва қўйилиш нуқтаси билан; куч вектор билан тасвирланади (1-расм). AB кесма учала элементни ифодалайди: A нуқта кучнинг қўйилиш нуқтаси бўлади. Маълум масштабда олинган AB кесманинг узунлиги кучнинг модулидир. AB кесманинг охирига қўйилган стрелка кучнинг йўналишини ифодалайди. $\vec{F}_1$



1-расм.

куч ётган тўғри чизиқ *кучнинг таъсир чизиғи* дейилади. Куч динамометр билан ўлчанади. СИ системасида куч бирлиги қилиб Ньютон, қисқача Н қабул қилинган.

Жисмга таъсир қиладиган кучлар тўплами *кучлар системаси* дейилади. Жисмни бир хил кинематик ҳолатларга келтирадиган кучлар системаси эквивалент кучлар системаси дейилади. Кучлар системасининг таъсирига эквивалент бўлган куч, тенг таъсир этувчи куч дейилади. Модули тенг таъсир этувчи кучга тенг, йўналиши тенг таъсир этувчига тескари йўналган куч мувозанатлаштирувчи куч деб аталади (1-расмдаги $\vec{F}_2$ — куч).

Маълум кинематик ҳолатда бўлган қаттиқ жисмга таъсир этиб, уни шу ҳолатдан чиқармайдиган кучлар системаси ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар системаси деб аталади.

Механик системага таъсир этувчи кучлар икки гуруҳга бўлинади: *ички* ва *ташқи* кучлар.

Қараладиган механик системани ташкил этган нуқталар (ёки жисмлар) орасидаги ўзаро таъсир этувчи кучлар *ички кучлар* дейилади.

Берилган системага тегишли бўлмаган ташқи жисмларнинг системага таъсир қиладиган кучлари *ташқи кучлар* деб айтилади. Ана шу ташқи кучлар таъсири остида бўлган абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат шартларини ўрганиш статиканинг асосий масаласидир.

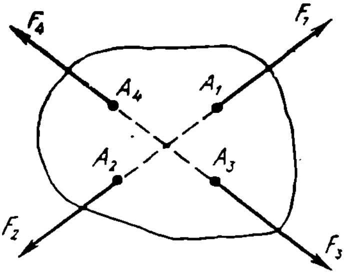
2-§. Статика аксиомалари

Статика масалаларини ечиш қуйидаги статика аксиомаларига асосланади:

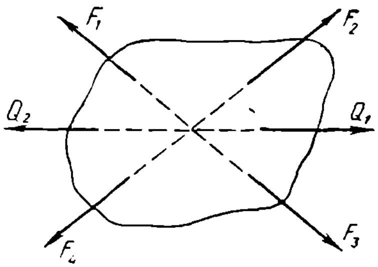
1. Ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар таъсири остида нуқта (жисм) тинч ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлади. (Инерция қонуни.)

2. Қаттиқ жисмга қўйилган иккита куч модуллари бир-бирига тенг ва бир тўғри чизиқда ётиб, қарама-қарши йўналган бўлгандагина ўзаро мувозанатлаштирувчи куч бўлади. 2-расмда F_1, F_2 ва F_3, F_4 кучлар ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлардир.

3. Қаттиқ жисмга таъсир этадиган кучлар системасига ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар системаси қўшилса ёки айрилса кучлар системасининг жисмга таъсири ўзгармайди (3-расм). Агар жисм F_1, F_2, F_3,



2-расм.

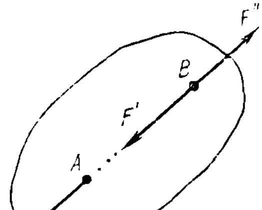


3-расм.

F_4 кучлар таъсири остида маълум кинематик ҳолатда (тинч ёки ҳаракатда) бўлса, у ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар Q_1, Q_2, қўшилганда ёки олинганда ҳам аввалги кинематик ҳолатини сақлайди. Мувозанатлаштирувчи кучлар Q_1, Q_2 системаси нолга эквивалент бўлган система ҳам дейилади ва $(Q_1, Q_2) \backsim 0$ деб белгиланади. Учинчи аксиомадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаймиз.

Теорема. *Кучнинг қўйилиш нуқтаси таъсир чизиғи бўйлаб исталган нуқтага кўчирилганда унинг қаттиқ жисмга таъсири* (қаттиқ жисмнинг кинематик ҳолати) *ўзгармайди.*

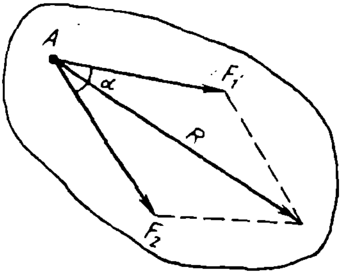
Теоремани исботлаш учун қаттиқ жисмнинг A нуқтасига F куч қўйилган, деб фараз қиламиз (4-расм). F кучининг таъсир чизиғида ётган B нуқтасида F', F'' мувозанатлаштирувчи, нолга эквивалент кучларни қўшамиз. F' ва F'' кучларни шундай танлаймизки, уларнинг модуллари F кучга тенг бўлсин. Учинчи аксиомага асосан, мувозанатлаштирувчи F, F'' кучларни олиб ташлаш мумкин. Натижада жисмнинг B нуқтасига қўйилган фақат F' куч қолди. Бу F' кучнинг модули F га тенг, йўналиши эса F нинг йўналиши билан бир хил. Демак, F куч A нуқтадан B нуқтага кўчирилди ва теорема исбот бўлди.



4-расм.

4. Жисмнинг исталган нуқтасига қўйилган ўзаро кесишувчи иккита кучнинг тенг таъсир

Этувчиси R нинг қўйилиш нуқтаси ўша нуқтага қўйилган бўлиб, R нинг модули шу кучлардан тузилган параллелограммнинг диагонали орқали ифодаланади (5-расм).



5-расм.

F_1 ва F_2 кучлар A нуқтага таъсир этса, уларнинг тенг таъсир этувчиси R қуйидагича ёзилиши физика курсидан маълум $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Тенг таъсир этувчи куч R нинг модули эса косинуслар теоремасига асосан қуйидагича ҳисобланади:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha.} \tag{2.1}$$

Бу ерда F_1 ва F_2 куч орасидаги бурчак α бўлади. (2.1) дан $\alpha = 90°$ бўлса, $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$; $\alpha = 0°$ бўлса, $R = F_1 + F_2$; $\alpha = 180°$ бўлса, $R = F_1 - F_2$ бўлади.

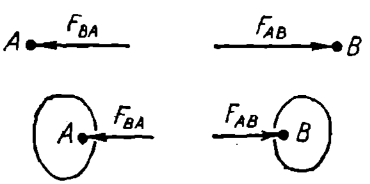
Масалан, $F_1 = 3$ Н, $F_2 = 4$ Н ва $\alpha = 90°$ бўлса, $R = 5$ Н бўлади. $\alpha = 0°$ бўлганда $R = 7$ Н ва $\alpha = 180°$ бўлганда $R = 1$ Н бўлади.

R кучнинг модули ва йўналишини (2.1) формуладан фойдаланмасдан маълум масштабга риоя қилиб чизиш йўли билан ҳам аниқлаш мумкин. Лекин кучлар сони кўп бўлса, у ҳолда R ни ҳисоблаш йўли билан топиш осондир. Агар $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ куч жисмга таъсир этса, олдин биринчи F_1 ва F_2 кучларнинг тенг таъсир этувчилари $R_{1,2}$ ни топамиз, кейин ҳосил бўлган $R_{1,2}$ билан F_3 нинг тенг таъсир этувчиси $R_{1,2,3}$ ни топамиз ва ҳоказо, шундай ҳисоблашни давом эттириб, охирида $R_{1,2\ldots n-1}$ билан F_n нинг тенг таъсир этувчиси R топилади. Тенг таъсир этувчи куч R ни синуслар теоремасига асосланиб ҳам топиш мумкин.

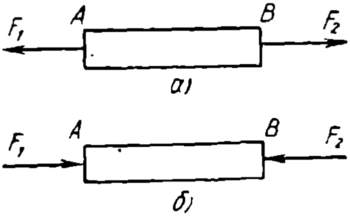
5. **Таъсир ва акс таъсирнинг тенглик аксиомаси.** *Ҳар қандай таъсирга сон жиҳатдан тенг ва йўналиши қарама-қарши бўлган акс таъсир мавжуддир.* (Ньютоннинг III қонуни.)

Бу аксиомадан икки жисм ўзаро таъсир кучларининг модуллари бир-бирига тенг, бир тўғри чизиқда ётган ва йўналишлари ҳамма вақт қарама-қарши бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Демак, табиатда бир томонлама кучлар, яъни фақат таъсир ёки фақат акс таъсир бўлган ҳоллар бўлмайди. Аксинча, ҳамма вақт таъсир бўлган жойда акс таъсир этувчи куч ҳам мавжуд бўлади. Таъсир ва акс таъсир этувчи кучлар бошқа-бошқа жисмларга таъсир этади, шунинг учун бу таъсир ва акс таъсир этувчи кучлар мувозанатлаштирувчи кучлар бўлмайди. Масалан, агар *A* жисм *B* жисмга таъсир этса (6-расм), *B* жисм *A* жисмга акс таъсир этади. F_{AB} куч таъсир этувчи бўлса, F_{BA} куч акс таъсир этувчи куч бўлади. Қуёшни Ернинг тортиши таъсир этувчи куч, Ерни Қуёш томонидан тортиш кучи эса акс таъсир этувчи куч бўлади ва ҳоказо.

6. Деформацияланувчи жисм қотиш вақтида мувозанатнинг сақлаш аксиомаси. *Деформацияланувчи жисмга қўйилган кучларнинг мувозанати жисм қотганда ҳам сақланади.*



6- расм.



7- расм.

Аксиомадан абсолют қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари жисм деформацияланган ҳол учун ҳам сақланади, деган хулоса келиб чиқади. Лекин бу мувозанат шартлари деформацияланувчи жисмлар учун фақат зарурий шарт бўлади, аммо етарли эмас. Мисол, қаттиқ жисм *AB* га қўйилган, F_1 ва F_2 кучлар мувозанатда бўлиши учун уларнинг модуллари тенг, йўналиши қарама-қарши ва бир тўғри чизиқда ётган бўлиши керак (7- *а*, *б* расм).

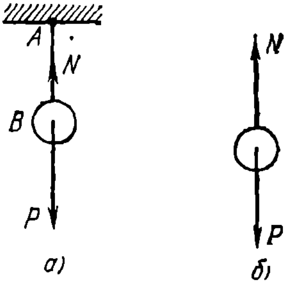
3- §. Боғланиш ва боғланиш реакциялари

Исталган вақтда исталган томонга ҳаракатланадиган жисм *эркин жисм* дейилади. Одатда, жисмнинг ҳаракати бирон-бир йўналишда бошқа жисмлар томонидан чекланган бўлади ва жисм эркин бўлмай қолади. Бундай жисмлар *эркин бўлмаган жисмлар* дейилади. Жисмларнинг ҳаракатига чек қўядиган бошқа жисмлар *боғланишлар* дейилади. Боғланишлар билан ҳаракати чекланган қаттиқ жисмлар *эркин бўлмаган қаттиқ жисмлар* деб айтилади.

Эркин бўлмаган қаттиқ жисмга таъсир этадиган кучларни актив кучлар ва реакция кучларига ажратилади.

Боғланишларнинг жисмга механик таъсирларини ифодалайдиган кучлар *реакция кучлари* деб айтилади. Демак, реал жисмлар доимо боғланишлар таъсирида бўлади ва у эркин бўлмаган жисм ҳисобланади. Лекин кўпчилик ҳолларда эркин бўлмаган қаттиқ жисм эркин жисм деб қаралади. Бунинг учун механиканинг жисмларни боғланишлардан озод этиш принципидан фойдаланилади. Бу принцип қуйидагидан иборат; эркин бўлмаган қаттиқ жисмни ҳам актив кучлар, ҳам боғланишлар рекциялари таъсирида бўлган эркин жисм деб қараш мумкин. Бунинг учун қаттиқ жисмга таъсир этадиган боғланиш реакциялари реакция кучлари билан алмаштирилади ва эркин бўлмаган жисмга актив кучлар ва яна реакция кучлар қўйилган деб, бу жисм эркин жисм деб қаралади.

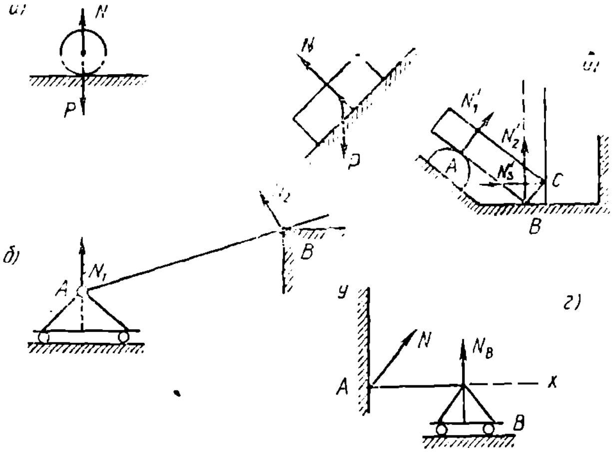
Реакция кучлари элементларини (қуйилиш нуқтаси, модули ва йўналиши) аниқлаш статиканинг асосий масалалари бўлиб ҳисобланади. Масалан, ипнинг *A* нуқтасига осилган *P* оғирликдаги жисм (8-*а* расм) учун *P* актив куч бўлиб, шарга қўйилган бу куч ипни тортади. Ип эса *B* нуқтада *N* реакция кучи ҳосил қилади. Бу реакция кучининг модули *P* кучга тенг бўлиб, йўналиши *P* га қарама-қарши йўналган (8-*б* расм.)



8- расм.

Шундай қилиб, жисмга актив куч *P* ва реакция кучи *N* қўйилган деб, уни эркин жисм деб ҳисоблаш мумкин. Бу вақтда реакция кучининг *B* қўйилиши нуқтаси, *P* модули ва йўналиши *P* га тескари йўналган бўлади.

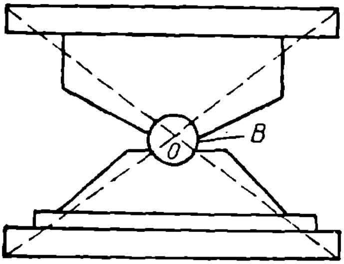
Реакция кучининг йўналиши қуйидагича аниқланади: агар иккита ўзаро перпендикуляр ҳаракат йўналишлари бўлса-ю, бу йўналишларнинг бирига жисм силжи-



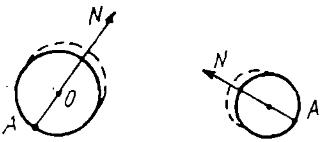
9- расм.

шига боғланишлар халал бермаса; иккинчи йўналишда жисм силжишига боғланишлар тўсқинлик қилса, реакция кучлари тўсқинлик йўналишига тескари йўналган бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, 8-расмда боғланишлар жисмнинг вертикал пастга йўналишда силжишга тўсқинлик қилади, шунинг учун N реакция кучи боғланишлар тўсқинлиги йўналишига тескари, яъни вертикал юқорига йўналгандир. Худди шундай сабаб туфайли 9-расмдаги ҳоллар учун N_3, N, N_1, N_1', N_2' ва N_3 боғланишлар йўналишларида бўлади. 9-*а* расмда реакция кучининг ҳамма элементлари маълум, бироқ 9-*б*, *в* расмларда эса реакция кучларининг иккитадан элементлари: қўйи-



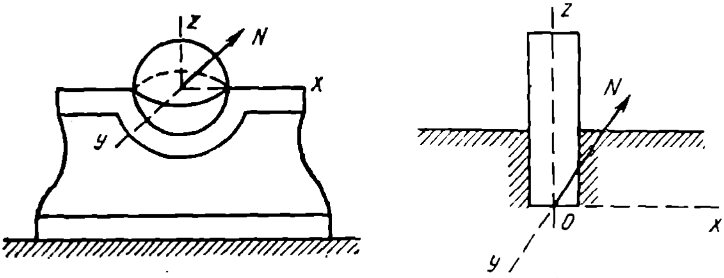
10- расм.



11- расм.

лиш нуқталари ва йўналишлари маълум бўлиб, уларнинг модуллари номаълумдир. Реакция кучининг қўйилиш нуқтаси маълум бўлиб, уларнинг йўналиши ва модули номаълум бўлган ҳол мавжуд (9-*г* расм).

Шарнирли қўзғалмас таянч (10-расм) *B* балкани илгариланма ҳаракатига тўсиқ қўяди, лекин шарнирнинг *O* нуқтасидан ўтадиган ўқи атрофида айланиши мумкин. Бу ҳолда реакция кучлари шарнирнинг обоймага тегиб турган нуқтасидан ва шарнир маркази *O* нуқтадан ўтади (11-расм). Шарли шарнир ва подпятниклардаги реакция кучларини фақат қўйилиш нуқтасигина маълум бўлади (12-*а, б* расм). Бу ҳолларда реакция кучларининг ташкил этувчи проекциялари орқали ифодаланади. Куч проекцияларини топгандан кейин *N* модуллари ва йўналишлари аниқланади. Бунинг учун кўпчилик ҳолларда декарт координата системасидан фойдаланилади. Бундай ҳоллар 9—12-расмда тасвирланган.

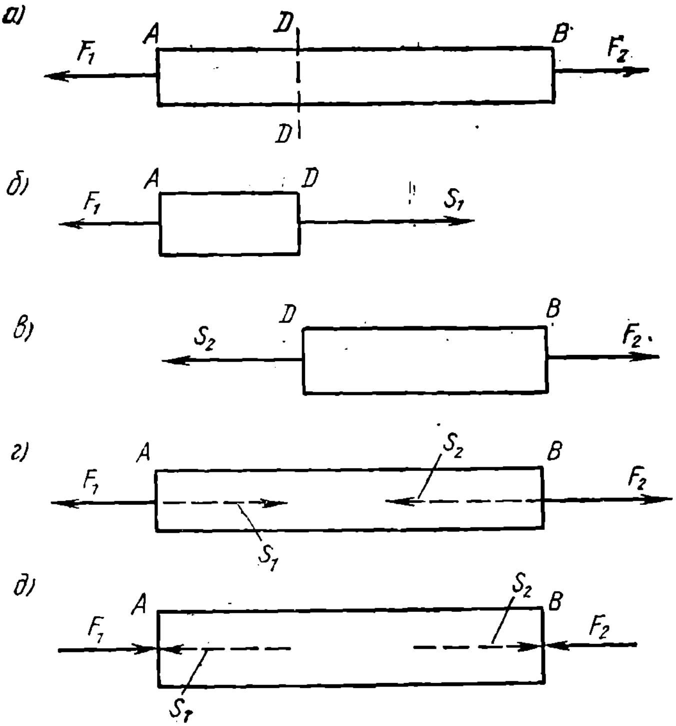


а) *б)*

12-расм.

Ҳар хил конструкцияларни ҳисоблаш вақтида ташқи кучлар билан бирга ички кучларни ҳам ҳисоблаш лозим бўлади. Бу ички кучларни ҳисоблаш кесиш методи билан аниқланади. Бу метод қуйидагидан иборат.

AB стерженнинг икки учига уни чўзувчи F_1 ва F_2 кучлар таъсир этсин (13-расм). Стерженни қисувчи ички кучлар топилсин. Бунинг учун *AB* стерженни DD_1 текислик билан фикран кесамиз ва *AD* қисмини (13-*б* расм) алоҳида ажратиб чизамиз. *DB* қолган қисми бўлсин. Стерженнинг *AD* қисмига иккита куч таъсир қилади: F_1 — ташқи куч ва стержень. *DB* қисмининг таъсирини ифодаловчи S_1 ички



13- расм.

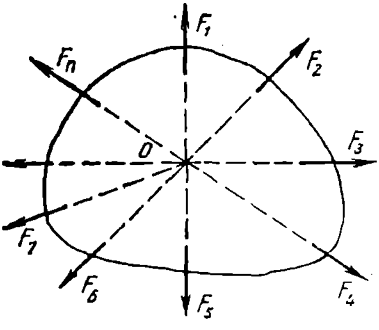
зўриқиш кучи. Статиканинг иккинчи аксиомасидан маълумки, F_1 ва S_1 куч ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлардир. Ички кучлар S_1 стерженнинг AD қисмига нисбатан ташқи куч бўлиб ҳисобланади. Худди шундай айтиш мумкинки, стерженнинг DB қисмига F_2 кучдан ташқари яна AD қисмининг таъсирини ифодаловчи ички зўриқиш кучи S_2 (13-*б* расм) таъсир қилади.

Шундай қилиб, агар стерженга чўзувчи F_1 ва F_2 куч (13-*в*, *г* расм) таъсир этса, стержен S_1 ва S_2 реакция кучлар ҳосил қилади. Бу S_1 ва S_2 реакция кучлар стерженнинг ўқи бўйлаб ва унинг охирларидан ичкарига қараб йўналган ва модуллари F_1, F_2 кучларга тенг бўлади. Ташқи кучлар F_1 ва F_2 стерженни қисганда S_1 ва S_2 реакция кучлар F_1, F_2 модулларга тенг, стержен ўқи бўйлаб унинг охирги нуқталарига қараб йўналган (13- *г* расм).

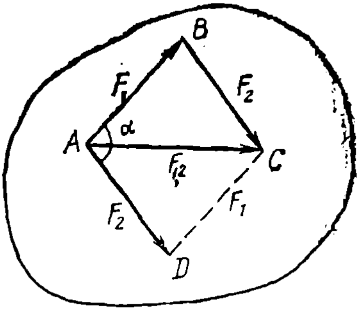
II БОБ. ЯҚИНЛАШУВЧИ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

4-§. Яқинлашувчи кучлар ва уларни қўшиш

Таъсир чизиқлари бир нуқтада кесишадиган кучлар *яқинлашувчи кучлар* дейилади. Қуёш билан планеталарнинг ўзаро таъсир кучлари Қуёш марказида кесишади. Ер билан бошқа планеталар, Қуёш ва Ойнинг ўзаро таъсир кучлари Ер марказида кесишади. Ана шу кучлар яқинлашувчи кучлар бўлади (14-расм). Фараз қилайлик, жисмга $F_1, F_2, \ldots, F_n$ кучлар системаси таъсир этаётган бўлсин. Бу кучлар яқинлашувчи бўлиб, O нуқтада кесишсин. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчисини топиш яқинлашувчи кучларни қўшиш бўлади. Кучларни қўшишни статиканинг 4-аксиомасига асосланиб бажарамиз. Аввал иккита F_1, F_2 кучни қўшайлик, кейин уч кучни ва ниҳоят n та яқинлашувчи кучни қўшишни кўриб чиқайлик.



14-расм.

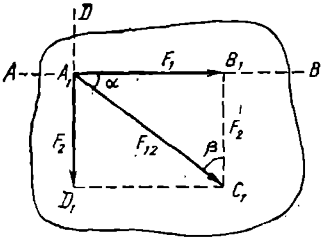


15-расм.

1. Иккита яқинлашувчи кучларни қўшиш. F_1 ва F_2 куч ҳамда уларнинг кесишиш нуқтаси A ва кучлар орасидаги бурчак α маълум. Бу кучларнинг $F_{1,2}$ тенг таъсир этувчиси топилсин. Маълумки, 4-аксиомага асосан бу кучлардан параллелограмм тузиш керак (15-расм). $F_{1,2}$ ни қўйилиш нуқтаси A бўлиб, унинг модули параллелограмм диагоналининг узунлигига, яъни AC га тенг. Худди шундай хулосага кучлар учбурчаги тузиш йўли билан ҳам келиш мумкин. Бунинг учун F_1 кучнинг охирига F_2 кучни (албатта маълум масштабга асосланган ҳолда) ўз-ўзига параллел қилиб кўчирамиз ва F_2 кучнинг охири (C нуқта) билан F_1 кучнинг қўйилиш нуқтаси (A нуқта) ни туташтирамиз. Натижада кучлар учбурчаги ҳосил бўлади. Бу учбурчакнинг AC томони $F_{1,2}$ га тенг эканлиги равшандир.

Тенг таъсир этувчи $F_{1,2}$ кучнинг йўналиши кучлар учбурчаги контурининг айланиш йўналишига тескари йўналган бўлади, яъни C нуқтадан A нуқтага эмас, балки A дан C га йўналгандир (15-расмга қаранг). $F_{1,2}$ нинг модулини (2.1) формуладан фойдаланиб ҳисоблаш мумкин.

Кучлар учбурчагидан фойдаланиб, тескари масалани, яъни берилган $F_{1,2}$ кучни ташкил этувчи F_1 ва F_2 кучларга ажратиш мумкин (16-расм). Ҳақиқатан ҳам, $F_{1,2}$ кучнинг таъсир чизиқлари A_1B_1 ва A_1D_1 бўлган F_1 ҳамда F_2 кучларга ажратиш учун $F_{1,2}$ куч модули ҳамда α ва β бурчаклари маълум бўлса кифоядир.



16- расм.

16-расмдаги $\triangle A_1B_1C_1$ учун синуслар теоремасига асосан қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\frac{F_1}{\sin\beta}=\frac{F_2}{\sin\alpha}=\frac{F_{1,2}}{\sin[180-(\alpha-\beta)]}.$$

$\sin[180-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$ бўлганлиги учун

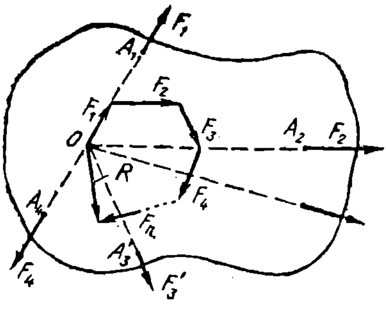
$$F_1=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot F_{1,2};\quad F_2=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cdot F_{1,2}$$

$\alpha=\beta=45°$; $F_{1,2}=10$ Н бўлганда,

$F_1=F_2=7{,}07$ Н бўлади.

2. Яқинлашувчи кучлар системасини қўшиш учун берилган F_1, F_2, . . . , F_n кучлар системаси A_1, A_2, . . . , A_n нуқталарда таъсир этади деб, фараз қилайлик. Бу кучларнинг таъсир чизиқларнинг кесишган нуқтаси O бўлсин. Кучлар системаси F_1, F_2, . . . , F_n нинг тенг таъсир этувчиси R ни аниқлаш учун (17-расм) O нуқтадаги F_1 куч охирига F_2 кучни ўзига ўзини параллел қилиб қўямиз. Кейин F_2 куч векторини охирига F_3 куч векторини ўзига ўзини параллел қилиб қўямиз ва қолган кучларни ҳам шу

тарзда қўйиб чиқамиз. Ниҳоят F_{n-1} куч векторининг охирига F_n кучни қўямиз. Агар F_n куч охири билан O нуқтани туташтирсак, ёпиқ кучлар кўпбурчаги ҳосил бўлади. Шу кучлар кўпбурчагининг ёпувчиси тенг таъсир этувчи R кучга тенг бўлади. Тенг таъсир этувчи R кучни қўйилиши O нуқтада, модули кўпбурчакни ёпувчи чизиқнинг узунлигига, йўналиши эса кучлар кўпбурчаги контурининг F_1 йўналиши бўйича айланишига тескари (O нуқтадан F_n ни охирига қараб) йўналгандир. Шундай қилиб, тенг таъсир этувчи кучнинг йўналиши кучлар кўпбурчаги контурининг биринчи куч йўналиши бўйлаб айланиб ўтгандаги йўналишига тескари йўналган. Шунга асосан R тенг таъсир этувчи куч F_1, F_2, . . . , F_n ташкил этувчи кучларнинг геометрик йиғиндисига тенг, яъни



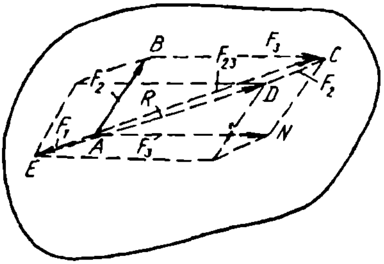
17- расм.

$$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ \ldots\ +\vec{F}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \qquad (4.1$$

Агар яқинлашувчи кучлар ҳар хил текисликларда жойлашган бўлса, у ҳолда ҳам кучлар учбурчаги ёки кучлар кўпбурчаги қоидасидан фойдаланиш мумкин. Лекин бу ҳолда фазовий кучлар кўпбурчагини чизиш анча қийин. Шунинг учун кучлар кўпбурчагини чизиш йўли билан уларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш усулини бир текисликда ётган кучлар учун фойдаланиш қулайроқдир. Фазовий кучлар учун R ни ҳисоблаш йўли билан, масалан, (1) формула ёрдамида топилади.

Агар қаттиқ жисмга бир текисликда ётмаган 3 та яқинлашувчи куч қўйилган бўлса, уларнинг тенг таъсир этувчиси кучлар таъсир чизиқларининг кесишган нуқтасида қўйилган бўлиб, у кучлардан тузилган параллелопипед диагонали орқали ифодаланади.

Ҳақиқатан ҳам, 18-расмда жисмнинг A нуқтасига F_1, F_2 ва F_3 куч таъсир этаётган бўлсин. Бу ҳолда тенг таъсир этувчи кучни топиш учун олдин, масалан, F_2 ва F_3



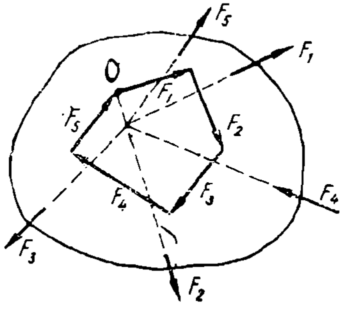
18- расм.

ни қўшганда $ABCN$ параллелограмм ҳосил бўлади ва бу параллелограммнинг AC диагонали F_2 ва F_3 кучларнинг $F_{2,3}$ тенг таъсир этувчисини ифодалайди. Ҳосил бўлган куч $F_{2,3}$ билан F_1 ни қўшганда $ACDE$ параллелограмм ҳосил бўлади ва бу параллелограммнинг диагонали AD эса $F_{2,3}$ билан F_1 нинг тенг таъсир этувчиси R ни тасвирлайди. Шундай қилиб, $\vec{R} = \vec{AD} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ ни ҳосил қиламиз. Шу тарзда фазодаги 3 та кучни қўшиш қоидаси *кучлар параллелопипеди қоидаси* дейилади.

5-§. Яқинлаштирувчи кучларнинг мувозанат шартлари

Кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлса, яъни уларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлган ҳолларда, яқинлашувчи кучлар мувозанатда бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, агар қаттиқ жисмга F_1, F_2, . . . , F_n кучлар таъсир этганда (19- расм), жисм мувозанатда бўлса, кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлади. Кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлганда уларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлишини биламиз, яъни 19- расмда $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = 0$.



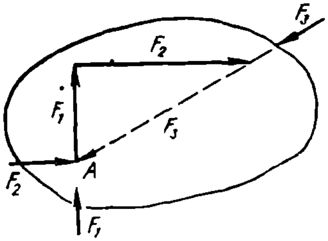
19- расм.

Агар n та куч таъсир этса, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$ бўлиши равшандир. Охирги ифодани қуйидагича ёзамиз:

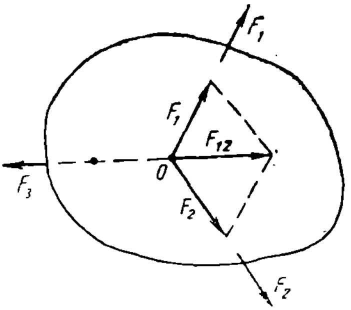
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \qquad (5.1)$$

Агар учта яқинлашувчи кучлар мувозанатлаштирувчи кучлар бўлса, улардан тузилган кучлар учбурчаги ёпиқ бўлади (20-расм). Маълумки, текислик ва фазода жойлашган яқинлашувчи кучларнинг мувозанатда бўлиш шартлари бир хил. Лекин масалаларни график усулида (чизиш йўли билан) ечиш, олдинги 4-§ да айтганимиздек, текисликда ётувчи кучлар учун ишлатилади. Фазодаги кучларни график усулда ечиш анча мураккабликларга олиб келгани учун кўп ишлатилмайди.

Теорема. *Бир-бирига параллел бўлмаган бир текисликда ётувчи учта ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар бир нуқтада кесишади, яъни яқинлашувчи кучлардир.*



20- расм.



21- расм.

Қаттиқ жисмга F_1, F_2 ва F_3 куч таъсир этсин (21- расм) ва бу кучларни ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар деб қарайлик. F_1 ва F_2 кучни O нуқтага кўчириб, параллелограмм қоидасига асосан уларни қўшайлик. Натижада F_1 ва F_2 ни ўрнига уларнинг $F_{1,2}$ тенг таъсир этувчисини ҳосил қиламиз. Энди фақат иккита F_3 ва $F_{1,2}$ куч қолади. Шартга асосан булар ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлардир. Ўзаро мувозанатлаштирувчи $F_{1,2}$, F_3 кучлар эса бир тўғри чизиқда ётиши ва модуллари бир-бирига тенг бўлиши керак. Демак, F_3 куч ҳам O нуқтадан ўтади. Шундай қилиб, учала F_1, F_2, F_3 куч ҳақиқатан ҳам бир нуқта (O нуқта) да кесишади ва теорема исбот қилинди.

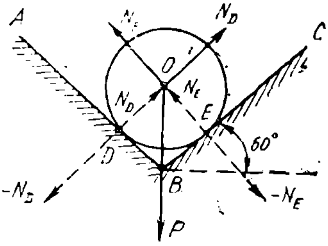
Юқорида айтилганларга асосланиб, яқинлашувчи кучлар таъсирида бўлган қаттиқ жисмнинг мувозанатда бўлишига оид ҳар қандай масалани ечиш учун қуйидаги режани тавсия этамиз:

1. Ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар системаси

таъсирида бўлган қаттиқ жисм (нуқта) ни яққол қилиб кўрсатиш.

2. Жисмга таъсир этувчи ҳамма актив (бериладиган) кучларни кўрсатиш.

3. Боғланишлардан озод этиш принципига асосланиб, боғланишларнинг жисмга таъсирини тегишли кучлар — боғланиш реакциялари билан алмаштириш.



22- расм.

4. Ҳосил қилинган кучлар системасига мос бўлган мувозанат шартлари (тенгламалари)ни ишлатиш.

5. Изланадиган катталикларнинг мувозанат шартлари (тенгламалари) дан фойдаланиб аниқлаш.

1- мисол. (2.19*). Оғирлиги 6 кН бўлган бир жинсли *О* шар ўзаро перпендикуляр бўлган *АВ* ва *ВС* текисликларга тиралиб турибди. *ВС* текисликни горизонт билан 60° бурчак ташкил этади деб олиб, шарнинг *АВ* ва *ВС* текисликларига берадиган босим кучи аниқлансин (22- расм).

Ечиш. Масалани юқоридаги режа асосида ечайлик.

1. Кучлар мувозанати шарда содир бўлади. Шунинг учун ажратиладиган жисм *О* шардир.

2. Шарга таъсир этадиган актив куч, шарнинг оғирлиги *Р* га тенг.

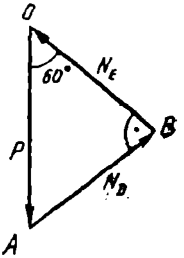
3. Фикран шарни боғланишлардан ажратамиз, боғланиш таъсирини уларнинг реакция кучлари билан алмаштирамиз. *О* шар учун *АВ* ва *ВС* қия текисликлар боғланишлар бўлади. *АВ* текисликнинг реакция кучи *D* нуқтага, *ВС* текисликнинг реакция кучи *Е* нуқтага қўйилган. Шу реакция кучлари N_D ва N_E нинг модуллари текисликларга берадиган босим кучларига тенг бўлиб, уларга нисбатан тескари йўналгандир. Шундай қилиб, N_D ва N_E реакция кучларидир.

4. *О* шарга фақатгина учта *Р*, N_D ва N_E куч қўйилган (ишқаланиш ва бошқа кучларни таъсир этмайди, деб фараз этамиз). Бу кучлар системаси учун мувозанат шартининг

---

* Қавс ичидаги сон И. В. Мешчерскийнинг «Назарий механикадан масалалар тўплами» китобидаги масаланинг номери; 33- нашр, М., 1973.

кучлари учбурчагидан фойдаланамиз. 23-расмда кучлар учбурчаги кўрсатилган. Ихтиёрий *O* нуқтада *P* кучини ўзига ўзини параллел қилиб ўтказамиз. Кейин *P* нинг охири *A* нуқтага N_D кучини ўзига ўзини параллел қилиб ўтказгандан кейин, ана шу N_D охирида N_E ни ўзига ўзини параллел қилиб ўтказамиз. N_E нинг охири *O* нуқтада бўлади. Натижада кучлар учбурчаги *OAB* ни ҳосил қиламиз. Бу учбурчак бурчаклари 60°, 90°, 30° эканлигини пайқаш қийин эмас. Бу учбурчакдан синуслар теоремасига асосланиб, қуйидагиларни ёзамиз:

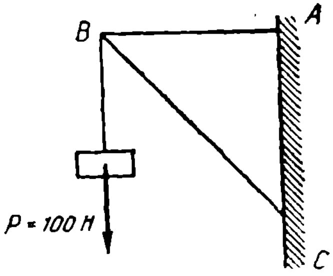


23- расм.

$$\frac{N_D}{\sin 60^\circ} = \frac{N_E}{\sin 30^\circ} = \frac{P}{\sin 90^\circ};$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

бўлгани учун қуйидаги иккита тенгламадан изланаётган катталикларни топамиз:



24- расм.

$$N_D = P \sin 60^\circ = 5{,}2 \text{ кН}; \quad N_E = P \sin 30^\circ = 3 \text{ кН}.$$

N_E ва N_D реакция кучлари ва *P* нинг қийматларини масштаб билан (бурчакларини ҳисобга олган ҳолда) қўйиб чиқсак, ҳақиқатан ҳам ёпиқ учбурчак ҳосил бўлади ва шундай чиқсагина масала тўғри ечилган бўлади. *AB* ва *BC* текисликларга берадиган босим кучлари (22-расмга қаранг) штрихларда кўрсатилган. Бу босим кучлари —3 ва —5,2кН га тенг.

2-мисол. Кранниниг *B* нуқтасига 100 Н оғирликдаги юк қўйилган (24-расм). *AB* ва *BC* стерженларнинг реакция кучлари топилсин. (Бу масала мустақил ечиш учун.)

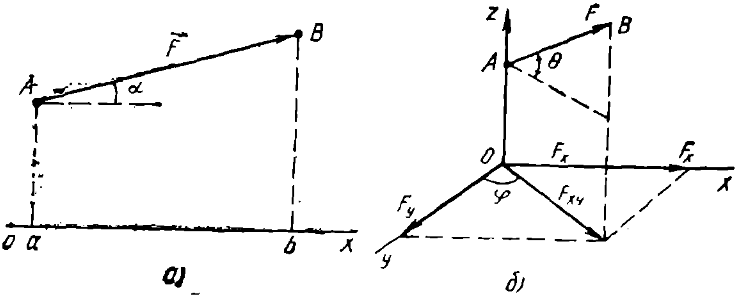
Жавоби: 577 Н. —1154 Н

6-§. Кучнинг ўқдаги ва текисликдаги проекцияси

Жисмга қўйилган куч векторини, кўпгина ҳолларда, ўқлардаги проекциялари орқали ифодалашга тўғри келади.

Кучнинг бирор ўқдаги проекциясининг модули деб, куч вектори кесмасининг боши ва охиридан ўққа туширилган перпендикуляр чизиқлар орасидаги кесма узунлигига айтилади.

Мисол учун F кучнинг Ox ўқидаги проекциясини топайлик. Бунинг учун F кучнинг боши A ва охири B нуқталаридан OX ўқига Aa ва Bb перпендикулярни туширамиз (25-*а* расм). Перпендикулярлар OX ўқининг a ва b нуқтасида кесишсин. Ана шу a ва b орасидаги масофани ab кесма ҳосил қилади. Бу ab кесмага F кучнинг X ўқидаги проекцияси деб айтилади ва F_X билан белгиланади. Расмдан кўринадики,



25- расм.

$$F_X = F \cdot \cos \alpha. \qquad (6.1)$$

(6.1) га асосан кучнинг маълум ўқдаги проекцияси куч модулини куч йўналиши билан ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак косинусига бўлган кўпайтмасига тенг, деган хулоса келиб чиқади. (6.1) дан $0 < \alpha < 90^\circ$ бўлганда, $F_X > 0$ бўлади; $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ бўлганда, $F_X < 0$ бўлади ва ниҳоят $\alpha = 90^\circ$, 270° бўлганда, $F_X = 0$ бўлади. Демак, куч ўқнинг мусбат йўналиши билан бир хил йўналган бўлса, унинг проекцияси мусбат, акс ҳолда манфий ва ниҳоят, ўққа перпендикуляр бўлса, куч проекцияси нолга тенг бўлади.

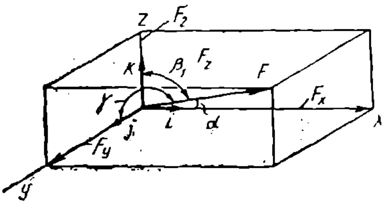
Кучнинг бирор текисликдаги проекцияси деб, унинг боши ва охиридан шу текисликка туширилган перпендикуляр чизиқлар орасидаги узунлигини ифодаловчи векторга айтилади. Агар F ни OXY текислигидаги проекциясини F_{xy} деб белгиласак, 25-*б* расмдан кўринадики

$$F_{xy} = F \cdot \cos\theta, \tag{6.2}$$

$$F_x = F_{xy} \sin\varphi = F \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta, \tag{6.3}$$

$$F_y = F_{xy} \cos\varphi = F \cos\varphi \cdot \cos\theta. \tag{6.4}$$

проекцияси F_{xy} вектор катталик эканлиги равшан. Бу вектор F_{xy} куч F модулини OXY текислиги билан ташкил этган бурчак косинусига бўлган кўпайтмасига тенг.



26- расм.

Ихтиёрий F куч x, y, z ўқлари билан тегишли α, β, γ бурчаклар ташкил этсин. Бу F кучнинг X, Y, Z ўқларидаги проекцияларини (26- расм) (6.1) га асосан қуйидагича ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F \cos\alpha, \\ F_y &= F \cos\beta, \\ F_z &= F \cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Декарт координата системасида F_x, F_y, F_z ўзаро перпендикуляр бўлганликлари учун (4- § даги 18- расмга қаранг) F кучнинг модули қуйидагича топилади:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \tag{6.6}$$

F кучнинг йўналиши F билан X, F билан Y ва F билан Z ўқлари орасидаги бурчаклар орқали, яъни α, β, γ орқали топилади. Агар X, Y, Z ўқлардаги бирлик векторларни тегишли $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ билан ифодаласак, бу ҳолда қуйидагини ёзиш мумкин:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}. \tag{6.7}$$

Бу, яъни (6.7.) ифода F кучининг координата ўқларидаги F_x, F_y, F_z ташкил этувчилар орқали ифодалайдиган формуласидир.

Куч проекциясига тегишли йўналиш берсак, куч компонентаси (ташкил этувчиси) ни ҳосил қиламиз. Куч проекцияси скаляр катталик, аммо куч компонентаси вектор катталикдир.

F куч векторининг компонентлари F_x, F_y ва F_z дир.

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_x &= F_x\cdot\vec{i}\\ \vec{F}_y &= F_y\cdot\vec{j}\\ \vec{F}_z &= F_z\cdot\vec{k}\end{aligned}\right\}\qquad(6.8)$$

ёки

$$\vec{F}=\vec{F}_x+\vec{F}_y+\vec{F}_z.\qquad(6.9)$$

F куч векторининг йўналиши α, β, γ бурчак орқали топилиши ва бу бурчаклар $\vec{F}$ билан $\vec{k}$, $\vec{F}$ билан $\vec{i}$ ва $\vec{F}$ билан $\vec{j}$ ораларидаги тегишли бурчакларига тенглигини ҳисобга олсак, қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos(\vec{F},\ \vec{i}) = \frac{F_x}{F},\\ \cos\beta &= \cos(\vec{F},\ \vec{j}) = \frac{F_y}{F},\\ \cos\gamma &= \cos(\vec{F},\ \vec{k}) = \frac{F_z}{F}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.10)$$

(6.10) тенгламалар йўналтирувчи косинусларни топиш формулалари дейилади. Бу тенгламалардан α, β, γ бурчак топилади.

Шундай қилиб, F кучнинг F_x, F_y, F_z проекциялари ва $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ компонентлари аниқланди ва аксинча F_x, F_y, F_z маълум бўлганда F куч векторининг модули ва йўналишини аниқлаш равшан бўлди.

7-§. Яқинлашувчи кучлар системасининг мувозанат шартларини шу кучлар проекциялари орқали тасвирлаш

Агар F_1, F_2, . . . , F_n яқинлашувчи кучлар системаси берилган бўлса, бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси (4.1) формула орқали топилиши маълум. Фараз қилайлик, F_1 кучнинг x, y, z ўқларидаги проекциялари F_{x_1}, F_{y_1}, F_{z_1} бўлсин, F_2 кучнинг проекциялари F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2} ва ҳоказо F_n кучнинг проекциялари F_{nx}, F_{ny} ва F_{nz} бўлсин. Шундай қилиб, кучлар системаси X ўқда F_{1x}, F_{2x}, F_{3x}, . . . , F_{nx}, Y ўқда F_{1y}, F_{2y}, . . . , F_{ny} ва Z ўқда F_{1z}, F_{2z}, . . . , F_{zn}

проекцияларга эга бўлсин. Кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси F ни X, Y, Z ўқлардаги проекциялари F_x, F_y, F_z ўша ўқдаги кучларнинг проекцияларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}. \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Равшанки, F_{1x}, F_{2x}, $\ldots$, F_{nx} кучларнинг ҳаммаси фақат X ўқда ётади. Шунинг учун булар бир-биридан ишоралари билан фарқ қилиши мумкин. Агар бу кучларнинг йўналишлари X ўқининг мусбат томонига йўналган бўлса, мусбат ишора билан, X ўқининг манфий томонига йўналган бўлса, манфий ишора билан олинади. Худди шундай қоидадан Y ва Z ўқларидаги куч проекциялари учун ҳам фойдаланилади.

(7.1) га асосан n та кучдан тузилган системани жами учта куч F_x, F_y ва F_z билан алмаштирдик. Бу учта куч, яъни F_x, F_y, F_z ўзаро перпендикуляр йўналишларда бўлгани учун (6.6) га асосан тенг таъсир этувчи куч:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right)^2}. \tag{7.2}$$

Кучлар системаси ўзаро мувозанатлаштирувчи бўлса, 5-§ га асосан бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси $F=0$ бўлади. Охирги шарт, яъни $F=0$ бажарилиши учун (7.2) ифоданинг ўнг томонидаги квадрат илдиз остидаги ҳар бир ҳад алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши лозим:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{ix} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

Бу (7.3) тенгламалар системаси яқинлашувчи кучлар системаси мувозанатининг зарурий шартлари дейилади. Бу тенгламалардан фойдаланиб, яқинлашувчи кучлар системасининг мувозанатига доир масалалар ечилади. Бундай масалаларни тенгламалар сони билан номаълумлар сони тенг бўлса ечиш мумкин. Шундай метод билан масалалар ечиш *аналитик метод* дейилади.

Масалани ечиш учун тузилган мувозанат тенгламалари сони билан номаълумлар сони тенг бўлса, *статик аниқ масалалар* дейилади. Агар шу тенглик бажарилмаса, номаълумлар сони мувозанат тенгламалари сонидан кўп бўлса, *статик аниқмас масалалар* дейилади (бундай масалалар, айниқса, материаллар қаршилиги курсида кўрилади).

Агар кучлар системаси текисликда, масалан, *ОХУ* текислигида ётган бўлса, бу ҳолда иккита мувозанат тенгламалари ҳосил қилинади:

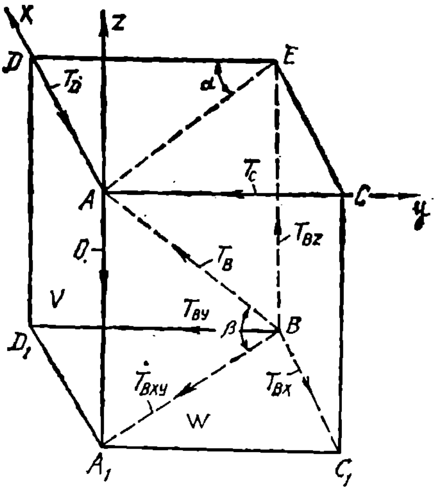
$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.\\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (7.4.)$$

Масалаларни (7.4) ёрдами билан ечганимизда номаълумлар сони иккита бўлиши лозим. Ниҳоят, кучлар фақат битта тўғри чизиқ, масалан, X ўқида ётган бўлса, фақат битта тенглама

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0.$$

3-мисол. (6.5) 27-расмдаги B нуқтада AB стержен шарнирли маҳкамланган. $CADE$ текислиги горизонтал, V ва W текисликлари вертикал деб қабул қилинган. Агар $AB =$ $= 145$ см, $AC = 80$ см, $AD = 60$ см бўлса, AB стерженнинг A нуқтасида оғирлиги $Q = 42$ кН юк осилган бўлса, AB стерженга ва AC ҳамда AD занжирларга (AC ва AD стерженларни занжирлар дейилади) бериладиган зўриқишлар қанча бўлади?

Ечиш: A нуқтани координата боши қилиб қабул қиламиз (координата боши қилиб, таъсир чизиқлари мумкин қа-



27- расм.

дар кўпроқ кесишадиган нуқтани қабул қилиш масалаларини ечишда сезиларли қулайликлар туғдиради). AB, AD ва AC га бериладиган зўриқишларни тегишли T_B, T_D, T_C реакция кучлари билан алмаштирамиз.

Реакция кучи T_B ни ўқлардаги проекциялари T_{BX}, T_{BY} ва T_{BZ} бўлсин. T_B ни OXY даги проекцияси T_{BXY} ни ΔABA_1 дан топсак, қуйидагича бўлади:

$$T_{BXY} = T_B \cdot \cos \beta. \quad (1)$$

D_1BA_1 ва ABE учбурчакдан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$T_{BX} = T_{BXY} \sin \alpha = T_B \sin \alpha \cdot \cos \beta. \quad (2)$$

$$T_{BY} = T_{BXY} \cos \alpha = T_B \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (3)$$

$$T_{BZ} = T_B \cdot \cos (90 - \beta). \quad (4)$$

27-расмдан фойдаланиб, T_b, T_c, T_d ва Q кучларнинг проекцияларини топиб қуйидаги жадвалга ёзамиз:

1-жадвал

Кучлар	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}
T_B	$T_B \sin \alpha \cdot \cos \beta$	$T_B \cos \alpha \cdot \cos \beta$	$T_B \cos (90-\beta)$
T_C	0	$-T_C$	0
T_D	$-T_D$	0	0
Q	0	0	$-Q$

Жадвалдаги 2,3 ва 4-устундаги куч проекцияларини қўшиб, қуйидаги мувозанат тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$T_B \sin \alpha \cos \beta - T_D = 0. \tag{5}$$

$$T_B \cos \alpha \cos \beta - T_C = 0. \tag{6}$$

$$T_B \cos (90 - \beta) - Q = 0. \tag{7}$$

ΔAEB дан:

$$\cos \beta = \frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{AD^2 - DE^2}}{AB} = 072.$$

ΔADE дан:

$$\sin \alpha = \frac{AD}{AE} = 0{,}6, \ \cos \alpha = \frac{DE}{AE} = 0{,}8.$$

Тригонометрик функциялар қийматини ва Q ни (5), (6), (7) га қўямиз:

$$0{,}42\ T_B - T_D = 0,$$

$$0{,}56\ T_B - T_C = 0,$$

$$0{,}7\ T_B - 42 = 0.$$

Охирги тенгламалардан

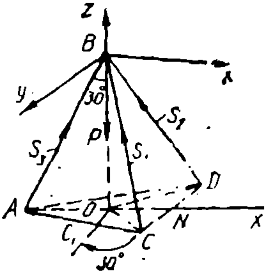
$$T_B = \frac{42}{0{,}72} = 58 \text{ кН}.$$

$$T_D = -0{,}56\ T_B = -32 \text{ кН}.$$

$$T_C = -0{,}42\ T_B = -24 \text{ кН}.$$

Зўриқиш кучларииинг йўналиши реакция кучларига нисбатан тескари йўналган бўлади.

4-мисол. (6.15) Уч оёқли $ABCD$ таянчиқнинг B учига оғирлиги 10 кН бўлган P юк осилган. Таянчиқ оёқчаларининг узунликлари бир хил бўлиб, горизонтал полга маҳкамланган ва бир-бирлари билан бир хил бурчакларни ташкил этади. Агар $ABCD$ таянчиқ оёқчаларининг ҳар бирини вертикал чизиқ билан 30° бурчак ташкил этгани маълум бўлса, уларнинг ҳар бирида бериладиган зўриқишлар топилсин (28-расм).



28-расм.

Ечиш. Масалани ечиш учун B нуқтани координата боши қилиб оламиз. Боғланишларни реакция кучлари билан алмаштирамиз. Маълумки, оёқчаларда зўриқиш кучлари ҳосил бўлади. Бу зўриқишларни S_1, S_2 ва S_3 реакция кучлари билан алмаштирамиз ва $\angle NOC = 60^\circ$ $\angle C_1OC = 30^\circ$ эканлигини ҳисобга олиб, кучлар проекцияларини топиб, қуйидаги жадвалга ёзамиз. Мувозанат тенгламаларини топиш учун 2-жадвалдан 2, 3 ва 4-устунларини қўшиб, алоҳида-алоҳида нолга тенглаштирамиз.

2-жадвал

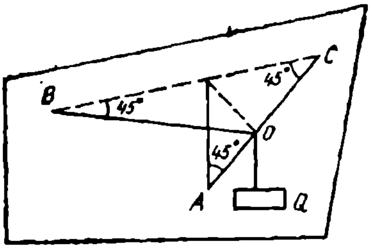
F_i	F_{ix}	F_{iy}	F_{iz}
P	0	0	$-P$
S_1	$-S_1 \cos^2 60$	$-S_1 \cos 30^\circ \cos 60^\circ$	$S_1 \sin 60^\circ$
S_2	$-S_2 \cos^2 60$	$-S_2 \cos 30 \cos 60^\circ$	$S_2 \sin 60^\circ$
S_3	$S_3 \cos 60$	0	$S_3 \sin 60^\circ$

2-жадвалнинг тўртинчи устунидан:

$(S_1 + S_2 + S_3) \sin 60^\circ - P = 0$ ни ҳосил қиламиз.

Масала шартига кўра, $S_1 = S_2 = S_3 = S$ эканлигини ҳисобга олсак, охирги тенгламадан қуйидаги натижага келамиз:

$$S = \frac{P}{3 \sin 60^\circ} = 3{,}85 \text{ кН}.$$



29-расм.

5-мисол. Оғирлиги 100 кН бўлган юк горизонт билан 45° бурчак ташкил этиб, *A* нуқтага шарнирли маҳкамланган *AO* ричаг ва иккита бир хил узунликдаги *CO* ва *BO* горизонтал занжирлар билан тинч ҳолатда турибди. Агар $\angle CBO = \angle BCO = 45^\circ$ деб олинса, ричагдаги зўриқиш кучи *S* ва занжирларнинг *T* таранглик кучлари топилсин (29-расм).

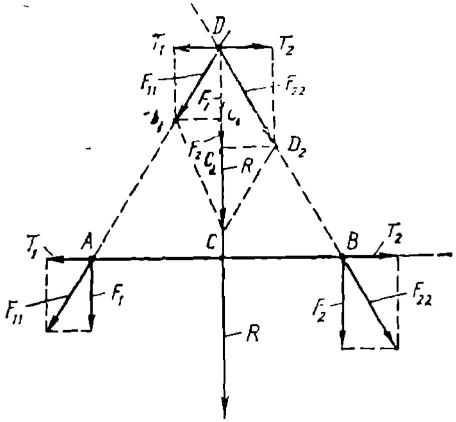
Жавоб: $S = -141$ Н, $T = 71$ Н.

III БОБ. ПАРАЛЛЕЛ ВА ЖУФТ КУЧЛАР

8-§. Параллел кучлар ва уларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлаш

Таъсир чизиқлари бир-бирига параллел бўлган кучлар *параллел кучлар системаси* дейилади. *Параллел кучларни қўшиш деб, уларнинг тенг таъсир этувчисини аниқлашга айтилади.*

1. Иккита ўзаро параллел ва бир томонга йўналган F_1 ва F_2 кучларнинг $F_{1,2}$ тенг таъсир этувчисини топайлик.



30-расм.

F_1 ва F_2 кучлар жисмнинг A ва B нуқталарига қўйилган бўлсин (30-расм). Кучларнинг тенг таъсир этувчисининг учта элементи: қўйилиш нуқтаси, модули ва йўналишини топамиз. Бунинг учун A ва B нуқталарга T_1, T_2 мувозанатлаштирувчи кучлар системасини қўшамиз. Натижада A нуқтага F_1 ва T_1 кучлар, B нуқтага F_2 ва T_2 кучлар таъсир этади. F_1, T_1 ва F_2, T_2 кучларнинг тенг таъсир этувчилари F_{11} ва F_{22} ни параллелограмм қоидасига асосан топамиз. F_{11} ва F_{22} кучни таъсир чизиқлари бўйлаб D нуқта билан кесишгунча кўчирамиз. D нуқтада F_{11} ва F_{22} кучларни F_1, T_1 ва F_2, T_2 кучларга ажратиб, T_1, T_2 мувозанатлаштирувчи кучлар системасини айирамиз. Бу ҳолда, T_1, T_2 ни ташлаб юборилганда, D нуқтада бир тўғри чизиқда ётган ва йўналишлари бир хил бўлган, фақат F_1 ва F_2 кучларигина қолади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси уларнинг арифметик йиғиндисига тенг эканлиги кўриниб турибди:

$$R = F_1 + F_2. \qquad (8.1.)$$

Бу тенг таъсир этувчи R кучнинг қўйилиш нуқтасини таъсир чизиги бўйлаб D нуқтадан C нуқтага кўчирамиз. C нуқта R нинг қўйилиш нуқтаси бўлиб, R нинг йўналиши F_1 ва F_2 кучлар томонига йўналгандир. *Ана шу* C *нуқтани, яъни* тенг таъсир этувчининг қўйилиш нуқтасини AB кесманинг қаерида жойлашганлигини топайлик.

Расмдаги $\triangle DD_1C_1$ ва $\triangle ACD$ ҳамда $\triangle DC_2D_2$ ва $\triangle CDB$ ўхшашлигидан қуйидагиларни ёзишимиз мумкин:

$$\frac{F_1}{DC} = \frac{T_1}{AC};\ \frac{F_2}{DC} = \frac{T_2}{CB}.$$

Биринчи тенгламанинг иккала томонини иккинчи тенгламанинг иккала томонига бўламиз. Натижада

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{CB}{AC} \qquad (8.2.)$$

ҳосил бўлади. Бу (8.2) ифодадан: иккита бир хил йўналган параллел кучлар тенг таъсир этувчисининг қўйилиш нуқтаси кучлар орасидаги масофани шундай бўлакларга ажратадики, бу бўлаклар нисбати кучлар нисбатига тескари пропорционал бўлади, деган хулосага келамиз.

Агар F_1 ва F_2 куч йўналишлари бир-бирига қарама-қарши бўлса, тенг таъсир этувчи R нинг модули кучлар айирмасига тенг бўлиб, катта куч томон йўналган бўлади:

$$R = F_1 - F_2.$$

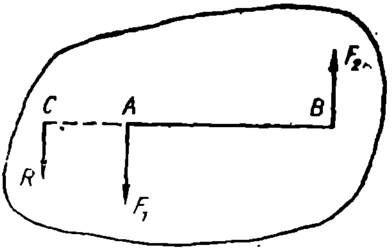
R нинг қўйилиш нуқтасини аниқлаш учун (8.2) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC}$$

ёки пропорциянинг маълум хоссасига асосан

$$\frac{F_1 + F_2}{BC + AC} = \frac{R}{AB} = \frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC}.$$

F_1 ва F_2 антипараллел бўлса, охирги ифодадаги $R = F_1 - F_2$ бўлади. Бу ҳолда тенг таъсир этувчи кучи R нинг қўйилиш нуқтаси C катта кучнинг қўйилиш нуқтасидан ташқарида AB чизиғининг давомида, A ва B нуқталарга қўйилган кучларга тескари пропорционал масофаларда бўлади (31-расм):



31-расм.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \quad \frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R}.$$

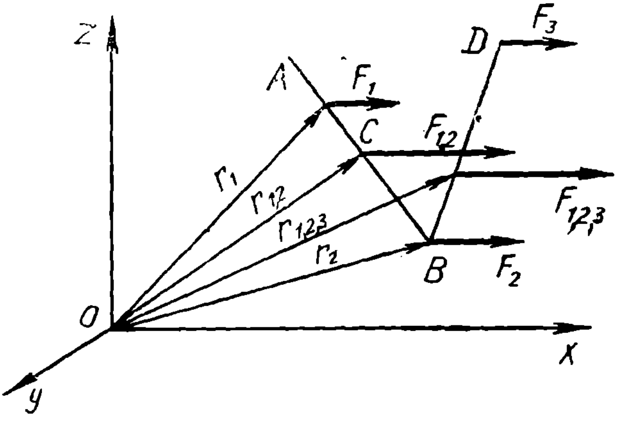
2. Тенг таъсир этувчи кучнинг қўйилиш нуқтаси бирон қўзғалмас нуқтага нисбатан, масалан, декарт координата системасини бошига нисбатан, радиус вектор орқали ифодалайлик. Радиус векторни эркин вектор бўлган кучдан фарқи шундаки, радиус векторнинг қўйилиш нуқтаси ҳамма вақт координата бошида бўлади.

F_1 ва F_2 ни тенг таъсир этувчиси $F_{1,2}$ ни қўйилиш нуқтаси C ни ифодаловчи $r_{1,2}$ радиус векторни топайлик (32-расм). Расмдаги Δ OAC ва Δ OCB дан

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_1 - \vec{AC}. \tag{8.3}$$

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 + \vec{CB}. \tag{8.4}$$

(8.3) ва (8.4) дан AC ва CB ни топиб (8.2) га қўямиз:



32- расм.

$$\frac{\vec{F}_1}{F_2} = \frac{\vec{r}_{1,2} - \vec{r}_2}{\vec{r}_1 - \vec{r}_{1,2}}. \quad \text{Бундан } r_{1,2} = \frac{\vec{F}_1 \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \vec{r}_2}{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}. \qquad (8.5)$$

(8.5) формула орқали C нуқтани ифодаловчи радиус вектори аниқланади. Тенг таъсир этувчи куч модули (8.1) асосан

$$F_{1,2} = F_1 + F_2.$$

3. Энди параллел кучлар системаси F_1, F_2, . . . , F_n берилган бўлсин. Уларнинг тенг таъсир этувчисининг қўйилиш нуқтасини ифодаловчи r радиус векторини топайлик. Олдин учта куч учун $r_{1,2,3}$ ни топамиз. F_1 ва F_2 ни $F_{1,2}$ билан алмаштирганимиз учун F_1, F_2, F_3 учта кучнинг ўрнига иккита $F_{1,2}$ ва F_3 куч билан иш кўриш мумкин. Буларни $F_{1,2}$ ва F_3 нинг тенг таъсир этувчиси модули $F_{1,2,3}$ (8.1) га асосан топилади:

$$F_{1,2,3} = F_1 + F_2 + F_3.$$

$F_{1,2,3}$ ни қўйилиш нуқтасини ифодаловчи $r_{1,2,3}$ радиус векторни (32-расмга қаранг) (8.5) га асосланиб қуйидагича ёзиш мумкин:

$$r_{1,2,3} = \frac{\vec{F}_{1,2} \cdot \vec{r}_{1,2} + \vec{F}_3 \cdot \vec{r}_3}{\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_3},$$

ёки (8.5) ни ҳисобга олсак,

$$\vec{r}_{1,2,3} = \frac{\vec{F}_1 \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \vec{r}_3}{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}.$$

Ниҳоят, кучлар системаси учун ёзадиган бўлсак, юқоридагига асосланиб, ифодалар қуйидагича бўлишини пайқаш қийин эмас:

$$\vec{r} = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_n \cdot \vec{r}_n}{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i}. \qquad (8.6)$$

Бу ердаги ифоданинг махражи кучлар системасининг тенг таъсир этувчисини ифодалайди, яъни

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (8.7)$$

Агар куч векторини $\vec{F} = F \cdot \vec{u}$ шаклда ёзиб ($\vec{u}$ — куч йўналишидаги бирлик вектор), (8.6) ифодага қўйсак, $\vec{u}$ лар қисқаради ва қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \ r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (8.8)$$

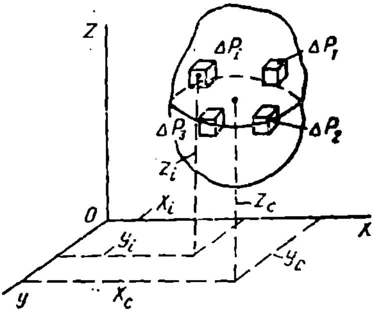
Радиус-векторлар $\vec{r}$ ва $\vec{r}_i$ ни проекциялари орқали ифодаланиши мумкинлигини ҳисобга олиб, (8.8) ни X, Y, Z ўқларидаги проекцияларини олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \ X_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}, \\ Y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \ Y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}. \\ Z_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i \ Z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} F_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.9)$$

Тенг таъсир этувчи кучнинг C қўйилиш нуқтаси *параллел кучлар маркази* дейилади. Шу C нуқтанинг координаталари $X_c, Y_c Z_c$ (8.9) билан ҳисобланади. (8.9) дан $X_i Y_i Z_i$ лар i — куч F_i нинг қўйилиш нуқтасининг координаталаридир. (8.8) ёки (8.9) да бир томонда йўналган кучлар ишораси мусбат деб олинса, шу мусбат ишорали кучларга тескари йўналганларининг ишорасини манфий деб олинади.

9-§. Қаттиқ жисмларнинг оғирлик марказини аниқлаш

Оғирлик кучининг қўйилиш нуқтаси *оғирлик маркази* дейилади. Ана шу оғирлик марказининг координаталари x_c, y_c ва z_c ни топайлик. Қаттиқ жисм фикран ΔP_1, ΔP_2, . . . , ΔP_n элементар бўлакларга ажратилади (33-расм). Бу элементар бўлакларнинг оғирликларининг йўналиши Ернинг марказига қараб йўналгандир. Қўриладиган жисмнинг ўлчамлари Ернинг радиусига нисбатан жуда ҳам кичик бўлгани учун жисм эгаллаган ҳажмдаги фазода ҳамма элементар бўлакларнинг оғирлик кучлари йўналишини бир-бирига параллел деб қараш мумкин. Шунинг учун ΔP_1, ΔP_2, . . . , ΔP_n оғирлик кучларини бир томонга йўналган параллел кучлар деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда жисмнинг оғирлик марказини параллел кучлар маркази деб олиш мумкин ва 8-§ даги (8.9) формулага асосан қуйидагиларни ёзамиз:



33- расм.

$$\left.x_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i\;x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i},\qquad y_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i\;y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i},\qquad z_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i\;z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta P_i}.\right\} \tag{9.1}$$

Бунда фикран ажратилган i элементнинг оғирлиги ΔP_i оғирлик марказининг координаталари x_i, y_i ва z_i билан белгиланган. Бутун қаттиқ жисмнинг оғирлик марказининг координаталари эса x_c, y_c, z_c билан белгиланган.

Агар i элементнинг зичлиги ρ_i ҳажми ΔV_i ва шу элемент жойлашган фазодаги эркин тушиш тезланиши g_i бўлса, унинг ΔP_i оғирлигини қуйидагича ёзилиши ўрта мактаб физикасидан маълум:

$$\Delta P_i = \rho_i g_i \Delta V_i. \tag{9.2}$$

9.2) ни (9.1) га қўйиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\, g_i\, \Delta V_i\, x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\, g_i\, \Delta V_i}, \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\, g_i\, \Delta V_i\, y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\, g_i\, \Delta V_i}, \\ z_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\, g_i\, \Delta V_i\, z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i\, g_i\, \Delta V_i}. \end{aligned}\right| \tag{9.3}$$

Амалда масалалар ечиш вақтида жисмнинг ҳамма элементлари учун (9.3) ифодадаги g_i бир хил қийматга эга деб қаралади. Бу ҳолда (9.3) формулада g қатнашмайди, чунки сурат ва махражлар g га қисқаради.

10- §. Бир жинсли оддий ва мураккаб шаклдаги текис фигураларнинг оғирлик марказларини аниқлаш

Қаттиқ жисм бир жинсли бўлса, унинг ҳамма жойида зичлик ρ_i бир хил қийматига эга бўлади ва (9.3) формуладаги ρ_i ни қисқартириш мумкин. Натижада (9.3) соддалашади:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i\ x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i}, \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i\ y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i}, \\ z_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i\ z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Агар қаттиқ жисм ҳамма жойининг қалинлиги бир хил бўлиб, масалан, у пластина шаклида бўлса, бундай жисмлар текис фигуралар дейилади. Текис фигурани фикран ΔS_1, ΔS_2, . . . , ΔS_n элементар юзларга ажратайлик. Шу юзлардан i нинг юз бирлигидаги оғирлиги ω бўлса, унинг оғирлиги $\Delta P_i = \omega \cdot \Delta S_i$ бўлади. ΔP_i ни (9.1) га қўйсак, текис фигураларнинг оғирлик маркази координаталари учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз: (ω катталиги (9.1) нинг сурат ва махражида қисқаради):

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i\ x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i}, \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i\ y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i}, \\ z_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i\ z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.2)$$

Текис фигурани ташкил қилган элементар юзларни тегишли ўқгача бўлган масофага кўпайтмаларининг йиғиндиси текис фигурани ўша ўққа нисбатан статик моменти дейилади. (10.2) формуладаги $\sum \Delta S_i x_i$ ва $\sum \Delta S_i y_i$ ифода юзларини X ва Y ўқларига нисбатан статик моментларидир. (10.2) нинг махражи $\sum \Delta S_i$ текис фигуранинг тўлиқ юзидир.

Қаттиқ жисмнинг маълум бир бўлаги фикран кесиб олинганда ҳам унинг оғирлик марказини юқоридаги формулалар ёрдамида аниқланади. Фақат бу ҳолда кесиб олинган қисм оғирлиги ёки юзи **манфий** деб қаралади. Бундай усул билан жисм оғирлик марказининг координаталарини аниқланишига **манфий** массалар ёки юзлар усуллари дейилади. Бу ҳолда (10.1) ва (10.2) формуладаги фикран кесиб олинган ҳажм, юз ёки узунликлар манфий ишора билан олинади. Агар бир жинсли қаттиқ жисм симметрия ўқига ёки текислигига эга бўлса, унинг оғирлик маркази шу симметрия ўқи ёки текислиги устида жойлашган бўлади. Масалан, вал, диск ёки доиранинг оғирлик маркази уларнинг марказидан ўтадиган ўқнинг устида бўлади. Шарнинг оғирлик маркази унинг марказидан ўтадиган ўқ устида жойлашган.

Агар жисмнинг кўндаланг кесим юзи бир хил бўлиб, унинг узунлик бирлигидаги оғирлик кучи F_i доимий бўлса, жисмнинг фақат узунлиги ўзгарувчан бўлади. Бу ҳолда l_i узунликдаги чизиқ оғирлиги $P = F_l l_i$ бўлади. Жисмни фикран $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$ элементар узунлик учун $\Delta P_i = F_i \Delta l_i$ бўлади. Агар ΔP_i ни (9.1) га қўйсак қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

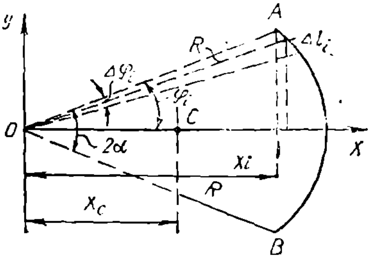
$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \; x_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i}, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \; y_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i}, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \; z_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3)$$

(10.3) формула орқали чизиқнинг оғирлик марказининг координаталари топилади.

Қаттиқ жисм фикран элементар бўлакларга ажратилганда, бу бўлаклар чексиз кичик ва узлуксиз бўлса, оғирлик марказларининг координаталарини (10.1)—(10.3) формулалардаги суммаларнинг ўрнига интеграл белгилари қўйилади. Масалан, чизиқ оғирлик марказининг координаталарини ифодаловчи (10.3) формулалари жойига қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\int x dl}{\int di}, \\ y_c &= \frac{\int y dl}{\int di}, \\ z_c &= \frac{\int z dl}{\int di}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.4)$$

Ушбу (10.4) ни қўлланишига оид мисол келтирамиз. Радиусннинг марказий бурчаги $2d$ га тенг бўлган AB айлана ёйининг оғирлик марказининг координаталари топилсин. Агар X ўқини айлана маркази ва AB ёйининг ўртасидан ўтказсак, OX ўқи симметрия ўқи бўлади (34-расм). Демак, ёйнинг оғирлик маркази X ўқи устида бўлади. AB ёйни фикран Δl_1, Δl_2, . . ., Δl_n элементар узунликларга ажратамиз. Δl_i — элементга мос келувчи марказий бурчак $\Delta\varphi_i$ бўлсин. Расмдан $dl = Rd\varphi$ ва $x_i = R \cos \varphi_i$ эканлиги кўриниб турибди. Шунинг учун (10.4) ни биринчи формуласидан фойдаланамиз:



34- расм.

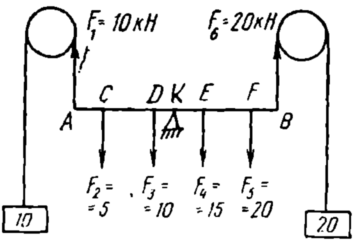
$$x_c = \frac{\int x di}{\int di} = \frac{\int R \cos \varphi R d \varphi}{R} = R \left| \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right|_{-\alpha}^{+\alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha - \sin(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)} R = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R$$

ёки

$$x_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R. \qquad (10.5)$$

Параллелограмм оғирлик маркази диагоналларининг кесишган нуқтасида, доира оғирлик маркази диаметрларининг кесишиш нуқтасида, учбурчак оғирлик маркази медианаларининг кесишган нуқтасида бўлади. Радиуси R марказий бурчаги 2α бўлган доира секторининг оғирлик маркази доира марказидан симметрия ўқи бўйича $\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ масофада бўлади.



35- расм.

5- мисол (3.9). Узунлиги 5 м, оғирлиги 20 кН бўлган AB стерженнинг A учи блок орқали ўтказилган 10 кН оғирликдаги юк билан юқорига қараб тортилади. Стерженнинг C, D, E ва F нуқталарида бир-биридан ҳамда A ва B нуқталардан 1 м масофаларда 5, 10, 15 ва 20 кН юклар осилган. Стержень мувозанатда бўлиши (35-расм) учун унинг қайси нуқтасига таянчиқ қўйиш керак?

Ечиш. AB стерженнинг учларига қўйилган юклар арқонлар орқали A ва B учларини юқорига тортади. Шунинг учун бу кучларни F_1 ва F_2 билан белгилаб, юқорига қаратиб йўналтирамиз. Энди A нуқтага нисбатан қўйилган таянч нуқта K нинг вазиятини топамиз. Бу масофа (8.8) формуладаги r ни беради. Шунинг учун (8.8) га асосан

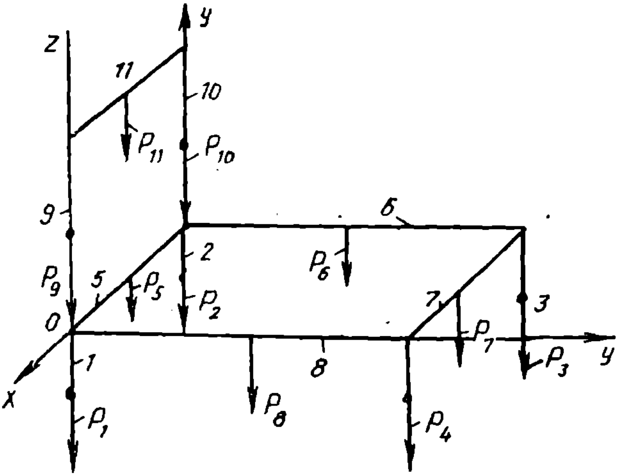
$$AK = \frac{F_1 \cdot 0 + F_2 AC + F_3 \cdot AD + F_4 \cdot AE + F_5 \cdot AF + F_6 \cdot AB}{F_1 + F_2 + \ldots + F_6}.$$

Расмдан кўриняптики, F_1 ва F_4 нинг йўналиши қолган кучларга нисбатан тескари бўлгани учун ишоралари минус билан олинади. F_1 ва F_6 нинг ишоралари минуслигини ҳисобга олсак, AK қуйидагича топилади:

$$AK = \frac{5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 20 \cdot 4 - 20 \cdot 5}{-10 + 5 + 10 + 20 - 20} = 2{,}5 \text{ м}.$$

Демак, K нуқта AB ни ўртасида жойлашган.

6- мисол (9.18). Ҳар бирининг узунлиги 44 см ва огирликлари бир хил бўлган стерженлардан иборат



36- расм.

стул шаклидаги жисмнинг оғирлик маркази координаталари топилсин (36- расм).

Ечиш. *O* нуқтани координата боши қилиб танлаб оламиз. Стерженлар бир жинсли бўлганлиги учун улар оғирлик кучларининг қўйилиш нуқталари стерженларнинг ўртасида бўлади. Стерженларнинг оғирлик кучлари йўналишлари бир-бирига параллел ва бир томонга йўналган бўлади. Шундай ҳол учун кучлар қўйилиш нуқталарининг координаталари x_1, x_2, . . . , x_n; y_1, y_2, . . . , y_n ни 36- расмдан фойдаланиб, топамиз (3- жадвалга қаранг).

3- жадвал

Координаталар	Кучлар номерлари										
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
X_i, см	0	−44	−44	0	−22	−44	−22	0	0	−44	−22
Y_i, см	0	0	44	44	0	22	44	22	0	0	0
Z_i, см	−22	−22	−22	−22	0	0	0	0	22	22	44

Энди 3- жадвал маълумотларидан фойдаланиб, (9.1) формуллаларга асосланиб, жисмнинг оғирлик маркази координаталарини аниқлаймиз: ($P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$):

$$x_c = \frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + \ldots + P_nx_n}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots + P_n} =$$

$$= \frac{-44 - 44 - 22 - 44 - 22 - 44 - 44 - 22}{11P} \cdot P =$$

$$= \frac{-224}{11} = -22 \text{ см.}$$

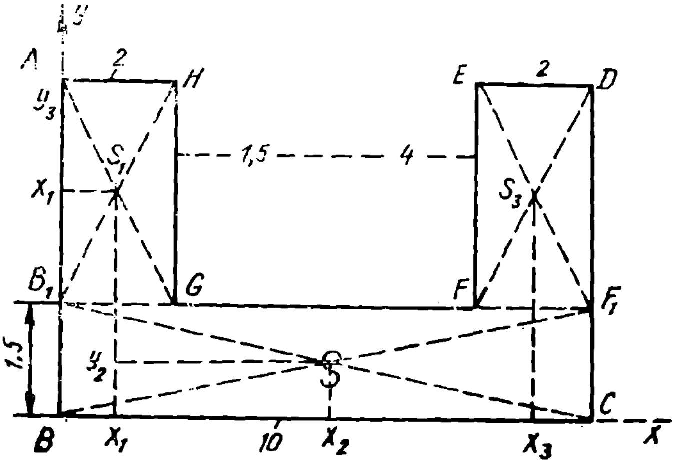
$$y_c = \frac{176R}{11P} = 16 \text{ см.}$$

$$z_c = \frac{-22 - 22 - 22 - 22 + 22 + 22 + 44}{11P} P = 0.$$

Шундай қилиб, стул шаклидаги жисмнинг оғирлик маркази координаталари —22; 16 см ва нолга тенг.

7-мисол. 37-расмда кўрсатилган пластинанинг ўлчамлари $AH = 2$ см, $HG = 1,5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см, $EF = 4$ см, $ED = 2$ см эканлигини маълум деб, пластинанинг оғирлик маркази координаталари топилсин.

Ечиш. Масалани ечиш учун $ABCDEFGHA$ текис фигурани фикран учта AB_1GHA, EFF_1DF ва BB_1 F_1 CB тўғри бурчакли тўртбурчакларга ажратамиз. Демак, фигура учта



37-расм.

элементга ажратилади ва $n=3$ ҳол учун (10.2) формула қуйидаги шаклни олади (текис фигура бўлганлиги учун фақат X ва Y ўқлари олинади):

$$x_c = \frac{S_1x_1 + S_2x_2 + S_3x_3}{S_1 + S_2 + S_3}, \qquad (1)$$

$$y_c = \frac{S_1y_1 + S_2y_2 + S_3y_3}{S_1 + S_2 + S_3}. \qquad (2)$$

Бу ерда S_1, S_2, S_3 фикран бўлган учта тўртбурчакларнинг сирт юзлари: x_1, y_1, S_1 юзнинг оғирлик маркази координаталари: x_2, y_2 ва x_3, y_3 — мос равишда S_1, S_2 ва S_3 — юзлар оғирлик марказларининг координаталари (диагоналлари кесишган нуқтасида тўртбурчакни оғирлик маркази бўлади деган фикрга асосланамиз). 37-расмдан:

$$S_1 = 2\cdot 1{,}5 = 3 \text{ см}^2,\ x_1 = 1 \text{ см},\ y_1 = 2{,}25 \text{ см};$$

$$S_2 = 1{,}5\cdot 10 = 15 \text{ см}^2,\ x = 5 \text{ см},\ y_2 = 075 \text{ см};$$

$$S_3 = 4\cdot 2 = 8 \text{ см}^2,\ x_3 = 9 \text{ см},\ y = 3{,}5 \text{ см}.$$

Охирги сонларни (1) ва (2) га қўйиб,

$$x_c = \frac{3\cdot 1 + 15\cdot 5 + 8\cdot 9}{3 + 15 + 8} = \frac{150}{26} = 5{,}77 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{3\cdot 2{,}25 + 15\cdot 0{,}75 + 8\cdot 3{,}5}{3 + 15 + 8} = \frac{46}{26} = 1{,}77 \text{ см}.$$

Шундай қилиб, текис фигуранинг оғирлик маркази координаталари $x_C = 5{,}77$ см, $y_C = 1{,}77$ см бўлган нуқтада экан.

8-мисол (3.9). Узунлиги 10 м, оғирлиги 40 кН бўлган AB стерженнинг A учи блок орқали ўтказилган 20 кН оғирликдаги юк билан юқорига қараб тортилади. Худди шундай усул билан стерженнинг B учи оғирлиги 40 кН юк билан юқорига тортилади. Стерженнинг C, D, E ва F нуқталарида бир-биридан ҳамда A ва B нуқталардан 1 м масофаларда 10, 20, 30 ва 40 кН юклар осилган. Стержень мувозанат вазиятида бўлиши учун унинг қайси нуқтасига таянчиқ қўйиш керак? (Мустақил ечиш учун.) *Жавоб.* Ўртасида (35-расм).

11-§. Жуфт кучлар ва жуфт кучлар моменти

Модуллари тенг, йўналишлари қарама-қарши ва бир тўғри чизиқда ётмаган иккита F, F' параллел куч *жуфт кучлар* дейилади. Шу F ва F' кучнинг таъсир чизиқлари ётган текислик *жуфт кучларнинг таъсир текислиги* дейилади.

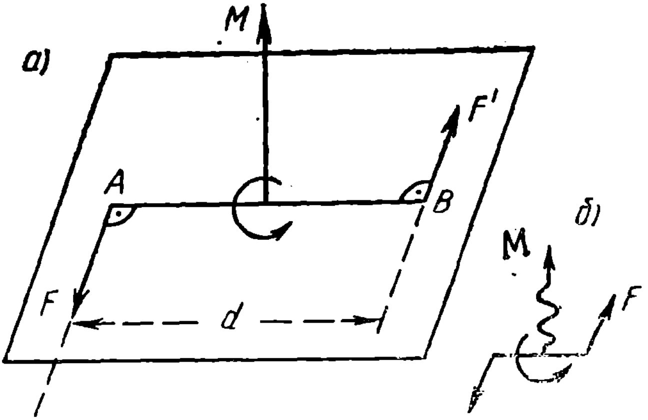
Жуфт кучларнинг тенг таъсир этувчиси бўлмаса-да, бу кучлар бир-бирини мувозанатламайди, чунки бир тўғри чизиқда ётмайди. Жисмга қўйилган жуфт кучлар шу жисмни айлантирмоқчи бўлади.

Жуфт кучни ҳосил қилган кучларнинг таъсир чизиқлари орасидаги энг қисқа масофа жуфт кучнинг **елкаси** дейилади. Жуфт кучнинг жисмга таъсири ана шу жуфт кучнинг елкасига, кучларнинг модуллари ва йўналишларига боғлиқдир. Бу боғланишлар жуфт кучлар моменти тушунчаси билан характерланади.

Жуфт кучлардан биттасини жуфт кучлар елкасига бўлган кўпайтмаси *жуфт кучларнинг моменти* дейилади. Агар жуфт кучларни F ва F', жуфт кучлар елкасини d деб белгиласак, жуфт куч моменти таърифига асосан қуйидагича ёзилади (38-*а* расм):

$$M=F\cdot d. \qquad (11.1)$$

Жуфт кучлар моментининг бирлиги Ньютон (Н) кўпайтирилган метр (м), яъни (Н·м). Жуфт кучлар моменти вектор билан тасвирланади. Бу жуфт вектор йўналиши парма қоидаси билан аниқланади. Парма дастасини жуфт кучлар йўналишида, жуфтни таъсир текислиги бўйлаб айлантирганда парманинг илгариланма ҳаракати жуфт куч моментининг йўналишини кўрсатади. 38-*б* расмдан кўринадики, ҳақиқатан ҳам пар-

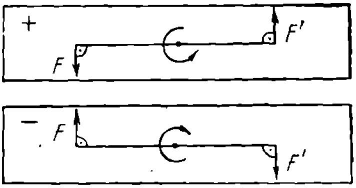


38-расм.

ма дастасини F ва F' куч йўналишида айлантирсак, парма вертикал юқорига қараб илгариланма ҳаракат қилади. Ана шу илгариланма ҳаракат тик юқорига йўналган. Демак, жуфт куч моменти вектори M ҳам тик юқорига йўналган бўлади. Шунинг учун парманинг учида M вектори кўрсатилган.

38-*а, б* расмдан: жуфт куч моменти вектори M шундай йўналганки, унинг охиридан қаралганда, F ва F' жуфт кучлар таъсир текислигини соат милининг айланишига нисбатан тескари йўналишда айлантиришга интилади деган хулосага олиб келади. Демак, M векторининг йўналишини яна қуйидаги қоидага асосан ҳам топиш мумкин:

M вектори жуфтларнинг таъсир текислигига перпендикуляр бўлиб, шундай йўналганки, унинг охиридан қараганда F ва F' кучлар жуфт кучларнинг таъсир текислигини соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиради.



39- расм.

Кўп ҳолларда расм текислигига перпендикуляр бўлган жуфт моменти вектори M ни кўрсатмасдан, шу M векторга перпендикуляр текисликни жуфт қайси томонга қараб айлантиришини кўрсатади, яъни жуфтларнинг таъсир текислигининг айланиш йўналиши кўрсатилади. Агар жуфт кучлар жуфтнинг таъсир текислигини (39- расм) соат мили айланиш йўналишида айлантирса, жуфт кучлар моменти манфий, агар соат милининг ҳаракат йўналишига тескари бўлса, мусбат деб қабул қилинади. Бундай ҳолларда жуфт куч моменти куч модулининг жуфт кучлар елкасига бўлган кўпайтмасининг мусбат ёки манфий ишораси билан ифодаланади, яъни жуфт кучлар моменти алгебраик катталик каби олинади:

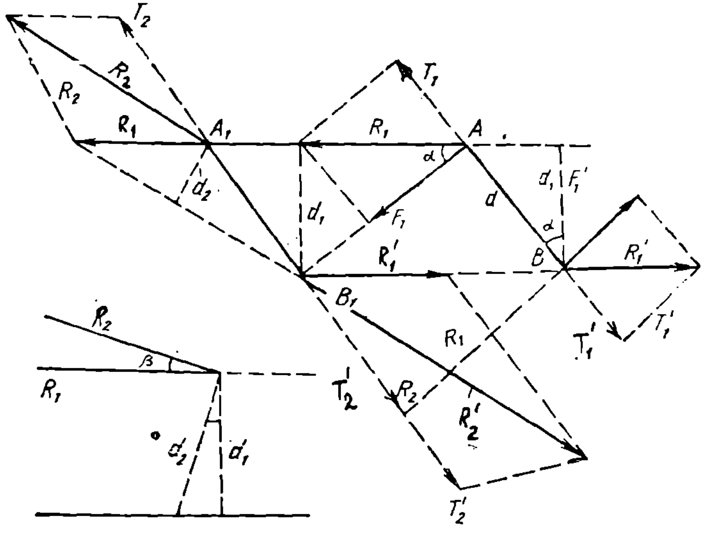
$$M = \pm F \cdot d.$$

Агар F ва F' айланиши соат милига тескари йўналишда бўлса (+), соат мили айланиши йўналишида бўлса (—), ишора билан олиш қабул қилинган.

12- §. Эквивалент кучлар

Қайси ҳолларда текисликдаги ва фазодаги жуфт кучларнинг эквивалент (битта жуфт кучлар системасининг таъсири айнан иккинчи жуфт кучлар системасининг таъсиридек) бўлиши мумкинлигини алоҳида-алоҳида кўриб чиқамиз.

1. **Теорема.** *Текисликда жуфтлар моментларининг модуллари тенг ва ишоралари бир хил бўлса, эквивалент бўлади.*



40- расм.

Қаттиқ жисмнинг A ва B нуқталарига F_1, F_1' жуфт кучлар (40- расм) таъсир этаётган бўлсин. A ва B нуқталарга ўзаро мувозанатлаштирувчи T_1, T_1' кучни қўшамиз. A нуқтада, F_1, T_1' кучни қўшиб, R_1 ва B нуқтада F_1, T_1' ни қўшиб, R_1' тенг таъсир этувчиларни топамиз. Бу R_1R_1' куч янги жуфт кучларни ташкил этади. Янги жуфт кучлар R_1R_1' олдинги F_1, F_1' жуфт кучларга мувозанатлаштирувчи T, T_1' кучларининг қўшилиши натижасида ҳосил қилинганлиги учун у, яъни жуфт кучлари олдинги F_1, F_1' жуфт кучларига эквивалент бўлади. R_1 ва R_1' кучларни таъсир чизиқлари бўйлаб

A_1 ва B_1 нуқталарга ўтказамиз ва худди олдиндагидек мулоҳазаларни бажариб, ҳосил қилинган янги R_2R_2' жуфт кучлар олдинги R_1R_2' жуфт кучларга эквивалентлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, берилган F_1, F_1' кучларни эквивалент R_1' R_1 ёки R_2, R_2' жуфт кучлар билан алмаштириш мумкин. Кўрамизки, янги жуфт кучларнинг моментлари олдинги F_1, F_1' жуфт кучлар моментларининг модулларига тенг. Ҳақиқатан ҳам, 40- расмда кўринадики:

$$M(F_1,\ F_1') = F_1 \cdot d,$$
$$M(R_1,\ R_1') = R_1 \cdot d_1,$$
$$M(R_2,\ R_2') = R_2 \cdot d_2.$$

Расмдан

$$F_1 = R_1 \cos\alpha,\quad \alpha_1 = d\cos\alpha,\quad R_1 = R_2\cos\beta,\quad d_2 = d_1\cos\beta.$$

Охирги ифодаларни $M(R_1,\ R_1')$ ва $M(R_2,\ R_2')$ га қўямиз:

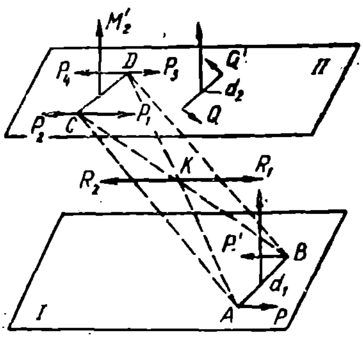
$$M(R_1,\ R_1') = R_1 d_1 = \frac{F_1}{\cos\alpha} \cdot d,\ \cos\alpha = F_1 \cdot d = M(F_1,\ F_1')$$

$$M(R_2,\ R_2') = R_2 \cdot d_2 = \frac{R_1}{\cos\beta} \cdot d\cos\beta = R_1 \cdot d_1 = F_1 \cdot d = $$
$$= M(F_1,\ F_1').$$

Шундай қилиб, янги жуфт кучлар моментларининг олдинги жуфт куч моментига тенглиги исботланди, бу моментларнинг ҳаммасининг ишораси бир хил мусбат эканлигини расмдан пайқаш қийин эмас. Демак, теорема исбот қилинди.

2. Теорема. Фазода моментлари геометрик тенг бўлган жуфт кучлар ўзаро эквивалентдир.

Иккита жуфт куч P, P' ва Q, Q' берилган (41- расм). P, P' жуфт кучларнинг моменти M_2; Q, Q' жуфт кучларнинг моменти M_1 бўлсин. Бу жуфт кучларнинг елкалари d_1 ва d_2 бўлиб, ҳар хил текисликларда ётади, моментлари $\vec{M}_1$ ва



41- расм.

$\vec{M}_2$ геометрик жиҳатдан бир-бирига тенг. Шу жуфтлар бир-бирига эквивалентлигини исботлаймиз.

Расмдан кўринадики, $M_1 = Q \cdot d_2$, $M_2 = P \cdot d_1$ ва $M_1 = M_2$, яъни жуфт моментларнинг фақат модуллари бир-бирига тенг бўлибгина қолмай, уларнинг йўналишлари ҳам бир хилдир. Жуфт моментларнинг йўналишлари бир хил эканлигидан $\vec{P}_1$, $\vec{P}'$ ва $\vec{Q}$, $\vec{Q}'$ жуфтлар ўзаро параллел бўлган текисликларда ётади ва бу жуфт кучлар текисликларни айнан бир хил йўналишда айлантиришга интилади, деган хулоса чиқади.

II текислик устида AB га тенг ва параллел бўлган CD кесмани чизамиз. Бу кесма CD охирларига $\vec{P}$, $\vec{P}'$ кучларга модуллари тенг ва параллел бўлган иккита жуфт ўзаро мувозанатлащтирувчи P_1, P_2 ва P_3, P_4 кучларни қўямиз, яъни $|P_1| = |P_2| = |P_3| = |P_4| = |P|$.

A билан D ва B билан C нуқталарни туташтирамиз. Бу ҳолда P ва P_3 кучлар AD чизиқ охирларида P' ва P_2 кучлар эса BC чизиқ охирларида жойлашган. P ва P_3 нинг тенг таъсир этувчиси R_1, P' ва P_2 нинг тенг таъсир этувчиси R_2 лар K нуқтага қўйилган ўзаро мувозанатлаштирувчи кучларни ҳосил қилади. Агар ўзаро мувозанатлаштирувчи R_1 ва R_2 кучларни ташлаб юборсак, фақатгина P_1, P'_4 жуфт кучлар қолади. Бу жуфт кучларнинг моменти $M'_2 = P_1 \times \times CD = P \cdot d_1$ га тенг. Аммо Pd_1 теореманинг шартига асосан $M_1 = Qd_2$, чунки $M_1 = M_2$ эди. Демак, $M'_2 = Pd_1 = Qd_2$ бўлади ва M'_2 ни ҳосил қилган P_1, P_4 жуфт кучлар ёки $\vec{P}$, $\vec{P}'$ жуфт кучлар текислик II ни айнан $\vec{Q}$, $\vec{Q}'$ жуфтлар айлантирган томонга айлантиради.

Шунинг учун 1-теоремага асосан $\vec{Q}$, $\vec{Q}'$ жуфти P_1, P_4 жуфтига эквивалент экан, деган хулоса чиқарамиз ва теорема исбот қилинди.

Келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

1. Жуфт кучларнинг қаттиқ жисмга таъсирини ўзгартирмасдан таъсир текислигига параллел бўлган ихтиёрий бошқа текисликка кўчириш ҳамда куч моментларининг модули ва йўналишини ўзгартирмасдан жуфт кучларнинг модули ва уларнинг елкасини ўзгартириш мумкин.

2. Жуфт куч моменти векторини жуфтларнинг таъсир текислигига ёки унга параллел бўлган текислик-

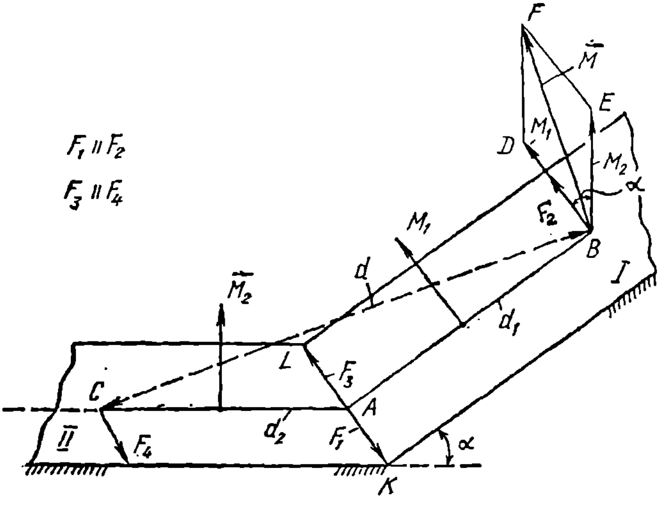
нинг ихтиёрий бошқа нуқтасига кўчириш мумкин, яъни жуфт кучлар моменти эркин вектордир.

3. Жуфт кучлар моменти вектори учта элементни жуфтларнинг таъсир текислиги вазиятини, айланиш йўналишини ва моментнинг модулини (сон қийматини) ифодалайди.

13- §. Жуфт кучларни қўшиш. Жуфт кучларнинг мувозанат шарти

Бир нечта жуфт кучлар моментлари $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$, . . . , $\vec{M}$ таъсирига эквивалент бўлган жуфт куч моментини аниқлаш *жуфт кучларни қўшиш* дейилади. Олдин иккита жуфт кучларни қўшишни кўриб чиқайлик. Бу қўшиш қуйидаги теоремага асосан бажарилади. **Жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндиси шу жуфт кучларга эквивалент бўлган жуфт моментига тенг.**

Иккита $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ва $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ жуфт кучларнинг моментлари $\vec{M}_1$ ва $\vec{M}_2$ бўлиб, бу жуфтлар ўзаро кесишадиган I ва II текисликларга жойлашган бўлсин (42- расм). Кучларни шундай танлаймизки, $|F| = |F_2| = |F_3| = |F_4| = |F|$ бўлсин. Бу жуфт кучларнинг елкаларини $d_1 = \frac{M_1}{F}$ ва $d_2 = \frac{M_2}{F}$ беради.



42- расм.

I ва II текисликларнинг кесишиш чизиғи KL бўлсин. F_1 ва F_3 лар KL бўйлаб йўналган ва ўзаро мувозанатлаштирувчи кучлар бўлсин. Агар бу кучларни ташлаб юборсак, фақат F_2, F_4 жуфт кучлар қолади. Бу қолган жуфт кучлар иккала жуфт кучларнинг эквиваленти бўлади. Бу эквивалент жуфт кучларнинг елкаси d бўлиб, моменти $M=F\cdot d$ дир.

Ҳақиқатан ҳам, ΔBDF учун косинуслар теоремасидан фойдалансак,

$$M=\sqrt{M_1^2+M_2^2+2M_1M_2\cos\alpha}.$$

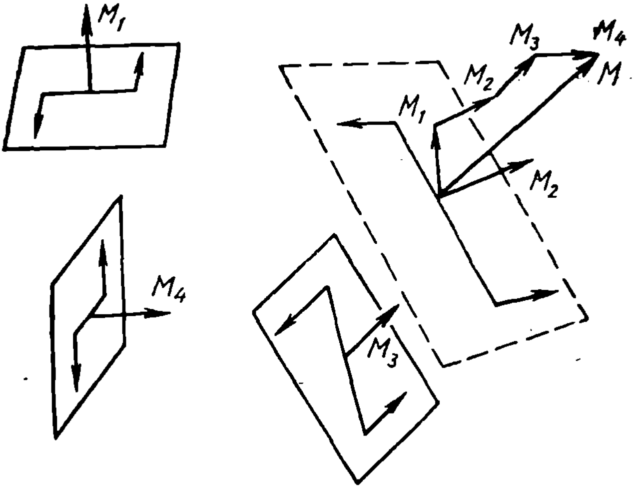
$M_1=F\cdot d_1$ ва $M_2=F\cdot d_2$ эканликларини эсга олсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$M=\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\alpha\cdot F}.$$

$$\Delta CBA \text{ дан } d=\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\alpha}.$$

Шунинг учун $M=F\cdot d$ бўлади. Демак, ҳақиқатан ҳам параллелограммнинг диагонали $\vec{B}\vec{F}=\vec{M}$ жуфт кучлар F_2, F_4 моментининг модулига тенглигини исботладик. Энди M ни BC га перпендикуляр, яъни $CBF=90°$ эканлигини кўрсатамиз. $\vec{M}_2\perp\vec{F}_4$ ва $\vec{M}_1\perp\vec{F}_2$ бўлганлиги учун $BDFE$ текислиги F_2 га перпендикуляр бўлади ва BF, яъни $\vec{M}\perp\vec{F}_2$ бўлади. Бундан ташқари $\angle DBA=90°$ ва $\angle CBA=$ $=\angle FBD$, бундан $\angle CBF=90°$, демак, $\vec{M}\perp\vec{F}_2$ бўлади. Ниҳоят, эквивалент жуфт кучлар моменти $\vec{M}$ нинг учинчи элементи, яъни йўналиши кўриниб турибди (42- расмга қаранг). $\vec{M}$ нинг охиридан қараганда F_2, F_4 кучлар жуфтлар текислигини соат мили айланишига тескари айлантираётганини кўрамиз. Демак, $\vec{M}$ вектори ҳақиқатан ҳам $\vec{M}_1$ ва $\vec{M}_2$ нинг геометрик йиғиндисига тенг. Теорема исбот бўлди, яъни $\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2$.

Шундай жуфт кучлар моментларини қўшиш қоидаси *моментлар параллелограмм қоидаси* дейилади. Моментларнинг параллелограмм ёки учбурчагини чизиш билан, тескари масалани, яъни ихтиёрий жуфт кучлар моментларини ташкил этувчиларга ажратиш мумкин.



43- расм.

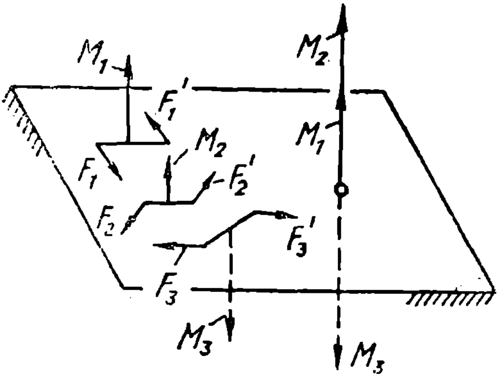
Энди фазода ихтиёрий жойлашган бир неча жуфт кучларни қўшишни кўриб чиқайлик (43- расм).

Бу жуфт кучларнинг M_1, M_2, ..., M_n моментлари 12- § га асосан, қўйилиш нуқталарини фазонинг ихтиёрий O нуқтасига кўчириш мумкин. Шу O нуқтада жуфт кучларнинг моментларини қўшиб, моментлар кўпбурчагини ҳосил қиламиз ва бу кўпбурчакни тўлдирувчи томони жуфт кучларнинг эквивалент моментини, яъни M ни беради. 43- расмда 4 та жуфт кучларни қўшгандаги моментлар кўпбурчаги тасвирланган. Шундай қилиб, фазодаги берилган ихтиёрий жуфт кучлар системасининг эквивалент жуфт кучларининг моменти ташкил этувчи жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{i-1}^{n} \vec{M}_i . \qquad (13.1)$$

Агар жуфт кучлар системаси битта текисликда ёки ўзаро параллел текисликларда ётган бўлса, бу жуфт кучларнинг моментлари шу текисликка перпендикуляр бўлган текисликларда ётади ва алгебраик усулда қўшилади (44- расм).

1. Текисликда ётган жуфт кучлар системасига эквивалент бўлган жуфт кучлар моменти ташкил этувчи



44- расм.

жуфт кучлар моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i, \qquad (13.2)$$

бунда

$$M_i = \pm F_i \cdot d_i \text{ га тенг.}$$

2. Жуфт кучларнинг M эквивалент моменти нолга тенг бўлса, бу жуфт кучлар ўзаро бир-бирини мувозанатлайди:

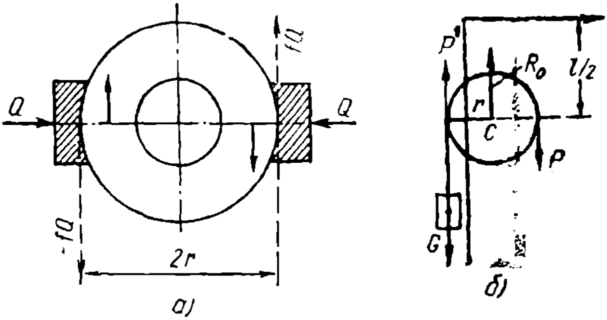
$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0. \qquad (13.3)$$

Жуфт кучларнинг мувозанат шартини (13.3) га асосан қуйидагича таърифлаймиз: *агар фазода ихтиёрий жойлашган жуфт кучлар моментларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлса, бу жуфт кучлар ўзаро бир-бирини мувозанатлайди.*

Ниҳоят, жуфт кучлар бир текисликда жойлашган бўлса, бир текисликдаги жуфт кучлар моментларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлганда, бу жуфт кучлар ўзаро бир-бирини мувозанатлайди, яъни мувозанат шарти қуйидагига тенг бўлади:

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = 0. \qquad (13.4)$$

9- мисол. (4.59) 100 Нм жуфт кучлар моменти таъсирида бўлган валга $z = 25$ см радиусли тормозловчи ҳалқа қўйилган. Агар ҳалқа ва тормозловчи колодкалар орасидаги ишқаланиш коэффициенти $f=0{,}25$ га тенг бўлса, ҳалқалар тинч ҳолатда бўлиши учун тормозловчи колодкаларни ҳалқаларга қанча куч билан қисиш керак (45- *а* расм)?



45- расм.

Ечиш. Масала шартига асосан икки ҳаракатлантирувчи ва тормозловчи жуфт кучлар таъсир этади. Мувозанат шарти (13.4) га асосан

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M_1 + M_2 = 0.$$

M_1 — ҳаракатлантирувчи жуфт кучлар моменти ($M =$ $= 100$ Нм),

M_2 — тормозловчи жуфт кучлар моменти

$$M_2 = -fQ\cdot 2r_1.$$

M_1 ва M_2 ифодаларни мувозанат тенгламасига қўйсак:

$$2fQr = M_1,$$

бундан

$$Q = \frac{M_1}{2fr} = \frac{100\ \text{Н}}{2\cdot 0{,}25\cdot 0{,}25} = 800\ \text{Н}.$$

10- мисол. Оғирлиги $G = 500$ Н бўлган юк радиуси $r =$ $= 10$ см бўлган барабанга ўраб, осиб қўйилган. Барабан дасталарининг охирларига қўйилган ва шу барабан текислигида ётган PP' жуфт кучлар билан сақланади. Барабан дасталарининг узунлиги l га тенг. Жуфт кучларни барабан дасталарига тик қўйилган деб, шу жуфт кучлар PP' ва барабан O ўқининг реакция кучи топилсин (45- *б* расм).

Эслатма. Барабанга таъсир этадиган PP' жуфт кучларни тескари момент оғирлик кучи G ва O ўқнинг R_0 реакция кучи ҳосил қилади, деб ҳисоблаш керак.

Жавоби: $P = \frac{R_0 \cdot r}{l} = 4$ Н. $R_0 = G = 500$ Н.

IV БОБ. ТЕКИСЛИКДА КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

14- §. Нуқтага нисбатан куч моменти

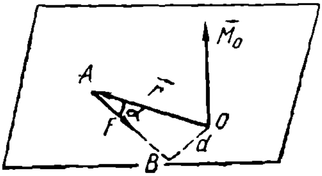
Берилган $\vec{F}$ кучнинг жисмга таъсири натижаси шу кучнинг қўйилиш нуқтасини ифодалайдиган радиус вектор $(\vec{r})$, F кучининг модули ва йўналишига ҳамда $\vec{F}$ ва $\vec{r}$ векторлар орасидаги бурчакка боғлиқ. Шундай боғланишларни ҳисобга олган ҳолда, кучнинг жисмга таъсирини куч моменти тушунчаси орқали ифодаланади. Куч моменти вектор катталикдир.

Ихтиёрий O нуқтага нисбатан F кучнинг моменти деб, O нуқтага нисбатан шу кучни ифодаловчи $\vec{r}$ радиус вектор билан $\vec{F}$ куч векторини вектор кўпайтмаси орқали ифодаланадиган катталикка айтилади.

A нуқтага F куч қўйилган ва уни O нуқтага нисбатан ифодаловчи радиус вектор r га тенг бўлсин. Агар вектор кўпайтмани «×», скаляр кўпайтмани «·» билан белгиласак, $\vec{M}_0$ ни таърифга асосан қуйидагини ёзамиз:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{14.1}$$

Куч моменти вектори O нуқтага қўйилганлиги (46- расмга қаранг) кўриниб турибди. $\vec{M}_0$ нинг йўналишини парма қоидасидан топамиз. Агар парма дастасининг айланиш йўналиши $\vec{r}$ дан $\vec{F}$ га (яқин йўл билан) йўналган бўлса, парманинг илгариланма ҳаракат йўналиши $\vec{M}_0$ йўналишини ифодалайди. $\vec{M}_0$ вектор O



46- расм.

нуқтага қўйилган бўлиб, шундай йўналганки, унинг охиридан қараганда $\vec{F}$ куч таъсир текислигини соат милининг айланишига тескари йўналишда айлантиргандек бўлади. Ниҳоят, M_0 нинг учинчи элементи, яъни модулини топайлик.

Агар α куч $\vec{F}$ билан $\vec{r}$ радиус вектор орасидаги бурчак бўлса, (14. 1) формуладаги $\vec{M_0}$ вектор модулини қуйидагича аниқлаймиз:

$$|\vec{M}_0| = F\cdot r\sin\alpha = F\cdot r\sin(\vec{F}_1\cdot\vec{r}). \qquad (14.2)$$

Расмдан $d = r\sin\alpha$ бўлганлиги учун

$$M_0 = F\cdot d. \qquad (14.3)$$

Демак, нуқтага нисбатан M_0 куч моментининг модули F куч модули билан d куч елкасининг кўпайтмаси орқали топилади. 46- расмдан кўринадики,

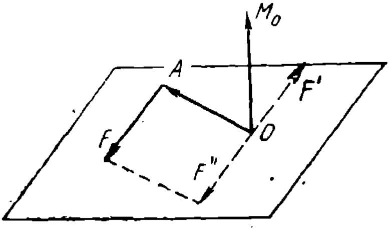
$$M_0 = 2\cdot S_{\triangle OAB}\,\cdot \qquad (14.4)$$

(14.3) дан куч моменти $\vec{F}$ ва $\vec{r}$ ҳосил қилган учбурчак юзининг иккиланганига тенг деган хулоса келиб чиқади. Энди (14.2) дан $\alpha = 0$ бўлса, $M_0 = 0$; $\alpha_0 = 180$ бўлганда $M_0 = 0$ ва $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ҳолда эса M_0 энг катта қиймат $(F\cdot r)$ га тенг бўлади.

15- §. Кучни параллел кўчириш ҳақидаги теорема

Теорема. *Кучнинг қаттиқ жисмга таъсирини ўзгартирмасдан, унинг олдинги вазиятига параллел қолдирган ҳолда ихтиёрий бошқа нуқтага кўчириш учун жисмга моменти кўчирилаётган кучнинг янги нуқтага нисбатан моментига тенг бўлган жуфт кучни қўшиш керак.*

Жисмнинг A нуқтасига F куч қўйилган ва F кучнинг O нуқтага нисбатан M моментига тенг бўлсин (47- расм). O нуқтага F га парал-



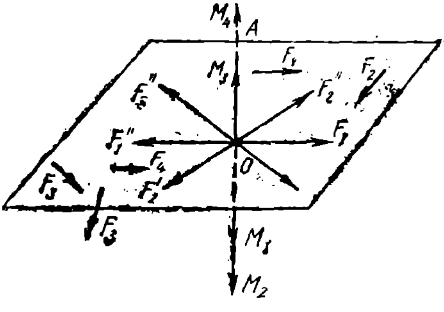
47- расм.

лел ва модуллари F га тенг бўлган F', F'' ўзаро мувозанатлаштирувчи кучларни қўшамиз ва F, F', F'' кучлар системасини ҳосил қиламиз. Булардан F, F' жуфт кучлардир. Бу жуфт кучларнинг M_1 моменти F кучнинг O нуқтага нисбатан M_0 моментига тенг. M эркин вектор бўлганлиги учун қўйилиш нуқтасини O нуқтага кўчирамиз. Жуфт кучларни M_0 билан алмаштиргандан кейин O нуқтада F' куч ва M_0 момент қолади. Шундай қилиб, F куч A нуқтадан O нуқтага кўчирилди.

Демак, F ни A дан O га кўчирилганда F', F'' жуфт кучлар қўшилади ва O нуқтага F кучи ўзига-ўзини параллел қилиб кўчирилади. Бу қўшилган жуфт кучларнинг моменти A нуқтадаги F нинг O нуқтага нисбатан моментига тенг бўлар экан. Теорема исбот бўлди. Бу теоремани француз олими Пуансо (1777 — 1859) таклиф этган. Бу метод кучни **берилган марказга келтириш методи** ёки Пуансе методи дейилади.

16- §. Бош вектор ва бош момент. Текисликдаги кучларни бир марказга келтириш

Текисликда F_1, F_2, . . . , F_n ихтиёрий кучлар системаси берилган бўлса, 15- § да кўрилган Пуансо методидан фойдаланиб, бу кучларнинг ҳаммасини берилган O марказга келтирамиз. Натижада ҳар бир куч мос биттадан жуфтлар ҳосил қилади, яъни F_1 кучга мос F_1, F_1''; F_2 га мос F_2, F_2'' . . . F_n кучига мос F_n, F_n'' жуфтлар ҳосил бўлади (48-расм). Шундай қилиб, бутун кучлар системаси O нуқтада кесишадиган n та яқинлашувчи кучлар ҳамда O нуқтадан ўтиб берилган текисликка перпендикуляр бўлган n та жуфт кучлар моментлари билан алмаштирилди.



48- расм.

Системани ташкил этган кучларнинг геометрик йиғиндисига ($\vec{R}_0$) *бош вектор* деб аталади.

Келтирилган марказга ҳар бир кучни кўчирганда битта жуфт ҳосил бўлади ва бу жуфт битта момент беради. Бу моментлар сони системадаги кучлар сонига тенг, яъни n та куч n та моментни келтириш маркази O нуқтага нисбатан ҳосил қилади деб айтиш мумкин.

Системадаги кучларни келтириш марказига нисбатан ҳосил қилган моментларининг геометрик йиғиндисига $(\vec{M}_0)$ *бош момент* деб аталади. Биз кўраётган кучлар бир текисликда ётганлиги учун жуфтларнинг моментлари бир OA чизиғида ётади. Шунинг учун текисликдаги кучларнинг бош моменти, ташкил этувчи моментларнинг алгебраик йиғиндисига тенг. Лекин бош вектор R_0 эса кучларнинг *геометрик* йиғиндисига тенг, яъни R_0 векторини $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ кучларнинг кучлар кўпбурчагини ясаш йўли билан 4- § га асосланиб топамиз. Бошқача айтганда, бош вектор ва бош момент текисликда кучлар жойлашган ҳолда қуйидагича топилади:

$$\vec{R}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{16.1}$$

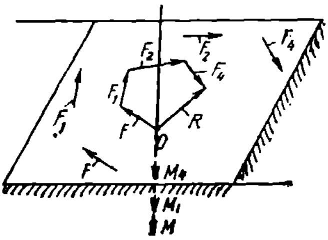
$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} M_i. \tag{16.2}$$

R_0 — катталик вектор усулда, M_0 эса алгебраик усулда қўшилади.

17- §. Вариньон теоремаси. Текисликдаги кучлар системасини битта жуфт куч ёки тенг таъсир этувчи куч ҳолига келтириш

Текисликда $F_1, F_2, \ldots, F_n$ кучлар системаси берилган бўлса, 16- § дан маълумки, бу кучларни R_0 бош вектор ва M_0 бош момент билан алмаштириш мумкин. Таъкидлаймизки, бош вектор ва тенг таъсир этувчи куч битта тушунча эмас. Кучлар системасининг жисмга таъсирини тўлиқ алмаштирадиган куч тенг таъсир этувчи кучдир. Тенг таъсир этувчи куч, бутун кучлар системаси жисмга қандай таъсир этса, худди шундай таъсир қилади. Бош вектор эса текисликда фақат кучларнинг геометрик йиғиндисини билдиради (49- расм).

$F_1, F_2, \ldots, F_n$ кучлар системаси O нуқтага нисбатан $M_1, M_2, \ldots, M_n$ моментни ҳосил қилсин. Бу моментлар



49- расм.

кучлар текислигига перпендикуляр бўлади ва O нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ устида ётади, ишораси мусбат ёки манфий бўлади.

Теорема. *Тенг таъсир этувчи куч R нинг ихтиёрий O нуқтага нисбатан моменти текисликда ётган ташкил этувчи кучларни ўша нуқтага нисбатан ҳосил қилган моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Агар бир текисликда ётган $F_1, F_2, \dots, F_n$ кучларнинг моментлари $M_1 = F_1 \cdot d_1$; $M_2 = F_2 \cdot d_2 \dots M_n = F_n \cdot d_n$ бўлса, бу моментлар битта тўғри чизиқда ётади ва шунинг учун алгебраик усул билан қўшилади:

$$M_0 = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d_i. \quad (17.1)$$

(17.1) Вариньон теоремаси ифодалайди. П. Вариньон (1654—1722) француз олими. O нуқтага нисбатан тенг таъсир этувчи R нинг моментининг модули қуйидагича бўлади:

$$M = R \cdot d = R_0 d, \quad (17.2)$$

чунки $R = R_0$ деб олиш мумкин ва

$$R_0 = \frac{M_0}{d}; \quad d = \frac{M_0}{R_0}. \quad (17.3)$$

(17.3) ни (17.2) га қўйсак

$$M = \frac{M_0}{R_0} \cdot R_0 = M_0.$$

Охирги ифодадан $M = M_0$ ни олсак, теорема исбот қилинганлиги равшан бўлади.

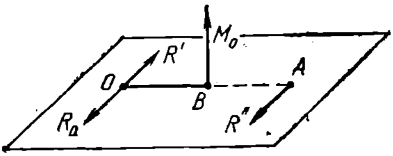
Биз 16-§ да кўрдикки, текисликдаги кучлар системасини R_0 бош вектор ва M_0 бош момент билан алмаштириш мумкин. Хусусий ҳолларни кўриб чиқайлик:

1. $\vec{R}_0 = 0$; $\vec{M}_0 = 0$ кучлар системасининг бош вектори ва келтириш марказига нисбатан бош момент нолга тенг бўлса, кучлар ўзаро бир-бирини мувозанатлаган бўлади.

2. $\vec{R}_0 = 0$; $M \neq 0$ бош вектор нолга тенг ва келтириш марказига нисбатан бош момент нолга тенг эмас. Бу ҳолда кучлар системаси жуфт кучлар билан алмашади. Бу жуфтнинг моменти келтириш марказига нисбатан олинган бош моментга тенг.

3. $\vec{R}_0 \neq 0$, $\vec{M}_0 = 0$. Кучлар системаси тенг таъсир этувчи куч ҳолига келтиради, яъни $R_0 = R$ бўлиб, R нинг қўйилиш нуқтаси келтириш марказида бўлади.

4. $R_0 \neq 0$; $M = M_0 \neq 0$ бу ҳолда ҳам кучлар системасини тенг таъсир этувчи куч билан алмаштириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, M_0 ни жуфт R', R'' билан алмаштирайлик. R', R'' ни шундай танлаймизки, $|R'| = |R''| = R_0$ ва $R_0 \perp M_0$ га тенг бўлсин (50- расм). R' ва R_0 ўзаро бир- бирини мувозанатлаган кучларни ташлаб юборамиз. Натижада фақат R'' куч қолди, бу эса тенг таъсир этувчи куч бўлади. Шундай қилиб, текисликдаги ихтиёрий кучлар системасини тенг таъсир этувчи кучлар билан ёки моментни келтириш марказига нисбатан бош моментга тенг бўлган жуфт кучлар билан алмаштириш мумкин.



50- расм.

18- §. Текисликдаги кучларнинг мувозанат шартлари

Текисликдаги ихтиёрий кучлар системасини мувозанатда бўлишининг иккита шарти бор:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{0i} = 0. \tag{18.1}$$

$$\vec{R}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \tag{18.2}$$

(18.2) формуладаги R_0 модулини кучлар проекциялари орқали ёзсак:

$$R_0 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \tag{18.3}$$

Бундан

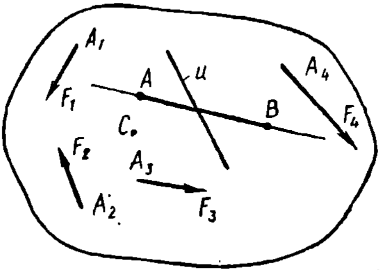
$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}. \qquad (18.4)$$

$$F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}. \qquad (18.)$$

Охирги учта ифодани ҳисобга олсак (18.1) ва (18.2) ни қуйидаги учта тенглама шаклида ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_{0i} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_{xi} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} M_{yi} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.6)$$

(18.6) даги учта тенглама текисликдаги кучларни мувозанатда бўлишининг асосий мувозанат тенгламалари дейилади. (18.6) тенглама учун келтириш марказларини ва координата ўқларини ихтиёрий танлаш мумкин. Мувозанат тенгламаларини яна қуйидаги шаклларда ёзиш мумкин (51-расм):



51- расм.

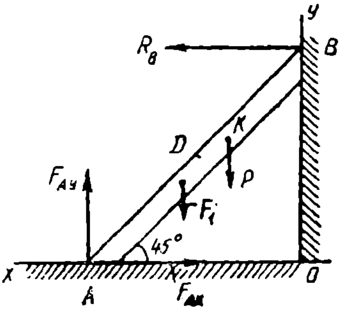
$$\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0 \quad \sum M_{Bi} = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} F_{Ui} = 0 \qquad (18.7)$$

ёки

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad \sum M_{Bi} = 0, \quad \sum_{Ci} = 0. \qquad (18.8)$$

(18.7) ва (18. 8) тенглама текисликдаги ихтиёрий кучларнинг мувозанат тенгламалари ҳисобланади. (18.8) даги тенгламаларда учта A, B ва C нуқта бир тўғри чизиқда ётмаслиги керак. (18. 7) тенгламада $\sum F_{Ui}$ кучларнинг u ўқдаги проекцияларининг йиғиндисидир. Бу ерда u ўқи AB чизиққа перпендикуляр бўлмаганда (18.7) шарт бажарилади.

Шундай қилиб, текисликдаги кучларнинг мувозанат тенгламалари сони учта эканлиги аниқланди. Бу тенгламалар ёрдамида текисликдаги статика масалаларини номаълумлар сони учтадан ортиқ бўлмаса ечиш мумкин.



52- расм.

11- мисол (4.13). Бир жинсли *AB* нарвон силлиқ деворга горизонтга нисбатан 45° остида қўйилган. Нарвоннинг оғирлиги 20 кН. *D* нуқтада оғирлиги 60Н бўлган жисм турибди. Агар $AD = \frac{1}{3} \cdot AB$ ва $AB = l$ бўлса, нарвоннинг *A* таянчга ва деворга берадиган босими қанчага тенг бўлади (52- расм).

Ечиш. *A* нуқтадаги босим кучларини—F_{AY} ва—F_{AX} реакция кучлари билан, *B* нуқтадаги босим кучини девор силлиқ бўлгани учун фақат R_B реакция кучи билан алмаштирамиз. Жами F_{AX}, F_{Ay}, F_1, P ва R_B дан иборат бўлган бешта куч ҳосил бўлади. (18.6) мувозанат тенгламаларини қўллаймиз:

$$\sum M_{Ai} = —F_1 \cdot AD \cos 45° — P \cdot AK \cos 45° + R_Б \cdot AB \cos 45° = 0,$$

$$\sum F_{Xi} = -F_{AX} + R_B = 0,$$

$$\sum F_{yi} = F_{Ay} - F_1 - P = 0.$$

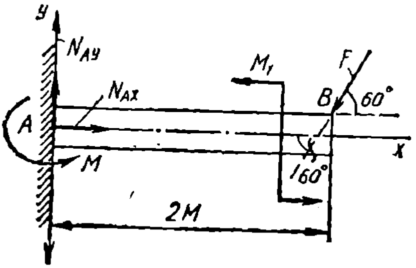
Бу тенгламаларнинг биринчисидан R_B ни топамиз:

$$R_B = \frac{F_1 \cdot AD + P \cdot AK}{AB} = \frac{20 + 10}{1} = 30\ \text{Н}.$$

Иккинчи ва учинчи тенгламалардан қуйидагилар топилади:

$$F_{AX} = R_B = 30\ \text{Н},$$
$$F_{Ay} = F_1 + P = 80\ \text{Н}.$$

Босим кучлари топилган реакция кучларига нисбатан тескари йўналгандир.



53- расм.

12- мисол. 53- расмда кўрсатилган ғўланинг маҳкамланган жойндаги реакциялари топилсин. Ғўлага горизонт билан 60° бурчак остида 2 кН куч ва моменти 3кН·м бўлган жуфт кучлар таъсир қилади. Ғўланинг узунлиги 2 м га тенг.

Ечиш. Мувозанат тенгламаларини тузамиз:

$$\sum F_{Xi} = N_{AX} - F\cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{yi} = N_{Ay} - F\sin 60^\circ = 0,$$

$$\sum_{Ai} = + M + M_1 - FAB\cdot\sin 60^\circ = 0.$$

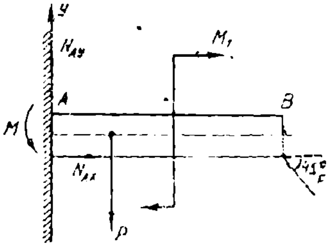
Бу тенгламалардан қуйидагилар келиб чиқади:

$$N_{AX} = F\cos 60^\circ = 2\cdot 0{,}5 = 1\text{кН}$$

$$N_{Ay} = + F\sin 60^\circ = - 2\cdot 0{,}867 = + 1{,}73\text{кН}$$

$$M = - M_1 + F\cdot AB\sin 60^\circ = 3 - 2\cdot 2\cdot 0{,}86 = - 0{,}47\text{кНм}$$

Шундай қилиб, $N_{\Delta X} = 1$кН, $N_{Ay} = 1.73$кН ва $M = 0{,}47$ Н·м га тенг.



54- расм.

13- мисол. 54- расмда кўрсатилган консоль балкасининг реакциялари топилсин. Консал балкасига 45° бурчак остида 4кН. куч, моменти 2кнм бўлган жуфт кучлар ва консоль балканинг 20кН оғирлиги таъсир қилади. Консоль узунлиги 4м. га тенг.

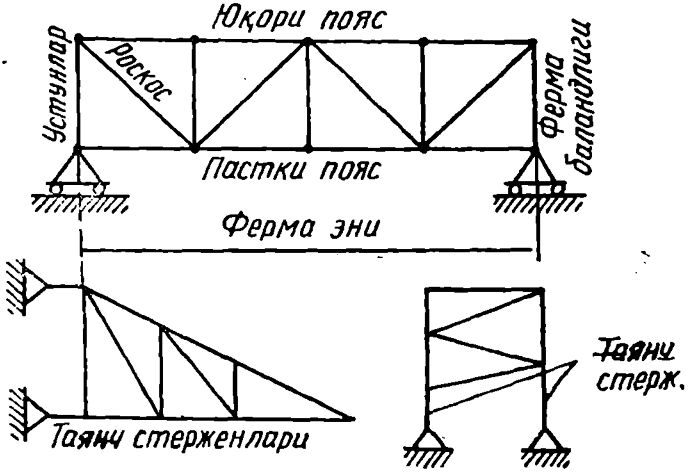
Жавоби: 0,73кН,
0,53 Н·м.

V БОБ. ФЕРМАЛАР

19- §. Фермалар тўғрисида асосий тушунчалар Фермаларни ҳисоблаш масаласи

Стерженларни шарнирлар ёрдами билан туташтирилган геометрик ўзгармас (деформацияланмайдиган) конструкциялар *фермалар* дейилади.

Иккитадан кам бўлмаган стерженларнинг кесишиш нуқтаси *тугунлар* дейилади. Стерженларга қўйилган кучлар тугунларга қўйилган деб қаралади, чунки тугунларда эркин шарнирлар ўрнатилган ва бу шарнирларда маҳкамланган стерженлар эркин ўқлар атрофида айланиши мумкин. Ферма таянадиган тугунлар *таянч тугунлар* дейилади. Агар ферма стерженларининг ҳамма ўқлари бир текисликда ётса *текис ферма* дейилади. Текис ферманинг юқори контуридаги стерженлар *юқори пояс,* пастдаги стерженлар *пастки пояс* дейилади (55-расм). Вертикал стерженларга *устунлар,* қияларига — *роскослар* дейилади. Ферма таянадиган стерженлар *таянч стерженлар* деб аталади.



55- расм.

Фермалар *статик аниқ* ва *статик аниқмас бўлиши* мумкин. Агар ферманинг биронта стержени олиб ташланганда, унинг бикрлиги ўзгарса, статик аниқ ферма деб айтилади ва аксинча, агар фермадан биронта стерженини олиб ташланганда ферманинг бикрлиги ўзгармаса, *статик аниқмас ферма деб* юритилади. Масалан, тўрт бурчакдан иборат бўлган ферманинг иккита диагоналидан бирини олиб ташласак, бу ферманинг бикрлиги ўзгармайди. Демак, бу статик аниқмас фермадир.

Биз фақат статик аниқ фермаларни, ишқаланиш кучларини ҳисобга олмасдан (идеал ҳол) ташқи кучлар таъсирида стержень фақат чўзилади ёки қисилади, деб қараймиз. Ташқи кучлар таъсирида фермалардаги стерженларда бўладиган зўриқишларни ҳисоблаш фермаларнинг ҳисоблаш масаласини ташкил этади. Фермаларни график усулда (Кремона — Макевеал усули), тугунларни кесиш ва Риттер усуллари билан ҳисобланади.

20- §. Тугунларни кесиш усули

Бу усулда фермада фикран тугун кесиб олинади ва алоҳида қилиб чизилади. Ажратилган ҳар бир тугунда ташқи кучлар, реакция кучлари қўйилади ҳамда мувозанат тенгламалари қўлланилади. Саноқ бошида стерженларнинг қайси бирининг узилиши ёки қисилиши номаълум бўлганлиги учун шартли равишда стерженларнинг ҳаммаси чўзилади ва зўриқишлар тугунлардан чиққан деб қабул қилинади. Агар ҳисоблашдан кейин стерженларга қўйилган кучларнинг модули манфий ишорали бўлса, демак, бу стержень чўзилмайди, унга сиқувчи куч таъсир этган бўлади.

Стерженлардаги зўриқиш кучларини реакция кучлари билан алмаштириб масала ечилади. Бу реакция кучларининг модуллари стерженлардаги ички зўриқиш кучларига тенг.

Мувозанат тенгламаларининг сони текис фермалар учун иккига тенг бўлади. Шунинг учун номаълумлар сони ҳам иккита тенгламаларга

$$\sum F_{xi} = 0; \quad \sum F_{yi} = 0$$

тенг бўлиши керак. Текис фермалар учун бажарилган ҳисоблашлар тўғрилигини кучлар кўпбурчагини чизиш билан текширилади. Агар ҳисоблашлар тўғри бўлса, мувозанатдаги ферма учун кучлар кўпбурчаги ёпиқ бўлади.

Фермадаги айрим стерженга бўладиган зўриқиш нолга тенг бўлади. Бундай стерженлар *нолинчи стерженлар* дейилади.

Текис фермаларда нолинчи стерженлар, ҳисоблашларни бажармасдан туриб, қуйидаги леммалар ёрдамида топилади:

1- лемма. *Агар текис ферманинг юкланмаган тугунида иккита стержень кесишса, бу стерженлардаги зўриқишлар нолга тенг бўлади* (56- расм).

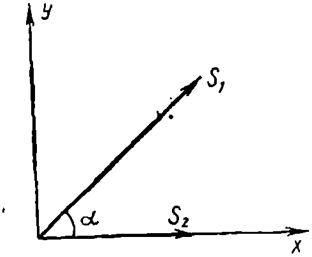
Расмда стерженлар A нуқтада кесишади:

$$\sum F_{xi} = S_1 \cos\alpha + S_2 = 0.$$

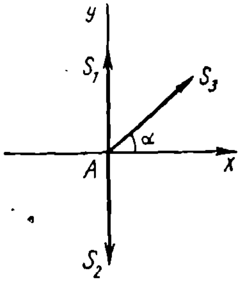
$$\sum F_{yi} = S_1 \sin\alpha = 0.$$

Бу тенгламалардан $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, яъни ҳақиқатан ҳам A нуқтада кесишган S_1 ва S_2 зўриқишлар нолга тенг.

2- лемма. *1 ва 2 стерженлардаги зўриқишлар бир-бирига тенг* (57- расм). Стерженлардаги зўриқишлар S_1, S_2, S_3 бўлса, 18- § га асосан:



56- расм.



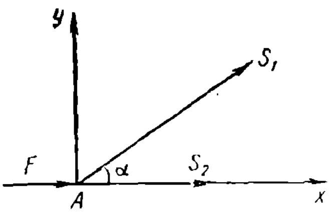
57- расм.

$$\sum F_{xi} = S_3 \cos\alpha = 0.$$

$$\sum F_{yi} = S_1 - S_2 + S_3 \sin\alpha = 0.$$

Бу тенгламалардан $S_3 = 0$ ва $S_1 = S_2 = 0$ ҳосил бўлади.

3- лемма. *Агар текис ферманинг тугунида иккита стержень кесишган бўлиб, шу тугунга таъсир чизиғи стерженлардан бирининг ўқининг давомида бўлган ташқи куч таъсир этса, шу стержендаги зўриқиш ташқи куч модулига тенг ва иккинчи стержендаги зўриқиш эса нолга тенг.*



58- расм.

Стерженлардаги зўриқишлар S_1, S_2, ташқи куч F бўлсин (58- расм). Бу ҳолда мувозанат тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\sum F_{xi} = F + S_2 + S_1 \cos\alpha = 0.$$

$$\sum F_{yi} = S_1 \sin\alpha = 0.$$

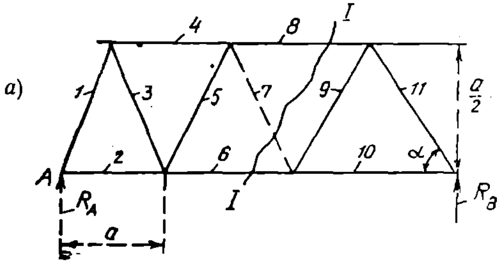
Булардан $S_1 = 0$; $S_2 = -F$ тенглик келиб чиқади.

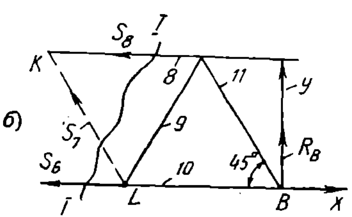
21-§. Фермаларни кесиш усули (Риттер усули)

Бу усулда ферма фикран бирон сирт билан кесилади. Кесилган қисм фермадан алоҳида қилиб чизилади, қолган қисми эса фикран ташлаб юборилади. Ферманинг фикран ташланган қисмининг қолган қисмига таъсирини зўриқиш кучлари билан алмаштирилади. Бу зўриқиш кучларининг йўналиши фермадан фикран ажратилган қисмдан ташланган қисмга қараб йўналган, деб қабул қилинади.

59- расмда кўрсатилган текис фермада ташқи куч таъсир этганда A ва B таянчлардаги реакция кучлари $R_A = 50$кН, $R_B = 30$кН бўлсин. Ферманинг 6, 7 ва 8 стерженларидаги зўриқишлари S_6, S_7 ва S_8 топилсин.

Ҳамма стерженлар чўзилади деб фараз қиламиз, агар зўриқиш минус ишора билан чиқса, стерженлар қисилади. Фермани 1 — 1 сирт билан кесамиз ва ўнг томонини (59- *б* расм) алоҳида чизамиз. Чап томонининг таъсирини S_6, S_7 ва S_8 зўриқишлар билан алмаштирамиз. Бу ҳолда куч моментлари (мувозанат тенгламалари 18- § га асосланиб тузилади) тугунларга нисбатан олинади. Бу тугунлар, масалан, K, L . . . нуқталар **Риттер нуқталари** дейилади. S_8 нинг Риттер нуқтасининг K га нисбатан мувозанат тенгламасини тузиб аниқлаймиз:





59- расм.

$$\sum M_{ki} = -S_6\cdot {}^{a}/_{2} + R_B\cdot 1{,}5\cdot a = 0$$

$$S_6 = 3R_B = 90\,\text{кН}.$$

S_7 ни $\sum F_{yi} = 0$ шартидан топамиз:

$$\sum F_{yi} = S_7 \sin 45° + R_B = 0$$

$$S_7 = -\frac{R_B}{\cos 45°} = -\frac{30}{0{,}7} = -43\text{к Н}.$$

Риттер нуқтаси L га нисбатан эса

$$\sum M_{ui} = S_B\cdot {}^{a}/_{2} + R_B a = 0.$$

$$S_8 = -\frac{2R_8}{1} = -60\text{к Н}.$$

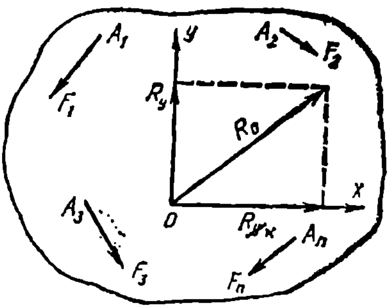
Демак, S_6 стержень чўзилади, S_7 ва S_8 стерженлар қисилади. Шундай усул билан фермаларни ҳисоблаш **Риттер усули** дейилади.

22-§. Ричаг. Силкинишдаги турғунлик. Турғунлик коэффициенти

Қўзғалмас айланиш ўқига эга бўлган ва шу ўққа перпендикуляр бўлган текисликда ётган кучлар таъсиридаги қаттиқ жисм *ричаг* дейилади.

Ричагнинг айланиш ўқи O нуқтадан ўтиб (60-расм), расм текислигига перпендикуляр йўналган бўлсин. Бу ҳолда расм текислиги ричаг ўқига перпендикуляр бўлади. Таъсир қилувчи F_1, F_2, . . . , F_n кучлар шу текисликнинг A_1, A_2, . . . , A_n нуқталарига қўйилган. O нуқта таянч нуқтаси деб юритилади.

Ўқнинг R_0 реакция кучи берилган F_1, F_2, . . . , F_n кучларни мувозанатлайди ва шу кучлар ётган текисликда жойлашади. Лекин R_0 нинг йўналиши маълум эмас. Бу ҳолда мувоза-



60-расм.

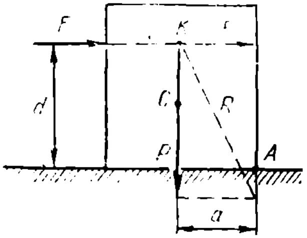
нат тенгламалари 18-§ га асосан қуйидагича ёзилади (реакция кучи R_x ва R_y ларга ажратилади):

$$R_x + \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0. \tag{22.1}$$

$$R_y + \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0. \tag{22.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{0i} = 0. \tag{22.3}$$

Бу ерда R_x ва R_y ўқнинг реакция кучи $|R_0|$ ни X ва Y ўқларидаги проекциялари; $\sum F_{xi}$ ва $\sum F_{yi}$ ричаг ўқига таъсир қиладиган барча кучларни X ва Y ўқларидаги проекцияларининг йиғиндилари; $\sum M_{0i}$ — ричагга таъсир қиладиган кучларнинг таянч нуқтасига нисбатан моментларининг йиғиндиси.



61- расм.

Мувозанат тенгламаси (22.3) дан ричагнинг силкинишидаги турғунлик шарти аниқланади. Масалан, оғирлиги P бўлган тўғри параллелопипедни силжитиш ёки A нуқтага нисбатан ағдариши ёки силкитиб юбориши мумкин (61- расм). F кучи ағдарувчи ёки силкитувчи куч бўлиб, P кучи эса сақлаб турувчи моментларни ҳосил қилади. Бу моментларни M_{OFD} ва $M_с$ деб белгиласак, (22.3) асосида A нуқтага нисбатан мувозанат шарти қуйидагича бўлади:

$$\sum M_{0i} = P \cdot a - F \cdot d = 0$$

ёки

$$P \cdot a = F \cdot d.$$

Охирги ифода учун белгилашлар киритамиз: $M_с = P \cdot a$ ва $M_{OFD} = F \cdot d$.

$$M_с = M_{OFD} \tag{22.4}$$

шаклида бўлиши кўриниб турибди.

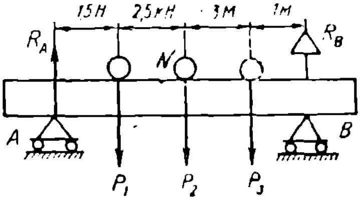
Агар $M_c > M_{OFD}$ бўлса, ричаг турғун ҳолатда, $M_c = M_{OFD}$ бўлса, турғунлик чегарасида бўлади.

Оғдарилишдаги турғунликни сақлаб турувчи моментини оғдарувчи моментга бўлган нисбати **турғунлик (барқарорлик) коэффициенти** дейилади. Агар турғунлик коэффициентини K билан белгиласак,

$$K = \frac{M_c}{M_{OFD}}. \tag{22.5}$$

Турғун ҳолатда $K > 1$, турғунлик чегарасида эса $K = 1$ бўлади.

Жисмнинг F куч таъсирида турғун ёки турғунмас ҳолатда (ағдарилиш ҳолатида) бўлишини график усулда ҳам аниқлаш мумкин. Бунинг учун F ва P кучларнинг R тенг таъсир этувчисини параллелограмм қоидасига асосан топамиз. Агар R нинг таъсир чизиғи A нуқтадан чапда бўлса, (61-расмга қаранг) жисм турғун ҳолатда, A нуқтадан ўтса, турғунлик чегарасида за A дан ўнг томонда бўлса, жисм ағдарилиш ҳолатида бўлади.



62- расм.

14-мисол. (5. 1) Кенглиги 8 м бўлган болорга оғирликлари 2кН, 3кН ва 1 кН бўлган учта юк қўйилган. Болорнинг оғирлигини ҳисобга олмай, таянчлардаги реакция кучлари аниқлансин (62- расм).

Ечиш. Кучлар параллел бўлганликлари учун ва улар бир текисликда ётганлигига асосланиб қуйидаги ёзилади:

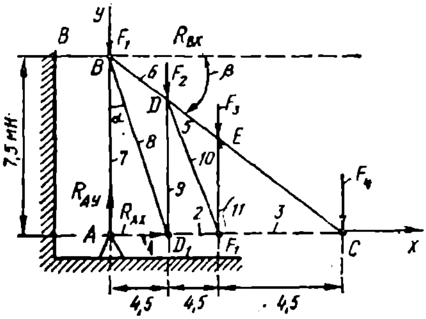
$$R = P_1 + P_2 + P_3 = 6\text{кН}.$$

Қўйилиш нуқтасини ифодалайдиган AN кесма қуйидаги $AN = \frac{P_1 \cdot 1{,}5 + P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 7}{R}$ формуладан ҳисоб қилинади.

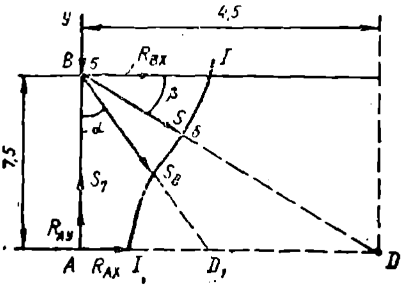
$$AN = \frac{2 \cdot 1 - 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 7}{6} = \frac{22\ \text{м}}{6} = 3{,}7\ \text{м}.$$

Таянч реакциялари қуйидаги тенгламалардан топилади:

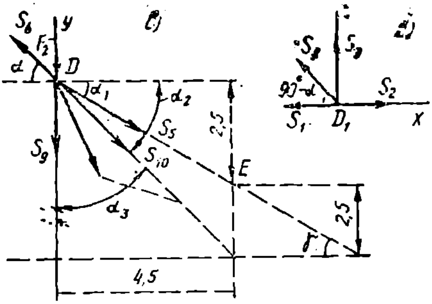
$$R_A + R_B = R. \quad \frac{R_A}{R_B} = \frac{AB - AN}{AN}.$$



а)



б)



Бу тенгламалардан: $R_A \cdot AN = R_B \cdot AB - R_B \cdot AN$ ёки $(R_A + R_B) \cdot AN = R_B \cdot AB$.

Бундан

$$AN = \frac{R_B}{R_A + B_B} AB$$

$$R_B = \frac{R \cdot AN}{AB} = \frac{6 \cdot 11}{3 \cdot 8} = \frac{33}{3 \cdot 4} = \frac{11}{4} = 2{,}75 \text{ кН}$$

$$R_A = R - R_B = 6 - 2{,}75 = 3{,}25 \text{кН}.$$

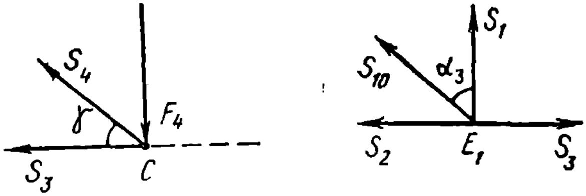
15-мисол. (5.15) 63-расмда кўрсатилган осма текис ферманинг B, D, E, C нуқталарига $F_1 = 1$кН, $F_2 = 2$кН, $F_3 = 2$кН, $F_4 = 1$кН кучлар таъсир қилади. Таянч нуқталаридаги реакциялар ва ҳар бир стерженлаги зўриқишлар топилсин.

Ечиш. A ва B нуқталардаги реакция кучларининг проекциялари R_{AX}, R_{Ay} ва R_{BX} бўлади. A нуқтани координата боши қилиб, X ва Y ўқларини ўтказамиз.

A нуқтага нисбатан куч моментлари учун мувозанат тенгламасини тузамиз:

$$\sum M_{Ai} = -F_2 \cdot 4{,}5 - F_3 \cdot 9 - F_4 \cdot 13{,}5 - R_{BX} \cdot 7{,}5 = 0,$$

бундан



д) е)

63- расм.

$$R_{BX} = \frac{2\cdot 4{,}5 + 2\cdot 9 + 1\cdot 13{,}5}{7{,}5} = \frac{40{,}5}{7{,}5} = -5{,}4\text{кН}.$$

B нуқтага нисбатан

$$\sum M_B = -F_2\cdot 4\cdot 5 - F_3\cdot 9 - F_4\cdot 13{,}5 + R_{AX}\cdot 75 = 0.$$

$$R_{AX} = \frac{9 + 18 + 13\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{40\cdot 5}{70\cdot 5} = 5{,}4\text{ кН}.$$

C нуқтага нисбатан

$$\sum M_a = F_1\cdot 13{,}5 - R_{BX}\cdot 7{,}5 + F_2\cdot 9 + F_3\cdot 4{,}5 - R_{AY}\cdot 13{,}5 = 0.$$

$$R_{AY} = \frac{13\cdot 5 - 5\cdot 4\cdot 7{,}5 + 2\cdot 9 + 2\cdot 4\cdot 5}{13{,}5} = 6\text{ кН}.$$

Демак, $R_{AY} = 6$ кН.

63- *а* расмдан:

$$\sin\alpha = \frac{4{,}5}{8{,}7} = 0{,}52;\ \alpha = 31°.$$

$$\cos\alpha = 0{,}86;$$

$$\sin\theta = 0{,}47;\ \beta \approx 30°\ \cos\beta = 0{,}88.$$

$$\sin(\alpha+\beta) = 0{,}86. \qquad \sin\beta = \frac{2{,}5}{\sqrt{(2{,}5)^2 + (4.5)^2}} = 0{,}496.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = 0{,}515.$$

Фермани 1 — 1 текислик билан кесамиз (63- *б* расм).

$$\sum M_{Ai} = -R_{BX}\cdot 7{,}5 - S_6\, 7{,}5\cdot \sin\beta - S_B \sin\alpha\cdot 7{,}5 = 0.$$

$$\sum M_{Di} = -R_{AY}\cdot 4{,}5 + F_1\cdot 4{,}5 - R_{BX}\cdot 2{,}5 - S_6\cdot BD_1 \cos(\alpha +$$
$$+\beta) = 0.$$

Бу охирги тенгламаларнинг иккинчисидан

$$S_6 = \frac{4{,}5\,F_1 - 7{,}5\,R_{BX} - 4{,}5R_{AY}}{BD_1 \cos(\alpha + \beta)} = 4{,}1\text{кН}.$$

Биринчисидан

$$S_8 = \frac{-7.5R_{BX} - S_6 \cdot 7{,}5 \sin\beta}{7{,}5 \cdot \sin\alpha} = -3{,}5\,\text{кН}.$$

Энди D_1 нуқтани кесиб оламиз:

$$\sum F_{Xi} = -S_1 - S_8 \sin\alpha + S_2 = 0$$

ёки

$S_1 = R_{AX}$ бўлганидан

$$R_{AX} - S_8 \sin\alpha = -S_2.$$

$$S_2 = S_8 \cdot \sin\alpha - R_{AX} = -3{,}6\,\text{кН};$$

$$\sum F_{yi} = S_8 \cdot \cos\alpha + S_9 = 0; \quad S_9 = S_8 \cos\alpha = -3\,\text{кН}.$$

D нуқтани ажратамиз: (63 в-расм)

$$\sum F_{xi} = S_5 \cos\alpha_1 - S_6 \cos\alpha + S_{10} \cos\alpha_2 = 0.$$

$$\sum F_{yi} = S_6 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha_1 - F_2 - S_{10} \cdot \sin\alpha_2 - S_9 = 0$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{2{,}5}{5{,}1} = \approx 0{,}49.$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{5{,}5}{6{,}7} = 0{,}75.$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{4{,}5}{5{,}1} = 0{,}9; \qquad \cos\alpha_2 = \frac{4{,}5}{6{,}5} = 0{,}70.$$

$$S_5 = \frac{S_6 \cos\alpha - S_{10} \cdot \cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}.$$

Бу ифодани $\sum F_{yi} = 0$ тенгламага қўйиб

$$S_6 \sin\alpha - \frac{S_6 \cos\alpha - S_{10} \cdot \cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \sin\alpha_1 - F_2 - S_{10} \sin\alpha_2 - S_9 = 0$$

ёки

$$0{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot S_6 - (0{,}9\,S_6 - 0{,}75S_{10})\,0{,}5 - 0{,}9F_2 - 0{,}75 \cdot S_{10} + 3 = 0$$

бу тенгламадан

$$S_{10} = \frac{1,2}{0,45} = 2,7\,\text{кН}$$

ва S_5 учун қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$S_5 = \frac{0,9 \cdot 4,1 - 0,7 \cdot 2,7}{0,9} = \frac{3,09 - 1,89}{0,9} = \frac{1,8}{0,9} = 2,06\,\text{кН}.$$

E нуқта учун (63- г расм):

$$\sum F_{xi} = -S_2 - S_{10} \cdot \sin\alpha_3 + S_3 = 0. \qquad \sum F_{yi} = S_{10} \cdot \cos\alpha - S_{11} = 0.$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{4,5}{6,5} = 0,7. \quad \alpha_3 = \alpha_2; \quad \cos\alpha_3 = \frac{5}{6,5} = 0,75.$$

$$S_{11} = -S_{10}\cos\alpha_3 = 0,75 \cdot 2,7 = -2,02\,\text{кН}.$$

$$S_3 = S_2 + S_{10}\sin\alpha_3 = -3,6 + 0,7 \cdot 2,7 = -1,8\,\text{кН}.$$

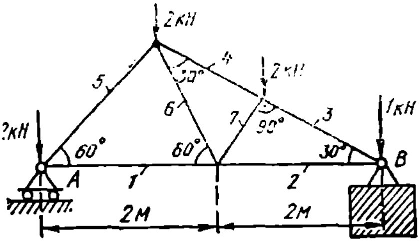
Ниҳоят, *C* нуқта учун (63- д расм).

$$\sum F_{xi} = -S_3 - S_4\cos\alpha = 0.$$

$$S_4 = \frac{S_3}{\cos\alpha} = \frac{1,8 \cdot 5,1}{4,5} = \frac{9 \cdot 1,8}{4,5} = 2,06\,\text{кН}.$$

Шундай қилиб, топилган қийматларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

Стерженлар номери	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12
Зўриқишлар, кН	—5,4	—3,6	—1,8	2,06	2,06	4,1	—6	3,5	—3,0	2,7	—2



64- расм.

Бу ерда $S_1 = -R_{AX}$ ва $S_2 = -R_{AY}$ деб олиниши кераклигини эслатиб ўтамиз.

16- мисол. (5.7) 64- расмда кўрсатилган текис фермадаги таянч реакциялари ва стерженлардаги зўриқишлар топилсин.

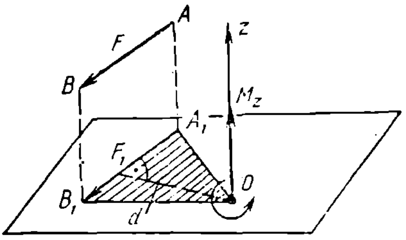
Жавоб:

Стержен номери	1	2	3	4	5	6	7
Зўриқишлар, кН	1,3	3,03	−3,5	−2,5	−2,5	1,73	−1,73

VI БОБ. ИХТИЕРИЙ КУЧЛАР СИСТЕМАСИ

23- §. Ўққа нисбатан куч моменти. Нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан куч моментлари орасидаги боғланиш

Энди F кучнинг Z ўқига нисбатан моментини аниқлаш учун F кучнинг Z ўқига перпендикуляр бўлган 1 текисликка проекцияси F_1 ни аниқлаймиз (65- расм). Z ўқи билан 1 текислик O нуқтада кесишсин. F_1 кучнинг O нуқтага нисбатан моменти F кучининг Z ўқига нисбатан моментини беради.

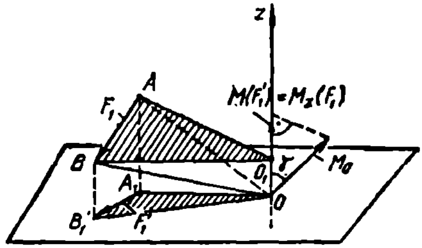


65- расм.

Берилган F кучнинг Z ўқига нисбатан моменти деб, плюс ёки минус ишораси билан олинган, F кучнинг Z ўқига перпендикуляр текисликдаги проекцияси F_1 нинг модулини шу F кучнинг ўқ ва текисликни кесишган O нуқтасига нисбатан елкаси d га бўлган кўпайтмасига тенг бўлган катталикка айтилади:

$$M_z = \pm F_1 d. \qquad (23.1)$$

Ўққа нисбатан куч моментини мусбат деб олинади, агар M охиридан қараганда F куч проекцияси 1 текисликни соат мили айланишига тескари йўналишда айлантиришга интилса, акс ҳолда M манфий бўлади.



66- расм.

M ни учбурчак O_1A_1B нинг иккиланган юзига тенглиги ҳам 14-§ нинг (14.4) формуласига асосан бизга маълум. M икки ҳолда нолга тенг бўлади:

1. Агар кучнинг таъсир чизиғи Z га параллел бўлса, F нинг I текисликка проекцияси нуқтага тенг бўлади, яъни нолга тенг бўлади, шунинг учун $F_1=0$ ва демак, $M=0$.

2. Агар F_1 куч чизиғи ва Z ўқи бир-бирини кесса, бу ҳолда F кучининг елкаси—$d=0$ ва, демак, $M_z=0$.

Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: куч ва ўқ бир текисликда ётса, бў ўққа нисбатан куч моменти нолга тенг бўлади.

Энди нуқтага нисбатан куч моменти билан шу нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан куч моменти орасидаги боғланишни кўриб чиқайлик. 14-§ даги (14.4) формулани ҳисобга олсак (66- расм):

$$M_0 = 2_{\Delta AOB};\quad M_z = 2S_{\Delta A_1O_1B_1}. \tag{23.2}$$

Расмдан кўринадики, учбурчак AOB нинг I текисликдаги проекцияси учбурчак A_1OB_1 дир. Учбурчак A_1OB_1 нинг юзи учбурчак AOB нинг юзини A_1OB_1 билан AOB орасидаги бурчак косинусига бўлган кўпайтмасига тенг:

$$S_{\Delta AOB}\cos\gamma = S_{\Delta A_1OB_1}. \tag{23.3}$$

Бу тенгламанинг иккала томонини 2 га кўпайтирамиз:

$$2S_{\Delta AOB}\cdot\cos\gamma = 2S_{\Delta A_1O_1B_1}. \tag{23.4}$$

Агар (23.2) ни ҳисобга олсак, (23.4) қуйидагича ёзилади:

$$M_z = M_0\cdot\cos\gamma. \tag{23.5}$$

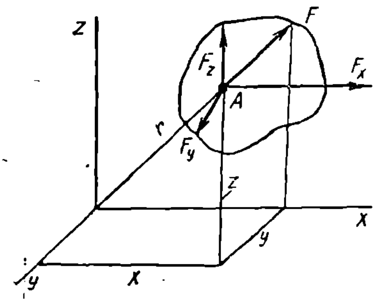
$\gamma=0$ бўлганда $M_z=M_0$.

Бу (23.5) формуладан нуқтага нисбатан M куч моментнинг шу нуқтадан ўтадиган ўқдаги проекцияси кучнинг шу ўққа нисбати M моментига тенг, деб хулоса чиқарамиз.

Агар Z ўқи устидаги O_1 нуқтасига нисбатан моментини олсак, бу момент учбурчак O_1AB юзининг иккиланганига тенг. Иккала O ва O_1 нуқталарга нисбатан F куч моментлари AOB ҳамда O_1AB учбурчакларни 1 текисликдаги проекциялари орқали аниқланади. Аммо AOB ва $O_1\ AB$ иккала учбурчакнинг 1 текисликдаги проекциялари учбурчак OA_1B_1 нинг юзига тенг. Шунинг учун F кучнинг Z ўқида ётган ҳар хил нуқталарига нисбатан моментларининг Z ўқидаги проекциялари айнан бир хил қийматга, яъни F кучнинг Z ўқига нисбатан моментига тенг бўлади.

Агар F куч Z ўқига перпендикуляр бўлган текисликда жойлашган бўлса, $\cos\gamma = 1$ ва $M_z = \pm M_0$ бўлади.

24- §. Координата ўқларига нисбатан куч моменти



67- расм.

Жисмнинг A нуқтасига F куч таъсир этсин. Шу кучнинг X, Y ўқларига нисбатан куч моментларини топамиз. Агар A нуқтанинг координаталари x, y, z, F кучнинг проекциялари F_x, F_y, F_z бўлса (67- расм), бу кучларнинг ўқларга нисбатан моментларини (23. 1) га асосан аниқлаб, 1-жадвални ёзамиз. Жадвалнинг иккинчи, учинчи, тўртинчи устунларини алоҳида-алоҳида қўшсак, F кучнинг x, y, z ўқларидаги F_x, F_y, F_z проекцияларининг ўқларига нисбатан моментларининг йиғиндиларини, яъни M_x, M_y ва M_z ни ҳосил қиламиз.

1- жадвал.

Кучлар	M_x	M_y	M_z
F_x	0	$F_x \cdot Z$	$-F_x \cdot Y$
F_y	$-F_y \cdot Z$	0	$F_y \cdot X$
F_z	$F_z \cdot y$	$-F_z \cdot X$	0

Шундай қилиб, жадвалдан M_x, M_y ва M_z учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$M_x = \sum M_{xi} = F_z \cdot y - F_y \cdot Z,$$
$$M_y = \sum M_{yi} = F_x \cdot Z - F_z \cdot X. \qquad (24.1)$$
$$M_z = \sum M_{zi} = F_y \cdot X - F_x \cdot Y.$$

(24. 1) дан фойдаланиб F кучнинг ўқлардаги F_x, F_y, F_z проекцияларини X, Y, Z координата ўқларига нисбатан моментларининг йиғиндиси M_x, M_y, M_z ни аниқланади. Бу (24.1) га куч моментларининг координата ўқларига нисбатан **аналитик ифодалари** деб ҳам айтилади. Агар $\vec{r} + x\vec{i} + y\vec{i} + Z\vec{k}$ ва $\vec{F} = F_x\vec{i} \cdot F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ ва

$$\vec{M}_0 = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

эканлигини ҳисобга олсак, M_0 ни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$M_0 = \vec{r} \times \vec{F} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}. \qquad (24.2)$$

Векторлар алгебрасидан маълумки, векториал $\vec{r} \times \vec{F}$ кўпайтмани қуйидаги детерминант орқали ёзилади:

$$\vec{M}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

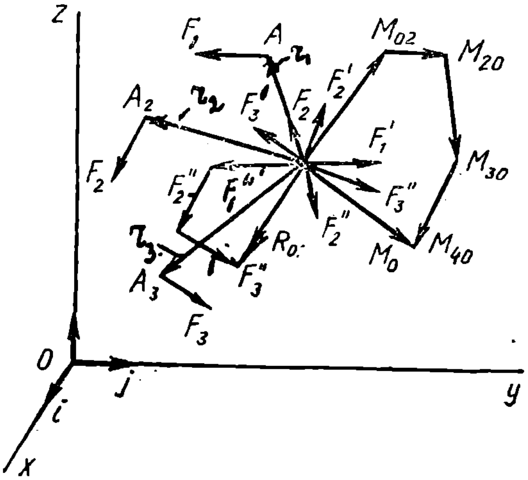
ёки

$$\vec{M}_0 = (F_z \cdot y - F_y \cdot Z) i - (F_z \cdot x - F_x \cdot Z)\vec{j} + (F_y \cdot X - - F_x \cdot Y)\vec{k}. \qquad (24.3)$$

Агар (24. 2) ни (24. 3) билан тенглаштирсак, айнан (24.1) ни ҳосил қиламиз, яъни F кучнинг координата ўқларига нисбатан моментларининг ҳисоблаш формулаларини ҳосил қиламиз.

25- §. Ихтиёрий кучлар системасини берилган марказга келтириш

Қаттиқ жисмнинг A_1, A_2, A_3 . . . нуқталарига F_1, F_2 F_3 . . . кучлар таъсир этсин. Шу кучларни Пуансо методидан, 16- § ва 15- § дан фойдаланиб, берилган марказни



68- расм.

O нуқтага келтирамиз. Бундай ҳолда *O* нуқтада учта F_1'', F_2'', F_3'' куч ва учта F_1, F_1', F_2, F_2', F_3', F_3' жуфтлар ҳосил бўлади (68- расм). F_1, F_2, F_3 кучларнинг қўйилиш нуқталарининг радиус векторлари r_1, r_2, r_3 бўлсин. Бу F_1'', F_2'', F_3'' кучларнинг геометрик йиғиндиси бош вектори R_0 га тенг:

$$\vec{R}_0 = \vec{F}_1'' + \vec{F}_2'' + \vec{F}_3''. \qquad (25.1)$$

F_1, F_1', F_2, F_2' ва F_3, F_3' жуфтларни қўшиб шуларга эквивалент бўлган жуфт кучларни топамиз. F_1, F_1'; F_2'; F_2', F_3, F_3' қўшилган жуфтларнинг моментлари F_1, F_2, F_3 кучларнинг келтирган марказ *O* нуқтага нисбатан моментларига тенг, яъни

$$\vec{M}_{01} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1, \ \vec{M}_{02} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2, \ \vec{M}_{03} = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3. \qquad (25.2)$$

Бу қўшилган жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндиси эквивалент жуфтнинг моментига тенг бўлади:

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{10} + \vec{M}_{20} + \vec{M}_{30}. \qquad (25.3)$$

(25.3) га асосланиб айтиш мумкинки, қўшилган учта жуфтлар моментларининг геометрик йиғиндиси берилган учта кучнинг келтирилган O марказга нисбатан бош моментига тенг.

Бу хулосани фазода ихтиёрий жойлашган F_1, F_2, . . . , F_n кучлар системасига татбиқ этсак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{0i}. \tag{25.4}$$

Натижада (25.4) ифодалардан айтиш мумкинки, фазода ихтиёрий жойлашган кучлар системасини (қўйилиш нуқтаси О марказга жойлашган) бош векторга тенг бўлган битта куч ва моменти бош моментга тенг бўлган (барча кучларнинг O марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг бўлган) жуфт кучлар ҳолига келтириш мумкин.

Келтирилган O марказнинг вазияти бош вектор R_0 нинг модули ва йўналишига таъсир этмаса-да, M_0 бош моментнинг модули ва йўналишига таъсир этади.

Шундай қилиб, ҳамма вақт F_1, F_2, . . . , F_n куч системасининг марказларини O нуқтага бўлган битта R_0 бош вектор ва битта M_0 бош момент билан алмаштириш мумкин экан.

26- §. Фазовий кучлар системаси учун бош вектор ва бош момент

Қаттиқ жисмга ихтиёрий F_1, F_2, . . . , F_n кучлар системаси таъсир этаётган бўлсин. Ўтган параграфдан маълумки, бу кучларни келтирилган O марказга қўйилган R_0 бош векторга тенг бўлган битта куч ва моменти M_0 бош моментга тенг бўлган битта жуфт куч билан алмаштириш мумкин.

Энди R_0 ва M_0 векторларни проекциялар орқали ифодалаймиз. Агар R_0 нинг координата ўқларидаги проекциялари R_{ox}, R_{oy}, R_{oz} бўлса, маълумки,

$$\left.\begin{aligned} R_{ox} &= F_{1x} = F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} \\ R_{oy} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} \\ R_{oz} &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi} \end{aligned}\right\} \tag{26.1}$$

Иккинчи томондан R_0 векторининг модули R_{ox}, R_{oy}, R_{oz} шу кучлардан тузилган параллелопипеднинг катта диагоналига тенг:

$$R_0 = \sqrt{R_{0x}^2 + R_{oy}^2 + R_{oz}^2} \tag{26.2}$$

ёки

$$R_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} F_{xi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{yi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{zi}\right)^2}. \tag{26.3}$$

Бош вектор R_0 нинг йўналиши эса йўналтирувчи косинуслар орқали топилади:

$$\cos(\vec{R}_{0,1}\ \vec{i}) = \frac{R_{ox}}{R_0},$$

$$\cos(\vec{R}_{0,1}\ \vec{j}) = \frac{R_{oy}}{R_0},$$

$$\cos(\vec{R}_{0,1} \cdot \vec{k}) = \frac{R_{oz}}{R_0}. \tag{26.4}$$

Худди шундай кетма-кетлик билан бажарилган мулоҳазаларни, агар M_0 бош вектор учун ишлатсак, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy} + M_{nz}^2} \tag{26.5}$$

ёки

$$M_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} M_{oxi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{oyi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} M_{ozi}\right)^2}. \tag{26.6}$$

M_0 бош векторнинг йўналишини йўналтирувчи косинуслар орқали топамиз:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{M}_0, \vec{i}) &= \frac{M_{ox}}{M_0}, \\ \cos(\vec{M}_0, \vec{j}) &= \frac{M_{oy}}{M_0}, \\ \cos(\vec{M}_0, \vec{k}) &= \frac{M_{oz}}{M_0}. \end{aligned}\right\} \tag{26.7}$$

Агар ҳар бир F кучни ва шу кучни ифодалаган радиус вектор z_i нинг координата ўқларидаги проекциялари F_{xi} F_{yi}, F_{yi}, F_{xi}, x_i, y_i, z_i маълум бўлса, бу кучларнинг моментларининг M_{xi}, M_{yi}, M_{zi} проекцияларини (24.1) га асосан топамиз:

$$M_{xi} = F_{zi} \cdot Y_i - F_{yi} \cdot Z_i.$$
$$M_{yi} = F_{xi} \cdot Z_i - F_{zi} \cdot X_i. \qquad (26.8)$$
$$M_{zi} = F_{yi} \cdot X_i - F_{xi} \cdot Y_i.$$

Худди шундай бош моментнинг проекциялари M_x, M_y, M_z ни топамиз:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^{n} (F_{zi} \cdot y_i - F_{yi} \cdot z_i) \\ M_y &= \sum_{i=1}^{n} (F_{xi} Z_i - F_{zi} \cdot X_i) \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} (F_{yi} \cdot X_i - F_{xi} \cdot y_i) \end{aligned}\right\} \qquad (26.9)$$

27- §. Фазодаги ихтиёрий кучлар системасини янги марказга келтиришнинг мумкин бўлган ҳоллари

Маълумки, 25- § да кучлар системасини иккита вектор $\vec{R}_0$ ва $\vec{M}_0$ билан алмаштнриш мумкин. Шундай алмаштиришдаги хусусий ҳолларни кўриб чиқамиз. Бу ҳолларни 17- § дан фарқи, кучлар системасининг фазода эканлигидир.

1) $\vec{R}_0 = 0$; $\vec{M} = \vec{M}_0 = 0$. Кучлар системасини бош вектори ва келтирилган марказга нисбатан бош момент нолга тенг бўлса, қаттиқ жисмга қўйилган кучлар системаси ўзаро бир-бирини мувозанатлайди.

2) $R_0 = 0$; $M = M_0 \neq 0$. Кучлар системасининг бош вектори нолга тенг, лекин келтириш марказига нисбатан бош моменти нолга тенг эмас. Бу ҳолда кучлар системаси битта жуфт билан алмаштирилади. Бу жуфтнинг моменти келтирилган марказга нисбатан кучлар системасининг бош моментига тенг.

3) $\vec{R}_0 \neq 0$; $\vec{M} = \vec{M}_0 = 0$. Кучлар системасининг келтирилган марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, бу кучлар системаси келтирилган марказга қўйилган тенг таъсир этувчи куч билан алмаштирилади.

4) $\vec{R}_0 \neq 0$, $\vec{M} = \vec{M}_0 = 0$ ва $\vec{M}_0 \perp \vec{R}_0$ бўлса, бу ҳолда ҳам 17 - § дан маълумки, кучлар системаси тенг таъсир этувчига келтирилади, бироқ бу тенг таъсир этувчини қўйилиш нуқтаси

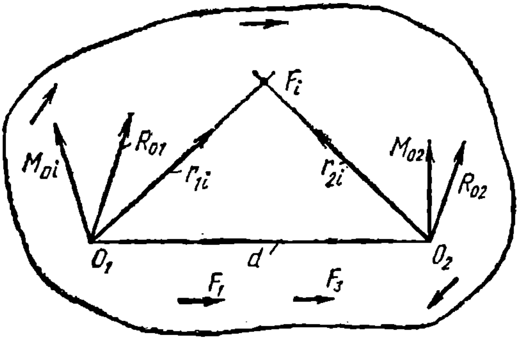
келтирилган марказдан ўтмайди (28- § да бу фикр исботланади).

5. $\vec{R}_0 \neq 0$; $\vec{M} = \vec{M}_0 \neq 0$ ва $\vec{M}_0$ билан $\vec{R}_0$ вектори ўзаро перпендикуляр эмас. Бу ҳолда кучлар системаси айқаш ҳолидаги иккита кучга ёки кучли винт-динама, яъни бош вектор ва бош момент ҳолига келтирилади.

28- §. Бош вектор ва бош моментларининг келтириш марказини танланишига боғлиқлиги

Қаттиқ жисмга F_1, F_2, . . . , F_n кучлар системаси таъсир этсин. Фазода ихтиёрий иккита O_1 ва O_2 келтириш марказларини танлаймиз (69- расм).

Кучлар системасининг O_1 ва O_2 келтириш марказларига нисбатан бош векторларини топамиз:



69- расм.

$$\vec{R}_{01} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad \vec{R}_{02} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (28.1)$$

Бундан кучлар системасининг бош вектори келтириш марказининг вазиятига боғлиқ эмас ёки келтириш марказига нисбатан бош вектор инвариант, яъни доимий қолади деган хулоса чиқади:

$$\vec{R}_0 = \text{const}. \qquad (28.2)$$

Шу O_1 ва O_2 келтириш марказларига нисбатан бош моментлар M_{01} ва M_{02} ни топамиз:

$$\vec{M}_{01} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{1i} \times \vec{F}_{1i},$$

$$\vec{M}_{02} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{2i} \times \vec{F}_{2i}. \qquad (28.3)$$

Расмдан

$$\vec{r}_{1i} = \vec{d} + \vec{r}_{2i}. \qquad (28.4)$$

(28.4) ни (28.3) га қўямиз:

$$\vec{M}_{01} = \sum (\vec{d} + \vec{r}_{2i}) \times \vec{F}_i = \sum \vec{d} \times \vec{F}_{2i} + \sum \vec{r}_{2i} \times F_{2i}. \qquad (28.5)$$

(28.5) нинг ўнг томонидаги биринчи ҳаднинг шаклини ўзгартирамиз:

$$\sum \vec{d} \times \vec{F}_i = \vec{d} \times \sum \vec{F}_i = \vec{d} \times \vec{R}_0.$$

Охирги ифодани ҳисобга олиб, (28.5) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\vec{M}_{01} = \vec{M}_{02} + \vec{d} \times \vec{R}_0. \qquad (28.6)$$

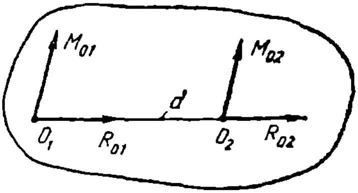
Бунда

$$\vec{M}_{02} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{2i} \times \vec{F}_i. \qquad (28.7)$$

$$\vec{R}_{02} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{2i}. \qquad (28.8)$$

(28.6) дан кўринадики, кучлар системасининг O_1 га нисбатан бош моменти O_2 га нисбатан бош моменти M_{05} билан O_2 га қўйилган бош вектор R_{02} нинг O_1 га нисбатан куч моментининг геометрик йиғиндисига тенг экан. Демак, айтиш мумкинки:

Кучлар системасининг биринчи келтириш маркази O_1 га нисбатан бош моменти бу кучларнинг иккинчи келтириш маркази (O_2) га нисбатан бош моменти билан, шу кучларнинг O_2 га қўйилган бош векторини O_1 га нисбатан ҳосил қилган моментининг геометрик йиғиндисига тенг.



70- расм.

Агар келтириш марказини бош векторини ифодаловчи таъсир чизиқ бўйлаб кўчирсак, берилган кучларнинг бош моменти модули ва йўналиши ўзгармайди (70-расм).

Ҳақиқатан ҳам, агар келтириш маркази O_1 дан O_2 га $\vec{R}_0$ бўйлаб кўчирилса, d ва R_0 лар ўзаро коллинеар векторлар бўлади, улар орасидаги бурчак 0° ва $|\vec{d} \times \vec{R}_0| = d \cdot R_0 \sin 0° = 0$ бўлганлиги учун (28.5) га асосан $\vec{M}_{01} = \vec{M}_{02}$ эканлиги кўриниб турибди.

Шундай қилиб, (28.5) дан кучлар системасини бош вектори келтириш марказининг вазиятига боғлиқ деган хулоса келиб чиқади. Келтириш маркази O_1 дан O_2 га кўчирилса, бош момент вектори M_0 ўзгаради.

Кучлар системасининг бош моментлари қаттиқ жисмнинг ҳар хил нуқталарида геометрик жиҳатдан бир-бирига тенг бўлса, бу ҳолда бутун кучлар системаси битта жуфт ҳолига келади, яъни агар $\vec{M}_{01} = \vec{M}_{02} \ldots = \vec{M}_{0n}$ бўлса, $\vec{d} \times \vec{R}_0 = 0$ ва $d \neq 0$ бўлгани учун $R_0 = 0$ бўлади, лекин $M_0 \neq 0$. Демак, кучлар жуфт кучлар ҳолига келади ва

$$\vec{M} = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02} + \ldots + \vec{M}_{0n} \tag{28.9}$$

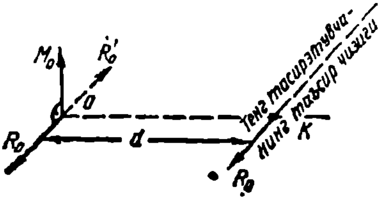
бўлганлиги учун M ни битта жуфт кучлар ҳосил қилади. Хулоса қилиб, кучлар системаси битта жуфт ҳолига келтирилади деб айта оламиз.

29- §. Кучлар системасининг тенг таъсир этувчи ҳолига келтириш. Вариньон теоремаси

1. Олдинги 25- § дан маълумки, кучлар системасини $\vec{R}_0$ ва $\vec{M}_0$ векторлари билан алмаштириш мумкин. Агар $\vec{R}_0 \perp \vec{M}_0$ бўлса, кучлар системаси тенг таъсир этувчи куч ҳолига келади (27- § нинг 4- ҳоли).

$\vec{M}_0$ бош моментни, R'_0, R_0 жуфт кучлар билан алмаштирайлик. R ни шундай танлайликки, R_0 ва R'_0 нинг модуллари бир-бирига тенг бўлсин. R'_0 ни O нуқтага, R_0 ни эса O дан $OK = d$ масофада бўлган K нуқтага жойлаштирайлик ($OK = d$ — жуфт R_0, R'_0 кучларнинг елкаси).

71- расмдан кўринадики, R'_0 ва R_0 ўзаро бир-бирини мувозанатловчи кучлар бўлади. Бу кучларни ташлаймиз, натижада фақатгина K нуқтада жойлашган битта тенг таъсир этувчи $R = R_0$ куч қолади. Олдин айтганимиздек, тенг таъсир этувчи R куч бутун кучлар системасига эквивалентдир, яъни кучлар системасини алмаштиради.



71- расм.

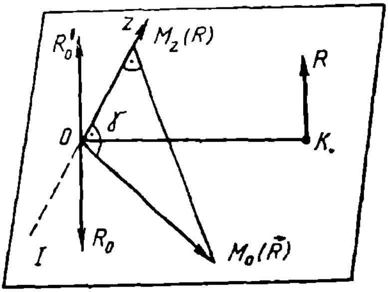
2. R_0 ва M_0 ўзаро перпендикуляр бўлмаганда ва $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ бўлганда кучлар системаси фақат тенг таъсир этувчи куч билан алмаштирилмайди. $M_0 = 0$ бўлган ҳолда ҳам кучлар системаси яна тенг таъсир этувчи куч ҳолига келади.

Агар $\vec{R}_0 \neq 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ ва $\vec{R}_0$ билан $\vec{M}_0$ ўзаро перпендикуляр бўлмаса, кучлар системасининг жисмга таъсирини O нуқтага қўйилган R_0 ва M_0 векторларнинг биргаликдаги таъсири алмаштиради.

Фазодаги кучлар системасининг бирон келтириш марказига нисбатан ҳосил қилган куч моментларининг қандай топилишини кўриб чиқайлик. (Вариньон теоремаси.) Тенг таъсир этувчи куч ва ташкил этувчи кучларнинг моментлари орасида қуйидагича боғланиш бор.

Теорема. *Тенг таъсир этувчининг ихтиёрий нуқтага нисбатан моменти ташкил этувчи кучларнинг ўша нуқтага нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг, тенг таъсир этувчининг ўққа нисбатан моменти ташкил этувчи кучларни ўша ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг.*

Теореманинг биринчи қисмини исботлайлик. Кучлар системасининг тенг таъсир этувчиси қаттиқ жисмнинг K нуқтасига қўйилган бўлсин (72- расм). Келтириш маркази O нуқтага нисбатан тенг таъсир этувчининг моменти $M_0(R)$ ни топамиз. Бу момент $M_0(R)$ вектори I текисликка перпендикуляр бўлиб, O нуқтага қўйилган.



72- расм.

R кучнинг елкаси OK олдинги параграфнинг биринчи бандига асосан $OK = M/R_0$ ва $R_0 = R$ эканлигини ҳисобга олсак, $M_0(\vec{R})$ ни қуйидагича ёза оламиз:

$$M_0(R) = R\cdot OK = R_0 \frac{M}{R_0} = M = M_0 \qquad (29.1)$$

яъни, тенг таъсир этувчини моменти кучлар системасининг бош моментига тенг. Тенг таъсир этувчининг моменти $\vec{M}_0(R)$ нинг йўналиши I текисликка перпендикуляр бўлиб, кучларнинг M_0 бош моменти вектори билан бир хил йўналгандир (0 нуқтага нисбатан).

Демак, тенг таъсир этувчининг моменти $M_0(\vec{R})$ кучлар системасининг M_0 бош моментига геометрик тенг экан ва ана шунинг учун

$$\vec{M}_0(R) = \vec{M}_0 = \vec{M}_{01} + \vec{M}_{02} + \dots + \vec{M}_{on}. \qquad (29.2)$$

Теореманинг биринчи қисми исбот бўлди.

Энди $M_0(\vec{R})$ ни O нуқтадан ўтадиган Z ўқига нисбатан кучлар системасини ҳосил қилган моментлари билан боғланишини аниқлаймиз. Бунинг учун O нуқтадан Z ўқини ўтказамиз. Z ўқига нисбатан тенг таъсир этувчини куч моменти $M_z(R)$ билан $M_0(R)$ бир-бирига боғлиқ:

$$M_Z(\vec{R}) = M_0(\vec{R})\cos\gamma. \qquad (29.3)$$

Шу вектор $M_z(R)$ ташкил этувчи кучларни z ўқига нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг (17- § га қаранг).

$$M_z(\vec{R}) = M_z = M_{01} + M_{02} + \dots + M_{0n}. \qquad (29.5)$$

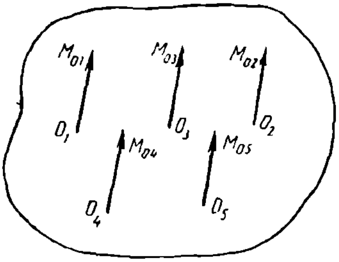
Шундай қилиб, тенг таъсир этувчи кучни ихтиёрий z ўқига нисбатан моменти ташкил этувчи кучларнинг ўша ўққа нисбатан моментларининг алгебраик йиғиндисига тенг экан. Вариньон теоремаси исбот бўлди.

30- §. Кучлар системасининг битта жуфт ҳолига келтириш. Кучлар системасининг инвариантлиги

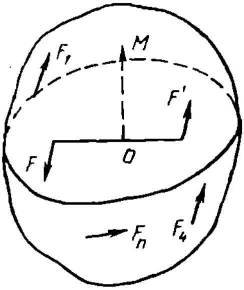
25- § да кўрдикки, кучлар системасини $\vec{R}_0$ ва $\vec{M}_0$ билан алмаштирилади. 27- § нинг 2- ҳолида кучлар системаси битта жуфт кучлар билан алмаштирилади. (28.6) ифодадаги $\vec{d}\times\vec{R}_{02}$ ҳади, агар нолга тенг бўлса, $\vec{M}_{01} = \vec{M}_{02}$ бўлади.

$\vec{d}\times\vec{R}_0 = 0$ эса $\vec{d}$ ва $\vec{R}_0$ векторлар ўзаро коллинеар бўлганда, яъни $\vec{d}$ ва $\vec{R}_0$ векторлар ўзаро параллел бўлганда бажарилади. Бу ҳолда $\vec{M}_{01}=\vec{M}_{02}$ бўлганлиги қуйидаги хулосага олиб келади. Келтириш марказини бош вектори (R_0) йўналишида кўчирганда кучлар системасининг бош моментларининг модули ва йўналиши ўзгармайди.

Бундай ҳолда, берилган кучлар системасининг ихтиёрий келтириш марказларидаги бош моментлари бир-бирига геометрик тенг бўлса, кучлар системаси битта жуфт билан алмаштирилади (73-расм). Расмдан кўринадики, исталган келтириш марказига нисбатан бош моментлари $\vec{M}_{01}=\vec{M}_{02}=\ \ldots\ =\vec{M}_{0n}$ бўлганда, $\vec{d}\times\vec{R}_0 = 0$ бўлади ва $\vec{d}\neq 0$ бўлгани учун $R_0=0$ дир ва демак, кучлар системаси **жуфт кучлар ҳолига** — битта бош момент ҳолига келади, яъни



73-расм.



74-расм.

$$\vec{M}=\vec{M}_{01}+\vec{M}_{02}+\ \ldots\ +\vec{M}_{0n}. \qquad (30.1)$$

Бу жуфтнинг M моментини исталган вақтда битта жуфт кучларга алмаштириш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам, 74-расмда M вектори $\vec{F}$, $\vec{F}$ тфуж кучлар билан алмаштирилган, яъни бу ҳолда га $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, . . . , $\vec{F}_n$ кучлар системасининг таъсири сингари таъсирни битта $\vec{F}_1$, $\vec{F}'$ жуфт кучлар беради деб ҳисобланади.

Энди келтириш марказининг вазиятини ўзгартирганда қандай катталиклар ўзгармай қолишини, яъни инвариантлигини топайлик. Биз 28-§ дан (28.2) формулага асосан келтириш марказига нисбатан кучлар системасининг бош вектори инвариант эканлигини биламиз, лекин бош момент (28.6) га асосан инвариант эмас.

Бироқ, (28.6) ни иккала томонини $\vec{R}_{02}$ га скаляр кўпайтирсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\vec{R}_{02}\cdot\vec{M}_{01}=\vec{R}_{02}\cdot(\vec{d}\times\vec{R}_{02})+\vec{R}_{02}\cdot\vec{M}_{02}. \qquad (30.2)$$

Маълумки, $\vec{R}_{02}$ ва $\vec{d}\times\vec{R}_0$ вектор ўзаро ортогонал (перпендикуляр) векторлар

$$\vec{R}_{02}(\vec{d}\times\vec{R}_{02})=\vec{R}_{02}(\vec{d}\times\vec{R}_{02})\cos 90^\circ=0$$

ва шунинг учун (30.2) дан $R_{01}=R_{02}=R_0$ лигини ҳисобга олиб, қуйидагини ёзамиз:

$$\vec{R}_{01}\cdot\vec{M}_{01}=\vec{R}_{02}\vec{M}_{02}$$

ёки

$$\vec{R}_0\cdot\vec{M}_0=\text{const}=\text{invar}. \qquad (30.3)$$

Ҳосил қилинган (30.3) дан айта оламизки, бош векторнинг бош моментга бўлган скаляр кўпайтмаси келтириш марказига нисбатан берилган кучлар системаси учун инвариант экан.

Агар $\vec{R}_0=\vec{R}_{0x}\vec{i}+R_{0y}\vec{j}+\vec{R}_{0z}\vec{k}$; $\vec{M}_0=\vec{M}_{0x}\vec{i}+M_{0y}\vec{j}+$ $+\vec{M}_{0z}\vec{k}$ эканлигини ҳисобга олиб, скаляр кўпайтирсак, (30.3) қуйидаги шаклни олади:

$$R_{0x}M_{0x}+R_{0y}M_{0y}+R_{0z}M_{0z}=\text{const}. \qquad (30.4)$$

Шундай қилиб, ихтиёрий кучлар системаси учун иккита асосий инвариант мавжуд, яъни келтириш марказининг вазиятига боғлиқ бўлмаган иккита катталик бор. Бу катталиклардан биринчиси векторли инвариант бош вектордир, иккинчиси скаляр инвариант — система бош векторининг бош моментга бўлган скаляр кўпайтмасини ташкил этади.

(30.3) ни (30.4) билан тенглаштирамиз:

$$\vec{M}_{0R_0}\cdot\vec{R}_0=R_{0x}M_{0x}+R_{0y}M_{0y}+R_{0z}M_{0z}. \qquad (30.5)$$

Бундан

$$M_{{}_0R_0} = \frac{R_{0x}M_{0x} + R_{0y}\,M_{0y} + R_{0z}\,M_{0z}}{R_0}. \qquad (30.6)$$

Бу (30.5) тенгламанинг ўнг томонидаги касрнинг сурати ҳам, махражи ҳам доимий (инвариант) катталиклар бўлгани учун уларнинг бўлинмаси ҳам доимийдир. Демак, бош моментнинг минимал қиймати M_0 ҳам доимий, яъни келтириш марказига нисбатан инвариантдир. Таъкидлаймизки, M_0R_0 — кучлар системасининг бош моментининг бош вектор йўналишидаги проекциясидир:

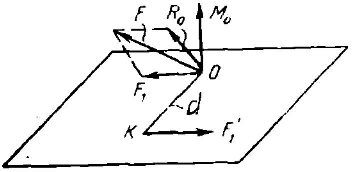
$$M_{{}_0R_0} = M_0 \cos(\overrightarrow{M_0};\overrightarrow{R_0}). \qquad (30.7)$$

Шундай қилиб, (30.6) ва (30.7) га асосан: ихтиёрий кучлар системасининг исталган келтириш марказига нисбатан бош моментининг бош вектор йўналишидаги проекцияси, келтириш марказининг вазиятига боғлиқ бўлмаган доимий катталикдир.

31-§. Ихтиёрий кучлар системасини айқаш ҳолидаги кучларга ёки куч винт-динама ҳолига келтириш

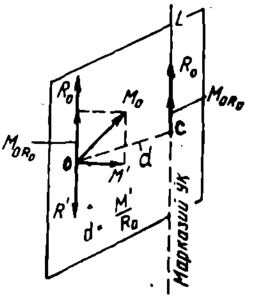
Кучлар системаси $\overrightarrow{R_0} \neq 0$; $\overrightarrow{M_0} \neq 0$ ва $\overrightarrow{R_0}$ вектори $\overrightarrow{M_0}$ га перпендикуляр бўлмаган ҳолга келтирилган бўлса, айқаш ҳолидаги кучларга ёки кучлар винт-динама шаклига келтирилади.

$\overrightarrow{R_0}$ ва $\overrightarrow{M_0}$ векторлари ўзаро бурчак билан O нуқтага қўйилган бўлсин (75-расм). M_0 ни $F_1 \cdot F_1'$ жуфт кучлар билан шундай алмаштирамизки, уларнинг елкаси $d = M_0/F$ бўлсин. Бу ҳолда O нуқтадаги F_1 ва R_0 кучларни параллелограмм қоидасига асосан қўшиб F кучни ҳосил қиламиз. Натижада $\overrightarrow{R_0}$ ва $\overrightarrow{M_0}$ қолмайди, фақат ўзаро параллел бўлган F_1' ва F кучлар қолади. Бу F_1', F кучлар айқаш ҳолидаги кучлар дейилади. Демак, бутун кучлар системаси айқаш ҳолидаги кучлар билан алмаштирилди.

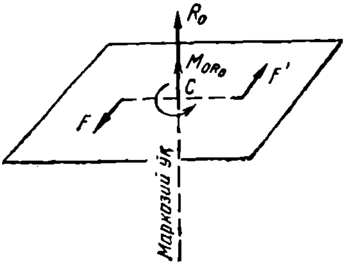


75-расм.

Бу иккала R_0 ва M_0 векторнинг куч винт-динама ҳолига ҳам келтириш мумкин. M_0 вектории $M_{{}_0R_0}$ ва M' ташкил этувчиларга ажратамиз (76- расм): $\vec{M}_0=\vec{M}_{0R0}+\vec{M}'$; $\vec{M}_{0R0}$ — $\vec{M}_0$ ни $\vec{R}_0$ даги проекцияси, M' эса $\vec{R}_0$ га перпендикуляр вектор. M' ни R', R_0 жуфт кучлар билан алмаштирамиз ва бунинг учун $R'=R_0$ эканлигини, куч елкаси $d=\frac{M}{R_0}$ ни танлаш билан амалга оширамиз ($d=OC$). Бу ҳолда R_0 ва R' ўзаро бир-бирини мувозанатловчи кучлар бўлади. Агар ана шу R_0R' ни ташлаб юборсак фақат



76- расм.



77- расм.

$\vec{M}_{0R0}$ ва C нуқтадаги $\vec{R}_0$ қолади. $\vec{M}_{0R0}$ эркин вектор бўлгани учун уни C нуқтага кўчирамиз. $\vec{R}_0$ ва $\vec{M}_{0R0}$ кучлари йўналган (76- расмда R_0 ва M_{0R0} ётган) CL тўғри чизиқ кучлар системасининг марказий ўқи дейилади.

R_0 кучи ва шу кучнинг таъсир чизиғига перпендикуляр бўлган текисликда ётган, жуфт F, F' кучлар моментининг мажмуи кучлар винти ёки динама деб юритилади (77- расм).

Расмдан кўриниб турибдики, M_{0R0} бу кучлар системасини марказий ўқида ётган C нуқтага нисбатан бош моменти бўлади. Бу M_{0R0} вектори эркин вектордир, яъни унинг C қўйилиш нуқтасини марказий ўқнинг исталган бошқа нуқтасига кўчириш мумкин. Демак, кучлар системасини марказий ўқининг исталган нуқтасига нисбатан бош моментлари айнан бир хил бўлади.

Энди M_0 векторини O нуқтанинг марказий ўққа нисбатан вазиятига қараб ўзгаришини топайлик. 76- расмдан

$$M'=R_0d \qquad (31.1)$$

ва

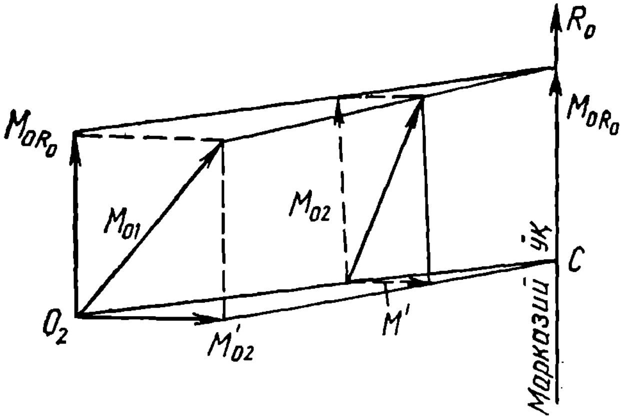
$$M_0=\sqrt{M_{0R0}^2+M'^2}=\sqrt{M_{0R0}^2+R_0^2d^2}. \qquad (31.2)$$

M_0 нинг йўналиши R_0 ва M_0 орасидаги бурчак орқали топилади:

$$\cos(\vec{M}_0\vec{R}_0)=\frac{M_{0R0}}{M_0}=\frac{M_{0R0}}{\sqrt{M_{0R0}^2+R_0^2d^2}}. \qquad (31.3)$$

$\cos(\vec{M}_0, \vec{R}_0) < 0$ бўлса, $M_{0R0} < 0$ ва $< (\vec{M}_0\ \vec{R}_0) < 90^0$ ҳамда M_{0R0} йўналиши R_0 билан бир хил. (31.2) ва (31.3) формулаларда фақат d ўзгарувчи катталикдир. Бу формулалар кўрсатадики, d ни оширсак M_0 модули ортади ва $< (\vec{M}_0\vec{R}_0)$ эса 90^0 га яқинлашади (78- расм).

Марказий ўқнинг исталган нуқтасида $d=0$ бўлгани



78- расм.

учун $\cos(\vec{M}_c, \vec{R}_0)=\pm 1$ ва $M_c=|M_{0R0}|=M_{\min}$. (31.4)

Олинган натижа, яъни (31.4) кўрсатадики, кучлар системасининг марказий ўқдаги исталган нуқтасига нисбатан бош моменти шу ўқ бўйлаб йўналган бўлиб (марказий ўқнинг мусбат ёки манфий томонига), шу кучлар системаси учун минимал модулга эга.

Шундай қилиб, марказий ўқ фазодаги нуқталарнинг шундай геометрик ўрники, бу ўққа нисбатан кучлар системасининг бош моменти минимал $M_{\min} = M_{0R0}$ қийматга эга ва ўқ бўйлаб йўналган бўлади.

Энг кичик бош момент M_{0R0}—бош момент $\vec{M}_0$ ни $\vec{R}_0$ йўналишидаги проекциясига тенг:

$$M_{0R0} = M_0 \cos(\vec{M}_0, \vec{R}_0), \tag{31.5}$$

(31.5) ни R_0 га кўпайтириб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$R_0 M_{0R0} = R_0 M_0 \cos(\vec{M}_0, \vec{R}_0). \tag{31.6}$$

(31.6) нинг ўнг томони $\vec{R}_0$ ни $\vec{M}_0$ га скаляр кўпайтмасини беради:

$$R_0 M_0 \cos(\vec{M}_0, \vec{R}_0) = \vec{R}_0 \vec{M}_0. \tag{31.7}$$

$\vec{R}_0$, $\vec{M}_0$ ни $\vec{R}_0$ ва $\vec{M}_0$ векторларнинг проекцияларини R_{0x} R_{0y}, R_{0z} ва M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} орқали ифодалаймиз:

$$\vec{R}_0 \vec{M}_0 = R_{0x} M_{0x} + R_{0y} M_{0y} + R_{0z} M_{0z}. \tag{31.8}$$

Бундан

$$M_{0R0} = \frac{R_{0x} M_{0x} + R_{0y} M_{0y} + R_{0z} M_{0z}}{R}. \tag{31.9}$$

(31.9) ёрдамида M_0 бош моментнинг энг кичик қиймати R_0 ва M_0 векторларнинг проекциялари орқали ифодаланади. Энди (31.9) дан фойдаланиб ихтиёрий кучлар системасининг тенг таъсир этувчи R ҳолига келтириш шартларини топамиз. Маълумки, кучлар системасини R ҳолига: а) $R_0 \neq 0$ ва $M_0 = 0$; б) $R_0 \neq 0$, $M_0 \neq 0$ ва $R_0 \perp M_0$ бўлганда келтириш мумкин.

Иккала ҳолда ҳам $M_{0R0} = M_0 \cos(\vec{M}_0, \vec{R}_0) = 0$ бўлади ва агар кучлар системаси R ҳолига келтирилса, $M_{0R0} = 0$ бўлгани учун (31.9) дан қуйидаги шартлар келиб чиқади:

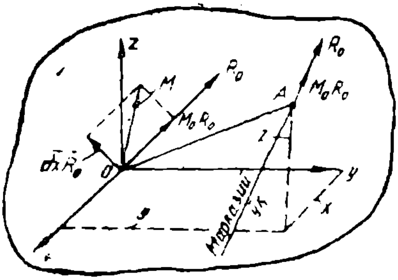
$$R_{0x} M_{0x} + R_{x} \cdot M_{0y} + R_{0z} \cdot M_{0z} = 0,$$
$$R_{0x}^2 + R_{0y}^2 + R_{0z}^2 \neq 0. \tag{31.10}$$

(31.10) даги боғланишлар кучлар системасининг (R) тенг таъсир этувчига келтиришнинг аналитик шартларидир.

32-§. Кучлар системаси марказий ўқининг тенгламаси ва тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи

Кучлар системаси келтириш маркази O нуқтага нисбатан R_0 ва $\vec{M}_0 = \vec{M}$ векторлар билан ифодаланган бўлсин. O нуқтадан X, Y ва Z ўқларини ўтказамиз (79-расм) ва x, y, z координаталар орқали марказий ўқнинг тенгламасини топамиз.

Келтириш марказидан d масофада турган A нуқтадан марказий ўқни ўтказамиз. Биз 31-§ да кўрдикки, бу ўқнинг A нуқтасига нисбатан бош момент $M_A = M_{0R0}$ га тенг бўлиб, $\vec{R}_0$ бўйлаб йўналган.



79-расм.

Марказий ўқ (тўғри чизиқ)нинг фазодаги вазияти учта ўзгарувчи x, y, z координаталари бўлган иккита тенглама билан ифодаланади. Бу тенгламаларни ҳосил қилиш учун 28-§ натижаларидан фойдаланамиз.

Агар A нуқтани биринчи, O нуқтани иккинчи келтириш маркази деб қабул қилсак, (28.6) га асосан:

$$\vec{M}_{0R0} = \vec{M}_0 - \vec{d} \times \vec{R}_0. \tag{32.1}$$

Агар M_{0R0} нинг проекцияларини M_x, M_y, N_z деб белгилаб, (32.1) нинг x, y, z ўқларидаги проекцияларини (24.1) га асосланиб топсак, қуйидагилар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{0x} - (R_{0z} \cdot y - R_{0y} \cdot z), \\ M_y &= M_{0y} - (R_{0x} z - R_{0z} x). \\ M_z &= M_{0z} - (R_{0y} x - R_{0x} y). \end{aligned}\right\} \tag{22.2}$$

M_{0R0} ва R_0 вектор бир тўғри чизиқ бўйлаб йўналганлиги учун уларнинг бир исмли проекциялари ўзаро пропорционал бўлади, яъни

$$M_x/R_{0x} = M_y/R_{0y} = M_z/R_{0z} = M_{0R0}/R_0 \tag{32.3}$$

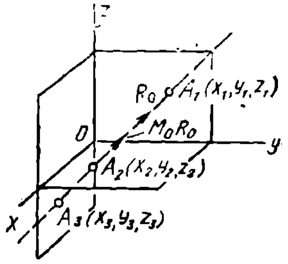
ёки (32.2) ни ҳисобга олиб қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{M_{0x} - (R_{0z}\,y - R_{0y}\,z)}{R_{0x}} = \frac{M_{0y} - (R_{0x}\,z - R_{0z}\,x)}{R_{0y}} =$$

$$= \frac{M_{0R0}}{R_0} = \frac{M_{0z} - (R_{0y}\,x - R_{0x}\cdot y)}{R_{0z}}. \qquad (32.4)$$

Бунда R_0, R_{0x}, R_{0y}, R_{0z}, M_0, M_{0x}, M_{0y} M_{0z} ва M_{0R0} катталиклар доимий бўлади. Ўзгарувчан катталик марказий ўқнинг x, y, z координаталари ҳисобланади. (32.4) даги тўртта нисбатдан исталган икки жуфтини тенглаштириб марказий ўқнинг иккита тенгламасини ҳосил қилиш мумкин.

Агар (32.4) да олдинги учта нисбатдан биронтасини охирғиси билан тенглаштирилса, марказий ўқнинг бироз оддийроқ тенгламаси ҳосил бўлади.



80- расм.

Марказий ўқнинг текисликларни кесадиган нуқталарининг координаталарини ўша кесадиган нуқта айрим координаталарини нолга тенглаштириш билан топилади. Масалан, марказий ўқни yOz текисликни кесган A_1 нуқтаси учун $x_1 = 0$, A_2 учун $z_2 = 0$ ва A_3 учун эса $y_3 = 0$ (80- расм).

Агар кучлар системаси R тенг таъсир этувчи ҳолига келтирилса, $R = R_0$ ва $M_{0R0} = 0$ бўлади. Бу ҳолда марказий ўқ R тенг таъсир этувчининг таъсир чизиғи бўлади ва $M_x = M_y = M_z = 0$ бўлганлиги учун

$$\frac{M_{0x} - (R_{0z}\,y - R_{0y}\,z)}{R_{0x}} = \frac{M_{0y} - (R_{0x}\,z - R_{0z}\,x)}{R_{0y}} =$$

$$= \frac{M_{0z} - (R_{0y}\,x - R_{0x}\,y)}{R_{0z}} = 0 \qquad (32.5)$$

ёки $R_0 = R$ бўлганлиги учун

$$\left.\begin{aligned} M_{ox} &= R_z y - R_y z, \\ M_{oy} &= R_x z = R_z x, \\ M_{oz} &= R_y x - R_x y, \end{aligned}\right\} \qquad (32.6)$$

ифодалар ҳосил бўлади.

Бу ерда M_{oz}, M_{oy}, M_{oz} — кучлар системасини координата ўқларига нисбатан бош моментлари. R_x, R_y, R_z — тенг таъсир этувчининг ўқлардаги проекциялари. (32.6) тенгламалардан фақат иккитаси эркин тенгламалардир.

33- §. Кучлар системаси мувозанат шартларининг умумий ҳоли

Агар кучлар системаси учун бирон келтириш марказига нисбатан

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= 0, \\ M_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33.1)$$

(33.1) шарт бажарилса, бу кучлар ўзаро бир-бирини мувозанатлайди. Маълумки,

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{R_{ox}^2 + R_{oy}^2 + R_{oz}^2}, \\ M_0 &= \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (33.2)$$

Мувозанат тенгламалари (33.1) ни (33.2) га асосан X, Y, Z ўқлардаги проекцияларда қуйидагича ёзилади:

$$R_{ox} = 0,\ R_{oy} = 0,\ R_{oz} = 0,\ M_{ox} = 0,\ M_{oy} = 0,\ M_{0z} = 0$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{yi} &= 0. \\ \sum_{i=1}^{n} F_{zi} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{oxi} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{oyi} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{n} M_{ozi} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (33.3)$$

Бу ҳосил қилинган (33.3) шаклдаги олтита тенгламалар системаси фазодаги ихтиёрий кучларнинг асосий мувозанат тенгламалари дейилади. Булардан олдинги учтасига кучлардаги проекцияларининг тенгламалари, қолган учтасига координата ўқларига нисбатан

куч моментлари тенгламалари деб айтилади. Моментлар тенгламаларини (24.1) га асосан бошқача шаклда ҳам ёзилади:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(F_{zi}y_i-F_{yi}Z_i)=0,\\&\sum_{i=1}^{n}(F_{xi}Z_i-F_{zi}x_i)=0,\\&\sum_{i=1}^{n}(F_{yi}x_i-F_{xi}y_i)=0\end{aligned}\right\}\qquad(33.4)$$

(33.3) мувозанат тенгламаларини яна бошқача кўринишда ҳам ёзилади, бироқ бу вақтда қўшимча талаблар қўйилади. (33.3) нинг ўрнига қуйидагиларни ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}&\sum M_{xi}=0,\\&\sum M_{yi}=0,\\&\sum M_{zi}=0\\&\sum F_{xi}=0,\\&\sum F_{yi}=0,\\&\sum M_{u_1 i}=0\end{aligned}\right\}\quad(33.5)\qquad\left.\begin{aligned}&\sum M_{xi}=0,\\&\sum M_{yi}=0,\\&\sum M_{zi}=0\\&\sum F_{xi}=0,\\&\sum M_{u_1 i}=0,\\&\sum M_{u_2 i}=0\end{aligned}\right\}\quad(33.6)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum M_{xi}=0,\\&\sum M_{yi}=0,\\&\sum M_{zi}=0\\&\sum M_{u_1 i}=0,\\&\sum M_{u_2 i}=0,\\&\sum M_{u_3 i}=0\end{aligned}\right\}\quad(33.7)$$

Бу (33.5), (33.6), (33.7) ни ҳар бирини маълум шартлар бажарилгандагина мувозанат тенгламалари деб ҳисоблаш мумкин. Масалан, U ўқ OZ ўқига параллел бўлмаган ва бир текисликда ётмаганда (33.5) мувозанат тенгламалари бўлади. U_1, U_2 ва U_3 ўқлар $y\ a\ z$· текислигида ётмаса ва ZOX билан ҳам бир текисликда ётмаса, (33.6) мувозанат тенгламалари бўлади ва ҳоказо.

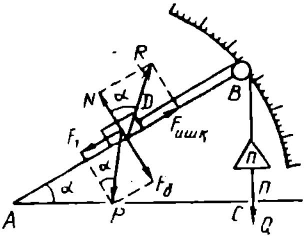
Фазодаги ихтиёрий кучлар системасининг мувозанати масаласида, агар номаълум олтитадан кўп бўлмаса, статик аниқ бўлади. Агар кучлар иккита жисмга қўйилган бўлса, номаълумлар сони ўн иккидан ортмаса, бу жисмлар учун статик аниқ бўлади ва ҳоказо. Кўпчилик ҳолда мувозанат тенгламаларини умумий ҳоли бўлган (33.3) тенгламалар қўлланилади.

34- §. Ишқаланиш. Ишқаланиш коэффициенти, ишқаланиш бурчаги ва ишқаланиш конуси. Ишқаланиш мавжуд бўлганда қаттиқ жисмнинг мувозанат шартлари

Бир жисм иккинчи жисм сиртида ҳаракат қилганда пайдо бўлиб, жисм ҳаракатига қаршилик кўрсатадиган куч *ишқаланиш кучи* дейилади. Агар ишқаланиш кучини $F_{\text{ишқ}}$ билан белгиласак, бу $F_{\text{ишқ}}$ куч жисмга таъсир этадиган босим кучи $F_{\text{б}}$ га тўғри пропорционалдир:

$$F_{\text{ишқ.}} = f \cdot F_{\text{б}} . \tag{34.1}$$

(34.1) даги f коэффициент сирпаниш вақтидаги *ишқаланиш коэффициенти* дейилади. Бу коэффициент бир-бирига тегаётган жисмларнинг табиатига, тезликларига ва босим кучига боғлиқ. Лекин элементар ҳисоблашларда f нинг тезлик ва босимга боғлиқлиги ҳисобга олинмайди. Одатда f коэффициентнинг қиймати тажриба ёрдамида топилади. Тажрибалар кўрсатадики, $0 \leqslant f \leqslant 1$, кўпчилик материаллар учун f нинг қиймати жадвалларда кўрсатилган. Ишқаланиш коэффициенти f нинг қийматини қуйидагича топилади (81- расм). Расмдан кўринадики, оғирлик кучи P иккита ташкил этувчига ажралади. Бу кучлардан биттаси $F_{\text{б}}$ босим кучи бўлиб, бу куч AB таянч юзга перпендикуляр йўналган; иккинчи F_1 куч эса AB юзга параллел бўлиб D жисмни пастга ҳаракатлантиради. Бироқ ҳосил бўладиган R реакция кучи нормал N ва $F_{\text{ишқ}}$ ишқаланиш кучига ажралади. Агар $F_1 = -F_{\text{ишқ}}$ шарт бажарилса, D жисм текис ҳаракат ҳолатида бўлади. Бундай шартни $П$ посангига қўйиладиган юклар ёрдамида бажариш мумкин. Натижада D жисм текис ҳаракатланганда $F_1 = F_{\text{ишқ}}$ шарт бажа-



81- расм.

рилади. Шунингдек, расмдан $N = -F_б$ ҳамда $N = -F_б = P\cos\alpha$ эканлиги кўриниб турибди, яъни

$$F_б = P\cos\alpha. \qquad (34.2)$$

Посанги бўлмаганда, D жисм текис ҳаракат қилиб пастга тушадиган бўлса, $F = -F_{ишқ}$ шарти бажарилади ва расмдан

$$F_{ишқ} = P\cdot\sin\alpha. \qquad (34.3)$$

Агар (34.2). (34.3) ни (34.1) га қўйсак, қуйидаги ҳосил бўлади:

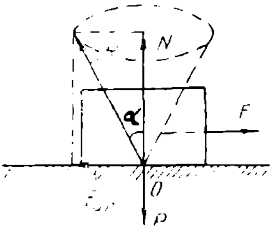
$$f = \frac{p\sin\alpha}{p\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

$$f = \mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (34.4)$$

Демак, агар D жисм қия текисликда текис ҳаракат ҳолатида бўлса, ишқаланиш коэффициенти қиялик бурчагининг тангенсига тенг бўлар экан. Мана шу бурчак тангенси сирпаниш ишқаланиш коэффициентига тенг бўлган α бурчак *ишқаланиш бурчаги* деб айтилади. α ишқаланиш бурчагидан бошқа яна илиниш бурчаги тушунчасини ҳам қўлланилади. Бу $\alpha_{ил}$ бурчак D жисм тинч турганда пайдо бўлади. Агар D жисмга F куч таъсир этса, D маълум вақтгача тинч туради, демак, жисмни сақлаб турувчи $F_{ил}$ куч пайдо бўлади. Бу $F_{ил}$ куч *илиниш кучи* дейилади. $F_{ил}$ куч R реакция кучининг ташкил этувчи N ва $F_{ил}$ га ажралишидан ҳосил бўлиб, N нормал кучга тўғри пропорционалдир:

$$F_{ил} = f_{ил}\cdot N. \qquad (34.5)$$

Илиниш коэффициенти $f_{ил}$ бир-бирига тегиб турган жисмлар материалига ва физик ҳолатига боғлиқ бўлиб, қиймати 0 билан 1 оралиғида ўзгаради. Тажрибада аниқланганидек, $f_{ил} > f$. Бу коэффициент $f_{ил}$ ҳам тажрибада аниқланади. Бунинг учун жисмга қўйиладиган F кучни $F = F_{ил}^{max}$ бўлгунча, яъни жисм D жойидан қўзғалишни бошлагунча аста-секин оширилади. Ана шу қўзғалиш бошланаётган пайтдаги куч $F_{ил}^{max}$ бўлади. 82- расмдан маълумки, $N = P$, демак,



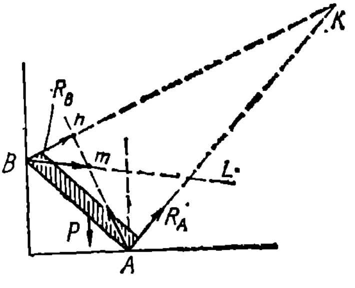
82- расм.

$$f_{ил} = \frac{F_{ил}}{P} \qquad (34.6)$$

бўлар экан. $f_{ил}$ коэффициентни 81-расмдаги қурилмадан фойдаланиб ҳам топиш мумкин. Бунинг учун AB қия текисликни юқорига ёки пастга ҳаракатлантириб, α қиялик бурчагининг қийматини ўзгартириб, D жисмнинг ҳаракатлана бошлашига эришамиз (бу ҳолда $П$ посанги олиниб бошқа жойга қўйилади). D жисм ҳаракатлана бошлаган пайтда шкаладан (пунктир чизиқлар) α бурчакни ёзиб оламиз. Бу бурчак $j_{ил}$ илиниш бурчагига тенг бўлади. Мана шу бурчак тангенси $i_{ил}$ илиниш коэффициентига тенг бўлади, яъни

$$f_{ил} = \frac{F_{ил}^{max}}{P}. \qquad (34.7)$$

81 ва 82-расмда R реакция кучи таянч юзидаги нормал j билан α ёки $\alpha_{ил}$ бурчак ташкил этади, деб олдик. Лекин бу бурчаклар O дан (абсолют силлиқ сирт учун) маълум қийматгача (реал жисмлар учун) ўзгаради. Натижада шундай бўладики, фазода R реакция кучи N нормал атрофида таянч O нуқтага таяниб айланади. Бу айланишда конус сирти ҳосил бўлади. Бу конус R реакция кучини қўзғалмас O нуқта атрофида N нормал билан α ёки $\alpha_{ил}$ бурчак билан айланиш натижасида ҳосил бўлади. Бу конусга илиниш конуси ёки ишқаланиш конуси деб айтилади. Бу илиниш конусининг сирти реакция кучларининг максимал қийматларини кўрсатади, конуснинг ичи эса реакция кучларининг мумкин бўлган қийматларидир ёки реакция кучларининг аниқланиш соҳасидир. Агар тинч турган жисмга таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси илиниш конусининг ичида бўлса, жисмнинг мувозанати бузилмайди. Шундан фойдаланиб, ишқаланиш мавжуд бўлганда жисмларнинг мувозанати қуйидагича топилади (83-расм).

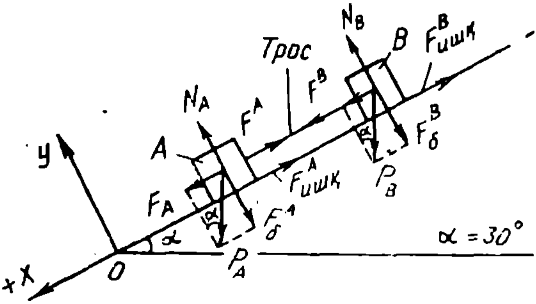


83-расм.

Фараз қилайлик, D жисм, деворнинг A ва B нуқтасига тегиб турсин. A ва B нуқталарга алоҳида-алоҳида реакция кучларини ва илиниш конусларини (расм текислигидаги проекцияларини) чизамиз. Натижада $mnkL$ синиқ чизиқлар билан чегараланган текис юз (фазода сирт) ҳосил бўлади.

Агар жисм P оғирлигининг таъсир чизиғи реакция кучлари ҳосил қилган $mnkL$ юзнинг ичидан кесиб ўтса, жисм мувозанатда бўлади. Демак, $mnkL$ — жисмнинг мувозанатда бўлиш соҳасини характерлайдиган юздир.

Шундай қилиб, ишқаланиш кучлари мавжуд бўлганда реакция кучлари сиртга ўтказилган нормал билан маълум бурчак ҳосил қилади ва шунинг натижасида ишқаланиш конуси ҳосил бўлади. Мувозанат тенгламаларини тузганда ишқаланиш кучи ва бошқа кучларни ҳисобга олиш лозим бўлади.



84- расм.

16- мисол. (2.67) Оғирликлари 200 кг ва 400 кг бўлган тўғри A ва B тахтачалар (84- расм) қия текислик устида турибди. A ва B тахтачаларнинг қия текислик билан ишқаланиш коэффициентлари $f_A = 0{,}5$, $f_B = \frac{3}{2}$ бўлсин. Агар бу тахтачалар сим арқон билан маҳкамланган бўлса, система ҳаракат қиладими ёки тинч ҳолатда бўладими?

A ва B ни бирлаштирувчи сим арқоннинг таранглиги ва ҳар бир тахтачага таъсир этадиган ишқаланиш кучларини топинг.

Берилган:

$\alpha = 30°$
$P = 200$ кг;
$P_B = 400$ кг;

Ечиш. 84- расмдан кўринадики, сим арқоннинг T таранглик кучи бир-бирига параллел бўлган тўртта F_A, $F^A_{ишқ}$, F_B, $F^B_{ишқ}$ кучнинг алгебраик

$f_A = 0{,}5;$

$f_B = \frac{2}{3}.$

$T - ?\ F^A_{\text{ишқ}} - ?$

$F^B_{\text{ишқ}} - ?$

Система қандай ҳолатда бўлади?

йиғиндисига тенг. Ҳақиқатан ҳам, агар мувозанат тенгламаларини тузсак: $T = +F_A - F^A_{\text{ишқ}} + F_B - F^B_{\text{ишқ}}$ эканлигини ҳисобга олиш лозим.

У ҳолда

$$\sum F_{xi} = -F_A + F^A_{\text{ишқ}} - F_B + F^B_{\text{ишқ}} - T = 0$$

$$\sum F_{iy} = N^A - F^A_{б} + N^B - F^B_{б} = 0.$$

Маълумки, (34.1) га асосан:

$$F^A_{\text{ишқ}} = f_A \cdot N_A;\quad F^B_{\text{ишқ}} = f_B \cdot N_B.$$

Расмдан $F_A = p_A \sin\alpha$; $F_B = P_B \sin\alpha$ га тенг. Босим кучлари $F^A_б$ ва $F^B_б$ мос равишда нормал N_A ва N'_B кучларга тенг бўлганликлари учун $-N_A = F^A_б = p_A \cos\alpha$; $-N_B = F^B_б = p_B \cos\alpha$ эканлиги равшандир. Энди F_A ва F_B ҳамда A ва B нуқталардаги ишқаланиш кучларининг қийматларини ҳисоблайлик.

$$F_A = 200 \cdot \sin 30° = 200 \cdot 0{,}5 = 100 \text{ кг}.$$

$$F_B = 400 \cdot \sin 30° = 400 \cdot 0{,}5 = 200 \text{ кГ},$$

$$F^A_{\text{ишқ}} = 0{,}5 \cdot 200 \cos 30° = 86 \text{ кг},$$

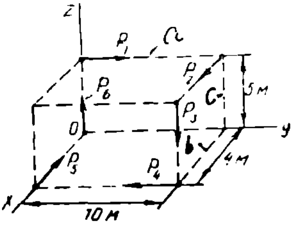
$$F^B_{\text{ишқ}} = \frac{2}{3} \cdot 400 \cos 30° = 228 \text{ кг}.$$

Таранглик кучини $\sum F_{xi} = 0$ тенгламадан топамиз:

$$T = F_A + F_B - F^A_{\text{ишқ}} - F^B_{\text{ишқ}} = 300 - 314 = 14 \text{ кг}.$$

Агар $(F_A + F_B) < (F^A_{\text{ишқ}} + F^B_{\text{ишқ}})$ бўлса, жисм ҳаракат қилмайди, хақиқатан ҳам, $F_A + F_B = 300$кг. $F^A_{\text{ишқ}} + F^B_{\text{ишқ}} = 314$кг, демак, система тинч ҳолатда бўлади.

17-мисол. (7.10) томонлари



85-расм.

10 м, 4 м ва 5 м бўлган, тўғри параллелопипеднинг қирраларига (85-расм) $P_1 = 4$Н, $P_2 = 6$Н, $R_3 = 3$Н, $P_4 = 2$Н, $P_5 = 6$Н ва $P_6 = 8$Н куч қўйилган. Бу система каноник (намунавий) ҳолга келтирилсин ва марказий ўқни OXY текислиги билан кесишган нуқтасининг координаталари x, y топилсин.

Берилган:

$a = 10$ м, $P_1 = 4$ Н, $P_2 = 2$ Н,
$b = 4$ м, $P_2 = 6$ Н, $P_5 = 6$ Н
$c = 5$ м, $P_3 = 3$ Н, $P_6 = 8$Н

R_0 — ? Mo — ? X — ? y — ?

Ечиш: Системани каноник ҳолга келтириш — бу R_0 бош вектор ва M_0 бош моментни топиш деган сўздир. R_0 бош векторнинг модулини (26.5) га асосан топамиз.

Маълумки: $R_0 = \sqrt{R_{ox} + R_{0y}^2 + R_{oz}^2}$; $M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{0z}^2}$; R_{ox}, R_{oy}, R_{oz} (26.1) га асосан топамиз, яъни $R_{ox} = \sum F_{xi} = -p_5 + p_2 = -6 + 6 = 0$, $R_{oy} = \sum F_{yi} = p_1 - p_4 = 4 - 2 = 2$Н, $R_{oz} = \sum F_{zi} = p_6 - p_3 = 8 - 3 = 5$ Н.

M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}, яъни бош моментнинг ўқлардаги проекцияларини (26.6) га асосан топамиз:

$$M_{ox} = \sum\nolimits_{oxi} = p_1 \cdot C + p_3 \cdot a = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 10 = 50 \text{ нм},$$

$$M_{oy} = \sum M_{oyi} = -p_2 \cdot C - p_3 \cdot b = 6 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -42 \text{ нм},$$

$$M_{oz} = \sum M_{oxi} = p_2 \cdot a + p_1 \cdot b = 6 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 68 \text{ нм}.$$

Демак, $R_0 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5{,}4$ Н,

$$M_0 = \sqrt{50^2 + (42)^2 + (68)^2} = 94 \text{ нм}.$$

Энди R_0 ва M_0 нинг йўналтирувчи косинусларини (26.4) тенгламадан топамиз:

$$\cos\alpha = \frac{R_{ox}}{R_0} = \frac{0}{5{,}4} = 0, \quad \cos\varphi = \frac{R_{0y}}{R_0} = \frac{2}{5{,}4} = 0{,}37,$$

$$\cos\gamma = \frac{R_0 Z}{R_0} = \frac{5}{5{,}4} = 0{,}93.$$

(32.4) тенгламадан фойдаланиб, марказий ўқ тенгламасини топамиз:

$$\frac{M_{oz} - (R_{oy} \cdot X - R_{ox} \cdot Y)}{R_{oz}} = \frac{M_0 R_0}{R_0}.$$

M_0 нинг қийматини (31.9) дан топсак, 47,5Н га тенг бўлади. Бу ҳолда $\frac{68 - (2x - 0)}{5} = \frac{47,5}{5,4}$

$$5,4(68 - 2x) = 47,5 \cdot 5,$$

$$367,2 - 10,8x = 237,5$$

$$10,8x = 367,2 - 237,5 = 129,7$$

$$X = \frac{129,7}{10,8} = 12 \text{ м}.$$

Яна (32.4) нинг учинчи ва охирги ҳадларини тенглаштириб, ($z = 0$ деб) y нинг қийматини топамиз:

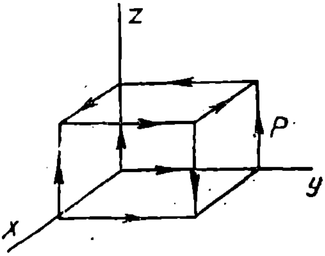
$$\frac{M_{Ox} - (R_{Oy} \cdot Z - R_{Ox} \cdot Y)}{R_{Oz}} = \frac{M_{ORO}}{R_0} = 47,5,$$

бундан $R_0 \neq 0$ бўлгани учун

$$y = \frac{M_{Ox}}{R_{Oz}} = 10 \text{ м}.$$

Демак, $x = 12$ м, $y = 10$ м экан.

18- мисол (7.9). Томони a га тенг бўлган кубнинг қирралари бўйлаб ҳар бири P га тенг бўлган (86- расм) ўн иккита куч таъсир этади. Шу системани каноник ҳолга келтиринг ва марказий винтли ўқни Oxy текислигини кесганидаги координаталари x ва y нинг қийматларини топинг.



86- расм.

Жавоби: $R_0 = 2P\sqrt{6}$; $M = \frac{2}{3} Pa\sqrt{6}$; $\cos\alpha = -\cos\beta = = -\frac{1}{2} \cos\gamma = -\frac{1}{6}\sqrt{6}$; $x = y = \frac{2}{3} a$.

II қисм. КИНЕМАТИКА

VII БОБ. НУҚТА КИНЕМАТИКАСИ

35-§. Кинематиканинг асосий тушунчалари

Бу бобда нуқта ва механик системанинг ҳаракат турлари, яъни кинематик ҳолатлари ўрганилади. Моддий жисмларнинг фазодаги ҳаракат турларини геометрик нуқтаи назардан шу ҳаракатларни ҳосил қилган кучлар билан боғланмасдан ўрганадиган механиканинг бўлими *кинематика* дейилади. Кинематика грекча «кинема» сўзидан олинган бўлиб, ҳаракатни билдиради. Бу боб икки қисмдан иборат: 1) нуқта кинематикаси, 2) жисм кинематикаси. Ўлчамлари ҳисобга олинмайдиган жисм *нуқта* дейилади. Бир-бирига боғлиқ бўлган нуқталар мажмуи *механик система* деб айтилади. Ҳар қандай қаттиқ жисмни механик система деб қабул қилиш мумкин (масалан, тош бўлаги, шиша бўлаги ва ҳоказо) ва лозим бўлганда ҳар қандай жисмни ҳам битта нуқта деб қараш мумкин. Эркин тушаётган жисмни, Ер шарини, Қуёш ёки Ойни ва бошқа жисмларни айрим ҳолда нуқта деб ҳисоблаш мумкин.

Нуқта ёки жисм маълум вақтда фазода маълум кинематик ҳолатда содир (тинч ёки ҳаракат ҳолатида) бўлади. Демак, фазо, вақт ва ҳаракат материянинг яшаш шакллари бўлиб, булар умуман ўзаро боғлиқ бўлади. Материясиз ҳаракат ва ҳаракатсиз материя бўлмайди. Классик механикада Ньютон фикрлари асос қилиб олинган. Ньютон фазо ва вақт мутлоқ бўлади, фазо ўзида ва вақт ўзида бўлади, фазо ва вақт жисмнинг ҳаракат ҳолатига боғлиқ эмас, деб қараган. Лекин махсус нисбийлик назариясида кўрсатиладики, фазо ва вақт, нуқта ёки жисмнинг ҳаракат ҳолатига (тезлигига, тезланишига) боғлиқ. Бу боғланиш релятивистик механика деб аталадиган махсус механика курсида ўрганилади.

Биз, ушбу қўлланмада нисбатан (ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлиги 300000 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$ га нисбатан) кичик тезлик билан ҳаракат қилаётган нуқта ёки жисм кинематикасини ўрганамиз.

Нуқта (жисм) кинематикаси дейилганда, нуқтанинг ҳаракат қонуни, траекторияси, тезлиги ва тезланишларини аниқлаш тушунилади. Бу катталиклар (тезлик, тезланиш, бурчакли тезлик ва бурчакли тезланиш ва ҳоказо) кинематик параметрлар дейилади ва шу билан бирга бу параметрлар асосий кинематик тушунчалар ҳисобланади.

Нуқта (жисм) нинг фазодаги вазиятини исталган вақтда аниқлашга имкон берадиган математик боғланиш *ҳаракат қонуни* деб айтилади. Масалан, нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат қилса, ушбу $s = V \cdot t$ боғланиш нуқтанинг ҳаракат қонуни бўлади, чунки t вақтга қиймат бериб, нуқтанинг босиб ўтган s масофаси (вазиятини) ни аниқлаш мумкин. Нуқта фазода бошқа бирон нуқта ёки жисмга нисбатан вазиятини ўзгартириши *механик ҳаракат* деб аталади. Механик ҳаракат бу мавжуд бўлган ҳаракатларнинг энг соддасидир. Биз назарий механика курсида ана шундай энг оддий ҳаракатлар — механик ҳаракатларни кўриб чиқамиз.

Нуқта ёки жисм вазиятини бошқа нуқта ёки жисмга нисбатан аниқланади ва бу нуқта ҳаракат вақтида иккинчи нуқтани тинч ҳолатда деб қаралади. Ана шу иккинчи нуқта (жисм) вазияти саноқ боши ёки ҳисоб боши деб қабул қилинади. Саноқ боши билан ҳаракат қиладиган нуқта биргаликда саноқ (ўлчов) системаси деб аталади. Масалан, поезд станциядан узоқлашиб кетади. Бу ерда станция саноқ боши, станция ва поезд биргаликда ҳисоблаш системасидир. Ер Қуёшнинг атрофида ҳаракат қилади. Бу ерда Қуёш саноқ боши, Қуёш ва Ер ҳисоблаш системасидир.

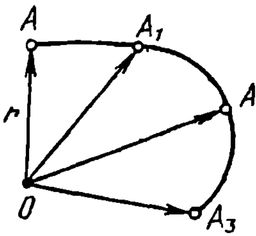
Ҳисоблаш системаларида нуқта вазиятини аниқлаш одатда маълум координата системаларида амалга оширилади, яъни қабул қилинган координата системаси — ҳисоблаш системасидир. Кўпчилик ҳолларда декарт, сферик, цилиндрик; табиий ва қутб координата системалари қўлланилади.

Нуқта (жисм) нинг ҳаракати вақтида кетма-кет вазиятларини ифодалайдиган нуқталарнинг геометрик ўрни *траектория* (ҳаракат изи) деб аталади. Траектория бу нуқта ҳаракатида қолдирилган издир. Масалан, велосипеднинг ҳаракати вақтида унинг изи тупроқли ерда яхши кўринади.

Механик система (жисм) нуқталардан тузилганлиги учун табиийки, олдин нуқта кинематикасини ўрганиш лозим, кейин қаттиқ жисм кинематикаси ўрганилади.

Ҳаракат нуқта траекториясига қараб тўғри ва эгри чизиқли ҳаракатларга, нуқта ҳаракатининг жадаллигига қараб текис ва нотекис ҳаракатларга бўлинади. Нуқтанинг ҳаракати маълум усуллар билан аниқланади.

36-§. Нуқта ҳаракатини ўрганишнинг кинематик усуллари



87- расм.

Нуқтанинг ҳаракатини қуйидаги уч усул билан ўрганишни кўриб чиқамиз ва ҳамқараймиз.

1. Векториал усулда радима вақт нуқта ҳаракат қонуни, траекториясини ва бошқа кинематик параметрларини аниқлашни асосий масала деб ус- вектор тушунчасидан фойдаланилади. Радиус-вектор бу битта четки нуқтаси (саноқ боши) ўзгармас, лекин узунлиги, ҳам йўналиши ўзгариб турувчи ва иккинчи учига стрелка қўйилган кесмадир (87- расм).

Радиус-вектор одатда $\vec{r}$ билан белгиланади ва ҳамма вақт ҳаракатланадиган нуқта радиус-векторининг охирги A нуқтасида жойлашган, деб фараз қилинади. $\vec{r}$ радиус-векторнинг бошланғич O нуқтасининг жойи ўзгармас деб қабул қилинади. Демак, $\vec{r}$ нинг модули OA кесманинг маълум масштабидаги узунлигига тенг бўлади ва бу узунлик A нуқта ҳаракати натижасида ўзгариб, фазода ихтиёрий OA, OA_1 ... вазиятларини олади. Расмдан кўринадики, агар $\vec{r}$ нинг фазодаги вазиятини аниқлай олсак, A нуқтанинг ҳам вазиятини аниқлаган бўламиз, чунки A нуқта $\vec{r}$ нинг охирида жойлашган бўлади. Қисқача қилиб айтганда, A нуқтанинг вазиятини аниқлаш учун $\vec{r}$ нинг вақт функцияси сифатида ифодалашимиз, яъни

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (36,1)$$

шаклида боғланишни аниқлашимиз лозим.

(36.1) тенглама ҳаракатдаги нуқтанинг векториал усулда ифодаланган ҳаракат қонуни ёки ҳаракат тенгламаси деб аталади. Радиус-вектор уч элементга: қўйилиш нуқтаси (O нуқта), модулга (OA кесманинг узунлиги) ва йўналишга (OA кесма охирига қўйилган стрелка) эгадир.

Радиус-вектор таърифидан кўринадики, ҳаракатланаётган нуқтанинг траекторияси бу $\vec{r}$ радиус-векторнинг охирини геометрик ўрнидир. Кетма-кет вақтда $\vec{r}$ радиус-векторнинг охирини ифодалайдиган чизиқ — $\vec{r}$ *радиус-векторнинг годографи* дейилади. Демак, $\vec{r}$ радиус-векторнинг годографи бу ҳаракатланаётган нуқтанинг траекториясидир. Бу траектория расмда AA_1, A_2A_3 эгри чизиқ билан тасвирланган.

Радиус-вектор ёки вектор усулида нуқта ҳаракатини ўрганиш механика масалаларини ечиш вақтида анча қулайликлар туғдиради ва айниқса, масаланинг физикавий моҳиятини тезгина яққол тасвирлаш имкониятини ҳам беради.

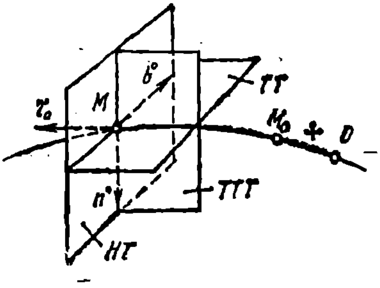
2. Табиий усулда нуқтанинг ҳаракати ўша нуқтанинг траекторияси бўйлаб ўрганилади.

Траектория устидаги ихтиёрий O нуқтани (88- расм) саноқ боши деб қабул қиламиз ва шу O нуқтанинг чап томонини манфий, ўнг томонини мусбат деб шартлашиб оламиз. Ўнг томонини манфий ва чап томонини мусбат деб ҳам кабул қилиш мумкин.

Агар O нуқтани ҳисоблаш системасининг боши деб олсак, у ҳолда M нуқтанинг вазияти $\overset{\frown}{OM}$ ёйга тенг, бу $\overset{\frown}{OM} = s$ га ёйли координата деб ёки O нуқтадан бошлаб қўйилган масофа деб олинади. Нуқтанинг вазияти s орқали топилади. Демак,

$$s = f(t) \qquad (36.2)$$

ифода нуқтанинг ҳаракат қонуни ёки ҳаракат тенгламаси деб аталади. Шундай қилиб, агар нуқ-



88- расм.

танинг траекторияси, ҳисоблаш системасининг боши ва йўналиши (ёйли координатанинг боши ва йўналиши) ҳамда ҳаракат тенгламаси $s=(t)$ маълум бўлса, M нуқтанинг ҳаракатини аниқланган деб ҳисоблаш мумкин.

s масофа билан нуқтанинг босиб ўтган йўлини алмаштириш керак эмас. Масофа s, йўл r га тенг бўлади, агар ҳаракат O нуқтадан бошланиб, фақат траекториянинг бир томонига (мусбат ёки манфий) йўналган бўлса. Агар нуқта t_0 вақтда M_0 вазиятда, t вақтда M вазиятда бўлиб, ёй координаталари мос равишда s_0 ва s бўлса, нуқтанинг $t-t_0$ вақтда босиб ўтган масофаси $r = |M_0M|$ қуйидагича топилади:

$$(OM_0 = s_0,\ OM = s).$$

$$r = |M_0M| = |OM - OM_0| = |s - s_0|.$$

Ёйли координата s нинг шу вақтда ўзгариши $ds = f'(t)\,dt$ мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин. Агар $ds > 0$ бўлса, ёйни ортиши, $ds < 0$ бўлса, O нуқта ёйнинг камайиши томон ҳаракат қилади. Бироқ, босиб ўтилган йўл ҳамма вақт мусбат, яъни $d\delta > 0$ бўлганлиги учун фақат $d\delta = |ds| = |f'(t)/dt$ бўлиши мумкинлигини ҳисобга олиш лозим.

Нуқтанинг $(0, t)$ оралиғида босиб ўтган йўли

$$\delta = \int_0^t |f'(t)/dt$$

тенглама билан топилиши лозимлигини ҳам қайд қиламиз.

Нуқтанинг ҳаракатини (36.2) қонун шаклида тасвирлаб ўрганиш табиий усулда нуқта ҳаракатини ўрганиш деб аталади. Табиий усулда нуқта ҳаракатини ўрганишда табиий координаталар системасидан (88-расм) фойдаланилади. Бу табиий координаталар системаси қуйидагича тузилади. Агар нуқта M вазиятда бўлса, шу M нуқтага уринма (тангенциал) бирлик вектор τ_0 ўтказамиз. Шу M нуқтадан, $\vec{\tau}_0$ бирлик векторидан ўтувчи ва траектория текислигида ётадиган текисликка тегиб турувчи текислик (расмда тегиб турувчи текислик TTT ва тўғриловчи текислик TT билан белгиланган) деб айтилади. Тегиб турувчи текисликка перпендикуляр бўлиб, унинг бирлик вектори τ_0 дан ўтувчи текисликка тўғриловчи текислик (TT) деб айтилади. M нуқтадан ўтувчи ва тўғриловчи ҳам тегиб турувчи текисликларга перпендикуляр бўлган текисликка *нормал текислик (НТ)* деб айтилади.

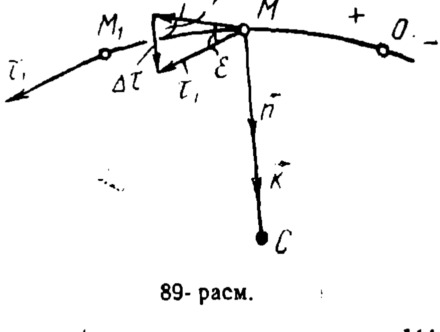
Тегиб турувчи текислик билан тўғриловчи текисликларнинг кесишган чизиғи *ОМ* эгриликнинг уринма чизиғи деб аталади. Тегиб турувчи текислик билан нормал текисликнинг кесишган чизиғи *ОМ* эгриликнинг нормал чизиғи деб аталади ва, ниҳоят, тегиб турувчи текислик билан тўғриловчи текисликнинг кесишган чизиғи *ОМ* эгриликнинг бинормал чизиғи дейилади.

Уринма, нормал ва бинормал чизиқлар табиий координаталар дейилади.

ОМ чизиғига ўтказилган учта ўзаро перпендикуляр бўлган тегиб турувчи, нормал ва бинормал текисликларга табиий учёқлик деб юритилади. Уринма, нормал ва бинормал чизиқларга ўтказилган бирлик векторлар (орталар) уринма, бош нормал ва бинормал бирлик векторлар ёки орталар деб аталади. Бу орталарни мос равишда τ, n ва b билан белгилаймиз.

М нуқтанинг ҳаракати мана шундай табиий координаталарда ўрганилади. Координата ўқлари τ, n, b орталар орқали ўтади. Орталар τ, n, b нинг модуллари ҳамма вақт бирга тенг бўлиб, ўзгармас бўлса-да, бироқ бу векторларнинг йўналиши ўзгариши мумкинлигини эсда сақлашимиз лозим. Мана шу орталар йўналишларининг ўзгариши туфайли ҳаракатдаги *М* нуқтанинг ҳаракат йўналишини характерлаш мумкин, чунки табиий координаталар системасида *М* нуқта ҳаракат қилиши билан координата боши ҳам ҳаракат қилади ва τ, n, b орталарнинг йўналишлари ўзгаради. Бу ўзгариш траектория эгрилиги қайси томонга қараб йўналганлигини кўрсатади. Ана шу траектория эгрилигини ўзгариш йўналишини характерлаш учун *(K) эгрилик вектори* деган тушунча киритилади.

Фараз қилайлик, *М* нуқта маълум Δt вақтдан кейин M_1 вазиятни эгалласин (89-расм). *М* нуқтадаги τ орта; M_1 нуқтадаги орта τ_1 бўлсин. Расмдан кўринадики, урин-



89- расм.

ма ортанинг йўналиши ўзгаряпти. Бу ўзгариш τ_1 векторнинг ўзгаришига олиб келадики, натижада $\Delta\varepsilon$ вектори ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам, τ_1 ни M_1 нуқтадан ўзига-ўзини параллел қилиб M нуқтага кўчирамиз. Натижада диогонали τ_1 га тенг бўлган параллелограмм ҳосил бўлади. Бу параллелограмм иккита тенг ёнли учбурчакдан иборат ва ҳар бир учбурчакнинг ён томонлари ортага, асоси эса $\Delta\tau$ га тенгдир. Агар τ ва τ_1 вектор орасидаги бурчакни ε деб белгиласак (бу ε бурчакка яқинлашиш бурчаги деб айтилади), бу бурчак ε орқали τ ортани ўзгаришини, $\Delta\varepsilon$ векторининг модулини топиш мумкин.

Ортанинг орттирмаси $\overrightarrow{\Delta\varepsilon}$ векторнинг ўзгаришига мос келадиган ёй координатасининг ўзгариши Δs га бўлган нисбатига эгриликнинг ўртача вектори $(K_{ўр})$ деб айтилади:

$$\vec{K}_{ўр} = \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}. \tag{36.3}$$

Агар ёй координатаси $\Delta s \to 0$ бўлса, бу ҳолда эгрилик K векторининг маълум нуқтадаги қиймати топилади, яъни

$$\vec{K} = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right). \tag{36.4}$$

Маълумки, (36.4) ни ҳосила орқали ифодалаш мумкин:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}. \tag{36.5}$$

Эгрилик векторининг модули ва йўналишини қуйидагича топамиз. 89-расмдан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon\cdot\sin\varepsilon$$

$|\varepsilon| = 1$, $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$\Delta\tau \approx \varepsilon. \tag{36.6}$$

Агар (36.6) ни (36.4) га қўйсак

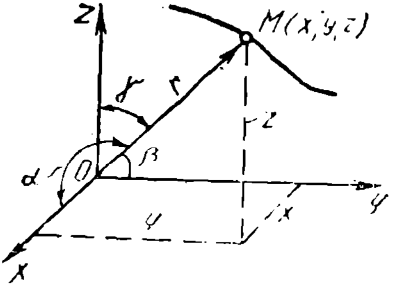
$$\vec{k} = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}\right) = \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\vec{\varepsilon}}{\Delta s}\right) = \frac{1}{\rho}\vec{n}_0, \tag{36.7}$$

бунда ρ — траектория чизиғидаги M нуқтанинг эгрилик радиусидир.

Энди K векторининг йўналишини топамиз. Расмдан

$$2\beta + \varepsilon = 180. \quad \beta = 90 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Агар $\Delta s \to 0$ бўлса, M нуқта M_1 нуқтага чексиз яқинлашади ва яқинлашиш бурчаги $\varepsilon \to 0$ бўлади. Бу ҳолда, $\beta = 90^\circ$ бўлади, демак, $\Delta\tau$ вектори τ векторига перпендикуляр йўналган ва $\Delta\tau$ векторининг ёки $\vec{K}$ векторининг йўналиши бош нормал вектори n вектори билан бир хил йўналган, яъни



90- расм.

$$\vec{K} = \frac{1}{\rho}\vec{n} \tag{36.8}$$

деб ёзишга тўла асос бор.

3. Нуқта ҳаракатининг Декарт координатасида ўрганиш усулини кўриб чиқайлик. Декарт координатаси системасида M нуқтанинг вазияти 90- расмда тасвирланган. Агар M нуқтанинг координаталари x, y, z вақт функциялари

$$x = x|t|, \quad y = y|t|, \quad z = z|t| \tag{36.9}$$

шаклларда тасвирланган бўлса, исталган вақтда M нуқтанинг вазиятини аниқлаш мумкин. (36.9) ифодаларга нуқтанинг ҳаракат қонунлари ёки ҳаракат тенгламалари деб айтилади.

Агар нуқтанинг ҳаракат қонунлари маълум бўлса, нуқтанинг траекторияси x, y, z нинг ҳар хил вақтлардаги қийматларини координата системасига қўйиб ҳосил қилинади — бу битта усул: иккинчи усулда траекторияни топиш учун ҳаракат қонунидан t.вақтни йўқотиш йўли билан аниқланади. Масалан, нуқтани $x = 3t^2$ ва $y = 4t^2$ қонунлари бўйлаб ҳаракат қилади деб олиб, шу нуқтанинг ҳаракат траекторияси топилсин.

Ечиш: ҳаракат тенгламаларини ёзамиз:

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 4t^2. \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасидан t вақтни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани иккинчисига бўлсак,

$$x = \frac{3}{4}y$$

ҳосил бўлади ва бу $4x-3y=0$ тенглама тўғри чизиқ тенгламасидир. Демак, нуқтанинг траекторияси тўғри чизиқдан иборат бўлиб, бу тўғри чнзиқ координата бошидан ўтади.

Ёй координатаси s билан x, y, z декарт координаталари орасидаги боғланиш бор. Ёй жуда кичик бўлганда, бу ёй узунлиги Δs ни ватар ds билан алмаштириш мумкин. Бу ds ватарни эса x, y, z ўқлардаги проекциялари dx, dy, dz бўлади ва ds катталиги томонлари dx, dy, dz бўлган тўғри параллелопипед диагоналига тенг бўлади. Маълумки, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ дир. Охирги тенгламадан s қуйидагича аниқланади:

$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \qquad (36.10)$$

Бу (36.10) дан топилган s нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунидир.

Радиус-вектор r билан x, y, z орасидаги боғланишларни ҳам 90-расмдан фойдаланиб топиш мумкин. Фақат бу ҳолда r нинг йўналиши α, β ва γ бурчак билан аниқланишини ҳисобга олиш лозимлигини назарда тутиш керак.

19-мисол (10.4). Нуқта $x = 3\sin t$, $y = 3\cos t$ қонунлари бўйлаб ҳаракат қилади. Шу нуқта траекториясининг тенгламасини ва траектория бўйлаб ҳаракат қонунини топинг.

Берилган:

$X = 3\sin t$
$Y = 3\cos t$

1) Нуқтанинг траекторияси аниқлансин,
2) Траектория бўйлаб нуқтанинг ҳаракат қонуни s аниқлансин.

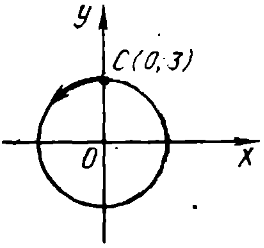
Ечиш. Нуқтанинг ҳаракат траекториясини топиш учун $\sin t$ ва $\cos t$ ни масала шартида берилган тенгламалардан топамиз:

$$\sin t = \frac{x}{3}, \quad \cos t = \frac{y}{3}.$$

Тенгламаларнинг иккала томонини квадратга кўтариб қўшамиз:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{3^2} = \sin^2 t + \cos^2 t \text{ ва } \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

бўлганлигини ҳисобга олиб, қуйидагини ёзамиз: $x + y = 3^2$ — бу нуқта траекториясининг тенгламасидир. Кўриниб турибдики, бу айлананинг тенгламаси. Бу айлананинг радиуси 3 бирликка тенг. Айлананинг маркази координата бошида ётади (91-расм). Нуқтанинг бошланғич координаталарини $t = 0$ деб, берилган x ва y дан аниқлаймиз: $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. Нуқтанинг ҳаракат йўналиши расмда кўрсатилган бўлиб, ҳаракат соат милига тескари йўналган.



91-расм.

Энди траектория бўйлаб ҳаракат қонунини, яъни s ни топамиз:

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}\ , \quad x = 3\sin t \text{ дан } dx = 3\cos t\, dt;$$

$$y = 3\cos t \text{ дан } dy = -3\sin t\, dt.$$

dx ва dy ни s га қўйсак,

$$s = \int \sqrt{9\cos^2 t\, dt^2 + 9\sin^2 t\, dt^2} = \int \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt^2} =$$

$$= \int 3\, dt = 3t + C \text{ ҳосил бўлади.}$$

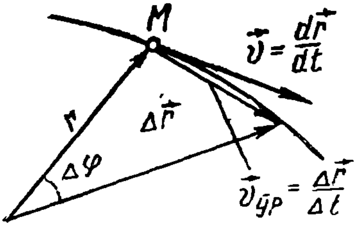
Демак, $s = 3t + C$ экан. Интеграллаш доимийси C ни масаланинг бошланғич шартидан фойдаланиб топамиз. Бошланғич шартга асосан $t = 0$ бўлганда, нуқта ҳаракат қилмайди, шунинг учун $s = 0$ бўлади, у ҳолда $0 = 3.\ 0 + C$, бундан $C = 0$ бўлади. $C = 0$ қийматини s га қўйсак, $s = 3t + 0$ ва натижада $s = 3t$ ни ҳосил қиламиз. Бу $s = 3t$ нуқтанинг траектория бўйлаб ҳаракат қонунидир.

37-§. Нуқтанинг тезлиги ва тезланиши

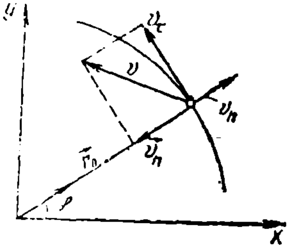
Маълумки, агар моддий нуқтанинг радиус-вектори $t - t_0 = \Delta t$ вақт ичида $\Delta \vec{r}$ катталикка ўзгарса, $\Delta \vec{r}$ ни Δt га бўлган нисбати ўртача тезлик вектори деб аталади (92-расм):

$$v_{ўр} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \qquad (37.1)$$

Агар $\Delta t \to 0$ бўлса, у ҳолда тезлик векторининг оний қийматини аниқлаш мумкин. Бунинг учун (37.1) нинг лимитини аниқлаш лозим:



92- расм.



93- расм.

$$\vec v = \lim_{\Delta t\to 0}\cdot\left(\frac{\Delta \vec r}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec r}{dt}\ . \qquad (37.2)$$

(37.2) формуладан кўринадики, нуқтанинг оний тезлик вектори $\vec r$ радиус-вектордан t вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Бу векторнинг йўналиши нуқта траекториясига ўтказилган уринма бўйлаб йўналган. Ўртача тезлик векторининг йўналиши эса траекторияга ўтказилган ватар йўналишида бўлади (93- расм).

Нуқтанинг ҳаракати вақтида радиус-векторнинг ўзгариши Δr ни ҳамма вақт иккита ташкил этувчиларга ажратиш мумкин. Бу ташкил этувчилардан биттаси радиаль $\Delta \vec r_n$, иккинчиси $\vec r$ векторига перпендикуляр бўлган трансверсаль ташкил этувчи $\Delta \vec r_\tau$ дир. Бу ерда n радиус-вектор $\vec r$ нинг устига қўйилган ва r вектори бўйлаб йўналган бирлик вектор—радиаль бирлик вектор, τ эса r векторига перпендикуляр бўлган — трансверсаль бирлик вектордир.

Агар $\Delta t \to 0$ бўлган ҳол учун нуқта тенглигини топмоқчи бўлганимизда $\vec r = r\cdot\vec n$ эканлигини ҳисобга олсак, $\Delta \vec r_n$, $\Delta \vec r_\tau$, ёки d_{r_n} ва $d\vec r_\tau$ нинг келиб чиқишини осонгина пайқаб олиш мумкин. Ҳақиқатан, $\vec r = r\cdot\vec n$ бўлганда,

$$\vec v = \frac{d(r\cdot\vec n)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec n + r\frac{d\vec n}{dt} \qquad (37.3)$$

бўлиб қолади. Агар

$$\vec v_n = \frac{dr}{dt}\cdot\vec n,$$

$$\vec{v}_\tau = r\frac{d\vec{n}}{dt} \qquad (37.4)$$

деб белгиласак, (37.3) қуйидаги шаклни олади:

$$\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_\tau. \qquad (37.5)$$

Бунда $\vec{v}_n$ — радиал тезлик, $\vec{v}_\tau$ — трансверсал тезлик деб айтилади. Радиал тезлик $\vec{v}_n$ вектори радиус-вектор $\vec{r}$ нинг йўналишининг ўзгариши туфайли ҳосил бўлади ва бу тезлик радиус-вектор давомида ётади. Трансверсал тезлик $\vec{v}_\tau$ вектори нуқтанинг ҳаракат йўналиши бўйлаб йўналган бўлиб, радиус-вектор $\vec{r}$ га перпендикулярдир. $\vec{v}_\tau$ нинг ҳосил бўлишига сабаб $\vec{r}$ нинг модулининг ўзгаришидир. Бу $\vec{v}_\tau$ тезликни қуйидаги формула ёрдамида баҳоланади:

$$\vec{v}_\tau = r\frac{d\varphi}{dt}\cdot\vec{\tau}\ \left(\text{чунки } \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{\tau}\right). \qquad (37.6)$$

Кўпчилик ҳолларда нуқтанинг тезлиги ўзгариб туради. Агар Δt вақтда тезлик вектори $\Delta\vec{v}$ га ўзгарса, $\Delta\vec{v}$ ни Δt га бўлгап нисбати ўртача тезланиш вектори деб аталади:

$$\vec{a}_{\text{ўр}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (37.7)$$

Оний тезланишни топиш учун $\Delta t \to 0$ вақтнинг лимити олинади:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (37.8)$$

Охирги тенгламадан нуқтанинг оний тезланиши тезлик векторидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг, деган хулоса келиб чиқади. Агар (37.2) ни (37.8) га қўйсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (37.9)$$

Тезланишни топиш учун радиус-вектордан вақт бўйича икки марта ҳосила олиш лозимлиги (37.9) дан кўриниб турибди.

Шундай қилиб, тезлик ва тезланиш катталикларининг иккаласи ҳам вектордир, иккаласини ҳам аниқлаш учун $r(t)$ ҳаракат қонунини билиш лозим экан. Тезланиш, тезлик векторининг ўзгариши (дифференциали) орқали топилади. Бу ўзгариш dy ҳам умумий иккита ташкил этувчидан иборат бўлганлиги учун тезланиш вектори $\vec{a}$ ҳам ташкил этувчиларга ажралиши мумкинлигини эсда тутишимиз лозим. Кейинги параграфларда тезланиш $\vec{a}$ нинг ташкил этувчилари ҳақида батафсилроқ тушунтириш берамиз.

38-§. Нуқта тезлиги ва тезланишининг координата ўқларидаги проекциялари орқали ифодалаш

Маълумки. нуқтанинг тезлиги

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{38.1}$$

орқали топилади. Агар тезлик вектори $\vec{v}$ ва радиус-вектор $\vec{r}$ ларнинг декарт ўқларидаги проекциялари v_x, v_y, v_z ва x, y, z бўлиб, ўқлардаги орталар $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ бўлса,

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \tag{38.2}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k} \tag{38.3}$$

шаклда ёзилар эди. Орталар $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ни доимий деб, тезлик $\vec{v}$ ни топамиз:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{z}. \tag{38.4}$$

(38.2) ва (38.4) тенгламанинг ўнг томонини тенглаштирамиз. У ҳолда қуйидаги ҳосил бўлади:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{38.5}$$

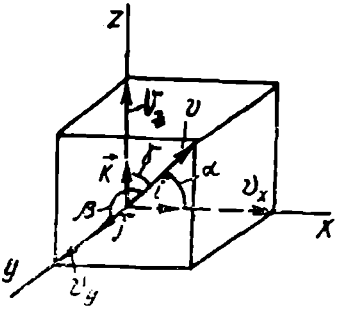
v_x, v_y, v_z — нуқта тезлигининг x, y, z ўқларидаги проекциялари (94-расм). Демак, нуқта тезлигининг маълум ўқдаги проекцияси нуқтанинг ўша ўқдаги координатасидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосиласига тенг экан.

Расмдан кўринадики, тўлиқ тезликнинг модули v_x, v_y,

v_z дан тузилган тўғри параллелопипеднинг катта диагоналига тенг, яъни

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,. \qquad (38.6)$$

v тезлик векторининг йўналиши шу $\vec{v}$ векторнинг x, y, z ўқлари билан ҳосил қилган γ, β, α бурчаклари орқали топилади. Бу α, β, γ бурчакий йўналтирувчи косинуслар орқали топилади:



94- расм.

$$\cos(\widehat{\vec{v},\ \vec{i}}) = \cos\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,, \qquad (38.7)$$

$$\cos(\widehat{\vec{v},\ \vec{j}}) = \cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}\,, \qquad (38.8)$$

$$\cos(\widehat{\vec{v},\ \vec{k}}) = \cos\gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}}}\,. \qquad (38.9)$$

Тўлиқ тезлик вектори модули (34.6) орқали, йўналиши (38.7)—(38.9) тенгламалар орқали топилади, қўйилиш нуқтаси эса ҳаракатланадиган нуқтанинг ўзида бўлади.

Тезланиш вектори a нинг ҳам проекциялари худди тезлик вектори $\vec{v}$ учун ишлатилган мулоҳазалар ва математик амаллар бажарилиши натижасида топилади (бу ишни ўқувчига ҳавола қиламиз). Натижада қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x}\,, \qquad (38.10)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y}\,, \qquad (38.11)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z} \qquad (38.12)$$

тенгламалар орқали топилади. Бу тенгламалардан тезланишнинг маълум ўқдаги проекцияси ўша ўқдаги тезлик проекциясидан олинган биринчи тартибли ҳосилага

ёки нуқтанинг ўша ўқдаги координатасидан вақт бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиласига тенг деган хулоса келиб чиқади.

Тўлиқ тезланиш $\vec{a}$ векторининг модули тезланиш проекциялари a_x, a_y, a_z орқали

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} \tag{38 13}$$

формуладан топилади. Тезланиш векторининг йўналиши, йўналтирувчи косинуслар қуйидагича аниқланади:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = \cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \tag{38.14}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = \cos\beta = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}, \tag{38.15}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = \cos\gamma = \frac{a_z}{a} \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{x}^2 + \ddot{z}^2}}. \tag{38.16}$$

Тўлиқ тезланиш векторининг қўйилиш нуқтаси характерланаётган нуқтада қўйилган бўлади, модули ва йўналиши охирги тўртта тенглама ёрдамида ҳисоблаб топилади.

Тезлик ва тезланиш векторларининг проекцияларини фақат декарт координатаси системасида кўриб чиқдик.

39- §. Табиий координаталар системасида нуқтанинг тезлик ва тезланишини аниқлаш

Юқорида кўриб ўтганимиздек, (37- §) тезлик вектори $\vec{v}_n$ ва $\vec{v}_\tau$ ташкил этувчиларига, яъни радиал ва трансверсал ташкил этувчиларга ажралади. Бунга сабаб радиал- вектор r ҳам, йўналиши ҳам сон қиймати жиҳатдан ўзгаради. Натижада $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{\tau}$ деб ёзиш мумкин эди. Бунда dr радиус-вектор r нинг модулининг ўзгаришини характерлайди ва $|\dot{d}r| = |\dot{d}s|$ деб қабул қилиш мумкин. $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$.

Маълумки, $\frac{d\vec{r}}{ds} = \tau$ ва агар $v = \frac{dS}{dt}$ ни алгебраик тезлик эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\vec{v} = v\cdot\vec{\tau} \qquad (39.1)$$

бўлади. Бу ерда τ ни радиал ёки айни ҳолда, табиий координаталар системасида уринма (тангенциал) орта дейилади.

Нуқта эгри чизиқли ҳаракат қилганида, v_n ва v_τ тезликларнинг ўзгаришлари туфайли шуларга мос равишда тезланишнинг иккита ташкил этувчилари ҳосил бўлишини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, маълумки, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ёки

$$\vec{a} = d\frac{(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (39.2)$$

Белгилашлар киритамиз

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{\tau}, \qquad (39.3)$$

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot \qquad (39.4)$$

Биринчи ташкил этувчи a_t — тангенциал ёки уринма тезланиш деб аталади. Бу тезланиш a_t тезлик вектори v нинг модулини ўзгариши туфайли ҳосил бўлиб, ҳаракат йўналишида траекторияга ўтказилган уринма бўйлаб йўналгандир. Иккинчи ташкил этувчи a_n — нормал ёки марказга интилма тезланиш деб айтилади.

Нормал тезланиш формуласи (39.4) ни бошқача шаклда келтнрамиз. Бунинг учун $\frac{d\tau}{dt}$ ни қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}. \qquad (39.5)$$

$\frac{dS}{dt} = v$ ва (37.8) га асосан $\frac{d\vec{\tau}}{dS} = \vec{k} = \frac{1}{\rho}\vec{n}$ ифодаларни ёзиш мумкинлигини ҳисобга олсак, (39.5) ни

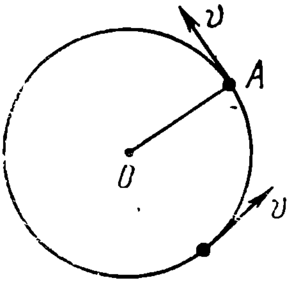
$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{\rho} = \vec{n} \qquad (39.6)$$

деб ёзиш мумкин. Ниҳоят, (39.6) ни (39.4) тенгламага қўйсак,

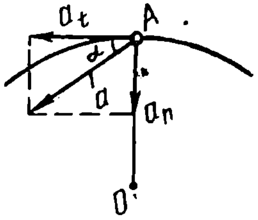
$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{p}\cdot\vec{n} \qquad (39.7)$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Нормал тезланиш a_n тезлик вектори v нинг йўналишининг ўзгариши туфайли ҳосил бўлади. Таъкидлаймизки, бу тезланиш a_n тезлик векторининг модули (сон қиймати) ўзгармаганда ҳам ҳосил бўлади. Масалан, A нуқта миқдори доимий 1 м/с тезлик билан O нуқта атрофида айланса, $|v| = \mathrm{const}$ бўлишига қарамасдан, a_n тезланиш ҳосил бўлади (95-расм).



95-расм.



96-расм.

Шундай қилиб, A нуқта эгри чизиқли ҳаракат қилса, ҳамма вақт уринма ва нормал тезланиш, a_n ва a_τ га эга бўлади. Тўлиқ тезланиш вектори a_n ва a_t векторнинг геометрик йиғиндисига тенг. Агар a_t тезланиши траекториясига уринма йўналишида, a_n тезланиш эса a_t векторига перпендикуляр бўлиб, радиал йўналишда эканлигини назарда тутсак, тўлиқ тезланиш вектори Пифагор теоремасига асосан топилиши мумкинлигини дарҳол сезамиз (96-расм), яъни умуман

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \qquad (39.8)$$

ва a нинг модули

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\,, \qquad (39.9)$$

a векторнинг йўналиши α бурчак орқали ҳисобланиши мумкин:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t} \quad \text{ёки} \quad \sin\alpha = \frac{a_n}{a}. \qquad (39.10)$$

Шундай қилиб, табиий координаталар системасида нуқтанинг тезлиги ва тезланишини тўлиқ характерлашни ўрганиб чиқдик. Нормал тезланиш ρ эгрилик радиусга боғлиқ бўлиб, орта n нинг ўзгариши туфайли пайдо бўлади, уринма тезланиш a_t эса $\left|\frac{dv}{dt}\right|$ га боғлиқ, яъни v нинг модулининг ўзгариши натижасида ҳосил бўлади. Бу тезланиш a_t ни, тезлик ва тезланишларнинг проекциялари v_x, v_y, v_z ва a_x, a_y, a_z орқали қуйидагича топамиз.

Агар (39.3) формулада $\tau = 1$ деб олсак, тангенциал тезланиш модули

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

ифодага тенг бўлади. Тезлик v формуласини (39.6) тенгламадан келтириб a_t га қўйсак,

$$a_t = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right) = \left[(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\frac{1}{2}}\right]'_t =$$

$$= \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2(v_x\cdot\dot{v}_x + v_y\cdot\dot{v}_y + v_z\cdot\dot{v}_z) =$$

$$= \frac{v_x\cdot v_x + v_y\cdot v_y + v_z\cdot v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}.$$

Демак,

$$a_t = \frac{v_x\cdot a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}. \qquad (39.11)$$

Охирги тенгламада $\dot{v}_x = a_x$, $\dot{v}_y = a_y$ ва $\dot{v}_z = a_z$ деб олинган. (39.11) тенглама амалий масалаларни, декарт координата системасидаги тезлик ва тезланиш проекциялари орқали a_t ни топиш учун қулайдир. Агар $a_t > 0$ бўлса, тезланувчан $a_t < 0$ бўлса, секинланувчан ҳаракат мавжуд бўлади.

40- §. Тезлик ва тезланиш векторларига асосланиб нуқтанинг ҳаракатини классификациялаш (ҳаракат турларига ажратиш)

Нуқта ҳаракатининг характерини тезлик ва тезланишларнинг векторларига боғлиқлигининг хусусий ҳолларини кўриб чиқайлик.

1. $\vec{a}_t = 0$, $\vec{a}_n = 0$ бўлса, (39.9) га асосан, тўлиқ тезланиш вектори $\vec{a} = 0$ бўлади. Бу ҳолда $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ тенгламадан $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ ва $v = \text{const}$ ҳосил бўлади. Демак, нуқта тезлигининг миқдори ҳам, йўналиши ҳам ўзгармайди.

Фараз қилайлик,

$$v = v_0 = \text{const} \tag{40.1}$$

бўлсин.

Иккинчи томондан $v = \frac{dS}{dt}$ ва $v_0 = \frac{dS}{dt}$ бўлсин, бу ҳолда

$$s = \int v_0 dt; \quad s = v_0 t + C \tag{40.2}$$

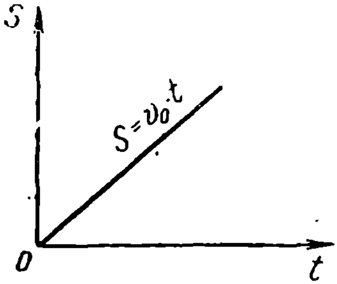
бошланғич вақтда, яъни $t = 0$ бўлганда $s = s_0 = 0$ бўлса, (40.2) дан интеграллаш доимийси C ни топамиз: $0 = v_0 \cdot 0 + C$, бунда $C = 0$ бўлади ва

$$s = v_0 t \tag{40.3}$$

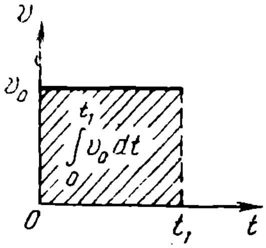
тенгламани ҳосил қиламиз.

(40.1) ва (40.3) тенглама тўғри чизиқли текис ҳаракат учун тезлик ва йўл тенгламаларидир. Демак $a = 0$ бўлган ҳолда нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида ёки тинч ҳолатда бўлади. Тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида ёки тинч ҳолатида бўлган нуқта тезланишга эга эмас, яъни бу ҳолда тезланиш нолга тенг бўлади.

Бундай ҳол учун йўл ва тезлик графиклари 97 ва 98- расмда тасвирланган. Йўл графигида тўғри чизиғи билан абсцисса ўқи орасидаги α бурчак тангенси нуқтанинг тезлигига тенг, яъни $v_0 = \operatorname{tg} \alpha$, v_0 ортиши билан α бурчак ҳам ортади ва s тўғри чизиқ тикроқ бўлади, яъни s чизиғи ордината ўқига яқинлашади. Тезлик графигидан фойдаланиб, босиб ўтилган йўлни топиш мумкин. Масалан, 0 ва t_1 ора-



97- расм.



98- расм.

лиқда босиб ўтилган йўл v_0 тезлик ва Ot_1 кесмалардан тузилган тўртбурчакнинг юзига тенг бўлиб, бу юз $\int_0^t v_0 dt$ орқали ҳисобланади.

2. $\vec{a}_t = \text{const}$, $\vec{a}_n = 0$ бўлса, бу ҳолда $\vec{a}$ тўлиқ тезланиш вектори a_t тангенциал тезланишга тенг бўлади:

$$\vec{a} = \vec{a}_t = \text{const}. \qquad (40.4)$$

Маълумки, $a_\varepsilon = \frac{dv}{dt}\vec{\varepsilon}$, агар орта $|\vec{\varepsilon}| = 1$ деб олсак, бу ҳолда нуқта тезлигининг фақат модули ўзгаради, йўналиши ўзгармайди. Демак, бу ҳолда ҳам нуқта тўғри чизиқли ҳаракат қилади, тезланишнинг йўналиши ўзгармайди ($a = \text{const}$). Бундай ҳаракат тўғри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат деб аталади.

Шундай ҳаракат учун A нуқтанинг оний тезлигини босиб ўтган масофасининг формулаларини топайлик:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad v = \int a dt = at + C, \qquad (40.5)$$

C_1 интеграллаш доимийсининг қийматини бошланғич шартдан топамиз. $t = 0$ бўлганда $v = v_0$ (бошланғич тезлик) бўлсин, у ҳолда (40.5) дан $v_0 = a \cdot 0 + C_1$ ва $C_1 = v_0$ бўлади. C нинг қийматини (40.5) га қўйсак,

$$v = v_0 \pm at \qquad (40.6)$$

ҳосил бўлади. Энди s ни топиш учун $v = \frac{ds}{dt}$ ни (40.6) га қўямиз:

$$ds = (v_0 + at)\,dt$$

$$s = \int (v_0 + at)\,dt = \int v_0\,dt + \int at\,dt$$

$$s = v_0 t + \frac{at}{2} + C_2. \qquad (40.7)$$

Бошланғич шартдан $t = 0$ бўлганда, $S = 0$ ва

$$O = 0 + 0 + C_2,$$

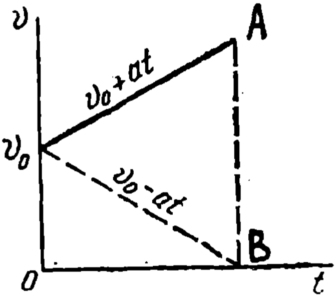
$$c_2 = 0$$

C_2 ни (40.7) га қўйсак

$$s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2} \qquad (40.8)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

(40.6) ва (40.8) тенглама тўғри чизиқли текис ўзгарувчан ҳаракат қиладиган нуқта тезлигини ва босиб ўтган йўлининг формулаларидир. Бу формулаларда $a>0$ деб олинган эди, агар $a<0$ деб қабул қилсак, (40.6) ва (40.8) ифодадаги мусбат (+) ишорани манфий (—) ишора билан алмаштириш лозимдир. Ана шу айтилганларни ҳисобга олган ҳолда (40.6) ва (40.8) тенгламага ҳам мусбат, ҳам манфий ишоралар қўйилган. Агар текис тезланувчан ҳаракат бўлса мусбат, текис секинланувчан ҳаракат бўлса манфий ишора олинади.



99- расм.

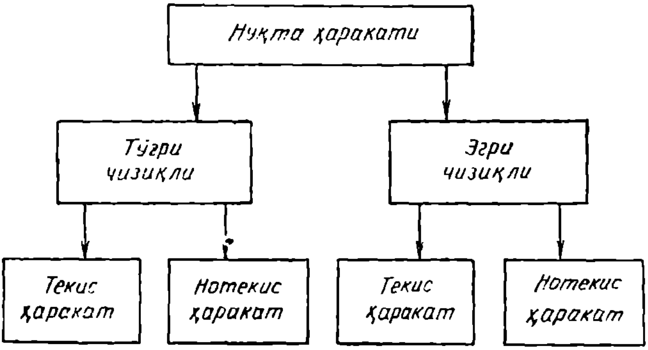
Шундай қилиб, тезланиш ўзгармас бўлса, текис ўзгарувчан ҳаракат содир бўлади. Бу ҳолда 99- расмда кўрсатилган тезлик графигидан фойдаланиб. босиб ўтилган s йўлни аниқлаш мумкин. Бу йўл расмдаги тўртбурчак OV_0AB нинг юзига тенгдир.

3. $\vec{a}_t = 0$, $\vec{a}_n = \text{const}$ бўлса, нуқтанинг тўлиқ тезланиш вектори $\vec{a}_n$ нормал тезланиш вектори a га тенг бўлади:

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (40.9)$$

Охирги тенгламада a нинг модули $a = \frac{v^2}{\rho}$, яъни бу ҳолда нуқта тезлигининг йўналиши ўзгаради, лекин тезликнинг модули ўзгармайди. Бу ҳолда нуқта эгри чизиқли текис ҳаракат қилади ва тезланишнинг модули $\frac{v^2}{\rho}$ га тенг бўлади. Қизиғи шундаки, тезликнинг сон қиймати (доимий) ўзгармаса-да, тезлик вектори ўзгаради. Бу векторнинг ўзгариши тезлик йўналишининг ўзгариши натижаси бўлиб, нуқта нормал тезланишга эга бўлади.

4. $\vec{a}_t \neq 0$, $\vec{a}_n \neq 0$ бўлса, нуқтанинг тўлиқ тезланиш вектори (39.9) формула ёрдамида топилади. Бу ҳолда ҳаракат эгри чизиқли бўлади. Бунда нуқта тезлигининг ҳам сон қиймати ва ҳам йўналиши ўзгаради. Агар v ва a_t бир хил йўналган бўлса, нуқта тезланувчан, v ва a_t қарама-қарши йўналган бўлса, нуқта секинланувчан ҳаракатланади.

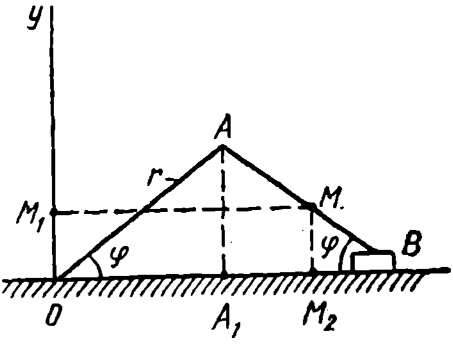


100- расм.

Шундай қилиб, нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли ва эгри чизиқли ҳаракатларга ажралади ва бу ҳаракатларнинг ҳар биттаси текис ёки нотекис бўлиши мумкин (100- расм).

Расмдан кўринадики, нотекис ҳаракат тўғри чизиқли ва эгри чизиқли ҳаракат бўлиши мумкин, иккала ҳолда ҳам тезлик вектори ўзгарувчан бўлади. Агар тезланиш вектори $\vec{a}_t = \text{const}$ бўлса, текис ўзгарувчан ҳаракат; $\vec{v} = \text{const}$ бўлса, тўғри чизиқли текис ҳаракат содир бўлади. Шунинг учун (40.6) ва (40.8) тенгламадаги a ни тангенциал тезланиш деб тушунмоқ лозим.

19-мисол. (12.22) 101-расмдан кўрсатилган кривошип —



101-расм.

шатун механизмида $r = l = 60$ см, $MB = \frac{1}{3} l$, $\varphi = 4\pi t$ (t — секундларда ифодаланган) деб қабул қилиб, механизмнинг M нуқтасининг $\varphi = 0$ бўлган лаҳзадаги траекторияси, тезлиги, тезланиш ва эгрилик радиуси аниқлансин.

Берилган

$OA = r = l = 60$ см $= AB$

$MB = \frac{1}{3} l = 20$ см

$\varphi = 4\pi t$

---

v — ? a — ? g — ?

$\varphi = 0$ бўлганда M нуқтанинг траекторияси топилсин.

Ечиш:

M нуқтанинг траекториясини аниқлаш учун олдин M нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш керак. Бунинг учун O нуқтани марказ қилиб, X ва $У$ координата ўқларини ўтказамиз. M нуқтанинг координаталари $X_м$, $У_м$ бўлсин.

$$X_м = OM_2 \tag{1}$$

$$У_м = OM_1 = MM_2 \tag{2}$$

Расмдан OM_1, OB ни қуйидагича топамиз:

$$OM_2 = OB - M_2B \tag{3}$$

$$OB = 2 \cdot OA_1 = 2 \cdot OA \cos\varphi \tag{4}$$

$$\Delta MBM_2 \text{ дан } BM_2 = MB \cdot \cos\varphi = \frac{1}{3} l \cos\varphi \tag{5}$$

(4), (5) ни (3) га қўйсак:

$$X_{\text{м}} = OM_2 = 2\,OA\cdot\cos\varphi - \frac{1}{3}l\cos\varphi \qquad (6)$$

ёки

$$X_{\text{м}} = 2\cdot 60\cdot\cos 4\,\pi\,t - 20\cdot\cos 4\,\pi\,t.$$

$$X_{\text{м}} = 100\cdot\cos 4\,\pi\,t. \qquad (7)$$

Расмдан $y = OM_1 = MM_2 = MB\sin\varphi$
ёки

$$y = 20\cdot\sin 4\,\pi\,t. \qquad (8)$$

(7) ва (8) ифода нуқтанинг ҳаракат тенгламалари деб аталади. Энди нуқтанинг траекториясини топиш учун (7) ва (8) дан вақтни йўқотамиз, бунинг учун (7) дан $\cos 4\,\pi\,t$ ва (8) дан $\sin 4\,\pi\,\mathrm{t}$ ни топамиз:

$$\cos 4\,\pi\,t = \frac{X_{\text{м}}}{100};$$

$$\sin 4\,\pi\,\mathrm{t} = \frac{Y_{\text{м}}}{20}.$$

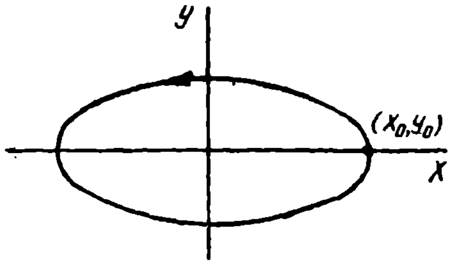
Охирги тенгламаларнинг иккала томонларини квадратга кўтариб, чап ва ўнг томонларини алоҳида-алоҳида қўшамиз:

$$\frac{X^2_{\text{м}}}{100^2} + \frac{Y^2_{\text{м}}}{20^2} = \sin^2 4\,\pi\,t + \cos^2 4\,\pi\,t.$$

Бу тенгламанинг ўнг томони бирга тенг, демак,

$$\frac{X^2_{\text{м}}}{100^2} + \frac{Y^2_{\text{м}}}{20^2} = 1. \qquad (9)$$

(9) ифода эллипснинг тенгламасидир. Демак, *M* нуқта траекторияси ярим ўқлари 100 ва 20 га тенг бўлган эллипсни ташкил этади (102-расм). Бу эллипс чизувчи нуқтанинг бошланғич вазияти, яъни $t = 0$ бўлганда, (7) ва (8) га асосан $X = 100$, $Y_0 = 0$ бўлади. Бу *M* нуқта соат милига нисбатан тескари йўналишда ҳаракат қилади.



102- расм.

Энди *M* нуқта тезланишини (ҳаракат текисликда бўлганлиги учун $z = 0$ деб олиб) (39.13) га асосан топамиз:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,. \tag{10}$$

a_x ва a_y тезланиш проекцияларини (39.10), (39.11) га асосан топсак,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \tag{11}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}. \tag{12}$$

v_x, v_y ни (38.5) формуладан топамиз:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \tag{13}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}. \tag{14}$$

(13) ва (14) га асосан, (7) ва (8) дан ҳосила олиб, v_x ва v_y топилади:

$$v_x = (100 \cos 4\pi t)'_t = -400\pi \sin 4\pi t \tag{15}$$

$$v_y = (20 \sin 4\pi t)'_t = 80\pi \cos 4\pi t. \tag{16}$$

Энди v_x, v_y ни $\varphi = 0$, демак, $t = 0$ лаҳзадаги қийматларини топамиз:

$$v_{x/t=0} = -400\pi \sin(4\pi \cdot 0) = 0. \tag{17}$$

$$v_{y/t=0} = 80\pi \cos(4\pi \cdot 0) = 80\pi. \tag{18}$$

a_x ва a_y ни топамиз:

$$a_x = v_x = -(400\pi \sin 4\pi t)'_t = -1600\pi^2 \cos 4\pi t \tag{19}$$

$$a_y = v_y = (80\pi \cos 4\pi t'_t = -320\pi^2 \sin 4\pi t. \tag{20}$$

$$a_{x|t=0} = -1600\pi^2 \cos(4\pi \cdot 0) = -1600\pi^2. \tag{21}$$

$$a_{y|t=0} = -320\pi^2 \sin(4\pi \cdot 0) = 0. \tag{22}$$

Ниҳоят, (21), (22) даги қийматларни (10) тенгламага қўямиз:

$$a_{|t=0} = \sqrt{(-1600\pi^2)^2 + 0^2} = 1600\pi^2 \tag{23}$$

Демак,

$$a = 1600\,\pi^2\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

(17) ва (18) ни (39.6) га қўйиб, оний тезликни топамиз:

$$v|_{t=0} = \sqrt{0^2 + (80\,\pi)^2} = 80\,\pi.$$

$$v = 80\,\pi\ \frac{\text{см}}{\text{с}}. \qquad (24)$$

Масала шартига асосан нуқта траекториясининг $t = 0$ лаҳзадаги эгрилик радиусини топиш керак. Бу эгрилик радиуси ρ (39.7) формуладан топилади:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}. \qquad (25)$$

Нормал тезланишни (39.9) дан топсак,

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \qquad (26)$$

формула ҳосил бўлади. Бироқ (26) тенгламага асосан a_t номаълум. a_t ни (39.11) формуладан ($v_z = 0$, $a_z = 0$ деб олиб) топамиз:

$$a_t = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \qquad (27)$$

$a_t|_{t=0}$ қийматини (v_x, v_y, a_x, a_y, v) ни (27) га қўйиб, ҳисоблаймиз:

$$a_t = \frac{0 \cdot (1600\,\pi^2 + 8\,\pi \cdot 0)}{80\,\pi} = 0. \qquad (28)$$

Тўлиқ тезланишнинг (23) даги қийматини ва тангенциал тезланишнинг (28) даги қийматини (26) га қўямиз, бу ҳолда

$$a_{n/t=0} = \sqrt{(1600\,\pi^2)^2 - (0)^2} = 1600\,\pi^2$$

бўлади. Ниҳоят траекториянинг $t = 0$ вақтдаги эгрилик радиуси

$$\rho|_{t=0} = \frac{v^2}{a_n} = \frac{6400\,\pi^2}{1600\,\pi^2} = 4\ \text{см}$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

20-мисол. (12.7). Координата бошида бўлган ва $v_{0x} = 2\,\pi\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$ бошланғич тезликка эга бўлган сирпанчиқ $a_x = -\pi^2 \sin\frac{\pi}{2}t$ тезланиш билан тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Шу сирпанчиқнинг ҳаракат қонуни топилсин. Сирпанчиқнинг босиб ўтган масофаси, тезлиги ва тезланишининг ўзгариш графиклари чизилсин.

Берилган:

$a_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \ \frac{\text{см}}{\text{с}^3}$

$v_{0x} = 2\pi \ \frac{\text{см}}{\text{с}}$

X—? v—?, a—?

графиклар чизилсин.

Ечиш. Бу 19-мисолнинг аксидир, яъни агар олдинги масалада нуқтанинг тезлиги ва тезланишини топиш керак бўлса, бу масалада аксинча, нуқта тезланишининг синус қонуни бўйича ўзгариши маълум бўлиб, ҳаракат қонунини топиш талаб этилади.

Нуқтанинг ҳаракат қонуни X ни $v_x = \frac{dx}{dt}$ дан топамиз:

$$dx = v_x dt.$$

$$X = \int v_x dt.$$

X ни топиш учун v_x маълум бўлиши керак, бу v_x ни эса қуйидаги $dx = \frac{dv_x}{dt}$ дан топамиз: $v_x = \int a_x dt$.

a_x нинг ифодасини масала шартидан келтириб, охирги тенгламага қўямиз:

$$v_x = -\int \pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t \, dt = -\pi^2 \int \sin \frac{\pi^2}{2} t \, dt.$$

$\int \sin \frac{\pi}{2} t \, dt = -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} t + C_1$ эканлигини ҳисобга олсак, $v_x = 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t + C_1$ бўлади. Интеграллаш доимийси C_1 ни бошланғич шартдан фойдаланиб топамиз. $t = 0$ бўлганда, $v_x = v_{0X} = 2\pi$, шунинг учун $2\pi = 2\pi \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + C_1$ ёки $2\pi = 2\pi + C_1$, демак, $C_1 = 0$ га тенг. У ҳолда

$$v_x = 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t$$

тезлик формуласи келиб чиқади. Бу тезлик формуласини $X = \int v_x dt$ га қўйсак

$$X = \int 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t \, dt = 2\pi \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t + C_2$$

ҳосил бўлади. Бошланғич шартга асосан $t = 0$, $X = X_0 = 0$ бўлади ва $0 = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) + C_2$. $C_2 = 0$. Охирги $C_2 = 0$ ни X нинг ифодасига қўйсак,

$$X = 4\sin\frac{\pi}{2}t$$

ҳосил бўлади.

Охирги ифода нуқтанинг ҳаракат қонуни ёки ҳаракат тенгламасидир. Демак, масала шартига асосан сўралган ҳаракат қонунини топдик. Энди x, v_x ва a_x нинг графигини чизишимиз учун олдин бу катталикларни ифодаловчи тенгламаларни тартиб билан ёзиб чиқайлик (бундай тартибда ёзиш қулайлик ҳосил қилиш учун керак)

$$X = 4\sin\frac{\pi}{2}t.$$

$$v_x = 2\pi\cos\frac{\pi}{2}t.$$

$$a_x = -\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t.$$

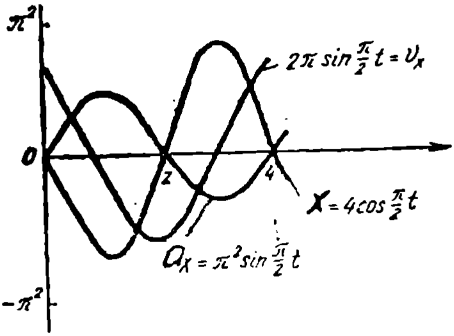
t вақтга 0, 1, 2, 3, 4 . . . қийматларни бериб, шу вақтдаги x, v_x, a_x нинг сон қийматларини топиб, қуйидаги жадвалга ёзамиз:

Вақт t, с	X, м	v_x, $\frac{м}{с}$	a_x, $\frac{м}{с^2}$
0	0	2π	0
1	4	0	$-\pi^2$
2	0	-2π	0
3	-4	0	π^2
4	0	2π	0

Агар вақт $t > 4$ бўлса, X, v_x, a_x нинг жадвалда кўрсатилган қийматлари такрорланади, шунинг учун вақт t нинг жадвалда кўрсатилган қийматлари билан чекланамиз.

Ордината ўқида маълум масштаб билан X, v_x, a_x нинг қийматларини, абсцисса ўқида t вақтни қўйиб, жадвалдаги қийматларни графикка ўтказамиз. 103-расмдан кўринадики, X, v_x, a_x фаза жиҳатидан бир-биридан фарқ қилади.

21-мисол (12.22). Снаряд ҳаракатининг тенгламалари



103- расм.

$X = v_0 t\cos\alpha_0$, $Y = v_0 t\sin\alpha_0 - \frac{gt^2}{2}$ шаклда берилган. Бунда v_0 ва α_0 — бошланғич тезлик ва отилган снаряднинг горизонтга нисбатан ташкил этган бурчаги. Бошланғич вақт $t = 0$ бўлганда ва снаряднинг ерга тушган вақтида снаряднинг эгрилик радиусини топинг.

Жавоби. $\rho = \frac{v_0^2}{g\cdot\cos\alpha_0}$.

22-мисол (12.14). Нуқта $X = 10\cos 2\pi\frac{t}{5}$, $Y = 10\sin\frac{2\pi t}{5}$ қонунлар бўйича ҳаракат қилади (x, y — сантиметрларда, t — секундларда ифодаланг).

Нуқтанинг ҳаракат траекторияси, тезлигининг миқдори ва йўналиши ҳамда тезланишининг миқдори ва йўналишини топинг.

Жавоби: $X^2+Y^2 = 10^2$; $v = 4\pi\frac{\text{см}}{\text{с}}$; $a = 1{,}6\pi^2\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

23-мисол (12.28). Нуқта $X = 2t$, $Y = t^2$ қонун бўйича ҳаракат қилади (t — секундларда, x ва y — сантиметрларда ифодаланган). $t = 1$ с вақтда нуқтанинг тезлиги, тезланиши ва эгрилик радиусини топинг. Нуқтанинг тезлиги ва тезланишининг ўзгариш графигини чизинг.

Жавоби: $v = 2\sqrt{2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$, $a = 2\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$, $(\widehat{v, x}) = 45°$, $(\widehat{a, x}) = 90°$.

VIII БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМ КИНЕМАТИКАСИ

41-§. Қаттиқ жисм кинематикасини ўрганиш

Аввал айтиб ўтганимиздек, бир-бирига қаттиқ боғланган нуқталар тўплами *қаттиқ жисмлар* дейилади. Бир-бирига қаттиқ боғланган нуқталар деганда, нуқталар орасидаги масофанинг ўзгармаслиги тушунилади.

Ихтиёрий икки нуқтаси орасидаги масофа ўзгармас бўлган жисм *абсолют қаттиқ жисм* деб аталади. Одатда, абсолют сўзи ишлатилмасдан тўғридан-тўғри қаттиқ жисм ва ҳатто соддагина жисм деган сўз ишлатилади. Қаттиқ жисмнинг фазодаги ҳаракат йўналишини кўрсатадиган сон жисмнинг *эркинлик даражаси* деб аталади. Эркинлик даражасини i ҳарфи билан белгиласак, масалан, $i=1$ бўлса, жисм фақат бир ўқда, $i=2$ бўлса, икки ўқда, $i=3$ бўлса, уч ўқда ва ҳоказо ҳаракат қилади.

Қаттиқ жисм кинематикасини аниқлаш деганда, шу жисмнинг эркинлик даражасини, жисмнинг ихтиёрий нуқтасининг ҳаракат қонунини, тезлиги ва тезланишини, ҳаракат траекториясини аниқлаш масалалари тушунилади.

Қаттиқ жисмнинг ҳаракати қуйидаги турларга ажратиб ўрганилади:

1) Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати.

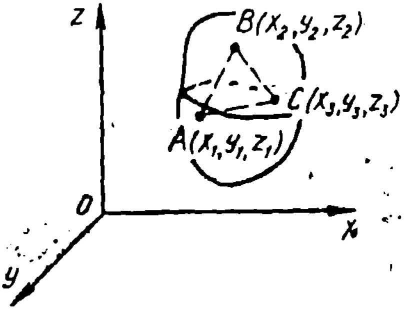
2) Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракати.

3) Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати ёки текис фигуранинг ҳаракати.

4) Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракати ёки сферик ҳаракати.

5) Қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳоли.

Фазода ҳаракати чекланмаган жисм *эркин қаттиқ жисм* деб аталади. Эркин жисмнинг эркинлик даражасини топайлик. Эркин жисм вазиятини бир тўғри чизиқда ётмаган ихтиёрий учта нуқта орқали аниқлаш мумкин. Бу нуқталар *A*, *B* ва *C* бўлиб,



104- расм.

ҳар бир нуқта вазияти учта координата билан характерланади. Учта нуқтанинг вазияти 9 та координата билан аниқланади, лекин A, B, C нуқталар бир-бирига боғлиқ. Бу боғланиш қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади (104-расм):

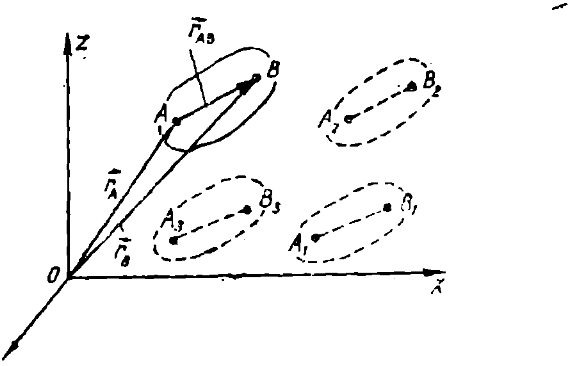
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$
$$BC = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2},$$
$$CA = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}.$$

Бу тенглама (боғланиш)лар учта, умумий координаталар сони 9 га тенг. Эркинлик даражаси умумий координаталар сони 9 дан боғланишлар сони 3 нинг айрилганига тенг, чунки 9 та умумий координата бир-бирига боғлиқ. Демак, эркин жисмнинг эркинлик даражаси, $i=9-3=6$ га тенг.

42-§. Қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати

Агар қаттиқ жисмнинг ҳаракати вақтида унинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирувчи тўғри чизиқ ўзига-ўзи параллел бўлиб ҳаракат қилса, бундай ҳаракат қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати дейилади. 105-расмда жисмнинг илгариланма ҳаракатининг тўртта: AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 вазиятлари кўрсатилган.

Цилиндр ичидаги поршень ҳаракати, поезддаги спиваккнинг ҳолати, тикув машинасида игнанинг ҳаракати ва бошқа машина-механизмларнинг ҳаракати илгари-



105- расм.

ланма ҳаракатга мисол бўла олади. Илгариланма ҳаракат қилаётган жисмнинг исталган нуқтасининг тезлиги, тезланиши ва траекториясини қуйидаги теоремага асосан топилади.

Теорема. *Илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг барча нуқталарининг траекториялари эквидистант (бир-бирига параллел) чизиқларни ҳосил қилади ва ҳамма нуқталари геометрик тенг бўлган тезлик ва тезланишларга эга.*

Теоремани исботлаш учун жисмнинг ихтиёрий A ва B нуқталарини танлаб оламиз. Бу нуқталар орасидаги AB масофа қаттиқ жисм таърифига асосан ўзгармасдир, иккинчи томондан AB миқдорни $\vec{r}_A$ ва $\vec{r}_B$ вектори орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\triangle OAB \text{ дан } \vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \qquad (42.1)$$

B нуқтанинг тезлигини топамиз:

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{AB}) = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{AB}}{dt} \qquad (42.2)$$

$\vec{AB} = \text{const}$ бўлганлиги учун $\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0$, демак,

$$\vec{v}_B = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A. \qquad (42.3)$$

(42.3) дан кўринадики, B нуқтанинг тезлиги A нуқтанинг тезлигига тенг. A ва B нуқта ихтиёрий бўлганлиги учун қаттиқ жисмнинг ҳамма нуқталарининг тезлик вектори бир-бирига тенг (геометрик тенг) деб айтиш мумкин. Энди B нуқтанинг тезланишини аниқлаймиз:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}. \qquad (42.4)$$

Агар (41.3) га асосан $\vec{v}_B$ нинг ўрнига $\vec{v}_A$ ни қўйсак:

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A \qquad (42.5)$$

ифода ҳосил бўлади, яъни B нуқтанинг тезланиши A нуқтанинг тезланишига геометрик тенг. Бундан, A ва B нуқталар ихтиёрий бўлганлиги учун қаттиқ жисмнинг ҳамма нуқталари бир хил тезланишга эга, деган хулоса келиб чиқади.

Энди ҳамма нуқталарнинг траекториялари устма-уст тушадиган ёки бир-бирига параллел бўлган эквидистант чизиқлар эканлигини кўрсатамиз. Бир-бирига параллел, демак, бир-биридан бир хил масофада турган чизиқлар эквидистант чизиқлар дейилади (экви — бир хил, дистант — масофа деган маънони билдиради). Илгариланма ҳаракат таърифидан, масалан, *B* нуқта *A* нуқтадан *AB* масофада жойлашган бўлсин. Шунинг учун, агар *A* нуқта траекторияси ўзгарса, *B* нуқта *A* дан аввалгидек AB масофада жойлашиши учун, *B* нуқта *A* нуқтага параллел траектория бўйлаб ҳаракатланишга мажбурдир, чунки, акс ҳолда жисм илгариланма ҳаракат қилолмайди.

Шундай қилиб, теорема тўлиқ исботланди: жисм илгариланма ҳаракатланганда унинг ҳамма нуқталарининг траекториялари эквидистант чизиқларни ҳосил қилади ва барча нуқталарининг тезликлари ва тезланиши (геометрик) векторлари бир-бирига тенг экан. Демак, илгариланма ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмни битта нуқта каби қараш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда, яъни қаттиқ жисм илгариланма ҳаракат қилганида, уни битта нуқта деб қараш мумкин экан.

Илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат қонуни, унинг исталган нуқтасининг ҳаракат қонуни сингари бўлади. Амалда қаттиқ жисмнинг оғирлик марказини ифодалайдиган нуқтани *C* билан белгилаб, шу нуқтанинг ҳаракат қонуни

$$x_c = f_1(t),\quad y_c = f_2(t),\quad z_c = f_3(t) \qquad (42.6)$$

кўринишда ёзилади.

(41.6) тенглама илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат қонуни бўлади. Бу тенгламалар учта бўлганлиги сабабли, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг эркинлик даражаси ҳам учга тенгдир. Эркин нуқтанинг ҳам эркинлик даражаси учга тенглигини эсласак, илгариланма ҳаракатдаги жисм ҳам худди нуқта сингари эканлигига яна бир марта ишонч ҳосил қиламиз.

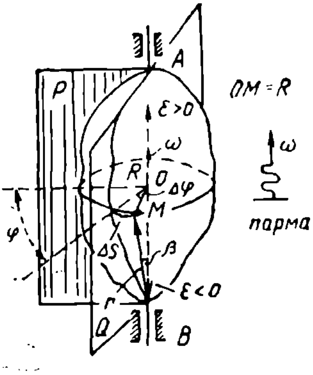
Илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг нуқталарининг траекториялари турлича, шу жумладан, тўғри чизиқ ҳам бўлиши мумкин.

43-§. Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракати

Агар қаттиқ жисм ҳаракати вақтида унинг ҳамма нуқталари маркази айланиш ўқи деб айтиладиган бир тўғри чизиқда ётган концентрик айланалар чизса, бундай ҳаракат *айланма ҳаракат* дейилади.

Бундай ҳаракатда жисмнинг ҳамма нуқталари айланиш ўқига перпендикуляр бўлган текисликларда ҳаракат қилиб, айланалар чизади. Бу айланаларнинг марказлари айланиш ўқида ётади. Албатта, айланиш ўқида ётган нуқталар ҳаракатда қатнашмайди. Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатига Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши, электр моторларининг ҳаракати, автомашина ғилдиракларининг ҳаракатларн ва бошқа кўп ҳаракатларни мисол тариқасида келтириш мумкин.

Бундай ҳаракатни амалга ошириш учун жисмнинг иккита *A* ва *B* нуқталарини қўзғалмас қилиб маҳкамлаймиз. Бу ҳолда тўғри чизиқ *AB* (106-расм) айланиш ўқи бўлади ва *AB* устида ётган нуқталар ҳаракатсиз бўлади, жисмнинг ҳамма бошқа нуқталарн *AB* атрофида айланади.



106-расм.

Жисмнинг исталган нуқтасининг айланиш ўқига нисбатан вазиятини бурилиш бурчаги φ орқали қуйидагича топамиз. *AB* тўғри чизиқдан ўтадиган ўқни *z* деб белгилайлик. *z* ўқидан қўзғалмас *P* ва қўзғалувчан *Q* текисликларни ўтказамиз. *z* ўқи юқорига йўналган деб оламиз. Бурилиш бурчаги φ нинг (*P* ва *Q* текисликлар орасидаги бурчак φ га тенг) ишорасини қуйидагича танлаймиз. Агар *z* ўқи охиридан қарайдиган кузатувчи жисм айланишини соат мили йўналишига тескари йўналишда кўрса, бурилиш бурчаги φ мусбат, акс ҳолда (соат мили йўналишида) манфий бўлади.

φ бурилиш бурчаги радианда ёки градусда ифодаланади. Маълумки, бир радиан ёй узунлиги радиусига тенг бўлган марказий бурчакка тенгдир. Шунинг учун 360° бурчак 2π радианга тенг. Демак,

$$1\ \text{рад} = \frac{360}{2\pi} = 57°17'44{,}8''.$$

Агар φ маълум бўлса, жисм нуқталарини қўзғалмас P текисликка нисбатан вазиятини аниқлаш мумкин. Агар жисм бир марта айланса, бурилиш бурчаги 2π радианга ўзгаради, жисм N марта айланса $\varphi = 2\pi \cdot N$ бўлади.

Умуман, жисмнинг вазиятини аниқлаш учун φ ни вақт функцияси сифатида ифодалаш лозим. Агар

$$\varphi = f(t) \qquad (43.1)$$

кўринишдаги боғланиш топилса, бу боғланишга айланма ҳаракатдаги жисмнинг ҳаракат тенгламаси деб айтилади. Айланма ҳаракатдаги жисм учун ҳаракат тенгламаси фақат битта (43.1) тенглама экан, демак, бундай ҳаракатдаги жисмнинг эркинлик даражаси $i = 1$ бўлади.

Айланма ҳаракатни характерлаш учун бурчакли тезлик ва бурчакли тезланиш тушунчалари киритилади.

Вақт бирлигида бурилиш бурчагининг ўзгаришини ифодалайдиган катталик *бурчакли тезлик* дейилади.

Фараз қилайлик, жисм Δt вақт оралиғида $\Delta\varphi$ бурчакка бурилсин, у ҳолда $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ нисбат ўртача бурчакли тезлик деб аталади. Агар ўртача бурчакли тезликнинг векторини $\omega_{ўр}$ деб белгиласак,

$$\vec{\omega}_{ўр} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \qquad (43.2)$$

Оний бурчакли тезликни аниқлаш учун (42.2) ифоданинг лимитини оламиз:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}\ . \qquad (43.3)$$

(42.2) дан бурчакли тезлик вектори бурилиш бурчагидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг деган хулоса келиб чиқади.

Жисмнинг айланиши вақтида бурчакли тезлик вектори ўзгариши мумкин. Агар Δt вақт оралиғида бурчакли тезлик вектори $\Delta\vec{\omega}$ га ўзгарса, $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ нисбат ўртача бурчакли тезланиш вектори деб аталади:

$$\vec{\varepsilon}_{ўр} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \qquad (43.4)$$

Вақт оралиги Δt чексиз кичик бўлса, яъни $\Delta t \to 0$ ҳолда ўртача бурчакли тезланиш оний бурчакли тезланишга айланади, яъни (43.4) нинг $\Delta t \to 0$ ҳолдаги лимити оний бурчакли тезланишни беради:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \right) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\vec{\varphi}} = \dot{\vec{\omega}} \cdot \qquad (43.5)$$

(42.5) дан оний бурчакли тезланиш бурчакли тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг деган хулоса келиб чиқади.

Бурчакли тезлик ω ва бурчакли тезланиш ε тушунчалари фақат қаттиқ жисм учун маънога эга, битта нуқта учун ω ва ε маънога эга эмас. Бурчакли тезлик ω ва ε бурчакли тезланиш катталиклари вектор катталикдир. ω нинг йўналишини парма қоидасига асосан топилади. Бу қоида қуйидагидан иборат. Агар парманинг дастасини жисмнинг айланиш йўналиши бўйича айлантирсак, парманинг илгариланма ҳаракат йўналиши $\vec{\omega}$ нинг йўналишини кўрсатади. 106-расмда $\vec{\omega}$ айланиш ўқида ётади ва O нуқтадан юқорига қараб йўналган. Агар $d\varphi > 0$ бўлса, $\vec{\omega}$ юқорига, $d\varphi < 0$ бўлса, $\vec{\omega}$ пастга қараб йўналгандир.

Бурчакли тезланиш вектори ε ҳам айланиш ўқида ётади: $d\omega > 0$ бўлганда ε ва ω вектори бир хил йўналади; $d\omega < 0$ бўлганда ε ва ω вектори қарама-қарши йўналган бўлади. $d\omega > 0$ бўлганда $\varepsilon > 0$ ва жисм тезланувчан айланма ҳаракат қилади, $d\omega < 0$ бўлганда $\varepsilon < 0$ ва жисм секинланувчан айланма ҳаракат қилади. Шундай қилиб, ω ва ε векторининг модуллари

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt^2}\right) = \ddot{\varphi} \qquad (43.6)$$

кўринишларда ёзилади.

Мисол. Жисм $\varphi = 3t^2$ қонуни бўйича айланса, $t = 1$ с вақтда ε ва ω топилсин.

Ечиш. Жисмнинг бурчакли тезлиги

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (3t^2)'_t = 6t \text{ ва } \omega|_{t=1} = 6 \cdot 1 = 6$$

га тенг; бурчакли тезланиши $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (6t)'_t = 6$ бўлади.

Қаттиқ жисмнинг M нуқтасининг (106-расмга қаранг) чизиқли тезлиги v ни топайлик, бу тезлик v нинг модули

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right).$$

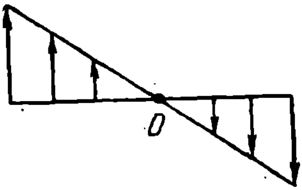
106-расмдан $\Delta S = R \cdot \Delta \varphi$ $(R = OM)$ бўлганлиги учун

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{R \cdot \Delta \varphi}{\Delta t}\right) = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}\right),$$

аммо $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta t}\right) = \omega$ эканлигини ҳисобга олсак

$$v = \omega \cdot R \qquad (43.6)$$

шаклда ёзилади.



107- расм.

(42.6) дан кўринадики, M нуқтанинг чизиқли тезлиги v нинг модули жисм бурчакли тезлигинннг танланган M нуқтадан айланиш ўқи AB гача бўлган масофаси R га бўлган кўпайтмасига тенг экан. Нуқта ўқдан қанча узоққа жойлашган бўлса, v шунча катта экан (107-расм). Тезликлар диаграммаси кўрсатилган 107-расмдан кўринаяптики, жисм сиртидаги нуқталарнинг тезлиги энг катта бўлар экан.

v чизиқли тезликни M нуқтани ифодаловчи радиус-вектор орқали аниқлайлик. 106-расмдаги ΔBOM дан

$$OM = R = r \cdot \sin \beta \qquad (43.7)$$

га тенг. Бу ерда $\vec{r}$ вектори билан $\vec{\omega}$ вектори орасидаги бурчак β га тенг. Агар (42.7) ни (42.6) га қўйсак,

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot r \sin \beta \qquad (43.8)$$

ни ҳосил қиламиз. Математикадан маълумки,

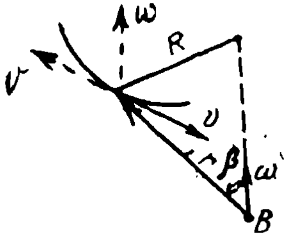
$$\omega r \sin \beta = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (43.9)$$

Демак,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (43.10)$$

бўлади ва чизиқли тезлик вектори $\vec{v}$ бурчакли тезлик вектори $\vec{\omega}$ ни радиус-вектор $\vec{r}$ га бўлган векториал кўпайтмасига тенг экан.

v нинг йўналиши парма қоидасига асосан топилади: агар парманинг дастасини ω вектордан қисқа йўл билан, $\vec{r}$ векторга қаратиб айлантирсак, парманинг илгариланма ҳаракат йўналиши $\vec{v}$ векторнинг йўналишини ифодалайди (108-расм).



108- расм.

Маълумки, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ эди. Агар шу ифодани (43.10)' га қўйсак

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (43.11)$$

ҳосил бўлади. (43.11) ифода Эйлер формуласи деб айтилади. Агар $\vec{r}$ радиус-векторнинг ўрнига бирлик-векторлар (орталар) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ни ишлатмоқчи бўлсак, Эйлер формуласидан фойдаланиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}; \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}. \qquad (43.\ 12)$$

(42. 12) Пуассон формулалари деб аталади.

Энди жисмнинг M нуқтасининг чизиқли тезланиш векторини топайлик. Тезланиш таърифига асосан $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ ифодада v тезликнинг ўрнига (43. 10) ни қўямиз:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \qquad (43.\ 12)$$

Бу ерда $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ ва $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ эканлигини эсласак,

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad (43.13)$$

ҳосил бўлади. Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\vec{a}_{в} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \qquad (43.\ 14)$$

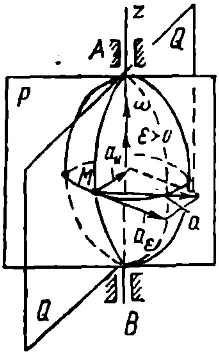
$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega}\times\vec{v}. \qquad (43.15)$$

Охирги тенгламалардаги a_ε ва a_ω ни мос равишда айланма тезланиш ва ўққа интилма тезланиш деб айтилади. Айланма тезланиш вектори a_ε нинг қўйилиш нуқтаси танланган M нуқтада жойлашган, модули эса

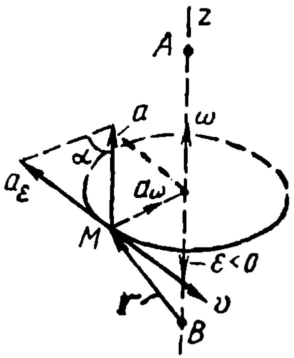
$$a_\varepsilon = \varepsilon\cdot r\sin(\vec{\varepsilon},\vec{r}). \qquad (42.\ 16)$$

формула ёрдамида топилади.

Вектор a_ε нинг йўналиши парма қоидасидан фойдаланиб топилади. Парма дастасини, агар $\vec{\varepsilon}$ дан $\vec{r}$ га қараб, қисқа йўл билан айлантирсак, парманинг илгариланма ҳаракатининг йўналиши a_ε нинг йўналишини кўрсатади. Ҳақиқатан ҳам, агар парма дастасини ε дан r га қараб айлантирсак, a_ε нуқта M дан (109-расм) кўрсатилган йўналишда бўлади. Агар



109- расм.



110- расм.

$\varepsilon < 0$ бўлса, a_ε нинг йўналиши 110-расм да кўрсатилгандек бўлади. a_ε вектор айланма тезланиш дейилади. a_ε тезланиш уринма бўйлаб йўналгандир.

Иккинчи ташкил этувчи a_ω тезланиш ўққа интилувчи тезланиш деб айтилади. Бу a_ω тезланишнинг ҳам қўйилиш нуқтаси M нуқтада жойлашган. a_ω тезланиш ўққа интилувчи ёки *марказга интилувчи тезланиш* деб аталади. a_ω тезланишнинг ҳам йўналиши парма қоидасига асосан топилади.

Агар парманинг дастасини ω дан v га, қисқа йўл билан айлантирсак, парманинг илгариланма ҳаракат йўналиши a_ω нинг йўналишини кўрсатади.

Парма қоидасини 109 ва 110- расмдаги мисолда ишлатганимизда кўрамизки, a_ω айланиш ўқи z га қараб йўналган, a_ε вектори a_ω га перпендикуляр бўлиб, M нуқтанинг траекториясига уринма бўлади.

Демак, a_ε ва a_ω вектори ўзаро перпендикуляр бўлиб, тўлиқ тезланиш a нинг модули Пифагор теоремасига асосан топилади:

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}. \tag{43.17}$$

Тўлиқ тезланиш a нинг йўналиши, α бурчак орқали ифодаланади. 110- расмдан бу бурчак тангенсини топамиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\varepsilon}{a_\omega}. \tag{43.18}$$

Энди a_ε ва a_ω нинг модулларини топамиз. a_ε нинг модулини (43.16) формула ёрдамида ҳисобланади, бироқ бу формулада $r \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}) = r \sin\beta = R$ эканлигини ҳисобга олсак, қуйидаги ихчамроқ формулани ҳосил қиламиз:

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot R. \tag{43.19}$$

(43. 19) дан кўринадики, айланма тезланишнинг модули бурчакли тезланиш модули ε нинг танланган M нуқтадан айланиш ўқи z гача энг қисқа масофа R га бўлган кўпайтмасига тенг экан.

Ўққа интилувчи тезланиш a_ω нинг модули (43. 15) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$a_\omega = \omega v \sin(\vec{\omega}, \vec{v}) \tag{43. 20}$$

Расмдан кўринадики, ω билан v орасидаги бурчак 90° га тенг, демак, $\sin(\vec{\omega}, \vec{v}) = 1$ ва

$$a_\omega = \omega \cdot v \tag{43. 21}$$

бўлади.

Лекин (43. 6) га асосан $v = \omega R$ ни (43. 21) га қўйсак, a_ω нинг модулини топиш формуласи бошқача шаклни олади:

$$a_\omega = \omega^2 R. \tag{43. 22}$$

(42.22) дан ўққа интилувчи тезланишнинг модули бурчакли тезлик квадратининг танланган M нуқтадан айланиш ўқи Z гача энг қисқа R масофага бўлган кўпайтмасига тенг, деган хулоса келиб чиқади.

Агар (43.19) ва (43.22) ни (43.17) га келтириб қўйсак,

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad (43.\ 23)$$

ҳосил бўлади. Бу формуладан a нинг модули топилади. a нинг йўналишини ифодалайдиган (43.18) га, агар (43.19) ва (43.20) ни келтириб қўйсак, α бурчак тангенсини ε ва ω орқали аниқлаш мумкин бўлади:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (43.\ 24)$$

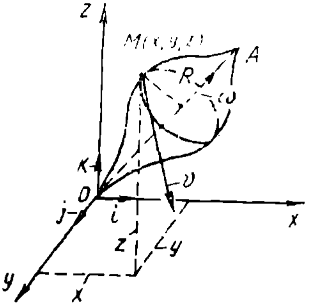
Шундай қилиб, қаттиқ жисм қўзғалмас ихтиёрий Z ўқи атрофида айланганда жисмнинг исталган нуқтасининг тезлиги ва тезланиши тўлиқ аниқланди. Таъкидлаш лозимки, ω вектори ҳам, ε вектори ҳам z ўқи устида ётади, ε вектори ёки ω вектори билан бир хил, ёки ω векторига нисбатан тескари йўналади.

Учала ω, v, a векторларнинг ҳам йўналишлари парма қоидасига асосланиб топилади. Модуллари мос равишда (43.6), (43. 19) ва (43.22) формулалар орқали ҳисобланади. Чизиқли тезлик вектори v ни бурчакли тезлик ω нинг ω_α, ω_y, ω_z ва радиус-вектор r нинг проекциялари x, y, z орқали қуйидагича учинчи тартибли детерминант орқали ифодаланади:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \qquad (43.\ 25)$$

бунда i, j, k лар x, y, z ўқларда ётадиган орталар (бирлик векторлар). (43.25) дан фойдаланиб, қаттиқ жисмнинг M нуқтасининг тезлиги v нинг ўқлардаги v_x, v_y, v_z проекцияларини (111-расм) топиш мумкин. Бунинг учун тезлик v ни v_x, v_y, v_z лар орқали (38.2) га асосан

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (43.\ 26)$$



111- расм.

шаклда ёзамиз ва (43. 25) ни очиб чиқамиз:

$$v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_y z - \omega_z y)\vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z)\vec{j} +$$

$$+ (\omega_x y - \omega_y x)\vec{k}. \qquad (43.27)$$

(42. 26) ва (42.27) тенгламаларнинг ўнг томонларидаги i, j, k лар олдидаги коэффициентларни бир-бирига тенглаштирсак, v_x, v_y, v_z учун қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \qquad (43.28) \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y \cdot x \end{aligned}$$

(43. 28) ни 1785 йилда Эйлер ҳисоблагани учун бу тенгламаларга Эйлер формулалари деб айтилади. Агар жисмнинг айланиш ўқи координата ўқларининг биронтаси, масалан, z ўқи билан устма-уст тушса, бу ҳолда $\omega_z = \omega, \omega_x = \omega_y = 0$ бўлади ва $v_x = \omega_y$, $v_y = \omega_x$, $v_z = 0$ ҳосил бўлади.

44-§. Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатини бурчакли тезлик ва бурчакли тезланиш орқали классификациялаш

ω бурчакли тезлик, a_ε айланма тезланиш ва ўққа интилувчи тезланиш a_ω (марказга интилма тезланиш) катталикларининг қийматлари ўзгариши билан жисмнинг айланма ҳаракати характерининг ўзгаришини кўриб чиқайлик.

1. Бурчакли тезлик вектори доимий бўлсин, яъни $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 = \text{const}$. Бу ҳолда жисм текис айланма ҳаракат қилади. Бундай ҳаракатнинг тенгламасини топайлик. Бурчакли тезлик таърифига асосан,

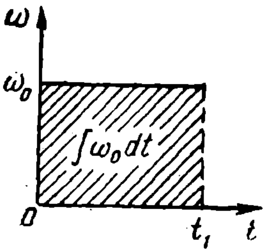
$$\vec{\omega}_0 = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega} = \text{const}. \qquad (44.1)$$

(44. 1) дан

$$\varphi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t + C_1$$

ни ҳосил қиламиз. Интеграллаш доимийси C_1 ни топайлик. Бошланғич шартдан $t = 0$; $\varphi = \varphi_0 = 0$ бўлганлиги учун $0 = \omega_0 \cdot 0 + C_1$ ҳосил бўлади ва

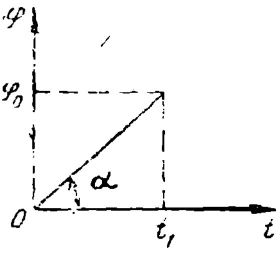
$$\varphi = \omega_0 t \qquad (44.2)$$



112- расм.

тенгламани ҳосил қиламиз. (44.2) ифода текис айланма ҳаракат *тенгламасидир*.

112- расмда текис айланма ҳаракат қилаётган жисмнинг бурчакли тезлигининг графиги кўрсатилган. Графикдан t_1 вақтда жисмнинг бурилиш бурчаги φ ни топиш мумкин. φ бурчакнинг модули ω_0 ва t_1 кесмалардан тузилган тўртбурчакнинг юзига тенг. 113- расмда текис айланма ҳаракатдаги φ бурилиш бурчагининг графиги кўрсатилган. Графикдан ω бурчакли тезликнинг модулини топиш мумкин. Бурчакли тезлик $\varphi(t)$ тўғри чизиғининг абсцисса ўқи билан ташкил этган α бурчагининг тангенсига тенг бўлади.



113- расм.

Қаттиқ жисмнинг айланма ҳаракатига Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши, соат милининг айланиши, Ой ва бошқа сайёра (планета)ларнинг ўз ўқи атрофида айланиши ва бошқа мисолларни келтириш мумкин. Ер бир суткада ўз ўқи атрофида тўлиқ бир марта айланади, демак, Ернинг бурчакли тезлигининг модули қуйидагига тенг:

$$\omega = \frac{2\pi}{24\ \text{соат}} \approx 0{,}000072\,\text{с}^{-1}.$$

Бу ҳолда $\vec{\omega} = \text{const}$ бўлганлиги учун бурчакли тезланиш $\vec{\varepsilon} = 0$, яъни текис айланма ҳаракат бурчакли тезланишсиз ҳаракатдир.

2. Жисмнинг бурчакли тезланиши нолга тенг бўлмаган қандайдир доимий қийматга тенг бўлсин:

$$\varepsilon = \text{const}. \qquad (44.3)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

ни (44.3) га қўйиб ω ни топамиз:

$$\omega = \int \varepsilon dt = \varepsilon t + C_2.$$

$t = 0$; $\omega = \omega_0$ бошланғич шартни охирги тенгламага қўямиз ва ҳосил бўлган $\omega_0 = \varepsilon \cdot 0 + C_2$ тенгламадан $C_2 = \omega_0$ бўлади. Топилган $C_2 = \omega_0$ ифодани ω нинг тенгламасига қўйсак,

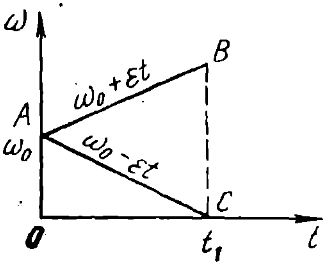
$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t \qquad (44.4)$$

ҳосил бўлади.

(44.4) ни келтириб чиқарганимизда $\varepsilon > 0$ деб олган эдик, агар $\varepsilon < 0$ деб олганимизда (44.4) тенгламанинг ўнг томонида манфий ишора бўлар эди. Шунинг учун (44.4) тенгламанинг ўнг томонига икки хил ишора, ҳам (+), ҳам (—) қўйилган.

(44.4) текис ўзгарувчан айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг оний бурчакли тезлигини топиш формуласи бўлади. Бу ерда текис тезланувчан ҳаракат учун (+), текис секинланувчан ҳаракат учун (—) ишора билан олинишини эсда тутиш лозим.

114-расмда ω нинг ўзгариш графиги кўрсатилган. Юқориги $\omega_0 + \varepsilon t$ тўғри чизиқ текис тезланувчан, пастдаги $\omega_0 - \varepsilon t$ тўғри чизиқ текис секинланувчан айланма ҳаракатда ω нинг ўзгаришини ифодалайди. t_1 вақтда бурилиш бурчаги тезланувчан ҳаракатда *OABCO* нинг юзига, секинланувчан ҳаракатда *OACO* нинг юзига тенг.



114-расм.

φ бурилиш бурчагини (44.4) тенгламадан ҳам келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\omega = \frac{d\omega}{dt}$ ни (44.4) га қўйсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$d\varphi = (\omega_0 \pm \varepsilon t)\,dt.$$

Интеграллаб φ ни топамиз:

$$\varphi = \int (\omega_0 \pm \varepsilon t)\,dt = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} + C_3.$$

Бошланғич шарт $t = 0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$ ни охирги тенгламага қўйсак, $C_3 = 0$ ҳосил бўлади. Демак,

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (44\ 5)$$

ифода ҳосил бўлади.

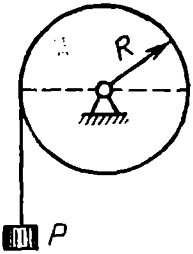
(44.5) текис ўзгарувчан айланма ҳаракат тенгламаси деб аталади. Аввал айтганимиздек, агар ҳаракат текис тезланувчан бўлса (+), текис секинланувчан бўлса, (—) ишора олинади.

3. Жисмнинг бурчакли тезланиши умуман ўзгарувчан бўлса, яъни $\varepsilon = \varepsilon(t)$ шаклда вақт функцияси бўлса, жисм ўзгарувчан айланма ҳаракат қилади. Бу ҳолда ҳаракат текис эмас. Бунда ω ва φ қуйидагича топилади:

$$\omega(t) = \int \varepsilon(t)\, dt.$$

$$\varphi = \int_t \omega(t)\, dt = \int_t \left(\int_t \varepsilon(t)\, dt\right) dt.$$

Шундай қилиб, қуйидагиларни таъкидлаш мумкин: 1) $\vec{\omega} = \text{const}$, $\varepsilon = 0$ бўлганда жисм текис айланма ҳаракатда бўлади; 2) $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon = \text{const}$ бўлганда жисм текис ўзгарувчан айланма ҳаракат қилади, $\varepsilon > 0$ бўлган ҳолда текис тезланувчан, $\varepsilon < 0$ бўлганда текис секинланувчан айланма ҳаракат қилади; 3) $\vec{\varepsilon}$ ўзгарувчан, яъни $\vec{\varepsilon} \neq 0$ бўлганда, жисм умуман ўзгарувчан айланма ҳаракат қилади.



115- расм.

24-мисол (13.18). Ипга боғланган P юк радиуси $R = 10$ см бўлган ғўла (вал) ни айлантиради. Юк $X = 100t^2$ қонун бўйича ҳаракат қилади (x — юкнинг ғўла сиртидан ажралишидан бошлаб ҳисобланадиган ва сантиметрларда ифодаланган масофа, t — секундларда ифодаланган вақт). Ғўланинг бурчакли тезлиги ω ва бурчакли тезланиши ε ҳамда ғўла сиртидаги нуқтанинг t вақтдаги тезланиши аниқлансин (115- расм).

Берилган:

$R = 10$ см

$x = 100\,t^2$

ω — ?, ε — ?, a — ?

Ечиш: Бурчакли тезликнинг модули $v = \omega k$ формуладан топилади:

$$\omega = \frac{v}{k}. \qquad (1)$$

ω ни топиш учун олдин v ни (38.5) формуладан аниқлаймиз, яъни X дан t бўйича ҳосила олиб, v ни топамиз:

$$v = \frac{dx}{dt} = (100\,t^2)'_t = 200\,t. \qquad (2)$$

(2) ни (1) га қўйсак, бурчакли тезлик қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{200\,t}{10} = 20\,t\text{с}^{-1}.$$

Бурчакли тезланишни (43. 5) формуладан топамиз:

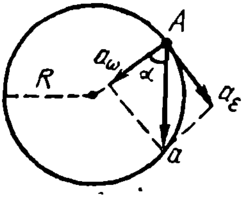
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (20\,t)'_t = 20\ \text{с}^{-2}.$$

Ғўла сиртидаги нуқтанинг тўлиқ тезланиши (43. 23) га асосан

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 200\sqrt{1 + 400\,t^2}\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

га тенг бўлади.

25-мисол. (13. 17). Маховик гардишидаги нуқтанинг тўлиқ тезланиши радиус билан 60° бурчак ташкил этади. Нуқтанинг тангенциал тезланиши $10\sqrt{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Айланиш ўқидан $2 = 0{,}5$ м масофада жойлашган нуқтанинг нормал (ўққа интилувчи) тезланишини топинг. Маховик ҳалқасининг радиуси $R = 1$ м.



116- расм.

Берилган:

$a_\varepsilon^A = 10\sqrt{3}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

$r = 0{,}5$ м

$R = 1$ м

$\alpha = 60°$

a_ω — ?

Ечиш: Айланиш ўқидан r масофадаги M нуқтанинг ўққа интилувчи a_ω тезланишини аниқлаш учун (43. 22) формуладан фойдаланамиз (116- расм):

$$a_\omega = \omega^2 r. \qquad (1)$$

(1) дан кўринадики, a_ω ни аниқлаш учун ω нинг қийматини билиш зарур. Гардишнинг сиртидаги A нуқта учун $a_\omega^A = \omega^2 R$ бўлганлигини ҳисобга олсак,

$$\omega = \sqrt{\frac{a_\omega^A}{R}} \qquad (2)$$

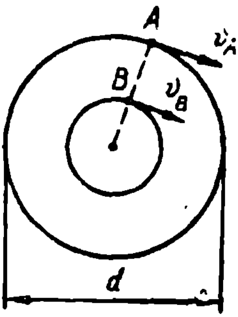
ифода ҳосил бўлади. Расмдан a_ω^A топилади:

$$a_\omega^A = a_\varepsilon^A \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (3)$$

(3) ни (2) га қўйиб ва ҳосил бўлган ифодани (1) формулага қўйиб, a_ω ни ифодалайдиган формулани ҳосил қиламиз:

$$a_\omega = \frac{a_\varepsilon^A \cdot \operatorname{ctg} \alpha}{R} \cdot r = 5 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

26-мисол (13. 14). Шкив гардишида ётган A нуқта 50 см/с тезлик билан ҳаракат қилади (117-расм). A нуқта билан битта радиус устида жойлашган B нуқтанинг тезлиги 10 см/с га тенг. $AB = 20$ см.



117-расм.

Айланаётган шкивнинг бурчакли тезлиги ва диаметрини топинг.

Жавоб: $\omega = 2$ рад/с, $d = 50$ см.

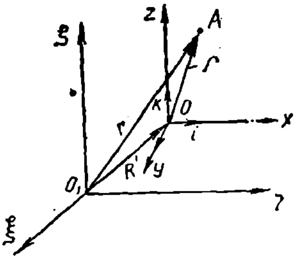
27-мисол (13.12). Ерни фақат ўз ўқи атрофида айланади деб олиб, Санкт-Петербург ўртасида жойлашган нуқтанинг тезлиги v ва тезланиши a ни аниқланг. Ернинг радиуси 6370 км, Санкт-Петербург кенглиги 60° деб олинсин.

Жавоб: $v = 232 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a = 0{,}0169 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

45-§. Нуқтанинг мураккаб ҳаракати

Биз 43 ва 44-§§ да кўрдикки, қаттиқ жисм нуқталарининг ҳаракати, тезлиги ва тезланиши ҳамда ҳаракат траекторияларини аниқлаш масалага анча жиддий яқинлашишни талаб этади. Лекин бу кўрилган мисоллар нуқта ҳаракатининг оддий ҳоллари бўлади.

Амалда нуқта бир вақтнинг ўзида бир неча ҳаракатларда қатнашади. Масалан, поезд вагони ичидаги нуқта (йўловчи) вагонга нисбатан, вагон эса поезд билан биргаликда станцияга нисбатан ҳаракат қилади. Фараз қиламиз, A нуқтада вагон ичидаги одам жойлашган бўлсин. $XOYZ$ системаси вагон билан қаттиқ боғланган, $\zeta O_1 \eta \xi$ система темир йўл системаси билан қаттиқ боғланган: $XOYZ$ қўзғалувчан система, $\zeta O \eta \xi$ қўзғалмас система бўлсин (118-расм).



118-расм.

A нуқтанинг O_1 нуқтага, қўзғалмас системасига нисбатан ҳаракатига шу нуқтанинг абсолют ҳаракати, A нуқтани O нуқтага, қўзғалувчан системага нисбатан ҳаракатига A нуқтанинг нисбий ҳаракати деб айтилади. Боғланган $XOYZ$ системасини қўзғалмас $O_1 \zeta \eta \xi$ системага нисбатан ҳаракатига A нуқтанинг кўчма ҳаракати деб айтилади. A нуқтанинг қўзғалмас $O_1 \zeta \eta \xi$ системадаги ҳаракатини $OXYZ$ қўзғалувчан системага нисбатан ρ ифодалайди.

Нисбий, кўчма ва абсолют ҳаракатларга мос келадиган тезлик ва тезланишларга нисбий, кўчма ҳамда абсолют тезлик ва тезланишлар деб айтилади. Ана шу нисбий, кўчма ва абсолют ҳаракатларда қатнашадиган A нуқтанинг ҳаракати мураккаб ҳаракат дейилади.

Мураккаб ҳаракатдаги A нуқтанинг нисбий, кўчма ва абсолют ҳаракатларидаги нисбий тезлиги $v_н$, кўчма тезлиги $v_к$, абсолют тезлиги v, нисбий тезланиши $a_н$, кўчма тезланиши $a_к$ ва абсолют тезланиши a ни топамиз.

A нуқтанинг вазиятини O_1 нуқтага нисбатан ифодалайдиган r радиус-вектор, O нуқтага нисбатан ρ бўлсин. O нуқтанинг O_1 га нисбатан вазиятини аниқлайдиган R радиус-вектор бўлсин. Агар $\vec{r}$, $\vec{\rho}$, $\vec{R}$ векторлар вақт функцияси сифатида маълум бўлса, A ва O нуқталарнинг ҳаракат қонунлари аниқланган бўлади. 118-расмдаги ΔO_1AO дан радиус-векторлар боғлиқлиги қуйидаги шаклда бўлади:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}. \tag{45.1}$$

r ва ρ ни x, y, z орқали қуйидаги

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k}; \quad \vec{r} = \vec{R} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{45. 2}$$

кўринишда ёзамиз.

(45.2) да $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ билан бирлик векторлар белгиланган.

Таъкидлаймизки, нуқтанинг мураккаб ҳаракати вақтида (45.2) тенгламада ҳам x, y, z ҳам i, j, k вақт ўтиши билан ўзгаради. Шунинг учун A нуқта тезлиги v ни $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ формуладан фойдаланиб топганимизда, $\vec{r}$ вектори кўп ўзгарувчиларнинг (x, y, z, i. j, k ва R) функцияси эканлигини назарда тутиб, вақт бўйича ҳосила олишимиз лозим:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{dx}{dt}\vec{i} + x \times \\ \times \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \qquad (45.3)$$

(45. 3) га тезликларни қўшиш теоремаси деб айтилади· Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{R}_0}{dt}, \qquad (45.4)$$

$$\vec{v}_н = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \qquad (45.5)$$

$$v_к = \vec{v}_0 + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} + \vec{v}_0, \qquad (45.6)$$

бунда v_0 — O нуқтанинг O_1 нуқтага нисбатан тезлиги, $v_н$ — нуқтанинг нисбий тезлиги, $v_к$ — кўчма тезликдир. Белгилашлардан кейин (45. 3) қуйидаги шаклни олади:

$$\vec{v} = \vec{v}_н + \vec{v}_к. \qquad (45.7)$$

(45. 7) дан нуқтанинг абсолют тезлиги $\vec{v}$ нисбий $\vec{v}_н$ ва кўчма $\vec{v}_к$ тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг деган маъно келиб чиқади. $v_н$ нисбий тезлик (45. 5) формуладан кўриниб турганидек, шу нуқтани ифодалайдиган r радиус-вектор модулининг ўзгариши сабабли ҳосил бўлади. Кўчма тезлик $v_к$ нинг ҳосил бўлишига сабаб r нинг йўналишининг ўзгаришидир, яъни кўчма $OXYZ$ системанинг O_1 нуқтага нисбатан ҳаракати ва i, j, k орталар йўналишининг ўзгариши сабабли ҳосил бўлади.

Энди нуқтанинг абсолют тезланишини топамиз. Бунинг учун (45. 3) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} +$$

$$+ \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} + \frac{dz}{dt}\times$$

$$\times\frac{d\vec{k}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}. \qquad (45.8)$$

Абсолют тезланишнинг (45.8) даги кўринишда топилишига Кориолис теоремаси деб айтилади. (45. 8) нинг айрим ҳадларини бирлаштириб, янги белгилашлар киритамиз, яъни

$$\vec{a}_0 = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \qquad (45.9)$$

$$a_н = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad (45. 10)$$

$$\vec{a}_к = \vec{a}_0 + x\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\vec{k}}{dt^2} \qquad (45. 11)$$

деб қабул қилсак, (45.9) тенгламанинг ўнг томонидаги қолган ҳадларини $a_{кор}$ (Кориолис тезланиши) билан белгилаймиз:

$$\vec{a}_{кор} = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \qquad (45. 12)$$

$\frac{d\vec{i}}{dt}$; $\frac{d\vec{j}}{dt}$: $\frac{d\vec{k}}{dt}$ ифодаларни Пуассон формулалари билан алмаштирсак, (43. 12) формуладан

$$\vec{a}_{кор} = 2\left[\frac{dx}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{i}) + \frac{dy}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{j}) + \frac{dz}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{k})\right] = 2\vec{\omega}\times$$

$$\times\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) \qquad (45. 13)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда агар (45. 5) ни ҳам ҳисобга олсак,

$$\vec{a}_{кор} = 2\,\vec{\omega}\times v_и \qquad (45. 14)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Ниҳоят, агар (45. 9), (45. 10), (45. 11) ва (45. 14) ифодаларни ҳисобга олсак, (45. 8) тенгламани

$$\vec{a} = \vec{a}_н + \vec{a}_к + \vec{a}_{кор} \qquad (45. 15)$$

шаклда тасвирлаш мумкин.

(45. 15) формула ҳам *Кориолис теоремаси* ёки *тезланишларни қўшиш теоремаси* деб аталади. Бу формуладан нуқтанинг абсолют тезланиш вектори $a_н$ нисбий, $a_к$ кўчма ва $a_{кор}$ Кориолис тезланишларининг геометрик (вектор) йиғиндисига тенг экан деб хулоса чиқарамиз.

Энди нисбий, кўчма тезликлар ва тезланишларнинг ҳамда Кориолис тезланишининг физикавий маъносини батафсилроқ кўриб чиқайлик.

(45. 5) дан топиладиган тезлик

$$\vec{v}_н = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (45.\ 16)$$

кўринишда тасвирланади, $v_н$ тезлик танланган A нуқтанинг қўзғалувчан $OXYZ$ системага нисбатан ҳаракат қилиши сабабли ҳосил бўлади.

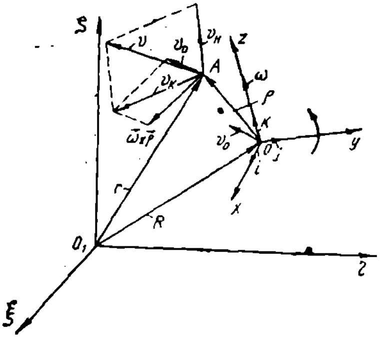
Кўчма тезликни ифодалайдиган (45. 6) ни Пуассон формулаларидан фойдаланиб

$$\vec{v}_к = v_0 + x(\vec{\omega}\quad \vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + z(\vec{\omega}\times\vec{k}) =$$
$$= \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

ёки

$$\vec{v}_к = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (45.16)$$

шаклда ёзамиз. Бунда $\vec{\omega}\times\vec{r} = v_п$ — айланма (трансверсаль) тезликни характерлайди, яъни A нуқта O нуқтанинг атрофида айланган вақтидаги тезликдир. $v_п$ тезлик йўналишини парма қоидасига асосан топилади (119- расм). Бу ердаги v_0 ни (O нуқтанинг тезлигини) A нуқтага кўчириб, айланма тезлик $\vec{\omega}\times\vec{r}$ ни ҳам парма қоидасига асосан топиб, A нуқтага қўйиб, $\vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$ ни, яъни йиғиндиси кўчма тезлик $\vec{v}_к$ ни параллелограмм қоидасига асосан топамиз. $v_к$ ҳам A нуқтага қўйилган. Агар A нуқтанинг нисбий тезлиги $v_н$ билан кўчма тезлик $v_к$



119- расм.

яна параллелограмм қоидасига асосан топилса, абсолют тезлик 119- расмда тасвирланган v га тенг бўлади, яъни $\vec{v}$ тезлик $\vec{v}_0$, $\vec{\omega} \times r$ ва $\vec{v}_н$ нинг векториал йиғиндисига тенг:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}_н.$$

Ҳозиргина кўрдикки, кўчма тезлик қутб O нуқтанинг v тезлиги билан нуқтанинг айланма тезлиги $\vec{v}_п = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ нинг геометрик йиғиндисига тенг экан, яъни $\vec{v}_к = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ орқали топилади.

Агар $OXYZ$ системанинг ҳамма нуқталари илгариланма ҳаракат қилса, бу ҳолда $\omega = 0$ ва (45. 16) га мувофиқ

$$v_к = v_0 \tag{45. 17}$$

шаклни олади. Бу ҳолда ҳам табиийки, абсолют тезлик вектори (45. 7) формула орқали топилади. Бу векторнинг модули $\vec{v}_н$ ва $\vec{v}_к$ вектордан тузилган параллелограмм диагоналига тенг бўлиб, косинуслар теоремасига асосан ҳисобланади:

$$v = \sqrt{v_н^2 + v_к^2 + 2v_н \cdot v_к \cos\,(\widehat{\vec{v}_н\,\vec{v}_к})}. \tag{45. 18}$$

Нисбий тезланиш формуласи (45. 10) ни

$$a_н = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \tag{45. 19}$$

шаклда ҳам ёзилади, бу тезланиш йўналиши нуқта траекториясига уринма бўлади.

Кўчма тезланиш (45. 11) формуласи қуйидаги шаклда тасвирланиши мумкин:

$$a_к = a_0 + x\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right) + y\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right) + z\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right) =$$

$$= \vec{a}_0 + x \cdot \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{i}) + y\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{j}) + z\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{k}) =$$

$$= \vec{a}_0 + x \cdot \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{i} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)\right] + y\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{j} +\right.$$

$$\left. + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)\right] + z\left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{k} + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)\right] =$$

$$= \vec{a}_0 + x\cdot[\varepsilon\times\vec{i}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{i})] + y[\vec{\varepsilon}\times\vec{j}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{j})] +$$

$$+ z(\vec{\varepsilon}\times\vec{k}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{k}) = \vec{a}_0+\vec{\varepsilon}\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})+$$

$$+\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})] = \vec{a}_0+\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$$

ёки $\vec{a}_k=\vec{a}_0+\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho}+\vec{\omega}\times\vec{v}_n$, (45.20)

бунда $\vec{v}_n=\vec{\omega}\times\vec{\rho}$ айланма тезликни билдиради.

(45.20) тенгламада $\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$ — айланма тезланиш a_ε ни, $\vec{\omega}\times\vec{v}_n=\omega\times(\vec{\omega}\times\rho)=\vec{a}_\omega$ ўққа интилувчи тезланишни ифодалайди, яъни

$$\vec{a}_\varepsilon=\vec{\varepsilon}\times\vec{\rho},$$

$$\vec{a}_\omega=\omega\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$$

шаклда тасвирланади. Агар охирги белгилашларни (45.20) тенгламага қўйсак,

$$\vec{a}_к=\vec{a}_0+\vec{a}_\varepsilon+\vec{a}_\omega \qquad (45.21)$$

формула ҳосил бўлади. (45.21) дан нуқтанинг кўчма тезланиши O нуқта (қутб)нинг тезланиши, айланма ва ўққа интилувчи тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенглиги кўриниб турибди.

Шундай қилиб, A нуқтанинг абсолют тезланиши (45.14), (45.19) ва (45.21) формулаларни ҳисобга олгандан кейин

$$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}_\varepsilon+\vec{a}_\omega+\vec{a}_н+\vec{a}_к \qquad (45.22)$$

шаклда тасвирланади. Бунда a_ε ва a_ω нинг йўналишини парма қоидасига асосан топилишини эсда тутиш лозим. Бу катталикларнинг модуллари қуйидагича топилади:

$$a_\varepsilon=\varepsilon\rho\sin(\widehat{\vec{\varepsilon}_1\vec{\rho}})=\varepsilon R,$$

$$a_\omega=\omega v_n\sin(\vec{\omega}_1\vec{v}_n)=\omega^2R,$$

бунда R — А нуқтадан айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофа, ε ва ω эса бурчакли тезланиш ва тезлик. Маълумки, $XOYZ$ системанинг ҳаракати кўчма ҳаракатдир. Агар $XOYZ$ системанинг кўчма ҳаракати илгариланма ҳаракат бўлса, $\varepsilon=0$ ва $\omega=0$ бўлиб қолади ва кўчма тезланиш (45.21) даги $a_\varepsilon=0$ ва $a_\omega=0$ бўлиб қолади ва демак, Кориолис тезланиши учун $\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega} \times v_{н} = 0$ ифода ҳосил бўлади. Натижада (45.20) дан

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + a_{н} \qquad (45.23)$$

тенглама ҳосил қилинади. *a* нинг модули бу ҳолда

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_{н}^2 + 2a_0a_{н} \cos(\widehat{\vec{a}_0\, \vec{a}_{н}})}$$

формуладан топилади.

Нисбий тезланиш $a_{н}$ вектори тегиб турувчи текисликда ётади ва траекторияга уринма бўлади. Кўчма тезланиш вектори $a_{к}$ қутбнинг траектория текислигига параллелдир.

46- §. Кориолис тезланиши вектори

Олдинги мавзунинг (45.14) формуласидан маълумки, Кориолис тезланиши

$$\vec{a}_{кор} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{н}$$

тенглама билан топилади. Кориолис тезланиши вектор катталик бўлганлиги учун, ҳар қандай вектор сингари, уч элементи: $\vec{a}_{кор}$ нинг қўйилиш нуқтаси, модули ва йўналиши аниқланган бўлиши керак. Бу элементларни аниқлашдан олдин Кориолис $\vec{a}_{кор}$ тезланишининг физик маъноси нимадан иборат эканлигини кўриб чиқайлик.

Кориолис ёки бурилиш тезланиши, мураккаб ҳаракатда *A* нуқта тезланишининг шундай ташкил этувчисидирки, бу Кориолис тезланиши вектори, кўчма ҳаракатда бурчакли тезлик векторининг нисбий тезлик векторига бўлган вектор кўпайтмасига тенг.

Кориолис тезланиши биринчидан, нуқтанинг нисбий ҳаракатининг ўзгариши натижасида кўчма тезлик модулининг ўзгаришини ва иккинчидан, кўчма айланма ҳаракат натижасида нисбий тезлик йўналишининг ўзгаришини ифодалайди. Кориолис тезланиши кўчма айланма ҳаракат билан нисбий ҳаракатнинг қўшилиши натижасида ҳосил бўлади. Шунинг учун, агар кўчма ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлса (тўғри чизиқли ҳаракат бўлганда ҳам), $\omega = 0$ бўлади. Демак, $\vec{a}_{кор}$ бу кўчма ва нисбий ҳаракатларнинг қўшилишидан ҳосил бўладиган катталик.

Энди $\vec{a}_{кор}$ векторнинг элементлари: 1) $\vec{a}_{кор}$ векторининг қўйилиш нуқтаси:; 2) $\vec{a}_{кор}$ нинг модули; 3) $\vec{a}_{кор}$ нинг йўналишини қандай қилиб аниқлаш мумкинлигини кўриб чиқайлик.

1. $\vec{a}_{кор}$ нинг қўйилиш нуқтаси A нуқтада қўйилган.

2. $\vec{a}_{кор}$ нинг модули

$$a_{кор} = 2\,\omega v_н \sin(\widehat{\vec{\omega}\,\vec{v}_п}) \qquad (46.1)$$

формула билан баҳоланади. Ҳақиқатан ҳам, қуйидаги уч ҳолда $a_{кор} = 0$ бўлади.

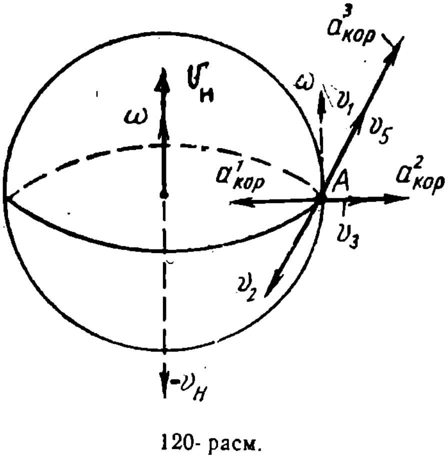
а) $\omega = 0$, яъни $XOYZ$ система илгариланма ҳаракат қилганда ёки танланган вақтда система $XOYZ$ учун $\omega = 0$ бўлганда;

б) $v_н = 0$, яъни $XOYZ$ га нисбатан A нуқта тинч ҳолатда бўлганда ёки танланган вақтда система $XOYZ$ учун $v_н = 0$ бўлганда;

в) $\vec{\omega}$ ва $\vec{v}_н$ орасидаги бурчак $\angle(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_п}) = 0$ ёки $\angle(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_п}) = \pi$ бўлганда, яъни A нуқтанинг нисбий тезлиги $v_н$ нинг йўналиши айланиш ўқига параллел бўлган ҳолларда.

$a_{кор}$ нинг модули $\angle(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_н}) = 90°$ бўлганда максимал бўлади, яъни агар A нуқтанинг $v_н$ ҳаракат тезлиги ω векторга перпендикуляр бўлса, $a_{кор} = a_{кор}^{max}$ шарт бажарилади.

120- расмда A нуқта $v_п$ тезлик билан ҳаракат қилса, $a_{кор} = 0$; v_2 ва v_3 тезлик билан (нисбий) ҳаракат қилса, $a_{кор} = a_{кор}^{max}$ бўлиши кўриниб турибди. Нуқта $v_н$ нисбий тез-



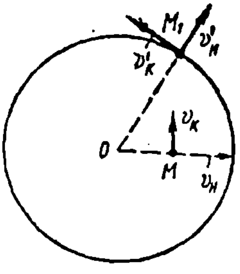
120- расм.

лик билан ҳаракат қилганида ҳам $a_{\text{кор}} = 0$, чунки $(\widehat{\vec{\omega},\ \vec{v}_{\text{н}}}) = \vec{\pi}$ га тенг.

3. $\vec{a}_{\text{кор}}$ нинг йўналишини парма қоидасига асосан топилади. Агар парманинг дастасини $\vec{\omega}$ векторидан $\vec{v}_{\text{н}}$ векторига қаратиб, қисқа йўл билан айлантирсак, парманинг илгарилама ҳаракатининг йўналиши $a_{\text{кор}}$ векторининг йўналишини кўрсатади.

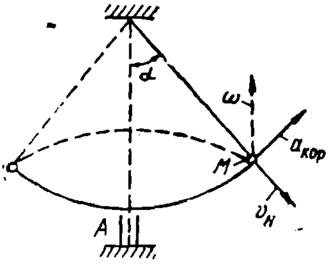
Расмда A нуқта v_2 тезлик билан ҳаракат қилганида, пармани ω дан v_2 га (фикран ω ни A нуқтага кўчириб) қисқа йўл билан айлантирсак, $a_{\text{кор}}$ нинг йўналиши v_3 вектор устига тушган $a^2_{\text{кор}}$ эканлигини кўриш мумкин. A нуқта v_6 тезлик билан ҳаракат қилганида, парма қоидасидан кўринадики, $a_{\text{кор}}$ нинг йўналиши $a^1_{\text{кор}}$ бўлади. A нуқта v_3 тезлик билан ҳаракат қилганда $a_{\text{кор}}$ нинг йўналиши $a^3_{\text{кор}}$ нинг йўналишидек бўлади (120- расмда $a^1_{\text{кор}}$, $a^2_{\text{кор}}$, $a^3_{\text{кор}}$ векторлари) ва ҳоказо. Умуман, $\vec{a}_{\text{кор}}$ вектор шундай йўналганки, $\vec{a}_{\text{кор}}$ нинг охиридан қарайдиган кузатувчига $\vec{\omega}$ вектори $\vec{v}_{\text{н}}$ векторига қараб, қисқа йўл билан яқинлашиши соат милининг айланиш йўналишига тескари йўналган бўлади.

Кориолис тезланишининг ҳосил бўлишига яна бир мисол келтирамиз. Платформа ω бурчакли тезлик билан O нуқтадан ўтаётган ўқ атрофида текис айлансин. Платформанинг радиуси бўйлаб одам M вазиятда $v_{\text{н}}$ доимий тезлик билан ҳаракат қилсин. Бу ерда M нуқтада кўчма тезлик $v_{\text{к}}$, M_1 нуқтада $v'_{\text{к}}$ бўлади ва $v_{\text{к}} = \omega \cdot OM$, $v'_{\text{к}} = \omega \cdot OM_1$ дир. Кўчма тезликнинг ўзгариши $a_{\text{кор}}$ ни ҳосил қилади. $a_{\text{кор}}$ вектори M нуқтада (ω вектори O нуқтадан ўқувчига қараб йўналган) $v_{\text{к}}$ бўйлаб, M_1 нуқтада эса $v'_{\text{к}}$ бўйлаб йўналганлигини парма қоидасидан фойдаланиб осонгина топиш мумкин (121- расм).



121- расм.

Ясовчиси айланиш ўқи OA билан α бурчак ҳосил қилган конус ω бурчакли тезлик билан айланмоқда. Конуснинг ясовчиси бўйлаб M нуқта $v_{\text{н}}$ нисбий тезлик билан ҳаракат қилса, Кориолис тезланишининг модули ва йўналиши нимага тенг бўлади? Яъни $a_{\text{кор}}$ нинг модули ва йўналишини топиш лозим.



122- расм.

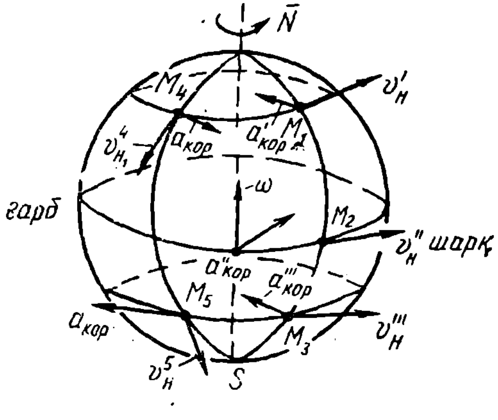
$a_{кор}$ нинг модули (46.1) га асосан

$$a_{кор} = 2\omega v_н \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_н}) = \\ = 2\omega v_н \sin(180-\alpha)$$

орқали ҳисобланади.

$a_{кор}$ нинг йўналишини топиш учун ω векторини фикран M нуқтага кўчириб (122-расмда ω вектори пунктир чизиқ билан кўрсатилган) фикран парма дастасини қисқа йўл билан, ω векторидан $v_н$ векторига қараб бураганимизда парманинг илгариланма ҳаракати M нуқтадан расм текислигига тик кириб кетганини кўрамиз. Демак, Кориолис тезланиши M нуқтага ўтказилган уринма бўйлаб расм текислигига тик йўналган $\vec{a}_{кор}$ вектордир.

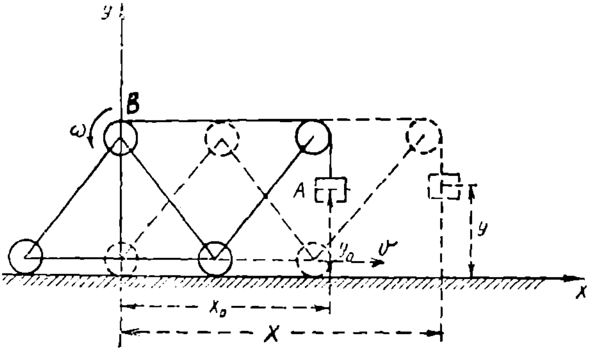
Агар нуқта Ер сиртида ҳаракат қилса, Ернинг ҳаракати кўчма ҳаракат бўлади. Нуқтанинг Ер сиртидаги M_1, M_2, M_3 ҳолатда $a_{кор}$ векторининг йўналишини топайлик. Парма қоидасидан фойдалансак, нуқта тезлиги $v'_н$, $v''_н$, $v'''_н$ бўлганда $a_{кор}$ вектори $a'_{кор}$, $a''_{кор}$, $a'''_{кор}$ векторлари бўлиб қолишини кўрамиз (123- расм). Нуқта M_4 ва M_5 ҳолатда бўлганда $a_{кор}$ вектори: нуқта шимолий ярим шарда бўлганда шарқ



123- расм.

томонга, нуқта жанубий ярим шарда бўлганда — ғарб томонга қараб йўналган.

Дарёларда оқаётган сув (шимолий ярим шарда) кориолис тезланишига эга бўлганлиги туфайли шарққа қараб оғади, шунинг учун дарёнинг шарқий қирғоғи ғарбий қирғоққа нисбатан кўпроқ ейилади. Кориолис тезланиши мавжуд бўлганлиги учун эркин тушаётган жисм шарққа қараб оғади, кориолис тезланишнга эга бўлганлиги учун пиёлага чойнакдан қуйилган чой, кузатувчига нисбатан соат милининг айланиш йўналиши бўйлаб айланади. Ернинг жанубий ярим шарида юқоридаги, ҳодисалар содир бўлганда оғиш йўналиши Ернинг ғарб томонига йўналган бўлади.



124- расм.

28- мисол. (21.4). Механизмларнинг биргаликда ишлаши натижасида A юк горизонтал ва вертикал йўналишда ҳаракат қилиши мумкин (124- расм). Радиуси $r = 50$ см бўлган B барабанга арқон тортилган бўлиб, бу барабанга A юк боғланган ва ишлаганда $\omega = 2\pi с^{-1}$ бурчакли тезлик билан айланади. Кран горизонтал йўналишда v тезлик билан ҳаракат қилади. A юкнинг бошланғич координаталарини x_0 ва y_0 деб қабул қилиб A юкнинг траекториясини топинг.

Ечиш. Кран ҳаракатини характерлаш учун x, y координата системасини танлаб олайлик. A юкнинг бошланғич ҳолатдаги координаталари x_0, y_0 бўлсин. Кран t вақт ҳаракат қилгандан кейин А нуқтанинг (юкни нуқта деб ҳисоблаймиз) координаталари x, y бўлсин, x, y ни топиш лозим (124-расмда, x, y пунктир чизиқ билан кўрсатилган).

Берилган:

$\omega = 2\pi c^{-1}$
$r = 50$ см
$v = 0{,}5\ \frac{м}{с}$
$x_0 = 10$ м
$y_0 = 6$ м

A юкнинг траекторияси топилсин.

Ечиш. A юк t вақтда горизонт бўйлаб $x - x_0$ масофага кўчади ва бу масофа $v \cdot t$ га тенг, яъни $x - x_0 = v \cdot t$. (1)

Худди шу t вақтда A юк вертикал $y - y_0$ баландликка кўтарилади ва кўтарилиш B барабанни айлантириб, арқонни $v_в \cdot t$ масофага тортиш натижасида содир бўлади. Демак,

$$y - y_0 = v_в \cdot t \tag{2}$$

тенглама ҳосил бўлади. Барабан $v_в$ тезлигинннг модули (барабан сиртидаги арқоннинг тезлиги)

$$v_В = \omega \cdot r \tag{3}$$

формула билан топилади. Агар (1), (2) тенгламадан (3) формулани ҳисобга олган ҳолда, x ва y ни топсак

$$x = x_0 + v \cdot t, \tag{4}$$

$$y = y_0 + \omega \cdot r \cdot t. \tag{5}$$

Охирги (4) ва (5) тенгламалар A юкнинг ҳаракат қонунларидир. A юкнинг ҳаракат траекториясини топиш учун (4) ва (5) тенгламадан t вақтни қисқартирамиз, бунинг учун t ни (4) дан топамиз ва ҳосил бўлган

$$t = \frac{x - x_0}{v}$$

ифодани (5) га қўямиз. Бу ҳолда

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{v}\omega r \tag{6}$$

ифода ҳосил бўлади. (6) тенглама A юкнинг ҳаракат траекториясидир. Агар масаланинг шартида берилган қийматларни (6) га қўйсак, A юк траекторияси ушбу

$$y = 6{,}28x = 56{,}8 \tag{7}$$

тенглама шаклини олади. (7) тўғри чизиқнинг тенгламасидир, яъни A юк тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилар экан.

29- мисол. (23.1). Горизонт билан 45° бурчак ҳосил қилган AB қия текислик тўғри чизиқли, OX ўқига параллел $a_г = 1$ дм/с^2 тезланиш билан ҳаракат қилмоқда. Қия текисликдан P жисм нисбий $\sqrt{2}\frac{дм}{с^2}$ тезланиш билан пастга тушмоқда (125- расм). Жисм ва қия текисликнинг бошланғич тезлиги нолга тенг, жисмнинг бошланғич координаталари $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$. Жисмнинг абсолют ҳаракатидаги траекторияси, тезлиги ва тезланиши аниқлансин.

Берилган:

$a_г = 1\frac{дм}{с^2}$

$a_н = \sqrt{2}\frac{дм}{с^2}$

$x = 0$

$y = h$

$\alpha = 45°$

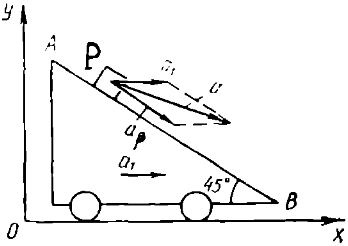
$v_{x_0} = v_{p_0} = 0$

---

v — ? a — ?

Ечиш. Қия текисликнинг горизонтал тезланишини $a_г$ билан, жисмнинг тезланишини $a_р$ билан белгилаймиз. Жисм ва текисликнинг бошланғич тезликларини $v_0\, v_{p_0}$ билан белгилаймиз.

Олдин P жисмни нуқта деб ҳисоблаб, шу нуқтанинг ҳаракат қонунини топамиз. Бунинг учун тезланишларнинг X ва Y ўқларидаги проекцияларини топамиз (125- расм).



125- расм.

$$a_x = a_г + a_н \cos 45° = = 2\frac{дм}{с^2}. \quad (1)$$

$$a_y = -a_н \sin 45° = -1\frac{дм}{с^2}. \quad (1\ )$$

(1) ва (2) дан фойдаланиб, v_x, v_y ни топамиз:

$$\frac{dv_x}{dt} = 2. \quad (2)$$

$$v_x = \int 2dt + C_1 \quad (3)$$

C_1 ни масаланинг бошланғич шартидан фойдаланиб аниқлаймиз, $t = 0$ бўлганда $v_x = v_{x_0} = 0$ ифодаларни (3) га қўйсак,

$0=2\cdot 0+C_1$ ва $C_1=0$ ҳосил бўлади. C_1 нинг қийматини (3) га қўйиб

$$v_x = 2\cdot t \tag{4}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Энди v_y ни худди шу йўл билан топамиз:

$$\frac{dv_y}{dt} = -1;\quad v_y = -\int 1\cdot dt = -t + C_2. \tag{5}$$

Бошланғич шартдан
$t=0,\ v_y = v_{y_0} = 0$ ва (5) дан $C_2 = 0$ бўлади, натижада

$$v_y = -t. \tag{6}$$

Энди (4) ва (6) дан фойдаланиб, X ва Y ни топамиз. (14) дан

$$\frac{dx}{dt} = 2t,\ x = \int 2\,tdt = t^2 + C_3. \tag{7}$$

$t=0,\ x = x_0 = 0$ бошланғич шартни (7) га қўйиб, $C_3 = 0$ эканлигини кўрамиз ва

$$x = t^2 \tag{8}$$

ҳаракат қонунини топамиз, худди шундай, X ни топганимиздек, Y ни ҳам топамиз:

$$\frac{dy}{dt} = -t,\quad y = -\int t\,dt = -\frac{t^2}{2} + C_4 \tag{9}$$

$t=0,\ y = y_0 = h$ бошланғич шартни (9) га қўйиб, $h = 0 + C_4$ ва $C_4 = h$ ни ҳосил қиламиз. Бу ҳолда

$$y = h - \frac{t^2}{2}. \tag{10}$$

Бу P жисмнинг Y ўқи бўйича ҳаракат қонунидир. Шундай қилиб, (8) ва (10) лар P жисмнинг ҳаракат қонунидир. Ҳаракат траекториясини топиш учун (8) дан t^2 нинг қийматини аниқлаб келтириб (9) га қўямиз ва

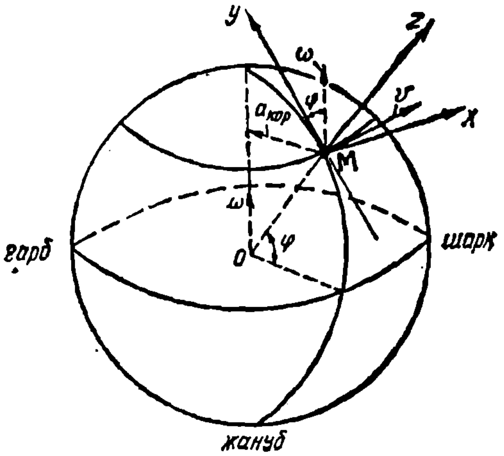
$$y = h - \frac{x}{2} \tag{11}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

(11) ифода P жисмнинг ҳаракат траекторияси тенгламасидир. Энди жисмнинг тўлиқ тезлигини

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,. \tag{12}$$

тенгламадан, тўлиқ тезланишини



126- расм.

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (13)$$

тенгламадан топамиз. Агар (4) ва (6) ни (12) га қўйсак,

$$v = \sqrt{4t^2 + t^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}t \qquad (14)$$

(1) ва (2) ни (13) га қўйсак

$$a = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\ \frac{\text{дм}}{\text{с}^2} \qquad (15)$$

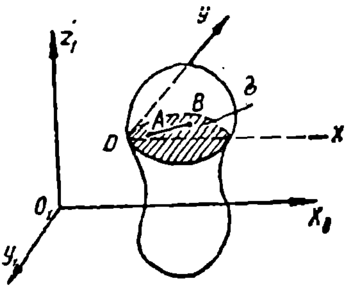
ифодалар ҳосил бўлади.

30- мисол. (23.62). Ер сиртидаги M нуқта шимолий йўналиш билан α бурчак ташкил этиб, v тезлик билан ҳаракат қилади (126- расм). Нуқта ҳаракат қиладиган жойнинг географик кенглиги φ га тенг. Нуқта оладиган кориолис тезланишининг шарқий a_{cx}, шимолий a_{cy} ва вертикал a_{cz} ташкил этувчиларини топинг. Ернинг ўз ўқи атрофида айлангандаги бурчакли тезлиги ω га тенг.

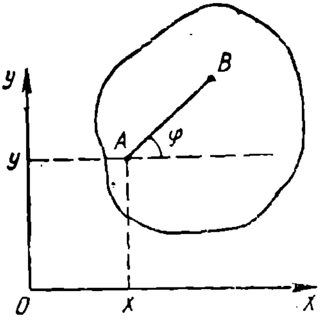
Жавоби: $a_{cx} = -2v\omega\cos\cdot\alpha\sin\varphi$, $a_{cy} = 2v\omega\sin\alpha\cdot\sin\varphi$. $a_{cz} = -2v\omega\sin\alpha\cos\varphi$.

47- §. Текис фигура ҳаракатини ўрганиш

Агар D жисм ҳаракат вақтида унинг ҳамма нуқталари (127- расм) OXY текислигига параллел бўлиб қолса, D жисм ҳаракатини текис фигура ҳаракати деб қараш мумкин. Фикран D жисмни OXY текислигига параллел бўлган текислик билан кессак, σ текис фигура ҳосил бўлади. Энди D жисмни σ сирт — текис фигура билан алмаштирамиз. Текис фигуранинг вазиятини аниқлаш учун OXY координата системасида AB кесманинг вазиятини аниқлаш билан алмаштирамиз (128- расм), яъни D жисм σ текис сирт билан, σ сирт эса AB кесма билан алмаштирилди.



127- расм.



128- расм.

Энди AB кесманинг вазиятини билсак, D жисмнинг вазияти ҳам аниқланган дейиш мумкин. AB кесманинг вазияти эса A нуқтанинг координаталари x, y ва AB тўғри чизиқ кесмасининг X ўқи билан ташкил этган бурчаги φ орқали топилади:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (47.1)$$

(47.1) текис фигуранинг ҳаракат қонунлари деб айтилади. Кўриниб турибдики, бундай ҳаракатда жисмнинг эркинлик даражаси $i=3$ га тенг экан. Бу ерда X ва Y нуқта A нинг (қутбнинг) илгариланма ҳаракатини ифодалайди, φ эса кесма AB нинг қутб атрофида айланма ҳаракатини ифодалайди.

Агар: 1) $\varphi = \text{const}$ бўлса, фақат X ва Y ўзгаради ва бу ҳолда текис фигура илгариланма ҳаракат қилади;

2) $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ бўлса, фақат φ ўзгаради ва бу ҳолда текис фигура A қутб атрофида айланма ҳаракат қилади;

3) X, Y ва φ ўзгарувчан бўлса, текис фигура ҳам илгариланма ва ҳам қутб атрофида айланма ҳаракат қилади.

Демак, текис фигуранинг ҳаракатини қутбнинг илгариланма ҳаракати ва текис фигуранинг қутб атрофидаги айланма ҳаракатларининг йиғиндисидан иборат деб ҳисоблаш мумкин.

Текис фигура ҳаракатининг илгариланма ҳаракати A қутбнинг танланишига боғлиқ, яъни A нуқта фигуранинг қаерида танланишига боғлиқ, чунки A нуқтанинг вазияти ўша нуқтанинг координаталари X, Y орқали топилади. Лекин текис фигура айланма ҳаракатини ифодаловчи тенглама $\varphi = f_3(t)$ қутбнинг танланишига боғлиқ эмас, чунки бу вақтда текис фигуранинг қутб атрофидаги бурчакли тезликлари ω ва бурчакли тезланишлари ε ҳамма қутб нуқталари учун бир хил қийматларга эга бўлади.

Қутб атрофида текис фигура нуқталари текис айланганида бу нуқталар фақат уринма тезликларга эга бўлади, чунки AB кесма ҳаракатининг фақат йўналиши ўзгаради (модули ўзгармайди). Бу уринма тезликлар *айланма тезликлар* дейилади. Бу уринма тезлик модули

$$v = \omega \cdot AB \tag{47.2}$$

формула орқали топилади, v нинг йўналиши ҳаракат йўналишида B нуқтадан ўтказилган уринма бўйлаб йўналган бўлади.

Бурчакли тезлик $\vec{\omega}$ ва бурчакли тезланиш $\vec{\varepsilon}$ векторлари

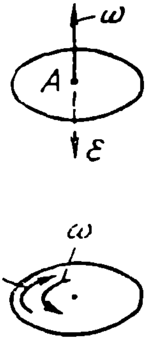
$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \tag{47.3}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \tag{47.4}$$

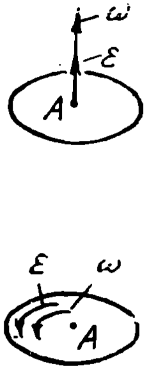
формула орқали топилади. Бу ω ва ε векторлари қутб A нуқтадан ўтувчи ўқ устида ётади ва 43- § га мувофиқ ω, ε векторлари йўналишлари текис фигура текислигига перпендикуляр бўлиб, парма қоидасига асосан аниқланади.

Агар текис фигура A қутб атрофида тезланувчан айланма ҳаракат қилса, ω ва ε бир хил (129- расм) йўналган, секинланувчан айланма ҳаракат қилса, ω ва ε бир-бирига қарама-қарши йўналгандир (130- расм). Бу ҳолда ε ва ω нинг йўналишларини 129, 130- расмларнинг пастки қисмида кўрсатилгандек белгилаш қабул қилинган.

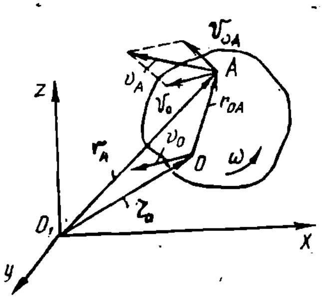
Текис фигура ҳаракати вақтидаги исталган нуқтасининг тезлиги қуйидаги теоремадан фойдаланиб топилади:



129- расм.



130- расм.



131- расм.

Теорема: *текис фигуранинг ҳаракати вақтида исталган нуқтасининг тезлиги фигура қутбининг илгариланма ҳаракатдаги тезлиги билан қутб атрофида ўша нуқтанинг айланма ҳаракатдаги тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Теоремани исботлаш учун 131-,расмдан фойдаланамиз. Бу ерда O_1 нуқта қўзғалмас, O нуқта қутб ва A нуқта текис фигуранинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. A нуқтанинг v_A тезлигини топайлик. A нуқтани O нуқтага нисбатан r_A, нуқта O га нисбатан r_{OA} радиус-вектор ва O нуқтани O_1 нуқтага нисбатан r_0 радиус-вектор билан белгиласак, у ҳолда

$$\vec{r}_A = \vec{r}_0 + \vec{r}_{OA} \qquad (47.5)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бунда $\vec{r}_{OA}$ нинг модули

$$|\vec{r}_{OA}| = \text{const}$$

ва r_A ни билган ҳолда, A нуқта тезлигини топамиз:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_0 + \vec{r}_{OA}) = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_{OA}}{dt}. \qquad (47.6)$$

Бу ерда r_{OA} нинг модули доимий бўлганлиги учун $\frac{d\vec{r}_{OA}}{dt}$ ифода A нуқтанинг қутби атрофидаги айланма тезлигига тенг:

$$\vec{v}_{OA} = \frac{d\vec{r}_{OA}}{dt}. \qquad (47.7)$$

Айланма тезлик вектори (43.10) формулага мувофиқ

$$\vec{v}_{OA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OA} \qquad (47.8)$$

шаклда ифодаланади. Парма қоидасидан фойдаланиб, $\vec{v}_{OA}$ вектори OA кесмага перпендикуляр бўлиб, фигуранинг ҳаракати томон йўналган v_{OA} бўлишини кўрамиз (131-расм).

Энди (47.6) да $\frac{d\vec{r}_0}{dt}$ ҳади O қутб тезлигига тенг, яъни

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} \qquad (47.9)$$

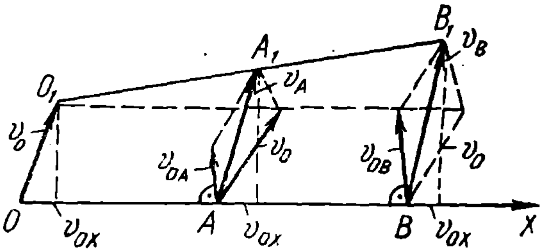
эканлигини ҳисобга олсак, A нуқтанинг абсолют тезлигини (47.6) формулага асосан

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + \vec{v}_{OA} \qquad (47.10)$$

ифодага тенглигига ишонч ҳосил қиламиз.

Демак, A нуқтанинг тезлиги қутбнинг жисм билан илгариланма ҳаракатдаги тезлиги v_0 билан қутбга нисбатан A нуқтанинг айланма тезлиги $\vec{v}_{OA}$ нинг геометрик йиғиндисига тенг ва шу билан теорема исботланди деб айтиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, агар v_0 ни фикран A нуқтага кўчирсак, v_A вектори $\vec{v}_0$ ва $\vec{v}_{OA}$ вектордан тузилган параллелограммнинг катта диагоналига тенг бўлганлигини кўрамиз.

Айланма тезлик $\vec{v}_{OA}$ вектори доим OA га перпендикулярлигидан қуйидаги натижалар келиб чиқади:



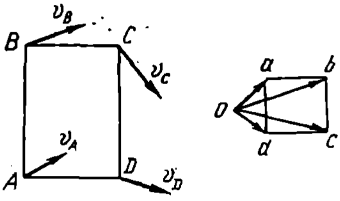
132- расм.

1) текис фигура нуқталари тезликларининг шу нуқталарни туташтирувчи ўқдаги проекциялари ўзаро тенг. Ҳақиқатан ҳам, агар O нуқтанинг тезлиги v_0 бўлиб, A ва B нуқтанинг айланма тезликлари v_{OA} ва v_{OB} бўлса (132- расм), A ва B нуқтанинг тўлиқ тезликлари v_0 билан v_{OA} ва v_0 билан v_{OB} нинг геометрик йиғиндисига тенг. Бироқ v_{OA} ва v_{OB} вектор AB ўққа перпендикуляр бўлганлиги учун бу v_{OA} ва v_{OB} ни AB кесма ёки X ўқидаги проекциялари нолга тенг. Демак, v_A ва v_B векторнинг X ўқидаги проекциялари фақат v_0 нинг X даги проекцияларига тенг ёки v_A ва v_B нинг X даги проекциялари бир-бирига тенг экан;

2) ўзгармас кесмада қўйилган тезликларнинг охирлари бир тўғри чизиқда ётади ва бу кесма тўғри чизиғини кесма устидаги мос нуқталаргача бўлган масофага пропорционал бўлган бўлакларга ажратади. Бу натижадан $\frac{O_1A_1}{O_1B_1} = \frac{OA}{OB}$ нисбатни ҳосил қилиш мумкин.

48- §. Тезликлар режаси. Тезликларнинг оний маркази

Олдинги параграфда текис фигуранинг тезлигини (47.10) формула орқали ҳисоблаш мумкинлигини кўрганимизда v_{OA} айланма тезлик билан OA кесма ўзаро перпендикуляр эканлигини ҳам кўрдик. Демак, текис фигура тезликлари ўзаро боғлиқ экан. Бундай боғланишлар текис фигура тезлигини оддий чизиш йўли билан тезликлар режаси деб айтиладиган усул билан аниқлаш мумкинлигини кўрсатади. Тезликлар режаси қуйидагича тузилади: фараз қилайлик, текис фигуранинг A, B, C, D нуқталарининг v_A, v_B, v_C ва v_D тезлиги маълум бўлсин (133- расм). Ихтиёрий O нуқтага v_A, v_B, v_C ва v_D тезликни маълум масштаб билан ўзига-ўзини параллел қилиб кўчирамиз ва шу нуқталарнинг тезликларига тенг бўлган oa, ob, oc ва od кесмаларни ҳосил қиламиз ҳамда a, b, c ва d нуқтани бир-бирига тўғри чизиқлар билан туташтирамиз. Ана шундай чизманинг ҳосил қилиниши *тезликлар режаси* деб аталади, $\vec{ca}$, $\vec{ob}$, $\vec{oc}$ ва $\vec{od}$ кесмага *нурлар*, a, b, c ва d нуқталарга *чўққилар* деб айтилади.



133- расм.

133- расмда $\Delta\, aob$ дан

$$\vec{ob} = \vec{ca} + \vec{ab} \tag{48.1}$$

ёки $\vec{ob} = \vec{v}_B$, $\vec{oa} = \vec{v}_A$ эканлигини ҳисобга олиб

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{ab}, \tag{48.2}$$

(47.10) формулага асосан

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \tag{48.3}$$

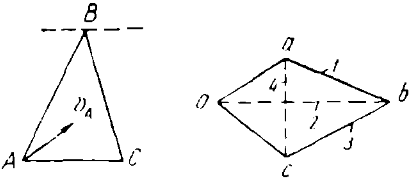
ифодаларни ёзамиз.

Охирги иккита тенгламанинг ўнг томонини бир-бирига тенглаштирганимизда $\vec{v}_{BA} = \vec{ab}$ ни ҳосил қиламиз, худди шу йўл билан $\Delta\, obc$, $\Delta\, ocd$ дан фойдаланиб, $\vec{v}_C\, b = \vec{bc}$, $\vec{v}_C = \vec{DC}$ ифодага эга бўламиз. Кўриниб турибдики, $\vec{v}_{BA}$, $\vec{v}_{CB}$, $\vec{v}_{DC}$ айланма тезликлардир.

Демак, тезликлар режасида чўққиларни туташтирувчи тўғри чизиқ кесмалари текис фигуранинг маълум нуқтасининг қўшни нуқтасига нисбатан олинган айланма тезлигига геометрик тенг.

Шунинг учун айланма тезликларнинг модулларини (47.2) га асосан

$$\left.\begin{aligned} v_{BA} &= ab = \omega \cdot AB, \\ v_{CB} &= bc = \omega \cdot BC, \\ v_{DC} &= cd = \omega \cdot DC \end{aligned}\right\} \tag{48.4}$$



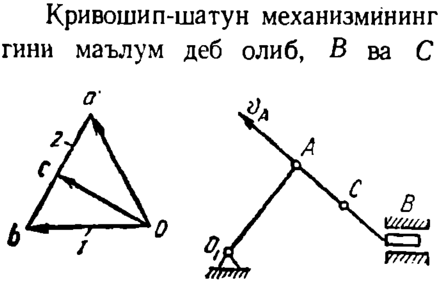
134- расм.

шаклда ифодалаш мумкин. Айланма тезлик AB, BC, CD кесмага перпендикуляр бўлгани учун $ab \perp AB$, $bc \perp BC$ ва $cd \perp CD$ бўлади ва $abcd$ тўртбурчак $ABCD$ тўртбурчакка ўхшаш бўлиб, унга нисбатан айланиш йўналиши бўйлаб 90° га бурилгандир.

Агар текис фигуранинг битта нуқтаси тезлигининг модули ва йўналиши маълум, иккинчи нуқта тезлигининг фақат йўналишини ифодаловчи тўғри чизиқ маълум бўлса, иккинчи нуқта тезлигининг модулини тезликлар режасидан аниқлаш мумкин.

Фараз қилайлик, ABC фигурадаги A нуқтанинг v_A тезлиги (134- расм) ва B нуқтада пунктир тўғри чизиқ, яъни B нуқта тезлигининг ётишини ифодаловчи тўғри чизиқ берилган. B ва C нуқталарнинг тезлигини топиш керак. Бунинг учун O нуқтага v_A ни кўчириб a чўққини ҳосил қиламиз. Бу a чўққидан ўтувчи ва AB га перпендикуляр тўғри чизиқ 1 ни ўтказамиз. O нуқтадан ўтувчи ва B нуқтадан ўтган пунктир тўғри чизиққа параллел бўлган тўғри чизиқ 2 ни ўтказганимизда, 2 ва 1 тўғри чизиқ b нуқтада кесишади. Демак, Ob кесма узунлиги B нуқтанинг тезлигига тенг, яъни $v_B = Ob$. Энди b чўққидан ўтувчи ва BC га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ 3 ни ва a чўққидан ўтувчи ҳамда AC га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ 4 ни ўтказганимизда, 4 ва 3 тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси бўлган янги чўққи C ни ҳосил қиламиз, демак $v_C = OC$ бўлади.

Кривошип-шатун механизмининг A нуқтасининг v_A тезлигини маълум деб олиб, B ва C нуқтанинг тезликларини тезлик режасини тузиш билан аниқлаймиз (135-расм). Ихтиёрий, O нуқтага v_A ни кўчириб, a чўққини ҳосил қиламиз. B нуқта (сирпанчиқ) горизонтал ҳаракат қилганлиги учун O нуқтадан



135- расм.

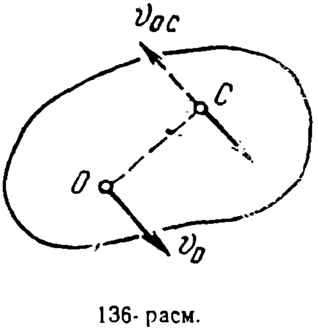
горизонтал тўғри чизиқ *1* ни ўтказамиз. *a* нуқтадан ўтувчи ва *AB* га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ *2* ни ўтказсак, *2* ва *1* тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси бўлган *b* чўққини ҳосил қиламиз ва, демак, $\vec{v}_B = \vec{ob}$. *C* нуқтанинг тезлигини аниқлаш учун кесмани *AC* : *CB* нисбатда бўлиб, *C* нуқтани ҳосил қиламиз ва *O* нуқта билан *C* ни бирлаштириб *OC* нурнинг *C* нуқта тезлигига тенглигини, яъни $\vec{v}_C = \vec{oc}$ бўлишини кўрамиз.

Текис фигуранинг ҳаракати вақтида исталган вақтда доим шундай нуқталар топиш мумкинки, бу нуқталарнинг тезлиги маълум вақтда нолга тенг. Бу нуқталарга тезликларнинг оний маркази деб айтилади. Ана шу тезликларнинг оний марказини қандай қилиб аниқлашни кўриб чиқайлик.

Маълумки, текис фигуранинг исталган нуқтасининг тезлиги (47.10) га асосан қуйидаги ифода ёрдамида топилади:

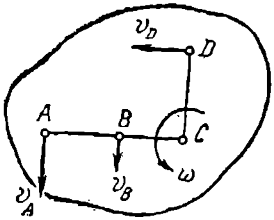
$$\vec{v}_{AC} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{OC}\,.$$

Агар *O* қутбнинг тезлиги $\vec{v}_0$ бўлса, $\vec{v}_0$ га перпендикуляр гўғри чизиқ ўтказамиз. Текис фигуранинг *C* нуқтасининг айланма тезлигини аниқлашда (136-расм) *O* нуқтадан *C* нуқтагача бўлган масофа *OC* ни шундай танлаш мумкинки, ҳамма вақт *C* нуқтанинг тезлиги 0 га тенг бўлсин, яъни $v=0$, бу ҳолда $v_0 + v_{OC} = 0$, бундан $v_0 = -v_{OC}$. Демак, берилган вақт моментида *C* нуқтанинг тезлиги *O* нуқта тезлигига тенг ва *C* нуқта v тезлигининг оний маркази деб айтилади. Охирги тенгламадан кўринадики, $v_C = 0$ бўлиши учун $v_{OC} = -v_0$ шарт бажарилиши лозим, яъни v_{OC} айланма тезлик қутб тезлиги v_0 га модули тенг бўлиб, йўналиши тескари бўлиши шарт. Охирги тенгламадан фойдаланиб тезликларнинг оний маркази *C* нуқтанинг вазиятини аниқлайлик:



136- расм.

$$v_0 = \omega \cdot OC,$$



137- расм.

бундан $OC = \frac{v_0}{\omega}$. (48.5)

(48.5) дан тезликларнинг оний маркази C нуқта қутбнинг тезлигига ўтказилган перпендикуляр устида жойлашади ва O қутбдан $OC = v_0/\omega$ масофада туради деган хулосага келамиз.

Агар қутб тезлиги v_C ва тезликлар оний марказининг ўрни маълум бўлса, текис фигуранинг бошқа нуқталарининг тезлигини аниқлаш мумкин. Текис фигура қутбининг тезлиги $v_C = 0$ ва A, B, D нуқталардан C нуқтагача бўлган масофалар CA, CB, CD ни маълум деб олиб, A, B, D нуқталардаги тезликларни топайлик (137- расм). Агар тезликларнинг оний марказини қутб деб олсак, бу ҳолда $v_C = v_0 = 0$. (47.10) формулага асосан

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_A &= \vec{v}_C + \vec{v}_{AC}, \\ \vec{v}_B &= \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}, \\ \vec{v}_D &= \vec{v}_C + \vec{v}_{0C} \end{aligned}\right\} \qquad (48.6)$$

ҳосил бўлади ва $v_C = 0$ бўлганлиги учун (48.6) дан

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{AC}, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{BC}, \quad \vec{v}_D = \vec{v}_{DC}$$

ҳосил бўлади ва

$$\left.\begin{aligned} v_{AC} &= \omega \cdot AC, \quad v_A = v_{AC}, \quad \vec{v}_{AC} \perp \overrightarrow{AC}; \\ v_{BC} &= \omega \cdot BC, \quad v_B = v_{BC}, \quad \vec{v}_{BC} \perp \overrightarrow{BC}; \\ v_{DC} &= \omega \cdot DC, \quad v_D = v_{DC}, \quad \vec{v}_{DC} \perp \overrightarrow{DC}; \end{aligned}\right\} \qquad (48.7)$$

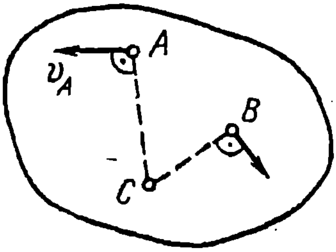
Охирги тенгламадан текис фигуранинг исталган нуқтасининг тезлиги, фигуранинг айланиши томон йўналган бўлиб, текис фигуранинг бурчакли тезлигини тезликларнинг оний маркази C дан танланган нуқтагача бўлган масофага кўпайтмасига (яъни $\omega \cdot AC$ ёки $\omega \cdot BC$ ва ҳоказо) тенг ва шу кесмага перпендикуляр бўлади деган хулосага келамиз.

Энди v_B/v_A, v_D/v_A ни топсак:

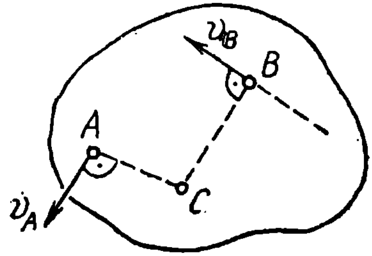
$$\frac{v_B}{v_A}=\frac{BC}{AC},\quad \frac{v_D}{v_A}=\frac{DC}{AC}. \qquad (48.8)$$

Демак, текис фигуранинг исталган икки нуқтасининг тезликлари модулларининг нисбати шу нуқталардан тезликларнинг оний марказигача бўлган масофаларга тўғри пропорционал бўлади.

Шундай қилиб, текис фигуранинг исталган нуқтасининг тезлигини топиш учун ω ни танланган нуқтадан тезликларнинг оний марказигача бўлган масофасига кўпайтириш лозим. Агар *A* ва *B* нуқтанинг тезликлари v_A, v_B маълум бўлса, шу v_A ва v_B га перпендикулярлар ўтказамиз ва шу перпендикулярларнинг кесишган нуқтасига тезликларнинг оний маркази *C* нуқта жойлашади (138-расм).



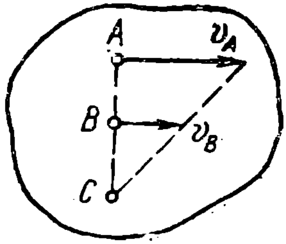
138- расм.



139- расм.

2. Текис фигуранинг *A* нуқтасидаги тезлиги v_A ва *B* нуқтадаги тезлик ётадиган тўғри чизиқ маълум бўлиб, шу *B* нуқта тезлигини топиш лозим бўлсин. Бу ҳолда (139-расм) ҳам v_A векторга ва *B* нуқтадан ўтадиган тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказиб, тезликларнинг оний маркази *C* нуқтани — перпендикулярларнинг кесишган нуқтасини топамиз. *B* нуқтанинг тезлигининг модули $v_B = \omega \cdot BC$ га тенг бўлиб, бунда $\omega = \frac{v_A}{AC}$ дан ҳисобланади. *B* нуқта тезлигининг йўналиши *BC* га перпендикуляр бўлиб, текис фигуранинг ҳаракати томон йўналган v_B вектори бўлади.

3. *A* ва *B* тезлик йўналиши бир-бирига параллел бўлса (140-расм), тезликларнинг оний маркази v_A ва v_B га ўтказил-

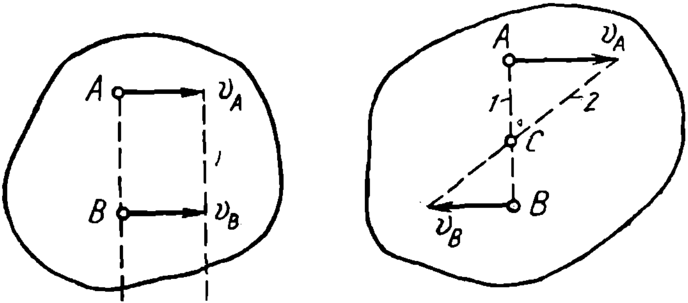


140- расм.

ган перпендикуляр ва тезликларнинг охирини туташтирувчи тўғри чизиқнинг кесишган *C* нуқтаси бўлади.

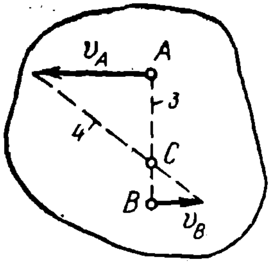
4. *A* ва *B* нуқта тезликларининг модуллари бир хил ва ўзаро параллел бўлса, тезликларнинг оний маркази чексизликда бўлади, чунки бу ҳолда (141-*а* расм) тезликларга ўтказилган перпендикуляр ва тезликларнинг охирини туташтирувчи тўғри чизиқ бир-бирини кесиб ўтмайди ва демак, текис фигуранинг бурчакли тезлиги $\omega = \frac{v_A}{\infty} = 0$ бўлади.

5. v_A ва v_B нинг модуллари тенг ва йўналишлари қарама-қарши бўлса, *C* нуқта *1* ва *2* тўғри чизиқларнинг (141-б-расм) кесишган нуқтасида бўлади: агар v_A ва v_B нинг модуллари турлича ва ўзаро параллел бўлса (142-расм), *C* нуқта *3* ва *4* тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасида бўлади. Бу ҳолда тезликлар нисбати (48.8) га асосан $\frac{v_A}{v_B} = \frac{CA}{CB}$ ифодадан топилади. Агар $v_A = v_B$ маълум вақт оралиғида ўринли бўлса, шу



а) б)

141- расм.



142- расм.

вақт оралиғида текис фигура илгариланма ҳаракат ҳолатида бўлади.

6. Текис фигура бошқа бирон сирт ёки чизиқ устида сирпанишсиз думаласа, бу ҳолда тезликларнинг оний маркази текис фигуранинг чизиқ ёки сирт билан тегиб турган нуқтасида бўлади. Бу тегиш нуқтаси тегиш вақти оралиғида ҳаракатда қатнашмайди, яъни бу нуқтанинг ҳаракат тезлиги нолга тенг — бу нуқта тезликларнинг оний марказидир.

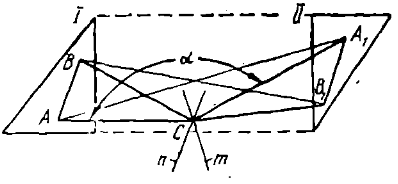
49- §. Шаль теоремаси. Центроидлар. Айланишнинг оний маркази

47- § да кўриб ўтганимиздек, текис фигуранинг ҳаракати вақтида ҳамма вақт шундай нуқтани топиш мумкинки, бу нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлсин. Шу нуқтага тезликларнинг оний маркази деб айтилган эди. Нуқта тезликларининг оний маркази, текис фигура нуқталарида (берилган вақтда) тезликларнинг тақсимланишини ифодалайди. Шу нуқтадан қанча узоқроқда текис фигура нуқталари жойлашган бўлса, улар тезликларининг модули шунча каттароқ бўлади.

Текис фигура ҳаракати вақтида доим шундай нуқта топиш мумкинки, бу нуқта атрофида фигурани айлантириб, унинг янги вазиятини топиш мумкин. Француз олими Шаль (1793—1880) текис фигуранинг чекли силжиши ҳақида қуйидаги теоремани таклиф этди.

Теорема: *текис фигуранинг текисликдаги ҳар қандай силжишидаги янги вазиятини бу фигурани, охирги айланиш маркази деб айтиладиган нуқта атрофида бир марта буриш билан ҳосил қилиш мумкин.*

Теоремани исботлаш учун 143- расм дан фойдаланайлик. Текис фигурани AB кесма билан алмаштириб, бу кесманинг (текис фигуранинг) икки AB ва A_1B_1 вазиятини кўриб чиқайлик. I ва II вазиятда AB ва A_1B_1 кесманинг A билан A_1 ва B билан B_1 нуқталарини туташтириб, AA_1 ва BB_1 тўғри чизиқлар ҳосил қиламиз. AA_1 ва BB_1 нинг ўрталаридан m ва n перпендикуляр тўғри чизиқларни ўтказамиз ва m, n нинг кесишган нуқтасини C билан

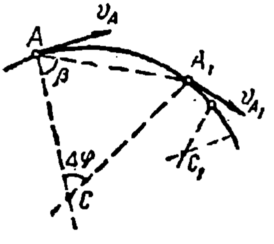


143- расм.

белгилаймиз. Бу C нуқта чизганимизга мувофиқ симметрик нуқтадир. C нуқтани A, B, A_1 ва B_1 нуқта билан туташтириб ΔABC ва $\Delta A_1B_1C_1$ ни ҳосил қиламиз. Учбурчаклар ўзаро тенг, чунки 1) қаттиқ жисм таърифига мувофиқ $AB = A_1B_1$; C нуқта симметрик бўлгани учун $AC = A_1C$ ва $BC = B_1C$. Учбурчаклар ўзаро тенг ва C нуқта симметрия маркази бўлгани учун фигурани ана шу C нуқта атрофида $\angle ACA_1 = \alpha$ бурчакка бураб, текис фигуранинг II вазиятини ҳосил қилиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, бу ҳолда $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ шартидан, фигурани α бурчакка бурганимизда мос нуқталар, A нуқта A_1 устига, B нуқта B_1 устига тушади ва текис фигуранинг янги вазияти ҳосил бўлади. Демак, теорема исбот бўлди.

Симметрик C нуқтага охирги айланиш нуқтаси деб айтилади Агар текис фигуранинг чексиз кичик $\Delta t \to 0$ вақтдаги силжишидаги янги вазиятини топмоқчи бўлсак, албатта бу ҳолда, бурилиш бурчаги α ҳам нолга интиладиган даражада кичик бўлади. Бу ҳолда текис фигурани қандайдир C_1 нуқта атрофида бураб, унинг биринчи элементар силжишидаги янги биринчи вазиятини, C_2 нуқта атрофида бураб текис фигуранинг элементар силжишидаги иккинчи вазиятини, ..., C_n нуқта атрофида бураб текис фигуранинг n-элементар силжишидаги n-янги вазиятини топамиз. C_1, C_2 ... C_n нуқталар айланишнинг оний марказлари деб аталади. Оний айланиш марказларидаги нуқталарнинг тезликлари нолга тенг, шунинг учун бу нуқталарга тезликларнинг оний маркази деб ҳам айтилади.

Оний айланиш маркази ва тезликларнинг оний маркази бу битта нуқтадир. Кетма-кет вақтлардаги оний айланиш нуқталарининг геометрик ўрни қандайдир чизиқларни ҳосил қилади. Бу чизиқларга центроидлар деб айтилади. Агар қўзғалмас системага нисбатан олсак қўзғалмас центроид, қўзғалувчан системага нисбатан — қўзғалувчан центроид дейилади.



144- расм.

Текис фигуранинг икки нуқтасининг (A ва A_1 нуқта) ҳаракат вақтидаги оний айланиш марказларини кўриб чиқайлик (144-расм). Агар A нуқта Δt вақтда A_1 вазиятни олса, бу ҳолда ўртача тезлик ватар AA_1 орқали

$$v_{ўр} = \frac{AA_1}{\Delta t}$$

формула билан, оний тезлик эса ёй $\overset{\frown}{AA_1}$ нинг лимити

$$v_1 = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{AA_1}{\Delta t}\right)$$

орқали топилади. Расмдан

$$AA_1 = 2\,AC\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\text{ва } v = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{2\,AC\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{AC\cdot\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi/2}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right).$$

Маълумки,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi/2}\right) = 1,$$

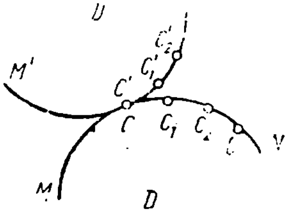
ва

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \omega$$

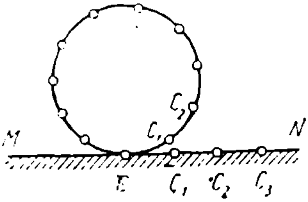
шаклда ёзилади. Бу ҳолда A нуқтанинг t вақтдаги тезлигининг модули қуйидагича топилади:

$$v = AC\cdot\omega.$$

v_A тезликнинг йўналиши β бурчак орқали топилади. Бу бурчак β нинг қиймати $\Delta t\to 0$ бўлганда, AC билан 90° бурчак ҳосил қилади, чунки $\Delta t\to 0$ бўлган ҳолда $\Delta\varphi\to 0$, яъни $\beta = 90°$ ва v_A тезлик текис фигуранинг айланма тезлигига тенгдир. v_A тезлик AC га перпендикуляр бўлиб, фигуранинг ҳаракати томон траекторияга уринма бўйлаб йўналгандир.



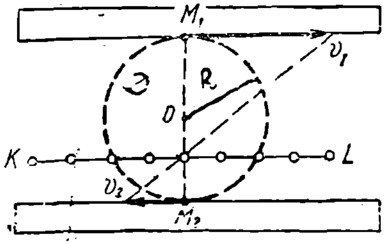
145- расм.



146- расм.

Текис D фигура қўзғалмас D_1 сиртда сирпанишсиз думаласа, бу ҳолда C_1, C_2, . . . , C_nни тасвирловчи MN чизиғи қўзғалмас, C'_1, C'_2, . . . , C'_n оний айланиш нуқталарининг геометрик ўрнини тасвирловчи $M'N'$ чизиғи қўзғалувчан центроид деб аталади (145- расм).

Горизонтал йўлда думалаб бораётган ҳалқа (146- расм) гардишидаги C', C'_1, C'_2, C'_3 . . . нуқталар ўрни—қўзғалувчан центроида — айланани, C, C_1, C_2, C_3 . . . нуқталар ўрни — қўзғалмас центроида — тўғри чизиқ MN ни ташкил этади.



147- расм.

Иккита рейка орасида думалаб бораётган R радиусли D диск (147- расм) ҳоли учун KL тўғри чизиқ қўзғалмас центроид бўлиб, D диск сиртининг айланаси эса қўзғалувчан центроиддир. Шундай қилиб, текис фигуранинг ҳақиқий ҳаракати вақтида қўзғалувчан центроида қўзғалмас центроидада сирпанишсиз думалайди (Пуансо теоремаси).

Энди центроид тенгламасини топайлик. Текис фигура қутбининг тезлиги $v_0 = v_c$, жисмнинг M нуқтаси айланма тезлиги $v_{см}$ бўлсин. Бу ҳолда M нуқтанинг абсолют тезлиги (47.10) формулага асосан (148- расм):

$$\vec{v}_м = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{мс}$$

тенглама орқали топилади. Агар $O\eta\xi$ қўзғалмас система ва OXY қўзғалувчан система деб қабул қилсак, расмдан кўринадики, M нуқтанинг координаталари қуйидагиларга тенг бўлади: $O\eta\xi$ системага нисбатан M нуқтанинг координаталари η, ξ га тенг; CXY системага нисбатан ўша M нуқтанинг координаталари $\xi_m - \xi_c$ ва $\eta_м - \eta_c$ га тенг.

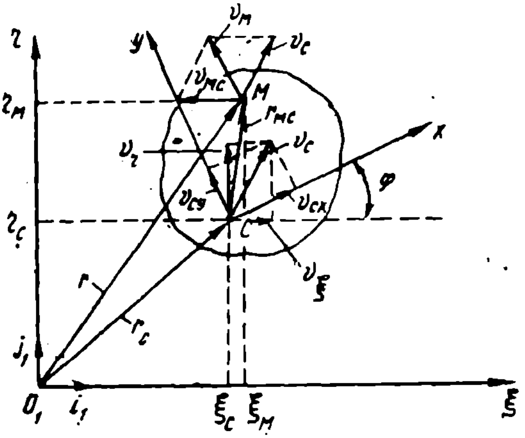
Текис фигуранинг 0, η, ξ қўзғалмас системага нисбатан тезлиги

$$\vec{v}_м = \vec{v}_c + \omega \times \vec{\rho}_{мс} \qquad (49.1)$$

формула ёрдамида, қўзғалувчан CXY системадаги тезлиги

$$\vec{v}_м = \vec{v}_{c\xi} + \vec{v}_{c\eta} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{мс} \qquad (49.2)$$

тенглама орқали топилади. Агар



148- расм.

$$\vec{\rho}_{мс} = \overrightarrow{xi} + y\vec{j} \qquad (49.3)$$

шаклда тасвирланишини ҳисобга олсак ва $\rho_{мс}$ нинг проекциялари $\xi - \xi_{мс}$, $\eta - \eta_c$ эканлигини эслаб, $v_м$ ни қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$\vec{v}_м = \vec{v}_{c\eta}\vec{i}_1 + \vec{v}_{c\xi}\vec{i}_1 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{мс}. \qquad (49.4)$$

Лекин

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{мс} = \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \xi - \xi_c & \eta - \eta_c & \end{vmatrix} \qquad (49.5)$$

Охирги (49.4) ва (49.5) тенгламалардан $v_м$. тезликнинг η ва ξ ўқлардаги проекцияларини топсак, $v_\xi = 0$ бўлади.

$$v_\xi = v_{c\xi} - \omega(\eta - \eta_c), \qquad (49,6)$$

$$v_\eta = v_{c\eta} + \omega(\xi - \xi_c). \qquad (49.7)$$

бунда

$$v_{c\xi} = \frac{d\xi_c}{dt}, \qquad (49.8)$$

$$v_{c\eta} = \frac{d\eta_c}{dt} \qquad (49.9)$$

ифодаларни ҳисобга олсак:

$$v_\xi = d\xi_c/dt - \omega(\eta - \eta_c). \qquad (49.10)$$

$$v_\eta = d\eta_c/dt + \omega(\xi - \xi_c). \qquad (49.11)$$

Агар айланишнинг оний маркази билан тезликларнинг оний маркази устма-уст тушади деб қабул қилсак ва оний тезликларнинг проекциялари $v_{c\eta} = 0$, $v_{c\xi} = 0$ эканлигини ҳам назарда тутсак, бу ҳолда охирги иккита тенглама қўзғалмас системага нисбатан центроидларнинг тенгламаларини беради:

$$d\xi_c/dt - \omega(\eta - \eta_c) = 0; \qquad (49.12)$$

$$d\eta_c/dt + \omega(\xi - \xi_c) = 0 \qquad (49.13)$$

ёки

$$\eta = \eta_c + \frac{1}{\omega} \cdot d\xi_c/dt, \qquad (49.14)$$

$$\xi = \xi_c - \frac{1}{\omega} d\eta_c/dt. \qquad (49.15)$$

Ҳосил қилинган (49.14) ва (49.15) тенгламалар қўзғалмас системадаги центроидларнинг параметрик тенгламаларидир.

Қўзғалувчан центроид тенгламаларини ҳосил қилиш учун (49.2) ва (49.3) ни эътиборга олиб,

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{мс} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \qquad (49.16)$$

ни ҳосил қиламиз ёки (49.16) дан

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{мс} = -y\omega\vec{i} + \omega \times \vec{j}. \qquad (49.17)$$

148-расмдан v_c билан $v_{см}$ нинг xy ва yx даги проекциялари йиғиндиси v_x- ва v_y га тенг:

$$v_x = v_{c\xi}\cos\varphi + v_{c\eta}\sin\varphi - y\omega \qquad (49.18)$$

$$v_y = -v_{c\xi}\sin\varphi + v_{c\eta}\cos\varphi + \omega x, \qquad (49.19)$$

бунда

$$v_{c\xi} = d\xi/dt \qquad (49.20)$$

$$v_{c\eta} = d\eta/dt. \qquad (49.21)$$

Агар қўзғалувчан системадаги тезликларнинг оний марказининг координаталарини X_c, Y_c деб, тезлик проекцияларини топсак: $v_{cx} = 0$ ва $v_{cy} = 0$. (49.22)

Энди (49.20), (49.21) ни ҳам (49.22) ва (49.19) га қўйиб (X ва Y нинг ўрнига X_c, Y_c ни қўямиз) қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$d\xi/dt \cdot \cos\varphi + d\eta/dt \cdot \sin\varphi - \omega \cdot Y_c = 0.$$

$$-d\xi/dt \cdot \sin\varphi + d\eta/dt \cdot \cos\varphi + \omega \cdot X_c = 0,$$

Бундан X_c ва Y_c ни топамиз:

$$X_c = \frac{1}{\omega}(d\xi/dt \cdot \sin\varphi - d\eta/dt \cos\varphi) \tag{49.23}$$

$$Y_c = \frac{1}{\omega}(d\xi/dt \cos\varphi + d\eta/dt \sin\varphi) \tag{49.24}$$

ξ, η — M нуқтанинг координаталари, бу нуқталар центроида устида бўлса, қутб нуқтанинг координаталари бўлади. (49.13), (49.24) тенгламалар қўзғалувчан системадаги қўзғалувчан центроиднинг параметрик тенгламаларидир, X_c, Y_c — тезликлар оний марказининг координаталаридир, φ — X ўқи билан ξ ўқи орасидаги бурчак.

Шундай қилиб, ҳам қўзғалмас, ҳам қўзғалувчан центроидлар тенгламасини келтириб чиқардик.

50- §. Текис фигура нуқталарининг тезланиши

Текис фигуранинг исталган нуқтасининг тезланишини аниқлаш учун ўша нуқта тезлиги, яъни (47.10) дан

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{мс}} \tag{50.1}$$

вақт бўйича бир марта ҳосила оламиз ($v_c = v_0$ қутб тезлиги, $\vec{r}_{\text{мс}} = \vec{r}$ деб қабул қиламиз):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{v^0}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{50.2}$$

бунда

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_{\text{мс}}. \tag{50.3}$$

Агар

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{a}_0, \tag{50.4}$$

яъни текис фигурадаги қутбнинг илгариланма ҳаракати тезланиши эканлигини ҳисобга олсак, (50.1) ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{мс}. \tag{50.5}$$

Охирги (50.5) тенгламадан қуйидаги теорема келиб чиқади: *текис фигуранинг ҳаракати вақтидаги исталган нуқтасининг тезланиши а текис фигура қутбининг илгариланма ҳаракатидаги тезланиши a_0 билан текис фигуранинг қутб атрофида айланишидаги айланма тезланиши $a_{мс}$ нинг геометрик йиғиндисига тенг.*

Маълумки, айланма тезланиш

$$\vec{a}_{мс} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega \tag{50.6}$$

формуладан аниқланар эди ва бунда

$$\vec{a}_\varepsilon = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \tag{50.7}$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{50.8}$$

эканлиги ҳам маълум.

Бунда a_ε — уринма (тангенциал) тезланиш, a_ω — қутб O нуқтадан ўтувчи ўққа интилувчан тезланиш. Маълумки, бу тезланишлар модуллари

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot R \tag{а}$$

$$a_\omega = \omega^2 \cdot R \tag{б}$$

орқали топилади. Бу формулалардаги R текис фигурадаги маълум (танланган) нуқтадан айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофадир. Агар (50.6) ни (50.5) га қўйсак:

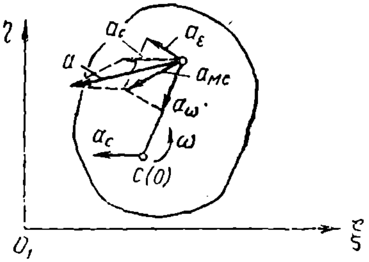
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega. \tag{50.9}$$

Айланма тезланиш иккита — уринма a_ε ва ўққа интилувчан a_ω тезланишлардан тузилган тўғри бурчакли тўртбурчакнинг диагоналига тенг (чунки a_ε ва a_ω ўзаро перпендикуляр), яъни $a_{мс}$ нинг модули

$$a_{мс} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2} \tag{50.10}$$

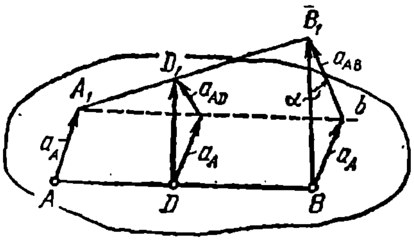
тенглама ёрдамида топилади. a_ε йўналиши α бурчак орқали қуйидаги тенгламадан топилади:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\varepsilon}{a\omega} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{50.11}$$



149- расм.

Энди M нуқтадаги абсолют тезланишнинг — a нинг модули a_ε ва $a_{мс}$ дан тузилган параллелограмм-



150- расм.

нинг диагоналига тенглигини эътиборга олсак, бу a нинг модули косинуслар теоремасига асосан қуйидагича топилади (149- расм):

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_{мс}^2 + 2a_c \cdot a_{мс} \cos(\widehat{\vec{a}_c, \vec{a}_{мс}})}. \tag{50.12}$$

Шундай қилиб, $\vec{a}$ ни топиш учун $\vec{a}_\varepsilon$ билан $\vec{a}_{мс}$ ни векториал қўшиш лозим. Тўлиқ айланма тезланиш модули (а), (б) ва (50.10) ларга асосан

$$a_{мс} = \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\cdot R \tag{50. 13}$$

ҳисобланади.

Текис фигуранинг ихтиёрий кесмаси устидаги нуқталар тезликларининг охирлари бир тўғри чизиқда ётади ва кесмани нуқталар орасидаги пропорционал масофаларга ажратади. Ҳақиқатан ҳам, 150- расмда A қутбнинг тезланиши a_A, айланма тезланиш a_{AB} бўлса, B нуқтанинг a_B тезланиш вектори a_A ва a_{AB} нинг векториал йиғиндисига тенг. Шунингдек a_D вектори a_A ва a_{AD} нинг векториал йиғиндисига тенг. Бунда α бурчак (50.11) формуладан топилади. dD_1 ва $bЗ_1$ масофа (50.13) орқали ҳисобланилади:

$$dD_1 = a_{AD} = AD\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \qquad (50.14)$$

$$bB_1 = a_{AB} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (50.15)$$

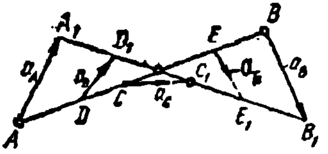
Охирги тенгламалардан $dD_1/bB_1 = AD/AB$, лекин $AD = A_1d$; $AB = A_1b$ бўлганлиги учун

$$dD_1/bB_1 = A_1d/A_1B$$

тенглик ҳосил бўлади. Демак, $\triangle A_1D_1d \backsim \triangle A_1B_1b$ бўлади.

Учбурчакларнинг ўхшашлигидан: 1) тезланишларнинг охирлари A_1D_1 ва B_1 бир тўғри чизиқ A_1B_1 да ётади:

2) $A_1D_1/A_1B_1 = A_1d/A_1b$ ёки $A_1D_1/A_1B_1 = AD/AB$ ва $A_1D_1/D_1B_1 = AD/DR$



151- расм.

Охирги нисбатлар кўрсатади: қўзғалмас AB кесмадаги нуқталар тезланишларининг охирлари шу кесмани нуқталар орасидаги пропорционал масофаларга ажратади. Шунинг учун AB кесмани четки нуқталарининг тезланишлари a_A ва $a_Б$ ни билсак, кесма устидаги D, C, E нуқталарнинг тезланишларини чизиш йўли билан топиш мумкин (151- расм).

AB кесма тўртта бўлакка—D, C, E нуқталарга ажратилган бўлиб, v_A ва v_B маълум деб олиб, a_B, a_C, a_E номаълум бўлсин. a_A ва a_B нинг охирларини A_1B_1 тўғри чизиқ билан туташтириб, A_1 B_1 кесмани тўртта тенг бўлакка, D, C_1, E_1 нуқталарга ажратамиз. D билан D_1, C_1 билан C ва E билан E_1 ни бирлаштириб D, C, E нуқталардаги тезланишларни топамиз. Бу тезланишлар a_D, a_C, a_E ларнинг модулларини масштабдан фойдаланиб топамиз, a_D, a_C, a_E катталикларнинг йўналишини ҳам расмдан фойдаланиб топамиз.

51-§. Тезланишларнинг оний маркази

Текис фигуранинг ҳаракати вақтида доим шундай нуқтани топиш мумкинки, бу нуқтанинг берилган вақтдаги тезланиши нолга тенг бўлади. Тезланиши нолга тенг бўлган нуқта *тезланишнинг оний маркази* дейилади.

Тезланишнинг оний марказининг ўрнини аниқлаш учун текис фигуранинг исталган нуқтасининг тезлигини (50.9) га асосан қуйидагича ёзамиз: $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$.

Тўлиқ айланма тезланиш $\vec{a}_{MC} = \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega$ ифода орқали топилар эди. Агар текис фигурада танланган нуқта тезланишнинг оний маркази бўлса, $a = 0$ ва $\vec{a}_0 = -\vec{a}_{MC}$ ҳосил бўлади. Охирги ифодада агар a_0 ва a_{MC} нинг фақат модулларини ҳисобга олсак, қуйидаги

$$a_0 = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} \quad \text{ва} \quad R = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}} \tag{51.1}$$

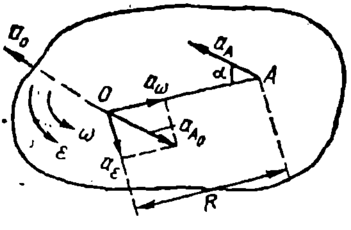
ифодани ёзамиз.

(51.1) да R танланган нуқтадан тезланишнинг оний марказигача бўлган масофадир. Танланган нуқта тезланиши шу нуқта билан қутб O нуқтани туташтирувчи тўғри чизиқ билан α бурчак ҳосил қилади. Бурчак қуйидаги тенгламадан топилади:

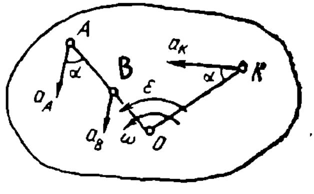
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{51.2}$$

152-расмда $R = OA$ бўлиб, a_A вектори билан OA орасидаги бурчак α га тенг. α бурчак текис фигура тезланувчан ҳаракат қилганда бурчакли тезланиш бўйича, секинланувчан ҳаракат қилганда ε га тескари томонга йўналган бўлади.

Шундай қилиб, тезланишнинг оний марказининг ўрнини қуйидагича топилади: танланган A нуқтадан тезланишнинг оний марказигача (қутб O билан тезланишнинг оний маркази устма-уст тушган) бўлган масофани (51.1) дан ва a_A тезланиш билан OA орасидаги бурчак α ни (51.2) дан фойдаланиб ҳисобланади.



152- расм.



153- расм.

Агар қутб тезланишнинг оний маркази бўлса, у ҳолда R — нуқтадан қутбгача бўлган масофа. Масалан, текис фигуранинг A, B, K нуқталарининг тезланишлари (153- расм)

$$\left.\begin{aligned} a_A &= OA\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \\ a_B &= OB\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \\ a_K &= OK\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4} \end{aligned}\right\} \tag{51.3}$$

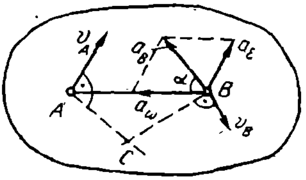
формулалар билан аниқланади. Бу тезланишларнинг текис фигурадаги OA, OB ва OK кесмалар билан ташкил этган бурчаклари α (51.2) формуладан фойдаланиб ҳисобланади. Учала тезланиш ҳам фигурадаги кесма билан бир хил α бурчак ташкил этади.

(51.3) тенгламалардан

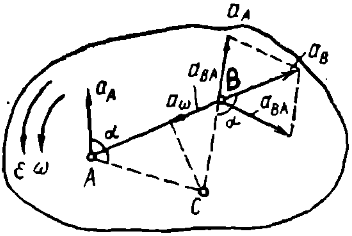
$$a_A/a_B = OA/OB, \quad a_B/a_K = OB/OK \tag{51.4}$$

нисбатларни ҳосил қиламиз. Бу нисбатлардан текис фигуранинг исталган вақтдаги тезланишларининг модуллари шу нуқталардан тезланишларнинг оний марказларигача бўлган масофага тўғри пропорционал ва бу нуқталарнинг тезланиш векторлари шу нуқталарни тезланишларнинг оний маркази билан туташтирувчи кесмалар билан бир хил бурчак ташкил қилади деган хулоса чиқади.

Шуни қайд қилиш лозимки, тезланишнинг оний маркази ҳар хил нуқта бўлади (154-расм).



154- расм.



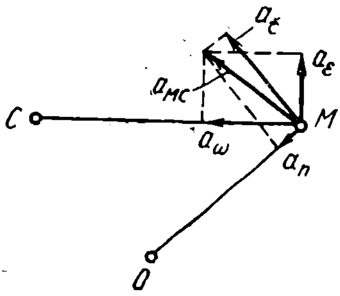
155- расм.

Тезликларнинг оний маркази текис фигурадаги AB кесманинг икки четки нуқталаридаги v_A ва v_B га ўтказилган перпендикулярнинг кесишган O нуқтасида бўлади. Тезланишларнинг оний маркази, агар A нуқтани қутб деб олсак (ва A нуқта тезланишнинг оний маркази), B нуқтадан AB масофада туради. Бу AB масофани (51.1) дан фойдаланиб топамиз:

$$AB = \frac{a_B}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}};$$

α бурчакни $\operatorname{tg}\alpha = \varepsilon/\omega^2$ ифодадан ҳисоблаймиз. Шундай қилиб, A нуқта тезланишнинг, O нуқта тезликнинг оний марказидир.

A нуқта қутб бўлса, $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$, бундан $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B = -\vec{a}_A$ бўлади. a_{BA} га AB орасидаги бурчак $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{e}{\omega^2}$ га тенг. a_A ва a_B ва нисбатан α бурчак билан тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси C тезланишнинг оний маркази бўлади (155- расм). Агар тезликнинг оний маркази O, тезланишнинг оний маркази C нуқта маълум бўлса, бу ҳолда: уринма a_t, нормал a_n ва айланма a_ε тезланишларнинг фарқини яққол тасвирлаш осон бўлади. Ҳақиқатан ҳам, агар (156- расм) M нуқтанинг тезланиши a бўлса, бу тезланиш a ни бир марта a_t ва a_n ташкил этувчиларга, яна бир марта айланма a_ε ва ўққа интилувчи a_ω тезланиш каби ташкил этувчиларга ажратайлик. Расмдан уринма a_t ва нормал a_n тезланиш O нуқтага нисбатан, айланма a_ε ва ўққа интилувчи a_ω тезланиш C нуқтага нисбатан олиниши равшан бўлиб турибди. Шунинг учун a_t, a_n ва a_ε, a_ω ни бир-бири билан алмаштирмаслик керак.



156- расм.

31- мисол (15.3). Доимий ε бурчакли тезланиш билан O нуқтадан ўтадиган ўқ атрофида текис тезланувчан айланма ҳаракат қилаётган OA кривошип r радиусли тишли ғилдиракни R радиусли қўзғалмас тишли ғилдирак атрофида думалатади. Бошланғич $t=0$ вақтда, кривошипнинг бошланғич бурчакли тезлиги $\omega_0=0$ ва бошланғич бурилиш бурчак $\varphi_0=0$ деб қабул қилиб, қўзғалувчан тишли ғилдиракнинг ҳаракат тенгламалари топилсин. A нуқтани қутб деб қабул қилинсин.

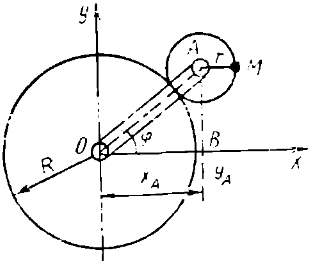
Берилган:

r
R
ε_0
$\omega_0 = 0$

X_A — ? Y_A — ? φ — ?

Ечиш: Қўзғалувчан тишли ғилдиракнинг ҳаракат тенгламасини топиш деганда, шу ғилдиракнинг A нуқтасининг координаталари X_A ва Y_A ни тушуниш лозим. 157-расмдаги $\triangle OAB$ дан

$$X_A = OA \cdot \cos\varphi = (R + r)\cos\varphi. \qquad (1)$$



157-расм.

Кривошип текис тезланувчан айланма ҳаракат қилганлиги учун

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} \qquad (2)$$

тенглама ёрдамида топилади. Масаланинг шартига асосан $\omega_0 = 0$ ва

$$\varphi = \frac{\varepsilon_0 t^2}{2} \qquad (3)$$

ифода ҳосил бўлади. Энди (3) ни (1) га қўйиб, қуйидагини топамиз:

$$X_A = (R + r)\cos\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \qquad (4)$$

$\triangle OAB$ дан Y_A ни аниқлаймиз:

$$Y_A = OA \cdot \sin\varphi = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$$

ёки

$$Y_A = (R + r)\sin\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \qquad (5)$$

Демак, (4) ва (5) қўзғалувчан тишли ғилдиракнинг ҳаракат тенгламаларидир.

Қўзғалувчан тишли ғилдиракнинг бурилиш бурчаги φ_1 албатта, φ бурчакка боғлиқ. Бу боғланиш $\frac{\varphi}{\varphi_1} = \frac{r}{R + r}$ тенглама билан ифодаланади. Охирги тенгламадан

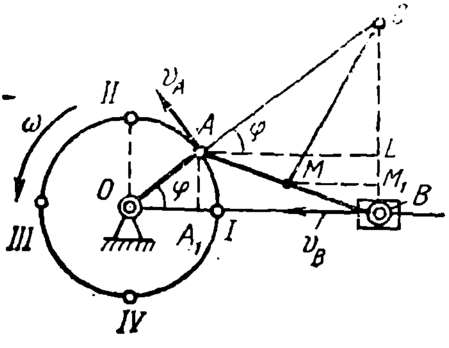
$$\varphi_1 = \frac{R + r}{r}\varphi = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$$

ёки

$$\varphi_1 = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\frac{\varepsilon_0 t^2}{2}$$

қўзғалувчан тишли ғилдиракнинг ҳаракат тенгламаси — бурилиш бурчаги φ_1 нинг t вақтга қараб ўзгариш қонуни топилади.

32- мисол. (16.15). Кривошип механизмида кривошипнинг узунлиги $OA=40$ см, шатуннинг узунлиги $AB=2$ м. Кривошип $180\,\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ айланиш сонига мос бурчакли тезлик билан айланади (158- расм).



158- расм.

Шатуннинг бурчакли тезлиги ω ва бурчак AOB нинг 0, $\frac{\pi}{2}$; π, $\frac{3\pi}{2}$ тўрт қиймати учун шатуннинг ўртасидаги нуқтанинг тезлиги топилсин.

Берилган:

$n = 180\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$

$\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$

$OA = 40$ см

$AB = 2$м

ω_1 — ? v_1 — ?

ω_2 — ? v_2 — ?

ω_3 — ? v_3 — ?

ω_4 — ? v_4 — ?

Ечиш. Масаланинг шартига асосан, φ бурчак 0 дан $\frac{3\pi}{2}$ гача ортади, демак, OA кривошип соат милига нисбатан тескари томонга қараб айланади. Шунинг учун A нуқтадаги тезлик OA га перпендикуляр бўлиб, чап томонга йўналган ва B нуқтанниг ҳам тезлиги чап томога йўналгандир. v_A ва v_B векторларига перпендикулярлар ўтказсак, бу перпендикуляр тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасида тезликларнинг оний маркази C нуқта жойлашади. C нуқтани M нуқта (шатуннинг ўрта нуқтаси) билан туташтирсак, MC кесмани ҳосил қиламиз. Агар CB, MC кесмаларнинг қийматлари маълум бўлса, ω бурчакли тезлик ва M нуқтанинг v тезлигини аниқлаш мумкин.

AB шатуннинг бурчакли тезлиги

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AC} \qquad (1)$$

тенгламадан топилиши мумкин. v_A катталик A нуқтанинг айланма тезлигидир:

$$v_A = 2\pi \cdot n \cdot OA. \qquad (2)$$

AB кесма узунлигини $\triangle ALC$ дан топсак,

$$AC = AL/\cos\varphi. \qquad (3)$$

AL ни $\triangle ALB$ дан ($LB = AA_1$ эканлигини ҳисобга олиб) топамиз:

$$AL = \sqrt{AB^2 - AA_1^2} \qquad (4)$$

$$\triangle OAA_1 \text{ дан } AA_1 = OA\sin\varphi. \qquad (5)$$

(5) ни (4) га қўямиз ва ҳосил бўлганини олдин (3), кейин (3)дан ҳосил бўлганини (тенглама (2) ни ҳисобга олган ҳолда) (1) га қўямиз:

$$\omega_{AB} = \frac{2\pi n \cdot OA \cdot \cos\varphi}{\sqrt{AB^2 - OA^2 \cdot \sin^2\varphi}}. \qquad (6)$$

(6) тенглама AB шатуннинг бурчакли тезлигини топиш формуласидир. Агар масала шартида берилганларини (6) га қўйсак,

$$\omega_{AB} = \frac{2{,}4 \cdot \pi\cos\varphi}{\sqrt{4 - 0{,}16\sin^2\varphi}}$$

ҳосил бўладики, бундан $\varphi = 0$ бўлганда $\omega_1 = \omega_{AB} = -\frac{6}{5}\pi$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлганда $\omega_{AB} = \omega_2 = 0$; $\varphi = \pi$ бўлганда $\omega_3 = \omega_{AB} = \frac{6}{5}\pi$ ва $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ бўлганда $\omega_4 = \omega_{AB} = 0$ ифодаларни ҳосил қиламиз. Биринчи қийматнинг манфий чиқиши шатун кривошипга нисбатан тескари томонга айланишини кўрсатади.

Энди M нуқтанинг чизиқли тезлиги v_M катталик:

$$v_M = \omega_{AB} \cdot CM. \qquad (7)$$

158- расмдаги $\triangle CMM_1$ дан

$$CM = \sqrt{CM_1^2 + MM_1^2} \qquad (8)$$

$$CM_1 = CL + LM_1 = AL \cdot \operatorname{tg}\varphi + \frac{OA\sin\varphi}{2} \qquad (9)$$

$$MM_1 = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - M_1B^2} = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - \frac{OA^2\sin^2\varphi}{4}} = \frac{\sqrt{AB^2 \cdot OA^2 \cdot \sin^2\varphi}}{2} = \frac{AL}{2} \qquad (10)$$

(9) ва (10) ни (8) га қўйсак:

$$CM = \sqrt{\left(AL \cdot \mathrm{tg}\,\varphi + OA\,\frac{\sin\varphi}{2}\right)^2 + \frac{AL^2}{4}} \qquad (11)$$

ёки

$$CM = \sqrt{\left(AB^2 - OA\sin^2\varphi \cdot \mathrm{tg}\,\varphi + \frac{OA\sin\varphi}{2}\right)^2 + \frac{AB^2 - OA^2\sin^2\varphi}{4}}. \qquad (12)$$

Кўриниб турибдики, v_M ни аниқлаш учун v_{AB} ни (6) дан, CM ни (12) дан топиб (7) га қўйиш керак:

1) $\varphi = 0$ бўлганда $\omega_1 = -\frac{6}{5}\pi c^{-1}$;

$CM = \frac{AB}{2} = 1$ м ва $v_1 = \frac{6 \cdot 3,14 \cdot 100}{5} \approx 377\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

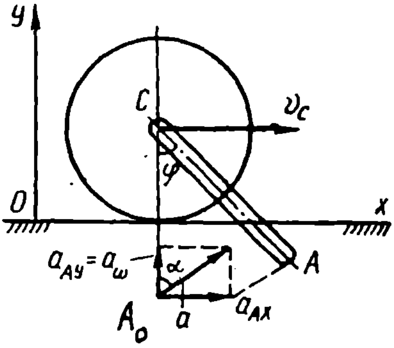
2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлганда шатуннинг ҳамма нуқталарининг тезликлари A ва B нуқталарнинг тезлигига тенг бўлади, яъни $v_M = v_A = 2\pi \cdot n \cdot OA = 2 \cdot 3,14 \cdot 180\,\frac{1}{60} \cdot 40 = 754\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$, $\omega_{II} = 0$ $CM = \infty$ (тезликларнинг оний маркази чексизликда бўлади);

3) $\varphi = \pi$ бўлганда $\omega_{III} = \frac{6}{5}\pi c^{-1}$, $CM = \frac{AB}{2} = 1$м ва $v_{III} = 377\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$;

4) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ бўлганда $CM = \infty$ ва $v_m = v_A = 754\frac{\text{см}}{\text{с}}$ (шатуннинг айланиш йўналишини мусбат деб оламиз) ифодаланади.

33-мисол. (18.1.) Горизонтал рельсда думалаб бораётган ҳалқанинг C маркази $X_c = 2t^2$ см қонунига бўйсуниб ҳаракат қилади.

Расм текислигига перпендикуляр бўлиб C



159- расм.

нуқтадан ўтаётган горизонтал ўқ атрофида узунлиги $L=12$ см бўлган AC стержень $\varphi=\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$ қонунига асосан тебранади. AC стержень охири бўлган A нуқтанинг $t=0$ вақтдаги тезланиши аниқлансин (159- расм).

Берилган:

$X_C = 2t^2$ см
$r = 12$ см
$\varphi = \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2}t$

$t = 0$ бўлганда
$a_x = ?$
a — ? a_y — ?

Ечиш. AC стержень текис-параллел ҳаракат қилмоқда, шунинг учун A нуқтанинг тезланиши қутб C нуқтанинг тезланиши билан A нуқтанинг C қутб атрофидаги тўлиқ айланма тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\omega}\times\vec{AC} = \vec{a}_C + \vec{a}_{AC} = \vec{a}_C + \vec{a}_{\text{ю}} + \vec{a}_{\varepsilon} \qquad (1)$$

ёки $\vec{a}_A$ ни $\vec{a}_C$ ва $\vec{\omega}\times\vec{AC}$ тезланишларнинг проекциялари орқали ёзишимиз ҳам мумкин:

$$a_{AX} = a_{CX} + a_{\omega X} + a_{\varepsilon X}. \qquad (2)$$

$$a_{AY} = a_{CY} + a_{\omega Y} + a_{\varepsilon Y}; \qquad (3)$$

чунки

$$\vec{\omega}\times\vec{AC} = \vec{a}_{AC} = \vec{a}_{\omega} + \vec{a}_{\varepsilon}. \qquad (4)$$

$$\vec{a}_{\omega} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{AC}), \qquad (5)$$

$$\vec{a}_{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}\times\vec{AC} \qquad (6)$$

шаклида тасвирланади. Энди a_{CX} ни топамиз:

$$a_{CX} = \dot{v}_{CX},$$

$$v_{CX} = \frac{dX_c}{dt} = (2t^2)'_t = 4t,$$

$$a_{CX} = (4t)'_t = 4\,\frac{\text{см}}{\text{с}^3}, \qquad (7)$$

$$a_{CY} = 0. \qquad (8)$$

Айланма тезланишни топиш учун ω ва ε ни топиш керак:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} = \left(\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi t}{2}\right)'_t = \frac{\pi^3}{12}\cos\frac{\pi t}{2}, \tag{9}$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{\pi^3}{24}\sin\frac{\pi t}{2}. \tag{10}$$

Ўққа интилувчи тезланиш a_ω ва айланма тезланиш a_ε (уринма тезланиш) векторларининг модулларини топамиз:

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot AC = -\frac{\pi^3 \cdot AC}{24}\sin\frac{\pi t}{2}, \quad AC = L = 12 \text{ см},$$

$$a_\varepsilon = -\frac{\pi^3}{2}\sin\frac{\pi t}{2},$$

$$a_\omega = \omega^2 \cdot AC = \frac{\pi^4}{144}\cdot 12 \cdot \cos\frac{\pi t}{2},$$

$$a_\omega = \frac{\pi^4}{12}\cos\frac{\pi t}{2}.$$

Энди $t = 0$ бўлганда φ, a_ε, a_ω ларнинг қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\varphi_0 = \varphi\big|_{t=0} = \frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) = 0, \tag{11}$$

$$a_\varepsilon\big|_{t=0} = -\frac{\pi^3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) = 0. \tag{12}$$

$$a_\omega\big|_{t=0} = \frac{\pi^4}{12}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) = \frac{\pi^4}{12}. \tag{13}$$

$t = 0$ бўлгандаги a_{cx}, a_{ω_0} ни расмда A_0 нуқтага қўямиз ва шу расмдан (2) ва (5) га асосланиб, a_A нинг X ва Y ўқларидаги проекцияларини топамиз:

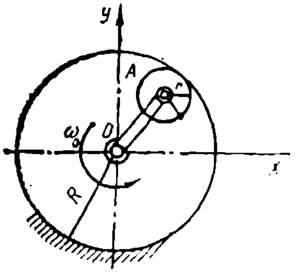
$$a_{AX} = a_{CX} = 4\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$a_{AY} = a_{\omega_0} = \frac{\pi^4}{12} = 8{,}1\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Шундай қилиб, A нуқтанинг тўлиқ тезланишининг модули

$$a_A = \sqrt{a_{AX}^2 + a_{AY}^2} = \sqrt{4^2 + (8{,}1)^2} = 9{,}07\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

a_A нинг Y ўқи билан ташкил этган бурчаги (a_A нинг йўналиши) 159-расмдан $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{AX}}{a_{AY}}$ дан аниқланганда: $\alpha = 25°$.

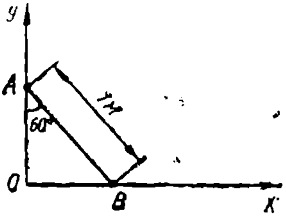


160- расм.

34-мисол. (15.4). Қўзғалмас O (160-расм) нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ атрофида OA кривошип ω_0 доимий бурчакли тезлик билан айланиб, r радиусли тишли ғилдиракни R радиусли қўзғалмас тишли ғилдирак ичида думалантирмоқда. $t = 0$ бўлганда $\varphi_0 = 0$ деб қабул қилиб, кичик тишли ғилдиракнинг ҳаракат тенгламалари (A нуқтанинг ҳаракат тенгламалари) топилсин. A нуқтани қутб деб қабул қилинсин.

Жавоб: $X_A = (R - r)\cos\omega_0 t;$

$$Y_A = (R - r)\cdot\sin\omega_0 t;\quad \varphi_1 = -\left(\frac{R}{r} - 1\right)\omega_0 t.$$



161- расм.

φ_1 — қўзғалувчан тишли ғилдиракнинг бурилиш бурчаги, φ_1 даги минус ишора ғилдиракнинг кривошипга нисбатан тескари томонга айланишини кўрсатади.

35-мисол. (16.8). Узунлиги 1 м бўлган AB стержень ҳамма вақт ўзаро тик бўлган OX ва OY тўғри чизиқларга ўзининг четки нуқталари билан таянади. Бурчак $OAB = 60°$ бўлган вақтдаги тезликлар оний марказининг координаталари X ва Y топилсин (161-расм).

Жавоб: $X = 0{,}866$ м; $Y = 0{,}5$ м.

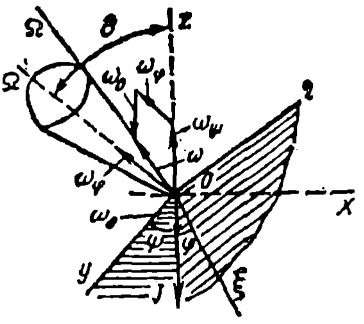
36-мисол. (18.2). Олдинги 33-мисолнинг шартларини ўзгартирмасдан AC стерженнинг охири A нуқтасининг $t = 1$ с вақтдаги тезланиши аниқлансин.

Жавоб: $a_{AX} = -9{,}44\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2};\quad a_{AY} = -7{,}73\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$

$$a_A = 12{,}2\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

52- §. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофида ҳаракати — сферик ҳаракат

Агар қаттиқ жисм битта жисмнинг қўзғалмас нуқтаси атрофида ҳаракат қилса, бундай ҳаракат *қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракати* деб аталади. Бундай ҳаракатдаги жисмнинг ҳамма нуқталари битта қўзғалмас O нуқта атрофида сферик ҳаракат қилади, шунинг учун бундай ҳаракатга қисқача сферик ҳаракат деб айтилади (162-расм). Жисмнинг вазиятини аниқлаш учун қўзғалувчан $O,\zeta\,\eta\,\xi$ ва жисм билан қаттиқ боғланган $OXYZ$ системани оламиз. Қўзғалувчан $O\,\zeta\,\eta\,\xi$ система жисм билан қаттиқ боғланган бўлганлиги учун энди шу жисмни қўзғалувчан система билан алмаштирамиз. Агар система вазияти маълум бўлса, жисмнинг вазияти ҳам маълум бўлади. $O\zeta\eta\xi$ системанинг вазиятини учта ψ, θ, φ бурчак орқали топамиз. Бунда ψ — прецессия бурчаги деб айтилади, бу бурчак OXY текислигида ётади. $O\eta\xi$ текислиги билан OXY текислигининг кесишган тўғри чизиғини OI билан белгилаймиз ва бу OI чизиғига тугунлар чизиғи деб айтилади. OY ва OI чизиқлари орасидаги бурчак прецессия бурчаги ψ га тенг. φ бурчакка хусусий айланиш бурчаги дейилади. Бу φ бурчак $O\eta\xi$ текислигида ётади ва $O\xi$ билан OI орасидаги бурчакдир. Учинчи бурчак θ га мутация бурчаги дейилади, бу $O\rho$ билан OZ орасидаги бурчак бўлиб, бу бурчак ётган текислик OI чизиғига перпендикулярдир. Шу учта бурчак ψ, φ, θ Эйлер бурчаклари деб аталади. Эйлер бурчаклари ψ, φ, θ маълум бўлса, қўзғалувчан системанинг, демак, қаттиқ жисмнинг вазияти аниқ бўлади. Қаттиқ жисм сферик ҳаракати вақтида ҳаракат қонунлари қуйидагича тасвирланади:



162- расм.

$$
\left.\begin{aligned}
\psi &= \psi(t),\\
\varphi &= \varphi(t),\\
\theta &= \theta(t).
\end{aligned}\right\}
\qquad (52.1)
$$

(52.1) тенглама сферик ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг ҳаракат қонунларидир, бундай ҳаракатдаги жисмнинг эркинлик даражаси $i = 3$, чунки ҳаракат қонунлари учтадир.

Эйлер бурчакларининг ўзгариши натижасида ω_φ, ω_ψ ва ω_θ бурчакли тезлик векторлари ҳосил бўлади:

$$\vec{\omega}_\psi = \frac{d\vec{\psi}}{dt} = \dot{\vec{\psi}} \tag{52.2}$$

$$\vec{\omega}_\varphi = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}} \tag{52.3}$$

$$\vec{\omega}_\theta = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \dot{\vec{\theta}}. \tag{52.4}$$

Бу $\vec{\omega}_\psi$, $\vec{\omega}_\varphi$ ва $\vec{\omega}_\theta$ векторларнинг йўналишлари расмда кўрсатилган: ω_ψ ва ω_φ вектор бир текисликда ётади; $\vec{\omega}_\theta$ вектор $\vec{\omega}_\psi$ векторга перпендикуляр йўналган.

Натижаловчи бурчакли тезлик вектори ҳар учала бурчакли тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta. \tag{52.5}$$

$\vec{\omega}$ векторнинг модули ва йўналишини қуйидагича топамиз: ω_ψ билан ω_φ модулларининг йиғиндиси косинуслар теоремасига асосан топилади:

$$\omega_{\psi\varphi} = \sqrt{\omega_\psi^2 + \omega_\varphi^2 + 2\omega_\psi \omega_\varphi \cos \theta}. \tag{52.6}$$

$\omega_{\psi,\,\varphi}$ билан ω_θ нинг йиғиндиси $\omega_{\psi,\,\varphi}$ билан ω_θ ўзаро перпендикуляр йўналганлиги учун Пифагор теоремасига асосан ҳисобланади:

$$\omega = \sqrt{\omega_{\psi\varphi}^2 + \omega_\theta^2} \tag{52.7}$$

ёки агар (52.7) га (52.6) ни қўйсак:

$$\omega = \sqrt{\omega_\psi^2 + \omega_\varphi^2 + \omega_\theta^2 + 2\omega_\psi \cdot \omega_\varphi \cos \theta.} \tag{52.8}$$

Ҳақиқатан, 162-расмдан кўринадики, ω_ψ билан ω_φ нинг йиғиндиси $\omega_{\psi,\,\varphi}$ га тенг.

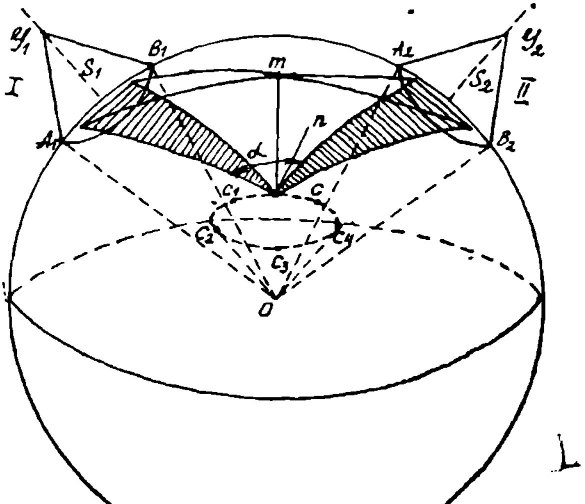
Бунда $\omega_{\psi,\,\varphi}$ вектори ω_ψ нинг охирига ω_φ кўчирилганда ҳосил бўлди. Энди $\omega_{\psi,\,\varphi}$ нинг охирига ω_θ ни қўйсак, натижаловчи бурчакли тезлик ω ни ҳосил қиламиз, бунинг учун *O* нуқтани ω_θ нинг охири билан туташтириш лозим.

Ана шу натижаловчи бурчакли тезлик вектори $\vec{\omega}$ ётган тўғри чизиқ 0Ω атрофида қаттиқ жисм айланади. Бу тўғри чизиқ 0Ω бошлангич вақтда 0ζ ўқи билан (қаттиқ жисмнинг динамик симметрия ўқи) устма-уст тушади. Жисм ҳаракати вақтида Эйлер бурчаклари ўзгаради ва натижада 0Ω ўқининг фазодаги ўрни ҳам ўзгаради. Шу 0Ω ўқига оний айланиш ўқи деб айтилади.

53-§. Қаттиқ жисмнинг сферик ҳаракати вақтида унинг янги вазиятини аниқлаш. Аксоидлар

Қаттиқ жисмнинг фазодаги вазияти, маълумки, шу жисмнинг бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтасининг вазияти билан аниқланади. Учта нуқтадан биттаси қўзғалмас *O* нуқта, қолган иккитаси жисмнинг *A* ва *B* нуқталари бўлсин. Жисм сферик ҳаракат қилганда (163-расм) *A* ва *B* нуқталар сферанинг сиртида ва *O* нуқта сфера марказида бўлади. Шундай сферик ҳаракатда бўлган жисмнинг янги вазиятини қуйидаги Эйлер — Даламбер теоремасига асосланиб топилади.

Теорема: *битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган жисм-*



163-расм.

ни қўзғалмас нуқтасидан ўтадиган ўқ атрофида бураб, бир вазиятдан силжитиб, ихтиёрий иккинчи вазиятни ҳосил қилиш мумкин.

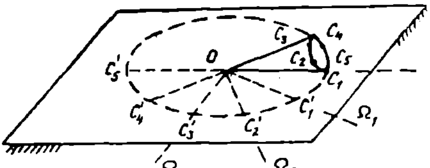
Теоремани исботлаш учун фараз қиламизки, жисм I вазиятдан II вазиятга ўтсин ва жисмнинг маркази O нуқтада бўлсин. Жисмни O нуқтадан ўтган сфера сирти билан кесиб S_1 ва S_2 сегментларни ҳосил қилайлик. Бу сегментлар устидаги A_1 B_1 ва A_2, B_2 нуқталарни сфера сиртидаги A_1B_1 ҳамда A_2B_2 ёй билан туташтирамиз. Жисмнинг икки вазиятидаги A_1A_2 ва B_1B_2 нуқталарини ҳам сфера сиртидаги ёйлар билан, туташтириб, $\overset{\smile}{A_1A_2}$; $\overset{\smile}{B_1B_2}$ ни ҳосил қиламиз. A_1A_2 ва B_1B_2 ёйнинг ўрталаридан шу ёйларга перпендикуляр бўлган m ва n ёйларни ҳам сфера сиртида ўтказамиз. m ва n ёйларнинг кесиш нуқтасини C билан белгилаймиз. Бу C нуқта чизганимизга мувофиқ симметрик нуқта бўлади. Сфера сиртида ёйлар ўтказиб C нуқтани A_1B_1, A_2B_2 нуқталар билан туташтириб, иккита CA_1B_1 ва CA_2B_2 сферик учбурчаклар ҳосил қиламиз. Бу сферик учбурчаклар ўзаро тенг бўлади, чунки:

$$1)\ \overset{\smile}{A_1B_1} = \overset{\smile}{A_2B_2};\quad 2)\ \overset{\smile}{A_1C} = \overset{\smile}{A_2C};\quad 3)\ \overset{\smile}{B_1C} = \overset{\smile}{B_2C}.$$

Симметрик нуқта C ни сфера маркази O билан туташтириб, OC ўқни ҳосил қиламиз, бу OC ўқи ҳам чизганимизга мувофиқ симметрик ўқ бўлади. Энди жисмни OC ўқи атрофида α бурчакка бурсак, CA_1B_1 ва CA_2B_2 сферик учбурчаклар ўзаро тенг бўлганликлари учун A_1 нуқта A_2 нуқтанинг устига ва B_1 нуқта B_2 нуқтанинг устига тушади. Демак, биринчи вазиятдаги CA_1B_1 сферик учбурчак жисмнинг иккинчи вазиятида бўлган CA_2B_2 сферик учбурчаги устига аниқ тушади. Бундай учбурчакларнинг устма-уст тушиши жисмнинг янги вазиятининг ҳосил бўлишидан далолат беради. Шунинг учун айтиш мумкинки, ҳақиқатан ҳам жисмнинг силжишидаги янги вазиятини ҳосил қилиш учун шу жисмни OC ўқи атрофида α бурчакка ($<A_1CA_2=\alpha$) бураш етарли экан. Бу хулоса теореманинг исбот бўлганлигини кўрсатади.

163-расмда жисмнинг чекли силжишини кўрамиз. Шунинг учун OC ўқ охирги айланиш ўқи деб айтилади. Агар жисмни $\Delta t \to 0$ вақтдаги чексиз кичик элементар силжишини кўрсак, бу ҳолда A_2B_2 ёйи A_1B_1 ёйига чексиз яқинлашади ва OC ўқи ҳам бир неча OC_1, OC_2 ... ҳолатларни олади. Δt вақт чексиз кичик бўлгандаги охирги айланиш ўқи OC нинг вазиятига оний айланиш ўқи деб айтилади.

Оний айланиш ўқини $O\Omega$ билан (162-расм) белгиланади. 163-расмда OC_1 OC_2 ... оний айланиш ўқларидир. Бу ўқларнинг ҳаммасининг ҳам боши O нуқтада бўлади. Жисмнинг кетма-кет силжишидаги оний айланиш ўқларининг геометрик ўрни конус (конус учи O нуқтада) сиртини ҳосил қилади. Бу конус сиртига аксоид деб айтилади. Аксоидлар қўзғалувчан ва қўзғалмас бўлади. Агар қўзғалувчан системага нисбатан олинса, *қўзғалувчан аксоидлар,* қўзғалмас системага нисбатан олинса, *қўзғалмас аксоидлар* деб айтилади.



161- расм.

Қўзғалувчан ва қўзғалмас аксоидлар ҳамма вақт бир-бирига бирон чизиқлар билан тегади. Бу аксоидларнинг бир-бирига тегадиган чизиқлари оний айланиш ўқи бўлади. Оний айланиш ўқлари устидаги нуқталарнинг ўша ондаги (вақтдаги) тезликлари нолга тенг бўлади. Агар D жисм горизонтал текисликка думаланса, бу ҳолда (164-расм) қўзғалмас аксоид маркази O нуқтада бўлган доира юзини, қўзғалувчан аксоид эса маркази O нуқтада бўлган ва жисм сиртини ташкил этган *конусни* ҳосил қилади. 164-расмдаги OC_1, OC_2 ... чизиқларга мос $O\Omega_1$, $O\Omega_2$ — оний айланиш ўқлари ва қўзғалувчан системага $O\Omega'_1$, $O\Omega'_2$ мос келади. Кўринияптики, ҳамма вақт қўзғалувчан ва қўзғалмас аксоидлар бир-бирига оний айланиш ўқларини тасвирловчи чизиқлар бўйлаб тегади. Шундай бўладики, қўзғалувчан аксоид қўзғалмас аксоид сиртида сирпанмасдан думалайди. Демак, жисмнинг сферик ҳаракати вақтида қўзғалувчан аксоид қўзғалмас аксоид сиртида сирпанишсиз думалайди.

54-§. Сферик ҳаракатдаги жисмнинг бурчакли тезлиги ва бурчакли тезланиши

Қаттиқ жисм Δt вақт ичида $\Delta\alpha$ бурчакка бурилса (163-расм), $\Delta\alpha/\Delta t$ нисбат *ўртача бурчакли тезлик* дейилади.

$$\omega_{\text{ўр}} = \frac{\overrightarrow{\Delta\alpha}}{\Delta t}. \qquad (54.1)$$

Агар вақт оралиғини чексиз кичик қилиб олсак, яъни $\Delta t \to 0$ бўлса, у ҳолда (54.1) дан олинган лимит оний ω бурчакли тезлик векторини беради:

$$\vec{\omega} = \lim \left(\frac{\overrightarrow{\Delta\alpha}}{\Delta t} \right)$$

ёки

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\alpha}}{dt} = \dot{\vec{\alpha}}. \qquad (54.2)$$

Таъкидлаб ўтганимиздек, бурчакли тезлик вектор катталикдир. Вектор шундай йўналганки, $\vec{\omega}$ векторнинг охиридан қараётган кузатувчига жисмнинг оний айланиш ўқи атрофидаги ҳаракати соат милининг ҳаракат йўналишига нисбатан тескари томонга йўналган бўлиб кўринади. $\vec{\omega}$ векторининг йўналишини парма қоидасидан фойдаланиб ҳам топиш мумкин: агар парманинг дастасини жисмнинг оний ўқ атрофида айланиши томонига бурасак, унинг илгариланма ҳаракати ω нинг йўналишини кўрсатади.

52-§ да кўриб ўтганимиздек, ω вектор ω_ψ, ω_φ ва ω_θ нинг геометрик йиғиндисига тенг экан. Ҳақиқатан ҳам, (52.5) формуладан ω вектор Эйлер бурчакларининг ўзгаришига боғлиқ бўлиб, α бурилиш бурчаги орқали топилади. Демак, α бурчагининг ўзгариши ψ, φ, θ нинг ўзгаришига боғлиқ бўлади.

Энди $\vec{\omega}$ векторнинг қўзғалувчан x, y, z ўқлардаги проекцияларини топайлик. Бу проекциялар (52.5) га асосан ω_ψ, ω_φ, ω_θ нинг ўқлардаги проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни (52.5) нинг ўқлардаги проекцияларини оламиз:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{\psi x} + \omega_{\varphi x} + \omega_{\theta x}, \\ \omega_y &= \omega_{\psi y} + \omega_{\varphi y} + \omega_{\theta y}, \\ \omega_z &= \omega_{\psi z} + \omega_{\varphi z} + \omega_{\theta z}. \end{aligned}\right\} \qquad (54.3)$$

162-расмдан фойдаланиб, ω_ψ, ω_φ, ω_0 нинг проекцияларини топамиз: $\omega_{\psi x} = \theta$, $\omega_{\psi y} = 0$, $\omega_{\psi z} = \omega_\psi$

$$\omega_{\varphi x} = -\omega_\varphi \cdot \cos\,(90 - \theta)\,\sin\,\psi,$$

$$\omega_{\varphi y} = \omega_{\varphi} \sin\theta \sin\psi,$$

$$\omega_{yz} = \omega_{\varphi} \cdot \cos\theta, \qquad (54.4)$$

$$\omega_{\theta x} = \omega_{\theta} \cdot \cos(90 - \psi); \ \omega_{\theta y} = \omega_{\theta}\cos\psi, \ \omega_{\theta z} = 0.$$

Энди (54.4) нинг мос катталикларини (54.3) га қўямиз:

$$\omega_x = -\omega_{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \omega_{\theta} \sin\varphi,$$

$$\omega_y = \omega_{\theta} \cos\psi + \omega_{\varphi} \cdot \sin\theta \sin\varphi, \qquad (54.5)$$

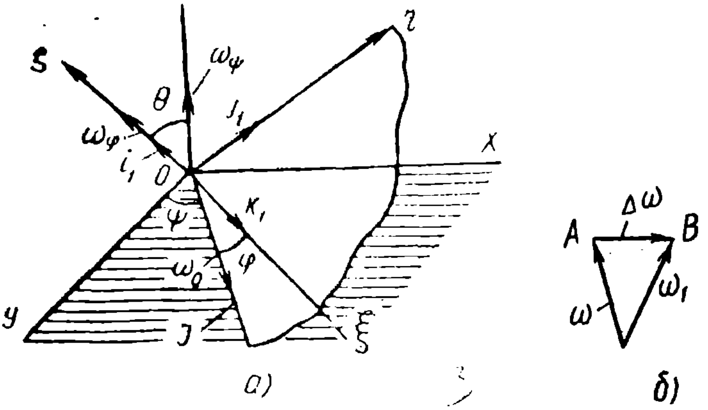
$$\omega_z = \omega_{\psi} + \omega_{\varphi} \cos\theta$$

ёки

$$\omega_x = \dot\theta \sin\psi - \dot\varphi \sin\theta \cdot \cos\varphi,$$

$$\omega_y = \dot\theta \cos\varphi + \dot\varphi \sin\theta \cdot \sin\psi, \qquad (54.6)$$

$$\omega_z = \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta.$$



а) б)

165- расм.

Агар бурчакли тезликларнинг қўзғалувчан ўқлардаги проекцияларини олсак (165-*а* расм), ω_{ψ} нинг 0ξ ўққа, проекцияси $\omega_{\varphi} \cos\theta$ га ва $0\eta\xi$ текислигига эса $\omega_{\psi} \sin 0$ га тенг бўлади. ω_{φ} ва ω_{θ} нинг проекциялари оддийгина топилади.

$$\omega_{\psi\varphi} = \omega_{\psi} \cos\theta, \ \omega_{\psi\eta} = \omega_{\psi} \sin\theta \cdot \cos\varphi; \ \omega_{\psi\xi} = \omega_{\varphi} \sin\theta \sin\varphi.$$

$$\omega_{\varphi\zeta} = \omega_\varphi;\ \omega_{\varphi\eta} = 0;\ \omega_{\varphi\xi} = 0, \tag{54.7}$$

$$\omega_{\theta\varphi} = 0,\ \omega_{\theta\eta} = -\omega_\theta \sin\varphi,\ \omega_{\theta\xi} = \omega_\theta \cdot \cos\varphi.$$

ω нинг маълум ўқдаги проекцияси барча ω_ψ, ω_φ, ω_θ нинг ўша ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг бўлганлиги учун

$$\begin{aligned}
\omega_{\varphi} &= \omega_\varphi + \omega_\psi \cos\theta,\\
\omega_\varphi &= -\omega_\theta \sin\varphi + \omega_\psi \sin\theta \cos\varphi,\\
\omega_\xi &= \omega_\theta \cos\varphi + \omega_\psi \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi.
\end{aligned} \tag{54.8}$$

ёки

$$\begin{aligned}
\omega_\varphi &= \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta,\\
\omega_\eta &= \dot\theta \sin\varphi + \dot\psi \sin\theta \cos\varphi,\\
\omega_\xi &= \dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\theta \cdot \sin\varphi.
\end{aligned} \tag{54.9}$$

Шундай қилиб, бурчакли тезлик векторининг модулини, проекцияларини ва йўналишини аниқлашни энди биламиз. Бироқ, қуйидагини эсда сақлаш лозим: бурчакли тезлик вектори оний айланиш ўқида ётади — бу жисм сферик ҳаракат қилганда шундай бўлади, агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланма ҳаракат қилса, (буни биз 43-§ да кўрган эдик) ω вектор қўзғалмас ўқ устида ётади.

Сферик ҳаракат вақтида оний айланиш ўқининг фазодаги вазияти ўзгариб турганлиги учун ω бурчакли тезликнинг ҳам модули, ҳам йўналиши ўзгаради. Агар Δt вақт ичида жисмнинг бурчакли тезлиги $\Delta\omega$ га ўзгарса, $\frac{\Delta\vec\omega}{\Delta t}$ нисбат ўртача бурчакли тезланиш дейилади:

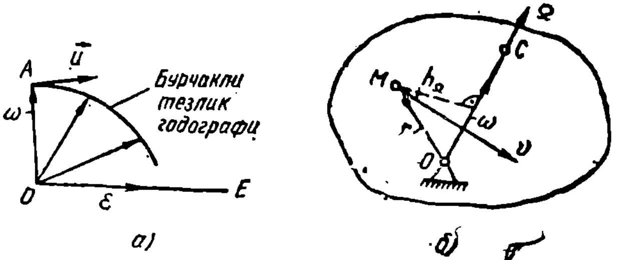
$$\vec\varepsilon_{\text{др}} = \frac{\Delta\vec\omega}{\Delta t}. \tag{54.10}$$

Ўртача бурчакли тезланиш $\vec\varepsilon_{\text{ўр}}$ нинг модули AB ватар узунлигига тенг. ε нинг йўналиши A нуқтадан B нуқтага қараб йўналган (165-*б* расм).

Оний бурчакли тезланиш $\vec\varepsilon$ ни аниқлаш учун (54.10) ифодани $\Delta t = 0$ вақтдаги лимити олинади:

$$\vec\varepsilon = \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec\omega}{\Delta t}\right| = \frac{d\vec\omega}{dt}. \tag{54.11}$$

Вақт оралиғи $\Delta t \to 0$ ҳол учун 165-расмдаги AB вектор A нуқтадан ўтказилган уринма билан устма-уст тушади. Шунинг учун оний бурчакли тезланиш A нуқтадан ўтказилган уринма бўйлаб йўналгандир, яъни $\vec{\varepsilon}$ нинг йўналиши бурчакли тезлик годографи бўйлаб йўналган бўлади (166-а расм). Бурчакли тезланиш $\vec{\varepsilon}$ вектори жисмнинг бурчакли тезлиги ω нинг ўзгариш тезлиги, яъни u га тенг:



166- расм.

$$\vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}. \tag{54.12}$$

$\vec{\varepsilon}$ ва $\vec{u}$ вектор айнан битта катталик, булар бир-бирига тенг. Маълумки, бурчакли тезланиш бурчакли тезликдан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг. Бу $\vec{\varepsilon}$ вектор A нуқтага уринма бўлади, лекин векторни кўпчилик ҳолларда O нуқтага қўйилади ва OE чизиғи бурчакли тезланиш чизиғи деб айтилади (166-а расм).

Агар ω ётган тўғри чизиққа $\vec{\omega}^\circ$ ортани ўтказсак,

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{\omega}^\circ \tag{54.12$'$}$$

ифодани ёзиш мумкин. Агар (54.12) ни ҳисобга олсак, (54.11) ни қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \vec{\omega}^\circ) = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}^\circ + \omega\frac{d\vec{\omega}^\circ}{dt}. \tag{54.13}$$

Қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{d\omega}{dt}\vec{\omega}^\circ; \tag{54.14}$$

$$\varepsilon_2 = \omega \frac{d\vec{\omega}^0}{dt}. \qquad (54.15)$$

ε_1 бурчакли тезланиш ω бурчакли тезлик модулининг ўзгариши туфайли ҳосил бўлади. ε_2 эса ω нинг йўналишининг ўзгариши натижасида ҳосил бўлади. $\vec{\varepsilon}_2$ ни бошқача шаклда ҳам ёзиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, Эйлер формуласига асосан

$$\frac{d\vec{\omega}^0}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}^0. \qquad (54.16)$$

бунда ω_1 бурчакли тезлик ω нинг ўзгаришини ифодалайди Агар (54.16) ни (54.15) га қўйсак, унда

$$\vec{\varepsilon}_2 = \omega | \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}^0 | = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega} \qquad (54.17)$$

ҳосил бўлади. Ниҳоят, $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2$ бўлади.

Шундай қилиб, жисмнинг сферик ҳаракати вақтида $\vec{\varepsilon}$ вектори жисмнинг 43-§ да кўрилган айланма ҳаракатидаги ε дан фарқ қилади:

1) $\vec{\varepsilon}$ вектори сферик ҳаракат вақтида $\vec{\omega}$ вектори билан устма-уст тушмайди;

2) сферик ҳаракат вақтида $\vec{\varepsilon}$ вектори ε_1 ва ε_2 ташкил этувчиларга ажралади;

3) жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланиши вақтида $\vec{\varepsilon}$ вектори ω вектор ётган тўғри чизиқ устида ётади;

4) сферик ҳаракат вақтида ε_2 нинг йўналиши ω векторнинг охиридан ўтказилган уринма бўйлаб йўналган, ε_1 вектори оний айланиш ўқи бўйлаб йўналган бўлади.

55-§ Сферик ҳаракатдаги жисм нуқталарининг чизиқли тезлигини аниқлаш. Аксоидлар тенгламалари

Сферик ҳаракат вақтида жисм нуқталарининг тезликлари худди айланма тезликлар каби топилади. Бироқ, бу айланма тезлик жисмнинг оний айланиш ўқида айланиши натижасида бўлиши шарт. Маълумки, 43-§ да айланма тезлик қуйидаги формула билан топилган эди (166-*б* расм):

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (55.1)$$

Чизиқли тезлик v нинг модулини топиш учун M нуқтадан оний айланиш ўқи 0Ω гача бўлган энг қисқа h_{Ω} масофани билиш лозим. Бунда оний айланиш ўқининг тутган ўрнини билиш учун шундай C нуқтани топамизки, бу нуқтанинг тезлиги танланган вақт моментида нолга тенг бўлсин. C нуқта ва қўзғалмас O нуқтадан ўтказилган тўғри чизиқ оний айланиш ўқи 0Ω бўлади. (55.1) дан v нинг модули 0Ω ўқига нисбатан аниқланади:

$$v=\omega r\sin(\widehat{\vec{\omega},\ \vec{r}})=\omega\cdot h_{\Omega}, \tag{55.2}$$

бунда

$$h_{\Omega}=r\sin(\widehat{\vec{\omega},\ \vec{r}}) \tag{55.3}$$

оний айланиш ўқидан танланган O нуқтагача бўлган энг қисқа масофадир.

Чизиқли тезлик v нинг йўналиши, маълумки, парма қоидасига асосан топилади. Энди v ни проекциялар орқали аниқлаймиз. 43-§ дан маълумки, v ни қўзғалувчан $OXYZ$ ва қўзғалмас $O\zeta\eta\xi$ ўқлардаги проекцияларини

$$v=\begin{vmatrix} i, & j, & k \\ \omega_x, & \omega_y, & \omega_z \\ x_1, & y, & z \end{vmatrix}, \tag{55.4}$$

$$v=\begin{vmatrix} i_1, & j_1, & k_1 \\ \omega_{\varphi} & \omega_{\eta} & \omega_{\xi} \\ \zeta & \eta & \xi \end{vmatrix} \tag{55.5}$$

шаклларда ифодалаш мумкин. Оний айланиш ўқи устида ётган нуқталарнинг тезликлари нолга тенг, демак, $v_x=v_y=v_z=0$ ва $v_{\zeta}=v_{\eta}=v_{\xi}=0$ эканлигини ҳисобга олсак, (55.4) дан

$$\omega_y\cdot z-\omega_z\cdot y=0,$$

$$\omega_z\cdot x-\omega_x\cdot z=0,$$

$$\omega_x\cdot y-\omega_y\cdot x=0$$

ёки (55.5) дан

$$\frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z} \tag{55.6}$$

$$\frac{\zeta}{\omega_{\zeta}}=\frac{\eta}{\omega_{\eta}}=\frac{\xi}{\omega_{\xi}} \tag{55.7}$$

ифодани ҳосил қиламиз. (55.6) ифодани қўзғалувчан системада *оний айланиш ўқининг тенгламаси* дейилади.

(55.6) дан вақтни йўқотгандан кейин бўладиган ифодага қўзғалмас аксоид тенгламаси, (55.7) дан вақтни йўқотгандан кейин ҳосил бўладиган ифодага қўзғалувчан аксоид тенгламаси деб айтилади.

56- §. Сферик ҳаракатдаги жисм нуқталарининг чизиқли тезланиши

Қаттиқ жисм исталган нуқтасининг тезлиги (55.1) формула ёрдамида аниқланади. Фақат (55.1) формула қўлланилганда v нинг модули оний айланиш ўқига нисбатан олинишини эслаш лозим. Энди қаттиқ жисм M нуқтасининг тезланишини топайлик:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (56.1)$$

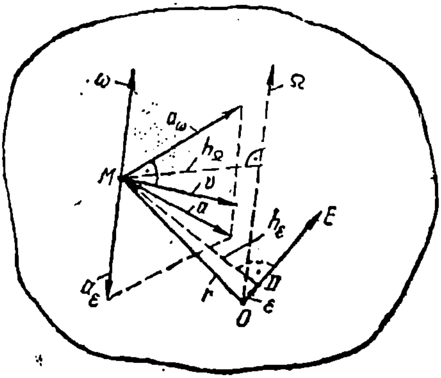
Агар $\frac{d\omega}{dt}=\vec{\varepsilon}$; $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ эканлигини ҳисобга олсак

$$d=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v} \qquad (56.2)$$

тенгламани ёки

$$\vec{a}=\vec{a}_\varepsilon+\vec{a}_\omega \qquad (56.3)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Охирги тенгламада



167- расм.

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \qquad (56.4)$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \vec{v}, \qquad (56.5)$$

a_ε — айланма тезланиш, a_ω — ўққа интилувчи тезланишни (43-§ га қаранг) ифодалайди. Фақат бу ерда a_ε ва a_ω нинг модуллари оний айланиш ўқи $O\Omega$ га нисбатан ҳисобланиши лозим (167-расм), яъни

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\widehat{\vec{\varepsilon}, \vec{r}}) = \varepsilon \cdot h_\varepsilon, \qquad (56.6)$$

$$a_\omega = \omega \cdot v \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}) = \omega^2 h_\omega \qquad (56.7)$$

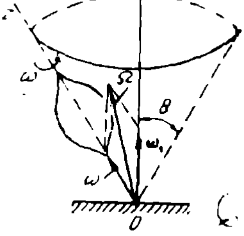
a_ε нинг йўналишини топиш учун парманинг дастасини $\vec{\varepsilon}$ дан, қисқа йўл билан, ω га қараб айлантирсак, $\vec{a}_\varepsilon$ вектори r ва ε ётган текисликка перпендикуляр бўлиб, M нуқтадан кузатувчига қараб йўналганлигини кўрамиз. Парма қоидасидан билинадики, парманинг дастасини қисқа йўл билан, ω дан v га қараб айлантирсак, $\vec{a}_\omega$ вектори $O\Omega$ оний айланиш ўқига перпендикуляр йўналган бўлади. a_ω вектор билан Ω ўқи ҳамда MD чизиғи билан бурчакли тезланиш чизиғи E ораларидаги бурчак 90° га тенг. Тўлиқ тезланиш a_ε ва a_ω дан тузилган параллелограммнинг катта диагоналига тенг:

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2a_\varepsilon a_\omega \cos(\widehat{\vec{a}_\varepsilon, \vec{a}_\omega})}. \qquad (56.8)$$

Агар жисм қўзғалмас ўқ атрофида айланса, ω ва ε бир тўғри чизиқда ётади, $h_\omega = h_\varepsilon = R$ бўлади ва $(\widehat{\vec{a}_\varepsilon, \vec{a}_\omega}) = 90°$. Бу ҳолда (56.8) формуладан 43-§ даги

$$a = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}$$

тенглама ҳосил бўлади. Сферик ҳаракатдаги жисм учун $\vec{a}_\varepsilon$ ва v бир хил йўналган эмас, a_ε ва a_ω орасидаги бурчак ҳар хил бўлиши мумкин, $\vec{a}_\varepsilon$ бу ҳолда бурчакли тезланиш ўқига нисбатан ҳисобланилади. a_ε ва a_ω нинг



168- расм.

модуллари M нуқтадан оний айланиш ўқи $O\Omega$ гача бўлган энг қисқа масофа h_e ва E ўқигача бўлган энг қисқа масофа h_ε орқали ҳисобланади.

37-мисол. (19.1). Вертикал $O\xi$ ўқ атрофида ғилдиракнинг (волчокнинг) z ўқи сочилиш бурчаги 2θ бўлган доиравий конус чизади. Агар ғилдиракнинг r ўқи атрофидаги бурчакли тезлиги ω ва z ўқининг $O\xi$ ўқи атрофидаги бурчакли тезлиги ω_1 бўлса, ғилдиракнинг абсолют бурчакли тезлиги Ω ва бу бурчакли тезликнинг йўналиши нимага тенг бўлади (168-расм)?

Берилган:

ω, ω_1

$2\ \theta$

Ω? $\cos(\vec{\Omega}\,\vec{r})$

Ечиш. Жисмнинг O нуқтасига $\vec{\omega}_1$ ва $\vec{\omega}$ векторларини чизамиз. Жисм ҳам ζ, ҳам z ўқлари атрофида айланади, иккита айланма ҳаракатда қатнашади. Натижаловчи Ω бурчакли тезликни (52.6) га асосан топсак, ω билан ω_1 нинг вектор йиғиндисига тенг:

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cos\theta}. \qquad (1)$$

Энди Ω нинг z ўқи билан ташкил этган бурчагининг косинусини топамиз:

$$\cos(\vec{\Omega}\widehat{\ } z) = \frac{\Omega_z}{\Omega} \qquad (2)$$

бунда Ω_z бурчакли тезлик ω ва ω_1 нинг z ўқидаги проекциясидир. 168-расмдан ω нинг z даги проекцияси ўзига тенг: $\omega_z = \omega$, ω_1 нинг z даги проекцияси $\omega_z = \omega_1 \cdot \cos\theta$ ва

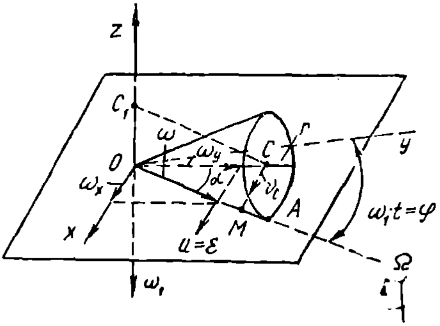
$$\Omega_z = \omega_z + \omega_{1z} = \omega + \omega_1 \cos\theta. \qquad (3)$$

Ниҳоят, (3) формуладаги Ω_z ни келтириб, (2) формулага қўйсак

$$\cos(\vec{\Omega}, \vec{z}) = \frac{\omega + \omega_1 \cdot \cos\theta}{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2 + 2\omega\omega_1 \cdot \cos\theta}}$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

38-мисол. (19.3). Баландлиги $h = 4$ см, асосининг радиуси $r = 3$ см бўлган конус қўзғалмас O нуқта атрофида текисликда сирпанишсиз думаламоқда. Конус асосининг маркази $v_c = 48\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = \text{const}$ тезлик билан ҳаракат қиляпти. Конуснинг бурчакли тезлиги, бурчакли тезлик годографи-



169- расм.

ни чизадиган нуқтанинг координаталари тенгламаси ва конуснинг бурчакли тезланишини топинг (169-расм).

Берилган:

$OC = h = 4$ см

$CA = r = 3$ см

$v_c = 48\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$

ω — ? X_1 — ? Y_1 — ? Z_1 — ? E — ?

Ечиш. Конуснинг горизонтал текислик билан тегиб турган чизиғи $O\Omega$ оний айланиш ўқи бўлади. $O\Omega$ ўқи атрофида конус ω бурчакли тезлик билан айланади. Бу ω ни (55.2) формулага асосан топамиз:

$$\omega = \frac{v_c}{h_\Omega}. \tag{1}$$

169-расмдан кўринадики,

$$h_\Omega = CM,$$

$$CM = h \cdot \sin\alpha$$

лекин

$$\sin\alpha = \frac{r}{OA} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\cos\alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{4}{5}$$

бўлганлиги учун

$$CM = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}\ \text{см}$$

ва (I) га асосан

$$\omega = \frac{v_c}{CM} = \frac{485}{12} = 20\text{с}^{-1}. \qquad (2)$$

Конуснинг OC ўқи қўзғалмас z ўқ атрофида ω_1 бурчакли тезлик билан айланади. Шу z ўқи атрофида C нуқта ҳам v_c тезлик билан ҳаракатда бўлади, демак, ω ни яна (55.2) формулага асосан (z ўқига нисбатан) топамиз:

$$\omega_1 = \frac{v_c}{OM}. \qquad (3)$$

Расмдаги $\triangle\, OCM$ дан:

$$OM = OC \cdot \cos\alpha = 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5} \text{ см}.$$

Охирги ифодани (3) қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\omega_1 = \frac{48}{16} \cdot 5 = 15\text{с}^{-1}. \qquad (4)$$

Расмдан кўринадики, бурчакли тезлик годографини чизадиган нуқта ω векторининг охирида бўлади. Бу нуқтанинг координаталари ω векторининг координата ўқларидаги проекцияларига тенг бўлади. Агар ω нинг проекцияларини x_1, y_1, z_1 деб қабул қилсак, расмдан

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega \cos \omega_1 t = \omega_x, \\ y_1 &= \omega_y = \omega \sin \omega_1 t, \\ z_1 &= \omega_z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз. (4) дан $\omega_1 = 15\text{ с}^{-1}$ бўлганлиги учун $\omega_1 t = 15t$ ни (5) га қўйсак

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 20 \cos 15t, \\ y_1 &= 20 \sin 15t, \\ z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ҳосил бўлган (6) ифодалар бурчакли тезлик вектори годографининг тенгламаларидир.

Энди конуснинг бурчакли тезланишини топиш учун (54.11) формуладан фойдаланамиз, яъни $\vec{\varepsilon} = \vec{u} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}$ ёки $\vec{\varepsilon}$ нинг модули $\angle(\vec{\omega}_1, \widehat{\ } \vec{\omega}) = 90^\circ$ эканлигини ҳисобга олсак, қуйидагича топилади:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2},$$

лекин

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = -\omega_1\omega \sin \omega_1 t;\ \varepsilon_y = \omega_1\omega \cos \omega_1 t;$$

$$\varepsilon_z = 0$$

бўлганлиги учун

$$\varepsilon = \sqrt{\omega^2\omega_1^2 \cos^2 \omega_1 t + \omega^2\omega_1^2 \sin^2 \cdot \omega_1 t} = \omega\omega_1 = 300\, c^{-2}$$

бўлиб қолади.

Бурчакли тезланиш ε нинг йўналиши $\vec{\omega}$ векторига уринма ва $\vec{u}$ векторига параллел бўлиб, O нуқтага қўйилади; $\vec{\omega}$ ва $\vec{\omega}_1$ нинг йўналиши, $\vec{v}_c$ йўналиши маълум бўлганда, парма қоидасига асосланиб топилади.

39-мисол. (20.15). Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракат қонунлари Эйлер бурчаклари билан берилган:

$$\varphi = 4t,\quad \psi = \frac{\pi}{2} - 2t;\ \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Бурчакли тезлик годографини чизадиган нуқтанинг координаталари ва жисмнинг қўзғалмас x, y, z ўқларга нисбатан бурчакли тезлиги ҳамда бурчакли тезланиши аниқлансин.

Берилган:

$$\varphi = 4t$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 2t$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$\omega_x = ?$ $\omega_y = ?$
$\omega_z - ?$

$\omega - ?$ $\varepsilon - ?$

Ечиш. Бурчакли тезлик годографини чизадиган нуқтанинг координаталари, 38-мисолда кўрганимиздек, ω_x, ω_y, ω_z бўлади, яъни $x_1 = \omega_x$, $y_1 = \omega_y$ ва $z = \omega_z$. Формула (54.6) га асосан

$$x_1 = \omega_x = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi \qquad (1)$$

$$y_1 = \omega_y = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \times \sin \psi \qquad (2)$$

$$z_1 = \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \qquad (3)$$

Масаланинг шартидан

$$\dot{\varphi} = (4t)'_t = 4. \qquad (4)$$

$$\dot{\psi} = \left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)'_t = -2 \qquad (5)$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\pi}{3}\right)'_t = 0 \qquad (6)$$

(4), (5), (6) ни мос равишда (1), (2), (3) га қўямиз:

$$\omega_x = x_1 = 4\ \sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = 2\sqrt{3}; \qquad (7)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = 2\sqrt{3}\ \sin 2t$$

$$\omega_y = y_1 = 4\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = 2\sqrt{3}\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) =$$

$$= 2\sqrt{3}\ \cos 2t. \qquad (8)$$

$$\omega_z = z_1 = -2 + 4\cos\frac{\pi}{3} = -2 + 2 = 0. \qquad (9)$$

Бурчакли тезликнинг модулини (52.8) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \ddot{0}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta} =$$

$$= \sqrt{16 + 4 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{z}{2}} = \sqrt{12c^{-1}} =$$

$$= 2\sqrt{3c^{-1}}. \qquad (10)$$

Бурчакли тезланиш ε нинг модулини

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} \qquad (11)$$

формуладан топамиз, бунинг учун (7), (8), (9) дан

$$\varepsilon_x = \frac{d\omega_x}{dt} = 4\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos 2t$$

$$\varepsilon_y = -2\sqrt{3}\cdot 2\ \sin 2t,\ \varepsilon_z = 0. \qquad (12)$$

(12) даги $\varepsilon_x \varepsilon_y$ ва ε_z ни (11) га қўйсак,

$$\varepsilon = \sqrt{16\cdot 3\ \cos^2\cdot 2t + 16\cdot 3\ \sin^2\cdot 2t} =$$

$$= \sqrt{16\cdot 3\cdot(\cos^2 2t + \sin^2 2t)} = \sqrt{4^2\cdot 3}$$

ёки

$$\varepsilon = 4\sqrt{3c^{-2}}.$$

Шундай қилиб, жисмнинг бурчакли тезланиши $4\sqrt{3}c^{-2}$ га тенг экан.

40-мисол. (20.17). Жисмнинг қўзғалмас нуқта атрофидаги ҳаракат қонуни Эйлер бурчаклари орқали қуйидаги

$$\varphi = \eta t,\ \psi = \frac{\pi}{2} + ant,\quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

тенглама билан берилган. Бунда a ва n катталикларни доимий деб ҳисоблаб, жисмнинг бурчакли тезлиги ва бурчакли тезланишини, қўзғалмас x, y, z ўқларидаги проекцияларини топинг.

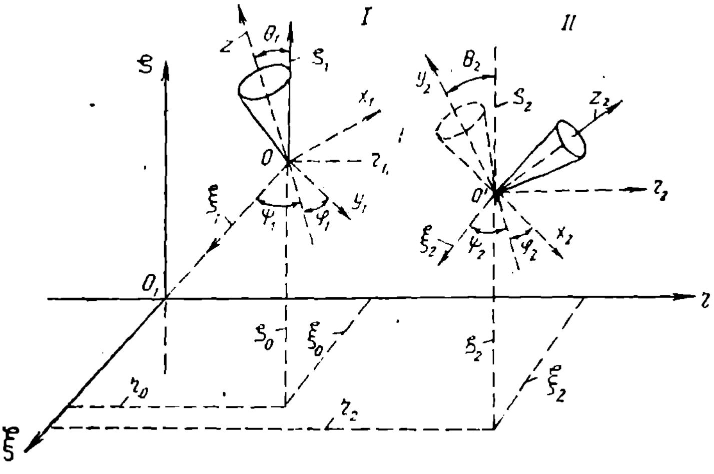
Жавоб: $\omega_x = \frac{n\sqrt{3}}{2} \cos ant,$

$$\omega_y = \frac{n\sqrt{3}}{2} \sin ant,\ \omega_z = n\left(a + \frac{1}{2}\right);$$

$$\varepsilon_x = \frac{an^2\sqrt{3}}{2} \sin ant;\ \varepsilon_y = \frac{an^2\sqrt{3}}{2} \cos ant.$$

57-§. Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг умумий ҳоли

Қаттиқ жисм кинематикасининг мавзуси билан танишиш жараёнида эркин қаттиқ жисмга таъриф берилган эди. Бу таърифга мувофиқ, агар жисмнинг ҳаракатига чек қўйилмаган бўлса, бундай жисмга эркин жисм деб айтилган эди. Шундай эркин жисм ҳаракатининг умумий ҳолини кўриб чиқайлик.



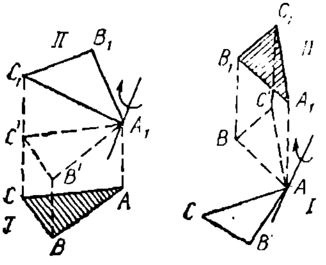
170-расм.

Фараз қилайлик, эркин жисм маълум вақт ўтгандан кейин биринчи (I) ҳолатдан иккинчи (II) ҳолатга ўтсин. Жисмнинг (170-расм) O, O^1 нуқталарини қутб ҳисоблайлик. Эркин жисмнинг ихтиёрий ҳаракатини ҳамма вақт иккита ҳаракатнинг йиғиндиси деб қараш мумкин:

1) жисм қутбининг жисм билан бирга илгариланма ҳаракати;

2) жисмнинг қутб атрофида сферик ҳаракати.

Ҳақиқатан ҳам, жисмнинг ҳолатини бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта ёки шу нуқталарни туташтиришдан ҳосил бўлган ABC учбурчак орқали ифодалаш мумкин. Бунинг учун жисмнинг қутби бўлган A нуқтани жисмнинг янги вазиятидаги A_1 нуқта билан туташтирамиз ва AA_1 тўғри чизиқни ҳосил қиламиз (171-*а* расм). Жисмнинг B ва C нуқталаридан ўтувчи AA_1 кесмага тенг ва параллел бўлган BB', CC' кесмаларни ҳосил қиламиз. Энди C', B' ва A_1 нуқталарни туташтириб, жисмнинг қутб билан биргаликда илгариланма ҳаракатидан кейин оралиқ вазияти $A_1B'C'$ ни ҳосил қиламиз. Жисмнинг охирги II вазятини аниқлаш учун Даламбер—Эйлер теоремасига асосан. жисмни A_1 нуқтадан ўтадиган ўқ атрофида маълум бурчакка бураймиз. Натижада жисм $A_1B_1C_1$ ҳолатига, яъни II вазиятга ўтади ва бу янги вазият қутбнинг илгариланма ҳаракати билан биргаликда жисмнинг қутб атрофидаги сферик ҳаракатининг қўшилишидан ҳосил бўлди.



а) б)

171-расм.

Худди шу жисмнинг II вазиятини олдин $A_1B_1C_1$ учбурчакни A_1 нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида сферик ҳаракатлантириб (Даламбер — Эйлер теоремасига асосан) $AB'C'$ (171-*б* расм) оралиқдаги вазиятга ўтказиш, кейин жисмни A_1 қутб билан биргаликда илгариланма ҳаракатлантириб, $A_1B'C'$ вазиятдан $A_1B_1C_1$ вазиятга ўтказиш, яъни жисмнинг яна II вазиятини ҳосил қилиш мумкин. Демак, эркин жисмнинг ҳаракатини ҳамма вақт, икки хил ҳаракат, жисмнинг қутб билан биргаликдаги илгариланма ва жисмнинг қутб атрофидаги сферик ҳаракатларидан иборат деб қараш мумкин. Жисмнинг янги вазиятини топишда олган илгариланма, кейин сферик ёки олдин сферик ҳаракат, кейин илгариланма ҳаракатлар бўлиши мумкин, яъни ҳаракатлар кетма-кетлиги ўзгартирилиши мумкин.

Жисмнинг эркин ҳаракати вақтида албатта, илгариланма ва сферик ҳаракатлар бир вақтнинг ўзида содир бўлади ва бу икки хил ҳаракат жисмнинг ҳақиқий ҳаракатини тўлиқ ифодаламаслиги ҳам шубҳасиздир. Лекин бу иккала ташкил этувчи ҳаракатлардан фойдаланиб, жисмнинг янги вазиятини аниқлаш мумкин ва бу хил ҳаракат эркин жисм ҳаракатининг нечоғли мураккаблигини ифодалайди.

Эркин жисмнинг ҳаракатланаётгандаги вазиятини аниқлаймиз. Жисм O қутбининг координаталари ζ_0, η_0, ξ_0 бўлса, бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= \zeta_0(t), \\ \eta_0 &= \eta_0(t), \\ \xi_0 &= \xi_0(t). \end{aligned}\right\} \qquad (57.1)$$

ифода қутбнинг ҳаракат тенгламаларини ифодалайди. Жисмнинг қутб атрофидаги сферик ҳаракатини Эйлер бурчаклари орқали ифодаланади (170- расмга қаранг) ва қуйидаги

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \psi(t)\ , \\ \theta &= \theta(t\ ', \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (57.2)$$

ифодалар жисмнинг сферик ҳаракатдаги ҳаракат қонунларини кўрсатади. Охирги (57.1) ва (57.2) тенгламалар биргаликда эркин жисмнинг ҳаракат тенгламалари дейилади. Бу тенгламалар олтита, демак, эркин жисмнинг эркинлик даражаси олтига тенг экан. Тенгламалардан учтаси, яъни (57.1) илгариланма ҳаракатни, қолган учтаси, яъни (57.2) сферик ҳаракат қонунларини ифодалайди. Олдинги (57.1) тенгламалар шакли қутбнинг танланишига боғлиқ, чунки O нуқтанинг вазияти ўзгариб O' бўлса, қутб координаталари ўзгаради (170- расмга қаранг), кейинги (57.2) тенгламалар шакли қутбнинг танланишига боғлиқ эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар жисмнинг биринчи вазиятида қўзғалмас

O, ζ, η, ξ системага нисбатан Эйлер бурчаклари φ_1 θ_1 φ_1 **бўлса, жисмнинг иккинчи вазиятида ψ_2, φ_2, θ_2 бўлиб, бу бурчаклар ўзаро тенгдир, лекин жисм қутби** O **дан** O' **нуқтага ўтади.** Демак, Эйлер бурчаклари қутб вазиятига боғлиқ эмас.

58- §. Ҳаракатдаги эркин жисм нуқталарининг тезликларини аниқлаш

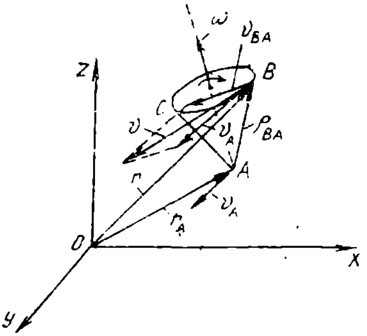
Ўтган параграфдан маълумки, эркин жисмнинг ҳаракати вақтида унинг нуқталари жисм қутбининг илгариланма ва қутб атрофидаги сферик ҳаракатида иштирок этади. Шунинг учун эркин жисм ҳаракатланаётганда унинг исталган нуқтасининг тезлигини топиш вақтида икки хил ҳаракатни, қутбнинг илгариланма ва жисмнинг қутб атрофидаги сферик ҳаракатини ҳисобга олиш лозим. Қуйидаги теорема ёрдамида эркин ҳаракатдаги жисм нуқталарининг тезлиги топилади.

Теорема: *эркин ҳаракатланаётган жисм исталган нуқтасининг тезлиги, қутбнинг жисм билан ҳаракатидаги илгариланма тезлиги билан ўша нуқтанинг қутб атрофидаги сферик ҳаракати тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг.*

Фараз қилайлик, теоремани исботлаш учун D жисм B нуқтасининг v тезлиги аниқланиши лозим бўлсин. Теоремага мувофиқ, v тезлик D жисм A нуқтасининг тезлиги v_A билан B нуқтанинг A нуқтага нисбатан айланма v_{BA} тезлигининг геометрик йиғиндисига тенглигини исботлаш талаб этилади. 172-расмдан кўриняптики,

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{\rho}_{BA} \qquad (58.1)$$

бунда r, r_A — B ва A нуқталарнинг вазиятларини ифодаловчи радиус-вектор; ρ_{BA} — B нуқтанинг A нуқта (қутб) га нисбатан вазиятини ифодаловчи радиус-вектор.



172- расм.

Жисм B нуқтасининг

v тезлигини аниқлаш учун r дан вақт бўйича бир марта ҳосила оламиз:

$$v = \frac{dr}{dt}.$$

Агар (58.1) ифодани тезлик формуласига қўйсак,

$$\vec{v} = \frac{d(\vec{r}_A + \vec{\rho}_{BA})}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_{BA}}{dt} \qquad (58.2)$$

ифода ҳосил бўлади. Маълумки, $\frac{d\vec{r}_A}{dt}$ жисмнинг A нуқтаси (қутби) нинг тезлигига тенг:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \qquad (58.3)$$

ва $\frac{d\vec{\rho}_{BA}}{dt}$ ифода жисмнинг B нуқтасининг айланма тезлигига (A нуқтага нисбатан) тенг, яъни

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}_{BA}}{dt}. \qquad (58.4)$$

Охирги иккита тенгламани ҳисобга олсак, (58.2) тенглама қуйидагича тасвирланади:

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}. \qquad (58.5)$$

Ҳосил бўлган (58.5) тенгламадан D жисм B нуқтасининг $\vec{v}$ тезлиги қутбнинг v_A тезлиги билан B нуқтанинг қутб (A нуқта) га нисбатан v_{BA} тезлигининг геометрик йиғиндисига тенг, деган хулоса келиб чиқади. Демак, теорема исбот бўлди.

Энди v тезликни чизма йўли билан аниқлайлик. Агар қутбнинг тезлиги v_A чап томонга йўналган бўлса, айланма v_{BA} тезлик йўналиши қуйидагича топилади. v_{BA} тезликни Эйлер формуласига асосан

$$\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{\rho}_{BA}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA}. \qquad (58.6)$$

шаклда ёзамиз. D жисмнинг айланиш йўналиши маълум бўлса, бурчакли тезликнинг ҳам йўналиши аниқ деган сўз. Агар ω пастга (A нуқтага нисбатан) йўналган бўлса, парма қоидасига асосан v_{BA} айланма тезлик B нуқтадан ўқувчига томон йўналган бўлади. Энди фикран v_A ни ўзига-ўзини параллел сақлаган ҳолда, жисмнинг B нуқтасига кўчирамиз. Натижада B нуқтага v_A ва v_{BA} тезликлар қўйилган бўлади. Бу тезликлардан параллелограмм тузамиз ва бу параллелограммнинг катта диагонали B нуқтанинг v тезлигига тенг бўлади. v тезликнинг модули ҳисоблаш йўли билан ҳам аниқланади, яъни

$$\vec{v} = \sqrt{v_A^2 + v_{BA}^2 + 2v_A \cdot v_{BA} \cos(\widehat{\vec{v}_A, \vec{v}_{BA}})} \qquad (58.7)$$

формула билан ҳисобланади. Охирги формулада $\vec{v}_A$ ва $\vec{v}_{BA}$ тезлик верторлари орасидаги бурчак косинусини ҳисобга олган ҳолда v тезлик модули аниқланиши равшандир.

Таъкидлаш лозимки, v_{BA} айланма тезлик модули

$$v_{BA} = \omega \cdot h_\Omega \qquad (58.8)$$

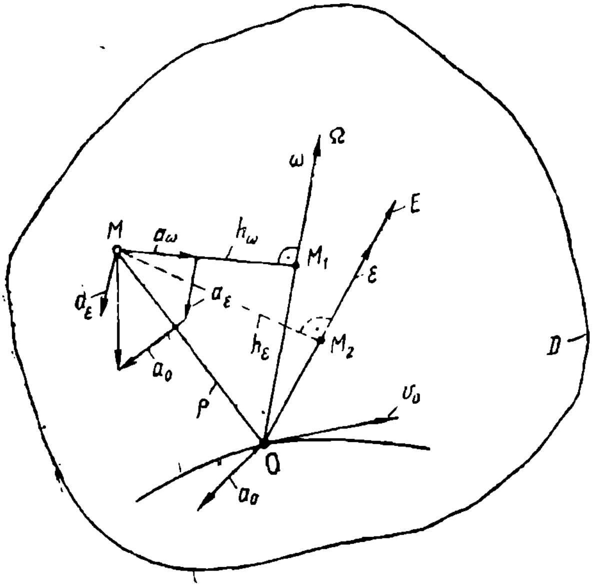
формула билан ҳисобланар эди. Бунда, h_Ω — танланган B нуқтадан оний айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофани билдиради. Жисмнинг ω бурчакли тезлиги, маълумки, Эйлер бурчакларидан олинган биринчи тартибли ҳосила орқали топилади. Эйлер бурчаклари қутбнинг танланишига боғлиқ бўлмаганлиги учун ω бурчакли тезлик ва ε бурчакли тезланиш векторлари ҳам қутбнинг танланишига боғлиқ эмас, деган хулоса келиб чиқади. Бу ишни, яъни ω ва ε векторнинг қутбни танланишига боғлиқ эмаслигини исботлашни ўқувчининг ўзига ҳавола қиламиз.

59-§. Ҳаракатдаги эркин жисм нуқталарининг тезланишларини аниқлаш

Ҳаракатланаётган эркин жисмнинг ихтиёрий M нуқтасинипг тезланишини топайлик. Бу тезланиш қуйидаги теоремага асосан топилади.

Теорема: *ҳаракатланаётган эркин жисмнинг исталган нуқтасининг тезланиши, қутбнинг тезланиши билан ўққа интилувчи ва айланма тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг.*

Фараз қилайлик, жисмнинг O нуқтаси қутб ва бу қутбнинг тезланиши a_0 (173-расм), жисмнинг қутб ат-



173- расм.

рофидаги айланишида бурчакли тезлиги ω ва бурчакли тезланиши ε бўлсин. Оний айланиш ўқи Ω, тезланиш ўқи E (O нуқтадан ўтувчи)ни ҳам маълум деб ҳисоблайлик. Жисмнинг M нуқтасини ифодаловчи радиус-вектор ρ бўлса, M нуқтанинг тезланишини аниқлайлик.

Маълумки, ихтиёрий M нуқтанинг тезланиши, шу нуқтанинг v тезлигидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг, яъни

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (59.1)$$

58- § дан маълумки,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}.$$

Шунинг учун қуйидаги

$$a = \frac{d(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho})}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \qquad (59.2)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламада қутбнинг тезланиши

$$\vec{a}_0 = \frac{dv_0}{dt} \qquad (59.3)$$

билан ифодаланади ва (59.2) тенгламанинг ўнг томонидаги қолган икки ҳадини a_ε, a_ω билан белгилаймиз, яъни

$$\vec{a}_\varepsilon = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \rho = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}, \qquad (59.4)$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad (59.5)$$

Бунда a_ε — айланма тезланиш, a_ω — ўққа интилувчи тезланиш деб айтилади. Бу катталикларни ва (59.3) тенгламани (59.2) ифодага қўйсак, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega. \qquad (59.6)$$

Охирги (59.6) тенгламадан жисмнинг M нуқтасининг $\vec{a}$ тезланиши қутбнинг $\vec{a}_0$ тезланиши, айланма $\vec{a}_\varepsilon$ тезланиши ва ўққа интилувчи $\vec{a}_\omega$ тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг эканлиги кўриниб турибди. Теорема исбот бўлди.

a_ε ва a_ω тезланишнинг йўналиши (59.4) ва (59.5) тенглама асосида, парма қоидасига асосан топилади (173- расм). жисмнинг M нуқтасига уринма бўйлаб, a_ω эса оний айланиш ўқи томон йўналган. Тўлиқ a тезланишни топиш учун $\vec{a}_\omega$ векторнинг охирига a_ε векторини қўямиз. Ниҳоят, M нуқтани $\vec{a}_\varepsilon$ векторининг охири билан туташтириб $\vec{a}$ векторини топамиз. Бу $\vec{a}$ векторнинг модули M нуқта билан $\vec{a}_0$ векторининг охирги нуқтасини туташтирувчи кесма узунлигига тенг.

Ҳисоблаш йўли билан a_ε ва a_ω векторнинг модуллари

$$a_\varepsilon = \varepsilon \cdot h_E, \qquad (59.7)$$

$$a_\omega = \omega^2 \cdot h_\Omega \qquad (59.8)$$

формула ёрдамида топилади. Бунда: h_Ω — жисмнинг M нуқтасидан оний айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофа; h_E — бурчакли тезланиш E ўқидан M нуқтагача бўлган энг қисқа масофадир, яъни

$$h_E = MM_2 \text{ ва } h_\Omega = MM_1.$$

Тўлиқ айланма a_{MO} тезланиш модули a_ε ва a_ω тезланиш орқали

$$a_{MO} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2 + 2a_\varepsilon a_\omega \cos(\overrightarrow{a_\varepsilon}, \widehat{\ } \overrightarrow{a_\omega})} \qquad (59.9)$$

формуладан ҳисобланади. Агар $(\overrightarrow{a_\varepsilon} \widehat{\ } \overrightarrow{a_\omega}) = 90°$ бўлса,

$$a_{MO} = \sqrt{a_\varepsilon^2 + a_\omega^2}$$

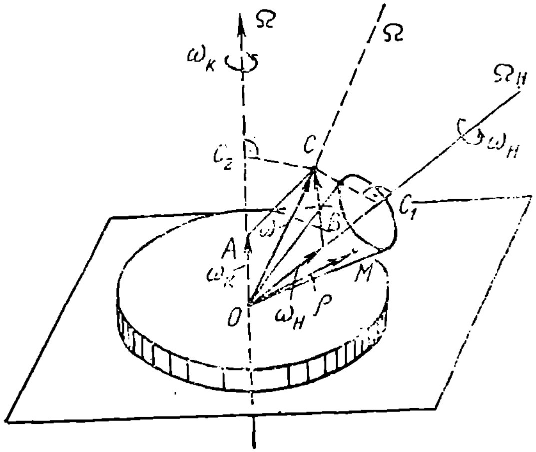
бўлади. Жисмнинг a тезланишининг модули қуйидаги тенглама ёрдамида ҳисобланади:

$$a = \sqrt{a_0^2 + a_{MO}^2 + 2a_0 a_{MO} \cos(\overrightarrow{a_0}, \widehat{\ } \overrightarrow{a_{MO}})}. \qquad (59.10)$$

Шундай қилиб, ҳаракатланаётган эркин жисмнинг исталган нуқтасининг тўлиқ тезланиши ташкил этувчи тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг экан.

60-§. Ўзаро кесишувчи ўқлар атрофида айланадиган қаттиқ жисмнинг ҳаракатларини қўшиш

Фараз қилайлик, жисм бир вақтнинг ўзида O нуқтадан ўтувчи иккита ўзаро кесишувчи ўқлар атрофида айлансин (174-расм). Жисмнинг Ω оний айланиш ўқи атрофидаги ҳа-



174- расм.

ракатини *кўчма*, $\Omega_н$ ўқи атрофидаги ҳаракатини *нисбий айланма ҳаракат* деб ҳисоблайлик. Кўчма ҳаракатдаги бурчакли тезлик $\omega_к$, нисбий ҳаракатдаги бурчакли тезлик $\omega_н$ бўлсин. Натижаловчи ҳаракат қандай бўлади ва натижаловчи ҳаракатнинг бурчакли тезлиги қандай топилиши мумкинлигини кўриб чиқайлик.

Сирпанувчи $\omega_к$, $\omega_н$ векторларни O нуқтага кўчирамиз ва бу векторлардан параллелограмм $OACB$ тузамиз. Шу параллелограммнинг OC диагонали жисмнинг натижаловчи ω бурчакли тезлигига тенглигини кўрсатамиз.

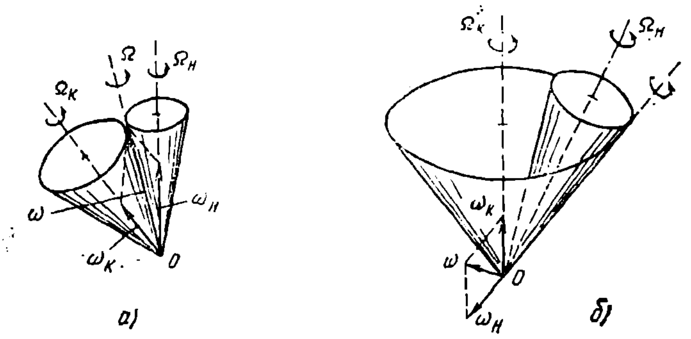
Олдин кўрсатамизки, $O\Omega$ оний айланиш ўқи бўлиб, шу ўқ устидаги нуқталарнинг тезликлари нолга тенг. Ҳақиқатан ҳам, O нуқта Ω ва $\Omega_н$ оний айланиш ўқларининг кесишган нуқтаси бўлганлиги учун ҳаракатланмайди, яъни O нуқтанинг тезлиги нолга тенг бўлади. Энди C нуқта тезлигининг модулини Ω, $\Omega_н$ ўқларига нисбатан ифодалайлик:

$$v_н = \omega_н \cdot CC_1 = 2S\Delta OCC_1 = 2S\Delta OBC,$$

$$v_к = \omega_к \cdot CC_2 = 2S\Delta OCC_2 = 2S\Delta OAC \qquad (60.1)$$

$$CC_1 \perp OB, \quad CC_2 \perp OA.$$

Параллелограммнинг OC диагонали уни иккита ўзаро тенг OAC ва OBC учбурчакларга бўлади. Бу $\Delta\, OAC = \Delta\, OBC$ бўлганлиги учун юқоридаги тенгламаларга асосан $v_н = v_к$ бўлади. Жисмнинг C нуқтасининг абсолют тезлиги (45.7) формулага асосан қуйидагига тенг:



а) б)

175- расм.

$$\vec{v} = \vec{v}_К + \vec{v}_Н = \vec{v}_К + (-\vec{v}_К) = 0. \qquad (60.2)$$

Натижаловчи $\vec{\omega}$ бурчакли тезлик векторининг йўналиши ташкил этувчи $\omega_К$ ва $\omega_Н$ векторнинг ўзаро ўткир ёки ўтмас бурчак ҳосил қилишига қараб кескин ўзгаради (175-расм).

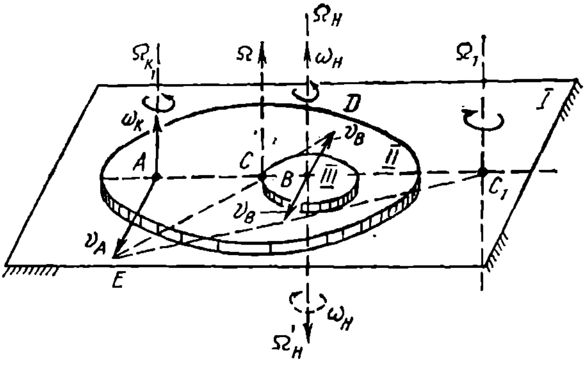
175-а расм кўринишида $\omega_К$, $\omega_Н$ орасида ўткир, 175-б расм кўринишида $\omega_К$, $\omega_Н$ орасидаги бурчак ўтмас бўлган ҳоллар кўрсатилган. Ҳар иккала ҳолда ҳам жисмнинг Ω оний айланиш ўқи жисмларнинг бир-бирига тегиш чизиғида ётади.

Агар жисм $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ . . . $\vec{\omega}_n$ бурчакли тезликли айланма ҳаракатланса натижаловчи ҳаракат ҳам айланма ҳаракат бўлади ва натижаловчи бурчакли тезлик $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ . . . $\vec{\omega}_n$ векторларнинг геометрик йиғиндисига тенг бўлиб қолади, яъни

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n. \qquad (60.3)$$

61-§. Ўзаро параллел ўқлар атрофида қаттиқ жисмлар айланишларини қўшиш

Фараз қилайлик, текис фигура бир вақтда оний айланиш ўқлари ўзаро параллел бўлган бир неча ҳаракатда қатнашсин (176-расм): 1) кўчма ва нисбий айланишлар бир томонга йўналган ҳолда қўзғалмас I текисликда II фигура кўчма ва II фигурага нисбатан III фигура нисбий айланма ҳаракатланаётган бўлсин. Агар кўчма ва нисбий бурчакли



176- расм.

тезликларни $\omega_\text{к}$, $\omega_\text{н}$ деб олсак, текис фигуранинг A нуқтасидаги кўчма тезлиги (кўчма $\Omega_\text{к}$ оний айланиш ўқига нисбатан) нолга тенг ва B нуқтанинг ҳам нисбий тезлиги $v_\text{н}$ (нисбий $\Omega_\text{н}$ оний айланиш ўқига нисбатан) нолга тенг. Бу ерда III фигуранинг нисбий айланиши $\Omega_\text{н}$ ўқи атрофида, II фигуранинг кўчма айланиши $\Omega_\text{к}$ ўқи атрофида бўлиши кўриниб турибди.

Расмдаги III текис фигуранинг исталган нуқтасининг тезлиги $v_\text{к}$ кўчма, $v_\text{н}$ нисбий тезликларнинг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{v} = \vec{v}_\text{к} + \vec{v}_\text{н}. \tag{61.1}$$

Агар фигуранинг B нуқтасининг A нуқтага нисбатан тезлигини топсак,

$$v_{BA} = \omega_\text{к} \cdot BA. \tag{61.2}$$

A нуқтанинг B нуқтага нисбатан тезлиги қуйидаги ифодага тенг:

$$v_{AB} = \omega_\text{н} \cdot AB, \tag{61.3}$$

яъни B нуқтанинг абсолют тезлиги v_B, текис фигура ўша нуқтасининг A нуқтага нисбатан айланма тезлигига тенг:

$$v_B = v_{BA} = \omega_\text{к} \cdot AB. \tag{61.4}$$

Худди шундай фикрни A нуқта ҳақида юритсак, бу A нуқтанинг v_A абсолют тезлиги A нуқтанинг B нуқтага нисбатан олинган v_{AB} айланма тезлигига тенг:

$$v_A = v_{AB} = \omega_\text{н} \cdot BA. \tag{61.5}$$

Абсолют тезликларни (v_A, v_B) маълум масштабда расмда кўрсатамиз. Бу v_A, v_B тезликлар $\Omega_\text{к}$, $\Omega_\text{н}$ ўқларга тик йўналган бўлиб, I текисликка параллел бўлади. v_A, v_B векторнинг охирларини бир-бирига DE тўғри чизиқ билан, A ва B нуқталарни AB тўғри чизиқ билан туташтирамиз. DE ва AB кесмаларнинг кесишган C нуқтаси тезликларнинг оний маркази бўлади. Абсолют айланишнинг оний ўқи тезликларнинг оний маркази бўлган C нуқтадан ўтади ва $\Omega_\text{к}$, $\Omega_\text{н}$ ўқларга параллел бўлади. Энди CA ва CB масофаларни топамиз. Тезликларнинг оний марказидан ўтувчи Ω ўқига нисбатан B ва A нуқталарнинг тезликлари (43.4) формулаларга асосан қуйидагича ёзилади:

$$v_B = \omega_H \cdot CB \qquad (61.6)$$

$$v_A = \omega_K \cdot CA \qquad (61.7)$$

ва

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{CB}{CA} = \frac{\omega_H}{\omega_K}$$

ёки (61.4) ва (61.5) ифодаларни ҳисобга олиб, қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{\omega_K}{\omega_H}. \qquad (61.8)$$

Демак, абсолют айланишнинг оний ўқи кўчма ва нисбий ўқлар билан бир текисликда ётади ва бу ўқларга параллел ҳамда улар орасидаги масофани бурчакли тезликлар нисбатига тенг бўлган бўлакларга ажратади.

Энди абсолют ω бурчакли тезликни (61.6) дан топамиз.

Биринчи ҳол: ω_H ва ω_K бир хил йўналганда

$$\omega = \frac{v_B}{CB},$$

агар бу ифодага v_B ифодасини (61.4) дан келтириб қўйсак, ушбу ҳосил бўлади:

$$\omega = \frac{\omega_H \cdot AB}{CB} = \frac{\omega_K\,(AC + AB)}{CB} = \frac{\omega_K}{\frac{CB}{CA}} + \omega_K. \qquad (61.9)$$

Ниҳоят, $\frac{CB}{CA}$ ифодани (61.8) нисбатга асосан $\frac{\omega_H}{\omega_K}$ билан алмаштирсак

$$\omega = \omega_H + \omega_K \qquad (61.10)$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, натижаловчи абсолют бурчакли тезлик кўчма ва нисбий бурчакли тезликларнинг йиғиндисига тенг экан.

Иккинчи ҳол. Кўчма ва нисбий бурчакли тезликлар ўзаро қарама-қарши йўналган бўлсин. 176-расмда бу ҳол учун нисбий бурчакли тезлик ω_H пунктир чизиқ билан пастга йўналган ҳолда кўрсатилган. Бу ҳолда v_B тезлик олдинги ҳолга нисбатан тескари йўналган. Шунинг учун бу ҳолда тезликларнинг оний маркази, EC_1 ва AB тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси C_1 да бўлади, яъни $\Omega_К$, $\Omega_Н$ ўқлардан ташқари абсолют айланиш ўқи Ω_1 жойлашади. Бу Ω_1 ўқи C_1 нуқтадан ўтади ва $\Omega_К$, $\Omega_Н$ ўқларга параллел бўлади.

Энди $\frac{\omega_Н}{\omega_К}$ нисбатни олайлик. Бунинг учун

$$v_B = \omega \cdot BC_1, \tag{61.11}$$

$$v_A = \omega \cdot AC_1, \tag{61.12}$$

эканлигини назарда тутамиз ҳамда (61.4), (61.5) ифодалардан фойдаланамиз. Қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{\omega_К}{\omega_Н}. \tag{61.13}$$

(61.13) дан абсолют айланишнинг оний ўқи $\Omega_К$, $\Omega_Н$ ўқлар билан бир текисликда ётади ва шу ўқларга параллел бўлиб, ўқлардан ташқарида бурчакли тезлиги катта бўлган томонда ётади ва $\Omega_К$ ўқдан Ω_1 ўқигача бўлган масофани бурчакли тезликлар нисбатига тенг бўлакларга ажратади.

Энди ω абсолют бурчакли тезликни топамиз. Бунинг учун B нуқта v_B айланма тезлигининг $\Omega_К$ ўқига нисбатан формуласини ёзамиз:

$$v_B = \omega_К \cdot AB = \omega_К (AC_1 - BC_1) \tag{61.14}$$

(61.14) ва (61.11) тенгламанинг ўнг томонларини тенглаштириб, қуйидаги ифодага эга бўламиз:

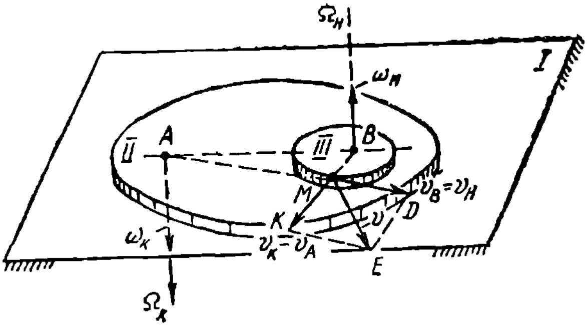
$$\omega = \frac{\omega_К \cdot AC_1}{BC_1} - \omega_К = \frac{\omega_К}{BC_1 / AC_1} - \omega_К.$$

Агар (61.13) тенгламани ҳисобга олсак, ω учун қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\omega = \omega_Н - \omega_К. \tag{61.15}$$

Натижаловчи бурчакли тезлик ω нисбий $\omega_Н$ ва $\omega_К$ кўчма бурчакли тезликларнинг айирмасига тенг бўлиб, модули катта бўлган бурчакли тезлик томон йўналган. 176-расмдан кўринадики, Ω_1 билан $\Omega'_Н$ бир хил йўналган (бу $\omega > \omega_К$ бўлган ҳолдир).

Учинчи ҳол: кўчма ва нисбий бурчакли тезликлар ўзаро тенг бўлиб, йўналишлари қарама-қарши бўлганда, яъни



177- расм.

$\vec{\omega}_\text{к} = -\vec{\omega}_\text{н}$ ёки бир хил йўналганда $\omega_\text{к} = \omega_\text{н}$ натижаловчи ҳаракатда III фигуранинг v тезлиги қандай қилиб топилишини кўрайлик (177-расм). Бу v тезлик бўлса, маълумки, $\vec{v} = \vec{v}_\text{к} + \vec{v}_\text{н}$ формула ёрдамида топилади. Нисбий тезлик M нуқтанинг айланма тезлигига тенг, яъни

$$v_B = v_\text{н} = \omega_\text{н} \cdot MB. \tag{61.16}$$

Худди шундай $v_\text{к}$ кўчма тезлик ҳам M нуқтанинг $\Omega_\text{к}$ ўқига нисбатан айланма тезлигига тенг:

$$v_\text{к} = v_\text{н} = \omega_\text{к} \cdot MA. \tag{61.17}$$

Бу ерда $MB \perp v_B$ ва $MA \perp v_A$ бўлишини эсда тутиш керак. Энди v_A ва v_B тезликдан $MDEK$ параллелограмм ҳосил қилиб абсолют тезликни параллелограмм диагоналига тенг деб оламиз. Биз ABM ва MEK ўхшаш учбурчаклар ҳосил қилдик, чунки $MK = v_A = v_K$, $MD = v_\text{н}$; бу тезликлар BM ва MA томонларга пропорционал ва $\angle MKE = \angle AMB$ (икки томонлари ўзаро перпендикуляр бурчаклар бўлганлиги учун, яъни $BM \perp KE$, $MA \perp MK$). Бу учбурчаклар ўхшашлигидан

$$\frac{v}{AB} = \frac{v_\text{к}}{MA} = \frac{v_\text{н}}{MB} = \omega_\text{н} = \omega_\text{к}$$

ёки

$$v = \omega_\text{к} \cdot AB. \tag{61.18}$$

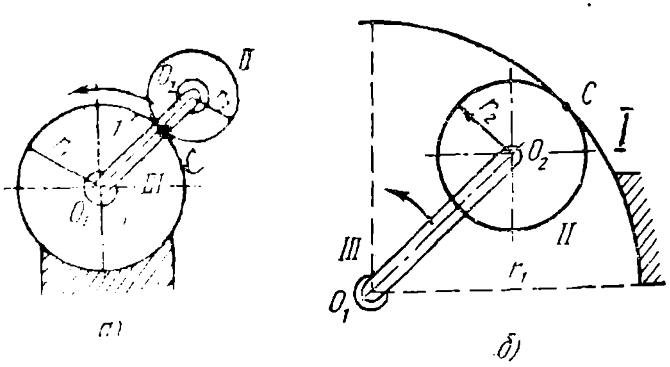
ABM ва MKE учбурчакларнинг иккитадан томонлари $MB \perp KE$, $MA \perp MK$ бўлганлиги учун бу учбурчакларнинг учинчи томонлари, яъни $v \perp AB$ бўлиши шарт. Демак, абсолют ҳаракат тезлиги v кесма AB га перпендикуляр йўналган. Текис фигурада M нуқта ихтиёрий танланганлиги учун (61.18) формуладан, текис фигуранинг ҳамма нуқталари AB кесмага перпендикуляр йўналишда бир хил ҳаракат қилади, деган хулоса келиб чиқади. Бундай ҳаракатдаги жисмга маълумки, 42-§ да илгариланма ҳаракатдаги жисм дейилади. Шундай экан, III текис фигура бу ҳолда илгариланма ҳаракатланади. Бу ҳолда тезликларнинг оний маркази чексизликка интилади ва абсолют айланишнинг бурчакли тезлиги $\omega=0$ бўлади.

Йўналишлари қарама-қарши ва бурчакли тезликларининг модуллари ўзаро тенг бўлган иккита айланма ҳаракат *бурчакли тезликлар жуфти* деб аталади. Биз кўрган учинчи ҳол тезликлар жуфтидир, яъни III текис фигура бурчакли тезлик жуфтига мисол бўлади ва бу жисм v тезлик билан илгариланма ҳаракат қилади.

Илгариланма ҳаракатдаги тезлик модули бурчакли тезликлардан биттасининг оний айланиш ўқлари орасидаги масофага бўлган кўпайтмасига тенг ((61.18) формулага қаранг).

Бурчакли тезликлар жуфтига мисол — велосипед педалининг ҳаракати бўлади, яъни педаль v тезлик билан илгариланма ҳаракатланади. Бу ҳолда педаль ўз ўқи атрофидаги нисбий бурчакли тезлиги $\omega_н$, педаль ўқининг кривошип билан биргаликдаги кўчма бурчакли тезлиги $\omega_к$ катталикка тенг, яъни $\omega_н=\omega_к$ бўлади.

41-мисол. (24.1) Қўзғалмас I ва қўзғалувчан II тишли



а)

б)

178- расм.

ғилдиракларнинг O_1 ва O_2 ўқини кривошип III бирлаштириб турибди. Ғилдираклар I ва II ички ёки ташқи илиниши мумкин (178-расм). Кривошип III, O_1 ўқи атрофида ω_3 бурчакли тезлик билан айланади.

Ғилдиракларнинг r_1 ва r_2 радиусини маълум деб, иккинчи ғилдиракнинг ω абсолют бурчакли тезлиги ва III кривошипга нисбатан ω_2 нисбий бурчакли тезлиги аниқлансин.

Берилган:

$r_1 \quad r_2$

ω_3

$\omega = ? \quad \omega_2 = ?$

Ечиш: Ғилдирак II кривошипнинг кўчма айланма ҳаракатида ва O_2 ўққа нисбатан айланма нисбий ҳаракатда қатнашади. Агар кривошипнинг айланишидаги бурчакли тезлигини $\omega_К$, II ғилдиракнинг O_2 ўқи атрофидаги нисбий бурчакли тезлигини $\omega_Н$ деб белгиласак, $\omega_К$ ва $\omega_Н$ вектор расм текислигидан тик чиқиб кузатувчига йўналган (178-а расм) ва ўзаро параллел бўлади.

Демак, (61.10) формулага мувофиқ ω абсолют бурчакли тезлик $\omega_К$ ва $\omega_Н$ бурчакли тезликларнинг йиғиндисига тенг:

$$\omega = \omega_К + \omega_Н.$$

Масаланинг шартига асосан, $\omega_К = \omega_3$ ва $\omega_Н = \omega_2$ бўлади. Бу ҳолда юқоридаги тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$\omega = \omega_2 + \omega_3. \tag{1}$$

Бурчакли тезликларнинг нисбати, яъни $\frac{\omega_3}{\omega_2}$ ифодани (61.8) га асосан қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}, \tag{2}$$

чунки C нуқтадан ўтувчи горизонтал ўқ оний айланиш ўқидир.

Охирги тенгламадан ω_2 ни топиб (1) тенгламага қўямиз

$$\omega = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_3 + \omega_3 = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\omega_3 \tag{3}$$

ва нисбий бурчакли тезлик ω_2 ни (2) дан аниқланади:

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_3. \tag{4}$$

Энди илиниш ичкаридан бўлган ҳолда (178-б расм) $\omega_к$ ва $\omega_н$ векторлар бир-бирига параллел, лекин қарама-қарши йўналганлиги учун абсолют бурчакли тезлик (61.15) формуладан топилади:

$$\omega = \omega_3 - \omega_2 \qquad (5)$$

ва

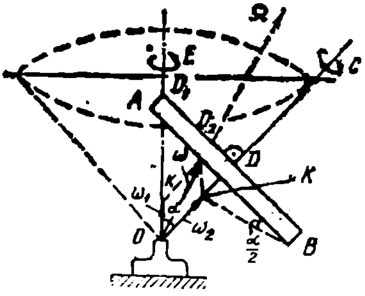
$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} \qquad (6)$$

(6) дан нисбий бурчакли тезлик қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_3.$$

Абсолют бурчакли тезлик қуйидагига тенг бўлади:

$$\omega = \omega_3 - \frac{r_1}{r_2}\,\omega_3 = \frac{r_2 - r_1}{r_2}\,\omega = -\frac{r_1 - r_r}{r_2}\,\omega. \qquad (7)$$



179- расм.

42-мисол. (25.2). Карусель доиравий *AB* майдончадан иборат бўлиб, бу майдончанинг маркази *D* нуқтадан ўтадиган *OC* ўқ атрофида $6\,\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ тезлик билан айланади, *OC* ўқ эса вертикал *OE* ўқи атрофида $10\,\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ тезлик билан айланмоқда (179-расм). Майдончанинг диаметри 10 м, *OC* ва *OE* ўқ орасидаги бурчак $\alpha = 20°$, *OD* масофа 2 м. Каруселнинг *B* нуқтаси энг пастки ҳолатда бўлган вақтдаги v тезлиги топилсин.

Берилган:

$n_1 = 6\,\frac{\text{айл}}{\text{мин}} = \frac{1}{10}\,\text{с}^{-1}$

$n_2 = 10\,\frac{\text{айл}}{\text{мин}} = \frac{1}{6}\,\text{с}^{-1}$

$AB = 10$ м

$OD = 2$ м

$\alpha = 20°$

$v_B = ?$

Ечиш. Карусель *AB* икки ўқ атрофида, *OE* ва *OC* атрофида, ω_1 ва ω_2 бурчакли тезликлар билан айлансин. Бу ерда кўчма ва нисбий бурчакли тезликлар ω_1 ва ω_2 бўлади. Натижаловчи ω бурчакли тезлик (60.3) формулага асосан топилади.

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\,\omega_1\omega_2\cos(\widehat{\vec{\omega}\ \vec{\omega}_2})}\,. \tag{1}$$

ω_1, ω_2 бурчакли тезликлар n_1 ва n_2 айланиш сонлари билан қуйидагича боғланган:

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = \frac{\pi}{5}\cdot c^{-1}, \tag{2}$$

$$\omega_2 = 2\pi n_2 = \frac{\pi}{3}\,c^{-1}. \tag{3}$$

Охирги ифодаларни (1) тенгламага қўямиз:

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi^2}{25} + \frac{\pi^2}{9} + \frac{2\,\pi^2}{15}\cos 20^\circ} = \pi\sqrt{\frac{9 + 25 + 30\cdot 0{,}88}{225}} \approx$$

$$\approx \frac{8\,\pi}{15} \approx 0{,}\pi c^{-1}\,. \tag{4}$$

Натижаловчи бурчакли тезлик ётган тўғри чизиқ устида оний айланиш ўқи Ω ҳам ётади. Шу Ω оний айланиш ўқига (абсолют бурчакли тезлик ётган ўқ) нисбатан B нуқтанинг тезлигини топиш учун В нуқтадан Ω ўқига перпендикуляр туширсак, бу перпендикуляр Ω ўқини K нуқтада кесади. Агар BK кесмани ω бурчакли тезликка кўпайтирсак, B нуқтанинг тезлиги ҳосил бўлади:

$$v = \omega\cdot BK. \tag{5}$$

Расмдан BK кесмани ($\triangle\, DBK$ дан) топамиз:

$$BK = D_2B\cos\frac{\alpha}{2}\,, \tag{6}$$

бунда $\angle\, KOD_2 = \angle DBK = \frac{\alpha}{2}$, чунки $OK \perp KB$ ва $OD \perp DB$, яъни бурчакларнинг иккита томонлари ўзаро перпендикуляр бўлганлиги ва $\angle\, KOD = \frac{\alpha}{2}$ бўлганлиги учун, (6) формулага $\cos\frac{\alpha}{2}$ деб ёзилди.

Энди D_2B кесма расмдан кўринадики, D_2D ва DB кесмалар йиғиндисига тенг:

$$D_2B = D_2D + DB. \tag{7}$$

Расмдан $D_2D = D_1D/2$ ва $\triangle D_1DO$ дан

$$D_1D = OD\cdot \mathrm{tg}\,\alpha \qquad D_1D = 2\,D_2D$$

бўлганлигини ҳисобга олсак:

$$D_2D = OD \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\,. \tag{8}$$

Ниҳоят, (8) ифодани (7) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$D_2B = (OD/2)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \frac{AB}{2} \tag{9}$$

(8) ни (6) га қўямиз $DB = \frac{AB}{2}$

$$BK = \frac{OD}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{AB}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,. \tag{10}$$

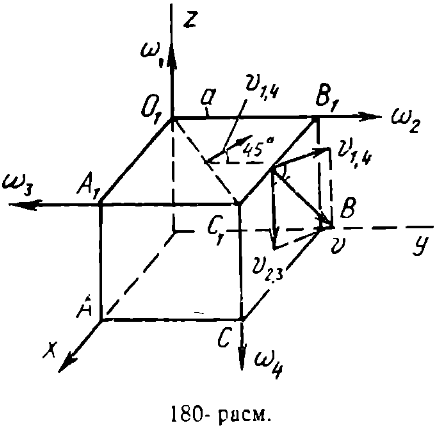
Агар (1), (2), (3) ва (10) тенгламани ҳисобга олсак, тезликни топиш формуласини қуйидагича ёзамиз:

$$v = \frac{\pi}{60}\sqrt{n_1^2+n_2^2+2\,n_1n_2\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot OD\operatorname{tg}\alpha + AB \times$$

$$\times \cos\frac{\alpha}{2};\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\,. \tag{11}$$

Масаланинг шартига асосан берилганларни (11) формулага қўямиз ва B нуқтанинг тезлигини ҳисоблаймиз: $v = 8{,}77\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

43-мисол. (25.29). Томонлари $a = 2$ м га тенг бўлган куб шаклидаги қаттиқ жисм бир вақтнинг ўзида бурчакли тезликлари $\omega_1 = \omega_4 = 6\ \text{с}^{-1}$, $\omega_2 = \omega_3 = 4\ \text{с}^{-1}$ бўлган тўртта айланма ҳаракатда қатнашади. Шу жисмнинг натижаловчи ҳаракатини (тезлигини) аниқланг (180-расм).



180-расм.

Берилган:

$\omega_1 = \omega_4 = 6\ с^{-1}$
$\omega_2 = \omega_3 = 4\ с^{-1}$
$a = 2$ м

$v_н$ — ?

Қаттиқ жисмнинг натижаловчи ҳаракатининг тезлигини топинг.

Ечиш. Масаланинг шартига асосан жисм бир вақтнинг ўзида иккита айланма ҳаракатда: 1) $\omega_1 \cdot \omega_4$ бурчакли тезликлар жуфтида; 2) $\omega_2 \cdot \omega_3$ бурчакли тезликлар жуфтида қатнашади. Жуфт бурчакли тезликлар таъсирида 61-§ дан маълумки, жисм илгариланма ҳаракат қилади. Биринчи жуфт таъсиридаги илгариланма ҳаракат тезлигини $v_{1,4}$ деб, иккинчи жуфт таъсиридаги илгариланма ҳаракат тезлигини $v_{2,3}$ деб белгиласак, $v_{1,4}$ ва $v_{2,3}$ тезлик (61.18) формулага асосан қуйидагича ёзилади:

$$v_{1,4} = \omega_1 \cdot O_1C_1, \tag{1}$$

$$v_{2,3} = \omega_2 \cdot B_1C_1. \tag{2}$$

180-расмдан

$$O_1C_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \tag{3}$$

$$B_1C_1 = a. \tag{4}$$

Маълумки, (61-§ даги учинчи ҳол) $v_{1,4}$, $v_{2,3}$ тезликнинг йўналишини худди жуфт куч моментининг йўналишини топганимиздек (11-§) аниқланади, яъни $v_{1,4}$; $v_{2,3}$ тезлик O_1C_1 ва C_1B_1 кесмаларга перпендикуляр бўлиб, шундай йўналганки, $v_{1,4}$; $v_{2,3}$ тезлик векторлари охирларидан қараб турган кузатувчига айланиш соат милининг айланишига нисбатан тескари йўналишда бўлади.

Биринчи бурчакли тезликлар жуфтидан ҳосил бўлган $v_{1,4}$ тезлик $A_1O_1B_1C_1$ текислигида ётади ва Y ўқи билан 45° бурчак ҳосил қилади; иккинчи бурчакли тезликлар жуфтидан ҳосил бўлган $v_{2,3}$ тезлик эса C_1B_1BC вертикал текисликда ётади ва пастга тик йўналган. $v_{1,4}$ ва $v_{2,3}$ тезлик ўзаро тик йўналганлиги учун натижаловчи тезлик Пифагор теоремасига асосан топилади:

$$v = \sqrt{v_{1,4}^2 + v_{2,3}^2} \tag{5}$$

ва демак, жисм v тезлик билан илгариланма ҳаракат қилади.

Катталикларнинг ўрнига сон қийматларини қўйиб, қуйидаги натижаларни ҳосил қиламиз:

$$v_{1,4} = \omega_1 \sqrt{2}\, a = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 12\sqrt{2}\ \frac{м}{с},$$

$$v_{2,3} = \omega_2 \cdot a = 4 \cdot 2 = 8\ \frac{м}{с};$$

$$v = \sqrt{144 \cdot 2 + 64} = 18{,}8\ \frac{м}{с}.$$

Энди жисм v тезлигининг ўқлардаги проекцияларини топамиз. v тезликнинг проекцияси ташкил этувчи $v_{1,4}$ ва $v_{2,3}$ тезликнинг ўқлардаги проекцияларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$v_x = (v_{1,4})_x + (v_{2,3})_x, \tag{6}$$

$$v_y = (v_{1,4})_y + (v_{2,3})_y, \tag{7}$$

$$v_z = (v_{1,4})_z + (v_{2,3})_z. \tag{8}$$

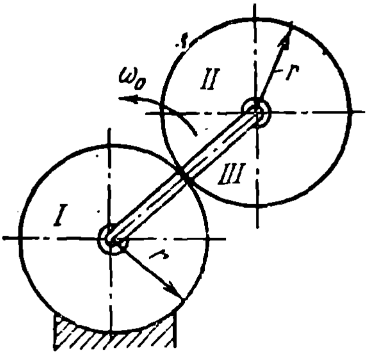
Расмдан кўринадики,

$$(v_{1,4})_x = -v_{1,4} \sin 45^\circ = -12 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -12\ \frac{м}{с},$$

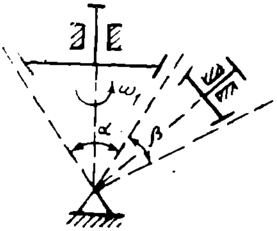
$$(v_{1,4})_y = v_{1,4} \cos 45^\circ = 12 \cdot \sqrt{2^1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\ \frac{м}{2}\ .$$

$(v_{1,4})_z = 0$ (чунки $v_{1,4}$ тезлик ётган текислик z ўқига тик йўналган). $v_{2,3}$ тезлик йўналиши z ўқига тескари бўлганлиги учун

$$(v_{2,3})_x = 0; \quad (v_{2,3})_y = 0; \quad (v_{2,3})_z = -v_{2,3} = -8\ \frac{м}{с}.$$



181- расм.



182- расм.

Охирги тезлик проекцияларининг қийматларини (6), (7) ва (8) формулага қўйиб v_x, v_y ва v_z векторнинг модулини топамиз:

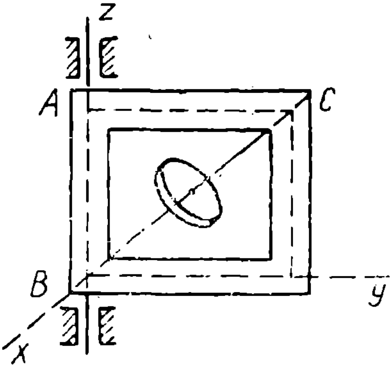
44-мисол (24.2). III кривошип радиуси r бўлган II тишли ғилдиракнинг ўшандай r радиусли I тишли ғилдирак устида думаланиши натижасида, ω_0 бурчакли тезлик билан O ўқи атрофида кўчма айланма ҳаракатга келтирилган бўлса, *II* тишли ғилдиракнинг $\omega_н$ нисбий ва абсолют ω_a бурчакли тезликлари нимага тенг бўлади (181-расм)? *OA* кривошипнинг ҳаракатини кўчма ҳаракат деб ҳисобланг.

Жавоб: $\omega_{2,3} = \omega_0$ (нисбий бурчакли тезлик), $\omega_2 = 2\,\omega_0$.

45-мисол (25.1). Айланиш ўқлари қўзғалмас ва α ҳамда β қамраш бурчаклари бўлган иккита конусли тишли ғилдираклар берилган. Биринчи ғилдирак ω_1 бурчакли тезлик билан айланади (182-расм). Иккинчи ғилдиракнинг ω_2 бурчакли тезлиги топилсин ва ω_2 қиймати $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\omega_1 = -10\,\frac{рад}{мин}$ ҳол учун ҳисоблансин.

Жавоб: $$\omega_2 = \omega_1 \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = 5{,}16\,\frac{айл}{мин}.$$

46-мисол (25.10). Квадратли рама *AB* ўқи атрофида $2\,\frac{айл}{мин}$ тезлик билан айланади. Раманинг *BC* диагонали билан устма-уст тушадиган ўқ атрофида диск ҳам $2\,\frac{айл}{мин}$ тезлик билан айланади (183-расм). Дискнинг мутлоқ (абсолют) бурчакли тезлиги ва мутлоқ бурчакли тезланишини топинг.



183-расм.

Жавоб: $\omega = 0{,}39$ с$^{-1}$ $\varepsilon = 0{,}031$ с$^{-1}$.

Кўрсатма: мутлоқ ε бурчакли тезланиш мутлоқ ω бурчакли тезликнинг ω_x, ω_y, ω_z проекцияларидан олинган ҳосилалар орқали ($\dot\omega_x$, $\dot\omega_y$, $\dot\omega_z$) топилишини эътиборга олиш лозим.

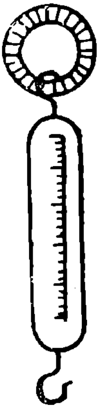
III қисм. ДИНАМИКА

Х БОБ. ДИНАМИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ. ДИНАМИКА ФАНИ. ДИНАМИКА РИВОЖЛАНИШИНИНГ ҚИСҚАЧА ТАРИХИ

1. Механиканинг жисмлар механик ҳаракатини келтириб чиқарадиган кучларга боғлаб ўрганадиган бўлими *динамика* дейилади. Агар статикада жисм (нуқта)ларга таъсир этувчи кучлар системасини эквивалент кучлар билан алмаштириш ва шу кучлар таъсирида жисмларнинг мувозанат шартларини ўрганиш масалалари, кинематикада жисм (нуқта)ларнинг ҳаракат турларини ўрганиш масалалари кўриб чиқилган бўлса, динамика бўлимида ҳаракат турлари кучлар билан боғланган ҳолда ўрганилади.

Исталган жисмнинг ҳар қандай ҳолати (тинч ёки текис ҳаракати) шу жисмга бошқа жисмлар таъсирининг натижасидир. Бу таъсирлар жисмларнинг бир-бирига бевосита тегиб туриши натижасида ёки жисмлар бир-биридан маълум масофада турганда бўлиши мумкин. Жисмларнинг ўзаро таъсири натижасида, яъни вақт бирлигида бир жисмнинг таъсири остида иккинчи жисм ҳаракат миқдорининг ўзгариши *куч* деган катталик орқали ифодаланади.

Жисмларнинг ўзаро таъсирини ҳам миқдор, ҳам йўналиш жиҳатидан ифодалайдиган физик катталик *куч* дейилади. Куч динамометр билан ўлчанади (184-расм). Динамометр маълум кучларга қараб даражаланган пружина бўлиб, бу пружинанинг маълум жойида кўрсаткич (стрелка) қўйилади ва пружинанинг охиридаги илгакда ўлчаниши лозим бўлган куч қўйилади. Динамометрнинг ишлаши пружинанинг чўзилишига асосланган. Қўйилган куч миқдори чўзилиш деформациясига тўғри пропорционал бўлиб, Гук қонунига асосан куч $F=-kx$ орқали топи-



184-расм.

лади. Олдиндан пружинанинг чўзилишига қараб, кучнинг миқдори шкалада аниқланган бўлади. Жисмларнинг бурилиш, эгилиш ва бошқа деформациясига асосланган динамометрлар мавжуд. Куч бирлиги қилиб СИ системасида 1 Ньютон (Н) қабул қилинган, яна куч бирлиги сифатида кг-куч, дина, тонна-куч ва бошқа бирликлар ишлатилади:

$$1\ \text{Н} = 1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2};\ 1\ \text{кг-куч} = 9{,}8\ \text{Н}.$$

Динамикада статик ва кинематик масалалар бир-бирига боғлиқ ҳолда ечилади. Куч ва жисм ёки нуқтанинг кинематик ҳолати орасидаги боғланиш кўриб чиқилади. Динамика иккига бўлинади: 1. Нуқта динамикаси. 2. Механик система ёки қаттиқ жисм динамикаси.

Механик система нуқталардан тузилганлиги учун олдин нуқта учун динамика масалалари ечилади, кейин бу нуқта учун ечилган масала система учун умумлаштирилади.

Куч билан нуқтанинг кинематик ҳолати нуқтанинг массаси орқали ифодаланади. Масса бу жисмда бор бўлган материя миқдоридир ёки жисм инерциясининг ўлчовидир. Масса шайнли тарозида ўлчанади. Массанинг ўлчов бирлиги қилиб г., кг., тонна қабул қилинган.

Динамикада куч, масса ва тезланишлар орасидаги богланишлар дифференциал тенгламалар шаклида ифодаланади. Кейин шу дифференциал боғланишлардан фойдаланиб, нуқта ёки системанинг ҳаракат қонунлари аниқланади.

2. Ҳозирги замон динамикасининг ривожланишида бутун дунё олимлари муайян ҳисса қўшганлар, айниқса буюк италья олими Галилео Галилей (1564—1642) биринчи бўлиб ҳаракатдаги нуқта учун тезлик ва тезланиш тушунчаларини киритди, жисмларнинг бўшлиқда тушиш қонунини кашф этди. Галилей инерция қонунини ихтиро қилди ва батафсил баён этди. Бўшлиқда горизонтга нисбатан қия отилган жисмнинг ҳаракат қонуни параболадан иборат эканлигини исботлади.

Голландия олими Гюйгенс (1629—1695) инерция моменти тушунчасини фанга киритди, маятниклар назариясини ишлаб чиқди, соат механизмини ихтиро этди, марказдан қочма куч тушунчасини киритди.

Классик механиканинг асосчиси, буюк Галилейнинг давомчиси инглиз олими ва мутафаккири Исаак Ньютон (1643—1727) ўзининг «Натур философиянинг математик асослари» номли асарида механиканинг асосий уч қонунини аниқлаб бериб, шу уч қонун асосида динамика курсини кетма-кет баён этди ва шу билан кинематик, статик ва динамик катталиклар бир-бирига боғлиқлигининг математик методларини аниқ ва равшан кўрсатди. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ташқи кучга боғлиқ эканлигини исботлади. Бутун олам тортишиш қонунини кашф этди. Бироқ XX аср бошларида очилган янги кашфиётлар микрожисмларда ва тезликлари ёруғликнинг бўшлиқдаги тезлигига яқин бўлган жисмлар учун фазо ва вақт жисмларнинг кинематик ҳолатига боғлиқ бўлади, деган хулосага олиб келди.

Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини Декарт (1596—1650), кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ака-ука И. Бернулли (1667—1748), Д. Бернулли (1700—1782), ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани Эйлер (1746) ва Бернулли кашф этди. Я. Герман (1678—1733) динамика масалаларини статик усул билан — кинетостатика усули билан ечиш мумкинлигини кўрсатди.

Боғланишлар таъсирида бўлган мураккаб системалар учун Даламбер (1717—1783) ва Герман—Эйлер ҳаракатдаги жисмнинг динамик мувозанат тенгламаларини тузиш принципларини кўрсатдилар.

Биринчи бўлиб Стевин (1548—1620) мумкин бўлган кўчиш принципини тузди ва бу принципни Лагранж (1736—1813), Герман—Эйлер—Даламберлар ривожлантириб, амалдаги масалалар учун татбиқ этиш усулини илмий асосда ишлаб чиқдилар. Шу принципни умумлаштириб, Галилей механиканинг олтин қоидасини тузди.

Лагранж системанинг дифференциал тенгламаларини умумлашган координаталар шаклида ифодалаб, ҳозирги замон классик аналитик механикасига асос солди. Бу умумлашган координаталарда ифодаланган тенгламаларни кичик тебранишли системалар учун татбиқ этди.

Н. Е. Жуковский (1847—1921) механиканинг алоҳида бўлими бўлган аэро-гидродинамиканинг асосчиларидан бири бўлиб, унинг уюрмалар ҳақидаги таълимоти ҳозир ҳам шу соҳада назарий асос бўлиб хизмат қилади.

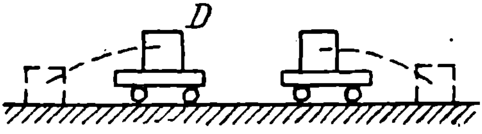
Самовий жисмларга саёҳат қилиш учун бошқа принципга асосланиб ишлайдиган реактив двигателлар назариясига И. В. Мешчерский (1859—1935) асос солди. У ўзгарувчан массали жисм механикаси деган янги механика бўлимини илмий ва назарий томондан асослаб берди.

К. Э. Циолковский (1857—1935), И. П. Королев ва бошқа олимларнинг ишлари натижасида ҳозирги замонда сифатли ва қувватли реактив двигателлар ясалган, бу двигателлар космоснинг сирларини ўрганиш учун ягона транспорт воситаси бўлиб хизмат қилмоқда.

62-§ Динамиканинг асосий қонунлари. Инерциал ҳисоблаш системалари

Динамика бўлими Ньютон томонидан аксиомалар тариқасида қабул қилинган ва системага киритилган қуйидаги тўрт қонунга асосланади.

1. Инерция қонуни. Материал нуқта (жисм) ўзининг тинч ҳолатини ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини, то бу нуқта (жисм)га бошқа жисмлар таъсир этиб, нуқта (жисм)ни бу ҳолатидан чиқаргунча сақлайди. Нуқта тинч ҳолатда бўлса, тезлиги $\vec{v} = 0$, тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлса, тезлиги $\vec{v} = \text{const}$ бўлади. Демак, агар нуқтанинг тезлик вектори $\vec{v} = \text{const}$ бўлса, бу нуқта ёки тинч ҳолатида ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлади. Агар нуқта учун $\vec{v} = \text{const}$ бўлса, бу нуқта доим $\vec{v} = \text{const}$ ҳолатини сақлашга интилади. Нуқтанинг тезлигини $\vec{v} = \text{const}$ (тинч ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини) сақлаш хоссаси *инерция* дейилади. Агар бошқа жисмлар нуқтага таъсир этмаса, бу нуқта ўзининг инерциясини, яъни $\vec{v} = \text{const}$ ҳолатини сақлайди. Инерция ёки *инертлик* ҳар қандай материал нуқта ёки жисмнинг ажралмас хоссаси бўлиб, ҳаракатнинг пайдо бўлмаслиги ёки йўқолмаслигини кўрсатувчи белгидир. Нуқта ёки жисм ўзининг кинематик ҳолатини, (185-расм) инертлигини сақлашга



185- расм.

интилади. Агар аравача бирданига тўхтатилса, унинг устидаги D жисм олдинга қараб парабола бўйлаб ҳаракат қилади ёки агар аравача бирданига олдинга қараб ҳаракат қилса ҳам, D жисм орқага қараб яна парабола бўйлаб ҳаракат қилади.

2. Тезланиш ва кучнинг мутаносиблик қонуни ёки Ньютоннинг иккинчи қонуни. Бу қонунга мувофиқ нуқтанинг тезланиши шу нуқтага таъсир этаётган кучга тўғри пропорционал бўлиб, шу таъсир этаётган куч йўналиши томон йўналган бўлади. Бу қонун қуйидагича ифодаланади:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}; \qquad (62.1)$$

Тенглама нуқтанинг $\vec{a}$ тезланиши нуқтага таъсир этаётган $\vec{F}$ куч ва нуқтанинг m массаси катталикларини ўзаро боғлайди. Бу тенгламадан

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (62.2)$$

ифода келиб чиқади. Охирги (62.1) ва (62.2) тенгламага Ньютоннинг иккинчи қонуни ёки динамиканинг асосий тенгламаси деб ҳам айтилади.

Нуқтанинг m массаси икки хил таърифланади: 1. Масса бу нуқта (жисм)га тўпланган материя (модда) миқдори. 2. Масса нуқта инерциясининг ўлчовидир. Шу билан бирга, масса бу тортишиш (гравитацион) майдонни ҳосил этувчи физик катталик дейилади, яъни инерт масса ва гравитацион масса деган атама қўлланилади.

Ҳозир инерт масса ҳам, гравитацион масса ҳам айнан битта физик катталик эканлиги маълум. Классик механикада нуқта ёки жисм массаси, олдин айтганимиздек, тинч турган ҳолда ҳам ёки ҳаракат ҳолида ҳам бир хил деб ҳисобланади. Бу катталик жисмнинг инертлигини ҳамда гравитацион хоссасини ифодалайди. Масса жисмдаги материя миқдори бўлиб, бу материя ўзининг икки хусусиятини, инертлик ва гравитацион хусусиятини кўрсатади, деб тушуниш лозим.

Агар m массали (жисм) нуқтага F_1 ва F_2 кучлар таъсир этганда, бу нуқта a_1 ва a_2 тезланиш олса,

$$a_1 = \frac{F_1}{m}; \quad a_2 = \frac{F_2}{m} \quad \text{ва} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{F_1}{F_2} \qquad (62.3)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламадан нуқтанинг тезланиши кучларга тўғри пропорционал эканлиги яққол кўриниб турибди. Берилган куч таъсирида олинадиган тезланиш массага тескари пропорционал бўлади, яъни масса орттирилса, нуқта (жисм) нинг тезланиши камаяди. Массанинг миқдорини (62.1) дан, $m = \frac{F}{a}$ орқали ҳисоблаш мумкин.

Маълумки, P оғирлик кучи таъсирида жисм g (эркин тушиш тезланиши) тезланиш олади, демак, (62.2) га асосан

$$P = m \cdot g^2. \qquad (62.4)$$

Ер сиртида $g = 9{,}8$ м/с^2 деб қабул қилинган. Агар жисм массаси $m = 1$ кг бўлса, бу жисмнинг оғирлиги

$$P = 1 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 = 9{,}8 \text{ Н}.$$

Маълумки, 1 кг-куч ёки қисқача 1 кг·к 9,8 Н га тенг, яъни

$$1 \text{ кгк} = 9{,}8 \text{ Н}.$$

Эркин тушиш тезланиши Ер сиртининг ҳамма жойида бир хил қийматга эга эмас. Демак, бир хил массадаги жисм Ер сиртининг ҳар хил нуқталарида, ҳар хил оғирликка эга бўлади. Агар эркин тушиш тезланиши нолга тенг бўлса (гравитацион майдон бўлмаган жой), жисмнинг оғирлиги ҳам нолга тенг бўлади. Демак, нуқта ёки жисмда ҳамма вақт масса мавжуд, оғирлиги эса ҳамма вақт мавжуд бўлмаслиги мумкин экан.

Агар таъсир этувчи куч $F = 0$ бўлса, жисмнинг тезланиши $a = 0$ бўлиши турган гап. Аммо $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ эканлигини эсласак, $d\vec{v} = 0$ ёки бундан, $\vec{v} = \text{const}$ келиб чиқади. Бу $v = \text{const}$ эса Ньютоннинг биринчи ёки инерция қонунининг ўзгинасидир.

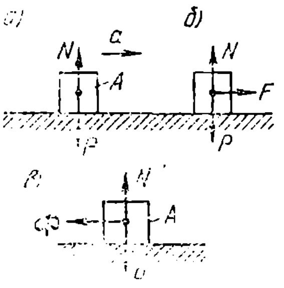
3. **Таъсир ва акс таъсир қонуни.** Ҳар қандай таъсирга тенг бўлган ва қарама-қарши йўналган акс таъсир мос келади. Агар бир жисм иккинчи жисмга бирон куч билан таъсир этса, иккинчи жисм шу вақтнинг ўзида биринчи жисмга худди ўшандай куч билан акс таъсир этади. Бу акс таъсир кучини F_{21}, таъсир кучини F_{12} деб олсак, учинчи қонунга асосан

$$F_{12} = -F_{21}. \qquad (62.5)$$

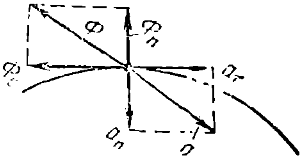
Акс таъсир этувчи F_{21} кучнинг пайдо бўлишига сабаб иккинчи жисмнинг инертлигидир, яъни иккинчи жисм ўзининг олдинги кинематик ҳолатини (инерциясини) сақламоқчи бўлади ва шунинг учун инерция кучи пайдо бўлади. Бу инерция кучи таъсир этувчи F_{12} кучга нисбатан тескари йўналганлиги учун (62.5) тengламанинг ўнг томонига минус ишора қўйилади.

Таъсир ва акс таъсир кучлари бир-бирини мувозанатламайди, чунки бу кучлар бошқа-бошқа жисмларга қўйилган. Ҳақиқатан ҳам, таъсир этувчи F_{12} куч иккинчи жисмга, акс таъсир этувчи куч F_{21} биринчи жисмга қўйилганлиги учун, бу кучларни қўшиб бўлмайди ва шунинг учун F_{12} ва F_{21} куч бир-бирини мувозанатламайди.

Агар D жисмга F куч таъсир этиб, a тезланиш ҳосил қилса (186- расм), D жисм инерцияси туфайли $\Phi = ma$ инерция кучи ҳосил бўлади. Агар F куч ип орқали жисмга a тезланиш берса (186- a расм) ва бу куч $F = m \cdot a$ (186- $б$ расм) га тенг бўлса, инерция кучи $\Phi = -m \cdot a$ бўлган ҳолда ип A га қўйилган (186- в расм) бўлади.



186- расм.



187- расм.

Шундай қилиб, инерция кучи бу реал куч бўлиб, бу куч нуқтанинг (ёки жисм) тезлигини ўзгартиришга (инерциясига) кўрсатадиган акс таъсир кучидир ва бу куч тезланиш берувчи жисмга қўйилган бўлади.

Акс таъсир этувчи куч нуқта (жисм) инертлиги туфайли пайдо бўлганлиги ва инертлик материянинг энг умумий хоссаларидан бири бўлганлиги учун таъсир ва акс таъсир қонуни табиатнинг энг умумий қонунларидан биридир. Бу қонун ҳар қандай ҳодисаларда намоён бўлади.

Агар нуқта (жисм) эгри чизиқли ҳаракат қилаётган бўлса (187- расм), инерция кучи Ф ташкил этувчи уринма Φ_τ ва нормал Φ_n кучларга ажралади, яъни

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n \qquad (62.6)$$

$$\Phi_n = ma_n = \frac{mv^2}{\rho} \qquad (62.7)$$

$$\Phi_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot \frac{dv}{d\tau}. \qquad (62.8)$$

Бу ерда $\frac{v^2}{\rho} = a_n$, $\frac{dv}{d\tau} = a_\tau$ эканлиги кинематикадан маълум (ρ — траекториянинг эгрилик радиуси).

Таъсир этувчи F_{12} ва акс таъсир этувчи F_{21} куч мос равишда m_1a_1 ва m_2a_2 орқали ифодаланганлиги учун

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (62.9)$$

келиб чиқади. Бу ифодадан массалар нисбати тезланишлар нисбатига тескари муносабатда эканлиги келиб чиқади, яъни массаси катта бўлган нуқта (жисм) тезланиши кичик ва аксинча, массаси кичик бўлган нуқта (жисм) нинг тезланиши катта бўлади, деган хулоса келиб чиқади. Ана шунинг учун ёш бола билан катта киши бир-бирига модуллари тенг бўлган куч билан таъсир этишига қарамасдан катта кишининг тезланиши кичик бўлади. Катта киши боланинг таъсиридан деярли жойидан қўзғалмайди, ҳолбуки, айни шу вақтда, ёш бола ўшандай куч таъсири остида катта тезланиш олади (жойидан қўзғалиб тез ҳаракат қилади). Бунга сабаб ёш боланинг массаси катта кишининг массасига нисбатан анча кичик эканлигидир ва шунинг учун тезланиши (62.9) тенгламага мувофиқ, анча катта бўлади. Қуёшнинг массаси Ерга нисбатан жуда ҳам катта бўлганлиги учун Ернинг таъсир кучидан Қуёш оладиган тезланиш ниҳоятда кичик, аммо Қуёшнинг таъсир кучидан Ер оладиган тезланиш анча каттадир.

4. **Кучлар таъсирларининг мустақиллик қонунига** асосан нуқта (жисм) га бир вақтнинг ўзида бир неча куч таъсир этса, бу кучлар таъсирларининг натижаси мустақил равишда бўлади. Агар буни батафсилроқ тушунтирсак, яъни нуқтанинг массаси m бўлиб, бу нуқтага F_1; F_2 . . . F_n куч таъсир этади. Нуқта $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ . . . $\vec{a}_n$ тезланишларга эришиши мумкин бўлса, шу нуқтанинг ҳар бир куч таъсирида оладиган тезланиши бошқа кучларга боғлиқ эмас. Бошқача қилиб айтганда, a_1 тезланиш вектори фақат F_1 куч ва нуқтанинг массаси m га боғлиқ бўлади, a_2 фақат

F_2 ва m га ва ҳоказо. Нуқтанинг олган тўлиқ тезланиши a ташкил этувчи a_1; a_2; a_n тезланишларнинг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \ldots + \frac{\vec{F}_n}{m} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \quad (62.10)$$

иккинчи томондан $\vec{a} = \frac{F}{m}$ эканлигини ҳисобга олсак, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \vec{F}_n$ келиб чиқишини пайқашимиз равшандир.

Динамика қонунлари, албатта, маълум бир саноқ системаси ёки ҳисоблаш системасига нисбатан олинади. Бу қонунлар инерциал ҳисоблаш системаларига нисбатан аниқ бажарилади. Агар системанинг тезлик вектори $\vec{v}$=coconst бўлса, бундай системаларга инерциал ҳисоблаш системалари деб айтилади. Бундай системаларда v тезлик нолга тенг бўлади ёки бирон сонга тенг бўлади. Агар $v=0$ бўлса, система тинч ҳолатда бўлади ва v тезликни бирон сонга тенг десак, бу сон 1,2, ..., n чексиз бўлиши мумкин. Бу ҳолда система тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлади. Демак, тинч ёки тўғри чизиқли текис ҳаракатда бўлган системаларга, яъни тезлик вектори доимий бўлган системаларга инерциал ҳисоблаш системалари деб айтилади.

Инерциал ҳисоблаш системалари чексиз кўп бўлиши мумкин ва исталган бундай системалар учун динамика қонунлари аниқ бажарилади. Амалда учрайдиган масалаларни ечиш учун Ерни инерциал ҳисоблаш системаси деб қабул қилинади. Астрономик масалаларни ечиш учун Қуёшни инерциал системанинг маркази деб қабул қилинади. Ҳақиқатда эса Ерни ҳам, Қуёшни ҳам инерциал ҳисоблаш системасининг маркази деб олиш тўғри эмас, чунки Ер ҳам, Қуёш ҳам эгри чизиқли ҳаракатда бўлганлиги учун инерция кучлари мавжуд бўлади. Демак, бу системаларнинг тезланиши бор ва системанинг тезлик вектори доимий эмас. Шунинг учун Ер ҳам, Қуёш ҳам инерциал ҳисоблаш системалари бўла олмайди. Лекин амалда кўрилаётган техник масалаларни Ер ва Қуёшни инерциал система деб ҳисоблаб ечишда бўладиган хатоликлар ниҳоятда (иккинчи ва учинчи тартибли хатоликлар) кичик бўлади.

63-§. Нуқта динамикасининг асосий тенгламаси ёки нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Олдин айтганимиздек, Ньютоннинг иккинчи қонуни нуқта динамикасининг асосий тенгламаси дейилади. Бу тенгламани

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{63.1}$$

шаклда ёки $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = F \tag{63.2}$$

кўринишда ҳам ёзилади. (64.2) дан фойдаланиб, илгариланма ҳаракатда бўлган нуқтага доир ҳар қандай масалани ечиш мумкин. Маълумки, нуқтанинг тезланиши

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{63.3}$$

кўринишда ҳам ёзилади, шунга асосланиб, (63.1) тенгламани қуйидагича тасвирланади:

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{63.4}$$

Албатта, (63.1)—(63.4) тенгламаларда нуқтага таъсир этувчи кучларнинг тенг таъсир этувчисини F деб қабул қилиш лозим, яъни агар нуқтага $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ . . . $\vec{F}_n$ кучлар таъсир этаётган бўлса, куч F қуйидаги формуладан топилади:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ \dots\ \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \cdot \vec{F}_i \tag{63.5}$$

(63.1)—(63.4) тенгламалар нуқта динамикасининг асосий тенгламалари ёки нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари дейилади. Математикадан маълумки, тенгламаларнинг ҳар биттасининг чексиз кўп ечими бўлиши мумкин. Ечимлар аниқ масалани тўлиқ ифодалаши учун бир қийматлилик шартларини қаноатлантириши лозим. Бир қийматлилик шартлари икки қисмдан иборат: 1) бошланғич шартлар; 2) чегаравий шартлар.

Бошланғич шарт деганда, вақт $t = 0$ бўлганда дифференциал тенгламада изланадиган катталикнинг (тезлик ёки масофа) бошланғич қиймати нимага тенг эканлиги тушунилади. Чегаравий шартлар деганда, нуқта фазонинг маълум ҳажмида ҳаракат қилганида шу ҳажмни чегаралаётган сиртда ёки ҳажмнинг маълум жойларида изланаётган катталикнинг қиймати нимага тенг эканлиги тушунилади.

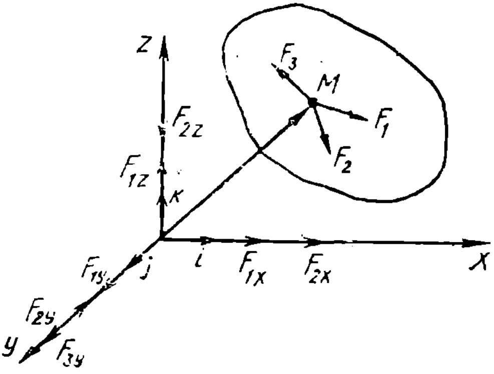
Агар дифференциал тенгламанинг топилган ечими бирқийматлилик шартини тўлиқ қаноатлантирса, шундагина ечим ягона ечим бўлади ва кўриладиган масалани тўлиқ ифодалаш мумкин.

Маълумки, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (63.4) иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламадир. Шу сабабли, бу тенгламанинг ечимини аниқлаш учун тенгламаларни икки марта интеграллаш лозим бўлади. Ҳар бир марта интегралланганда интеграллаш доимийларини топиш учун бирқийматлилик шартларидан фойдаланадилар.

64-§. Эркин нуқта ҳаракати дифференциал тенгламаларининг проекцияларда ифодаланиши

63-§ да кўрилган эркин нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини координата ўқларидаги проекцияларда ифодалайлик.

1. Декарт координата системасида нуқтага таъсир этувчи куч F_1, F_2, . . . F_n бўлсин. Бу кучнинг (188-расм) X, Y,



188-расм.

Z ўқлардаги проекциялари F_x, F_y, F_z, нуқтанинг координаталари x, y, z ва нуқта тезланишининг ўқлардаги проекциялари a_x, a_y, a_z бўлсин. Агар радиус-вектор координата ўқлари билан маълум бурчакларни ташкил этса, қуйидаги ифодаларни ёзишимиз мумкин:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos(\widehat{\vec{r},\vec{i}}),\\ y &= r\cos(\widehat{\vec{r},\vec{j}}),\\ Z &= r\cos(\widehat{\vec{r},\vec{k}}) \end{aligned}\right\} \qquad (64.1)$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})\\ a_y &= a\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}),\\ a_z &= a\cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}}) \end{aligned}\right\} \qquad (64.2)$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F\cos(\widehat{\vec{F},\vec{i}})\\ F_y &= F\cos(\widehat{\vec{F},\vec{j}})\\ F_z &= F\cdot\cos(\widehat{\vec{F},\vec{k}}) \end{aligned}\right\} \qquad (64.3)$$

Энди нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини проекцияларда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{array}{lll} ma_{1x} = F_{1x}, & ma_{1y} = F_{1y}, & ma_{1z} = F_{1z}\\ ma_{2x} = F_{2x}, & ma_{2y} = F_{2y}, & ma_{2z} = F_{2z}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ ma_{nx} = F_{nx}, & ma_{ny} = F_{ny}; & ma_{nz} = F_{nz} \end{array}\right\} \qquad (64.4)$$

Ҳар бир X, Y, Z ўқлар бўйлаб (64.4) тенгламаларни қўшамиз:

$$\left.\begin{aligned} m(\vec{a}_{1x}+\vec{a}_{2x}+\ldots+\vec{a}_{nx}) &= \vec{F}_{1x}+\vec{F}_{2x}+\ldots+\vec{F}_{nx}\\ m(\vec{a}_{1y}+\vec{a}_{2y}+\ldots+\vec{a}_{ny}) &= \vec{F}_{1y}+\vec{F}_{2y}+\ldots+\vec{F}_{ny}\\ m(\vec{a}_{1z}+\vec{a}_{2z}+\ldots+a_{nz}) &= \vec{F}_{1z}+F_{2z}+\ldots+F_{nz} \end{aligned}\right\} \qquad (64.5)$$

Чап ва ўнг томонлардаги тезланиш ва куч проекцияларининг йиғиндисини мос равишда a_x, a_y, a_z ва F_x, F_y, F_z деб белгиласак,

$$\left.\begin{aligned} m\vec{a}_x &= \vec{F}_x\\ m\vec{a}_y &= \vec{F}_y\\ ma_z &= \vec{F}_z \end{aligned}\right\} \qquad (64.6)$$

тенглама ҳосил бўлади. (64.4) тенгламада

$$\left.\begin{aligned}\vec{a}_x &= \vec{a}_{1x} + \vec{a}_{2x} + \dots + \vec{a}_{nx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ix}\\ \vec{a}_y &= \vec{a}_{1y} + \vec{a}_{2y} + \dots + \vec{a}_{ny} = \sum_{i=1}^{n} a_{iy}\\ \vec{a}_z &= \vec{a}_{1z} + \vec{a}_{2z} + \dots + a_{nz} = \sum_{i=1}^{n} a_{iz}\end{aligned}\right\} \qquad (64.7)$$

ва

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_x &= \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \dots + \vec{F}_{nx} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix}\\ \vec{F}_y &= \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \dots + \vec{F}_{ny} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy}\\ \vec{F}_z &= \vec{F}_{1z} + F_{2z} + \dots + \vec{F}_{nz} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz}\end{aligned}\right\} \qquad (64.8)$$

Проекцияларда ифодаланган (64.6) яна қуйидаги кўринишларда ҳам ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned}m\,\frac{dv_x}{dt} &= F_x.\\ m\,\frac{dv_y}{dt} &= F_y\\ m\,\frac{dv_z}{dt} &= F_z\end{aligned}\right\} \qquad (64.9)$$

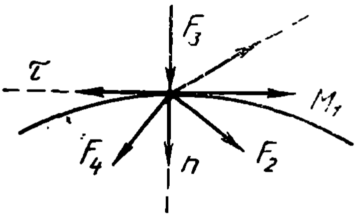
ва

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x} &= F_x\\ m\ddot{y} &= F_y\\ m\ddot{z} &= F_z\end{aligned}\right\} \qquad (64.10)$$

Ҳосил қилинган (64.6), (64.9), (64.10) тенгламалар нуқта ҳаракатининг декарт ўқларидаги проекцияларда ифодаланган дифференциал тенгламалари дейилади.

2. Табиий ўқларда нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасини қуйидагича ифодалаймиз. Фараз қилайлик, нуқтага F_1, F_2, . . . , F_n куч таъсир этсин (189-расм). Бу кучларнинг табиий ўқлардаги проекцияларининг

йиғиндиси, яъни тангенциал, бош нормал ва бинормал ўқлардаги проекцияларининг йиғиндиси $\sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\vec{F}_{i1}\ \vec{\tau})$; $\sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\vec{F}_i \vec{n})$ ва $\sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\vec{F}_i \vec{b})$ бўлсин, агар тезланиш проекцияларининг йиғиндисини a_τ, a_n, a_b деб белгиласак, нуқта ҳаракатининг табиий ўқлардаги дифференциал тенгламалари қуйидагича ёзилади:



189- расм.

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= F_\tau, \\ ma_n &= F_n, \\ ma_b &= F_b. \end{aligned}\right\} \qquad (64.11)$$

Охирги тенгламада

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= a\cos(\vec{a},\ \vec{\tau}), \\ a_n &= a\cos(\vec{a},\ \vec{n}), \\ a_b &= a\cos(\vec{a},\ \vec{b}) \end{aligned}\right\} \qquad (64.12)$$

ва

$$\begin{aligned} F_\tau &= \sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}\cos(\vec{F}_i,\ \vec{\tau}), \\ F_n &= \sum_{i=1}^{n} F_{in}\cos(\vec{F}_i,\ \vec{n}), \\ F_b &= \sum_{i=1}^{n} F_{ib}\cos(\vec{F}_i,\ \vec{b}) \end{aligned} \qquad (64.13)$$

эканлигини эслатамиз. Бу тенгламаларда τ, n, b — табиий ўқларга ўтказилган бирлик векторлардир (orталар).

Кинематикадан маълумки, a_τ ва a_n қуйидаги формулалар билан топилар эди:

$$a_\tau = a\cos(\vec{a},\ \vec{\tau}) = \frac{d^2s}{dt^2}, \qquad (64.14)$$

$$a_n = a\cos(\vec{a}_1,\ \vec{n}) = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (64.15)$$

Бунда ρ — нуқта траекториясининг эгрилик радиуси. Агар охирги икки формулани (64.11) тенгламаларнинг биринчиси ва иккинчисига қўйсак,

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2s}{dt^2} &= F_\tau, \\ m\frac{v^2}{\rho} &= F_n \end{aligned}\right\} \qquad (64.16)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу тенгламалар нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасининг табиий ўқларда ифодаланишидир. (64.11) ифодадаги учинчи тенглама бинормал ўқидаги дифференциал тенгламанинг проекциясидир. Кинематикадан маълумки, нуқта тезланиши тегиб турувчи текисликда ётади (39- § га қаранг) ва шунинг учун, яъни тезланиш тегиб турувчи текисликда ётгани учун, тезланишнинг бинормал ўқидаги проекцияси нолга тенг,

$$a_b = a\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \qquad (64.17)$$

ва демак, шу b ўқдаги куч проекцияси ҳам нолга тенг бўлади:

$$F_b = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos(\vec{F}_i \vec{b}) = 0.$$

Шундай қилиб, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тибиий ўқларда (64.16) тенгламалар шаклида ифодаланади.

Агар нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли бўлса, бу ҳолда x, y, z ўқларининг биронтаси бўйлаб ёки τ, n ўқларининг биронтасига мос бўлиб қолади ва бундай тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қиладиган нуқтанинг дифференциал тенгламаси фақат биттагина бўлиб қолади: фақат x ёки фақат y, ёки фақат z ўқи бўйича ҳаракат қилади.

65- §. Нуқта динамикасининг икки асосий масаласи

Нуқтанинг ҳаракати вақтидаги динамика масаласини қуйидаги икки турдаги масала ҳолига келтирилади. Бу икки тур масала нуқта динамикасининг икки асосий масаласи деб аталади.

Биринчи масала. Берилган m массадаги нуқта

$r=r(t)$ қонун бўйича ҳаракат қилади. Шу нуқтага таъсир этувчи куч топилсин.

Ечиш усули. Нуқтага таъсир этувчи куч динамиканинг асосий тенгламаси бўлган (63.4) ифодага асосан

$$F = m\,\frac{d^2r}{dt^2} \qquad (65.1$$

формула ёрдамида ҳисобланади ёки шу формуланинг ўқлардаги проекциялари

$$F_x = m\,\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (65.2)$$

$$F_y = m\,\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad (65.3)$$

$$F_z = m\,\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (65.4)$$

орқали ҳисобланади. Аниқроқ қилиб айтганда, нуқтага таъсир этадиган кучни аниқлаш учун нуқтанинг ҳаракат қонуни $r = r(t)$ дан икки марта ҳосила олиб, нуқтанинг тезланиши $a = \frac{d^2r}{dt^2}$ топилади ва бу тезланишни нуқтанинг массаси m га кўпайтириб, нуқтага таъсир этадиган куч топилади.

Агар нуқтанинг ҳаракат қонуни координата ўқлари бўйлаб

$$x = x(t), \qquad (65.5)$$

$$y = y(t), \qquad (65.6)$$

$$z = z(t) \qquad (65.7)$$

шаклда берилган бўлса, бу тенгламалардан икки мартадан вақт бўйича ҳосила олиб, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ топилади ва топилган тезланиш проекциялари (65.2) — (65.4) формулаларга қўйилиб, F_x, F_y, F_z қийматлари ҳисобланади.

Куч проекциялари F_x, F_y, F_z қийматларга асосланиб, тўлиқ куч модули

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (65.8)$$

орқали ва F кучнинг йўналиши эса йўналтирувчи косинусларни ифодалайдиган қуйидаги тенгламалар орқали аниқланади:

$$\cos(\vec{F}, \widehat{\ \vec{i}}\,) = \frac{F_x}{F}; \cos(\vec{F}, \widehat{\ \vec{j}}\,) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}_i, \widehat{\ \vec{k}}\,) = \frac{F_z}{F},$$

Иккинчи масала. Массаси m бўлган нуқта F куч таъсирида ҳаракат қилиши ва бошланғич ҳамда чегаравий шартлар маълум бўлиб, шу нуқтанинг ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонунини аниқлаш лозим.

Ечиш усули. Нуқтанинг ҳаракат тенгламаси ёки ҳаракат қонунини топиш учун ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини икки марта интеграллаш лозим. Биринчи марта интеграллаш натижасида нуқтанинг тезлиги топилади. Бу тезликни топиш учун олдин ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини тезлик орқали ёзиб интегралланади. Охирги тенгламадан тезлик, агар куч ва масса вақт функцияси бўлса, қуйидагича ифодаланади:

$$v = \int_t \frac{F}{m}\,dt. \qquad (65.10)$$

Бу (65.10) формуладан F ва m лар берилган бўлса, v ни тезгина ҳисоблаш мумкин.

Нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш учун алгебраик тезликнинг $v = \frac{ds}{dt}$ эканлигини назарда тутиб, охирги ифодадан масофа (ҳаракат қонуни) топилади:

$$s = \int_t v\,dt. \qquad (65.11)$$

Ҳаракат қонунини (65.11) дан топиш учун (65.10) дан фойдаланиб топилган V тезликни (65.11) га қўйиб интегралланади.

Таъкидлаш лозимки, v тезлик ва s ҳаракат қонунини топганимизда, (65.10) ва (65.11) ифодаларни интегралланганда C_1 ва C_2 интеграллаш доимийларини аниқлаш лозим бўлади. Тезликни топганда битта интеграллаш доимийси C_1, ҳаракат қонунини топганда иккинчи интеграллаш доимийси C_2 ҳосил бўлади. C_1 ва C_2 интеграллаш доимийлари бошланғич ёки чегара шартларидан фойдаланиб топилади.

Агар нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари проекцияларда, яъни (64.9) ёки (64.10) шаклда берилган бўлса, бу ҳолда учта дифференциал тенгламанинг ҳар бирини икки мартадан интеграллаш лозим бўлади. Биринчи марта интеграллаганда v_x, v_y, v_z топилади ва бунда C_1, C_2, C_3 учта интеграллаш доимийси ҳосил бўлади. Иккинчи марта интегралланганда ўқлар бўйлаб ҳаракат қонунлари x, y, z топилади ва яна учта интеграллаш доимийси C_4, C_5, C_6 ҳосил бўлади. Бу интеграллаш доимийлари C_1, C_2, . . . , C_6 бошланғич ва чегара (бирқийматлилик шарти) шартига асосан топилади. Бошланғич шартларда t вақт нолга тенг бўлганда, нуқтанинг бошланғич вазиятини аниқлайдиган координата x_0, y_0, z_0 ва нуқтанинг бошланғич тезлигининг ўқлардаги проекциялари $v_{0x} = \dot{x}_0$, $v_{0y} = \dot{y}_0$ ва $v_{0z} = \dot{z}_0$ маълум бўлади, яъни $t = 0$ да

$$x = \dot{x}_0;\ y = \dot{y}_0;\ z = \dot{z}_0;\ v_x = \dot{x} = \dot{x}_0$$

$$v_y = \dot{y} = \dot{y}_0;\ v_z = \dot{z} = \dot{z}_0. \qquad (*)$$

Охирги (*) шаклда берилган ифодалар бошланғич шартлар дейилади. Бу бошланғич шартлардан фойдаланиб, C_1, C_2, ..., C_6 топилади ва булар (64.10) тенгламаларнинг умумий ечимларига қўйилгандан кейин нуқтанинг ҳаракат қонунлари қуйидаги кўринишларда ифодаланади:

$$x = f_1(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\quad \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \qquad (65.12)$$

$$y = f_2(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\quad \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \qquad (65.13)$$

$$z = f_3(t,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\quad \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \qquad (65.14)$$

(65.12) — (65.14) тенгламалар нуқтанинг ҳаракат қонунларидир. Кўриниб турибдики, бошланғич шарт берилганларига асосан ва нуқтага таъсир этувчи кучларнинг характерига қараб нуқтанинг ҳаракат қонуни ўзгаради.

Шундай қилиб, иккинчи масалани ечиш учун бошланғич шартлар маълум бўлиши керак ва бошланғич вақтдаги нуқтанинг вазияти (координаталари) ни аниқлаш ҳисоблашнинг боши деб қабул қилинади. Амалда кўп масалалар нуқта динамикасининг иккинчи масаласи шаклида учрайди. Айрим ҳолда нуқтанинг массаси m ва нуқтага таъсир этувчи куч F мураккаб вақт функцияси шаклида берилган бўладики, бу ҳолда, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тақрибий (қаторларга ёйиш йўли билан) интегралланади. Бу интеграллашни бажаришда ҳозирги замон электрон ҳисоблаш машиналаридан фойдаланилганда яхши иқтисодий самараларга эришилади.

66-§. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини интеграллаш

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини (63.1)—(63.4) ёки (64.9), (64.10) ва (64.16) кўринишда қўлланилиб, бу тенгламаларни бир неча ҳолларда интегралланишини кўрамиз.

Биринчи ҳол: нуқтага таъсир этадиган кучларнинг тенг таъсир этувчиси $F=0$ бўлсин. Бундай ҳолда (63.2) тенглама қуйидаги $m\frac{dv}{dt}=0$ шаклни олади. Бундан $m\neq 0$ бўлганлиги учун $dv=0$ ва

$$v=C_1=\text{const} \qquad (66.1)$$

бўлиб қолади.

Бу ерда C_1 ни бошланғич шартдан фойдаланиб топамиз: $t=0$ бўлганда,

$$v=v_0 \qquad (66.2)$$

бўлса, (66.2) ни (66.1) га қўйсак,

$$C_1=v_0 \qquad (66.3)$$

ҳосил бўлади ва ниҳоят, агар (66.3) ни (66.1) га қўйсак,

$$\vec{v}=\vec{v}_0=\text{const} \qquad (66.4)$$

ҳосил бўлади. Охирги ифодадан, агар нуқтага таъсир этувчи куч $F=0$ бўлса, нуқта ўзининг тезлик векторини ўзгартирмайди, деган хулоса келиб чиқади. Нуқта тезлигининг ўзгармаслиги деганда, нуқта ёки тинч, ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатини сақлайди, деган хулосага олиб келади. Бу хулоса, яъни $\vec{v}=\text{const}$ эканлиги, Ньютоннинг биринчи қонунининг ўзгинаси эканлигини ўқувчи англаган бўлса керак.

Энди нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш учун $v=\frac{ds}{dt}$ ифодани (66.4) га қўямиз, унда $\frac{ds}{dt}=v$ ҳосил бўлади. Бундан s ни топамиз:

$$s=\int v_0\,dt=v_0t+C_2. \qquad (66.5)$$

C_2 интеграллаш доимийсини бошланғич шартдан фойдаланиб топамиз. Бу шарт $t=0$;

$$s=s_0=0 \qquad (66.6)$$

ифодадан иборат бўлсин. Бу шартни (66.5) га қўямиз:

$$0 = v_0 \cdot 0 + C_2,$$

бунда $C_2=0$.

C_2 нинг қийматини (66.5) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$s = v_0 t. \tag{66.8}$$

Охирги тенглама тўғри чизиқли текис ҳаракат учун йўл формуласидир. Демак, агар нуқтага куч таъсир этмаса, бу нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат қилади.

Иккинчи ҳол: нуқтага таъсир этадиган куч $F = \text{const}$ ва $m = \text{const}$ бўлса, яъни нуқта доимий куч таъсирида бўлсин. Бу ҳолда (63.2) тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$m\frac{dv}{dt} = F. \tag{66.9}$$

Бундан

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = a = \text{const}. \tag{66.10}$$

(66.10) дан dv ни топамиз: $dv = a\,dt$ ёки

$$v = \int a\,dt = at + C_3. \tag{66.11}$$

C_3 ни бошланғич шарт

$$t = 0; \quad v = v_0 \tag{66.12}$$

дан фойдаланиб топамиз. Агар (66.12) ни (66.11) га қўйсак:

$$v_0 = v_0 \cdot 0 + C_3; \quad C_3 = v_0.$$

c_3 ни (66.11) га қўямиз:

$$v = v_0 + a \cdot t. \tag{66.14}$$

Бу (66.14) тенглама нуқтанинг оний тезлигини топиш формуласидир. Бу формула текис тезланувчан ҳаракат учун тезлик формуласидир. Ҳаракат қонунини топиш учун $v = \frac{dS}{dt}$ дан фойдаланамиз:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a \cdot t,$$

бундан

$$s = \int v_0\,dt + \int at\,dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C_4. \tag{66.15}$$

Бошланғич шартни

$$t = 0; \; s = 0 \tag{66.16}$$

(66.15) га қўйиб, C_4 ни топамиз:

$$C_4 = 0. \tag{66.17}$$

Агар C_4 ни (66.15) га қўйсак,

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{66.18}$$

ҳосил бўлади. (66.18) ифода текис тезланувчан ҳаракат учун йўл формуласидир.

Шундай қилиб, нуқта доимий куч таъсирида текис тезланувчан ҳаракат қилар экан ва бундай ҳаракат учун нуқтанинг тезланиши $a = \text{const}$ бўлади. Биз (66.14) ва (66.18) формулаларни келтириб чиқарганимизда куч $F = \text{const}$ деб олган эдик, шу билан F кучнинг ишораси мусбат $F > 0$ деб қабул қилган эдик. Агар $F < 0$, яъни кучнинг ишораси манфий бўлса, (66.14) ва (66.18) формуланинг ўнг томонидаги мусбат «+» ишоранинг жойига манфий «—» ишора бўлади. Демак, умумий ҳолда, кучнинг модули доимий бўлган ҳолда, тезлик ва йўл формулалари

$$v = v_0 \pm at, \tag{66.19}$$

$$s = v_0 \pm \frac{at^2}{2} \tag{66.20}$$

кўринишида ёзилади. Агар ҳаракат текис тезланувчан бўлса, ишора мусбат, текис секинланувчан бўлса, манфий ишора олинади.

Учинчи ҳол:

$$F = -\alpha v \tag{66.21}$$

шаклда берилган бўлсин, яъни куч, қаршилик кучи бўлганлиги учун минус ишора билан ёзилади. Куч формуласида α қаршилик коэффициенти бўлиб, берилган муҳит учун доимий бўлади. v эса нуқтанинг тезлигидир. Бу ҳол учун (63.2) тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v. \tag{66.22}$$

Бу тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб $\left(\frac{dt}{v}\right.$ га иккала томонини кўпайтирамиз) интеграллаймиз:

$$m \frac{dv}{v} = -\alpha\, dt$$

ёки $\frac{dv}{v} = -\frac{a}{m}dt.$

агар $\frac{a}{m} = \alpha_0$ деб белгиласак:

$$\frac{dv}{v} = \alpha_0\, dt,$$

бундан $\int \frac{dv}{v} = -\int \alpha\, dt$

ва

$$\ln v = -\alpha_0 \cdot t + C_5. \qquad (66.23)$$

Бошланғич шарт,

$$t_0 = 0; \quad v = v_0 \qquad (66.24)$$

дан фойдаланиб, C_5 ни топамиз:

$$\ln v_0 = -\alpha_0 \cdot 0 + C_5; \quad C_5 = \ln v_0. \qquad (66.25)$$

Топилган C_5 нинг қийматини (66.23) га қўямиз:

$$\ln v = \ln v_0 - \alpha_0 \cdot t.$$

Бу ифодани ихчамлаймиз:

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\alpha_0 \cdot t.$$

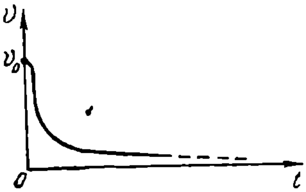
Охирги тенгламани потенцирлаймиз:

$$\frac{v}{v_0} = e^{-\alpha_0 \cdot t} = \exp(-\alpha_0 \cdot t). \qquad (66.26)$$

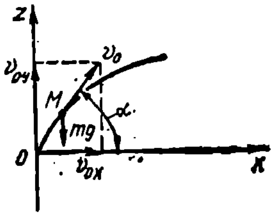
Нуқтанинг тезлиги (66.26) дан топилади:

$$v = v_0 \exp(-\alpha_0 t) = v_0 \cdot e^{-\alpha_0 \cdot t}. \qquad (66.27)$$

Демак, қаршилик кучининг таъсири остида нуқтанинг тезлиги (66.27) га асосан, экспоненциал қонун



190- расм.



191- расм.

бўйича камаяди. Бу камайиш 190-расмда кўрсатилганидек, ҳаракатнинг бошида тез бўлади. Кейин эса t вақт ўтиши билан аста-секин абсцисса ўқига яқинлашади. v тезликнинг ана шундай камайиши, яъни $e^{-\alpha_0 t}$ қонунига асосан бўладиган камайиш ($e = 2{,}7$ натурал логарифмнинг асоси) экспоненциал камайиш дейилади.

Энди нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш учун яна $v = ds/dt$ дан фойдаланамиз. Бунинг учун $\frac{ds}{dt} = v_0 e^{-\alpha_0 t}$ ифодадан s ни топамиз:

$$s = \int v_0 e^{-\alpha_0 t} dt = -\frac{v_0}{\alpha_0} e^{-\alpha_0 t} + C_6. \qquad (66.28)$$

Бошланғич шарт

$$t = 0; \quad S = 0. \qquad (66.29)$$

Агар (66.29) ни (66.28) га қўйсак,

$$C_6 = \frac{v_0}{\alpha_0} \qquad (66.30)$$

ҳосил бўлади. C_6 ни келтириб (66.23) га қўйсак,

$$s = \frac{v_0}{\alpha_0} (1 - e^{-\alpha_0 \cdot t}) \qquad (66.31)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифода нуқтанинг ҳаракат қонунидир. Бу ифодадан $t = 0$ бўлганда, $s = 0$ ва $t \to \infty$ да $s = \frac{v_0}{\alpha_0}$ ҳосил бўлади.

67-§. Горизонтга нисбатан қия отилган нуқтанинг ҳаракати

Фараз қиламиз, шундай масала берилган. Массаси m бўлган M моддий нуқта горизонтга нисбатан α бурчак остида ва v_0 бошланғич тезлик билан отилсин. Бу нуқтага фақат оғирлик кучи mg таъсир этсин. Ҳавонинг қаршилигини ҳисобга олмасдан нуқта тезлигининг ўзгариш қонунп ва нуқтанинг ҳаракат қонуни топилсин (191-расм).

Ечиш. Нуқта фақат XOZ текислигида ҳаракат қилади, деб қабул қиламиз. Бу ҳолда нуқта фақат X, Z ўқлари бўйлаб ҳаракат қилади ва (64.9) тенгламаларнинг фақат иккитасини қўллаш лозим бўлади, яъни

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x, \qquad (67.1)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = F_y. \qquad (67.2)$$

(67.1) на (67.2) тенглама нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари. Кейинги ишимиз шу тенгламаларни икки мартадан интеграллашдан иборатдир. Расмдан кўринадики,

$$F_x = 0, \qquad (67.3)$$

$$F_z = -mg. \qquad (67.4)$$

Олдин (67.1) ни ечамиз, бунинг учун (67.3) ни (67.1)га қўямиз:

$$m\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$m \neq 0$ бўлганлиги учун $dv_x = 0$ ва

$$v_x = C_1 \qquad (67.4')$$

ҳосил бўлади. Бошланғич шартга асосан

$$t = 0, \ v_x = v_0x = v_0 = \text{const}, \qquad (67.5)$$

$$v_z = v_{0z} = v_0 \sin\alpha \qquad (67.6)$$

ифода ҳосил бўлади. Агар (67.5) ни (67.4) га қўйсак, C_1 ни топиш мумкин:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha \qquad (67.7)$$

C_1 ни келтириб яна (67.4) га қўйиб,

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad (67.8)$$

ҳосил қилинади. Бу охирги ифода X ўқи бўйлаб нуқта тезлигининг проекцияси доимий қолишини кўрсатади. Энди

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad (67.9)$$

эканлигини эътиборга олиб, (67.8) дан x ни топамиз:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha.$$

Бундан

$$x = \int (v_0 \cos\alpha)\, dt = v_0 t \cos\alpha + C_2. \qquad (67.10)$$

Бошланғич шартга асосан қуйидагиларни ёзамиз:

$$t = 0;\quad x = x_0 = 0;\quad z = z_0 = 0. \qquad (67.11)$$

(67.10) га қўйиб, C_2 ни топамиз;

$$0 = v_0 \cdot 0 \cdot \cos\alpha + C_2 \quad C_2 = 0. \qquad (67.12)$$

Энди C_2 ни (67.10) га қўямиз:

$$x = v_0 t \cos\alpha. \qquad (67.13)$$

Бу ифода нуқтанинг X ўқи бўйича ҳаракат қонунидир. Кўриниб турибдики, нуқта X ўқи бўйлаб текис ҳаракат қилади ва тезлиги доимий бўлиб, (67.8) га асосан $v_6 \cos\alpha$ га тенг.

Нуқтанинг Z ўқи бўйлаб ҳаракат қонунини топиш учун (67.2) тенгламани интеграллаймиз. Интеграллашни бажариш мақсадида (67.4) ни (67.2) га қўямиз, бу ҳолда

$$m\frac{dv_z}{dz} = -mg \qquad (67.14)$$

ёки m га қисқартирилгандан сўнг

$$dv_z = -g dt. \quad v_z = -g\int dt = -gt + C_3 \qquad (67.15)$$

ҳосил бўлади. Бошланғич шарт (67.6) ни (67.15) га қўямиз ва C_3 ни топамиз:

$$v_0 \sin\alpha = 0 + C_3; \qquad C_3 = v_0 \sin\alpha. \qquad (67.16)$$

Ниҳоят, (67.16) ни (67.15) га қўйиб, v_z ни топамиз:

$$v_z = v_0 \sin\alpha - gt. \qquad (67.17)$$

Бу v_z нуқта тезлигининг Z ўқи бўйича проекциясининг ўзгариш қонунидир. Кўриниб турибдики, нуқтанинг Z ўқидаги тезлиги вақтга чизиқли боғланган. Энди Z ўқи бўйлаб ҳаракат қонунини топиш учун

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (67.18)$$

(67.18) ифодани (67.17) га қўямиз:

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt,$$

бундан $\quad dz = \int v_0 \sin\alpha\, dt - \int gtdt$

ёки

$$z = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} + C_4. \qquad (67.19)$$

Бошланғич шарт (67.11) ни (67.19) га қўйиб, C_4 ни топсак

$$C_4 = 0 \qquad (67.20)$$

ҳосил бўлади. Бу $C_4 = 0$ бўлган ҳолда (67.19) тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$z = v_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2}. \qquad (67.21)$$

(67.21) тенглама нуқтанинг Z ўқи бўйлаб ҳаракат қонунидир. Бу қонундан кўринадики, нуқта Z ўқи бўйлаб текис секинланувчан ҳаракат қилади.

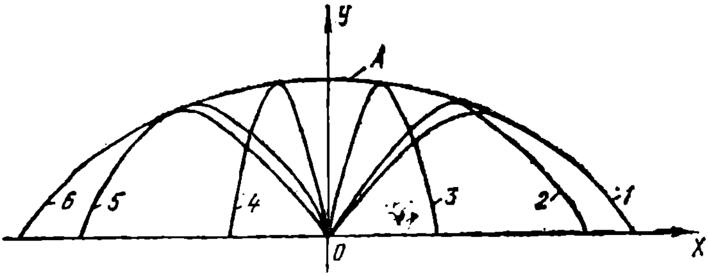
Энди нуқтанинг ҳаракат траекториясини аниқлаймиз. Кинематикадан маълумки, бунинг учун ҳаракат қонунларидан вақтни йўқотиш лозим. Бу ҳаракат қонунлари (67.13) ва (67.21) тенгламалардир. t вақтни (67.13) дан топамиз:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \qquad (67.22)$$

ва топилган (67.22) ифодани (67.21) га қўямиз ва

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \qquad (67.23)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (67.23) M ифода нуқта траекториясининг тенгламасидир. Тенглама параболани ифодалайди. Демак, M нуқтанинг траекторияси парабола бўлади (192-расм). Бу парабола α бурчакнинг маълум қийматида ҳосил бўлади. Агар α бурчак ўзгариб, α_1, α_2, α_3, . . . , α_n қийматларни олса, ҳар бир бурчак учун битта парабола ҳосил бўлади. Демак, бурчак агар n та қийматни олса, n та парабола, яъни параболалар дастаси: 1, 2, . . . , n парабола-



192- расм.

лар ҳосил бўлади. 192-расмда α бурчакнинг олтита қийматига мос келадиган олтита параболалар тасвирланган.

Энди шу параболаларнинг чўққиларининг координаталарини топайлик Бу чўққиларда z нинг қиймати максимум бўлади. Демак, чўққиларнинг координаталарини топиш учун (67.21) орқали топиладиган z функциянинг максимумини топиш лозим. Бунинг учун олдин z нинг экстремал қийматларини аниқлаймиз. Математикадан маълумки, бунинг учун $\frac{dt}{dz}$ ни топиб, топилган ифодани нолга тенглаштирилади, яъни (67.21) дан

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt = 0. \tag{67.24}$$

t вақтнинг шундай қийматини топамизки, $z = z_{max}$ бўлсин. Бунинг учун (67.24) ни t га нисбатан ечамиз:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{67.25}$$

(67.25) ифодадан (67.21) га қўйиб, z_{max} ни топамиз:

$$z_{max} = \frac{v_0 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{67.26}$$

Z_{max} изланаётган M нуқта чўққисини биринчи координатаси, иккинчи координатасини топиш учун (67.25) ни (67.13)га қўямиз ва бу ҳолда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}. \tag{67.27}$$

(67.26) ва (67.27) формула ёрдамида парабола чўққиларининг координаталари ҳисобланади. Бу чўққиларининг координаталари нуқтанинг v_0 бошланғич тезлиги ва α бурчакка боғлиқлиги охирги формулалардан яққол кўринади. Топилган (67.26) формула парабола чўққисининг баландлигини ҳисоблашга имкон беради. Демак, бу формулани берилган v_0 ва α учун нуқтанинг энг юқори баландликка кўтарилиш формуласи деб ҳам айтиш мумкин.

Нуқтанинг энг узоққа бориш масофасини топиш учун (67.27) ифодани икки марта кўпайтириб олиш керак, чунки нуқта кўтарилганда X масофани ва яна тушганда X масофани, жами $L=2x$ масофани ўтади. Ана шу мулоҳазаларни ҳисобга олиб, кўтарилиш баландлигини H, нуқтанинг юриш узоқлигини L деб белгиласак, H ва L катталиклар учун қуйидагиларни ёзишга ҳақлимиз:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \tag{67.28}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \tag{67.29}$$

Кўринадики, H ва L катталиклар α бурчакка боғлиқ, агар $\alpha = 90^\circ$ бўлса,

$$H = H_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \tag{67.30}$$

бўлади, агар $\alpha = 45^\circ$ бўлса, $\sin(2 \cdot 45)^\circ = 1$ бўлганлиги учун

$$L = L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \tag{67.31}$$

ифода ҳосил бўлади. Демак, тик отилган нуқта ($\alpha = 90^\circ$) энг юқорига ва $\alpha = 45^\circ$ бурчак остида отилган нуқта энг узоққа боради.

Агар (67.31) ни (67.30) нинг чап ва ўнг томонларига бўлсак,

$$L_{\max} = 2H_{\max} \tag{67.32}$$

эканлигини кўрамиз, яъни нуқтанинг энг узоққа бориш масофаси энг юқорига кўтарилиш баландлигидан икки марта катта бўлар экан.

Кўрсатилган параболалар дастаси (192-расмга қаранг) бир неча ажойиб хусусиятларга эга. Параболаларнинг чўққиларини туташтирувчи A чизиқ ҳам парабола эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ифодани (67.23) га қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \tag{67.33}$$

Энди z функцияни $\operatorname{tg} \alpha$ га нисбатан экстремумга текширамиз:

$$\frac{dz}{d(\operatorname{tg}\alpha)} = x - \frac{gx^2}{v_0^2}\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

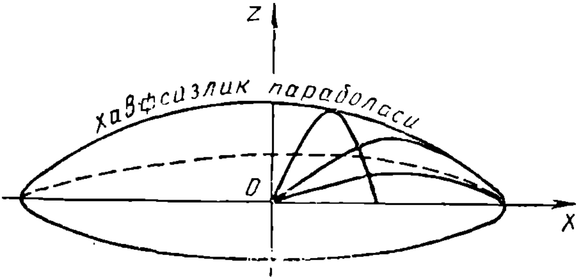
бундан

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gx}\cdot \qquad (67.34)$$

Топилган (67.34) ни (67.33) га қўйсак,

$$z = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^2}{g^2x^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\cdot \qquad (67.35)$$

(67.35) ифода ҳам параболанинг тенгламасидир. Демак, параболаларнинг чўққиларини бирлаштирувчи чизиқ ҳам парабола бўлар экан. Бу *A* чизиқ хавфли зонани хавфсиз зонадан ажратади, яъни шу чизиқ остида нуқта келиб тушиши мумкин, бу *A* чизиқдан ташқарида нуқта ҳаракат қилолмайди. Агар *M* нуқтанинг тезлиги v_0 ва α бурчаги ZOX текислигида эмас, бошқа текисликларда ҳам жойлашган бўлса, бу ҳолда нуқта ҳар бир текисликда биттадан хавфсизлик параболасини



193- расм.

ҳосил қилади ва бу хавфсизлик параболаларининг геометрик ўрни параболоид сиртини (193- расм) ҳосил қилади. Бу параболоид сирти *A* хавфсизлик параболасини *Z* ўқи атрофида айлантирганда ҳосил бўлган сиртдир. Бу параболоид сирти (тескари қўйилган қозон сиртига ўхшайди) ичида нуқта ҳаракат қилади, сиртдан ташқарида эса нуқтанинг бўлиш эҳтимоли нолга тенг (яъни ташқарида нуқта ҳаракат қилмайди).

Параболаларнинг чўққиларини ифодалайдиган нуқталарнинг геометрик ўрни эллипсни ташкил этишини кўрсатамиз. Бунинг учун $\frac{v_0^2}{2g} = h$ деб белгилаб, (67.26) ва (67.27) тенгламаларни қуйидагича ёзамиз:

$$x = h \sin 2\alpha, \tag{67.36}$$

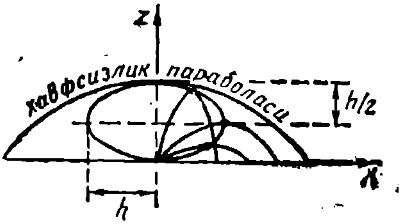
$$z = \sin^2\alpha = -\frac{h}{2}(1 - \cos 2\alpha), \tag{67.37}$$

чунки $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Охирги тенгламалардан α ни йўқотсак,

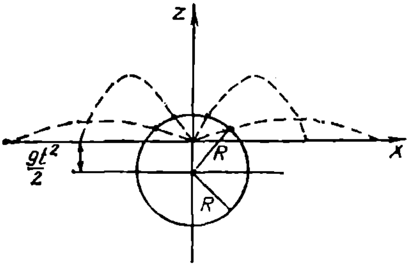
$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} = 1 \tag{67.38}$$

ҳосил бўлади. Бу (67.38) ифода эллипснинг тенгламасидир. Демак, параболалар чўққиларининг геометрик ўрни (биронта текисликка нисбатан) эллипсни ташкил этади 194-расм). Бу эллипснинг катта ярим ўқи h га ва кичик ярим ўқи $\frac{h}{2}$ га тенг. Эллипс марказининг координаталари: $x = 0$, $z = \frac{h}{2}$.



194- расм.

Агар O нуқтадан бир хил бошланғич тезлик билан ҳар хил бурчак остида бир вақтнинг ўзида бир неча моддий нуқталар отилса, исталган вақтда бу нуқталар радиуси $R = v_0 \cdot t$ бўлган айлана устида (195-расм) бўлади.



195- расм.

Ҳақиқатан ҳам, нуқталар айлананинг устида бўлишини исботлаш учун (67.13) ва (67.21) параметрик тенгламалардан фойдаланамиз:

(67.13) дан $v_0 \cos\alpha = \frac{x}{t}$.

(67.21) дан $v_0 \sin\alpha = \frac{z + \frac{gt^2}{2}}{t}$.

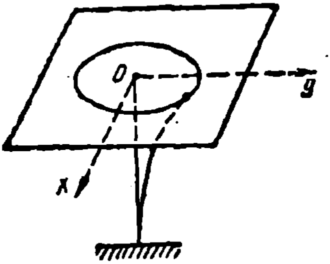
Охирги тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини квадратга кўтариб, қўшамиз ва

$$v_0^2 t^2 = x^2 + \left(z + \frac{gt^2}{2}\right)^2 \tag{67.39}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Тенглама радиуси $R = v_0 t$ ва маркази $z = \frac{gt^2}{2}$ нуқтада бўлиб, Z ўқи устида ётган айлананинг тенгламасидир.

Шундай қилиб, биз горизонтга нисбатан қия отилган нуқта ҳаракатини ҳаво қаршилигини ҳисобга олмасдан кўриб чиққанимизда нуқтанинг траекторияси симметрик параболалардан иборат эканлигини кўрдик. Ҳақиқатда эса, ҳаво қаршилиги бор ва нуқта эмас, реал жисм (масалан, снаряд ёки ракета) ҳаракат қилади ва бу жисмнинг траекторияси баллистик траекторияларни ҳосил қилади.

47-мисол (26.37). Массаси m бўлган шарча вертикал, эластик ва охири маҳкамланган стержень учига маҳкамланган. Стерженнинг кичик бурчакка оғишига сабаб унинг учидаги шарча, оғирлик марказининг ҳаракати (XOY текислигида) дир, деб ҳисоблаш мумкин.



196-расм.

Агар шарчанинг мувозанат вазиятидан оғгандаги ҳаракат қонуни $x = a\cos kt$, $y = b\sin kt$ тенглама билан ифодаланади деб ҳисоблаш мумкин бўлса, эгилган эластик стерженнинг шарчага таъсир этадиган кучининг ўзгариш қонуни топилсин (196-расм), бунда a, b ва k — доимий катталиклар.

Ечиш. Шарчанинг ҳаракати масала шартига асосан XOY текислигида бўлсин. Бу шарчага таъсир этадиган кучни аниқлаш динамиканинг биринчи масаласига айланади. Куч (65.8) га асосан топилади:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,. \qquad (1)$$

F_x ва F_y қийматлари (65.2) ва (65.3) формуладан фойдаланиб топилади:

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \qquad (2)$$

$$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y}\,. \qquad (3)$$

Ҳаракат тенгламаларидан фойдаланиб, $\dot{x}$ ва $\ddot{x}$ ни топамиз:

$$\dot{x} = (a\cos kt)'_t = -ak\sin kt, \qquad (4)$$

$$\ddot{x} = (-ak\sin kt)'_t = -ak^2\cos kt = -k^2x. \qquad (5)$$

Энди $\dot{y}$ ва $\ddot{y}$ ни топамиз:

$$\dot{y} = (b\sin kt)'_t = bk\cos kt, \qquad (6)$$

$$\ddot{y} = (bk\cos kt)'_t = -bk^2\sin kt = -k^2y. \qquad (7)$$

Куч проекцияларини топиш учун (5) ва (7) ни мос равишда (2) ва (3) га қўйсак,

$$F_x = -mk^2x, \qquad (8)$$

$$F_y = -mk^2y \qquad (9)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз ва бу ифодаларни (1) га қўйиб,

$$F = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (10)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ эканлигини ҳисобга олсак, $F = mk^2 \cdot r$ келиб чиқади.

48-мисол. (27.7). Горизонт билан α бурчак ҳосил қилган қия текислик бўйлаб M нуқта кўтарилмоқда. Нуқтанинг бошланғич тезлиги $v_0 = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, ишқаланиш коэффициенти $f = 0{,}1$ ва $\alpha = 30°$.

Нуқта тўхтагунча қанча масофани босиб ўтади? Нуқта қанча вақт ҳаракат қилади?

Берилган:

$v_0 = 15\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$

$f = 0{,}1$

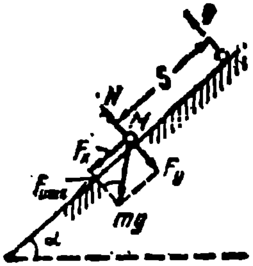
$\alpha = 30°$

---

s — ? t — ?

Ечиш. Бу динамиканинг иккинчи масаласидир. Шунинг учун динамиканинг асосий тенгламаси бўлган (63.2) ифодадан фойдаланиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = F. \qquad (1)$$



197- расм.

(1) дан кўринадики, F кучни топиш лозим. F кучни топиш учун нуқта ҳаракатини (197- расм) тасвирлаймиз. Нуқтага оғирлик кучи mg ва ишқаланиш кучи $F_{\text{ишқ.}}$ таъсир этади. Муҳит қаршилигини ҳисобга олмаймиз. Нуқта фақат қия текислик сиртида ҳаракат қила олади, шунинг учун нуқтанинг ҳаракати тўғри чизиқли бўлади. Бу тўғри чизиқ бўйлаб нуқтанинг юрадиган йўлини s деб белгилаб, шу s ни топамиз. Нуқтанинг оғирлик кучи mg бўлса, бу куч қия текисликка перпендикуляр бўлган F_y ва қия текисликка параллел бўлган F_x кучга ажралади. Расмдан

$$F_x = mg \sin \alpha, \qquad (2)$$

$$F_y = mg \cos \alpha \qquad (3)$$

эканлиги кўриниб турибди. M нуқтанинг ҳаракатланишига F_x ва $F_{\text{ишқ.}}$ куч қаршилик қилади. Шунинг учун тенг таъсир этувчи куч F_x куч билан $F_{\text{ишқ.}}$ кучларининг (бу кучлар бир-бирига параллел ва бир томонга йўналган) йиғиндисига тенг, яъни

$$F = -(F_x + F_{\text{ишқ.}}) \qquad (4)$$

Маълумки.

$$F_{\text{ишқ.}} = f N, \qquad (5)$$

бунда N — текисликнинг M нуқтага кўрсатадиган реакция кучидир, бу куч модули F_y га тенг:

$$N = F_y = mg \cos \alpha. \qquad (6)$$

Тенг таъсир этувчи F кучни топиш учун (2) ва (6) ни (4) га қўйиб,

$$F = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) \quad (7)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Агар (7) ни (1) га қўйсак,

$$m\frac{dv}{dt} = -mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) \quad (8)$$

ҳосил бўлади.

(8) ифодани m га қисқартириб, қуйидагича ёзамиз:

$$v = -\int g\sin\alpha + f\cos\alpha)\,dt = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,t + C.$$

C ни бошланғич шартдан фойдаланиб топамиз. Бу шарт қуйидагидан иборат:

$$t = 0;\ v = v_0;\ s = 0. \quad (10)$$

Агар (10) ни (9) га қўйсак, $C_1 = v_0$ бўлади ва

$$v = v_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,t \quad (11)$$

формула келиб чиқади. Бу ерда $v = \frac{ds}{dt}$ эканлигини назарда тутсак,

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,t$$

ёки

$$s = \int [v_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)]\,dt =$$

$$= v_0 t - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_2 \quad (12)$$

ҳосил бўлади. Бошланғич шарт (10) ни ҳисобга олсак, (12) дан $C_2 = 0$ келиб чиқади. Демак, нуқтанинг босиб ўтган йўлининг формуласи (ёки ҳаракат қонуни) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$s = v_0 t - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)\frac{t^2}{2}. \quad (13)$$

Шундай қилиб, нуқтанинг тезлиги (11) ва босиб ўтган йўли (13) формула билан ҳисобланади. Агар ҳаракат охирида нуқтанинг тезлиги $v = 0$ эканлигини назарда тутсак, (11) дан

$$t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 2{,}61 \text{ с} \quad (14)$$

ва (14) ни (13) га қўйганимизда

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 19{,}55 \text{ м}$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

49-мисол. (26.16). Оғирлиги 2 Н бўлган нуқтанинг ҳаракати $x = 3\cos 2\pi t$ см, $y = 4\sin\pi t_1$ м қонуни билан ифодаланади (t — секундларда берилган). Нуқтага таъсир қиладиган куч проекцияларини унинг координаталари орқали топинг.

Жавоб: $F_x = -0{,}08\,x$(Н), $F_y = -0{,}02\,y$(Н).

50-мисол. (27.2) Горизонт билан 30° бурчак ташкил этган қия текисликдан 2 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ бошланғич тезлик билан жисм пастга тушмоқда. Қанча вақтдан кейин шу жисм 9,6 м йўлни босиб ўтади?

Жавоб: 1,61 с.

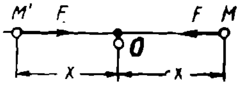
51-мисол. (27.31). Оғирлиги 10 Н бўлган жисм $P = 10(1-t)$ ўзгарувчан куч таъсири остида ҳаракат қилмоқда (t — секундларда, P — Ньютонларда берилган).

Агар жисмнинг бошланғич тезлиги 20 $\frac{\text{см}}{\text{с}}$ бўлиб, кучнинг йўналиши тезлик йўналиши билан бир хил бўлса, жисм неча секунддан сўнг тўхтайди? Жисм тўхтагунча қанча йўл босиб ўтади?

Жавоб: $t = 2{,}02$ с, $s = 692$ см.

68-§. Нуқтанинг тебранма ҳаракати

Агар M моддий нуқта ихтиёрий O марказ атрофида гоҳ бир томонга, гоҳ тескари томонга ҳаракатини даврий равишда такрорлаб турса, нуқтанинг бундай ҳаракати *тебранма ҳаракат* ёки *тебраниш* дейилади (198-расм). Нуқта O марказдан ўнг томонга $OM = x$ масофада силжиган бўлсин. Агар бу нуқтага F кучи таъсир этса, бу кучнинг таъсирида нуқта O марказга қараб ҳаракат қилади, O марказдан ўтади, инерция кучининг таъсирида чап томондаги M' четки вазиятга келади. Бу четки M' вазиятга келганда нуқтага O марказ томон йўналган яна F кучи таъсир этади. F кучининг таъсири остида нуқта M' вазиятдан, O марказдан ўтади, инерция кучининг таъсири остида ҳаракатини давом эттириб, M, четки вазиятига келади. Ўнг томондаги четки вазиятга келганда яна нуқтага F кучи таъсир этади.



198-расм.

Бу куч таъсири остида нуқта яна O марказдан ўтади, M вазиятига келади ва яна O марказдан ўтади, яна M' вазиятига келади. Шундай қилиб, нуқта O марказ атрофидаги ҳаракатини даврий равишда такрорлайди. Нуқтанинг ана шундай O марказ атрофида гоҳ чап, гоҳ ўнг томонга қараб ҳаракатланиб туриши *тебранма ҳаракат* дейилади. Бу тебраниш тикланувчи куч

$$F = -kx \qquad (68.1)$$

қонунига асосан (Гук қонуни) ҳосил бўлади. Бунда k — доимий пропорционаллик коэффициенти, x — нуқтанинг мувозанат вазиятидан четга чиқиш масофаси.

Формуладаги манфий ишора x силжиш билан F тикланувчи кучнинг йўналишлари бир-бирига қарама-қарши эканлигини кўрсатади.

Тебранишларнинг фазода тарқалиши *тўлқин* дейилади. Агар тебраниш тўлқиннинг тарқалиш йўналишида бўлса, *бўйлама тўлқин* деб айтилади. Тебраниш тўлқиннинг тарқалиш йўналишига перпендикуляр бўлса, *кўндаланг тўлқин* деб айтилади. Демак, тебраниш бўлмаса, тўлқин ҳам бўлмайди.

Соат маятнигининг ҳаракати, қисилган ёки чўзилган пружинанинг ўз ҳолига қўйилгандан кейинги ҳаракати тебранишга мисол бўлади. Электр тебранишлари туфайли электромагнит тўлқинлари, механик тебранишлар туфайли механик тўлқинлар: товуш тўлқинлари, денгиздаги сув тўлқинлари ҳосил бўлади. Машина ва механизмларнинг айрим қисмлари, инсон организмининг айрим аъзолари ҳам доим тебраниб туради.

Ҳозирги кунда тебранишлар натижасида ҳосил бўладиган тўлқинлардан халқ хўжалигининг деярли ҳамма соҳаларида самарали фойдаланилмоқда.

Моддий нуқтанинг тебраниши Гук қонунига асосан ёки бошқа қонун бўйича ўзгарадиган куч таъсирида ҳосил бўлиши мумкин. Шунга қараб нуқта тебранишини қуйидаги турларга ажратилади:

1. Эркин тебранишлар — фақат тикланувчи куч таъсирида бўладиган тебранишлар.
2. Тикланувчи куч ва ҳаракатга қаршилик қилувчи кучлар таъсирида бўладиган тебранишлар (сўнувчи тебранишлар).
3. Мажбурий тебранишлар — тикланувчи куч ҳамда даврий ўзгариб турувчи ва *ғалаёнлаштирувчи* куч деб айтиладиган кучлар таъсиридаги тебранишлар.

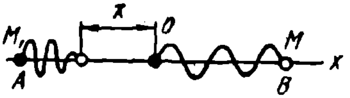
4. **Мажбурий тебранишлар** — тикланувчи куч, ғалаёнлаштирувчи куч ва ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи куч таъсирларида бўладиган тебранишлар.

69-§. Тикланувчи куч таъсирида нуқтанинг эркин тебраниши

Массаси m бўлган M моддий нуқта X ўқи бўйлаб чап ёки ўнг томонга тикланувчи

$$F = -kx \tag{69.1}$$

кучи таъсири остида тебрансин (199-расм).



199-расм.

Нуқтанинг мувозанат вазиятини O нуқта деб қабул қиламиз. Нуқта чап ва ўнг томонидан пружина билан маҳкамланган. Пружинанинг бир учи M нуқтага, иккинчи учи қўзғалмас A ва B нуқтага биркитилган. Бу пружинанинг мувозанат вазиятидан силжиши x ва пружинанинг эластиклик коэффициентини k деб белгилаймиз.

Тикланувчи F куч X ўқида ётганлиги учун (64.10) формулага асосан

$$F = m\ddot{x} \tag{69.2}$$

орқали топилади. (69.2) билан (69.1) ни бир-бирига тенглаштирами:

$$m\ddot{x} = -k\ddot{x} \tag{69.3}$$

ёки

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Агар

$$\frac{K}{m} = \omega^2 \tag{69.4}$$

деб белгиласак, (69.3) ифода қуйидаги шаклни олади:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{69.5}$$

(69.5) тенглама нуқтанинг эркин тебранишининг дифференциал тенгламаси бўлади. Нуқтанинг тебраниш қонунини аниқлаш учун (69.5) ни интеграллаш керак.

Бунинг учун бир жинсли, доимий коэффициентли, чизиқли, иккинчи тартибли бўлган (69.5) нинг характеристик тенгламасини тузамиз:

Янги ўзгарувчи

$$x = e^{zt} \qquad (69.6)$$

ни киритиб, $\dot{x}$ ва $\dddot{x}$ ни топамиз:

$$\dot{x} = ze^{zt} \quad (69.7) \qquad \ddot{x} = z^2e^{zt} \quad (69.8)$$

Энди $\ddot{x}$ ва $\ddot{x}$ учун топилган ифодаларни (69.5) га қўйиб

$$z^2 + \omega^2 = 0 \qquad (69.9)$$

бўлган характеристик тенгламани ҳосил қиламиз:

$$z_1 = i\omega, \quad z_2 = -i\omega.$$

($i = \sqrt{-1}$ эканлиги математикадан маълум) (69.10) ни (69.6) га қўйсак,

$$x = C_1\, e^{i\omega t} + C_2\, e^{-\omega t} \qquad (69.11)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда ихтиёрий доимий сон C_1 ва C_2 бошланғич шартга асосан топилади. Бошланғич шарт қуйидагидан иборат:

$$t = 0; \quad x = x_0; \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \qquad (69.12)$$

Агар (69.11) дан x ни топсак,

$$\dot{x} = i\omega C_1\, e^{i\omega t} - i\, C_2 \omega e^{-i\omega t} \qquad (69.13)$$

ҳосил бўлади. (69.12) ни (69.11) ва (69.13) га қўйиб C_1 ва C_2 ни топамиз:

$$x_0 = C_1 + C_2.$$

$$\dot{x}_0 = i\omega\,(C_1 - C_2)$$

бу тенгламалардан қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$C_1 + C_2 = x_0$$

$$C_1 - C_2 = \frac{\dot{x}_0}{i\omega} = \frac{v_0}{i\omega},$$

охирги иккала тенгламани қўшсак,

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{\omega_0}{i\omega}\right), \qquad (69.16)$$

айирсак,

$$C_2 = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{i\omega}\right) \qquad (69.17)$$

ҳосил бўлади.

Нуқтанинг тебраниш қонуни бўлган (69. 11) тенгламани Эйлернинг қуйидаги

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t \qquad (69.18)$$

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t \qquad (69.19)$$

формулаларидан фойдаланиб, текшириш учун қулай ҳолатга келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (69. 18) ва (69. 19) ни (69. 11) га қўямиз:

$$x = (C_1 + C_2)\cos\omega t + i\,(C_1 - C_2)\sin\omega t. \qquad (69.20)$$

Агар

$$C_1 + C_2 = A \qquad (69.21$$

ва

$$i\,(C_1 - C_2) = B \qquad (69.22)$$

деб белгиласак,

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (69.23)$$

келиб чиқади. C_1 ва C_2 комплекс катталиклар бўлса- да, энди A ва B сон ҳақиқий сон бўлади. Агар x ва $\dot{x}$ қийматларини $t = 0$ вақтдаги қийматини олсак,

$$A = x_0 \qquad (69.24)$$

$$B = \frac{v_0}{\omega} \qquad (69.25)$$

ҳосил бўлади.

Текширишга яна ҳам қулайроқ бўлиши учун (69.13) ифоданинг шаклини ўзгартирамиз. Қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$$\left.\begin{aligned} B &= a\cos\alpha, \\ A &= a\sin\alpha, \\ a &= \sqrt{A^2 + B^2}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{A}{B}. \end{aligned}\right\} \qquad (69.26)$$

Белгилашлардан сўнг, (69.13) ифода қуйидагича ёзилади:

$$x = a\cos\omega t\sin\alpha + a\sin\omega t\cos\alpha$$

ёки

$$x = a\sin(\omega t + \alpha). \qquad (69.27)$$

(69.27) га тикланувчи куч таъсиридаги нуқтанинг эркин тебраниш қонуни деб айтилади. Кўриниб турибдики, нуқта синус қонуни бўйича тебранар экан. Бундай синус (ёки косинус) қонуни бўйича бўладиган тебранишлар гармоник (ёки оддий) тебранма ҳаракат дейилади. Нуқтанинг тебраниш амплитудаси a (мувозанат вазиятдан энг катта силжиши) ва тебраниш фазаси $\omega t + \alpha$ га тенг. Нуқтанинг бошланғич фазаси α га тенг.

Тебраниш амплитудаси ва бошланғич фазасини топиш формуласини аниқлаш учун (69.24) ва (69.25) ни (69.26) тенгламага қўямиз. Бу ҳолда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad (69.28)$$

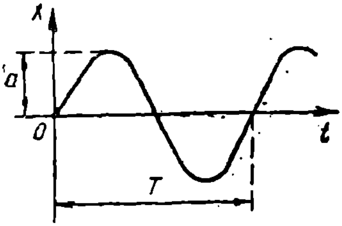
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0\omega}{v_0} \qquad (69.29)$$

формула ҳосил бўлади. (69.28) дан кўринадики, тебраниш амплитудаси a ва бошланғич фаза α тебранаётган нуқтанинг фақат бошланғич шартига боғлиқ бўлади. Бу формулаларда ω тебраниш частотаси бўлиб, (69.4) ёрдами билан ҳисобланади. Иккинчи томондан, агар нуқтанинг тебраниш даврини T деб белгиласак,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (69.30)$$

ҳосил бўлади.

(69.30) дан нуқтанинг тебраниш даври бошланғич шартларга боғлиқ эмас экан деган хулоса чиқади, чунки T фақат m ва k катталикнинг модулига боғлиқ. Бир тўлиқ тебранишда тебраниш фазаси 2π радиан ёки 360° бўлади, агар ярим тебраниш бўлса, фаза π радиан ёки 180° бўлиб қолади ва ҳоказо. Худди шундай ҳодисани тебраниш фазаси орқали қуйидагича аниқланади: тебраниш фазаси 360° бўлса, нуқта бир марта тўлиқ тебранган, тебраниш фазаси 180° бўлса, нуқта ярим давр тебранган ва ҳоказо. Демак, тебраниш фазаси $\omega t + \alpha$ градуслар ҳисобида нуқтанинг қанча тебранганини кўрсатади: агар тебраниш фазаси 720° бўлса, нуқта икки марта, 1080° бўлса, 3 марта тўлиқ тебранган. Бошланғич фаза эса градуслар ҳисобида нуқтанинг бошланғич вазиятини ифодалайди. Масалан, бошланғич фаза $\alpha = 0$ бўлса, нуқта мувозанат ҳолатида бўлган



200- расм.

O нуқтада (199-расмга қаранг), 90° бўлса, *M* нуқта *B* вазиятида, 180° бўлганда, *M* нуқта *O* вазиятида, 270° бўлганда, *M* нуқта *A* вазиятида ва ҳоказо вазиятларида бўлади.

Агар (69.27) га асосан нуқта силжишининг вақтга қараб ўзгариш графигини $\alpha = 0$ бўлган ҳолда чизсак, кўрамизки, *M* нуқтанинг тебраниш амплитудаси a доимий бўлиб қолади (200-расм). Биз (69. 27) формулани чиқарганимизда, *M* нуқтага фақат тикланувчи куч таъсир қилади деб ҳисоблаган эдик ва бу тикланувчи (эластик) куч мавжуд бўлган тақдирда энергияни йўқолиши бўлмайди, деб фараз қилган эдик. Шунинг учун *M* нуқтанинг тебраниш амплитудаси расмда кўрсатилганидек доимий қолади. Амалда эса нуқта тебранаётган ҳолда албатта тебраниш энергиясининг бир қисми бошқа тур (иссиқлик энергияси) энергияга айланади ва тебраниш амплитудаси доимий қолмайди.

Нуқта тебранаётганда унинг силжишининг, тезлигининг ва тезланишининг вақтга қараб ўзгаришини бошланғич фаза $\alpha = 0$ бўлган ҳол учун кўрганимизда ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ эканлигини назарда тутиб) (69. 27) тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$x = a\sin\frac{2\pi}{T}t. \qquad (69.31)$$

Тезликни топиш учун (69. 31) ифодадан вақт бўйича бир марта, тезланишни топиш учун (69. 31) ифодадан вақт бўйича икки марта ҳосила оламиз:

$$v_x = v = \dot{x} = \left(a\sin\frac{2\pi}{T}t\right)' = \frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi a}{T}t. \qquad (69.32)$$

$$a_x = a = \ddot{x} = \left(\frac{2\pi a}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t\right)' = -\frac{4\pi^2 a}{T^2}\sin\frac{2\pi t}{T}. \qquad (69.33)$$

Энди вақт $t = 0$; $\frac{T}{4}$; $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{4}$ ва T бўлган ҳол учун x, a, v катталикнинг қийматини (1- жадвал) ҳисоблаймиз. Бунинг учун (69. 31), (69. 32) ва (69. 33) формуладан фойдаланамиз.

1-жадвал

t	$\frac{2\pi}{T}t$	x	v_x	a_x
0	0°	0	$+\frac{2\pi}{T}a$	0
$\frac{T}{4}$	90°	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}a$
$\frac{T}{2}$	180°	0	$-\frac{2\pi}{T}a$	0
$\frac{3}{4}T$	270°	$-a$	0	$+\frac{4\pi^2}{T^2}a$
T	360°	0	$+\frac{2\pi}{T}a$	0

Жадвалдан кўринадики, x, v ва a катталик бир вақтнинг ўзида максимал қийматга эришмайди, бу катталикларнинг максимал қийматлари фаза жиҳатидан бир-биридан 90° га фарқ қилади.

Маълумки, тебранувчи моддий нуқта маълум миқдорда. T кинетик энергияга ва $П$ потенциал энергияга эга бўлади) Тўлиқ механик энергия

$$E = T + П \qquad (69.34$$

ифода орқали топилади.

Лекин

$$T = \frac{mv^2}{2} \qquad (69.35)$$

$$П = -\frac{kx^2}{2} \qquad (69.36)$$

формула орқали топилади. Энди x ва v катталик (69. 27). ва $v = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$ ифода орқали топилишини эслаб, шу ифодаларни (69. 35) ва (69. 36) га келтириб қўямиз. Бу ҳолда

$$T = \frac{ma^2\omega^2\cos^2(\omega t + \alpha)}{2}$$

ва потенциал энергиянинг абсолют қиймати учун

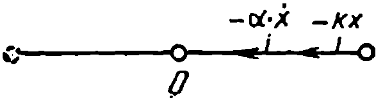
$$П = \frac{ka^2\sin^2(\omega t + \alpha)}{2}$$

ифода ҳосил бўлади. Агар охирги тенгламани (69.34) га қўйсак, ($k = m\omega^2$ эканлигини ҳисобга олиб)

$$E = \frac{ka^2}{2} \qquad (69.\ 37)$$

формула ҳосил бўлади. Демак, нуқтанинг тўлиқ механик энергияси тебраниш амплитудасининг квадратига тўғри пропорционал экан.

70-§. Тикланувчи куч ва ҳаракатга қаршилик кўрсатувчи куч таъсири остида нуқтанинг тебраниши



201-расм.

Моддий нуқтага тикланувчи kx кучдан ташқари яна ҳаракатга қаршилик қилувчи $\alpha\dot{x}$ куч ҳам таъсир этсин (α — қаршилик коэффициенти, $\dot{x}$ —нуқтанинг тезлиги). Иккала куч ҳам: тикланувчи — kx ва қаршилик кучи — αx бир томонга йўналган бўлиб, X ўқи устида ётади деб фараз қиламиз (201-расм). Бу ҳолда тенг таъсир этувчи куч

$$F = -\alpha\dot{x} - kx \qquad (70.1)$$

формула ёрдамида топилади. Иккинчи томондан

$$F = m\ddot{x}. \qquad (70.2)$$

Охирги икки тенгламани бир-бирига тенглаштирамиз ва қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \qquad (70.\ 3)$$

(70.3) тенглама нуқтанинг тикланувчи куч ва қаршилик кучи таъсирида тебранишининг дифференциал тенгламасидир.

(70. 3) ни қуйидаги шаклда тасвирлаймиз:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (70.\ 4)$$

бунда

$$2\beta = \frac{\alpha}{m}, \qquad (70.5)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad (70.\ 6)$$

Янги киритилган ўзгарувчи $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ —муҳитнинг қаршилигини характерлайдиган катталик, ω — нуқтанинг эркин тебраниш частотаси. (70. 4) ифода иккинчи тартибли, чизиқли, бир жинсли дифференциал тенгламадир. Бу тенгламанинг ечимини топиш учун 69-§ да қабул қилганимиздек, (69. 6) шаклдаги янги ўзгарувчини киритамиз. Натижада, қуйидаги характеристик тенглама ҳосил бўлади:

$$z^2 + 2\beta z + \omega^2 = 0. \qquad (70.\ 7)$$

Бу тенгламанинг илдизлари:

$$z_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}; \quad z_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}. \qquad (70.8)$$

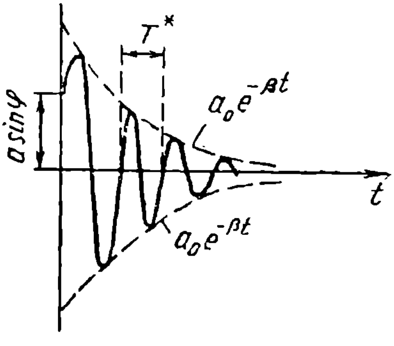
1. Моддий нуқтанинг тебранишини $\beta < \omega$ ҳол учун, яъни қаршилик коэффициенти эркин тебранишлар частотасидан кичик бўлган ҳол учун кўриб чиқамиз. Бу ҳолда (70.8) ифоданинг ўнг томонида мавҳум сон пайдо бўлади ва (70.8).

$$z_1 = -\beta + i\sqrt{\omega^2 - \beta^2}; \quad z_2 = -\beta - i\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \qquad (70.\ 9)$$

шаклда ёзилади. Охирги z_1 ва z_2 қийматларини ҳисобга олсак, (70. 4) тенгламанинг ечими қуйидагича ёзилади:

$$x = ae^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \beta^2 t} + \varphi). \qquad (70.\ 10)$$

Бу (70. 10) тенгламадан нуқтанинг силжиши синус қонуни бўйича даврий равишда ўзгариб туриши кўриниб турса-да, нуқтанинг тебраниш амплитудаси $e^{-\beta t}$ (экспоненциал) қонуни бўйича камаяди. Бундай тебраниш *сўнувчи тебранишлар* деб айтилади. Сўнувчи тебранишлар графиги (70. 10) асосида ҳисобланиб, 202-расмда тасвирланган. Расмдан кўринадики, нуқта тебраниб маълум вақтдан кейин (бир давр ўтгандан кейин) мувозанат вазияти ($x = 0$) бўлган ҳолатга келсада, нуқтанинг амплитудаси бир даврдан кейин олдинги қийматига кел-



202- расм.

майди. Тебраниш амплитудаси камаяди, лекин нуқта маълум вақтдан кейин мувозанат вазиятидан ўтади. Шунинг учун, яъни x даврий функция бўлмаганлиги учун ёки $x(t+T) \neq xt$ бўлганлиги учун нуқтанинг ҳаракати тебранма ҳаракат эмас, деган хулоса келиб чиқади. Бироқ нуқтанинг ҳаракати ҳамма вақт мувозанат вазияти $x = 0$ бўлган нуқта атрофида такрорланганлиги учун нуқтанинг ҳаракатини тебраниш деб қабул қилинади. Тебранишнинг даври

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{70.11}$$

Тебранишнинг частотаси

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} \tag{70.12}$$

формула ёрдамида топилади. (70. 12) ни (70. 11) га қўйиб, T^* ни топамиз:

$$T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega^2}}}, \tag{70.13}$$

бу ерда $T = 2\pi/\omega$ — эркин тебранишлар частотасидир. $\beta < \omega$ деб қабул қилганимиз учун $\sqrt{1 - \beta^2/\omega^2}$ ва $T^* > T$ бўлади.

Демак, сўнувчи тебранишлар даври T^* эркин тебранишларнинг T давридан каттароқ, яъни сўнувчи тебранишлар секинроқ бўлади деган хулоса чиқади. Бироқ, агар $\beta \ll \omega$ бўлса, $T^* \approx T$ деб қараш мумкин, чунки бу ҳолда $\sqrt{\frac{\omega^2 - \beta^2}{\omega^2}} \approx 1$ бўлиб қолади.

Энди (70. 10) формуладаги a ва φ доимий сонларни топайлик. Бунинг учун фараз қилайлик, бошланғич шартлар қуйидаги кўринишда

$$t = 0;\ x = x_0;\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \tag{70.14}$$

берилган бўлсин. Олдин x ни (70. 10) дан ҳисобга олиб, топамиз:

$$\dot{x} = -\left[a\beta e^{-\beta t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2 \cdot t} + \varphi\right)\right]'_t$$

$$\dot{x} = -a\beta e^{-\beta t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\, t + \varphi\right) + a\sqrt{\omega^2 - \beta^2} \times$$

$$\times e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+\varphi\right). \qquad (70.15)$$

Бошлангич шартлар тасвирланган (70. 14) ифодаларни (70. 10) ва (70. 15) тенгламага қўйиб, қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_0 = a\sin\varphi, \qquad (70.16)$$

$$\dot{x}_0 = -a\beta\sin\varphi + a\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot\cos\varphi. \qquad (70.17)$$

(70. 16) ва (70. 17) ни a ва φ катталикка нисбатан ечамиз. Бу ҳолда

$$\dot{x}_0 = -\beta x_0 + a\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot\cos\varphi, \qquad (70.18)$$

(70. 16) ва (70. 18) тенгламадан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\sin\varphi = \frac{x_0}{a}; \qquad (70.19)$$

$$\cos\varphi = \frac{\dot{x}_0+\beta x_0}{a\sqrt{\omega^2-\beta^2}}, \qquad (70.20)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dot{x}_0\sqrt{\omega^2-\beta^2}}{\dot{x}_0+\beta x_0}, \qquad (70.21)$$

$$a = \sqrt{x_0^2+\frac{(\dot{x}_0^2+\beta x_0)^2}{(\omega^2-\beta^2)}}. \qquad (70.22)$$

Сўнувчи тебранишлар бўлган ҳол учун бир даврда тебраниш амплитудасининг камайишига қараб, муҳитнинг қаршилик коэффициенти β ва бошқа тебраниш характеристикалари (70.21), (70.22) га асосан топилади. Бунинг учун тебраниш декременти деган тушунча киритилади. Кетма-кет келадиган иккита амплитуда нисбати **тебраниш декременти** дейилади. Агар нуқтанинг олдинги тебраниш амплитудаси $ae^{-\beta t}$ ва ярим даврдан кейинги амплитудаси $ae^{-\beta\left(t+\frac{T}{2}\right)}$ бўлса, таърифга асосан, $ae^{-\beta\left(t+\frac{T}{2}\right)^*/ae^{-\beta t}}$ нисбатга тебраниш декременти дейилади. Тебраниш декрементининг натурал логарифми **сўнишнинг логарифмик декременти** дейилади.

Агар сўнишнинг логарифмик декрементини λ ҳарфи билан белгиласак таърифга асосан

ёки

$$\lambda = -\beta T^*/2.$$

Охирги формулалардан фойдаланиб, λ ва T^* тажрибадан топилган бўлса, муҳитнинг қаршилик коэффициенти β (сўниш коэффициенти) топилади. Бу сўниш коэффициентининг сон қийматини топиш, айниқса, электр тебранишлари бўладиган муҳитлар учун жуда муҳимдир. Сўнишни тезлаштириш учун β мумкин қадар катта ва аксинча, тебраниш тез сўнмаслиги учун β мумкин қадар кичик қийматга эга бўлиши лозим.

Бу чиқарилган хулосалар $\beta \ll \omega$ бўлган ҳолда тўғри бўлиб, $\beta > \omega$ бўлган ҳолда тебраниш бошқача бўлади.

2. Агар муҳитнинг сўндириш коэффициенти β эркин тебраниш частотаси ω дан катта бўлса, яъни $\beta > \omega$ бўлган ҳолда (70.4) дифференциал тенгламанинг ечими

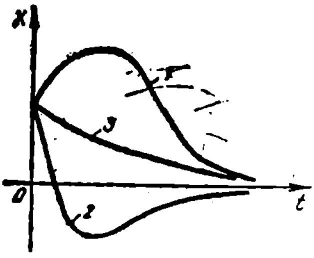
$$x = ae^{-\beta t}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\beta^2-\omega^2 t} + \varphi) \qquad (70.24)$$

шаклда ифодаланади. Бу ерда

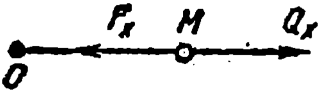
$$\mathrm{sh}\,(\sqrt{\beta^2-\omega^2}\,t + \varphi) = \frac{e^{\sqrt{\beta^2-\omega^2 t}+\varphi} - e^{-\sqrt{\beta^2-\omega^2}\,t+\varphi}}{2} \qquad (70.25)$$

ифода гиперболик синус функциясидир. Бу функция даврий функция эмас, яъни $\mathrm{sh}\,(t+T) \neq \mathrm{sh}\,(t)$. Шунинг учун бу ҳолда нуқта тебранма ҳаракатда бўлмайди, нуқта апериодик (даврий бўлмаган) ҳаракат қилади.

Агар нуқтанинг бошлангич тезлиги X ўқи томон йўналган бўлса, унинг ҳаракати 1 эгри чизиғи бўйича



203- расм.



204- расм.

(203-расм), X ўқига тескари йўналган бўлса, *2* ва *3* эгри чизиқлар бўйлаб бўлди.

3. $\beta=\omega$ бўлган ҳолда (70.4) дифференциал тенгламанинг ечими қуйидагича ифодаланади:

$$X=e^{-\beta t}[\dot{x}_0+(\dot{x}_0+\beta x_0)t]. \qquad (70.26)$$

(70.26) тенглама билан топиладиган нуқтанинг ҳаракати тебранма ҳаракат ҳолатида бўлади.

71-§. Тикланувчи куч ва даврий ўзгариб турувчи куч таъсирида нуқтанинг тебраниши

Олдинги параграфда кўрдикки, агар нуқтага қаршилик кучи таъсир этса, бу нуқтанинг тебраниши аста-секин сўнади. Тебраниш сўнмаслиги учун нуқтага (вақтга нисбатан) даврий ўзгариб турадиган куч таъсир этиб туриши лозим. Даврий ўзгариб турувчи Q кучи (ғалаён кучи) ва тикланувчи куч таъсирида нуқтанинг тебранишини кўриб чиқайлик (204-расм). Агар ўзгарувчи куч синус қонуни бўйича ўзгаради деб фараз қилсак,

$$Q_x=H\sin(pt+\gamma) \qquad (71.1)$$

ифодани ёзиш мумкин. Иккинчи куч, маълумки, Гук қонунига асосан ўзгаради:

$$F_x=-kx. \qquad (71.2)$$

Тенг таъсир этувчи куч, иккала кучнинг йиғиндисига тенг, яъни

$$F=F_x+O_x=-kx+H\sin(pt+\gamma). \qquad (71.3)$$

Иккинчи томондан

$$F=m\ddot{x} \qquad (71.4)$$

шаклда ёзилади. Агар охирги тенгламаларнинг ўнг томонларини тенглаштирсак,

$$m\ddot{x}=-kx+H\sin(pt+\gamma)$$

ёки

$$\ddot{x}+\omega^2x=h\sin(pt+\gamma) \qquad (71.5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (71.5) ифода тикланувчи ва даврий ўзгарувчи куч (ғалаёнлаштирувчи куч) таъсирида нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Кўриниб турибдики, тенгламани чиқарганимизда муҳитнинг қаршилик кучини ҳисобга олмадик. Тенгламада қуйидаги белгилашлар қабул қилинган:

$$\omega^2 = k/m. \tag{71.6}$$

$$n = H/m. \tag{71.7}$$

Бунда: ω — эркин тебраниш частотаси, H — ўзгарувчи кучнинг амплитудаси, k — эластиклик коэффициенти, p — ўзгарувчи кучнинг частотаси, $pt + \gamma$ — ўзгарувчи кучнинг тебраниш фазаси, γ — ўзгарувчи куч ўзгаришининг бошланғич фазаси. Ўзгарувчи кучнинг ўзгариш даври

$$\tau = \frac{2\pi}{p} \tag{71.8}$$

ва эркин тебранишлар даври

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{71.9}$$

формула ёрдамида топилишини назарда тутамиз.

Нуқтанинг тебраниш қонунини аниқлаш учун (71.5) тенгламанинг ечимини топиш лозим. Бу ечимни топиш учун (71.5) тенглама иккинчи тартибли, чизиқли ва бир жинси бўлмаган тенглама эканлигини назарда тутиб, тенгламанинг умумий ечими биржинсли $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ тенгламанинг умумий ечими билан (71.5) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг деб ҳисоблаш лозим. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими 69-§ га асосан

$$x^* = a \sin(\omega t + \alpha) \tag{71.10}$$

ва (71.5) нинг хусусий ечимини

$$x^{**} = A \sin(pt + \gamma) \tag{71.11}$$

шаклда излаймиз.

Демак, (71.5) тенгламанинг умумий ечими

$$x = x^* + x^{**} \tag{71.12}$$

кўринишда ёзилади.

(71.11) тенгламада номаълум кўпайтирувчи A қуйидагича топилади: (71.11) ифодадан $\ddot{x}^{**}$ ни топамиз:

$$\ddot{x}^{**} = -Ap^2 \sin(pt + \gamma). \tag{71.13}$$

Энди (71.11) ва (71.13) тенгламани (71.5) тенгламага қўямиз (чунки ҳақиқатан (71.11) ифода (71.5) тенгламанинг ечими бўлса, (71.11) ифода (71.5) тенгламани қаноатлантириши лозим):

$$-Ap^2\sin(pt+\gamma)+A\omega^2\sin(pt+\gamma)=\sin(pt+\gamma), \quad (71.14)$$

бундан

$$A=\frac{h}{\omega-p^2} \quad (71.14)$$

ҳосил бўлади ва натижада x^{**} катталик учун

$$x^{**}=\frac{h}{\omega^2-p^2}\cdot\sin(pt+\gamma) \quad (71.15)$$

кўринишдаги ифода келиб чиқади.

Агар (71.10) ва (71.15) тенгламани (71.12) тенгламага қўйсак, (71.5) дифференциал тенгламанинг ечими қуйидагича ифодаланади:

$$x=a\sin(\omega t+\alpha)+\frac{h}{\omega^2-p^2}\sin(pt+\gamma). \quad (71.16)$$

(71.16) дан кўринадики, нуқта мураккаб тебранма ҳаракат қилади. Нуқтанинг тебраниши иккита гармоник тебранишнинг йиғиндисидан иборат. (71.16) тенгламанинг ўнг томонидаги биринчи ҳад нуқтанинг эркин тебранишини, иккинчи ҳад эса нуқтанинг мажбурий тебранишини ифодалайди.

Шундай қилиб, тикланувчи куч ва ғалаёнлантирувчи куч таъсирида моддий нуқта мураккаб тебранма ҳаракатда бўлади ва ҳаракат эркин ҳамда мажбурий тебраниш йиғиндисидан иборат. Эркин тебраниш (71.10) орқали, мажбурий тебранишлар (71.15) тенгламалар орқали аниқланади.

Агар мажбурий тебранишлар частотаси p эркин тебранишлар частотасидан кичик, яъни $p<\omega$ бўлса, бундай тебранишлар кичик частотали мажбурий тебранишлар деб айтилади. Агар $p>\omega$ бўлса, катта частотали мажбурий тебранишлар дейилади.

Кичик частотали мажбурий тебранишларда ($p<\omega$) тебраниш қонуни (71.15) ва тебраниш амплитудаси (71.14) тенгламалар ёрдамида топилади. Лекин катта частотали ($p>\omega$) тебраниш учун (мажбурий тебраниш тенгламаси) (71.15) ва (71.14) тенгламада синус олдидаги коэффициент мусбат бўладиган шаклда ёзилади:

$$x^{**}=\frac{h}{p^2-\omega^2}\sin(pt+\gamma-\pi), \quad (71.17)$$

$$A = \frac{h}{p^2 - \omega^2}. \qquad (71.18)$$

Демак, катта частотали мажбурий тебраниш фазаси ($pt + \gamma - \pi$) ғалаёнлантирувчи куч частотаси ($pt + \gamma$) дан $\pi = 180°$ га фарқ қилади, яъни мажбурий тебраниш ва ғалаёнлантирувчи куч қарама- қарши фазада бўлади.

Шундай қилиб, кичик частотали мажбурий тебранишларда M нуқтанинг ҳаракати ҳамма вақт O нуқтадан (204-расмга қаранг) ғалаёнлантирувчи куч Q томонга йўналган, катта частотали мажбурий тебранишларда эса M ғалаён кучи Q йўналишига тескари йўналган. Ғалаён кучи максимал қийматга эга бўлганда, $Q_x = H$ бўлган ҳолда, M нуқтанинг максимал силжиши содир бўлади. $Q_x = H$ бўлганда, $A = A_0$ бўлади, яъни (71. 1) тенгламага асосан M нуқтанинг мувозанат вазиятида $F_x = Q_x$ ҳол учун қуйидаги ҳосил бўлади:

$$F_x = kA_0, \; Q_x = H, \; kA_0 = H.$$

Охирги тенгламанинг иккала томонини m га бўламиз ва A_0 катталикка нисбатан ечамиз:

$$A_0 = \frac{h}{\omega^2}. \qquad (71.19)$$

Мажбурий тебранишларни исталган вақтдаги A амплитудасини мувозанат ҳолидаги A_0 амплитудасига бўлган нисбатига динамийлик коэффициенти деб айтилади. Агар динамийлик коэффициентини η билан белгиласак, таърифга асосан $p < \omega$ бўлганда

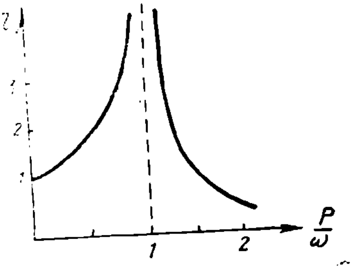
$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - p^2/\omega^2}, \qquad (71.20)$$

$p > \omega$ бўлганда

$$\eta = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{p^2/\omega^2 - 1} \qquad (71.21)$$

ифода ҳосил бўлади.

Охирги икки формулада динамийлик коэффициентининг частоталар нисбати $\left(\frac{p}{\omega}\right)$ га боғланиши чизиқли бўлмайди. $\frac{p}{\omega} = 1$ бўлганда, η кескин, бирданига ортади (205- расм). $p < \omega$ бўлган ҳолда $\frac{p}{\omega}$ ортиши билан η кўпаяди, $\frac{p}{\omega} = 1$



205- расм.

бўлганда, $\eta \to \infty$. Кейин $p > \omega$ ёки $\frac{p}{\omega} > 1$ ортиши билан η камаяди. Мажбурий тебраниш частотаси p хусусий тебраниш частотаси ω га тенг, яъни $p = \omega$ бўлган ҳолда, тебраниш амплитудаси чексизгача ортади. Мажбурий тебранишларнинг бундай ҳолига, яъни $p = \omega$ бўлганда тебраниш амплитудасининг чексизликка интилиш ҳодисаси *резонанс* дейилади.

Резонанс ҳодисаси бўлганда, яъни $p = \omega$ ҳолида, тебраниш амплитудаси (71.20) ва (71.21) формулаларга асосан $A = \infty$ бўлади ва (71.5) тенглама

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h\sin(pt + \gamma) \tag{71.22}$$

ечими

$$x = x^* + x^{**} \tag{71.23}$$

бир жинсли $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ тенгламанинг умумий ечими

$$x^* = a\sin(\omega t + \alpha)$$

ёки

$$x^* = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \tag{71.24}$$

ва бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий

$$x^{**} = Bt\cos(\omega t + \gamma) \tag{71.25}$$

ечимларнинг йиғиндисига тенг. Охирги тенгламадан

$$\dot{x}^{**} = B\cos(\omega t + \gamma) - B\omega t\sin(\omega t + \gamma) \tag{71 25'}$$

$$\ddot{x}^{**} = - B\omega\sin(\omega t + \gamma) - B\omega\sin(\omega t + \gamma) - B\omega^2 t \times$$

$$\times \cos(\omega t + \gamma)$$

ифода ҳосил бўлади. Агар x^{**} ва $\ddot{x}^{**}$ ифодани (71.22) тенгламага қўйсак,

$$B = -\frac{h}{2\omega} \tag{71.26}$$

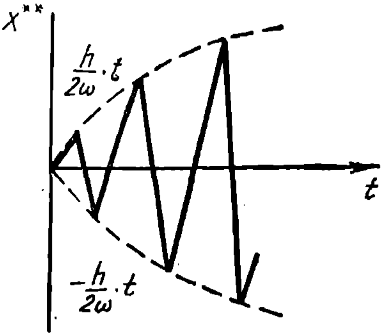
ҳосил бўлади. Ниҳоят, (71.25) тенглама резонанс вақтида

$$x^{**} = \frac{h}{2\omega} t \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (71.27)$$

шаклда ифодаланади.

(71. 27) дан резонанс вақтида қуйидаги хулосага келамиз: 1) мажбурий тебраниш частотаси p эркин тебранишлар частотаси ω га тенг, яъни $p = \omega$; 2) мажбурий тебранишлар даври эркин тебранишлар даврига тенг, яъни $T = 2\pi/\omega$; 3) мажбурий тебранишлар фазаси $\omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}$ ғалаёнлантирувчи куч фазаси $\omega t + \gamma$ дан $\frac{\pi}{2}$ га қадар орқада қолади (охирги тенглама билан (71. 1) тенгламани таққосланг); 4) резонанс вақтида мажбурий тебранишлар амплитудаси вақтга тўғри пропорционал равишда ортади, яъни

$$A = \frac{h}{2\omega} t. \qquad (71.28)$$



206- расм.

Мажбурий тебранишларнинг резонанс бўлгандаги силжишининг (яъни, x^{**} нинг) вақтга қараб ўзгаришидан (206- расм) кўринадики, тебраниш амплитудасининг абсолют қиймати t вақтга қараб чизиқли қонун бўйича (71. 28) га асосан ўзгаради. Айтганимиздек, $p = \omega$ бўлганда, резонанс ҳодисаси содир бўлади. Лекин мажбурий тебраниш частотаси p эркин тебранишлар частотаси ω га яқин бўлса, яъни $p \neq \omega$, лекин $p \to \omega$ ҳоли бўлса, (71. 5) тенгламанинг ечими

$$X = \frac{2h}{\omega^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-\omega}{2} t\right) \cos(pt + \gamma) \qquad (71.29)$$

бўлади. Бу ерда нуқтанинг тебраниш амплитудаси

$$A(t) = \frac{2h}{\omega^2 - p^2} \sin\left(\frac{p-\omega}{2}\right) t \qquad (71.30)$$

қонуни бўйича ўзгаради. Кўриняптики, тебраниш амплитудаси даврий функция, яъни

$$A(t+T_A)=A(t)$$

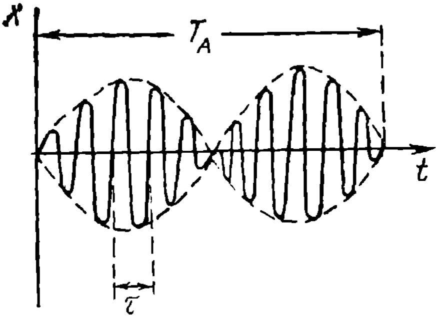
тебраниш амплитудасининг ўзгариш даври T_A қуйидаги формуладан топилади:

$$T=\frac{2\pi}{(p-\omega)/2}=4\pi(p-\omega). \qquad (71.31)$$

Демак, $p\to\omega$ бўлганда тебранишнинг частотаси p, (71.28) тенгламага асосан, тебраниш даври $\tau=\frac{2\pi}{p}$ ва тебраниш амплитудаси $A(t)$ бўлади ёки (71.28) қуйидагича ифодаланади:

$$x=A(t)\cos(pt+\gamma).$$

Охирги формулага асосан x ва t га нисбатан ўзгаришидан (207-расмдан кўринадики) $A(t)$ вақтнинг ўтиши билан даврий равишда ўзгаради. Ана шундай тебраниш вақтида тебраниш амплитудасининг даврий ўзгариб туриш ҳодисаси **тепиниш** (биение) дейилади.

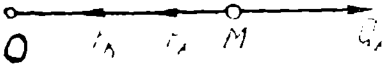


207-расм.

Тепиниш ҳодисаси $p\approx\omega$ бўлганда содир бўлади, бу ҳолда (71.30) га асосан $A(t)$ катталикнинг ўзгариш даврининг миқдори мажбурий тебранишларнинг τ давридан анча катта бўлади. Бу тепиниш ҳодисасини уйдаги деразаларнинг ёки машина ва механизмларнинг тебранишларида сезиш мумкин. Уй олдидан бирон автомашина ўтаётганда ёки самолёт учиб ўтганда кутилмаганда дераза ёки эшикдаги ойналар тебраниб, ўзидан товуш чиқаради. Бу — тепинишдир.

72-§. Тикланувчи куч, ғалаён кучлар ва муҳитнинг қаршилик кучи таъсирида нуқтанинг тебраниши

Моддий нуқтага уч хил куч таъсир этаётган ҳолни кўриб чиқайлик: 1) тикланувчи $F_x=-kx$ куч таъсир этади; 2) ғалаён кучлари $Q_x=H\sin(pt+\gamma)$ таъсир этади; 3) му-



208- расм.

ҳитнинг қаршилик кучи $F_{қ} = -\alpha x$ таъсир этади (208- расм). Кучларнинг тенг таъсир этувчиси

$$F = -\alpha\dot{x} - kx + H\sin(pt + \gamma) \tag{72.1}$$

ифода орқали топилади. Иккинчи томондан бу куч

$$F = m\ddot{x} \tag{72.2}$$

шаклда ифодаланади. Охирги икки тенгламанинг ўнг томонларини тенглаштириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$m\ddot{x} = \alpha\dot{x} - kx + H\sin(pt + \gamma) \tag{72.3}$$

Агар

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \tag{72.4}$$

$$\frac{\alpha}{m} = -2\beta, \tag{72.5}$$

$$\frac{H}{m} = h \tag{72.6}$$

белгилаш киритсак, (72.3) тенглама

$$\ddot{x} + 2\beta x + \omega^2 x = h\sin(pt + \gamma) \tag{72.7}$$

шаклга келади. (72.7) M нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Нуқтанинг ҳаракат қонунини топиш учун (72.7) тенгламанинг ечимини топиш лозим. Ечимни қуйидагича топамиз. Маълумки, (72.7) ифода бир жинсли бўлмаган, чизиқли, иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир. Тенгламанинг ечими чап томони $\ddot{x} + 2\beta x + kx = 0$ бўлган бир жинсли тенгламанинг x^* ечими билан умумий ечими x^{**} нинг йиғиндисига тенг, яъни

$$x = x^* + x^{**}. \tag{72.8}$$

Маълумки,

$$x^* = ae^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + \varphi\right) \tag{72.9}$$

шаклда ифодаланади. x^{**} нинг шаклини

$$x^{**} = B\sin(pt + \gamma - \varepsilon) \tag{72.10}$$

кўринишда излаймиз. (72.10) номаълум коэффициент B ни топиш учун x^{**} ва $\ddot{x}^{**}$ ни аниқлаймиз:

$$\dot{x}^{**} = Bp\cos(pt+\gamma-\varepsilon). \tag{72.11}$$

$$\ddot{x}^{**} = -Bp^2\sin(pt+\gamma-\varepsilon). \tag{72.12}$$

Энди (72. 10) ва (72. 11), (72. 12) тенгламани (72. 7) тенгламага қўйиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered}-Bp^2\sin(pt+\gamma-\varepsilon)+2\beta\cdot Bp\cdot\cos(pt+\gamma-\varepsilon)- \\ -B\omega^2\sin(pt+\gamma-\varepsilon)=h\sin(pt+\gamma).\end{gathered} \tag{72.13}$$

Тригонометриядан маълумки,

$$\begin{gathered}\sin(pt+\gamma-\varepsilon+\varepsilon)=\sin(pt+\gamma-\varepsilon)\cos\varepsilon+ \\ +\cos(pt+\gamma-\varepsilon)\sin\varepsilon.\end{gathered} \tag{72.14}$$

(72. 14) ни ҳисобга олсак, (72. 13) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\begin{gathered}-B\,p^2\sin(pt+\gamma-\varepsilon)+2\beta\;Bp\;\cos(pt+\gamma-\varepsilon)-B\omega^2\times \\ \times\sin(pt+\gamma-\varepsilon)=h\sin(pt+\gamma-\varepsilon)\cos\varepsilon+ \\ +h\cos(pt+\gamma-\varepsilon)\sin\varepsilon\end{gathered}$$

ёки

$$\begin{gathered}[B(\omega^2-p^2]-h\cos\varepsilon]\sin(pt+\gamma-\varepsilon)+(2\beta Bp-h\sin\varepsilon)\times \\ \times\cos(pt+\gamma-\varepsilon)=0.\end{gathered} \tag{72.15}$$

Охирги тенглама аргумент $(pt+\gamma-\varepsilon)$ нинг ҳар қандай қийматларида тўғри бажарилиши учун $\sin(pt+\gamma-\varepsilon)$ ва $\cos(pt+\gamma-\varepsilon)$ катталик олдидаги коэффициентлар алоҳида- алоҳида нолга тенг бўлишлари лозим:

$$B(\omega^2-p^2)-h\cos\varepsilon=0, \tag{72.16}$$

$$2B\beta p-h\sin\varepsilon=0. \tag{72.17}$$

Бу тенгламалардан

$$B=\frac{h}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}, \tag{72.18}$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{2\beta\cdot p}{\omega^2-p^2}, \tag{72.19}$$

$$\sin\varepsilon=\frac{2\beta\cdot p}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}} \tag{72.20}$$

$$\cos\varepsilon=\frac{\omega^2-p^2}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}} \tag{72.21}$$

ҳосил бўлади. Охирги тўртта тенгламани ҳисобга олсак, (72. 7) тенгламанинг хусусий ечими бўлган (72. 10) қуйидаги шаклни олади:

$$x^{**} = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}\cdot\sin(pt+\gamma-\varepsilon) \qquad (72.\,22)$$

ва (72. 7) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича ифодаланади, $\beta < \omega$ ҳол учун

$$x = ae^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{(\omega^2-p^2)}\cdot t+\varphi\right)+\frac{h}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}\times$$

$$\times\sin(pt+\gamma-\varepsilon) \qquad (73.\,23)$$

$\beta > \omega$ бўлганда,

$$x = ae^{-\beta t}\sin\left(\sqrt{p^2-\omega^2\cdot t+\varphi}\right)\left(\sqrt{p^2-\omega^2}\cdot t+\varphi\right)+$$

$$+\frac{h}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4\beta^2p^2}}\cdot\sin(pt+\gamma-\varepsilon)$$

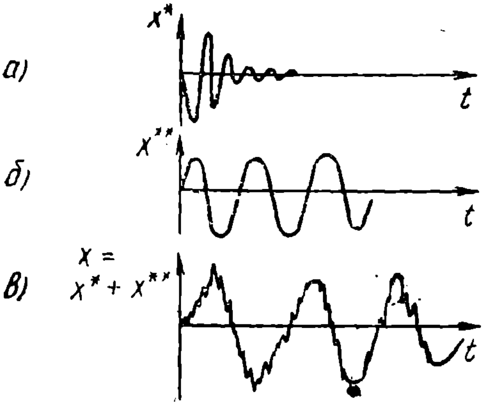
ва $\beta = \omega$ бўлганда

$$x = ae^{-\beta t}\sin\varphi+\frac{h}{2\beta\cdot p}\cdot\sin(pt+\gamma-\varepsilon)$$

шаклда бўлади.

Маълумки, тебраниш амплитудаси a ва бошланғич фаза φ катталик (70.19)—(70.22) формуладан топилади ва бундан кўринадики, a ва φ бошланғич шартдан топилади. α ва φ катталик нуқтанинг x_0 бошланғич вазияти ва бошланғич $\dot{x}_0$ тезлиги орқали ҳисобланади.

Кўриб ўтилган ҳолда, нуқтага тиклянувчи қаршилик кучи ва ғалаён кучлари таъсир этилган ҳолда, нуқтанинг ҳаракати шу нуқтанинг тезлигига тўғри пропорционал бўлади. Нуқтанинг ҳаракати $\beta<\omega$ бўлган ҳолда, мажбурий тебранишлар билан сўнувчи тебранишларнинг қўшилишидан: $\beta>\omega$ бўлган ҳолда, мажбурий тебранишлар билан апериодик (даврий бўлмаган) ҳаракатнинг қўшилишидан; муҳит қаршилиги бўлганда, нуқтага ғалаён кучларининг таъсири бўлмаганда, тебраниш амплитудасини камайтиради (209- *б* расм), иккала тебранишларнинг қўшилиши натижасида натижаловчи тебранишлар ҳосил бўлади (209- *в* расм). Охирги графикдан кўринадики, сўнувчи тебранишлар маълум вақтда (барқарор тебраниш режими бўлгунча) нуқта-



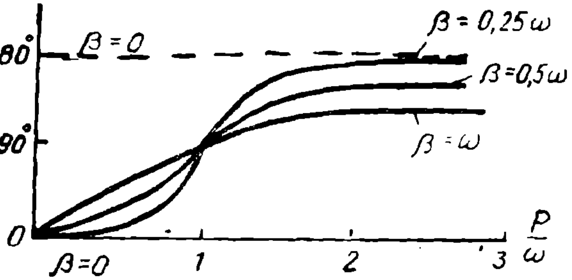
209- расм.

нинг натижаловчи тебранишига таъсир кўрсатади, кейин сўнувчи тебранишларнинг таъсири йўқолади ва нуқтанинг тебраниши фақат (72.22) қонунга бўйсунади. Тебранишларнинг сўнмаслигига сабаб ғалаён кучлари ҳамма вақт нуқтага таъсир қилиб, тебранма ҳаракат бўлишини таъминлайди. Натижаловчи тебранишнинг частотаси ва даври ғалаён кучларининг p частотаси ва $\tau = \frac{2\pi}{p}$ даврига тенгдир, яъни қаршилик кучлари мажбурий тебранишларнинг частотаси ва даврини ўзгартирмайди.

Нуқтанинг тебраниш фазаси ($pt+\gamma-\varepsilon$) ғалаён кучларининг тебраниш фазаси бўлган ($pt+\gamma$) катталикдан ε билан фарқ қилади. ε катталик фазалар силжиши дейилади ва (ε) нинг қиймати (72.19) тенгламадан аниқланади, (72.19) ифодани

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2\cdot\frac{\beta}{p}\cdot\frac{p}{\omega}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \qquad (72.24)$$

шаклда ёзсак, ε фазалар силжиши $\frac{\beta}{p}$ ва $\frac{p}{\omega}$ нисбатнинг функцияси эканлиги яққол кўринади. Фазалар силжиши $\frac{p}{\omega}$ нисбатнинг ўсиши билан ($\frac{\beta}{p}$ нисбатнинг ҳар хил қийматлари учун) турлича ўзгаради (210- расм). Расмдан $\beta =$



210- расм.

$= \omega$ ва $p = \omega$ бўлган ҳолда $\varepsilon = 90°$ бўлиб қолиши, $\frac{p}{\omega} =$ $= 0$ бўлганда, $\varepsilon = 0$ бўлиши ҳамда $\frac{p}{\omega}$ жуда ҳам ортиб борган ҳолда фазалар силжиши асимптотик қийматга (180°) эришганлиги кўринади. Қаршилик коэффициенти β ортиши билан ε камаяди ($0 \leqslant \beta \leqslant \omega$ оралигида).

Нуқтанинг тебраниш амплитудаси $\frac{p}{\omega}$ нисбатга боғлиқлиги (72. 18) формуладан равшандир. Агар ғалаён кучи $Q_к = H$ бўлганда, нуқтанинг координата бошидан, мувозанат ҳолати O нуқтадан (208- расмга қаранг) силжишини B_0 десак,

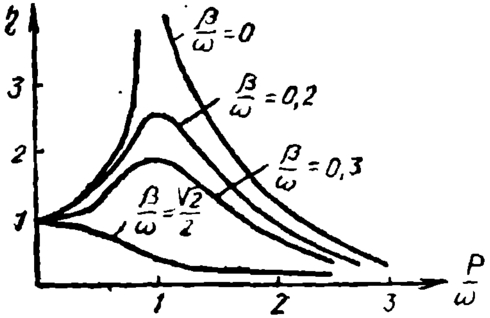
$$B_0 = \frac{h}{\omega^2}$$

$$\eta = \frac{B}{B_0} = \frac{\dfrac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}}{\dfrac{h}{\omega^2}} \tag{72. 25}$$

бўлиб қолади ёки

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right] + 4\left(\frac{B}{\omega}\right)^2 \cdot \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}. \tag{72. 26}$$

Динамийлик коэффициентининг $\frac{p}{\omega}$ ва $\frac{\beta}{\omega}$ нисбатга қараб, ўзгаришидан кўринадики (211- расм), $\frac{p}{\omega} = 1$ ёки $p = \omega$



211- расм.

бўлганда, яъни резонанс ҳодисаси вақтида η чекли қийматга эгадир:

$$\eta_{\text{рез}} = \frac{\omega}{2\beta}; \quad \left(\frac{B}{B_0}\right)_{\text{рез}} = \frac{\omega}{2\beta}$$

$$B_{\text{рез}} = \frac{B_0\omega}{2\beta} = \frac{h}{2\beta\omega}. \qquad (72.27)$$

Фақат $\beta = 0$ бўлгандагина, $B_{\text{рез}} = \infty$ бўлади. Умуман, B нинг қиймати (72. 18) орқали топилади. Шу формуладан B нинг максимал қийматини топамиз. Бунинг учун $\frac{\partial B}{\partial p} = 0$ шартдан фойдаланиб,

$$p_1 = 0; \ p_2 = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \qquad (72.28)$$

қийматларни топамиз. $p_1 = 0$ ҳолда (72. 18) тенгламадан фойдаланиб (72. 25) ифодани ҳосил қиламиз, лекин $p_2 = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$ ҳолда (72. 18) тенгламадан B нинг максимал қиймати қуйидагича топилади:

$$B_{0\max} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \qquad (73.29)$$

(73. 29) дан $\beta \ll \omega$ бўлганда, $B_{0\max} = \frac{1}{2\beta\omega}$ бўлади, яъни B максимал қийматга эришади ва резонанс ўткир бўлади. Бу ҳодиса $\omega^2 - 2\beta^2 > 0$ бўлганда, содир бўлади — бу ҳолда $\beta < k\sqrt{2/2}$ бўлиб қолади. Агар $\beta > k\sqrt{2/2}$ бўлса, $B_{0\max}$ бўлмайди, яъни резонанс бўлмайди. Нуқта тебранишида амплитуданинг максимал қиймати $\frac{B}{\omega}$ нисбат ортиши билан чапга қараб силжийди.

52-мисол. (32.18). Оғирлиги Q=12 кг бўлган жисм пружина учига маҳкамланган ва гармоник тебранма ҳаракат қилади. Жисм 45 секундда 100 марта тебраниши секундомер ёрдамида аниқланган. Шундан кейин пружинанинг учига $Q_1=6$ кг оғирликдаги юк қўшимча маҳкамланган. Пружинага маҳкамланган иккита юкнинг тебраниш даврини аниқланг.

Берилган:

$Q = 12$ кг
$\tau = 45$ с
$n = 100$
$Q = 6$ кг

T_1 — ?

Ечиш: Пружинага ҳар иккала юк маҳкамланганда эркин гармоник тебраниш даврини (69. 30) формулага асосан

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_y}{k}} \qquad (1)$$

ифодадан топамиз. Юкларнинг умумий массаси қуйидаги

$$m_y = m + m_1 = \frac{Q+Q_1}{g} \qquad (2)$$

формула ёрдамида ҳисобланади. T_1 ни ҳисоблаш учун k ни билиш лозим. Пружинага фақат Q юк маҳкамланган вақтда унинг тебраниш даври

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\tau}{n} = 0{,}45\,\text{с}. \qquad (3)$$

(3) формулани $T = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{kq}}$ шаклда ёзиб, бундан K аниқланади:

$$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 Q}{gT^2}. \qquad (4)$$

Энди T_1 тебраниш даврини аниқлаш учун (4) ва (2) ни (1) қўямиз. Натижада қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$T_1 = T\sqrt{\frac{Q+Q_1}{Q}}.$$

Охирги формулага T, Q ва Q_1 катталикнинг қийматини қўйиб ҳисоблаганимизда T_1 топилади:

$$T_1 = 0{,}55\,\text{с}.$$

53-мисол. (32.19). 52-мисолнинг шартига асосланиб, пружинага биринчи Q юк ва иккала $Q+Q_1$ юк осилганда ҳар бир юкнинг тебраниш қонунини аниқланг.

Ечиш. Юклар эркин гармоник тебранма ҳаракатда бўлади деб, пружинага фақат Q юк осилганда (пружинанинг оғирлигини ҳисобга олмаган ҳолда) тебранишнинг дифференциал тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{1}$$

$Q + Q_1$ юк осилганда дифференциал тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0. \tag{2}$$

Бу ерда

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_y}}. \tag{4}$$

Юкларнинг тебраниш қонунлари (1) ва (2) тенгламанинг ечимидир:

$$x = -a \cos \omega t. \tag{5}$$

$$x_1 = a_1 \cos \omega_1 t. \tag{6}$$

Тебраниш амплитудалари қуйидагича аниқланади:

$$a = \frac{Q}{k} = \frac{gT^2}{4\pi^2} \tag{7}$$

$$a_1 = \frac{Q + Q_1}{k} = \frac{gT_1^2}{4\pi^2}. \tag{8}$$

Энди

$$m_y = \frac{Q + Q_1}{g}; \quad m = \frac{Q}{g}$$

эканлигини ва (3), (4), (7) ва (8) формулани ҳисобга олсак,

$$x = \frac{gt^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi}{T} t \tag{9}$$

$$x_1 = \frac{gT_1^2}{4\pi^2} \cos \frac{2\pi}{T_1} t \tag{10}$$

ифодани ҳосил қиламиз.

Агар (9) ва (10) формулада $T = \frac{\tau}{n} = 0{,}45$ с.

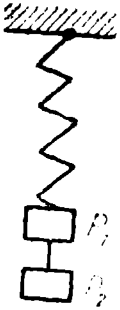
$$\frac{2\pi}{T} = 14\,\text{с}^{-1};\ T_1 = 0{,}55\ \text{с};\ \frac{2\pi}{T_1} = 11{,}4\,c^{-1};$$

$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = 5{,}02 \text{ ва } \frac{gT_1^2}{4\pi^2} = 7{,}53 \text{ см}$$

эканлигини назарда тутсак, $x = -5{,}02 \cos 14\,t$;

$$x_1 = 7{,}53 \cos 11{,}4\ t$$

шаклдаги ҳаракат қонунлари ҳосил бўлади.

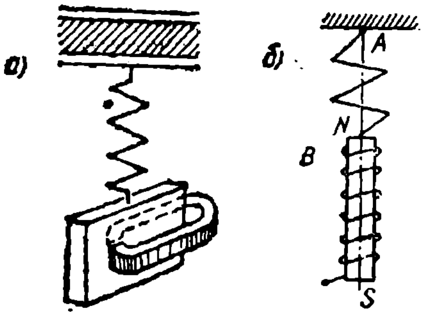


212- расм.

54- мисол. (32.13). Эластиклик коэффициенти $k = 20\ \frac{\text{г}}{\text{см}}$ бўлган пружинага $P_1 = 0{,}5$ кг ва $P_2 = 0{,}8$ кг юклар осилган (212- расм). Агар P_2 юк олиб қўйилса. система статик мувозанат ҳолатида бўлади. Қолган юкнинг ҳаракат қонунини, частотасини, даврий частотасини ва тебраниш даврини аниқланг.

Жавоб: $x = 40 \cos 6{,}26\ t$ (см, $T = 1\ c$; $f = 1$ Гц; $\omega = 2\pi\ \text{с}^{-1}$.

55- мисол. (32.51). Оғирлиги 100 г бўлган пластинка AB пружинанинг қўзғалмас A нуқтасига осилган бўлиб, пластинка магнит қутблари орасида v тезликда тебранади. Пластинкада уюрмали токларнинг ҳосил бўлиши натижасида v тезликка тўғри пропорционал бўлган қаршилик кучи ҳосил бўлади. Қаршилик кучи $k_1\Phi^2 v$ динага тенг, бунда $k_1 = 0{,}0001$, v—тезлик $\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)$ ва Φ — магнитнинг N ва S қутби орасидаги магнит оқими. Бошланғич вақтда пластинка чўзилмаган ва пластинканинг бошланғич тезлиги нолга тенг пружинани 1 см чўзиш учун 20 г статик куч керак. Магнит оқими $\Phi = 1000\sqrt{5}\,CGS$ бўлганда, пластинканинг ҳаракат қонунини аниқланг (213- *a* расм).



213- расм.

Е ч и ш. Пластинкага тикланувчи куч $-kx$ ва қаршилик кучи $-k_1\Phi_2\ \dot{x}$ таъсир қилади. Кучлар таъсирида пластинка ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\ddot{x} + k_1\Phi^2\dot{x} + kx = 0$$

ёки

$$\ddot{x} + \frac{k_1\Phi^2}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1}$$

шаклда ифодаланади. Агар

$$\frac{k_1\Phi^2}{m} = 2\beta, \tag{2}$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad k = 20\,\frac{\text{г}}{\text{см}}, \tag{3}$$

$$m = \frac{P}{g} \tag{4}$$

деб белгиласак, (1) тенглама

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x}\omega x^2 = 0 \tag{5}$$

кўринишни олади, (5) нинг ечимини

$$x = e^{-\beta t}(C_1\cos\omega^* t + C_2\sin\omega^*\text{t}) \tag{6}$$

шаклда излаймиз. Бу ерда ω^* ни (70.12) формулага асосан топамиз:

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}. \tag{7}$$

Агар (2), (3) ва (7) дан фойдалансак, масаладаги берилганларга асосан *CGS* системасида

$$\beta = \frac{x_1\Phi^2 g}{2p} = 2{,}5\,c^{-1}, \quad \omega^* = 1378\,\text{c}^{-1}$$

ҳосил бўлади ва

$$x = e^{-25t}(C_1\cos 13{,}78\,t + C_2\sin 13{,}78) \tag{8}$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар $\dot{x}$ катталикни аниқласак:

$$\dot{x} = e^{-2{,}5t}(-13{,}75\;C_1\sin 13{,}78\,t + 13{,}78\,C_2\cos 13{,}78\,t) -$$

$$-2{,}5\,e^{-2{,}5t}(C_1\cos 13{,}78t + C_2\sin 13{,}78\,t) \tag{9}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бошланғич шартдан $t = 0$;

$$x = x_0 = \frac{P}{k} = 5\ \text{см}; \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 = 0. \tag{10}$$

Бошланғич шартларни (8) ва (9) ифодаларга қўйиб

$$C_1 = 5; \;\; 13{,}78\; C_2 - 2{,}5\, C_1 = 0$$

тенгламаларни ҳосил қилиб, булардан $C_2 = 0{,}907$ эканлигини ҳосил қиламиз. Демак, пластинканинг ҳаракат қонуни

$$x = \; - e^{-25t}(5 \cos \; 13{,}78\, t + 0{,}907 \sin \; 13{,}78\, t)$$

кўринишда бўлади.

56-мисол. (32.52). 55- мисол шартидан фойдаланиб, магнит оқими $\Phi = 10^4 CGS$ бўлган ҳолда пластинканинг ҳаракат қонунини аниқланг.

Жавоб: $x = - \frac{5}{48}\, e^{-98t}\,(49\, e^{96\,t} - 1).$

57- мисол. (32.78). Қаттиқлик коэффициенти $c = 20\, \frac{г}{см}$ бўлган пружинага оғирлиги $G = 100$ г бўлган магнитли стержень осилган (213- б расм). Магнитли стержень ўзидан $I = 20 \sin 8\pi\, t$ қонуни бўйича ток кучини ўтказаётган чулғам ичидан (соленоиддан) ўтади. Соленоиддан $t = 0$ вақтдан бошлаб ток ўтади ва магнитли стерженни соленоид ичига қараб тортади. Бошида осилган магнитли стержень тинч ҳолатида. Магнитли стержень ва чулғамнинг ўзаро таъсир кучи $Q = 16\pi \cdot I$ дина. Магнитли стерженнинг мажбурий тебраниш қонуни топилсин.

Ечиш. Магнитли стержень тикланувчи $F_x = -cx$ ва $Q = 16\pi \cdot I$ ғалаён кучи таъсири остида ҳаракат қилади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси бир томондан

$$F = -cx + 16\,\pi \cdot I = -cx + 320\pi \sin 8\,\pi t \qquad (1)$$

шаклда ва иккинчи томондан

$$F = m\ddot{x} \qquad (2)$$

кўринишда ёзилади. Охирги тенгламаларнинг ўнг томонларини тенглаштириб

$$m\ddot{x} + cx = 320\,\pi \sin 8\pi\, t \qquad (3)$$

шаклда магнитли стержень ҳаракатининг дифференциал тенгламасини ҳосил қиламиз. Бу тенгламани қуйидагича тасвирлаймиз:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\, x = \frac{320\,\pi}{m} \sin 8\,\pi\, t \qquad (4)$$

ва $m = G/g$ бўлганлиги учун

$$\ddot{x} + \frac{c \cdot g}{G} x = \frac{320 \pi \cdot g}{G} \sin 8 \pi t \qquad (5)$$

бўлиб қолади. Агар $\frac{c \cdot g}{G} = \omega^2$; $\frac{520 \pi g}{G} = h$ (6)

деб белгиласак, (71.5) шаклдаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin 8 \pi t. \qquad (7)$$

бу ерда мажбурий тебранишлар частотаси қуйидагича эканлигини эътиборга оламиз:

$$P = 8 \pi. \qquad (8)$$

Магнитли стерженнинг мажбурий тебраниш қонуни (7) тенгламанинг хусусий ечимидир. Бу хусусий ечим (71.15) га асосан топилади:

$$x^{**} = \frac{h}{\omega^2 - p^2} \cdot \sin (pt + \gamma). \qquad (9)$$

Масала шартига асосан эркин ва мажбурий тебраниш орасидаги фазалар фарқи $\gamma = 0$. Энди (6) ва (8) ифодани (9) га қўямиз:

$$x^{**} = \frac{320 \pi \cdot g}{G \left[\frac{c \cdot g}{G} - (8\pi)^2 \right]} \cdot \sin 8 \pi t. \qquad (10)$$

Агар $g = 980 \frac{\text{см}}{c^2}$; $G = 100 \cdot 980$ дн; $c = 20 \frac{\text{г}}{\text{см}}$

қийматларни (10) ифодага қўйсак:

$$x^{**} = -0{,}023 \sin 8 \pi t.$$

Бу магнитли стерженнинг тебраниш қонунидир.

58-мисол (32.79). 57-мисол шартидан фойдаланиб, магнитли стерженнинг тўлиқ ҳаракат тенгламаси аниқлансин. Бу ҳолда, магнитли стержень эркин пружина охирига осилади ва бошланғич тезликсиз қўйиб юборилади, деб қабул қилинсин.

Ечиш. Бу ҳолда ҳам магнитли стержень ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin 8 \pi t \qquad (1)$$

шаклда ёзилади. Тенгламанинг умумий ечими

$$x = x^{*} + x^{**} \qquad (2)$$

$$x^* = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \tag{3}$$

$$x^{**} = \frac{h}{\omega^2 - p^2} \sin pt, \tag{4}$$

$$p = 8\pi; \quad h = \frac{320 \pi g}{G}; \quad \omega^2 = \frac{c \cdot g}{G} \tag{5}$$

ёки

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{h}{\omega^2 - p^2} \cdot \sin pt \tag{6}$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t - C_2 \omega \cos \omega t + \frac{hp}{\omega^2 - p^2} \sin pt. \tag{7}$$

Бошланғич шартга асосан, $t = 0$ бўлганда

$$x = x_0 = -\frac{G}{c} = -5 \text{ см} \tag{8}$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$$

(8) ни (6) ва (7) тенгламага қўйсак,

$$C_1 = -5; \; C_2 = \frac{h \cdot p}{\omega(\omega^2 - p^2)} = 0{,}041 \tag{9}$$

келиб чиқади. Ниҳоят, C_1 ва C_2 қийматларини (6) ифодага қўйиб, қуйидаги шаклда магнитли стерженнинг тебраниш қонунини (тенгламасини) топамиз:

$$x = -5 \cos 14t - 0{,}041 \sin 14t - 0{,}023 \sin 8\pi t.$$

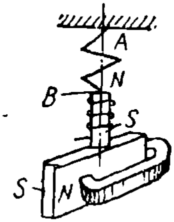
59- мисол. (32.80). 57- мисол шартидан фойдаланиб, магнитли стерженни статик мувозанат вазиятида $v_0 = \dot{x}_0 = 5 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ бошланғич тезлик берилган ҳол учун ҳаракат қонуни аниқлансин.

Жавоб: $x = 0{,}4 \sin 14t - 0{,}023 \sin 8\pi t$.

Кўрсатма: бу ҳолда бошланғич шарт

$$t = 0, \; x = x_0 = 5 \text{ см}, \; \dot{x} = \dot{x}_0 = 5 \frac{\text{см}}{c}.$$

60- мисол. (32.88). Қаттиқлик коэффициенти $c = 20 \frac{\text{г}}{\text{см}}$ бўлган пружинага соленоид ичидан ўтадиган ва оғирлиги $G_1 = 50$ г бўлган магнитли стержень ҳамда магнит қутблари орасидан ўтадиган оғирлиги $G_2 = 50$ г бўлган мис пластинкалар осилган. Соленоиддан $I = 20 \sin 8\pi t$ ампер ток ўтади ва бу соленоид магнитли стержень билан



214- расм.

$P = 16\pi l$ куч таъсирида бўлади. Мис пластинкага ҳосил бўладиган уюрмали токлар ҳосил қиладиган тормозловчи куч $Q_x = k_1\Phi^2 v$, бунда $k_1 = 10^{-4}$; $\Phi = \frac{\sqrt{5}}{100}$ CGS ва v—пластинка тезлиги.

Пластинканинг мажбурий тебраниш қонунини аниқланг (214- расм).

Ечиш. Магнитли стержень ва мис пластинка қаттиқ маҳкамланганлигн учун бирга тебранади. Пружинанинг оғирлигини ҳисобга олмаймиз. Стержень ва пластинка биргаликда оғирлик кучлари, пружинанинг эластиклик кучи ва тормозловчи кучлар таъсирида тебранади. Бу ерда системага $F_x = -cx$ тикланувчи куч, $F_қ = -k_1\Phi^2\dot{x}$ қаршилик кучи ва $Q_x = 320\pi\sin 8\pi t$ ғалаён кучлари таъсир қилади.

Бу ҳолда ҳаракатнинг дифференциал тенгламаси

$$m\ddot{x} = -k_1\Phi^2\dot{x} - cx + 320\pi\sin 8\pi t \qquad (1)$$

шаклда ифодаланади. Агар

$$\frac{k_1\Phi^2}{m} = 2\beta; \quad \frac{c}{m} = \omega^2; \quad \frac{320\pi}{m} = h; \quad m = \frac{G_1+G_2}{g} \qquad (2)$$

белгилашларни киритсак, (1) тенглама қуйидагича ёзилади:

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x} + \omega^2, x = h\sin(pt + \gamma - \varepsilon). \qquad (3)$$

Масаланинг шартига асосан $\gamma = 0$ бўлиб, бу тенгламанинг хусусий ечими, яъни пластинканинг мажбурий тебраниши (72.22) ифодадан топилади:

$$x^{**} = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}}\cdot\sin(pt-\varepsilon). \qquad (4)$$

Фазалар силжиши (72.19) дан топилади:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2\beta\cdot p}{\omega^2 - p^2}. \qquad (5)$$

Масала шартига асосан ҳисобласак:

$\beta = 2{,}5\,\text{c}^{-1}$, $\omega = 14\,\text{c}^{-1}$; $h = 10{,}05$; $p = 8\pi\text{c}^{-1}$.

Шу белгнларга асосан

$$\frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 p^2}} = 0{,}022$$

ва

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2\beta \cdot p}{\omega^2 - p^2} = -0{,}29; \ -\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}(180 - \varepsilon) = 0{,}29.$$

Тригонометрик жадвалдан

$$180^\circ - \varepsilon = 16^\circ$$

ва

$$\varepsilon = 164^\circ = 0{,}91\pi \qquad (7)$$

эканлигини кўрамиз. Энди (6) ва (7) ифоданинг қийматларини (4) тенгламага қўйиб

$$x^{**} = -0{,}022\sin(8\,\pi\,t - 0{,}91\,\pi) \qquad (8)$$

тенгламани — пластинканинг ҳаракат тенгламасини ҳосил қиламиз.

61-мисол (32.89). 60-мисол шартидан фойдаланиб, пластинка стержень билан бирга пружинага осилган ва пластинкага пастга йўналган $v_0 = \dot{x}_0 = 5\ \frac{\text{см}}{\text{м.}}$ бошланғич тезлик берилган деб пластинканинг ҳаракат қонунини аниқланг.

Жавоб:

$$x = e^{-25\,t}\,(-4{,}99\cos 13{,}75\,t - 0{,}56\sin 13{,}75\,t) +$$
$$+\ 0{,}022\sin(8\,\pi\,t - 0{,}91\,\pi)\ \text{см}.$$

Кўрсатма: пластинка тебранишининг умумий ечимини $x = x^{*} + x^{**}$ кўринишда излаш лозим.

XI-БОБ. ЭРКИН БЎЛМАГАН НУҚТАНИНГ ҲАРАКАТИ

73-§. Эркин бўлмаган нуқта. Боғланишлар ва боғланиш реакциялари

Нуқта ҳаракатига чек қўядиган сабаблар механик боғланишлар ёки қисқача *боғланишлар* дейилади. Масалан, сув қувур ичида ҳаракат қилади. Бу ерда қувур сувни маълум траектория бўйлаб ҳаракатланишга мажбур қилади. Қувур бу ерда боғланиш бўлади. Ҳамма жисмлар Ер сиртида ҳаракат қилишга мажбур. Поршень цилиндр ичида ҳаракат қилишга мажбур. Бу ерда Ер ва цилиндр боғланиш бўлади. Ой Ернинг атрофида ва Ер Қуёш атрофида ҳаракат қилишга мажбурдир. Бу ерда Ой ва Ер ҳамда Ер ва Қуёш бутун олам тортишиш қонунига асосан бир-бирини тортади.

Мана шу тортишиш кучлари боғланишлар бўлади. Демак, боғланишлар характерига, айрим белгиларига қараб ҳар хил бўлади. Боғланишлар қуйидагича классификацияланади (турларга ажратилади). Классификациялаш нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси ечимининг қандай катталикларга боғлиқ бўлишига қараб аниқланади:

1. **Голоном ва ноголоном боғланишлар.** Агар нуқтага қўйилган боғланишлар нуқтанинг фақат фазодаги ҳаракатига чек қўйиб нуқтанинг ҳаракат тезлиги ўзгаришига чек қўймаса, бундай боғланишлар *голоном боғланишлар* дейилади. Голоном боғланишлар содир бўлганда, нуқта тезлигининг миқдори ҳар қандай қийматларни олиши мумкин, лекин нуқтанинг координаталари фақат маълум оралиқда ўзгариши мумкин. Агар нуқта маълум сирт бўйича ҳаракат қилса ва бу сирт

$$f(x, y, z, t) = 0 \qquad (73.1)$$

тенглама билан аниқланадиган бўлса, нуқта ҳаракати вақтида (73.1) шартни қаноатлантириши лозим. Бу шарт (73.1) бажарилиши учун нуқтанинг координаталари x, y, z фақат маълум оралиқдаги қийматларга эга бўлади, яъни x, y, z ихтиёрий қийматларга эга бўла олмайди. Лекин x, y, z координаталарнинг ҳар бири t вақтнинг функциясидир. Голоном боғланишларнинг тенгламалари (73.1) ифода шаклида бўлади. Голоном боғланишлар бўлганда нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари тўлиқ интегралланади, яъни бу ҳолда дифференциал тенгламаларнинг ечимларига координатлардан олинган ҳосилалар ($\dot{x}$, $\ddot{x}$ ...) қатнашмаслиги керак. Агар боғланишлар

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \qquad (73.2)$$

кўринишда бўлса, *ноголоном боғланишлар* дейилади. Бу ҳолда (73.2) тенглама шундай ифодаланадики, x, y, z ни бу тенгламадан интеграллаб топиб бўлмайди. Ноголоном боғланишлар мавжуд бўлганда, нуқтанинг ҳам x, y, z координаталарига, ҳам нуқтанинг $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ тезлик проекцияларига чек қўйилади, яъни x, y, z ва $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ катталиклари ихтиёрий қийматларга эга бўлмайди. Бу катталиклар (ноголоном боғланишлар бўлганда) фақат маълум соҳада чекли миқдорда ўзгаради. Ушбу қўлланманинг II ва III бобларида кўриб ўтилган масалалар голоном боғланиш-ларга мисол бўлади. Биз кейинги параграфларда голоном боғланишларни кўриб чиқамиз.

2. Сақлаб турувчи ва сақлаб турмайдиган боғланишлар. Сақлаб турувчи боғланишлар ҳолида нуқта ҳаракати вақтида шу богланишлардан ажрала олмайди. Нуқта маълум сирт ёки чизиқ бўйлаб ҳаракат қилади. Сақлаб турувчи боғланишларнинг математик ифодаланиши (73.1) ёки (73.2) тенглама шаклида ифодаланади.

Сақлаб турмайдиган боғланишлар бўлганда нуқта ҳаракатланаётган сирт ёки чизиқдан ажралиб чиқиши мумкин. Бундай ҳолда боғланишларни тенгсизликлар билан ифодалаш қулай бўлиб қолади. Масалан, нуқта сфера ичида ҳаракат қиладиган бўлса, бу ҳаракат

$$(x^2 + y^2 + z^2) < R^2 \qquad (73.3)$$

кўринишда, сфера сиртидан ташқарида ҳаракат қилганида

$$(x^2 + y^2 + z^2) > R^2 \qquad (73.4)$$

кўринишда ёзилади. Агар нуқта радиуси r бўлган доира ичида ҳаракат қилса $(x^2 + y^2) < r^2$, ташқарисида эса $(x^2 + y^2) > r^2$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Сақлаб турувчи боғланишлар икки томонлама (финитли) ёки бир томонлама (инфинитли) бўлиши мумкин. (73.3) ва (73.4) тенгсизликлар инфинитли боғланишлардир. Молекула ва атомларнинг бир-бирига яқинлашиши чекланган. Атом ва молекулалар кичик масофаларда бир-бирини итарганлиги учун улар бир-бирига жуда ҳам яқин келмайди (инфинитли боғланиш деб қараш мумкин). Поршеннинг цилиндр ичидаги ҳаракатида, Ойнинг Ер атрофидаги ҳаракатида ва шунга ўхшаш ҳаракатларда (электронларнинг ядро атрофидаги ҳаракатлари, нуқтанинг тебранма ҳаракатини) финитли боғланиш бўлади деб ҳисобланади.

3. Стационар (барқарор) ва ностационар боғланишлар. Агар боғланишлар ошкор равишда вақтга боғлиқ бўлмаса, стационар боғланишлар дейилади. Боғланиш вақтга боғлиқ бўлса, ностационар боғланиш дейилади.

Стационар боғланишлар таъсирида нуқта ўзининг фазодаги ҳаракат қонунини вақт ўтиши билан ўзгартирмайди. Масалан, нуқта айлана ёки эллипс бўйича ҳаракат қилса, унинг траекторияси

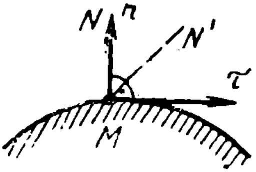
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (73.5)$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (73.6)$$

тенглама билан ифодаланади. Бу тенгламалар вақтга боғлиқ эмас.

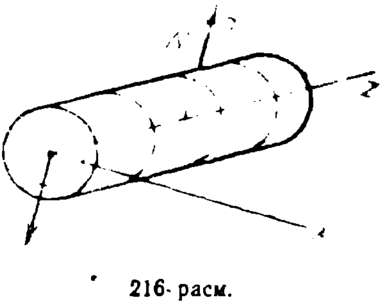
Стационар боғланишларни склером, ностационар боғланишларни реоном боғланиш деб ҳам айтилади. Стационар боғланишлар бўлганда, (73.1) ва (73.2) тенгламада вақт қатнашмаслиги керак.

4. Идеал ва реал боғланишлар. Маълумки, нуқта ҳаракат вақтида актив кучлар ва боғланишлар таъсири остида бўлади. Бу боғланишлар нуқтанинг эркин ҳаракати вақтидаги траекториясини ўзгартиради, уни бошқа траектория бўйича ҳаракат қилишга мажбур қилади. Шундай қилиб, бирон-бир нуқтага бошқа нуқта ёки бошқа жисмлар томонидан таъсир этадиган кучлар унинг ҳаракатини ўзгартиради. Бу берилган кучлар актив кучлар дейилади. Актив кучлардан бошқа яна боғланишлар реакцияси нуқтага таъсир этади. Боғланишлар реакцияси реакция кучи ёки пассив кучлар дейилади. Реакция кучлари боғланишларнинг таъсирини алмаштирадиган кучлардир. Бу реакция кучлари ёки боғланишлар реакцияси моддий нуқта ҳаракатига чек қўяди ёки нуқта ҳаракатига қаршилик кўрсатади.



215- расм.

Агар реакция кучлари нуқта ҳаракатланаётган сирт ёки чизиққа ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлса, бундай боғланишлар *идеал боғланишлар* дейилади (215- расм). Расмда M нуқта траекториясига τ уринма текислик ўтказилган ва N реакция кучи τ текисликка ўтказилган n уринма бўйлаб йўналган. Бундай боғланиш идеал боғланиш бўлади.



216- расм.

Идеал боғланишлар бўлганда нуқта ҳаракатланадиган сирт абсолют (мутлақ) силлиқ бўлади. Ҳақиқатда эса сиртлар абсолют силлиқ бўлмайди, ғадир-будур бўлади. Бундай сиртлар (ғадир-будур) *реал сиртлар* дейилади. Реал сиртларда реакция кучлари n нормалга перпендикуляр бўлмайди, балки маълум бурчак ҳосил қилади (215-расмдаги N' кўринишда бўлади). Идеал боғланишларда, масалан, нуқта цилиндр сиртида ҳаракат қилганида ҳаракат траекторияси $x^2+y^2=R^2$ кўринишда ёки $f=x^2+y^2-R^2=0$ шаклда ёзилади (216-расм). Бу ҳолда реакция кучи, идеал боғланишлар бўлса, цилиндр сиртига ўтказилган нормал n йўналишида бўлади. Бу нормалнинг йўналиши эса боғланишлар функциясининг градиенти бўйича йўналгандир. Агар сирт ғадир-будур (реал) бўлса, реакция кучининг йўналиши сиртга перпендикуляр бўлмайди ва бу йўналишни боғланишлар тенгламасидан аниқлаб бўлмайди.

74-§. Эркин бўлмаган нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Эркин бўлмаган нуқта ҳаракати вақтида нуқтага F актив ва N реакция кучлари таъсир қилади. Бу кучларнинг тенг таъсир этувчиси нуқтага a тезланиш беради. Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан, F ва N кучнинг вектор йиғиндиси нуқта массасининг тезланишига бўлган кўпайтмасига тенг:

$$\vec{F}+\vec{N}=m\cdot\vec{a} \qquad (74.1)$$

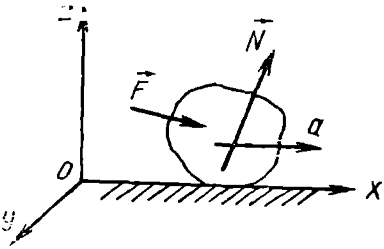
Бу ерда $\vec{N}$ нуқтага таъсир этадиган барча боғланишлар ҳосил қилган реакция кучларининг геометрик йиғиндисидир. Боғланишлар таъсирини реакция кучи билан алмаштирамиз. Нуқтага актив кучлар таъсир этади ва боғланишларнинг ўрнига реакция кучлари таъсир қилади деб ҳисоблаймиз. (Боғланишлар таъсирининг реакция кучлари билан алмаштирилишига, статика курсини ўтганимизда, жисмларни боғланишлардан озод қилиш принципи деб айтилган эди.) Агар $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ эканлигини эътиборга олсак, (74.1) тенглик

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{N} \qquad (74.2)$$

шаклда ифодаланади. (74.2) тенглама эркин бўлмаган нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади. Бу тенглама эркин нуқта ҳаракати учун ёзилган (63.2) тенгламадан ўнг томонидаги N реакция кучининг қўшилиши билан фарқ қилади.

Агар Декарт координата ўқларидаги проекцияларда (74.2) ни ифодаласак,

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x, \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y, \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z \end{aligned}\right\} \qquad (74.3)$$



217- расм.

тенгламалар шаклида тасвирланади. Бунда $\vec{a}$, $\vec{N}$ ва $\vec{F}$ векторининг x, y, z ўқлардаги проекциялари мос равишда $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$; N_x, N_y, N_z ва F_x, F_y, F_z билан белгиланади (217- расм). Нуқтанинг ҳаракат қонунини ифодалаш учун (74.2) ёки (74.3) тенгламанинг ечими топилади. Бу ечимни аниқлаш вақтида бошланғич шартлар, актив ва реакция кучлари берилган бўлади.

Табиий координата ўқларида (74.2) тенгламанинг проекциялари

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= F_\tau + N_\tau, \\ ma_n &= F_n + N_n, \\ ma_b &= F_b + N_b \end{aligned}\right\} \qquad (74.4)$$

кўринишда ифодаланади. Бунда a_τ, a_n, a_b; F_τ; F_n, F_b; N_τ, N_n, N_b нуқта тезланиши a, актив кучлар F ва реакция кучлари N нинг уринма, нормал ва бинормал ўқларидаги проекцияларидир.

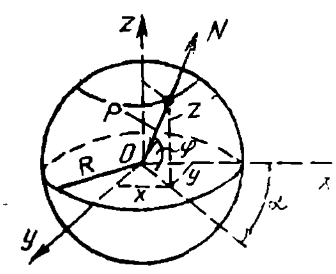
Нуқтанинг ҳаракати амалда тегиб турувчи текисликда содир бўлади, деб ҳисобланади ва (74.4) ифоданинг фақат биринчи ва иккинчи тенгламалари кўрилади ёки (74.3) ифодадаги биринчи ва иккинчи тенгламалар кўрилади.

Шундай қилиб, эркин бўлмаган нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламалари эркин нуқтанинг дифференциал тенгламаларидан реакция кучларининг ўнг томони қўшилиши билан фарқ қилади.

Фараз қилайлик, голоном сақлаб турувчи ва идеал боғланишлар таъсирида нуқта сфера сиртида ҳаракат қилсин (218- расм). Бу ҳолда реакция кучлари қуйидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$N = \lambda\, grad f. \qquad (74.5)$$

Бунда реакция кучининг проекциялари



218- расм.

$$N_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (74.6)$$

$$N_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (74.7)$$

$$N_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (74.8)$$

ва номаълум кўпайтирувчи λ қуйидагича аниқланади:

$$\lambda = \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \qquad (74.9)$$

Реакция кучининг модули

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2} \qquad (74.10)$$

формула орқали ҳисобланади. Берилган нуқта ҳамма вақт сфера сиртида бўлиши учун қуйидаги боғланишни ифодалайдиган

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (74.11)$$

шартни бажариш лозим.

Расмдан нуқтанинг оғирлик кучи P сферанинг маркази бўлган O нуқта томонга йўналган. Нуқтанинг $OXYZ$ системага нисбатан координаталари

$$z = R \sin \varphi, \qquad (74.12)$$

$$x = R \cos \varphi \cdot \cos \alpha, \qquad (74.13)$$

$$y = R \cos \varphi \cdot \sin \alpha \qquad (74.14)$$

ва F кучнинг проекциялари

$$F_x = -mg \cos \varphi \cdot \cos \alpha, \qquad (74.15)$$

$$F_y = -mg \cos \varphi \cdot \sin \alpha. \qquad (74.16)$$

$$F_z = -mg \sin \varphi \qquad (74.17)$$

кўринишда ёзилади. Нуқта сфера сиртида ҳаракат қилганлиги учун боғланишлар тенгламасидан

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (74.18)$$

бу ифодадан қуйидагини ёзамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z. \qquad (74.19)$$

Энди (74.6)—(74.8), (74.16)—(74.19) ифодаларни мос равишда (74.3) тенгламаларга қўйсак,

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg\cos\varphi\cdot\cos\alpha + 2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= -mg\cos\varphi\cdot\sin\alpha + 2\lambda y, \\ m\ddot{z} &= -mg\sin\varphi + 2\lambda\cdot z \end{aligned}\right\} \qquad (74.20)$$

ҳосил бўлади. (74.20) *M* нуқтанинг сфера сиртидаги ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Нуқтанинг ҳаракат қонунларини топиш учун шу тенгламаларнинг ечимини аниқлаш лозим.

Агар $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 0^\circ$ бўлса, (74.20) ифода

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \qquad (74.21)$$

$$m\ddot{y} = 2\lambda y \qquad (74.22)$$

$$m\ddot{z} = -mg + 2\lambda z \qquad (74.23)$$

шаклда ёзилади.

Умуман идеал боғланишлар бўлганда, (74.3) ифода

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, && (74.24) \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, && (74.25) \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} && (74.26) \end{aligned}\right\}$$

кўринишда бўлади. (74.25) тенгламага эркин бўлмаган нуқта учун бир жинсли Лагранж тенгламалари деб аталади. Агар нуқтага *F* ва *N* куч билан бирга яна $F_{\text{ишқ}}$ ишқаланиш кучи таъсир қилса, $F_{\text{ишқ}}$ проекциялари

$$F_{\text{ишқ}},\ x = -F\cos(\widehat{\vec{F}\ \vec{i}}) = -\frac{F}{v}v_x = -\frac{F}{v}\dot{x}, \qquad (74.27)$$

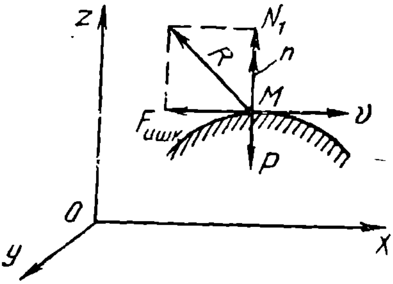
$$F_{\text{ишқ}}\ y = F\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{j}}) = -\frac{F}{v}\dot{y}, \qquad (74.28)$$

$$F_{\text{ишқ}\ z} = F\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{k}}) = -\frac{F}{v}\dot{z} \qquad (74.29)$$

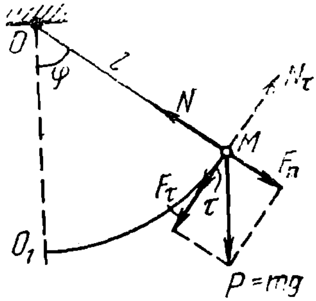
шаклда бўлади. Ишқаланиш кучи мавжуд бўлганда, Лагранж тенгламалари

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F}{v}\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{F}{v}\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \lambda\,\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{F}{v}\dot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (74.30)$$

шаклда ёзилади. Охирги тенгламаларда $\frac{F}{v}$ қаршилик коэффициенти бўлиб, v нуқтанинг ҳаракат тезлигидир (219-расм).



219- расм.



220- расм.

75- §. Математик маятникнинг кичик тебранишлари

Чўзилмайдиган ва оғирлиги ҳисобга олинмайдиган ипга осилган моддий нуқтанинг оғирлик кучи таъсиридаги ҳаракати *математик маятник* дейилади. Фараз қилайлик, қўзғалмас O нуқтага боғланган l узунликдаги ипнинг учига m массали M нуқта боғланган (220-расм). M нуқтани табиий координаталар системасининг маркази қилиб танлаб оламиз ва M нуқтадан траекториясига уринма (тангенциал) τ, нормал n ва бинормал b ўқларни ўтказамиз. Бинормал ўқи расм текислигига перпендикуляр, нормал ўқ M нуқтадан O нуқта томонга йўналган ва уринма τ ўқ эса траекторияга уринма бўлиб, M нуқтанинг ҳаракати томон йўналган. M нуқта вертикалдан φ бурчакка оғган ҳолида, нуқта ҳаракати фақат уринма ўқ τ ва нормал n ўқлари бўйлаб содир бўлади. (Бинормал ўқи бўйлаб нуқта ҳаракат қилмайди.) Демак, M нуқта тегиб турувчи текислигида ҳаракат қилади ва ҳаракатнинг дифференциал тенгламалари (74.4) ифодага асосан қуйидагича ифодаланади:

$$m a_\tau = F_\tau + N_\tau, \tag{75.1}$$

$$m a_n = F_n + N_n. \tag{75.2}$$

Маълумки, $a_\tau = \frac{dv}{dt}, a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ва F_τ, N_τ, N_n, F_n катталиклар 220- расмдан

$$N_\tau = N\cos 90^\circ = 0, \ N_n = N \tag{75.3}$$

$$F_\tau = -mg\sin\varphi, \ F_n = -mg\cos\varphi \tag{75.4}$$

кўринишда бўлади.

Маятникнинг тебраниши ифодаланадиган дифференциал тенгламани (75.1) дан фойдаланиб топамиз. F_τ катталикни (75.3) дан топиб (75.1) тенгламага қўямиз ва $s = 0, M = L\cdot\varphi$ эканлигини эътиборга оламиз.

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\varphi. \tag{75.5}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{l\,d\varphi}{dt} = l\dot\varphi \tag{75.6}$$

(75.6) ни ва $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(l\cdot\dot\varphi) = \frac{l\,d\cdot\dot\varphi}{dt} = l\cdot\ddot\varphi$ эканлигини ҳисобга олсак (75.5) қуйидагича ёзилади:

$$ml\ddot\varphi = -mg\sin\varphi$$

ёки

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{75.7}$$

Агар кичик бурчаклар учун $\sin\varphi \approx \varphi$ эканлигини ҳисобга олсак, (75.7) тенглама $l\ddot\varphi + g\varphi = 0$

ёки

$$\ddot\varphi + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

кўринишни олади. Бу ерда $\frac{g}{l} = \omega^2$ деб белгилаб,

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \qquad (75.8)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Бундай тенгламанинг ечими худди (69.5) тенгламанинг ечимидек бўлади, яъни

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

ёки

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t + \alpha). \qquad (75.9)$$

Бошланғич фаза $\alpha = 0$ бўлса, маятник

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t \qquad (75.10)$$

қонуни бўйича тебранади. Маятникнинг тебраниш даври

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (75.11)$$

қонунга бўйсунганлигини ҳам кўрамиз.

Энди (75.2) тенгламадан N реакция кучини топамиз ($\rho = l$, $v = l \cdot \omega$ эканлигини эътиборга олиб):

$$N = \frac{mv^2}{\rho} + mg\cos\varphi \text{ ёки } N = mi\,\omega^2 + mg\cos\varphi. \qquad (*)$$

Энди ω ни топамиз. Бунинг учун (75.7) нинг шаклини ўзгартирамиз:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi. \qquad (75.12)$$

Агар $\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}$ ифодани ҳисобга олсак, (75.12)

$$\omega\, d\omega = -\frac{g}{l}\sin\varphi\, d\varphi$$

шаклда ёзилади. Охирги тенгламани интеграллсак

$$\int \omega\, d\omega = -\int \frac{g}{l} \sin\varphi\, d\varphi,$$

бундан

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\varphi + l \qquad (75.13)$$

келиб чиқади. Бошланғич шартдан

$$t = 0,\ \omega = \omega_0;\ \varphi = \alpha \qquad (75.14)$$

эканлиги маълум бўлса,

$$c = \frac{\omega^2 c}{2} - \frac{g}{l}\cos\alpha$$

ва

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

ифода ҳосил бўлади. Агар бу ифодани (*) га қўйсак, реакция кучини ҳисоблашни қуйидагича ёзамиз:

$$N = ml\left[\omega_0^2 + \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)\right] + mg\cos\varphi$$

ёки $m = P/g$ ни ҳисобга олсак,

$$N = \mathrm{P}\left(\frac{v_0^2}{gl} + 3\cos\varphi - 2\cos\alpha\right) \tag{75.15}$$

формула ҳосил бўлади.

76-§. Нуқта учун Даламбер принципи

75-§ дан маълумки, эркин бўлмаган нуқта учун

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a} \tag{76.1}$$

тенгламани ёзиш мумкин эди. Бу тенгламани

$$\vec{F} + \vec{N} + (-\vec{m}\vec{a}) = 0 \tag{76.2}$$

шаклда ёзамиз. Бунда $-m\vec{a}$ ҳад нуқтанинг инерцияси туфайли ҳосил бўлади. Бу ҳад инерция кучи ёки Ф фиктив куч деб аталади.

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \tag{76.3}$$

Фиктив кучни эътиборга олсак, олдинги тенгламани

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0 \tag{76.4}$$

кўринишда ёзамиз. (76.4) тенгламадан: нуқтанинг ҳаракати вақтида ҳамма актив кучлари, реакция кучлари ва инерция кучларининг геометрик йиғиндиси нолга тенг деган хулоса келиб чиқади. Бу хулоса Даламбер принципи деб аталади. Бу принцип динамика масалаларини статик усул билан ечишга имконият беради.

Ҳақиқатан ҳам, статикадан маълумки, жисм ёки нуқта тинч ҳолатида бўлиши учун шу жисм ёки нуқтага таъсир қиладиган барча кучларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим эди. Худди шунга ўхшаш, Даламбер принципи кўрсатадики, нуқта маълум кинематик ҳолатида бўлиши учун нуқтага таъсир этадиган актив кучлар, реакция кучлари ва инерция кучларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак экан.

Агар F, N ва Φ кучларни декарт координата ўқларидаги проекцияларда ифодаласак,

$$\left.\begin{aligned} F_x + N_x + \Phi_x &= 0, \\ F_y + N_y + \Phi_y &= 0, \\ F_z + N_z + \Phi_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (76.5)$$

тенгламани ҳосил қиламизки, бундан ҳаракатдаги нуқта учун ҳамма вақт актив, реакция ва инерция кучларининг ўқлардаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади деган хулоса чиқади.

Агар (76.4) тенгламанинг иккала томонини $\vec{r}$ радиус-векторга кўпайтирсак, Даламбер принципини қуйидаги шаклда ифодалаймиз:

$$\vec{r} \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{N} + \vec{r} \times \vec{\Phi} = 0. \qquad (76.5)$$

(76.6) даги ҳар бир ҳад куч моментини ифодалайди. Бу тенгламадан нуқта ҳаракати вақтида ҳамма вақт актив, реакция ва инерция кучлари моментларининг йиғиндиси нолга тенг бўлади деган хулоса келиб чиқади. Тенгламанинг проекциялари

$$\left.\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{F})_x + (\vec{r} \times \vec{N})_x + (\vec{r} \times \vec{\Phi})_x &= 0, \\ (\vec{r} \times \vec{F})_y + (\vec{r} \times \vec{N})_y + (\vec{r} \times \vec{\Phi})_y &= 0, \\ (\vec{r} \times \vec{F})_z + (\vec{r} \times N)_z + (\vec{r} \times \vec{\Phi})_z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (76.7)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламалар ҳам ҳаракатдаги нуқта учун куч моментларининг проекциялари орқали ифодаланган Даламбер принципидир.

Статиканинг асосий тенгламалари умуман олтита тенгламаларда ифодаланган эди. Бу ерда ҳам кўрдикки, (76.5) ва (76.7) орқали ифодаланадиган олтита тенгламаларни ташкил этади. Шунинг учун Даламбер принципи динамика масалаларини статик усул билан ечишга имкон беради деб айтишлари бежиз эмас, деган хулоса чиқади.

XII БОБ. МОДДИЙ НУҚТАНИНГ НИСБИЙ ҲАРАКАТИ

77- §. Нуқта нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Ньютон қонунлари (63- §) нуқта учун ва инерциал ($v = \mathrm{const}$) саноқ системалари учун аниқ бажарилади, деб айтилган эди. Бу вақтда куч жисмларнинг ўзаро таъсирини характерлайдиган катталик бўлиб, нуқта массасининг тезланишига бўлган кўпайтмасига тенг деган хулоса чиқади. Бироқ, нуқтанинг абсолют тезланиши нисбий, кўчма ва кориолис тезланишларининг геометрик йиғиндисига тенг эди:

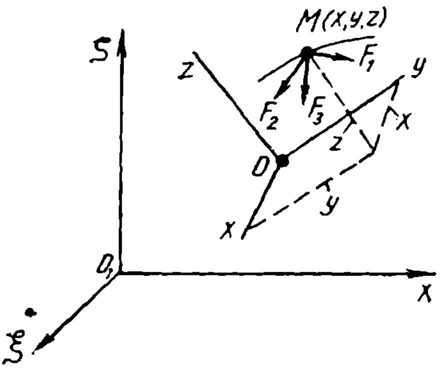
$$\vec{a} = \vec{a}_н + \vec{a}_к + \vec{a}_{кор}. \tag{77.1}$$

(77.1) дан кўринадики, $\vec{a}$ тезланиш нуқтанинг кинематик ҳолатига қараб ўзгаради, демак, $\vec{a}$ тезланиш орқали аниқланадиган F куч ҳам ўзгарувчан бўлиб туриши лозим деган нотўғри хулоса чиқиши мумкиндек туюлади. Бундай нотўғри хулосани чиқармаслик учун Ньютоннинг иккинчи қонунини

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}. \tag{77.2}$$

шаклда ёзиб, батафсилроқ муҳокама қиламиз.

Нуқта ҳаракатининг қўзғалмас $O\zeta\eta\xi$ ва қўзғалувчан $OXYZ$ системаларда кўриб чиқайлик. Нуқтага (221-расм) F_1, F_2 ... кучлар таъсир қилсин. Нуқта қўзғалувчан ноинерциал $OXYZ$ системага нисбатан ҳаракат қилади. Бу $OXYZ$ ноинерциал система инерциал қўзғалмас $O\zeta\eta\xi$ системага нисбатан кўчма ҳаракатда бўлсин. Шундай система учун (77.1) тенглама



221- расм.

ёзилган, бу тенгламадан

$$\vec{a}_{\text{н}} = \vec{a} - \vec{a}_{\text{к}} - \vec{a}_{\text{кор}} \qquad (77.3)$$

ифодани аниқлаб, ифоданинг иккала томонини m га кўпайтирамиз:

$$m\vec{a}_{\text{н}} = m\vec{a} - m\vec{a}_{\text{к}} - m\vec{a}_{\text{кор}} \qquad (77.4)$$

ёки қуйидаги ҳосил бўлади

$$m\vec{a}_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{n} F_i + (-m\vec{a}_{\text{к}}) + (-m\vec{a}_{\text{кор}}). \qquad (77.5)$$

(77.5) тенглама нуқтанинг нисбий ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади. Агар тенгламани декарт координата ўқларидаги проекцияларда ифодаласак, қуйидаги учта тенглама ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} m\vec{a}_x &= F_x + (-m\vec{a}_{\text{к}})_x + (-m\vec{a}_{\text{кор}})_x, \\ m\vec{a}_y &= F_y + (-m\vec{a}_{\text{к}})_y + (-m\vec{a}_{\text{кор}})_y, \\ m\vec{a}_z &= F_z + (-m\vec{a}_{\text{к}})_z + (-m\vec{a}_{\text{кор}})_z \end{aligned}\right\} \qquad (77.6)$$

бунда

$$\vec{F}_{\text{к}} = m\vec{a}_{\text{к}}, \qquad (77.7)$$

$$\vec{F}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}}. \qquad (77.8)$$

Бу тенгламаларга

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}; \quad F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}; \quad F_z = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}$$

белгилашларни киритамиз. Бунда $F_{\text{к}}$ — кўчма куч, $F_{\text{кор}}$ — кориолис кучи дейилади. Ҳар иккала куч $F_{\text{к}}$, $F_{\text{кор}}$ инерция кучлари деб юритилади. Бу кучлар $OXYZ$ система ноинерциал ($\vec{v}$=const) бўлганлиги учун пайдо бўлади. Бу ҳолда, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i$ деб белгиласак, (77.5) ни

$$m\vec{a}_{\text{к}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{к}} + \vec{F}_{\text{кор}} \qquad (77.9)$$

кўринишда ёзамиз.

(77.9) дан нуқта массасининг нисбий тезланишига кўпайтмаси F актив кучлар, $F_{\text{к}}$ кўчма куч ва $F_{\text{кор}}$ кориолис кучларининг геометрнк йигиндисига тенг деган хулосага келамиз.

Демак, куч доим бир хил бўлиши учун актив кучлардан бошқа, яна инерция кучларини ҳам ҳисобга олиш лозим. Ана шу кучларнинг геометрик йиғиндиси нуқта массасининг тезланишига бўлган кўпайтмасига тенг. Агар инерция кучлари $F_к$, $F_{кор}$ мавжуд бўлса, бундай системаларга *ноинерциал* саноқ *системалари* деб айтилади. Инерция кучлари мавжуд бўлмаса ($F_к = F_{кор} = 0$ бўлса) бундай саноқ системалари *инерциал саноқ системалари* деб юритилади.

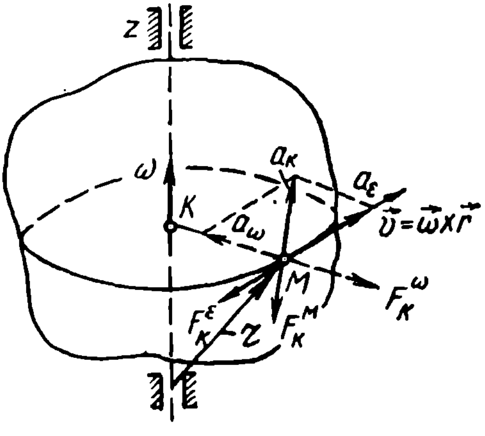
Инерциал саноқ системалари учун (77.9) тенглама қуйидагича ифодаланади:

$$(a = a_{н}) \qquad m\vec{a} = F.$$

Бу тенглама Ньютон қонунлари инерциал саноқ системалари учун аниқ бажарилишини яна бир марта тасдиқлайди.

Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси аниқ ҳолларда муайян бир шаклларда ифодаланади:

1. Қўзғалувчан $OXYZ$ ноинерциал системанинг ҳаракати, яъни кўчма ҳаракат айланма ҳаракат кўринишида бўлсин. Бу ҳолда нуқтанинг кўчма тезланиши ўққа интилувчи $\vec{a}_\omega$ ва $\vec{a}_\varepsilon$ уринма тезланишларга ажралади (222-расм):



222- расм.

$$\vec{a}_к = \vec{a}_\omega + \vec{a}_\varepsilon, \qquad (77.11)$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \qquad (77.12)$$

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \qquad (77.13)$$

Маълумки, $\vec{a}_\varepsilon$, $\vec{a}_\omega$ векторлар йўналиши парма қоидасига асосан аниқланади. Агар (77.11) — (77.13) ифодаларни ҳисобга олсак, (77.9) тенглама

$$m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}^\varepsilon_к + \vec{F}^\omega_к + \vec{F}_{кор}. \qquad (77.14)$$

тарзда ифодаланади. $F^\varepsilon_к$ ва $F^\omega_к$ векторнинг модули

$$F^\varepsilon_к = m \cdot \varepsilon \cdot MK. \qquad (77.15)$$

$$F^\omega_к = m \cdot \omega^2 \cdot MK \qquad (77.16)$$

формулалар орқали ҳисобланади. Бу ерда MK нуқта M дан айланиш ўқигача бўлган энг қисқа масофадир. Кориолис кучи вектори

$$\vec{F}_{кор} = 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_н \qquad (77.17)$$

формула орқали, модули эса

$$F_{кор} = 2m\,\omega v_н \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_н}) \qquad (77.18)$$

формула орқали топилади. $F_{кор}$ вектори ω ва $v_н$ векторга перпендикуляр йўналган, $F_{кор}$ вектор йўналиши парма қоидасига асосан топилади.

2. Кўчма ҳаракат — қўзғалмас ўқ атрофида текис айланма ҳаракат шаклида бўлган ҳолда $\varepsilon = 0$ (чунки $\omega = \text{const}$) ва $F^\varepsilon_к = 0$ эканлиги ҳам равшан. Бу ҳолда (77.14)

$$m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}^\omega_к + \vec{F}_{кор} \qquad (77.19)$$

шаклни олади ва кўчма куч $F_к = F^\omega_к$ бўлади, яъни кўчма куч марказдан қочма инерция кучига тенгдир.

3. Кўчма ҳаракат нотекис илгариланма ҳаракатни ташкил этган ҳолда $\omega = 0$ бўлади. Демак, кўчма куч тангенциал ва нормал компонентларга ажралади. Бу компонентларни

$$F^\tau_к = m\vec{a}_\tau = m\frac{dv}{dt},$$

$$F_{\text{к}}^{\text{п}} = m\vec{a}_n = \frac{mv^2}{\rho}$$

ҳисобга олсак, (77.14), яъни нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\vec{a}_{\text{н}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{к}}$$

ёки

$$m\vec{a}_{\text{н}} = \vec{F} + m\frac{d\vec{v}_{\text{н}}}{dt} + \frac{mv^2}{\rho}\vec{n}^0 \qquad (77.20)$$

шаклни олади, бу ҳолда Кориолис кучи

$$F_{\text{кор}} = 2m\omega v_{\text{н}} \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{н}}}) = 0$$

бўлиб қолади.

4. Кўчма ҳаракат тўғри чизиқли текис илгариланма ҳаракат бўлган ҳолда $\omega = 0$ ва $\varepsilon = 0$ бўлиб қолади. Демак, $v = \text{const}$ ва $F_{\text{к}} = 0$, $F_{\text{кор}} = 0$ эканлиги равшандир ва (77.14) дан

$$m\vec{a}_{\text{н}} = \vec{F}, \qquad (77.21)$$

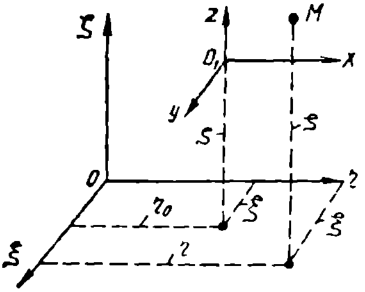
яъни инерциал саноқ системаси учун ёзилган Ньютоннинг иккинчи қонунини ҳосил қилдик. Демак, қўзғалувчан *OXYZ система* инерциал саноқ системаси бўлади.

78-§. Классик механиканинг нисбийлик принципи. Динамика тенгламаларининг инерциал саноқ системаларда инвариантлиги

77-§ да нуқта тўғри чизиқли текис ҳаракат қилганда, (77.21) тенглама ҳосил бўлишини кўриб ўтдик. Агар (77.21) ва (77.21) тенгламани ўзаро тенглаштирсак

$$m\vec{a} = m\vec{a}_{\text{н}}$$

ҳосил бўлади. Бундан $\vec{a} = \vec{a}_{\text{н}}$ тенглик келиб чиқади. Бу тенглик $(\vec{a}_{\text{н}} = \vec{a})$ кўрсатадики, тўғри чизиқли илгариланма ҳаракат қилаётган нуқтанинг тезланиши унинг абсолют тезланишига тенг экан. Демак, бу ҳолда нуқтанинг нисбий ҳаракати (тўғри чизиқли илгариланма ҳаракати), динамика нуқтаи назаридан, абсолют ҳаракатдан



223- расм.

ҳеч фарқ қилмайди, яъни нуқтанинг тезлиги ва тезланиши иккала қўзғалувчан ва қўзғалмас системаларда ҳам айнан бир хил бўлади, деган натижа келиб чиқади. Бу натижа эса нуқта иккала системада ҳам бир хил ҳаракат қилади, деган маънони билдиради.

Шундай қилиб, моддий нуқтанинг тўғри чизиқли текис илгариланма ҳаракатда бўлган қўзғалувчан системадаги ҳаракати айнан қўзғалмас системага нисбатан бўлган ҳаракатидек содир бўлади (223- расм). Бу системаларнинг ҳар бири инерциал саноқ системасидир. Инерциал саноқ системаларида тезлик вектори $\vec{v} = \text{const}$ бўлади. Нуқтанинг тезлиги ва тезланиши айнан, иккала система учун ҳам бир хил бўлади. Нуқтанинг ҳаракатини бу системаларни истаган биттаси учун абсолют ҳаракат деб ҳисоблаш мумкин. Демак, (77.21) тенглама иккала система учун ҳам айнан бир хил бўлади. Механика қонунларининг инерциал саноқ системаларида айнан бир хил қолишига *тенгламаларнинг инвариантлиги* дейилади. Тенгламаларнинг инвариант (ўзгармасдан) қолиши битта инерциал саноқ системани иккинчисидан ажратишга имкон бермайди.

Демак, тенгламаларнинг инвариантлигидан ҳамма инерциал саноқ системаларида механик ҳодисалар (демак, механика қонунлари) айнан бир хил содир бўлади деган хулоса чиқади. Шунинг учун тажрибалар ёрдами билан бир инерциал саноқ системасини иккинчисидан ажратиб бўлмаслиги ҳақидаги фикрни буюк Галилео Галилей катта илмий башорат билан исботлаган эди. Бошқача айтганда, бу фикрни: ҳеч қандай механик тажрибалар ўтказиш йўли билан аниқлаб бўлмайдики, система тинч ҳолатдами ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатидами, чунки иккала системада ҳам тажрибалар айнан бир хил содир бўлади, деб хулоса чиқариш мумкин.

Ҳеч қандай механик тажрибалар ёрдами билан инерциал саноқ системаларини ажратиб бўлмаслиги ҳақидаги таълимот классик механиканинг нисбийлик принципи дейилади. Бу принцип қуйидагича таърифланади: инерциал саноқ системаларида бўлаётган механик ҳодисалар шу системаларнинг тинч ёки тўғри чизиқли текис илгариланма ҳаракатини аниқлаш учун ҳеч қандай маълумот бермайди.

Бу принципга асосан тинч ҳолатдаги системани тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлган системадан ажратиб бўлмаслиги аниқ ва равшан қилиб кўрсатилган. Кейинчалик буюк олим А. Эйнштейн кўрсатдики, умуман физик тажрибалар ёрдами билан ҳам тинч ҳолатдаги системани тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлган системадан ажратиб бўлмайди. Бу принцип ҳозир нисбийлик назариясининг асосини ташкил этади.

Агар система ҳаракат тезлигининг вектори ўзгарса ($\vec{v} \neq \text{const}$ бўлса), яъни система ўзгарувчан тезлик билан ҳаракат қилса, бундай система **ноинерциал** саноқ система дейилади. Ноинерциал саноқ системаларда инерция кучлари (кориолис кучи ва кўчма куч) ҳосил бўлишини 77-§ да батафсил кўриб чиқдик. Ер шари ҳам ўз ўқи атрофида айланма ҳаракат қилганлиги учун инерциал саноқ система эмас, чунки бу ерда кўчма куч $F_к = m\omega^2 R$ мавжуд. Бироқ бу $F_к$ нинг миқдори (жуда кичик эканлигини ҳисобга олганимизда) кичик деб ҳисобланади. Бу системани (инерция кучларини ҳисобга олмасдан) инерциал саноқ система деб, айрим ҳолларда ҳисоб ишлари бажарилади.

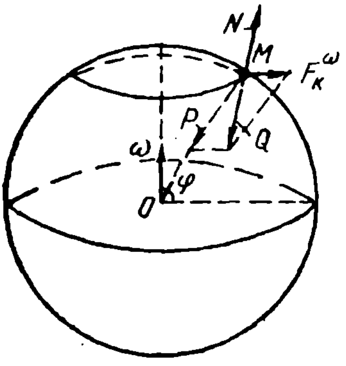
Умуман, инерциал саноқ системалар жуда кўп бўлиши мумкин, бироқ муҳими шундаки, бу системаларнинг ҳаммасида ҳам ва ҳар биттасида ҳам табиий ҳодисалар айнан бир хил бўлади ва механика қонунлари инвариант бўлиб қолади.

79-§. Нисбий тезлиги ноль бўлган нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

Биз 77-§ да нуқта нисбий ҳаракатининг тўрт ҳолини кўрдик. Энди яна битта ҳолни, нуқта қўзғалувчан $OXYZ$ системага нисбатан (221-расмга қаранг) тинч ҳолатда бўлсин, яъни нуқтанинг нисбий тезлиги

$$v_н = 0 \qquad (79.1)$$

бўлган ҳолни кўрайлик. Нуқта Ер сиртида жойлашган ва барча кучлар таъсирида (224-расм) тинч ҳолатда бўлсин. Бу кучлар нуқтанинг тортишиш кучи



224- расм.

$$P = \gamma \frac{mM_0}{R^2} \qquad (79.2)$$

ва марказдан қочма инерция кучи

$$I_п^\omega = m\omega^2 R \cos\varphi \qquad (79.3)$$

формулалар ёрдамида топилади.

Нуқта учун $v_н = 0$ бўлганда $F_{кор}$ кориолис кучи ва $F_к$ кўчма куч қуйидаги кўринишда

$$F_{кор} = 0, \qquad (79.4)$$

$$F_к = F_к^\omega = m\omega^2 R \cos\varphi \qquad (79.5)$$

бўлиши турган гап. Бу ҳолда (77.1) тенглама $a = a_к$ шаклда ва (77.9) қуйидагича

$$\vec{F} + \vec{F}_к = 0 \qquad (79.6)$$

ифодаланади. (79.6) нисбий тезлиги ноль бўлган нуқта ҳаракатининг тенгламасидир. Бу тенгламадан нуқта нисбий ҳаракат қилмаганда ҳам кўчма ҳаракатда қатнашади ва бу ҳолатида актив кучлар билан кўчма кучларнинг геометрик йиғиндиси нолга тенг бўлади, деган хулосага келамиз.

Энди (79.6) тенгламани Ер сиртида жойлашган M нуқта учун қўллаймиз. Бу тенглама, агар реакция кучини N деб олсак, қуйидаги шаклда ёзилади:

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_к^\omega = 0, \text{ чунки } F_к^\omega = F_к. \qquad (79.6)$$

$\vec{P} + \vec{F}_к = \vec{Q}$ десак, Q катталикнинг модули қуйидагича топилади:

$$Q = \sqrt{P^2 + F_к^2 + 2PF_к \cos(180 - \varphi)}. \qquad (79.7)$$

Нуқтага таъсир қиладиган реакция кучининг модули (79.6) ва (79.7) тенгламаларга кўра

$$\vec{Q} = -\vec{N} = -\sqrt{P^2 + F_к^2 - 2PF_к \cos\varphi} \qquad (79.8)$$

кўринишда ёзилади.

Бу реакция кучининг абсолют қиймати (79.8) тенгламага асосан:

а) $\varphi = 0°$ бўлганда (нуқта экваторда бўлади) $\vec{Q}$ энг кичик бўлади;

б) $\varphi = 90°$ бўлса (нуқта қутбда бўлади) $\vec{Q}$ энг катта бўлади.

Реакция кучи $\vec{N}$ нинг йўналиши $\vec{Q}$ нинг тескари йўналишини ифодалайди. $\vec{Q}$ кучнинг $\vec{P}$ дан фарқини аниқлаш учун $F_к^{\omega}$ инерция кучининг Q га бўлган нисбатини топамиз:

$$\frac{F_к^{\omega}}{Q} = \frac{m\omega^2 \cdot R\cos\varphi}{mg} = \frac{\omega^2 P}{g}\cos\varphi.$$

Бу нисбат $\varphi = 0$; $R = 6370$ км; $g = 9{,}80\ \frac{м}{с^2}$ бўлганда

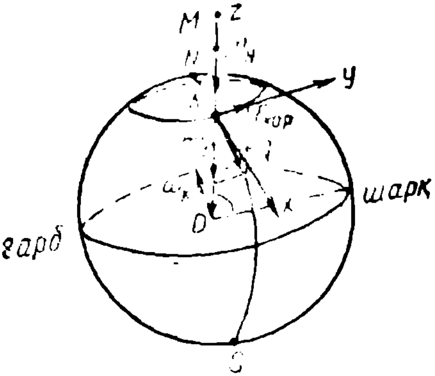
$$\frac{F_{..}}{Q} = \frac{1}{290}$$

бўлиб қолади. Шундай қилиб, нуқтанинг Q оғирлигининг шу нуқтани Ер томонидан P тортишиш кучидан фарқи бўлади.

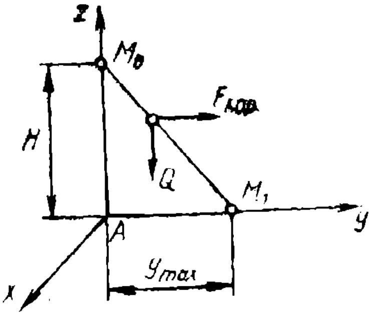
80- §. Эркин тушаётган нуқтанинг шарқий томонга оғиши

Массаси m бўлган моддий нуқта ҳавосиз жойда бошланғич тезликсиз H баландликдан Ер сиртига тушаётган бўлсин (225- расм). Эркин тушаётган нуқтанинг X, Y, Z ўқлари бўйлаб ҳаракат қонунлари топилсин.

Масалани ечиш учун Ер сиртига келиб тушадиган A нуқтани марказ қилиб, Z ўқини Ер радиусининг давоми бўйлаб, Y ўқини A нуқтадан ўтадиган параллелга уринма бўлган шарқий томонга йўналган тўғри чизиқ бўйлаб, X ўқини A нуқтадан ўтувчи меридианга уринма ва жануб томонга йўналган тўғри чизиқ бўйлаб ўрнатамиз.



225- расм.



226- расм.

Бу ҳолда кориолис кучи шарққа томон йўналган бўлади (226-расм). Нуқтанинг Q оғирлиги F тортишиш кучи билан $F_к$ кўчма кучнинг геометрик йиғиндисига тенг:

$$\vec{Q} = \vec{F} + \vec{F}_к. \quad (80.1)$$

Шунинг учун бу ҳолда, кўчма ҳаракат текис айланма ҳаракат бўлганда, (77. 19) ифодага асосан қуйидагига тенг бўлади:

$$m\vec{a}_н = \vec{F} + \vec{F}_к + \vec{F}_{кор}. \quad (80.\ 2)$$

Агар (80. 1) ни ҳисобга олсак,

$$m\vec{a}_н = \vec{Q} + \vec{F}_{кор} \quad (80.3)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу эркин тушаётган нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир.

Масаланинг ечими (80. 3) тенгламадан аниқланади. Бу ечимни аниқлаш учун (80. 3) тенгламани координата ўқларидаги проекцияларда ифодалаймиз:

$$m\ddot{x} = Q_x + F_{x,\ кор} \quad (80.\ 4)$$

$$m\ddot{y} = Q_y + F_{y,\ кор} \quad (80.5)$$

$$m\ddot{z} = Q_z + F_{z,кор} \quad (80.6)$$

Агар нуқтанинг Q оғирлиги Z ўқи бўйича йўналади, деб ҳисобласак (бу ҳолда хатолик иккинчи тартибда бўлади),

$$Q_x = 0;\ F_{x,\ кор} = 0 \quad (80.7)$$

$$Q_y = 0;\ F_{y,\ кор} = 2m\omega v_н \cos\varphi; \quad (80.8)$$

$$Q_z = -Q = -mg;\ F_{z,\ кор} = 0. \quad (80.9)$$

Охирги ифодаларни (80. 4) — (80. 6) тенгламаларга қўйиб,

$$m\ddot{x} = 0,$$

$$m\bar{y} = 2m\omega v_н \cos\varphi;$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

ёки
$$\ddot{x} = 0, \qquad (80.10)$$

$$\ddot{y} = 2\omega v_{н} \cos\varphi, \qquad (80.11)$$

$$\ddot{z} = -g \qquad (80.12)$$

кўринишларда нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини ҳосил қиламиз.

Масала шартига асосан бошланғич шартлар қуйидагича ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} t = 0;\ x = x_0 = 0;\ y = y_0 = 0;\ z = z_0 = H \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = 0;\ \dot{y} = \dot{y}_0 = 0;\ \dot{z} = \dot{z}_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (80.13)$$

(80.10) тенгламани интеграллаcак,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= C_1 \\ x &= C_1 t + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad (80.14)$$

тенглама ҳосил бўлади. (80.13) ни (80.14) га қўйсак, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ эканлигини кўрамиз ва $x = 0$ ифодани ҳосил қиламизки, бу ифода x ўқи бўйича нуқтанинг ҳаракат қилмаслигини кўрсатади.

Энди $v_{н} = \dot{z} = gt$ эканлигини эътиборга олиб, (80.11) ни интеграллаймиз:

$$\dot{y} = 2\omega gt \cos\varphi,$$

$$d\dot{y} = (2\omega gt \cos\varphi)\, dt,$$

$$\dot{y} = \omega gt^2 \cos\varphi + C_3, \qquad (80.15)$$

$$y = \frac{\omega gt^3}{3} \cos\varphi + C_4. \qquad (80.16)$$

Бошланғич шартга асосан $C_3 = 0$; $C_4 = 0$ бўлганлиги учун

$$y = \frac{\omega gt^3}{3} \cos\varphi. \qquad (80.17)$$

(80.17) кўрсатадики, нуқта тушаётганда Y ўқи томон ёки Ернинг шарқий томонига қараб силжийди ва бу силжиш вақтнинг учинчи даражасига ва жойнинг географик кенглиги бўлган φ катталикнинг косинусига тўғри пропорционал бўлади. Бу силжиш экваторда ($\varphi = 0$) энг катта бўлиб, қутбда ($\varphi = 90°$) нолга тенг.

Энди (80.12) тенгламани интеграллаб, Z ни топамиз:

$$d\dot{z} = -g dt$$

$$\dot{z} = -gt + C_5 \qquad (80.18)$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_5 t + C_6. \qquad (80.19)$$

Бошланғич шартга асосан

$$C_5 = 0; \; C_6 = H.$$

Бу ҳолда

$$Z = H - \frac{gt^2}{2} \qquad (80.20)$$

формула келиб чиқади. (80.20) нуқтанинг Z ўқи бўйлаб ҳаракат қонунидир. Агар нуқта Ер сиртига келиб тушса, $Z = 0$ бўлади ва (80.20) дан нуқтанинг H баландликдан тушиш вақтини топиш формуласи келиб чиқади:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \qquad (80.21)$$

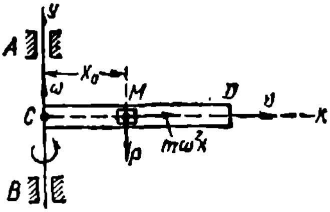
t вақтни ифодалайдиган формулани (80. 17) тенгламага қўйиб y учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$y = \frac{2}{3} H\omega \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \varphi. \qquad (80.22)$$

Агар $\varphi = 60°$ (Санкт-Петербург шаҳри учун) ва $H = 100$ M бўлса, (80.22) га асосан $y = 1{,}1$ см бўлади, яъни нуқта вертикалдан шарққа 1,1 см оғади. Агар нуқта пастдан юқорига отилса, кориолис кучи ғарбий томонга йўналади ва отилган нуқта ҳам вертикалдан ғарбга томон оғади.

Кориолис кучининг пайдо бўлишига сабаб кориолис тезланишидир. Кинематика курсида бу тезланиш пайдо бўлганлиги туфайли дарёлардаги қирғоқларнинг биттасини кўпроқ ейилиши, темир йўлларнинг биттасини кўпроқ едирилиши айтилган эди. Кориолис кучининг таъсирида машина ва механизмлар айрим вақтда сезиларли даражада зарарланади.

62- мисол. (33. 10). Вертикал AB ўқ атрофида CD горизонтал қувур ω бурчакли тезлик билан текис айланади. Бу қувур ичида M жисм жойлашган (227- расм). Агар бошланғич вақтда $v = 0$, $x = x_0$ ва CD қувурнинг узунлиги l бўлса, жисмнинг қувурга нисбатан чиқиш тезлиги аниқлансин.



227- расм.

Ечиш. Нуқта CD қувурга нисбатан v тезлик билан ҳаракат қилганда марказдан қочма кўчма инерция кучи $F_к^\omega = m\omega^2 x$ жисмга таъсир қилади. $\omega = \text{const}$ бўлганлиги учун кўчма кучнинг уринма ташкил этувчиси $F_к^e = 0$ бўлади. Жисмга яна P оғирлик куч таъсир қилади ҳамда Кориолис кучи (бу куч чизма текислигига перпендикулярдир) $\vec{F}_{кор}$ ҳам таъсир қилади. (77.19) га асосан барча кучларнинг геометрик йиғиндиси жисм массасининг тезланишига бўлган кўпайтмасига тенг:

$$m\vec{a}_н = \vec{P} + \vec{F}_к^\omega + \vec{F}_{кор}. \qquad (1)$$

Агар (1) ни x ўқида проекциясини олсак,

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \qquad (2)$$

ҳосил бўлади. Жисм фақат x ўқи бўйлаб ҳаракатда бўлганлиги учун (2) тенгламани ёзиш билан чекланамиз. Энди (2) тенгламанинг ечимини аниқлаймиз. Бунинг учун (2) ни

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

шаклда ёзиб, ечимини $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ кўринишда излаймиз. Бу тенгламадан (4)

$$\dot{x} = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} \qquad (5)$$

эканлиги равшандир. Номаълум C_1, C_2 коэффициентларни топиш учун масаланинг бошланғич шартидан фойдаланамиз

$$t = 0;\ x = x_0;\ \dot{x} = \dot{x}_0 = 0. \qquad (6)$$

Агар (6) ифодадаги бошланғич шартларни (4) ва (5) тенгламага қўйсак

$$x_0 = C_1 + C_2$$
$$0 = C_1\omega - C_2\omega$$

ҳосил бўлади. Бу ердан

$$C_1 = C_2 = x_0/2 \tag{7}$$

келиб чиқади.

Энди (7) ни (4) ва (5) формулага қўямиз:

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right),$$

$$\dot{x} = \frac{x_0\omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right).$$

Масаланинг шартига асосан, $x = l$, $\dot{x} = v$ эканлигини эътиборга олиб,

$$l = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right), \tag{8}$$

$$v = \frac{x_0\omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right) \tag{9}$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Математикадан маълумки,

$$\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = ch\,\omega t. \tag{10}$$

ва

$$\frac{e^{\omega t^2} - e^{-\omega t}}{2} = sh\,\omega t \tag{11}$$

$$ch^2\omega t - sh^2\omega t = 1$$

боғланишлар мавжуд. Шунинг учун (8) ва (9) дан

$$\frac{l^2}{x_0^2} - \frac{v^2}{x_0^2\omega^2} = 1.$$

Охирги тенгламадан

$$v = \omega\sqrt{l^2 + x_0^2}$$

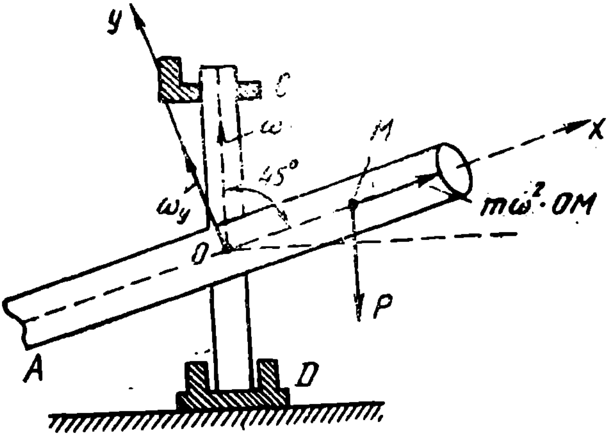
формулани, яъни жисмнинг CD қувурдан чиқиш тезлигини топиш формуласини ҳосил қилдик.

63- мисол. (33. 11). 62- мисол шартларига асосан, M жисмнинг CD қувур ичида ҳаракат қилиш вақтини аниқланг.

Жавоб:

$$T = \frac{1}{\omega}\ln\frac{l + \sqrt{l^2 - x_0^2}}{x_0}.$$

64- мисол. (33. 14). Вертикал CD ўқ билан 45° бурчак ҳосил қилиб, ўқнинг атрофида ω_0 доимий бурчакли тезлик



228- расм.

билан AB қувур айланади. Қувурнинг ичида M оғир шарча бор. Агар шарчанинг бошланғич тезлиги ноль ва у O нуқтадан a масофада жойлашган бўлса, шарчанинг қувурга нисбатан ҳаракат қонуни қандай аниқланади? Ишқаланишни ҳисобга олманг (228- расм).

Ечиш. M шарчага P оғирлик кучи, $m\omega^2 \cdot OM$ кўчма куч таъсир қилади ва $\omega_0 = \text{const}$ бўлганлиги учун $F_к = F_к^{\omega} = m\omega_0^2 \cdot OM$ бўлади. Бу ҳол учун (77. 19) га асосан

$$m\vec{a}_н = \vec{P} + \vec{F}_к^{\omega} + \vec{F}_{кор}. \qquad (1)$$

O нуқтани марказ қилиб, x ва y ўқларини ўтказиб, (1) тенгламанинг x ўқида проекциясини оламиз:

$$m\ddot{x} = \omega_0^2 x \cos^2\alpha + mg\cos\alpha$$

ёки

$$\ddot{x} + (\omega_0^2 \cos^2\alpha)\, x = g\cos\alpha. \qquad (2)$$

Агар $\omega_0 \cos\alpha = \omega$ деб белгиласак, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = g\cos\alpha, \qquad (3)$$

бунда

$$\omega = \omega_0 \cos\alpha = 0{,}5\, \omega_0 \sqrt{2} \qquad (4)$$

эканлигини эътиборга оламиз.

Энди (2) тенгламанинг ечимини аниқлаймиз:

$$x^* = x^* + x^{**}, \tag{5}$$

$$x^* = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \tag{6}$$

$$x^{**} = B \tag{7}$$

эканлиги равшандир. Энди $\ddot{x}^{**}$ катталикларни топамиз:

$$\dot{x}^{**} = 0. \tag{8}$$

$$\ddot{x}^{**} = 0. \tag{9}$$

Масаланинг шартига асосан бошланғич шарт қуйидагича ёзилади:

$$t = 0;\ x = x_0 = a;\ \dot{x} = \dot{x}_0 = 0. \tag{10}$$

Энди (9) ни (2) га қўйиб, B катталик ёки x^{**} топилади:

$$B\,\omega_0^2 \cos^2\alpha = g\cos\alpha$$

$$x^{**} = B = \frac{g}{\omega_0^2\cos\alpha} = \frac{2g}{\sqrt{2}\,\omega_0^2} \tag{11}$$

(6) ва (11) тенгламаларга асосан,

$$x = C_1 e^{0{,}5\,\omega_0\sqrt{2t}} + C_2 e^{-0{,}5\,\omega_0\sqrt{2}\,t} + \frac{2g}{\sqrt{2}\,\omega_0^2} \tag{12}$$

$$\dot{x} = 0{,}5\,\omega_0\sqrt{2}\,C_1,\ e^{0{,}5\,\omega_0\sqrt{2}\,t} - 0{,}5\,\omega_0\sqrt{2}\,\omega_0\,e^{-0{,}5\,\omega_0\sqrt{2t}}. \tag{13}$$

Бошланғич шартларни (12) ва (13) тенгламаларга қўямиз:

$$a = C_1 + C_2 + \frac{2g}{\sqrt{2}\,\omega_0^2},$$

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\omega_0(C_1 - C_2)$$

бундан

$$C_1 = C_2 = \frac{a}{2} - \frac{g}{\sqrt{2}\,\omega_0^2} = \frac{a}{2} - \frac{1}{a}\,\frac{g\sqrt{2}}{\omega_0^2} \tag{14}$$

эканлигини аниқлаймиз. Ниҳоят, (14) ни (12) га қўйсак,

$$x = \frac{1}{12}\left[\left(a - \frac{g\sqrt{2}}{\omega_0^2}\right)\cdot\left(e^{0{,}5\,\omega_0\sqrt{2t}} - e^{-0{,}5\omega_0\sqrt{2}\,t}\right) + \frac{g\sqrt{2}}{\omega_0^2}\right]$$

M шарчанинг *X* ўқи бўйлаб ҳаракат қонунини топган бўламиз.

65- мисол. (33. 15) Ернинг ўз ўқи атрофида айланишини ҳисобга олиб, оғирлик кучининг тезланиши жойнинг географик кенглигига қараб ўзгариш қонунини аниқланг. Ернинг радиуси $R = 6370$ км. Ернинг ўз ўқи атрофида айланишидаги бурчакли тезлиги $\omega = 7 \cdot 10^{-5}$ с $^{-1}$.

Жавоб: агар ω^2 кичик деб ҳисобга олинмаса,

$$g_\varphi = g\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{289}\right),$$

бунда φ — жойнинг географик кенглиги; g — қутбда оғирлик кучининг тезланиши.

XIII БОБ. МЕХАНИК СИСТЕМА ДИНАМИКАСИ

81- §. Механик системага таъсир қиладиган кучларнинг классификацияси

Механик система ёки нуқталар системаси деб шундай нуқталар тўпламига айтиладики, бу нуқталарнинг ҳар биттасининг ҳолати ва ҳаракати шу тўпламдаги қолган ҳамма нуқталарнинг ҳолати ва ҳаракатига боғлиқ бўлади.

Механик система эркин нуқталар системаси ва эркин бўлмаган нуқталар системасига бўлинади. Агар механик системадаги нуқталар ҳаракатини боғланишлар чекламаса ва нуқталарнинг ҳаракати фақат нуқталарга таъсир қиладиган кучлар орқали аниқланса, бундай механик системалар эркин нуқталар системаси дейилади. Механик системадаги нуқталар ҳаракати боғланишлар билан чекланган бўлса, бундай механик системалар эркин бўлмаган нуқталар системаси дейилади. Исталган механизм ёки машинадаги айрим элементнинг ҳаракати ҳамма вақт машина ёки механизмнинг қолган элементларининг ҳаракатига боғлиқ бўлганлиги учун эркин бўлмаган нуқталар системаси бўлади.

Маълумки, боғланишлар таъсири реакция кучлари ёки боғланишлар реакцияси билан алмаштирилади. Шунинг учун эркин бўлмаган нуқталар системасига таъсир қиладиган кучларни берилган актив кучларга ва боғланишлар реакциясига ажратилади. Бундан ташқари мехник системага (эркин ёки эркин бўлмаган нуқталар системаси) таъсир қиладиган кучлар ички ва ташқи кучларга бўлинади:

1) механик системадаги нуқталарнинг ўзаро таъсир кучлари ички кучлар дейилади. Системанинг i-нуқтасига таъсир қиладиган қўшни нуқтанинг таъсир кучи $F_i^{(i)}$ бўлса, i-нуқта қўшни нуқтага акс таъсир қилади. Бу таъсир қилувчи куч $F_i^{(i)}$ ва акс таъсир қилувчи куч $-F_i^{(i)}$ қарама-қарши йўналишда бўлиб, модуллари тенгдир. Шунинг учун кучларнинг бош вектори $\vec{P}^{(i)}$ нолга тенг бўлади, яъни

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \cdot \vec{F}_i^{(i)} = 0. \qquad (81.1)$$

Агар (81.1) тенгламанинг X, Y, Z ўқлардаги проекциясини олсак, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$\sum_{i=1}^{N} \cdot F_{i,x}^{(i)} = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} \cdot F_{i,y}^{(i)} = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} \cdot F_{i,z}^{(i)} = 0. \qquad (81.2)$$

(81.2) дан ички кучларнинг ҳар бир ўқдаги проекцияларининг йиғиндиси нолга тенг деган хулоса чиқади.

Ички кучларни ифодалайдиган (81.1) ва (81.2) тенгламани тегишли радиус-векторларга кўпайтирсак, куч моментларининг геометрик йиғиндиси ёки бош моменти нолга тенг эканлигини кўрамиз, яъни

$$\sum_{i=1}^{N} M_i^{(i)} = 0 \qquad (81.3)$$

ёки ўқлардаги проекцияларда

$$\sum_{i=1}^{N} M_{i,x}^{(i)} = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} M_{i,y}^{(i)} = 0; \quad \sum_{i=1}^{N} M_{i,z}^{(i)} = 0 \qquad (81.4)$$

шаклда ифодаланади. Бу тенгламалардан системадаги ички кучларнинг ихтиёрий нуқтага нисбатан бош моменти ёки бош моментининг ўқлардаги проекциялари нолга тенг, деган хулоса чиқади;

2) системадаги нуқталарга ундан ташқарида бўлган нуқталар томонидан бўладиган таъсир кучлари ташқи

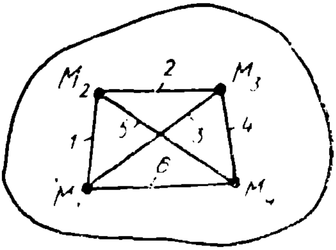
кучлар дейилади. Агар системанинг j- нуқтасига таъсир қиладиган кучларни $F_j^{(e)}$ деб белгиласак, ташқи кучларнинг бош вектори

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} F_j^{(e)} \qquad (81.5)$$

формула орқали топилади. Бу ерда ҳар бир нуқтага таъсир қиладиган ташқи кучларнинг тенг таъсир этувчисини $F_j^{(e)}$ деб тушунамиз.

Таъкидлаш лозимки ,(83.3) ва (81.5) ифодалар ташқи кўринишидан статикада кўрилган кучларнинг мувозанат тенгламаларига ўхшаса-да, бу тенгламалардаги кучлар бир-бирини мувозанатламайди, чунки ички кучлар ҳар хил нуқталарга қўйилган. Бу кучларнинг таъсирида системадаги нуқталар ҳаракат қилиб, кинематик ҳолатларини ўзгартириши мумкин.

Ҳар қандай қаттиқ жисм бўлаги ҳам бир-бирига қаттиқ боғланган нуқталардан тузилганлиги учун бу жисмни ўзгармас система ёки механик система деб ҳисоблаш мумкин. Бу системада нуқталар қаттиқ боғланган. Боғланишни фикран стерженлар орқали тасвирлаш мумкин. Агар жисм икки нуқтадан тузилган бўлса, бу нуқталарни стержень *1* боғлайди, учта нуқтадан тузилган бўлса, *1, 2* ва *3* стержень, яъни учта стержень боғлайди; тўртта нуқтадан тузилган бўлса, *1, 2, 3, 4, 5, 6* стерженлар боғлайди (229- расм). Нуқталар бешта бўлса, стерженлар *10* та, олтита нуқта учун *15* стержень.

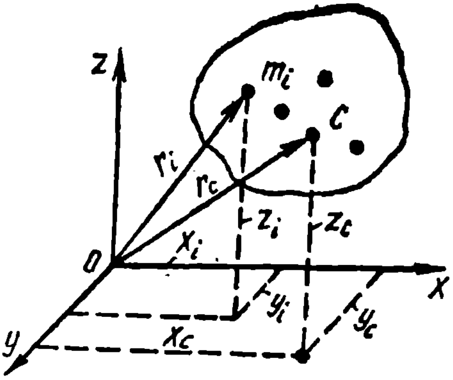


229- расм.

Шундай қилиб, қаттиқ жисмнинг нуқталари чексиз кўп стерженлар билан боғланган деб ҳисоблаймиз.

82- §. Механик системанинг массаси ва массалар маркази

Масса нуқта ёки системада бор бўлган модда миқдоридир. Масса скаляр катталикдир. Шунинг учун системанинг массаси системадаги нуқталар массасининг



230- расм.

йиғиндисига тенг. Агар системанинг i нуқтасининг массаси m_i бўлса, системанинг тўлиқ массаси (230- расм) формула

$$m = \sum_{i=0}^{N} m_i \qquad (82.1)$$

орқали аниқланади. Системадаги нуқталарнинг вазиятлари радиус- вектор орқали аниқланади. Агар m_1 массали нуқтанинг вазияти r_1 радиус- вектори билан, m_2 массали нуқтанинг вазияти r_2 билан ва ҳоказо деб қабул қилсак, m_i массали нуқтанинг вазияти r_i билан аниқланса, нуқтанинг вазияти x_i, y_i, z_i координаталар орқали ҳам ифодаланади.

Радиус- вектори қуйидаги формула билан аниқланадиган нуқта системанинг массалар маркази дейилади:

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{m} \cdot \qquad (82.2)$$

Бунда r_c — системанинг массалар маркази бўлган C нуқтани ифодалайдиган радиус- вектор. Агар (82. 2) ифоданинг координата ўқларидаги проекцияларини олсак,

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i x_i}{m} \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i y_i}{m} \\ z_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i z_i}{m} \end{aligned}\right\} \qquad (82.3)$$

формула ҳосил бўлади. Системанинг массалар марказининг вазияти системадаги ҳар бир нуқтанинг массаси ва вазиятига боғлиқ. Системанинг массалар маркази системанинг оғирлик маркази бўлиб қолади, лекин оғирлик маркази куч майдони мавжуд бўлганда маънога эгадир. Агар системага куч майдони (тортишиш майдони) таъсир этмаса, оғирлик маркази бўлмайди, бироқ массалар маркази ҳамма вақт мавжуд ва физикавий маънога эга.

Статика бўлимида оғирлик марказини аниқлаш учун қуйидаги формулалар чиқарилган эди:

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i} \\ y_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i} \\ z_c &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i g_i} \end{aligned}\right\} \qquad (82.4)$$

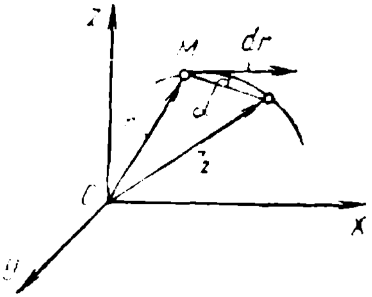
Агар оғирлик кучларининг майдони бир жинсли (системанинг ҳамма жойида g бир хил қийматга эга) бўлса, (82.4) формулалардаги g суммалардан ташқари чиқиб қисқаради ва (82.3) формулалар ҳосил бўлади.

Демак, бир жинсли оғирлик кучи майдонида оғирлик маркази билан массалар маркази устма-уст тушади, яъни системанинг битта нуқтаси ҳам оғирлик маркази, ҳам массалар маркази бўлади.

XIV БОБ. МЕХАНИК ИШ. ПОТЕНЦИАЛЛИ МАЙДОНЛАР

83- §. Элементар ва тўлиқ иш

Фараз қилайлик, кучнинг таъсири остида M нуқтани ифодалайдиган радиус-вектор $d\vec{r}$ миқдорга ўзгарса (231-расм) $\vec{F}$ кучнинг $d\vec{r}$ силжиш векторига бўлган скаляр кўпайтмаси *элементар механик иш* дейилади. Агар элементар ишни dA деб белгиласак, таърифга асосан иш формуласи



231- расм.

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (83.1)$$

ёки

$$dA = F\cdot dr\cos(\overrightarrow{F_2 d r}) \qquad (83.2)$$

шаклда ёзилади.

(83. 2) дан $\vec{F}$ ва $d\vec{r}$ вектори орасидаги бурчак α билан белгиланса, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$dA = \vec{F}d\vec{r}\cos\alpha. \qquad (83.\ 3)$$

Бу ерда агар:

1) $\alpha = 0$ ёки 360° бўлса, $\cos 0^\circ = 1$ ва

$$dA = F\cdot d\,r; \qquad (83.4)$$

2) $\alpha = 90^\circ$ ёки 270° бўлса, $\cos 90^\circ = 0$ ва

$$dA = 0 \qquad (83.5)$$

бўлади. (83.5) дан куч вектори силжиш векторига тик йўналган бўлса, механик иш бажарилмайди, деган натижага келамиз.

Турли хил машина ва механизмлар айнан бир ишни турлича вақтда бажаради, яъни вақт бирлигида ҳар хил машиналар турлича иш бажаради. Масалан, поезд маълум вақтда бир неча минг тонна юкни бир жойдан иккинчи жойга кўчираётганда айнан шу юкларни автомашина билан ўша масофада кўчирилганда, бир неча марта кўп вақт кетади. Поезд вақт бирлигида автомашинага нисбатан анча кўп иш бажаради.

Вақт бирлигида бажарилаётган ишни кўрсатувчи физик катталик *қувват* дейилади. Агар N ҳарфи билан қувватни белгиласак, таърифга мувофиқ

$$N = \frac{dA}{dt} \qquad (83.6)$$

формула ҳосил бўлади.

Иш бирлиги қилиб СИ системасида 1 Ж қабул қилинган. Бир Ньютон куч таъсирида жисм (нуқта) бир метр масофага силжиса, бир Жоуль (Ж) иш бажарилади:

$$1Ж = 1Н \cdot м \doteq 10^7 \text{ эрг}.$$

Иш бирлиги қилиб яна кгм (килограмм куч метр) қабул қилинган. 1 кгк=9,8 Н бўлганлиги учун

$$1 \text{ кг (куч)} \cdot м = 9{,}8 \text{ Нм} = 9{,}8 \text{ Ж}.$$

Қувват бирлиги учун СИ системасида Ватт (Вт) қабул қилинган:

$$1 \text{ Вт} = 1 \frac{Ж}{с};\ 1кВт = 10^3Вт;\ 1МВт = 10^6 Вт.$$

Агар 1 с да 1 Ж иш бажарилса, қувват 1 Вт бўлади. Минг Ваттга бир кВт (киловатт), миллион Вт га МВт (мего-ватт) дейилади.

Иш бирлиги учун яна втс, квт·соат, МВт·соат, қувват бирлиги қилиб о. к. (от кучи) ҳам қабул қилинган:

$$1 \text{ Вт. с} = 1 Ж.$$

$$1кВт \cdot соат = 3600000 \text{ Вт} \cdot с = 36 \cdot 10^5 Ж.$$

$$1 \text{ о.к.} = 75 \frac{\text{кг (куч) м}}{с}.$$

Иш ва қувват скаляр катталикдир, иш манфий ёки мусбат ишорали бўлиши мумкин. Масалан, қаршилик кучлари, ишқаланиш кучларининг бажарган иши манфий ишорали бўлади, деб ҳисобланилади.

Биз элементар ишни топиш формуласини кўриб чиқдик. Агар нуқта ёки жисмнинг тўлиқ бажарган ишини топиш лозим бўлса, нуқта босиб ўтган масофани фикран элементар бўлакларга ажратиб, ҳар бир бўлакда бажариладиган элементар ишларни топиб, ҳаммасини қўшиш керак бўлади ёки бошқача айтганда, (83.1) тенгламани интеграллаш лозим:

$$A = \int_r \vec{F} d\vec{r}. \tag{83.7}$$

Энди A ишни $\vec{F}$ куч ва $\vec{r}$ радиус-вектор проекциялари орқали ифодалаймиз. Маълумки,

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}, \tag{83.8}$$

$$d\vec{r} = d_x\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \tag{83.9}$$

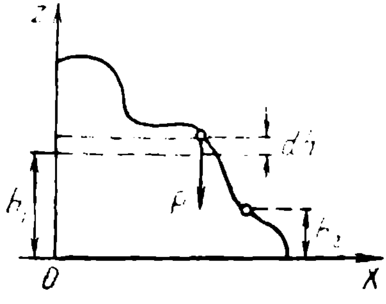
ва

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{i}\cdot\vec{i} = 1, & \vec{i}\cdot\vec{j} = 0, \\ \vec{j}\cdot\vec{j} = 1, & \vec{i}\cdot\vec{k} = 0, \\ \vec{k}\cdot\vec{k} = 1; & \vec{j}\cdot\vec{k} = 0; \end{array}\right\} \tag{83. 10}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{i}\times\vec{i} = 0 & \vec{i}\times\vec{j} = 1, \\ \vec{j}\times\vec{j} = 0 & \vec{i}\times\vec{k} = 1, \\ \vec{k}\times\vec{k} = 0 & \vec{j}\times\vec{k} = 1 \end{array}\right\} \tag{83. 11}$$

боғланиш мавжуд. (83. 8) ва (83. 9) боғланишни (83. 10) формулаларни ҳисобга олиб, (83. 7) тенгламага қўйиб, ушбу

$$A = \int (F_x dx + F_y\, dy + F_z dz) \tag{83. 12}$$



232-расм.

формулани, яъни тўлиқ ишни куч ва радиус-вектор проекциялари орқали ифодалайдиган формулани топамиз.

Тўлиқ ишни топишга доир мисоллар келтирамиз:

а) оғирлиги P бўлган нуқта h_1 баландликдан тушиб h_2 вазиятни олганда бажариладиган иш (83. 1) га асосан қуйидаги формуладан топилади:

$$A = \int_{h} p dh. \tag{83. 13}$$

Бунда dh — нуқтанинг элементар кўчишидир. Кўчиш натижасида нуқта баландлиги h_1 дан h_2 гача ўзгаради. Агар $P = \text{const}$ деб ҳисобласак, иш ушбу кўринишда ифодаланади (232- расм):

$$A = P \int_{h_1}^{h_2} dh = P (h_2 - h_1) \tag{83. 14}$$

б) m массали нуқта $F = \gamma \frac{mM}{r^2}$ тортишиш майдонида ҳаракат қилиб иш бажаради. Бу иш

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr \tag{83. 15}$$

формула орқали аниқланади. Ернинг массаси M, нуқта массаси m ва гравитацион доимийлик γ бўлганлиги учун

$$A = \gamma mM \int_{r_1}^{r_2} r^{-r} dr = - \gamma mM \frac{1}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma mM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \tag{83 16}$$

ифодани ҳосил қиламиз;

в) нуқта $F_x = -kx$ эластиклик кучи таъсирида фақат X ўқи бўйлаб ҳаракат қилганида бажариладиган иш

$$A = - \int_{0}^{x} kxdx = - \frac{kx^2}{2} \tag{83. 17}$$

кўринишидаги формула орқали ҳисобланади.

84- §. Потенциал майдонлар. Куч функцияси. Консерватив системалар

Олдинги параграфда кўрдикки, нуқта оғирлик кучи ва тортишиш кучи таъсирида бўлганида бажарилган иш унинг фақат бошланғич ва охирги вазиятига боғлиқ. Бошқача айтганда, (83.14) формулада A ни нуқтанинг биринчи ва иккинчи вазиятини (бошланғич ва охириги вазиятларини) ифодалайдиган h_1 ва h_2 га, (83.16) формулада A иш яна нуқтанинг бошланғич ва охирги вазиятларини ифодалайдига r радиус-векторга боғлиқ.

Худди шундай ҳодисани электростатик майдонда ҳаракатланаётган q_1 зарядда ҳам кўриш мумкин. Бу майдонда q_1 зарядга $F = \frac{q_1q_2}{r^2}$ ($CGSE$ системасида) электр кучи таъсир қилади. Бу ҳолда бажарилган иш

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_1q_2}{r^2}dr = q_1\left(\frac{q_2}{r_2} - \frac{q_2}{r_1}\right), \qquad (84.1)$$

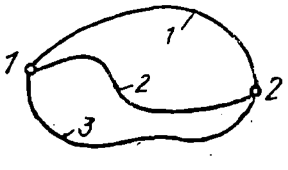
бунда: q_2 — электростатик майдонни ҳосил қиладиган заряд; $\frac{q_2}{r_2} = \varphi_1$ ва $\frac{q_2}{r_1} = \varphi_2$ — майдоннинг биринчи ва иккинчи нуқталаридаги электр потенциалидир. Агар $q_1 = q$ деб ҳисобласак,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (84.2)$$

(84.2) дан ҳам кўринадики, бажарилган иш нуқтанинг фақат бошланғич (φ_1) ва охирги вазиятига (φ_2), аниқроғи, иш потенциаллар айирмасига боғлиқдир. Бу ҳолдан ҳам иш миқдори нуқтанинг фақат бошланғич ва охирги вазиятларига боғлиқ бўлиб, нуқтанинг оралиқдаги вазиятига (ёки йўл шаклига) боғлиқ эмас, деган хулоса чиқарамиз.

Майдонда бажарилган иш йўл шаклига боғлиқ бўлмаса, бундай майдонлар *потенциалли майдонлар* дейилади. Потенциалли майдонда нуқта A вазиятдан B вазиятга, масалан, 1, 2 ва 3 йўл билан ўтганда ҳам айнан бир хил иш бажаради (233-расм). Тескариси ҳам бўлади, яъни майдон потенциалли бўлса, бундай майдонда бажарилган иш йўл шаклига боғлиқ бўлмайди.

(83.17), (84.1), (84.2) формула гравитацион (тортишиш) ва электростатик майдонлар учун ўринлидир. Бу гравитацион ва электростатик майдон потенциалли майдондир. Потенциалли майдонларни U куч функцияси билан ифодалаймиз. U куч функцияси майдоннинг ҳар бир нуқтасида



233- расм.

биттагина ва фақат биттагина қийматга эга бўлади. Демак, фақат координата функциясидир:

$$U = u(x,\ y,\ z). \tag{84.3}$$

Нуқтанинг вазияти (координаталари) ўзгариши билан U куч функцияси ўзгаради. Бу функциянинг қийматини ўзгартириш учун иш бажариш лозим ва, аксинча, функция ўзгарса иш бажарилади, яъни

$$dA = dU. \tag{84.4}$$

Бу ердаги dU функциянинг тўлиқ дифференциалли, стационар майдонларда

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{84.5}$$

шаклда ёзилади.

Куч функцияси вақтга боғлиқ бўлмаса, бундай майдон стационар майдон дейилади ва бундай майдон учун (84.3) ифода ёзилади. Куч функцияси вақтга боғлиқ бўлса, бундай майдон ностационар майдон дейилади ва бундай майдонларда куч функцияси қуйидагича кўринишда бўлади:

$$U = u(x,\ y,\ z,\ t). \tag{84.6}$$

Иккинчи томондан элементар ишни (83.12) формулага асосан

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \tag{84.7}$$

эканлиги маълум. (84.7) билан (84.5) тенглаштирилса, куч проекциялари учун

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ F_y &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ F_z &= \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{84.8}$$

формула ҳосил бўлади. (84.8) формуладан кўринадики, кучнинг маълум ўқдаги проекцияси куч функциясидан ўша ўқдаги (нуқта ёки системанинг массалар марказининг) координаталаридан олинган хусусий ҳосилага тенг.

Механик система потенциалли майдонда жойлашган бўлса, потенциал энергияга эга бўлади. Система вазиятига ёки системадаги нуқталарнинг вазияти (ҳолати) га боғлиқ бўлган энергия потенциал энергия дейилади. Система биринчи ҳолатда $П_1$, иккинчи ҳолатда $П_2$ потенциал энергияга эга бўлса, шу системани 1 ҳолатдан 2 ҳолатга кўчирилганда бажарилган (элементар иш $dA = -dП$ бўлганлиги учун) тўлиқ иш

$$dA = П_1 - П_2 = -(П_2 - П_1) = -dП \qquad (84.9)$$

кўринишда ёзилади. (84.9) билан (84.4) таққосланса,

$$dU = -dП \qquad (84.10)$$

келиб чиқади. (84.10) дан системанинг потенциал энергияси ўзгариши куч функциясининг ўзгаришига тенг, деб айтиш мумкин, яъни (84.10) тенглик ўринли бўлади. Тенгликдан системанинг потенциал энергиясининг ўзгариши манфий ишора билан олинган куч функциясининг ўзгаришига тенг деган хулоса чиқади ($\Delta П = -\Delta U$). Агар системанинг бошланғич потенциал энергияси $П_0 = 0$ деб олинса,

$$A = U = -П \qquad (84.11)$$

ифода келиб чиқади. (84.11) потенциал энергиянинг камайиши ҳисобига иш бажарилишини кўрсатади. Охирги ифодадан

$$F_x = -\frac{\partial П}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial П}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial П}{\partial z} \qquad (84.12)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламаларни (84.8) билан таққослаганда

$$\frac{\partial П}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial П}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial П}{\partial z} = -\frac{\partial П}{\partial z}$$

шаклда куч проекциялари аниқланади. (84.12) дан системага (ёки системадаги нуқталарга) таъсир қиладиган кучларнинг маълум ўқдаги проекциялари система потенциал энергиясидан ўша ўқдаги координаталари бўйича олинган хусусий ҳосиланинг манфий ишорали қийматига тенг экан, деган хулоса чиқади.

Потенциалли майдонда координаталари x, y, z бўлган битта нуқта ҳаракат қилса, майдон стационар бўлганда U ва $П$ катталикларни

$$U = u(x, y, z), \qquad (84.13)$$

$$П = П(x, y, z) \qquad (84.14)$$

шаклда ёзиш мумкин. Бу ҳолда F_x, F_y ва F_z катталик (84.8) ва (84.12) формуладан топилади ва (83.8) тенгламага асосан

$$\vec{F} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

ёки

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right) = -\operatorname{grad}\vec{u} = -\frac{\partial u}{\partial n}\vec{n}. \qquad (84.15)$$

(84.15) дан кўринадики, градиент вектори куч функциясидан сиртга ўтказилган нормал бўйича олинган хусусий ҳосилага тенг (n — нормалга ўтказилган бирлик вектор ёки ортадир). Градиент куч функциясининг ортуви томон ёки потенциал энергиянинг камайиши томон йўналгандир.

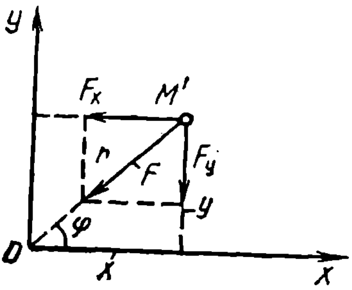
Куч проекцияларини ифодалайдиган (84.12) тенгламалардан

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_x}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial П}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 П}{\partial y \partial x};\\
\frac{\partial F_y}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial П}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 П}{\partial x \partial y};\\
\frac{\partial F_y}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial П}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 П}{\partial z \partial y};\\
\frac{\partial F_z}{\partial y} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial П}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 П}{\partial z \partial y};\\
\frac{\partial F_y}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial П}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 П}{\partial x \partial_z};\\
\frac{\partial F_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial П}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 П}{\partial z \partial x}.
\end{aligned} \qquad (84.16)$$

Аралаш ҳосилалар дифференциаллаш тартибига боғлиқ бўлмаганлигидан фойдаланиб,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \qquad (84\ 17)$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бу (84.22) майдоннинг



234- расм.

потенциалли бўлишининг ҳам етарли ва кўрсатиш мумкинки, ҳам зарурий шартидир. Бу шартларнинг бажарилишига битта мисол кўриб чиқайлик.

Массаси m бўлган нуқтага икки ўлчамли майдонда F марказий куч таъсир қилсин. Бу кучнинг таъсир чизиғи марказ O нуқтадан ўтганлиги учун марказий куч дейилади (234- расм). Расмдан

$$F_x = F\cos\varphi = \frac{F\cdot x}{r}; \quad F_y = F\cdot\sin\varphi = \frac{F\cdot y}{r}; \qquad (84.18)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}; \quad F = F(r). \qquad (84.19)$$

Охирги формуладан

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]'_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} \qquad (84.20)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}. \qquad (84.21)$$

Энди (84. 14) дан фойдаланиб,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F(r)}{r}\right), \qquad (84.22)$$

$\frac{\partial}{\partial y} = x\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial r}$ бўлганлиги ва (84.22) ифодани ҳисобга олсак,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{d}{dr}\left[\frac{F(r)}{r}\right] = xy\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left[\frac{F(r)}{r}\right] \qquad (84.23)$$

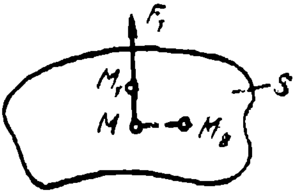
тенглама ёзилади. Худди шундай кўрсатамизки,

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = xy\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[\frac{F(r)}{r}\right]$$

ҳосил бўлади. Демак, (84.13) шарт бажарилади, чунки охирги икки тенглама бир хил ва бу майдон потенциалли майдондир.

Кўрсатиш мумкинки, F куч марказий бўлмаса (234- расмга қаранг) масалан, F кучи $OM'=r$ кесмага тик бўлса, (84.18) шарт бажарилмайди. Бу ҳолда майдон потенциалли бўлмайди.

Потенциаллари бир хил қийматга эга бўлган нуқталарни ифодалайдиган сиртга бир хил потенциалли сиртлар ёки эквипотенциал сиртлар дейилади. Эквипотенциал сиртлар учун



235- расм.

$$\Pi(x,\ y,\ z) = C = \text{const} \qquad (84.24)$$

тенглик бажарилади. Бунда C параметр чексиз кўп қийматларга эга бўлади. C параметрнинг ҳар бир қийматига — битта эквипотенциал сирт тўғри келади.

Фараз қилайлик, M_1 нуқта S эквипотенциал сиртга жойлашган (235- расм) ва бу нуқта S сирт бўйлаб ҳаракат қилиб, M_2 вазиятига ўтса, бажарилган элементар иш: бир томондан

$$\delta A = \vec{F} \cdot \vec{MM_2} = FMM_2 \cos(\widehat{\vec{F}_1 M \vec{M}_2}),$$

иккинчи томондан

$$\delta A = \Pi - \Pi_2$$

ифодага тенг.

S сирт эквипотенциал ва M_2 ҳам M сиртда жойлашганлиги учун $\Pi = \Pi_2$ ва $\delta A = 0$ бўлади. Лекин $F \neq 0$; $MM_2 \neq 0$ эканлигини эътиборга олсак,

$$\cos(\vec{F}_1 M \vec{M}_2) = 0$$

ва F куч вектори билан MM_2 силжиш векторлари ўзаро перпендикуляр бўлишини кўрамиз, яъни $\vec{F} \perp M\vec{M}_2$.

Агар M нуқта M_1 ҳолатга ўтса, яъни M нуқта F_1 куч йўналишида ҳаракат қилса, F_1 ва MM_1 орасидаги бурчак 0° бўлса,

$$\delta A = F \cdot MM_1 \cos 0^\circ = F \cdot MM_1 > 0$$

бўлади ва $\delta A = \Pi - \Pi_1$ бўлганлиги учун $\Pi - \Pi_1 > 0$ ва $\Pi > \Pi_1$ ҳосил бўлади. Демак, F куч потенциал энергиянинг камайиши томон йўналгандир.

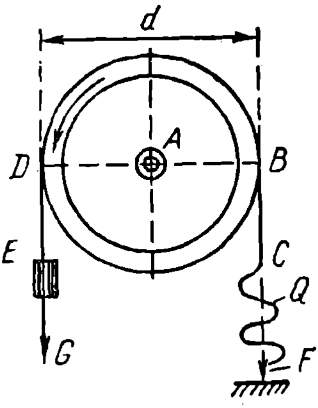
Механик система потенциалли кучлар таъсирида T кинетик ва Π потенциал энергияга эга бўлса, тўлиқ механик энергия $T + \Pi$ эканлиги маълумдир. Агар ана шу тўлиқ энергия

$$T + \Pi = \text{const}$$

доимий қолса, бундай системалар *консерватив системалар* дейилади.

Консерватив системаларда, яъни стационар потенциалли майдонларда ҳаракат қилаётган механик системаларда тўлиқ механик энергия доимий сақланади. Бундай системаларда кинетик энергия қанчага ошса, айнан шунча миқдорда потенциал энергия камаяди ва аксинча, тўлиқ механик энергия ўзгармайди.

Юқорида кўрилган электростатик ва гравитацион кучлар майдони потенциалли майдон бўлиб, консервативдир.



236- расм.

66- мисол. (29. 17) Двигателнинг қувватини аниқлаш учун унинг A шкивига ёгочдан ясалган колодка кийдирилган. Колодкадан тасма ўтказилган (236- расм). Тасманинг BC ўнг тормози Q пружинали тарози билан сақланади, DE томони эса оғирлиги $G = 1$ кг юк билан тортилади. Агар двигатель $120\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ тезлик билан айланганда пружинали тарози $F = 4$ кг·кучни кўрсатади. Шкивнинг диаметрини $d = 63{,}6$ см деб, двигателнинг қуввати аниқлансин.

Ечиш. Агар двигатель t вақтда A иш бажарса, двигателнинг қуввати

$$N = \frac{A}{t}, \qquad (1)$$

бажарилган иш эса

$$A = M \cdot \varphi \qquad (2)$$

ифодадан топилади. Бунда M — двигатель ҳосил қиладиган айлантирувчи куч моменти, φ — бурилиш бурчаги. Масаланинг шартига асосан система мувозанатда бўлганда двигатель ҳосил қиладиган қувват тормозловчи куч қувватига тенг. Тормозловчи куч эса $(F—G)$ орқали аниқланишини ва $\varphi = \omega t$ тенгламани ҳисобга олсак, иш қуйидагича аниқланади:

$$A = d \cdot (F - G)\,\omega t = 2\pi n d\,(F - G)\,t, \qquad (3)$$

чунки

$$\omega = 2\pi n. \qquad (4)$$

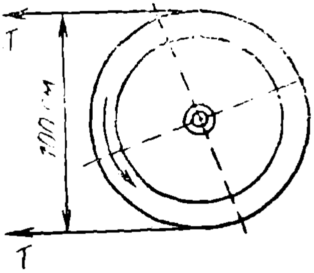
(3) ни (1) тенгламага қўйсак,

$$N = 2\pi n (F - G) d \qquad (5)$$

Масала шартида берилганларни (5) ифодага қўйиб,

$$N = 118 \text{ Вт}.$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.



237- расм.

67- мисол. (29. 18). Шкивга ўралган тасма орқали 20 о. к. қувват узатилади. Шкивнинг радиуси 50 см ва $150\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ тезлик билан айланади. Тасмани эргаштирувчи тармоғининг тортилиш кучи T эргашувчи тармоқнинг t тортилиш кучидан икки марта катта деб ҳисоблаб, тортилиш кучлари бўлган T ва t аниқлансин (237- расм).

Жавоб: $T = 382$ кГ; $t = 191$ кГ.

Кўрсатма. 1 о. к. $= 75 \frac{\text{кгм}}{\text{с}} = 736$ Вт деб олинсин.

XV БОБ. НУҚТА ВА МЕХАНИК СИСТЕМА УЧУН ДИНАМИКАНИНГ УМУМИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

85- §. Нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Физикадан маълумки, нуқта массасини унинг тезлигига бўлган кўпайтмаси *ҳаракат миқдори* дейилади. Агар ҳаракат миқдорини Q билан белгиласак,

$$\vec{Q} = m\vec{v}. \qquad (85.1)$$

Ҳаракат миқдори вектор катталик бўлиб, нуқта тезлиги вектори йўналиши бўйлаб йўналгандир. Маълумки, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad (85.2)$$

кўринишда ёзилади. Бу ерда $m = \text{const}$ деб ҳисобласак, (85. 2) тенгламани

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \qquad (85.3)$$

ёки

$$d\vec{Q} = \vec{F}\cdot dt \qquad (85.4)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Нуқтага таъсир қиладиган $\vec{F}$ кучни dt таъсир вақтига бўлган кўпайтмаси куч импульси (туртки) дейилади. Агар нуқтага $\vec{F_1}, \vec{F_2} \ldots \vec{F_n}$ кучлар таъсир қилса (бу кучлар яқинлашувчи кучлар бўлсин) ва уларнинг тенг таъсир этувчиси F бўлади деб ҳисоблаб, қуйидагини ёзамиз:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}. \qquad (85.5)$$

Агар биринчи F_1 куч импульсиии S_1, иккинчи куч импульсини S_2 ва ҳоказо F_n куч импульси S_n деб белгиланса, (85.4) тенгламанинг ўнг томони

$$\vec{S} = \vec{F}dt = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \ldots + \vec{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{S_i} \qquad (85.6)$$

кўринишни олади ва (85.4) ифода

$$d\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{S_i} \qquad (85.7)$$

бўлиб қолади. (85.7) билан (85.4) тенгламалар нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал шакли дейилади. Бу теорема қуйидагича ўқилади: нуқтанинг ҳаракат мнқдори дифференциали шу нуқтага таъсир қиладиган кучлар импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг. (85.7) да кучларнинг таъсир қилиш вақти dt чексиз кичик ва ҳаракат миқдорининг ҳам ўзгариши чексиз кичикдир.

Ҳаракат миқдорининг маълум t_2-t_1 вақт оралиғида чекли ўзгаришини аниқлаш учун (85.7) ни интеграллаш лозим:

$$\int_{Q_1}^{Q_2} d\vec{Q} = \int_{t} \vec{F}\cdot dt, \qquad (85.8)$$

бундан

$$\vec{Q}_2-\vec{Q}_1=\int\limits_t \vec{F}\,dt \tag{85.9}$$

ёки (85. 5) ҳисобга олинса,

$$\vec{Q}_2-\vec{Q}_1=\int\limits_t \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\cdot dt. \tag{85.10}$$

Охирги икки тенгламага нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидагй теорема дейилади. Маълум вақт оралиғида нуқтанинг ҳаракат миқдорининг ўзгариши, шу вақт оралиғида нуқтага таъсир қилаётган кучлар импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг. Бу теоремани, (85.6) ифодани ҳисобга олиб, қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\vec{Q}_2-\vec{Q}_1=\sum_{i=1}^{n}\vec{S}_i. \tag{85.11}$$

Агар $\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{S}_i=0$, яъни нуқтага таъсир қиладиган куч импульсларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, $Q_1-Q_2=0$ ва бундан $Q_1=Q_2=\text{const}$ бўлиб қолди. Демак, бу ҳолда нуқтанинг ҳаракат миқдори доимий қолади. Мана шу ҳаракат миқдорининг ўзгармасдан қолишлиги нуқта учун ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни дейилади.

86-§. Механик система учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Механик система N нуқтадан тузилган бўлса, шу системанинг ҳаракат миқдори ва унинг ўзгаришини аниқлайлик. Системанинг Q_c ҳаракат миқдори ундаги нуқталар ҳаракат миқдорларининг геометрик йиғиндисига тенг. Агар ν-нуқтанинг ҳаракат миқдори $m_\nu v_\nu$ билан белгиланса, система учун

$$\vec{Q}_c=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_\nu\vec{v}_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\vec{m_\nu}\vec{v}_\nu \tag{86.1}$$

ифодани ёзиш мумкин. Бироқ системада нуқталар сони чексиз кўп бўлганлиги учун (86. 1) формуладан фойдаланиб $\vec{Q}_c$ ҳисобланиши жуда қийин ва амалда бу усул билан $\vec{Q}_c$ аниқланмайди. Шунинг учун (86. 1) формуланннг шакли ўзгартирилиб ҳисоблаш учун қулай ҳолга келтирилади. (86. 1) тенгламанинг ўнг томонини

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu\right) \tag{86.2}$$

шаклда ёзамиз ва (82. 2) формулага асосан

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu = m \cdot \vec{r}_c \tag{86. 3}$$

эканлигини ҳисобга олиб, (86. 1) формулани

$$\vec{Q}_c = \frac{d}{dt}(m\,\vec{r}_c) = m\frac{d\,\vec{r}_c}{dt} = m\,\vec{v}_c \tag{86.4}$$

кўринишда ёзамиз.

(86.4) дан кўринадики, системанинг ҳаракат миқдори унинг m массасининг v_c тезлигига бўлган кўпайтмасига тенг. Кўринаяптики, (86.4) формула билан Q_c осонгина ҳисобланади. Шунинг учун (86.4) формула (86.1) формулага нисбатан содда ва энг муҳими шундаки, (86.4) формула билан Q_c ни аниқ ҳисоблаш мумкин.

Энди система учун $\vec{Q}_c$ (системанинг ҳаракат миқдори) ўзгаришини аниқлаймиз. Системада ν нуқтаси учун (85.4) га асосан нуқтага $F_\nu^{(c)}$ ташқи ва $F_\nu^{(i)}$ ички кучлар таъсир қилаётган бўлса,

$$d\vec{Q}_{c,\nu} = \vec{F}_\nu^{(c)}\,dt + \vec{F}_\nu^{(i)}\,dt \tag{86.5}$$

тенгламани ёзиш мумкин. Бутун механик система ҳаракат миқдорининг ўзгаришини топиш учун системадаги ҳар бир нуқта учун (86.5) ифодага ўхшаган тенгламаларни ёзиб, ҳаммасини қўшиш лозим ёки интеграллаш лозим:

$$d\left(\sum_{\nu=i}^{N}\vec{Q}_{c,\nu}\right) = \sum_{\nu=i}^{N}\vec{F}_\nu^{(l)}\,dt + \sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu^{(l)}\,dt. \tag{86.6}$$

Агар (81.1) ва (81.5) ифодаларга асосан

$$\vec{F}^{(c)} = \sum_{\gamma=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(e)} \qquad (86.7)$$

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(i)} = 0 \qquad (86.8)$$

эканлигини ва $\sum\limits_{\nu=1}^{N} Q_{c,\nu}$ система ҳаракат миқдорининг ифоданалишини ҳисобга олсак, яъни

$$\vec{Q}_c = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{Q}_{c,\nu} \qquad (86.9)$$

(86.6) қуйидаги

$$d\vec{Q}_c = \vec{F}^{(e)}\,dt \qquad (86.10)$$

кўринишни олади.

(86.10) дан система ҳаракат миқдорининг дифференциали системага таъсир қиладиган ташқи кучлар импульсига тенг деган хулоса чиқади. Бу хулоса ёки (86.10) кўринишдаги тенглама система учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал шакли дейилади. Бу тенгламада энг муҳим жойи шундаки, системанинг ҳаракат миқдорини фақат ташқи куч импульслари ўзгартира олади, ички кучлар импульслари системасининг ҳаракат миқдорини ўзгартира олмайди, деган ажойиб хулоса чиқади.

Системадаги ҳаракат миқдорининг чекли ўзгаришини аниқлаш учун (86.10) интегралланади:

$$\vec{Q}_c - \vec{Q}_{c_0} = \int_t \vec{F}^{(e)}\,dt \qquad (86.11)$$

ёки

$$\vec{Q}_c - \vec{Q}_{c_0} = \vec{\int}^{(e)} = \sum_{\nu=i}^{N} \int_{\nu}^{(e)}$$

ёки ошкор шаклда

$$\vec{Q}_c = \vec{Q}_{c_0} = \int_t \left(\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(e)} \right) dt \qquad (86.12)$$

кўринишда ёзилиши мумкин. (86.11) ва (86.12) тенгламалар система учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема дейилади, бу теоремадан: системанинг маълум вақт оралиғида ҳаракат миқдорининг ўзгариши, шу вақт оралиғида системага таъсир қиладиган ташқи кучлар импульсларининг йиғиндисига тенг деган хулосага келамиз.

Охирги тенгламада $\vec{F}_\nu^{(e)}$ катталик системанинг ν нуқтасига таъсир қиладиган кучларнинг тенг таъсир этувчиси эканлигини таъкидлаймиз, яъни $\vec{F}_\nu^{(e)}$ қиймати (81.5) формула орқали ҳисобланади:

$$\vec{F}_\nu^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)}. \tag{86.13}$$

(86.13) ни ҳисобга олганимизда (86.12) янада ошкор ҳолда қуйидагича ифодаланади.

$$\vec{Q}_c - \vec{Q}_{c_0} = \int_t \left[\sum_{\nu=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}\right)_\nu\right] dt. \tag{86.14}$$

Бу ерда n ва N бир-биридан фарқ қилишини эсда тутиш лозим: n — системанинг n-нуқтасига таъсир қиладиган кучлар, N — системадаги нуқталар сони.

Агар $\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)}\, dt = 0$ бўлса, (86.12) тенгламадан

$$\vec{Q}_c = \vec{Q}_{c_0} = \mathrm{const} \tag{86.15}$$

эканлиги равшандир. (86.15) дан системага таъсир қиладиган ташқи кучлар импульсларининг йиғиндиси нолга тенг (ёки система ташқи кучлар таъсиридан ҳимояланган) бўлса исталган вақтда системадаги ҳаракат миқдори бошланғич вақтдаги ҳаракат миқдорига тенг бўлади, яъни системанинг ҳаракат миқдори ўзгармасдан қолади деган хулосага келамиз. Системанинг ҳаракат миқдорини доимий қолиши система учун ҳаракат миқдорининг сақланиш қонуни дейилади. Бу сақланиш қонунини ифодаловчи (86.15) тенглама янада ошкор қуйидагича ёзилади:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu\right)_t = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu\right)_0 = \mathrm{const} \tag{86.16}$$

ёки

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu = \text{const}. \qquad (86.17)$$

Система ҳаракат миқдорини сақланиш қонунига ёки (86.17) нинг қўлланилишига мисол қилиб m_1 ва m_2 массали шарларнинг ўзаро урилиш жараёнини кўриб чиқайлик. Биринчи ва иккинчи шарлар урилгунча $\vec{v}_1$ ва $\vec{v}_2$, урилгандан кейин v_1' ва v_2' тезликларга эга деб фараз қилсак: 1) урилгунча ҳар иккала шарларнинг (механик система) ҳаракат миқдори $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$ орқали ифодаланади; 2) урилгандан кейин шарларнинг ҳаракат миқдори $m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$ бўлсин. Ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини ифодалайдиган (86.17) тенгламага асосан шарларнинг урилгунча ва урилгандан кейинги ҳаракат миқдорлари бир-бирига тенгдир, яъни

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \qquad (86.18)$$

тенглама ҳосил бўлади.

Агар (85.11) ёки (86.18) тенгламаларнинг ҳар биттасини ўқлардаги проекцияларда ифодаласак, уларнинг ҳар биттасидан учтадан тенглама ҳосил бўлади. Масалан, (86.11)

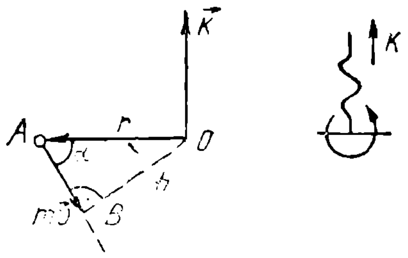
$$\left.\begin{aligned}
Q_{cx} - Q_{c_0x} &= \left(\sum_{\nu=1}^{N} \int_\nu^{(e)}\right)_x, \\
Q_{cy} - Q_{c_0y} &= \left(\sum_{\nu=1}^{N} \int_\nu^{(e)}\right)_y, \\
Q_{cz} - Q_{c_0z} &= \left(\sum_{\nu=1}^{N} \int_\nu^{(e)}\right)_z
\end{aligned}\right\} \qquad (86.19)$$

шаклда ифодаланади. Бундан система ҳаракат миқдори ўзгаришининг маълум ўқдаги проекцияси ташқи куч импульслари йиғиндисининг ўша ўқдаги проекциясига тенг деган фикрга келамиз.

87-§. Нуқта ва ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти

Статикада кўрдикки, *O* нуқтага кучнинг таъсири шу кучнинг модули ва кучнинг таъсир чизиғидан *O* нуқтагача бўлган масофага, бошқача қилиб айтганда, кучнинг моментига боғлиқдир. Куч моментининг йўналиши парма қоидасига асосан топилади. Куч моменти вектор дейилган эди.

Нуқтанинг $\overrightarrow{mv}$ ҳаракат миқдори ҳам вектор бўлганлиги учун ҳаракат миқдорининг моменти вектори деган тушунча киритилади. Гап шундаки, $\overrightarrow{mv}$ ҳаракат миқдорининг *O* нуқтага нисбатан натижаловчи таъсири (238-расм) $\overrightarrow{mv}$ ва $\overrightarrow{mv}$ векторнинг қўйилиш нуқтасини ифодалайдиган радиус-векторга боғлиқдир. *O* нуқтага нисбатан ҳаракат миқдорининг моменти деб, *r* радиус-векторнинг ҳаракат миқдори $\overrightarrow{mv}$ векторга бўлган вектор кўпайтмасига тенг бўлган катталикка айтилади. Агар ҳаракат миқдори моментини *K* билан белгиласак, таърифга асосан



238-расм.

$$\vec{K} = \vec{r} \times \overrightarrow{mv} \qquad (87.1)$$

формула ёзилади. Ҳаракат миқдорининг моменти *K* вектор бўлганлиги учун учта элементга эга: 1) *K* векторнинг қўйилиш нуқтаси танланган *O* нуқтага қўйилган; 2) *K* векторнинг йўналиши парма қоидасига асосан аниқланади: парманинг дастасини *r* векторидан *mv* векторига қараб, қисқа йўл билан айлантирсак, парманинг илгариланма ҳаракатининг йўналиши *K* вектор йўналишини ифодалайди. Расмдан кўринадики, *K* вектор *O* нуқтага қўйилган бўлиб, тик юқорига йўналган; 3) *K* векторнинг модули

$$K = rmv \sin(\widehat{\vec{r}, \overrightarrow{mv}}) \qquad (87.2)$$

формуладан топилади. Расмдан r ва mv вектор орасидаги бурчак α эканлиги равшандир ва шунинг учун

$$r\sin(\vec{r},\ m\vec{v}) = h \tag{87.3}$$

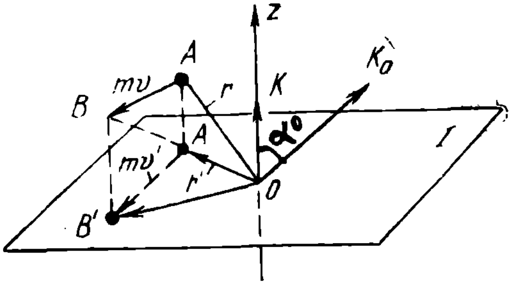
бўлиб қолади. Демак, (87.2) формула

$$K = \pm mvh \tag{87.4}$$

шаклда ифодаланади. Расмдан mvh катталик $\triangle\ OAB$ юзининг иккиланганига тенг, яъни

$$K = 2S_{\triangle OAB} \tag{87.5}$$

деган хулосага келамиз. (87.4) ифодага ишора, K вектор охиридан қарайдиган кузатувчига ҳаракат соат стрелкаси йўналишида кўринса, манфий (—), соат стрелкаси йўналишида тескари кўринса (+) ишора олинади.



239- расм.

Ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моментини топиш учун A нуқтада m массали нуқта mv ҳаракат миқдорига эга бўлсин деб ҳисоблайлик (239- расм). mv ҳаракат миқдорининг z ўқига нисбатан K_z ҳаракат миқдорининг моментини аниқлаш учун z ўқига тик бўлган I текислик ўтказамиз. z ўқи I текислик билан O нуқтада кесишсин.

K_z ни аниқлаш учун mv векторнинг I текисликка проекциясини туширамиз. Бу проекция mv' бўлсин. Ана шу mv' векторнинг O нуқтага нисбатан моменти mv векторининг z ўқига нисбатан K_z моменти деб айтилади (статикада кучнинг ўққа нисбатан моменти ҳам шундай аниқланган эди). Бу M_z момент O нуқтага қўйилган бўлиб, z ўқида ётади ва z ўқи бўйлаб тик юқорига йўналган:

$$\vec{M}_z = \vec{r}' \times m\vec{v}'. \tag{87.6}$$

Энди mv ҳаракат миқдорининг O нуқтага нисбатан K_0 ҳаракат миқдорининг моментини (87.1) формулага асосан

$$\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (87.7)$$

шаклда ифодаланишини эътиборга олсак, K вектори ҳам O нуқтага қўйилган бўлиб, z ўқи билан α бурчак ташкил этганлигини сезамиз. Бошқача айтганда, K_0 вектори AOB текислигига тик бўлиб, z ўқи билан α' бурчак ташкил этади.

Расмдан

$$K_z = K_0 \cos(\vec{K}_0, \vec{K}_z) = K_0 \cos \alpha' \qquad (87.8)$$

тенглама келиб чиқадики, бундан ўққа нисбатан K_z ҳаракат миқдорининг моменти, шу ўқда ётувчи O нуқтага нисбатан K_0 ҳаракат миқдорининг моментини K, K_0 векторлари орасидаги бурчак (ёки K_0 билан z ўқи орасидаги бурчак) косинусига бўлган кўпайтмасига тенг деган хулосага келамиз.

Агар A нуқтани ифодаловчи r радиус-векторнинг ўқлардаги проекциялари x, y, z ва v тезликнинг проекциялари v_x, v_y, v_z бўлса, (87.1) тенгламани проекциялар орқали

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \qquad (87.9)$$

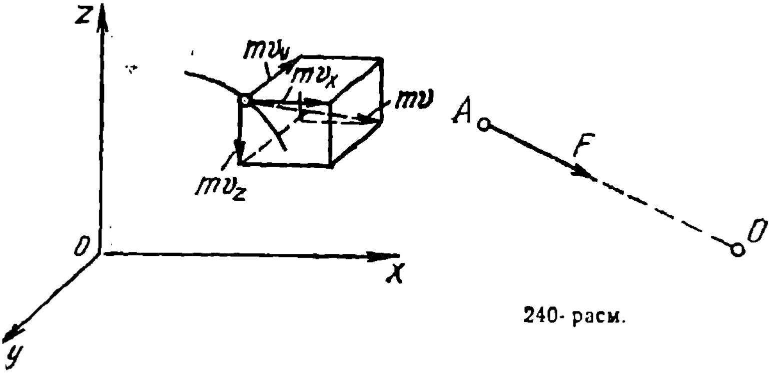
кўринишда ёзиш мумкин. Бундан K_x, K_y, K_z, яъни ҳаракат миқдори моментининг ўқларга нисбатан моментларини аниқласак,

$$\left.\begin{aligned} K_x &= myv_z - mzv_y = m(yv_z - zv_y), \\ K_y &= -mzv_x + mxv_z = -m(zv_x - xv_z), \\ K_z &= mxv_y - myv_x = m(xv_y - yv_x), \end{aligned}\right\} \qquad (87.10)$$

ҳосил бўлади (240-a расм).

Агар A нуқта фақат XOY текислигида ҳаракат қилса, $v_z = 0$; $z = 0$ бўлади. Бу ҳолда (87.10) ифода бир оз соддалашади.

Шундай қилиб, нуқтага нисбатан ва ўққа нисбатан ҳаракат миқдорининг моментлари бир-бирига боғлиқ бўлиши ва бу моментларнинг модуллари r ва mv ора-



240- расм.

сидаги α бурчакка боғлиқлиги кўрилди. Агар $\alpha=0$ бўлса, $K_0=0$ бўлади, яъни бу ҳолда ҳаракат миқдорининг таъсир чизиғи 0 нуқтадан ўтади ва $h=0$ бўлганлиги учун (87.4) га асосан $K=0$ эканлиги чиқади (240-*б* расм).

88- §. Нуқта учун ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теорема

Маълумки, нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$m\frac{d\vec v}{dt}=\vec F. \qquad (88.1)$$

Бу тенгламанинг иккала томонини; чап томондан r радиус-векторга вектор кўпайтирсак,

$$\vec r\times m\frac{d\vec v}{dt}=\vec r\times\vec F \qquad (88.2)$$

ҳосил бўлади. (88.2) нинг чап томонини

$$\vec r\times m\frac{d\vec v}{dt}=\frac{d(\vec r\times m\vec v)}{dt}-\frac{d\vec r}{dt}\times m\vec v \qquad (88.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин, чунки

1) $m=\text{const}$

2) $\frac{d(\vec r\times m\vec v)}{dt}$

$$\frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

шаклда ифодаланади. Бу ерда

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{v}\times m\vec{v}$$

ва $\vec{v}$ ҳамда $m\vec{v}$ векторлар коллинеар бўлганликлари учун улар орасидаги бурчак 0° ёки 180° ва

$$\vec{v}\times m\vec{v}=vmv\sin 0^\circ=0$$

бўлади. Охирги ифодани ҳисобга олсак (88.3)

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times m\vec{v})}{dt} \qquad (88.4)$$

ёки $\vec{K}=\vec{r}\times m\vec{v}$ эътиборга олинса, (88.2) тенгламадан

$$\frac{d\vec{K}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F} \qquad (88.5)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда $\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$, яъни нуқтага нисбатан куч моментига тенглигини назарга олиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{M}. \qquad (88.6)$$

(88.6) дан нуқтанинг ҳаракат миқдори моментидан вақт бўйича олинган ҳосиласи шу нуқтага таъсир қиладиган кучларнинг марказга нисбатан моментларининг геометрик йиғиндисига тенг деган хулосага келамиз. Ҳақиқатан ҳам, (88.6) даги M нуқтага таъсир қиладиган кучлар моментларининг геометрик йиғиндисига тенг, яъни

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_i. \qquad (88.7)$$

Энди (88.6) тенгламани

$$d\vec{K}=\vec{M}\cdot dt \qquad (88.8)$$

шаклда ёзамиз. (88.8) ёки (88.6) нуқта учун ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани дифференциал шакли бўлади. Бу теорема (88.8) кўринишда қуйидагича таърифланади. Нуқтанинг ҳаракат миқдори моментининг дифференциали шу нуқтага таъсир қиладиган кучларнинг марказга нисбатан моментлари (бош момент) импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг деган хулоса чиқади. (88.8) тенгламанинг ўнг томони

$$\vec{M} \cdot dt = \vec{M}_1 dt + \vec{M}_2 dt + \ \dots \ + \vec{M}_n dt = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \, dt$$

(88.9

таъсир қиладиган кучларнинг марказга нисбатан моментлари импульсларнинг йиғиндисини ифодалайди. Умуман, $M{\cdot}dt$ куч моменти импульси деб юритилади.

Ҳаракат миқдори моментининг чекли ўзгариши (88.8) нинг интеграл қиймати билан аниқланадн. (88.8) интегралланса

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \int_t M \, \vec{dt} \tag{88.9}$$

кўринишдаги нуқта учун ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ҳосил қиламиз. Бундан: маълум вақт оралиғида нуқтанинг ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши шу вақт оралиғида нуқтага қўйилган кучларнинг марказга нисбатан моментлари импульсларининг геометрик йиғиндисига тенг, деган хулоса чиқади.

Агар (88.8) тенгламани ўқлардаги проекцияларда ифодаласак,

$$\begin{aligned} \vec{K}_x - \vec{K}_{x0} &= \int_t \vec{M}_x \, dt \\ \vec{K}_y - \vec{K}_{y0} &= \int_t \vec{M}_y \, dt; \\ \vec{K}_z - \vec{K}_{z0} &= \int_t \vec{M}_z \, dt \end{aligned} \tag{88.10}$$

ҳосил бўлади ёки (88.6) га асосан

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z$$

проекцияларда ифодаланган дифференциал тенглама ёзилади.

Нуқта учун K ўзгариши ҳақидаги теоремани бош момент тушунчаси орқали қуйидагича таърифлаш ҳам мумкин. Вақт бирлиги ичида K векторининг ўзгариши бош моментга тенг ёки K вектордан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосилага тенг экан.

Агар нуқтага таъсир қиладиган кучлар марказий кучлар бўлса, бу теоремадан ажойиб натижа чиқади. Айланиш маркази томон йўналган кучлар *марказий кучлар* дейиларди. Марказий кучларнинг O марказга нисбатан моменти ҳамма вақт нолга тенг (240-*б* расм), чунки F марказий кучнинг таъсир чизиғи O марказдан ўтади ва куч елкаси нолга тенг, демак, моменти ҳам нолга тенг.

Ҳақиқатан ҳам, A нуқтага қўйилган F_1, F_2 . . . F_n кучларининг тенг таъсир этувчиси F йўналиши A нуқтадан O марказга томон йўналган бўлса, F куч марказий куч бўлади ва бу кучнинг O марказга нисбатан моменти нолга тенг. Шундай қилиб,

$$\vec{M}_0 = 0 \qquad (88.11)$$

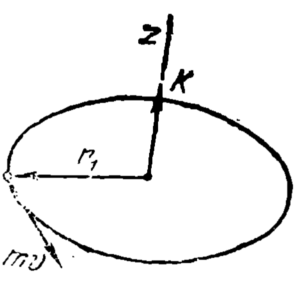
шарт бажарилса, (88.6) дан

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0; \quad d\vec{K} = 0; \quad \vec{K} = \text{const};$$

ёки

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const} \qquad (88.12)$$

ифодани ҳосил қиламиз. (88.12) нуқта учун *ҳаракат миқдори моментининг сақланиш қонуни* бўлади. Бу сақланиш қонуни қуйидагича таърифланади: агар нуқтага қўйилган кучларнинг бирон-бир марказга нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, бу ҳолда ўша марказга нисбатан нуқтанинг ҳаракат миқдори моменти вектори доимий қолади.



241-расм.

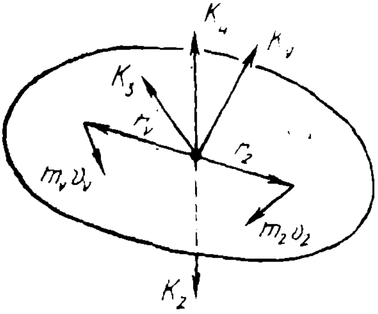
Ҳақиқатан ҳам, агар марказий кучлар нуқтага қўйилган бўлса, (88.12) бажарилади ва $\vec{K}$ = const шартнинг бажарилиши нуқтанинг ҳаракат текислиги ва демак, шу текисликка перпендикуляр бўлган K вектор йўналиши ҳам ўзгармаслигини кўрсатади (241-расм), яъни нуқта ҳаракат қилса, бу нуқта доим битта текисликда ҳаракат қилади ва бу текисликка тик йўналган K вектор йўналиши, яъни z ўқига нисбатан K ҳаракат миқдорининг моменти ҳам ўзгармайди. Бунга мисол сайёраларнинг Қуёш атрофидаги ҳаракатлари вақтида сайёраларнинг ҳаракат текислигининг доимий сақланишидир.

89-§. Механик системанинг нуқта ва ўққа нисбатан ҳаракат миқдори моменти ёки кинематик моменти

Механик система N та нуқтадан тузилган бўлсин (242-расм). Системада ν нуқтанинг ҳаракат миқдори моменти

$$\vec{K}_\nu = \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu \qquad (89.1)$$

орқали аниқланади. Бутун системанинг ҳамма нуқталарининг ҳаракат миқдорлари моментларининг геометрик йиғиндиси система ҳаракат миқдорининг бош моменти ёки кинематик моменти дейилади. Агар кинематик моментни K_{oc} деб белгиласак, таърифга мувофиқ

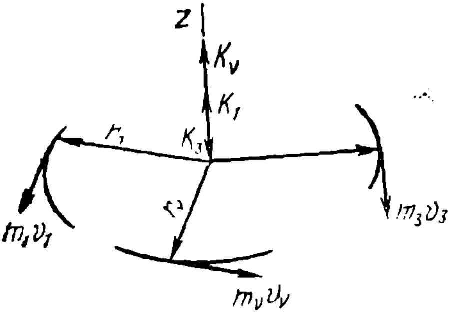


242-расм.

$$\vec{K}_{oc} = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu \qquad (89.2)$$

формула орқали аниқланади. Системадаги ҳар бир нуқтанинг ҳаракат миқдори моменти (87.4) формула ёрдамида ҳисобланади.

Агар системанинг z ўқига нисбатан кинетик моментини аниқламоқчи бўлсак, ихтиёрий ν нуқтаси учун K_ν катталикни (87.6) формула асосида топамиз ва топилган K_1, K_2 ... K_N катталикларнинг z ўқида ётишини эътиборга оламиз (243-расм). Шунинг учун системанинг (текислик учун) кинетик моменти K_1, K_2 ... K_N катталикларнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади, яъни



243- расм.

$$K_{zc} = \sum_{\nu=1}^{N} K_\nu \qquad (89.3)$$

ҳосил бўлади. Бунда K_{zc} — системанинг кинетик моменти ҳам z ўқида ётади. Системанинг ўққа нисбатан кинетик моменти деб, системадаги ҳамма нуқталарнинг ўша ўққа нисбатан ҳаракат миқдорлари моментларининг алгебраик йиғиндисига айтилади.

Системанинг O марказга нисбатан кинетик моменти K_{oc} билан ўққа нисбатан кинетик моменти K_{zc} ўзаро φ бурчак ташкил қилади. Агар φ бурчак ва K_{oc} маълум бўлса (87.8) тенгламани келтириб чиқарган вақтдаги фикрларимизни қўллаганимизда

$$K_{zc} = K_{oc} \cdot \cos\varphi \qquad (89.4)$$

боғланишни ҳосил қиламиз. Бу боғланишдан системанинг ўққа нисбатан кинетик моменти системанинг шу ўқда ётган нуқтага нисбатан кинетик моментининг шу ўқдаги проекциясига тенг деган хулоса чиқади.

Системадаги нуқталар сони чексиз кўп бўлса, яъни $N \to \infty$ бўлган ҳолда, K_{oc} (89.1) формула билан аниқланмайди, чунки бу жуда қийин йўлдир. Бундай қийинчиликдан қутулиш учун (89.1) формула бошқачароқ шаклда келтирилади.

Биз (45- §) нуқтанинг абсолют тезлиги

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_c + \vec{v}_\nu: \quad \vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}; \quad \vec{r}_\nu = \vec{r}_c + \vec{\rho}_\nu \qquad (89.4)$$

ва системанинг массалар марказига нисбатан тезлиги

$$\vec{v}'_\nu = \frac{d\vec{\rho}_y}{dt} \qquad (89.5)$$

формулалар ёрдамида аниқланишини биламиз. Агар (89.4), (89.5) тенгламаларни (89.1) тенгламага қўйсак,

$$\vec{K}_{oc} = \sum_{\nu=1}^{N} r_\nu \times m_\nu(\vec{v}_c + \vec{v}'_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_c +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{N}\vec{r}_\nu\times m_\nu\vec{v}'_\nu=\vec{r}_c\times m\,\vec{v}_c+\sum_{\nu=1}^{N}\vec{\rho}_\nu\times m_\nu\vec{v}_c+$$

$$+\vec{r}_c\times\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\vec{v}'_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\vec{\rho}_\nu\times m_\nu\vec{v}'_\nu. \qquad (89.6)$$

Бу тенгламада ўнг томондаги иккинчи ва учинчи ҳадлар

$$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{\rho}_\nu\times m_\nu\vec{v}_c=-m_\nu\times v_c\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\vec{\rho}_\nu=0,$$

$$\vec{r}_c\times\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\vec{v}'_\nu=\vec{r}_c\times\frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\vec{\rho}_\nu\right)=0 \qquad (89.7)$$

бўлиб қолади, чунки бу ҳоллардаги $\sum_{\nu=1}^{N}\bar{m}_\nu\vec{\rho}_\nu$ системанинг массалар марказига нисбатан статик моментларининг йиғиндиси бўлиб, бу йиғинди ҳамма вақт нолга тенг, яъни

$$\sum_{\nu=1}^{N}m_\nu\vec{\rho}_\nu=0. \qquad (89.8)$$

Охирги иккита тенгламани ҳисобга олсак (89.6)

$$\vec{K}_{oc}=\vec{r}_c\times m\,\vec{v}_c+\sum_{\nu=1}^{N}\vec{\rho}_\nu\times m_\nu\vec{v}'_\nu \qquad (89.9)$$

кўринишда ифодаланади. Бу ерда $\vec{r}_c\times m\,\vec{v}_c$ системанинг массалар марказининг ҳаракат миқдори моменти K_c катталикка тенг, яъни

$$\vec{K}_c=\vec{r}_c\times m\,\vec{v}_c. \qquad (89.10)$$

(89.9) ифоданинг ўнг томонидаги иккинчи ҳад системанинг массалар марказига нисбатан инерция моментининг (кейинги бобда инерция моменти ҳақида сўз юритилади) бурчакли тезликка бўлган кўпайтмаси (J·ω) ёрдамида топилади. Шунинг учун K катталикни (89.9) формула ёрдамида аниқлаш (89.1) формулага нисбатан осонроқ ва қулайроқдир.

Шундай қилиб, системанинг кинетик моменти шу система массалар маркази ҳаракат миқдорининг моментн билан массалар марказига нисбатан система нуқталарининг ҳаракат миқдорлари моментларининг геометрик йиғиндисига тенг деб айтиш мумкин.

90-§. Механик система учун кинетик моментнинг ўзгариши ҳақида теорема

Механик системанинг m_ν массали нуқтасига тенг таъсир этувчилари $F_\nu^{(e)}$ ва $F_\nu^{(i)}$ бўлган ташқи ва ички кучлар таъсир этса, шу нуқтанинг вақт бирлигида ҳаракат миқдори моментининг ўзгариши (88.6) га мувофиқ

$$\frac{d\vec{K}_\nu}{dt} = \vec{M}_\nu^{(e)} + \vec{M}_\nu^{(i)} \tag{90.1}$$

орқали аниқланади. Система учун эса K ни аниқлаш мақсадида (90.1) тенгламани ҳар бир нуқта учун ёзиб қўшганимизда

$$\frac{d\left(\sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{K}_\nu\right)}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{M}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{M}_\nu^{(i)} \tag{90.2}$$

ифода ҳосил бўлади, лекин ички кучларнинг ихтиёрий марказга нисбатан куч моментларининг геометрик йиғиндиси (81.3) формулага асосан нолга тенг бўлади, яъни

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{M}_\nu^{(i)} = 0. \tag{90.3}$$

Энди

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{K}_\nu = \vec{K}_{co}, \tag{90.4}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{M}_\nu^{(e)} = \vec{M}^{(l)} \tag{90.5}$$

эканлигини эсласак, (90.2) тенглама

$$\frac{d\vec{K}_{oe}}{dt} = \vec{M}^{(e)} \tag{90.6}$$

кўринишни олади. (90.6) тенгламага системанинг кинетик моменти ўзгариши ҳақидаги теорема деб айтилади; бирон-бир марказга нисбатан системанинг кинетик моментидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила ўша (қўзғалмас) марказга нисбатан ташқи кучларнинг бош моментига геометрик жиҳатдан тенг.

Охирги тенгламани яна қуйидагича ҳам ёзилади:

$$\overrightarrow{dK}_{co} = \overrightarrow{M}^{(e)}\, dt. \tag{90.7}$$

Агар (90.7) тенгламани интеграллсак,

$$\left(\overrightarrow{K}_{oc}\right)_t - \left(\overrightarrow{K}_{co}\right)_0 = \int_t \overrightarrow{M}^{(e)}\, dt \tag{90.8}$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламадан системанинг кинетик моменти ўзгариши, яъни $(\overrightarrow{K}_{oc})_t - (\overrightarrow{K}_{co})_{to}$ шаклдаги ифода, шу системага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош моменти импульсларининг интеграли ($\int \overrightarrow{M}^{(e)}\, dt$) га тенг деган хулосага келамиз.

Энди (90.6) тенгламани координата ўқларидаги проекцияларда тасвирлаганимизда, ушбу

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK_{oc,\,x}}{dt} &= M_x^{(e)}, \\ \frac{dK_{oc,\,y}}{dt} &= M_y^{(e)}, \\ \frac{dK_{oc,\,z}}{dt} &= M_z^{(e)} \end{aligned}\right\} \tag{90.9}$$

тенглама ҳосил бўлади. (90.9) нинг ҳар бири кўрсатадики, маълум ўққа нисбатан системанинг кинетик моментидан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила ўша ўққа нисбатан ташқи кучларнинг бош моментига тенг экан.

Ички кучлар таъсирида системанинг кинетик моментини ўзгартириб бўлмайди, чунки (90.6)—(90.9) тенгламаларда ички кучлар моменти қатнашмайди.

91-§. Система кинетик моментининг сақлаш қонуни

Нуқта учун ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунини (88.12) тенглама шаклида ифодалаган эдик. Энди система учун фараз қилайлик, ташқи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлсин:

$$\vec{M}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{M}_{\nu}^{(e)} = 0. \qquad (91.1)$$

Бу ҳолда, яъни (90.1) тенглама ҳисобга олинганда, (90.8) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$(K_{oc}) = (K_{ce})_{to} = \text{const} \qquad (91.2)$$

ёки

$$\vec{K}_c = \text{const} \qquad (91.3)$$

шаклда ҳам ёзилади. Айнан (91.1) шарт бажарилганда (90.9) тенгламалардан ($K_{oc} = K_c$ деб қабул қилинганда)

$$K_{cx} = \text{const}, \ K_{cy} = \text{const}, \ K_{cz} = \text{const} \qquad (91.4)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз.

Ҳосил қилинган (91.3) ёки (91.4) тенглама система кинетик моментининг сақланиш қонуни деб аталади. Биринчи тенгламадан системанинг бирон марказига таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош моменти нолга тенг бўлса, ўша марказга нисбатан кинетик момент ҳамма вақт доимий сақланади деган натижа келиб чиқади. Иккинчи тенгламадан ташқи кучларнинг бирон ўққа нисбатан бош моменти нолга тенг бўлса, ўша ўққа нисбатан системанинг кинетик моменти доимий қолади деган иккинчи натижа келиб чиқади.

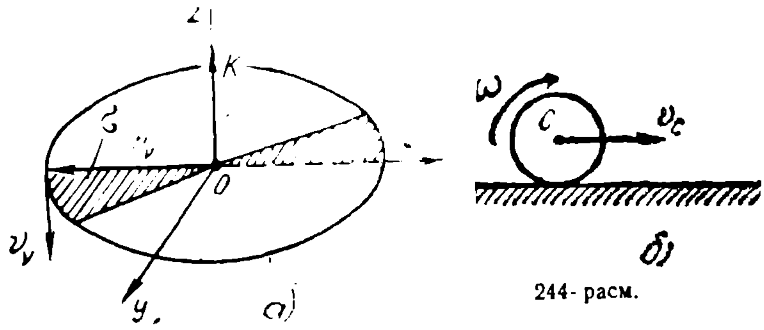
Иккала натижа ҳам системанинг кинетик моментининг сақланиш қонунини ифодалайди. Бу қонундан K_c векторининг ҳам модули, ҳам йўналиши доимий қолади, деган хулоса чиқади. Демак, K_c векторига тик бўлган текислик ҳам доимий қолади. Бу текисликка Лаплас текислиги деб айтилади. Лаплас текислиги сайёраларнинг Қуёш атрофидаги орбиталари ўзгармас бўлишини кўрсатади. Айтилган хулосадан ташқари (91.3) тенгламада (87.5) ҳисобга олинса,

$$\vec{K}_{cz} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = 2r_{\nu} \sum m_{\nu} \frac{dr_{\nu}}{dt} = \text{const} = C, \qquad (91.5)$$

бу ерда

$$(\vec{r}_{\nu} \times \vec{v}_{\nu}) = 2 \frac{dr_{\nu}}{dt} \qquad (91.6)$$

орқали аниқланади. (91.6) да $\frac{d\sigma}{dt}$ секториал тезлик деб



244-расм.

айтилади (244-*a* расм); σ — радиус-вектор r нинг dt вақтда чизган юзи — секторнинг юзидир. (91.6) дан система учун K_{cz} вектори секториал тезликнинг иккиланганига тенг ва OXY текислигида доимий қолади деган фикрга келамиз. Бу фикрдан

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{const}$$

деган натижа чиқади, яъни бу ҳолда нуқтанинг секториал тезлиги $\frac{dr}{dt}$ доимий қолади ва нуқта ҳаракати вақтида тенг вақтларда тенг сектор юзларни чизади деган хулоса чиқади. Сақланиш қонунига асосан $K_c = 0$ ифодадан системанинг кинетик моменти бирон-бир ички кучлар таъсирида K_1 кинетик момент ҳосил қилса, системанинг ўзида $K_2 = -K_1$ момент ҳосил бўлиши лозим, чунки ҳамма вақт буларнинг йиғиндиси $K_1 + (-K_2) = 0$ бўлиши лозим. Ҳақиқатан ҳам, кема ичида киши тинч ҳолатда бўлсин. Агар кемадаги киши икки қўлини горизонтал ҳолатга келтириб, вертикал ўқ атрофида тез айланса, у маълум кинетик моментни ҳосил қилади (бу ҳолда одамни айлантирувчи куч ички кучдир). Шу одам айланаётган пайтда сув ичидаги кема одам билан бирга тескари томонга айланиб, одам ҳосил қилган кинетик моментга тенг, лекин тескари йўналган моментни ҳосил қилади. Бу ерда одам ва кема ҳосил қилган моментларнинг геометрик йиғиндиси яна нолга тенг бўлиб қолади. Отилган бумеранг ҳам айланиш текислигини ўзгартирмасликка интилади ва шунинг учун бумеранг отилган жойга қайтиб келади.

Шундай қилиб, нуқта ҳаракат миқдори моментининг ва система кинетик моментининг сақланиш қонунларидан фойдаланиб амалий масалаларни осонроқ йўл билан ечиш мумкин. Таъкидлаш лозимки, фақат ички кучлар моментининг таъсирида системадаги айрим нуқталарнинг ҳаракат миқдорининг моменти ўзгариши мумкин бўлса-да, умуман бутун системанинг массалар марказининг кинетик моментини (ҳаракат миқдори моментини) ўзгартириб бўлмайди.

92-§. Нуқта учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теорема

Ҳаракатланаётган нуқта учун маълумки,

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad (92.1)$$

тенгламани ёзиш мумкин. Нуқта тезлиги формуласини

$$\vec{v}dt = d\vec{r} \qquad (92.2)$$

кўринишда ёзиб, (92.2) нинг чап ва ўнг томонларини мос равишда (92.1) нинг чап ва ўнг томонларига скаляр кўпайтирамиз:

$$m\vec{v}\,dt\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\,d\vec{r}. \qquad (92.3)$$

Бу тенгламанинг чап томони

$$m\vec{v}\,d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT, \qquad (92.\ 4)$$

ўнг томони эса dA элементар иш

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (92.5)$$

шаклида ёзилади. Охирги икки тенгламани эътиборга олиб, (92.3) ни қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$dT = dA \qquad (92.6)$$

Бу ерда $T = \frac{mv^2}{2}$ нуқтанинг кинетик энергиясидир. (92.6) тенглама нуқта учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теореманинг дифференциал шакли бўлади. Бу теоремадан: нуқтанинг кинетик энергиясининг дифференциали шу нуқтага қўйилган кучлар тенг таъсир этувчисининг бажарган элементар ишига тенг деган хулоса келиб чиқади.

Нуқта кинетик энергиясининг чекли ўзгаришини аниқлаш учун (92.6) тенгламани интеграллаймиз ва нуқта учун

$$T - T_0 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (92.7)$$

кўринишида кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ҳосил қиламиз: нуқтанинг кинетик энергиясининг ўзгариши шу нуқтага таъсир қиладиган кучлар бажарган ишларининг йиғиндисига тенг (T_0— нуқтанинг бошланғич кинетик энергияси.)

(92.7) формулада таъсир қиладиган кучларнинг тенг таъсир этувчиси, яъни

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

эканлигига эътибор бериш лозим. Шунинг учун $\int \vec{F} d\vec{r}$ барча кучлар бажарган ишларининг йиғиндиси бўлади ва (92.7) тенглама айрим вақтларда қуйидаги кўринишда ҳам ифодаланади:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

93- §. Механик системанинг кинетик энергиясини аниқлаш.

Механик система N нуқтадан тузилган бўлса, шу системанинг T_c тўлиқ кинетик энергияси табиийки, барча нуқталар кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг:

$$T_c = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2}, \qquad (93.1)$$

бунда m_ν, v_ν — системадаги ν- нуқтанинг массаси ва тезлигидир.

Системада нуқталар сони N чексиз кўп бўлганлиги учун (93.1) формула билан системанинг кинетик энергияси ни ҳисоблаб бўлмайди, чунки $\nu \to \infty$. Амалда қўлланиладиган T_c учун формула чиқармоқчи бўлсак

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_c + \vec{v}_\nu, \quad \vec{r}_\nu = \vec{r}_c + \rho_\nu \qquad (93.2)$$

ифодалардан фойдаланиб, (93.1) нинг шаклини ўзгартирамиз:

$$T_c = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu (v_c + v'_\nu)^2}{2} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{mv_c^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_c v'_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu v'^2_\nu}{2}. \qquad (93.3)$$

(85.8) формулага асосан,

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu v_c v'_\nu = v_c \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \rho_\nu \right) = 0$$

бўлганлиги ва

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu v_c^2}{2} = \frac{mv_c^2}{2} \qquad (93.4)$$

системанинг массалар маркази кинетик энергиясини кўрсатишини эътиборга олсак, (93.3) қуйидаги кўринишни олади:

$$T_c = \frac{mv_c^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu v'^2_\nu}{2}. \qquad (93.5)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги иккинчи ҳад системадаги нуқталарнинг массалар марказига нисбатан кинетик энергиясидир. Бу ҳад кўп ҳолларда

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v'^2_\nu}{2} = \frac{I_c \omega^2}{2} \qquad (93.6)$$

шаклда ёзилади (кейинги бобда системанинг инерция моменти бўлган I_c ҳақнда батафсил маълумот берилади): бунда ω — бурчак тезлик, $\frac{I_c\omega^2}{2}$ — системанинг айланма ҳаракатидаги кинетик энергияси.

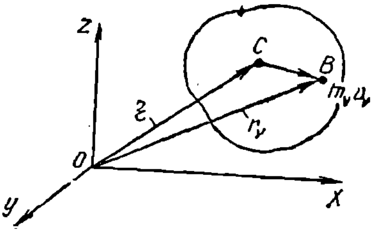
Системанинг кинетик энергиясини ифодалайдиган (93.5) га Кёнига формуласи дейилади. Кёнига формуласидан кўринадики, системанинг кинетик энергияси шў системанинг массалар марказининг кинетик энергияси билан система нуқталарининг массалар марказига нисбатан кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг.

Масалан, думалаб бораётган дискнинг кинетик энергияси Кёнига формуласига асосан қуйидаги кўринишда ёзилади (244-*б* расм):

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \qquad (93.7)$$

бунда I_c — дискнинг массалар маркази бўлган C нуқтадан ўтадиган ўққа нисбатан инерция моменти бўлиб, ω — шу ўқ атрофида дискнинг айланиши вақтидаги бурчакли тезлигидир, m — дискнинг массаси, v_c — дискнинг массалар маркази бўлган C нуқтанинг илгариланма ҳаракатидаги тезлиги.

94-§. Механик системанинг кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема



245- расм.

Механик система N нуқтадан ташкил топган бўлиб, бу системанинг m_ν массали нуқтасига $F_\nu^{(e)}$ ташқи ва $F_\nu^{(i)}$ ички кучлар таъсир қилса (245- расм), бу кучларнинг бажарган элементар иши (92.5) тенгламага асосан қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$dT_\nu = \vec{F}_\nu^{(e)}\, d\vec{r}_\nu + \vec{F}_\nu^{(i)}\, d\vec{r}_\nu. \qquad (94.1)$$

(94.1) дан системада ν-нуқта силжиганда бажарган элементар dA_ν иш ташқи кучларнинг бажарган иши $F_\nu^{(e)}\, dr_\nu$ билан ички кучларнинг $\vec{F}_\nu^{(i)}\, d\vec{r}_\nu$ бажарган ишларининг йиғиндисига тенг деган хулоса чиқади. Шундай тенгламаларни, ҳар бир нуқта учун ёзиб, ҳосил бўлган тенгламаларни қўшсак, бутун системанинг элементар силжишида бажарган элементар ишини топамиз, яъни

$$d\left(\sum_{\nu=1}^{N} T_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)}\, d\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(i)}\, d\vec{r}_\nu. \qquad (94.2)$$

Бундаги

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(c)}\, d\vec{r}_\nu = dA^{(e)}, \qquad (94.3)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu}^{(i)}\, d\vec{r} = dA^{(i)} \qquad (94.4)$$

ифодалар ташқи ва ички кучлар бажарган элементар ишлар ёки ишларнинг дифференциалидир. Охирги ифодаларни ва

$$\sum_{\nu=1}^{N} T_{\nu} = T_{c} \qquad (94.5)$$

ни ҳисобга олинса, (94.2) тенглик

$$dt = dA^{(e)} + dA^{(i)} \qquad (94.6)$$

ёки

$$dT_{c} = \vec{F}_{\nu}^{(e)}\, d\vec{r}_{\nu} + F_{\nu}^{(i)}\, d\vec{r}_{\nu} \qquad (94.7)$$

кўринишларда ифодаланади. (94.6) ва (94.7) тенгламалар система учун кинетик энергиянинг ўзғариши ҳақидаги теореманинг дифференциал шаклидир. Теоремадан системанинг кинетик энергиясининг дифференциали (кинетик энергиянинг чексиз кичик ўзгариши) системага таъсир қиладиган ташқи ва ички кучлар бажарган элементар ишларнинг йиғиндисига тенг деган хулоса чиқади.

Системанинг кинетик энергиясининг чекли ўзгаришини аниқлаш учун (94.6) ёки 94.7) нинг иккала томонини интеграллаб, қуйидаги тенламани ҳосил қиламиз:

$$T_{c} - T_{c_0} = \int \vec{F}^{(e)}\, d\vec{r} + \int \vec{F}^{(i)}\, d\vec{r}. \qquad (94.8)$$

(94.8) тенглама системанинг кинетик энергиясининг ўзгариши ҳақидаги теорема. Бу теоремадан системанинг кинетик энергиясининг чекли ўзгаришини $(T_{c} - T_{co})$ шу системага қўйилган ташқи $\vec{F}^{(e)}\, d\vec{r}$ кучлар бажарган иши билан ички кучлар бажарган $\vec{F}^{(i)}\, d\vec{r}$ ишларининг (интеграли) йиғиндисига тенг деб ўқилади.

Теорема амалда

$$T_{c} - T_{co} = A^{(e)} + A^{(i)} \qquad (94.9)$$

ёки

$$T_{e} - T_{e0} = \sum_{\nu} A_{\nu}^{(e)} + \sum_{\nu} A_{\nu}^{(i)} \qquad (94.10)$$

шаклда ҳам ёзилади.

Шундай қилиб, система кинетик энергиясининг ўзгариши шу системага қўйилган ташқи ва ички кучлар бажарган ишларининг йиғиндисига тенг экан. Бироқ, агар механик система элементлари ёки системанинг ўзи қаттиқ жисм бўлса, бу ҳолда ички кучлар иш бажармайди, бу ҳолда система бошида тинч ҳолатда бўлса, (94.10) қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$T_c = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu^{(e)} \text{ ёки } \sum_{\nu=1}^{N} T_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu^{(e)}. \qquad (94.11)$$

95-§. Механик энергиянинг сақланиш қонуни

Маълумки, (84-§ га қаранг) механик системанинг кинетик ва потенциал энергияси йиғиндиси тўлиқ механик энергия ёки механик энергия деб айтилади. Фараз қилайлик, механик система потенциалли майдонда (84-§) жойлашган бўлсин ва майдонда E тўлиқ механик энергия T кинетик ва $П$ потенциал энергиялар йиғиндисига тенг:

$$E = T + П. \qquad (95.1)$$

Бу ерда T ва $П$ катталикларнинг ўзгариши бажарган иш билан боғлиқдир. Бажарилган элементар иш (84.4) ва (84.10) тенгламаларга мувофиқ, системанинг потеницал энергияси камайишига тенг эканлигини ҳисобга олиб, ташқи кучлар бажарган элементар иш

$$dA^{(e)} = -dП^{(e)}, \qquad (95.2)$$

ички кучлар бажарган элементар иш

$$dA^{(i)} = -dП^{(i)} \qquad (95.3)$$

шаклда ёзилишини эслайлик. Бу ерда $П^{(e)}$ — ташқи кучлар $П^{(i)}$ — ички кучлар майдонларининг системадаги потенциал энергияси.

Энди (95.2) ва (95.3) тенгламаларни (94.6) га қўйиб,

$$dT_c = -dП^{(e)} - dП^{(i)} \qquad (95.4)$$

ёки

$$dT_c + d\,[П^{(e)} + П^{(i)}] = 0$$

ифодани ҳосил қиламиз. Агар системанинг ташқи ва ички кучлари майдонидаги потенциал энергияларининг йиғиндиси тўлиқ потенциал энергияга тенглигини назарда тутсак.

$$П = П^{(e)} + П^{(i)} \qquad (95.5)$$

ифода ҳосил бўлади. Бу ифодани (95.4) тенгламага қўйсак,

$$dT_c + dП = 0$$

ёки (95.1) формулага биноан

$$d(T_c + П) = 0, \qquad (95.6)$$

бундан

$$dE = 0, \; E = \text{const} \qquad (95.7)$$

ёки

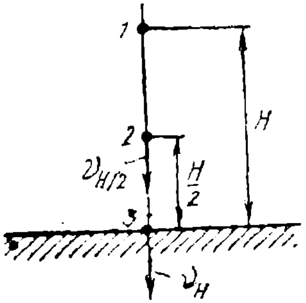
$$T + П = \text{const} \qquad (95.8)$$

ҳосил бўлади.

Охирги икки тенглама энергия интеграли ёки механик энергиянинг сақланиш қонуни дейилади. Бу қонундан кўринадики, потенциалли механик системанинг механик энергияси ҳамма вақт ўзгармай қолади. Тўлиқ механик энергияси доимий қоладиган системалар консерватив системалар дейилади (84-§ га қаранг).

Қуёш системасини консерватив система деб қараш мумкин. Бу системада, масалан, Ер ва Қуёш системасида потенциал ҳамда кинетик энергиянинг йиғиндиси ўзгармайди.

Ер сиртидан H баландликда жойлашган нуқта эркин тушаётганда баландликнинг ярмини ўтганида ва бутун H баландликни ўтиб Ер сиртига тушган вақтидаги тезлигини (95.8) тенгламага асосан топамиз. Нуқта (246-расм) 1, 2, 3 ҳолатларда бўлсин. Бошланғич 1 ҳолатида нуқтанинг бошланғич тезлиги нолга тенг. Ҳар учала ҳолда тўлиқ механик энергия формуласини ёзамиз:



246- расм.

$$E_1 = mg\text{H}, \text{ чунки } v_0 = 0. \qquad (95.9)$$

$$E_2 = \frac{mv_{\text{H}/2}^2}{2} + mg\frac{\text{H}}{2}. \qquad (95.10)$$

$$E_3 = \frac{mv_{\text{H}}^2}{2}, \text{ чунки H} = 0 \qquad (95.11)$$

Механик энергиянинг сақланиш қонунини ифодалайдиган (95.7) тенгламага асосан

$$E_1 = E_2 = E_3$$

деб ёза оламиз. Бу тенгликлардан:

1) $E_1 = E_2$ бўлганлигидан, (95.9) ҳамда (95.10) ифодалар тенглаштирилади, яъни $mg\,H = \frac{mv_{\text{H}}^2/2}{2} + mg\,\frac{H}{2}$ тенгликдан нуқтанинг 2-ҳолатдаги тезлиги аниқланади:

$$v_H/2 = \sqrt{gH}. \tag{95.12}$$

2) $E_1 = E_3$ бўлганлигидан

$$mg\,H = \frac{mv_H^2}{2}$$

тенгликни ҳосил қилиб, нуқтанинг 3-ҳолатдаги тезлиги аниқланади

$$v_H = \sqrt{2gH}. \tag{95.13}$$

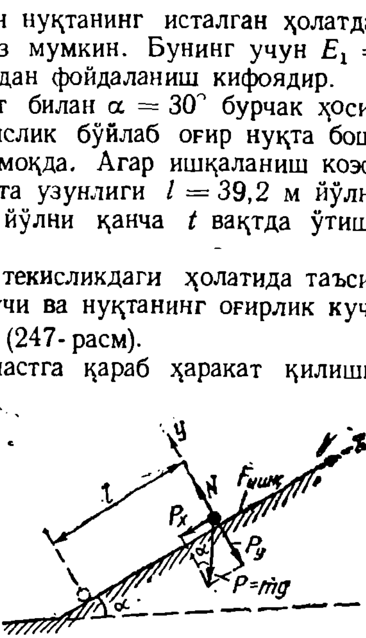
Худди шундай усул билан нуқтанинг исталган ҳолатдаги тезликларини аниқлашимиз мумкин. Бунинг учун $E_1 = E_2 \ldots E = \text{const}$ тенгликдан фойдаланиш кифоядир.

68-мисол. (28.2). Горизонт билан $\alpha = 30^\circ$ бурчак ҳосил қилган ғадир-будур қия текислик бўйлаб оғир нуқта бошланғич тезликсиз пастга тушмоқда. Агар ишқаланиш коэффициенти $f = 0{,}2$ бўлиб, нуқта узунлиги $l = 39{,}2$ м йўлни босиб ўтадиган бўлса, шу йўлни қанча t вақтда ўтиши аниқлансин.

Ечиш. Нуқтанинг қия текисликдаги ҳолатида таъсир қиладиган $F_{\text{ишк}}$ ишқланиш кучи ва нуқтанинг оғирлик кучи $P = mg$ эканлиги равшандир (247-расм).

Оғирлик кучи нуқтани пастга қараб ҳаракат қилишга мажбур этади ва ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайдиган (85.9) тенгламага асосан, ($Q_2 = mv$; $Q_1 = mv_0 = 0$ эканлигини ҳисобга олсак), қуйидагини ёзамиз:

$$mv = \int F_i dt. \tag{1}$$



247-расм.

Бу тенгламанинг X ўқидаги проекциясини ифодаласак

$$mv_x = \int_t F_x\, dt \qquad (2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу ерда F_x—нуқтага таъсир қиладиган кучларнинг X ўқидаги проекцияларининг алгебраик йиғиндиси, яъни

$$F_x = P_x - F_{\text{ишқ}}. \qquad (3)$$

Расмдан

$$P_x = P \sin \alpha = mg \sin \alpha,$$

$$F_{\text{ишқ}} = f \cdot N = f P_y,$$

$$P_y = P \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$

Охирги ифодаларни (3) формулага қўйиб,

$$F_x = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) \qquad (4)$$

ҳосил қилинади ва бу ҳосил қилинган F_x ни (2) ифодага қўйганимизда

$$mv_x = \int mg (\sin \alpha - f \cos \alpha)\, dt =$$

$$= mg\, t (\sin \alpha - f \cos \alpha) + C_1 \qquad (5)$$

шаклда тенглама ёзилади. Бошланғич шарт

$$t = 0;\ v_x = v_{0x} = 0;\ x = x_0 = 0 \qquad (6)$$

ни (5) га қўйсак,

$$C_1 = 0 \qquad (7)$$

бўлади ва шунинг учун (5)

$$v_x = gt (\sin \alpha - f \cos \alpha) \qquad (8)$$

кўринишни олади. Агар $v_x = \frac{dx}{dt}$ эканлигини ҳисобга олсак, (8) дан

$$dx = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)\, t\, dt$$

ёки

$$x = \int g (\sin \alpha - f \cos \alpha)\, t\, dt =$$

$$= g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \frac{t^2}{2} + C_2 \qquad (9)$$

формула келиб чиқади. Бошланғич шартни (9) га қўйганимизда

$$C_2=O$$

эканлиги турган гап. Шунинг учун (9) формула, $X=l$ деб қаралганда

$$l=(\sin\alpha-f\cos\alpha)\frac{gt^2}{2}$$

кўринишда тасвирланади ва ниҳоят, бу формулани t га нисбатан ечсак

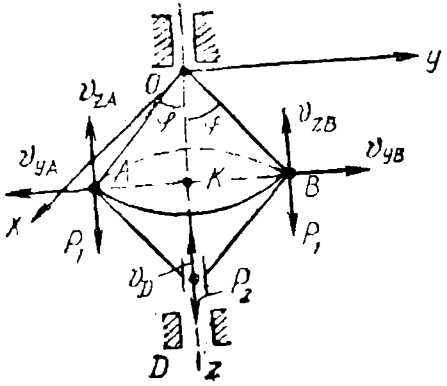
$$t=\sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha-f\cos\alpha)}}=5\text{с}$$

келиб чиқади, яъни нуқта 39,2 м йўлни босиб ўтиш учун 5 с вақт лозим бўлади.

69-мисол (28.1). Поезд темир йўлнинг горизонтал тўғри чизиқли қисмидан ўтмоқда. Поезд тормозланганда қаршилик кучи поезд оғирлигининг 0,1 қисмига тенг. Тормозланишнинг бошида поезд тезлиги 72 $\frac{\text{км}}{\text{соат}}$. Поезднинг тормозланиш вақти ва тормозлаш йўли аниқлансин.

Жавоб: 20,4 с; 204 м.

70-мисол. (36.5). Вертикал ўқ атрофида тезланувчан айланаётган марказдан қочма регуляторнинг ҳаракат миқдори бош векторининг ўқлардаги проекциялари аниқлансин. Регулятор айланганда φ бурчак $\varphi=\varphi(t)$ қонунига асосан ўзгаради ва бу айланишда A, B шарлар юқорига кўтарилади. Стерженлар узунлиги бир хил



248-расм.

$$OA = OB = AD = BD = l.$$

D муфтанинг оғирлик кучи Z ўқида ётади ва P_2 га тенг. A ва B шарларни нуқтавий массалар деб, ҳар биттасининг оғирлиги P_1 деб олинсин. Стерженларнинг массаси ҳисобга олинмасин (248- расм).

Ечиш. A ва B шарлар Z ўқи атрофида айланганида марказдан қочма инерция кучлар ҳосил бўлади. Инерция кучлари шарларни юқорига кўтарилишга мажбур қилади. Шунинг учун шарларнинг тезлиги v_z, v_y ташкил этувчиларга ажралади. Бу тезликлар ZOY текислигида ётади. Ана шу сабабдан A ва B шарлар тезликларининг X ўқидаги проекциялари $v_{Ax} = v_{Bx} = 0$ бўлади.

Система ҳаракат миқдори бош векторининг X ўқидаги проекцияси

$$Q_x = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx} + m_D v_{Dx} = 0, \tag{1}$$

чунки

$$v_{Ax} = -v_{Bx} \text{ ва } v_{Dx} = 0 \text{ ҳамда } m_A = m_B.$$

Бош векторнинг y ўқидаги проекцияси

$$Q_y = m_A v_{Ay} + m_B v_{By} + m_D v_{Dy}. \tag{2}$$

Лекин

$$v_{Ay} = -v_{By}$$

$$v_{Dy} = 0$$

эканлигини назарда тутсак,

$$Q_y = 0 \tag{3}$$

эканлиги равшан бўлади.

Энди ҳаракат миқдорининг бош векторининг z ўқидаги проекцияси Q_z, катталиги Q_{Az}, Q_{Bz} ва Q_{Dz} нинг йиғиндисига тенг бўлиб, z ўқининг манфий томонига йўналганлигини ҳисобга оламиз:

$$Q_z = -(m_B v_{Az} + m_B v_{Bz} + m_D v_{Dz}). \tag{4}$$

Маълумки,

$$m_A = m_B = \frac{P_1}{g}; \quad m_D = \frac{P_2}{g}.$$

Расмдан

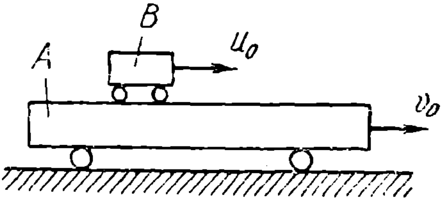
$$v_{Az} = v_{Bz} = \omega AK$$

$$AK = l \cdot \sin\varphi$$

$$\omega = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\varphi}$$

боғланишлар мавжуд. Шу боғланишларни (4) формулага қўйиб,

$$Q_z = -2\,\frac{P_1 + P_2}{g}\,l \times \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi$$



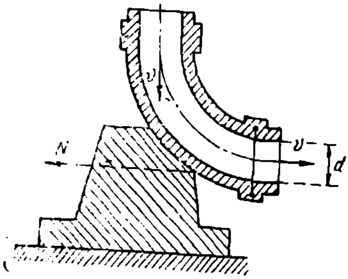
249- расм.

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

71- мисол. (36.11). Инерция билан A платформа устидаги B аравача биргаликда v_0 тезлик билан ҳаракат қилмоқда. B аравача эса A платформа устида u_0 нисбий тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Маълум вақтдан кейин аравача тўхтатилган. Аравача тўхтатилгандан кейин платформанинг аравача билан биргаликдаги тезлиги аниқлансин (249- расм). Аравача массаси m, платформа массаси M деб қабул қилинсин.

Жавоб: $v = v_0 + \frac{m}{M+m} u_0$.

72- мисол. (36.14). Диаметри $d = 300$ мм бўлган қувурдан $2\ \frac{м}{с}$ тезлик билан оққан сув қувурнинг тирсагига таъсир қиладиган босим кучининг горизонтал ташкил этувчиси аниқлансин (250- расм).



250- расм.

Ечиш. Олдин суюқлик тинч ҳолатда бўлиб ($v_0 = 0$), кейин v тезлик билан ҳаракат қилади деб ҳисоблаймиз. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремани кўрсатувчи (86.10) тенгламанинг горизонтал ўқдаги проекциясини

$$\frac{dQ_c}{dt} = Gv - Gv_0 = G(v - v_0) \qquad (1)$$

деб ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг чап томони

$$F = N = \frac{dQ_c}{dt} \text{ ёки } N = Gv, \text{ чунки } v_0 = 0 \qquad (2)$$

қувурнинг тирсагига таъсир қилувчи босим кучини ифодалайди. (1) нинг ўнг томонидаги G вақт бирлигида қувурнинг кўндаланг кесимидан ўтадиган суюқлик массасидир. Агар қувурнинг кўндаланг кесимининг юзи

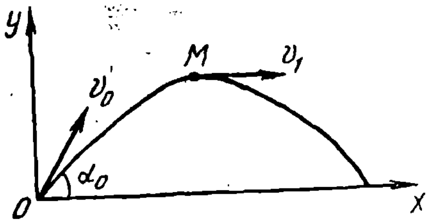
$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

сув зичлиги $\rho = 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ эканлигини назарда тутсак ва

$$G = \rho \cdot S \cdot v = \frac{\pi \rho d^2 v}{4}$$

формулани (2) ва (1) га қўйиб қуйидагига эга бўламиз:

$$N = \frac{\pi \rho d^2 v^2}{4} = 28.9\ \text{кг}.$$



251- расм.

73-мисол. (28.9). $v_0 = 500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ бошланғич тезлик билан $\alpha = 60°$ бурчак остида отилган снаряд кўтарилиб, M нуқтага $v_1 = 200\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ тезлик билан келади. Снаряд оғирлигини $P = 100$ кг деб қабул қилиб, снарядга қўйилган тенг таъсир этувчи кучлар импульсларининг ўқлардаги проекцияларини аниқланг (251- расм).

Ечиш. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши куч импульсларининг йиғиндисига тенглигидан фойдаланамиз, (85.11) тенгламага асосан

$$S_x = mv_{1x} - mv_{0x};\quad S_y = mv_{1y} - mv_{0y}.$$

Расмдан

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha;\quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha;\quad v_{1x} = v_1;\quad v_{1y} = 0$$

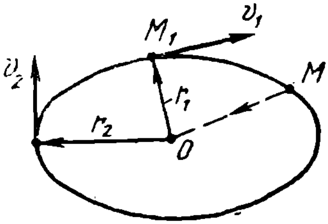
эканлиги равшандир. Агар $m = \frac{P}{g}$ эканлигини эътиборга олсак,

$$S_x = \frac{P}{g}(v_1 - v_0 \cos \alpha) = 510\ \frac{\text{кг}}{\text{с}},$$

$$S_y = -\frac{P}{g} v_0 \sin \alpha = -4410 \frac{\text{кг}}{\text{с}},$$

шу тарзда куч импульсларининг проекцияларини топамиз.

74-мисол. (28.8). Қўзғалмас марказга йўналган куч таъсирида M нуқта ҳаракат қилади. Нуқтанинг марказга энг яқин r_1 масофада бўлган ҳолатидаги тезлиги $v_1 = 30\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Нуқтанинг марказдан энг узоқ бўлган масофасини $r_2 = 5r$, деб ҳисоблаб, M нуқтанинг иккинчи ҳолатидаги v_2 тезлиги аниқлансин (252-расм).



252-расм.

Ечиш. M нуқтага таъсир қилувчи куч доим O марказга йўналган бўлиб, бу куч марказий кучдир. Нуқта марказий куч таъсирида ҳаракат қилганида (88.12) тенгламага асосан нуқтанинг ҳаракат миқдори моменти ўзгармасдан сақланади.

Нуқта биринчи ҳолатида mv_1r_1, иккинчи ҳолатида mv_2r_2 ҳаракат миқдори моментига эга бўлади ва (88.12) га биноан

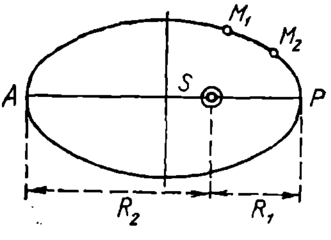
$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

тенглик ўринлидир. Маълумки, $r_2 = 5r$ эди. Буни юқоридаги формулага қўйсак,

$$v_2 = \frac{v_1}{5} = 6\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

75-мисол. (28.10). S фокусида Қуёш жойлашган эллипс бўйлаб M_1 ва M_2 метеорлар ҳаракат қилмоқда. M_1 ва M_2 метеорлар орасидаги масофа шундай кичикки, M_1M_2 ёйнинг тўғри чизиқ кесмаси деб қабул қилиш мумкин (253-расм). M_1M_2 кесманинг ўртаси P перигелий бўлганда, шу кесманинг узунлиги a га тенг бўлганлиги маълум. Иккала метеор ҳам бир хил секториал тезлик билан ҳаракат қилади ва $SP = R_1$, $SA = R_2$ деб қабул қилиб, M_1M_2 кесманинг ўртаси A перигелийдан ўтганда M_1M_2 кесма масофасини аниқланг.



253-расм.

Жавоб: $M_1M_2 = \frac{R_1}{R_2}\,a$.

76-мисол. (30.13). Оғирлиги $P = 500$ т бўлган ҳаракатланаётган поезд двигателини ўчирганда ҳаракати $R = (765 + 51v)$ кг қаршилик кўрсатувчи кучга учрайди, бу ерда v — $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ҳисобидаги тезлик. Агар поезднинг бошланғич тезлиги $v_0 = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ бўлса, поезд қанча масофани ўтиб тўхтайди?

Ечиш. Ҳаракатланаётган поезднинг R қаршилик кучи иш бажариб тўхтатади. Кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайдиган (92.6) тенгламага асосан

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\overline{R}\cdot s. \qquad (1)$$

Бу ерда $\overline{R}$ қаршилик кучининг ўртача қийматидир:

$$R = \frac{\int R\,dv}{\int dv} = -\frac{1}{v_0}\int_{v_0}^{v}(765 + 51\,v)\,dv = \frac{1530 + 51\,v_0}{2}.$$

Ҳосил бўлган ифодани (1) тенгламага қўямиз ($v = 0$ ҳаракат охирида бўлишини назарда тутамиз) ва s ни топамиз:

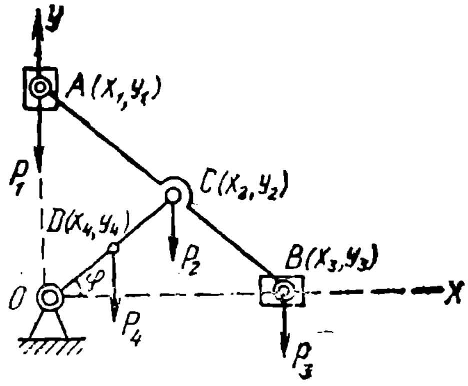
$$s = \frac{mv_0^2}{2\overline{R}} = 4{,}6\ \text{км}.$$

77-мисол. (30.10). Оғирлиги Q бўлган брус v_0 бошланғич тезлик билан горизонтал ғадир-будур текисликда s масофани сирпаниб ўтиб тўхтайди. Ишқаланиш кучини нормал босимга тўғри пропорционал деб қабул қилиб, сирпанишдаги ишқаланиш коэффициенти аниқлансин.

Жавоб: $f = \frac{v_0^2}{2\,gs}$.

78-мисол. (34.5) Ҳар бирининг оғирлиги Q бўлган A ва B муфталар, оғирлиги P бўлган OC кривошип, оғирлиги $2\,P$ бўлган AB чизғичдан тузилган эллипсограф механизмнинг массалар марказининг траекториясини аниқланг. $OC = AC = CB = l$.

Чизғич ва кривошипни бир жинсли стержень, муфталарни эса нуқтавий масса деб ҳисобланг (254-расм).



254- расм.

Ечиш. Бутун эллипсографни механик система деб ҳисобланса, система A ва B муфталар, AB чизғич ва OC кривошипдан — жами тўртта элементдан иборат. Бу элементларнинг оғирликларини P_1, P_2, P_3, P_4 ҳарфлари билан белгилаймиз. Оғирлик кучларининг қўйилиш нуқталари шу элементларнинг массалар марказини аниқлайди. Массалар маркази координаталарини мос ҳолда x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 билан белгилаб, бутун механик системанинг массалар маркази координатларини (82.3) формулага асосланиб қуйидагича аниқлаймиз:

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \tag{1}$$

$$y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \tag{2}$$

Маълумки, системадаги элементлар массалари

$$m_1 = m_3 = \frac{Q}{g}, \quad m_2 = \frac{2\,P}{g}; \quad m_4 = \frac{P}{g} \tag{3}$$

формулалардан аниқланади. Элементларнинг массалар маркази координаталари расмдан фойдаланиб топилади:

$$x_1 = 0, \; x_2 = l\cos\varphi, \; x_3 = 2\,l\cos\varphi, \; x_4 = \frac{l}{g}\cos\varphi. \tag{4}$$

$$y_1 = 2\,l\sin\varphi, \; y_2 = l\sin\varphi, \; y_3 = 0, \; y_4 = \frac{l}{2}\sin\varphi. \tag{5}$$

Энди (3), (4) ва (5) ифодаларни (1) ва (2) формулага қўйиб қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$x_c = \frac{4Q+5P}{3P+2Q} \cdot \frac{l}{2} \cos\varphi \qquad (6)$$

$$y_c = \frac{4Q+5P}{3P+2Q} \cdot \frac{l}{2} \sin\varphi \qquad (7)$$

(6) ва (7) дан $\cos^2\varphi$ ва $\sin^2\varphi$ функцияни аниқлаб, ҳосил бўлганини қўшганимизда системанинг массалар маркази траекториясининг тенгламасини аниқлаймиз:

$$x_c^2 + y_c^2 = \left(\frac{4Q+5P}{3P+2Q} \cdot \frac{l}{2}\right)^2. \qquad (8)$$

(8) системанинг массалар маркази траекториясини ифодалайди. Бу айлананинг тенгламасидир. Демак, эллипсографнинг ҳаракати вақтида массалар маркази O нуқта атрофида радиуси

$$R = \frac{4Q+5P}{3P+2Q} \cdot \frac{l}{2}$$

бўлган айлана чизади.

79-мисол. (34.4). 248-расмда кўрсатилган маълумотлардан фойдаланиб (70-мисолга қаранг), марказдан қочма регуляторнинг массалар маркази вазиятини аниқланг. A ва B шарларни нуқтавий массалар деб ҳисобланг. Стерженлар массалари ҳисобга олинмасин.

Жавоб: $y_c = 0$; $z_c = 2\frac{P_1 + P_2}{2P_1 + P_2} l \cos\varphi$.

XVI БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМНИНГ ИНЕРЦИЯ МОМЕНТИ

96-§. Механик система ва қаттиқ жисмнинг текислик, ўқ ва қутбга нисбатан инерция моменти. Инерция радиуси

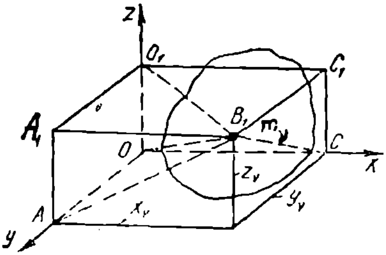
Маълумки, қаттиқ жисмнинг илгариланма ҳаракати вақтида инерция ўлчови массасидир. Жисм массасининг ортиши билан унинг тезланиши камаяди. Ҳаракатланаётган жисм массаси қанча катта бўлса, уни тўхтатиш шунча қийиндир, массаси катта бўлган жисмни ҳаракатлантириш ҳам қийиндир.

Агар жисм айланма ҳаракат қилса, инерция ўлчови бўлиб инерция моменти хизмат қилади. Инерция моменти қанча катта бўлса, жисмнинг бурчакли тезланиши шунча кичик (тескари пропорционал) бўлади. Механик системанинг инерция моменти системада массанинг тақсимланишига боғлиқ бўлади. Худди шундай қаттиқ жисмнинг инерция моменти ҳам жисм массаларининг тақсимланиши билан характерланади.

Инерция моменти скаляр қатталик бўлиб, катталикнинг миқдори жисмнинг массасига ва жисмдан танланган нуқта, ўқ ёки текисликкача бўлган масофага нисбатан ўзгаради.

Қаттиқ жисмнинг текисликка нисбатан инерция моменти деб, шу жисм нуқталари массаларининг нуқталардан текисликкача бўлган масофанинг квадратига бўлган кўпайтмасининг йиғиндиси билан аниқланадиган катталикка айтилади.

Қаттиқ жисмнинг m_ν массали нуқтаси xOy, zOx, yOz текисликлардан z_ν, y_ν, x_ν масофаларда жойлашган бўлсин (255-расм) (яъни қаттиқ жисм N нуқтадан иборат деб олиб, N нуқтадан фақат битта ν-нуқтани фикран ажратиб олдик). Бутун қаттиқ жисмнинг yOz текисликка нисбатан I_{yoz} инерция моменти, юқорида айтилган таърифга асосан қуйидагича аниқланади:



255- расм.

$$I_{yoz} = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu^2. \tag{96.1}$$

Айнан шундай мулоҳазалар йўли билан zOx ва xOy текисликларга нисбатан, инерция моменти қуйидагига тенг бўлади:

$$I_{zox} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu^2 \tag{96.2}$$

$$I_{xoy} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu z_\nu^2. \tag{96.3}$$

Жисмнинг ўқларга нисбатан инерция моментини аниқлаш учун B_1 нуқтадан ўқларга перпендикуляр бўлган B_1O; B_1A; B_1C кесмаларни ўтказиб, I_x, I_y, I_z катталиклар учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$I_x = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu B_1 C^2,$$

$$I_y = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu B_1 A^2, \qquad (96.4)$$

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu B_1 O^2,$$

Агар (255-расм):

$$B_1C^2 = y_\nu^2 + z_\nu^2;$$

$$B_1A^2 = x_\nu^2 + z_\nu^2; \qquad (96.5)$$

$$B_1O_1^2 = x_\nu^2 + y_\nu^2$$

эканлигини ҳисобга олсак, (96.4) формулалар қуйидагича ифодаланади:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum_\nu m_\nu y_\nu^2 + \sum_\nu m_\nu z_\nu^2 = I_{zox} + I_{xoy} \\ I_y &= \sum_\nu m_\nu x_\nu^2 + \sum_\nu m_\nu z_\nu^2 = I_{yoz} + I_{xoy} \\ I_z &= \sum_\nu m_\nu x_\nu^2 + \sum_\nu m_\nu y_\nu^2 = I_{yoz} + I_{zox} \end{aligned}\right\}. \qquad (96.6)$$

Тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$I_x + I_y + I_z = 2(I_{xoy} + I_{xoz} + I_{yoz}). \qquad (96.7)$$

(96.7) дан жисмнинг ўқларга нисбатан инерция моментлари йиғиндиси, жисмнинг текисликларга нисбатан инерция моментлари йиғиндисидан икки марта катта деган хулоса чиқади.

Жисмнинг O нуқтага нисбатан инерция моментига қутбга нисбатан (ёки қутб) инерция моменти деб айтилади. Қутб инерция моментини аниқлаш учун B_1 нуқтани O нуқта билан B_1O тўғри чизиқ орқали туташтирамиз. Қутб инерция моменти

$$I_0 = \sum_\nu m_\nu B_1 O^2 \qquad (96.8)$$

формула орқали ҳисобланади. Бироқ

$$B_1O^2 = x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2 \qquad (96.9)$$

эканлигини назарда тутсак, I_0 учун

$$I_0 = \sum m_\nu x_\nu^2 + \sum m_\nu y_\nu^2 + \sum m_\nu z_\nu^2 =$$

$$= I_{xOy} + I_{xoz} + I_{yoz} \qquad (96.10)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Инерция моментлари формулаларида ҳамма вақт масофанинг квадрати қатнашяпти. Демак, инерция моментини топиш учун жисм массасини бирор масофанинг квадрати орқали аниқланадиган катталикка кўпайтириш керак. Агар шу катталикни i билан белгиласак, жисмнинг z ўққа нисбатан инерция моментини

$$I_z = mi^2 \qquad (96.11)$$

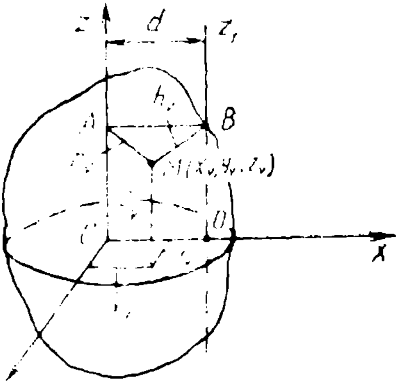
формула орқали ҳисоблаш мумкин. Бунда m — жисм массаси, i — жисмнинг Z ўқига нисбатан инерция радиуси.

Инерция моменти ҳамма вақт мусбат қийматга эга ва ҳеч қачон нолга тенг бўлмайди. Тўлиқ инерция моменти системадаги нуқталарнинг инерция моментларининг арифметик йиғиндисига тенг. Инерция моментининг бирлиги СИ системасида кг·м², СGС да г·см².

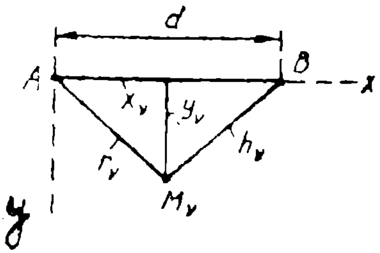
97-§. Параллел ўқларга нисбатан қаттиқ жисмнинг инерция моментини аниқлаш

Қаттиқ жисмнинг массалар марказидан ўтадиган Z ўқига нисбатан I_z инерция моменти маълум бўлса (256-расм), жисмнинг Z ўқига параллел бўлган Z_1 ўқига нисбатан I_{z1} инерция моментини қуйидаги теоремадан фойдаланиб аниқланади (Гюйгенс теоремаси).

Жисмнинг массалар марказидан ўтувчи Z ўқига параллел бўлган ихтиёрий бошқа Z_1 ўқига нисбатан инерция моменти шу жисмнинг массалар марказидан ўтувчи Z ўққа нисбатан инерция моментига жисм массасининг ўқлар орасидаги масофа квадратига бўлган кўпайтмасининг қўшилганига тенг.



256- расм.



257- расм.

Жисмдан фикран M_ν нуқтани ажратиб, шу нуқтадан Z ва Z_1 ўқларига перпендикуляр ўтказиб, r_ν ва h_ν кесмаларни ҳосил қиламиз. Жисмнинг Z_1 ўқига нисбатан I_{z_1} инерция моменти Гюйгенс теоремасига асосан

$$I_{z_1}=I_z+md^2 \qquad (97.1)$$

формула билан аниқланиши мумкинлигини исботлаймиз.

Расмдан кўринадики, инерция моментининг таърифига мувофиқ жисмнинг Z_1 ўқига нисбатан I_{z_1} инерция моменти

$$I_{z_1}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu h_\nu^2 \qquad (97.2)$$

кўринишда ёзилади. Расмдаги MAB учбурчакни алоҳида қилиб XOY текислигида чизганимизда 257- расм ҳосил бўлади. Бу расмдан

$$h_\nu^2=y_\nu^2+(d-x_\nu)^2 \qquad (97.3)$$

$$r_\nu^2=x_\nu^2+y_\nu^2 \qquad (97.4)$$

эканлиги равшандир. Бу ердаги иккинчи тенгламани биринчисига қўйсак,

$$h_\nu^2=r_\nu^2-x_\nu^2+d^2-2d\cdot x_\nu+x_\nu^2=r_\nu^2+d^2-2dx_\nu \qquad (97.5)$$

ифодани ҳосил қилиб, буни (97.2) формулага қўйганимизда I_{z_1} учун

$$I_{\nu_1}=\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2+\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu d^2+\sum_{\nu=1}^{N} 2m_\nu dx_\nu \qquad (97.6)$$

формула келиб чиқади. Бу ерда

$$\sum_\nu m_\nu r_\nu^2=I_z \qquad (97.7)$$

$$\sum_\nu m_\nu d^2=d^2\sum_\nu m_\nu=md^2 \qquad (97.8)$$

чунки

$$\sum_\nu m_\nu=m$$

ва

$$\sum_{\nu} m_{\nu} 2d \cdot x_{\nu} = 2d \sum m_{\nu} x_{\nu} = 0 \qquad (97.9)$$

бўлиб қолади. (97.9) нинг ҳосил бўлишига сабаб, $\sum_{\nu} m_{\nu} x_{\nu}$ қаттиқ жисм нуқталари массаларининг статик моментлари йиғиндисини ифодалайди ва бу статик моментларнинг массалар марказига нисбатан йиғиндиси нолга тенгдир. Демак, (97.7) ва (97.9) тенглама ҳисобга олинса, (97.6) формуладан (97.1) тенглама келиб чиқади ва шунга асосланиб, Гюйгенс теоремаси исботланди деб айтиш мумкин.

Энди (97.1) формулани инерция радиуслари орқали ифодалаш учун (96.11) формуладан фойдаланамиз:

$$I_{z_1} = mi_{z_1}^2$$

$$I_z = mi_z^2$$

ва

$$I_{z_1} = I_z + md^2$$

ёки

$$mi_{z_1}^2 = mi_z^2 + md^2.$$

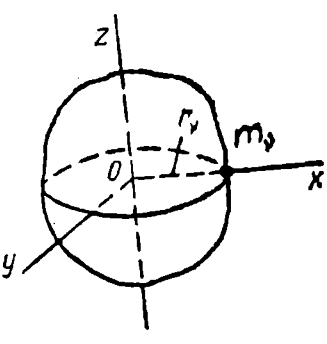
Охирги тенгламанинг иккала томонини m га бўлиб

$$i_{z_1}^2 = i_z^2 + d^2$$

формулани ҳосил қиламиз.

98-§. Бир жинсли жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблаш

Бир жинсли ва массалар марказидан ўтадиган симметрия ўқига эга бўлган аниқ шаклли баъзи жисмларнинг инерция моментларини ҳисоблашни кўриб чиқайлик. Бунинг учун қуйидаги мулоҳазани эътиборга оламиз. Қаттиқ жисм фикран Δm_{ν} бўлакчаларга ажратилган бўлиб, бу бўлакча симметрия ўқидан r_{ν} масофада жойлашган бўлса, жисм бир жинсли ва бўлакчаларни чексиз кичик деб қабул қи-



258- расм.

лиш мумкин бўлса, битта бўлакчанинг Z ўқнга нисбатан инерция моментини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин (258-расм):

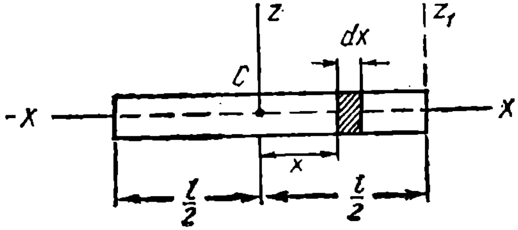
$$I_{z\nu} = \Delta m_\nu r_\nu^2. \qquad (98.1)$$

Айтиб ўтганимиздек, бўлакча массаси чексиз кичик бўлса,

$$I_{z\nu} = r_\nu^2\, dm \qquad (98.2)$$

кўринишда ёзилади. Бутун жисмнинг инерция моментини аниқлаш учун (98.2) интегралланади, яъни

$$I_z = \int_m r^2\, dm. \qquad (98.3)$$



259- расм.

Ана шундай мулоҳазага таянган ҳолда, яъни (98.3) формула ёрдамида, баъзи жисмларнинг инерция моментларини аниқлаймиз.

1. Бир жинсли чексиз юпқа стерженнинг C марказидан ўтадиган ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаймиз (259-расм). Фикран стерженнинг кўндаланг кесим юзини S билан белгилаймиз. Стерженнинг узунлиги dx бўлган бўлакчаларга ажратамиз. Бу бўлакчанинг массаси

$$dm = \rho \cdot S\, dx \qquad (98.4)$$

орқали аниқланади. Бунда ρ — стержень материалининг зичлиги, x — стерженнинг массалар марказидан dx бўлакчагача масофа. Энди (98.4) тенгламани ҳисобга олиб, (98.3) интегралланса (бу ерда $r = x$ деб олинади):

$$I_z = \int_{-l/2}^{+l/2} S \cdot \rho\, x^2\, dx = \frac{\rho\, l^3 S}{12}. \qquad (98.5)$$

Стерженнинг тўлиқ массаси

$$m = \rho S l$$

эканлигини назарда тутсак, қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \qquad (98.6)$$

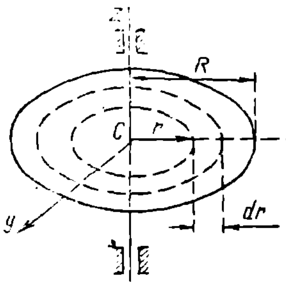
Агар стерженнинг Z ўқига нисбатан инерция моментини (97.1) формулага асосланиб ҳисобласак ушбу формула келиб чиқади:

$$I_{z_1} = \frac{ml^2}{12} + m\frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \qquad (98.7)$$

2. Юпқа дискнинг массалар марказидан ўтган ўққа нисбатан инерция моментини аниқлаш учун фикран дискнинг қалинлигини dr бўлган элементар ҳалқаларга ажратамиз (260-расм). Бу бўлакчанинг массаси унинг қалинлиги бир бирликка тенг бўлганда

$$dm = 2\pi r\rho dr \qquad (98.8)$$

формула орқали аниқланади. (98.8) ни (98.3) га қўйиб,



260- расм.

$$I_z = \int_0^R 2\pi\rho r^3 dr = \frac{\pi\rho R^4}{2} \qquad (98.9)$$

ифодани ҳосил қиламиз. (98.8) га мувофиқ

$$m = 2\pi\rho\int_0^R r\,dr = \pi\rho R^2 \qquad (98.10)$$

эканлигини ҳисобга олиб ушбу формулани ҳосил қиламиз:

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2. \qquad (98.11)$$

Дискнинг X ва Y ўқларга нисбатан инерция моментини аниқлайлик. Диск жуда юпқа бўлганлиги учун унинг z_ν қалинлигини кичик миқдор деб ҳисобга олмасак (96.6) дан

$$I_x = \sum_\nu \Delta m_\nu y_\nu^2,$$

$$I_y = \sum_\nu \Delta m_\nu x_\nu^2 \qquad (98.12)$$

ҳосил бўлади. Бу ерда x_ν, y_ν катталиклар фикран ажратилган элементар бўлакчанинг координаталари. Агар охирги икки тенгламани қўшсак,

$$I_x + I_y = \sum_\nu \Delta m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2) \qquad (98.13)$$

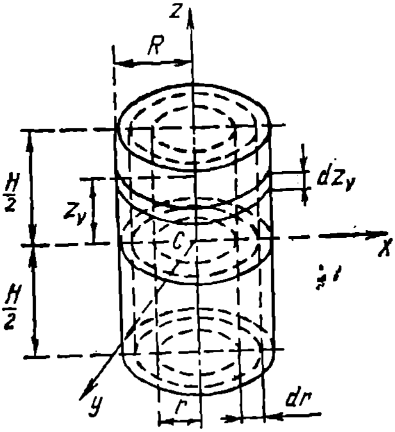
ифода ҳосил бўлади. Бу ифодани (96.6) тенгламаларнинг учинчиси билан таққосласак

$$I_x + I_y = I_z \qquad (98.14)$$

келиб чиқади. X ва Y ўқлар массалар маркази бўлган C нуқтага нисбатан симметрик олинганлари учун $I_x = I_y$ бўлиб қолади. Ана шунинг учун

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{mR^2}{4} \qquad (98.15)$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.



261- расм.

3. Бир жинсли яхлит цилиндрнинг инерция моментини массалар марказидан ўтган ўқларга нисбатан аниқлаш учун цилиндрнинг фикран қалинлиги dr бўлган цилиндрик қатламчаларга ажратамиз (261- расм). Цилиндрни CZ ўққа нисбатан инерция моменти

$$I_{cz} = \int_0^R r^2 dm \qquad (98.16)$$

формула билан топилади. Бу ерда

$$dm = 2\,\pi \rho\, r\, H\, dr \qquad (98.17)$$

$$m = \rho \int_0^R 2\,\pi r\, H dr = \pi \rho\, R^2 H \qquad (98.18)$$

эканлиги ҳам равшандир. Агар (98.17) ва (98.18) эътиборга олинса,

$$I_{cz} = 2\,\pi \rho\, H \int_0^R r^3\, dr = \frac{\pi \rho\, R^4}{2}\, H = \frac{mR^2}{2} \qquad (98.19)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди инерция моментини X ва Y ўқларга нисбатан аниқлаш учун X, Y ўқлар C нуқтага нисбатан симметрик бўлганидан $I_x = I_y$ бўлиб қолишини эсда тутамиз. I_x катталигини аниқлаш учун эса цилиндрни фикран баландлиги бўйлаб dz бўлакчаларга ажратамиз. Бу ҳолда XCY текислигига нисбатан инерция моментини

$$I_{xcy} = \int z^2\,dm,$$

$$dm = \pi\rho R^2\,dz \text{ ва } m = \pi\rho R^2 H$$

$$I_{xyc} = \pi\rho R^2 \int_{-H/2}^{+H/2} z^2\,dz = \frac{\pi\rho R^2}{3}\left(\frac{H^3}{8} + \frac{H^3}{8}\right) = \frac{\pi\rho R^2 H}{3}\ \frac{H^2}{4}$$

$$I_{xyc} = \frac{mH^2}{12} \qquad (98.20)$$

формула билан ҳисоблаш мумкин. Агар $I_x = I_y$ ва (96.6) тенгламаларга асосан

$$I_{cz} = I_{xcz} + I_{ycz} \qquad (98.21)$$

эканлигини ҳамда

$$I_{xcz} = I_{ycz} \qquad (98.22)$$

эканлигини ҳисобга олсак

$$I_{cz} = 2\,I_{xcz} \text{ ва } I_{xcz} = \frac{I_z}{2} = \frac{mR^2}{4} \qquad (98.23)$$

формулалар ҳосил бўлади. Агар

$$I_{cx} = I_{xcz} + I_{xcy};\quad I_{cy} = I_{ycx} + I_{ycz}$$

тенгламаларда

$$I_{xcz} = I_{cyz} = \frac{mR^2}{4} \text{ ва } I_{xcy} = I_{ycx} = \frac{mH^2}{12}$$

яъни (98.20) ва (98.22), (98.23) ни ҳисобга олганимизда

$$I_{cx} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right),$$

$$I_{cy} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right). \qquad (98.24)$$

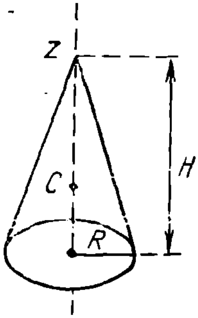
$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2}$$

формула ҳосил бўлади.

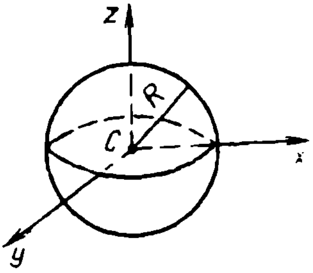
Юқорида кўрсатилган усул билан бир жинсли конус, шар ва кавак цилиндрнинг массалар марказидан ўтган ўқларга нисбатан инерция моментларини аниқлаш формулаларини келтириб чиқариш мумкин.

Бир жинсли конуснинг C нуқтасидан ўтган Z ўқига нисбатан инерция моменти (262-расм).

$$I_{cz} = 0,3\ mR^2 \tag{98.25}$$



262-расм.



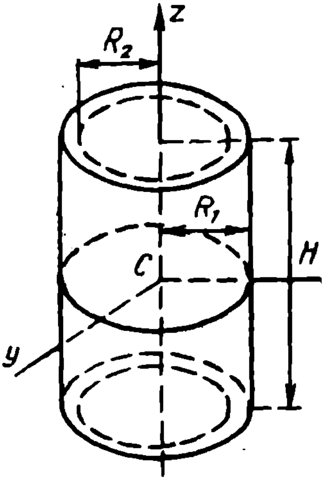
263-расм.

формула орқали ҳисобланади.

Бир жинсли шарнинг C массалар марказидан ўтадиган ўқларга нисбатан инерция моментини ҳисоблаш формуласи (263-расм) қуйидаги

$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{5}\ mR^2 \tag{98.26}$$

формула билан аниқланади.



264-расм.

Кавак цилиндрнинг инерция моменти қуйидаги формула билан ҳисобланади (264-расм):

$$I_{cz} = \frac{m}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right) \tag{93.27}$$

Шундай қилиб, инерция моменти аниқланадиган формулалардан кўриняптики, ҳамма вақт инерция моменти жисм массасини қандайдир масофанинг квадратига кўпайтириш билан аниқланади. Бу масофанинг квадрати инерция моментлари формулаларида массалар олдидаги коэффициентдир. Мана шу коэффициентлар (96.11) формуладаги инерция радиусларининг квадратига тенг бўлади. Ҳақиқатан ҳам, (96.11) билан, масалан, (98.25)—(98.27) тенгламалар тенглаштирилса, бу уч ҳолда инерция радиуслари

$$i_{cz} = \sqrt{0,3R^2}; \quad i_{cx} = i_{cy} = i_{cz} = \sqrt{\frac{2}{5}R^2};$$

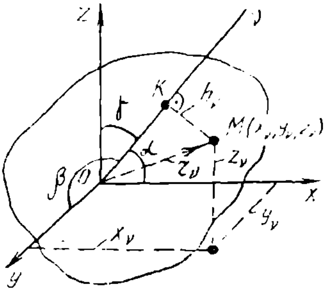
$$i_{cz} = \sqrt{\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}}$$

эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

99-§. Координата бошидан ўтаётган ихтиёрий ўққа нисбатан қаттиқ жисмнинг инерция моментини аниқлаш

Ўзаро перпендикуляр бўлган X, Y, Z ўқлари ёки шу ўқларга параллел бўлган бошқа ўқларга нисбатан жисмнинг инерция моментини аниқлашни шу бобнинг олдинги параграфларида кўриб чиқдик. Энди жисмнинг инерция моментини координата бошидан ўтадиган ихтиёрий ν ўқига нисбатан аниқлайлик (265-расм). Бу ν ўқи X, Y, Z ўқлари билан α, β, γ бурчакларни ташкил қилсин. Жисм M нуқтасининг координаталари x_ν, y_ν, z_ν деб фараз қиламиз. Шу жисмнинг ν ўқига нисбатан инерция моментини

$$I_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu h_\nu^2 \qquad (99.1)$$



265- расм.

орқали аниқланиши маълум. Бунда m_ν — M нуқтанинг массаси. h_ν — нуқтадан ν ўқигача бўлган энг қисқа масофа, $h_\nu = Mk \cdot M$ нуқтанинг O қутбга нисбатан x_ν, y_ν, z_ν координаталари. r_ν радиус-вектор орқали ҳам аниқлаш мумкин.

Маълумки,

$$r_\nu^2 = x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2 \qquad (99.2)$$

расмдан

$$h_\nu^2 = r_\nu^2 - OK^2 \tag{99.3}$$

эканлиги ҳам равшандир. OK кесма r_ν векторининг ν ўқидаги проекцияси бўлганлиги учун

$$OK = x_\nu \cos\alpha + y_\nu \cos\beta + z_\nu \cos\gamma \tag{99.4}$$

ва математикадан маълумки,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{99.5}$$

кўринишда боғланиш бор. Агар (99.2) — (99.5) тенгламаларни (99.1) тенгламага қўйсак

$$I_\nu = \sum m_\nu (\alpha_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \sum m_\nu (x_\nu \cos\alpha + y_\nu \cos\beta + \\ + z_\nu \cos\gamma)^2 \tag{99.6}$$

ифодани ҳосил қиламиз, бу ерда

$$h_\nu^2 = (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) - x_\nu \cos\alpha + \\ + y_\nu \cos\beta + z_\nu \cos\gamma)^2 = x_\nu^2 \cos^2\alpha + x_\nu^2 \cos^2\beta + x_\nu^2 \cos^2\gamma + \\ + y_\nu^2 \cos^2\alpha + y_\nu^2 \cos\beta + y_\nu^2 \cos\gamma + r_\nu^2 \cos^2\alpha + z_\nu^2 \cos^2\beta + \\ + z_\nu^2 \cos^2\gamma - x_\nu^2 \cos^2\alpha - 2\, x_\nu y_\nu \times \cos\alpha \cos\beta - y_\nu^2 \cos^2\beta - \\ - 2\, x_\nu z_\nu \cos\alpha \cos\gamma - 2\, y_\nu z_\nu \cos\beta \cos\gamma - z_\nu^2 \cos^2\gamma = (y_\nu^2 + \\ + z_\nu^2) \cos^2\alpha + (x_\nu^2 + z_\nu^2) \cos^2\beta + (x_\nu^2 + y_\nu^2) \cos^2\gamma - \\ - 2\, x_\nu y_\nu \cos\alpha \cos\beta - 2\, x_\nu z_\nu \cos\alpha \cos\gamma - \\ - 2\, y_\nu z_\nu \cos\beta \cos\gamma. \tag{99.7}$$

Охирги тенгламани (99.6) га қўямиз ва

$$J_\nu = \sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) \cos^2\alpha + \sum m_\nu (x_\nu^2 + z_\nu^2) \cos^2\beta + \sum m_\nu (x_\nu^2 + \\ + y_\nu^2) \cos^2\gamma - 2 \sum m_\nu x_\nu y_\nu \cos\alpha \cos\beta - \\ - 2 \sum m_\nu x_\nu z_\nu \cos\alpha \cos\gamma - 2 \sum m_\nu y_0 z_\nu \cos\beta \cos\gamma \tag{99.8}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Белгилашлар киритамиз:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum_\nu m_\nu \ (y_\nu^2 + z_\nu^2); \\ I_y &= \sum_\nu m_\nu \ (x_\nu^2 + z_\nu^2); \\ I_z &= \sum_\nu m_\nu \ (x_\nu^2 + y_\nu^2); \\ I_{xy} &= \sum_\nu m_\nu ,\ x_\nu ,\ y_\nu ; \\ I_{xz} &= \sum_\nu m_\nu ,\ x_\nu ,\ z_\nu ; \\ I_{yz} &= \sum_\nu m_\nu ,\ y_\nu ,\ z_\nu . \end{aligned}\right\} \tag{99.9}$$

Агар (99.9) ҳисобга олинса, I_v учун қуйидаги формула

$$I_v = I\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cdot\cos\beta +$$
$$- 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{yz}\cdot\cos\beta\cos\gamma \qquad (99.10)$$

ҳосил бўлади. Бу формула билан v ихтиёрий ўққа нисбатан инерция моменти ҳисобланади. Бунда I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} катталиклар x ва y; x ва z; y ва z ўқларга нисбатан марказдан қочма инерция моментлари дейилади. Бу марказдан қочма инерция моментлари мусбат ишорали ҳам, манфий ишорали ҳам бўлиши мумкин.

100- §. Инерция эллипсоиди. Бош инерция ўқлари

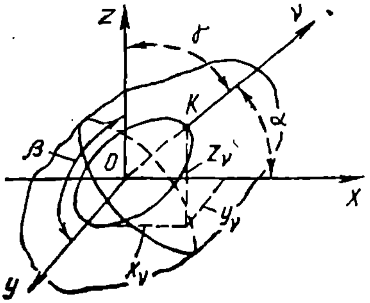
Олдинги параграфда жисмнинг ихтиёрий (O нуқтадан ўтадиган ўққа нисбатан) инерция моментини (99.10) формула билан ҳисоблаш мумкин. Бу формуладан кўринадики, I_v катталикнинг миқдори OK кесма миқдорига боғлиқ. Буни тасаввур қилиш учун OK ва I_v

$$OK = \frac{2}{\sqrt{I_v}} \qquad (100.1)$$

кўринишда боғлиқ деб ҳисоблайлик (266- расм). Бу формуладан ёки (99.10) формуладан (ошкор бўлмаган ҳолда) кўринадики, I_v ўзгариши билан OK ҳам ўзгаради.

Агар

$$\cos\alpha = \frac{x_v}{OK}; \quad \cos\beta = \frac{y_v}{OK}; \quad \cos\gamma = \frac{z_v}{OK} \qquad (100.2)$$



266- расм.

ифодаларни (99.10) формулага қўйиб, ҳосил бўлган тенгламани иккала томонини I_v га бўлсак, қуйидаги ифодани ҳосил қиламиз:

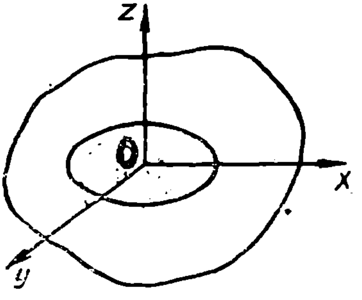
$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz} \to$$
$$\to yz = 1 \qquad (100.3)$$

(100.3) тенглама $OK = \frac{1}{\sqrt{I_v}}$ шарти бажарилганда K нуқта ҳаракати натижасида ҳосил бўладиган сиртни ифодалайди. Бу тенглама иккинчи тартибли сиртни ифодалайди. Сирт эллипсоид сиртидир, чунки (100.1) формула билан аниқланадиган OK масофа ҳамма вақт чекли аниқ қийматга эга (чунки $I \neq 0$ эканлиги равшан). Эллипсоид инерция эллипсоиди дейилади. Инерция эллипсоиднинг маркази, (100.3) тенгламага биринчи даражали координаталари бўлмаганлиги учун координаталар бошида жойлашган бўлади. Эллипсоиднинг учта симметрия ўқлари жисмнинг O нуқтадан ўтувчи бош инерция ўқлари дейилади. Шу ўқларга нисбатан олинган инерция моментлари бош инерция моментлари дейилади (264-расм).

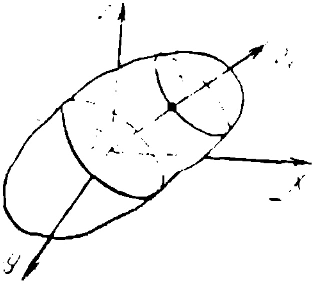
Агар бош инерция ўқларини координата ўқлари қилиб олсак, инерция эллипсоидини ифодалайдиган (100.3) тенгламадаги координаталар кўпайтмаси бўлган ҳадлар нолга тенг бўлади.
($I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$) ва (100.3) тенглама

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 = 1 \qquad (100.4)$$

кўринишни олади. Бу ҳолда жисмнинг исталган нуқтаси учун битта инерция эллипсоиди мос келади (267-расм). (100.4) даги A_1, B_1, C_1 катталиклар жисмнинг бош инерция ўқларига нисбатан инерция моментларидир. Марказдан қочма инерция моментлари ҳар бир жуфт ўқларга нисбатан нолга тенг.



267- расм.



268- расм.

Жисмнинг ҳар бир нуқтаси учун тегишли инерция эллипсоид тўғри келади. Нуқтага тегишли бўлган инерция эллипсоиди шу нуқтадан ўтадиган барча ўқларга нисбатан инерция моментларини характерлайди. Ҳақиқатан ҳам, бирон-бир O нуқтага тегишли инерция эллипсоиди маълум бўлса, шу нуқтадан γ_1 ўқни ўтказсак, ўқ эллипсоид сиртини K нуқтада кесади (268-расм). Агар OK масофа маълум бўлса, (100.1) формулага асосан γ_1 ўққа нисбатан

$$I_{\nu_1} = \frac{1}{(OK_1)^2} \qquad (100.5)$$

инерция моментини формуладан ҳисоблаб топиш мумкин бўлади.

Жисмнинг оғирлик марказига тегишли бўлган инерция эллипсоиди марказий инерция эллипсоиди деб айтилади ва шу марказий инерция эллипсоиди ўқлари марказий бош инерция ўқлари дейилади.

Шундай қилиб, умумий ҳолда инерция моменти (99.10) формула билан аниқланади. Координата ўқлари бош инерция ўқлари бўлиб қолганда $I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0$ бўлганлиги учун I_ν нинг миқдори

$$I_\nu = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma \qquad (100.6)$$

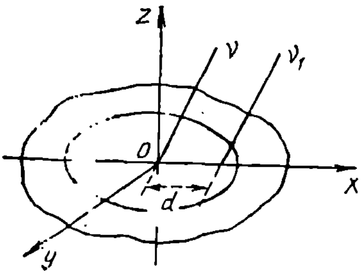
формула билан аниқланади.

Қаттиқ жисмнинг берилган нуқтасининг инерция эллипсоиди деб, шу берилган нуқтадан $OK = \frac{1}{\sqrt{I_\nu}}$ масофада турган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

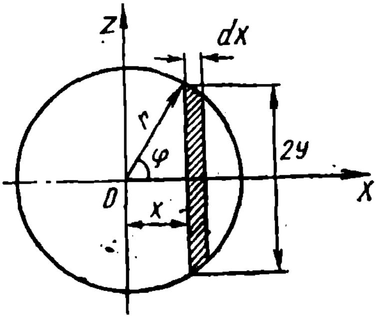
Қаттиқ жисмнинг O нуқтасидан ўтган ν ўққа параллел бўлган ν_1 ўққа нисбатан J_{ν_1} инерция моментини Гюйгенс теоремасига асосан (269-расм):

$$J_{\nu_1} = J_\nu + md^2$$

формула билан аниқланади.



269- расм.



270- расм.

80-мисол (34.9). Оғирлиги P ва радиуси r бўлган бир жинсли юпқа ярим дискни чегараловчи диаметр бўйлаб ўтувчи ўққа нисбатан инерция моментини аниқланг.

Ечиш. Ярим дискни расм текислигида чизамиз (270-расм). Ярим дискни чегараловчи диаметр бўйлаб ўтувчи OZ ўқдир. OZ ўқига нисбатан инерция моменти (98.3) формулага асосан қуйидагича аниқланади:

$$J_z = \int x^2\, dm. \tag{1}$$

Бунда dr' — ярим дискдан фикран ажратилган элементар бўлакчанинг Z ўқигача бўлган масофадир. Агар юпқа ярим дискнинг қалинлигини бир бирликка тенг деб қабул қилсак, бу бўлакчанинг массаси

$$dm = 2\rho\, y\, dx. \tag{2}$$

Расмдан

$$x = r\cos\psi, \quad dx = -r\sin\psi\, d\psi, \tag{3}$$

$$y = r\sin\psi, \tag{4}$$

ва

$$m = P/g \tag{5}$$

бўлганлигини ҳисобга олганимизда

$$dm = \rho\, r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi \tag{6}$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламадан ярим дискнинг массаси қуйидагига тенг эканлиги келиб чиқади:

$$m = \int^{\pi/2} 2\rho\, r^2 \sin^2\varphi\, d\varphi = 2\rho\, r^2 \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\varphi \right|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\rho\, r^2}{2}\cdot \tag{7}$$

Энди (3) — (6) тенгламаларни (1) формулага қўямиз:

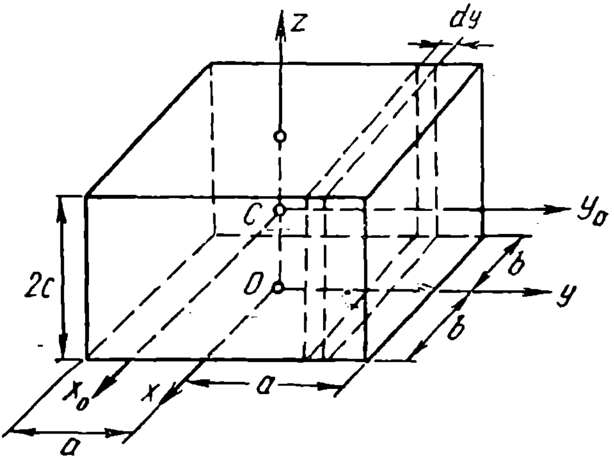
$$J_z = \int_0^{\pi/2} 4\rho\, r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi = 4\rho\, r^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi. \tag{8}$$

Ўнг томондаги интегрални алоҳида интеграллаймиз:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\, d(2\varphi) = \frac{\pi}{16}\cdot \tag{9}$$

Ниҳоят (9) ни (8) га қўйганимизда

$$J_z = \frac{\pi\beta\, r^4}{4} = \frac{\pi\rho r^2\cdot r^2}{4} \tag{10}$$



271- расм.

ҳосил бўлади, бунда (7) тенгламага асосан $\pi\rho r^2 = m = p/g$ эканлигини назарда тутганимизда

$$I_z = \frac{Pr^2}{4g}$$

келиб чиқади.

81-мисол (34.11). Оғирлиги P бўлган тўғри параллелепипеднинг x, y, z ўқларга нисбатан инерция моментларини аниқланг (271-расм).

Ечиш. Фараз қилайлик, параллелепипедни қалинлиги dy бўлган элементар пластинкачаларга ажратилсин (271-расм). Параллелепипеднинг C оғирлик марказидан X_0, Y_0, Z ўқларни ўтказамиз. Агар cz_1, cx_0, cy_0 ўқларга нисбатан I_{cz}, I_{cx_0}, I_{cy_0} инерция моментлари маълум деб фараз қилсак, Гюйгенс теоремасига асосан OX, OY, OZ ўқларга нисбатан I_{x_0}, I_{y_0}, I_z инерция моментлари

$$I_x = I_{cx_0} + mc^2 \qquad (1)$$

$$I_y = I_{cy_0} + mc^2 \qquad (2)$$

$$I_z = I_{cz} \qquad (3)$$

шаклларда ёзилади.

Симметрия ўқларига нисбатан I_{cx_0}, I_{cy_0}, I_{cz} инерция моментлари (96.6) формулаларга мувофиқ

$$I_{cx_0} = I_{x_0cz} + I_{x_0,cy_0}, \qquad (4)$$

$$I_{cy_0} = I_{y_0cx_0} + I_{y_0cz} \qquad (5)$$

$$I_{cz} = I_{zcx_0} + I_{zcy_0} \qquad (6)$$

кўринишда ёзилади. Текисликларга нисбатан I_{x_0cz}, $I_{x_0cy_0}$, I_{y_0cz} инерция моментлари (98.3) формулага мувофиқ ҳисобланади.

$$I_{x_0cz} = \int y^2 dm. \qquad (7)$$

Расмдан кўринадики,

$$dm = 4\rho bC\, dy \qquad (8)$$

$$m = 4\rho bC \int_{-a}^{+a} dy = 8\rho abc. \qquad (9)$$

Охирги (8) ва (9) ни ҳисобга олсак, (7) ифода қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$I_{x_0cz} = 4\rho bc \int_{-a}^{a} y^2\, dy = \frac{8\rho abc}{3} = \frac{m}{3} a^2. \qquad (10)$$

I_{x_0cz} ни топган усулдан фойдаланиб, ушбу ифодани ҳосил қиламиз:

$$I_{x_0cy} = \int z^2 dm = 4\rho ab \int_{-c}^{+c} z^2 dz = \frac{m}{2} c^2. \qquad (11)$$

Энди (9) ва (10) ифодаларни (4) га қўямиз:

$$I_c x_0 = \frac{m}{3}(a^2 + c^2) = \frac{P}{3g}(a^2 + c^2) \qquad (12)$$

ва ҳосил бўлган (11) формулани (1) га қўямиз ва I_{cx_0} учун қуйидагини

$$I_{cx_0} = \frac{P}{3g}(a^2 + c^2) + \frac{P}{g} c^2 = \frac{P}{3g}(a^2 + 4c^2) \qquad (13)$$

ҳосил қиламиз.

Энди I_{y_0cz} аниқланади:

$$I_{y_0cz} = \int_0^b x^2 dm = 4\rho ac \int_0^b x^2 dx = \frac{m}{3} b^3. \qquad (14)$$

Ҳосил бўлган (14) ва (10) ифодаларни (5) га, (9) билан (13) ни (6) га қўйиб

$$I_{cy_0} = \frac{m}{3} c^2 + \frac{m}{3} b^2 = \frac{P}{3g}(c^2 + b^2), \qquad (15)$$

$$I_{cz} = \frac{m}{3}a^2 + \frac{m}{3}b^2 = \frac{P}{3g}(a^2 + b^2) \qquad (16)$$

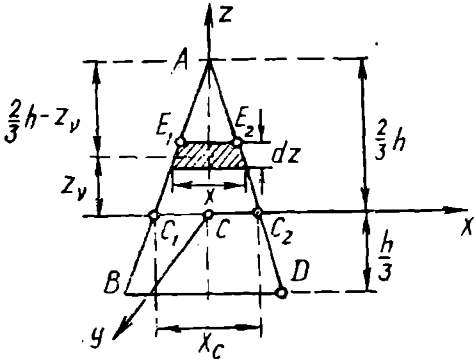
формулаларни ҳосил қиламиз ва тегишли равишда (2) ва (3) формулаларга қўйиб мисол шартида талаб қилинган охирги катталикларни аниқлаймиз:

$$I_y = \frac{P}{3g}(b^2 + 4c^2). \qquad (17)$$

$$I_z = \frac{P}{3g}(a^2 + b^2). \qquad (18)$$

82-мисол (34.13). Баландлиги h ва оғирлиги P бўлган тенг ёнли учбурчак шаклига эга бўлган юпқа пластинканинг C оғирлик марказидан ўтадиган ва учбурчак асосига параллел бўлган CX ўққа нисбатан инерция моментини аниқланг (272-расм).

Ечиш. Учбурчакнинг CX ўқига нисбатан инерция моменти (96.6) га мувофиқ.



272-расм.

$$I_{cx} = I_{xcy} + I_{xcz} \qquad (1)$$

тенгламадан аниқланади. Бунда I_{xcy} ва I_{xcz} учбурчакни $XCУ$ ва XCZ текисликларга нисбатан инерция моментидир.

Фикран юпқа учбурчакни dm_v элементар бўлакчаларга ажратамиз. Бу бўлакча массаси (қалинлиги бир бирлик деб олинганда)

$$dm_v = \rho\, x dz_v \qquad (2)$$

эканлиги равшандир. Учбурчакнинг тўлиқ массаси

$$m = \frac{\rho \cdot BD \cdot h}{2} \tag{3}$$

ва XCY текислигига нисбатан инерция моменти ($z_v = Z$ деб олинади)

$$J_{xcy} = \int z^2\, dm \tag{4}$$

кўринишдаги формуладан топилади. Агар (2) ни (4) га қўйсак,

$$I_{xcy} = \rho \int xz^2 dz \tag{5}$$

ифодани ҳосил қиламиз. (5) ни интеграллаш учун x ни z функцияси сифатида ифодалаш лозим.

Расмдан кўринадики, AE_1E_2 ва BC_1C_2 учбурчак бир-бирига ўхшаш, шунинг учун

$$\frac{x}{x_c} = \frac{\frac{2}{5}h - z}{\frac{2}{3}h} \tag{6}$$

ва AC_1C_2 ҳам ABD учбурчаклар ўхшашлигидан

$$\frac{x_c}{BD} = \frac{2}{3} \tag{7}$$

ҳосил бўлади, бундан

$$x_c = \frac{2}{3} BD, \tag{8}$$

$$x = \frac{2}{3} BD - \frac{BD}{h} Z \tag{9}$$

формулаларни келтириб чиқарамиз. Агар (9) ни (5) га қўйсак,

$$I_{xcy} = \rho \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} \left(\frac{2}{3} - \frac{z}{h}\right) BDz^2\, dz = \frac{2}{3} \rho BD \left|\frac{z^3}{3}\right|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} -$$

$$- \frac{P \cdot BD}{h} \left|\frac{r^4}{4}\right|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} = \frac{\rho BDh^3}{36}.$$

Энди I_{xcz} инерция моментини топсак, бу инерция моменти

$$I_{xcz} = 0 \qquad (11)$$

бўлишини кўрамиз, чунки ABC учбурчак XCZ текислигида ётади. Ниҳоят, (10) ва (11) ва (3) ни (1) га қўйсак,

$$I_{cx} = \frac{Ph^3}{18g}$$

бўлиб қолади. Бунда $\frac{P}{g} = m$ эканлигини эътиборга оламиз.

83- мисол (34.14). Олдинги мисол шартидан фойдаланиб учбурчак учидан ўтувчи ва асосига параллел бўлган ўққа нисбатан инерция моментини аниқланг.

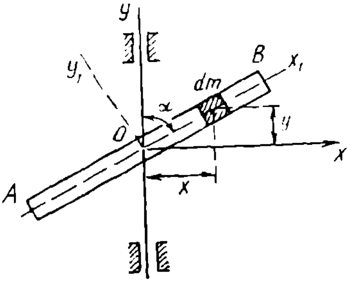
Жавоб: $\frac{P}{2g} h^2$.

84- мисол (34.15). 82- мисол шартидан фойдаланиб $BD = a$ бўлган ҳолда A учидан ўтувчи ва учбурчак текислигига перпендикуляр бўлган ўққа нисбатан инерция моментини аниқланг.

Жавоб: $\frac{P}{24g}(a^2 + 12h^2)$.

85- мисол (34.23). Оғирлиги P ва узунлиги $2l$ бўлган AB юпқа стержень вертикаль ўқ билан α бурчак ташкил қилади. Вертикал ўқ O марказга маҳкамланган.

Стерженнинг X ва $У$ ўқларга нисбатан I_x, I_y инерция моментларини ва марказдан қочма I_{xy} инерция моментини аниқланг (273- расм).



273- расм.

Ечиш. O нуқтани марказ қилиб, $XOУZ$ ва $X_1OУ_1Z_1$ координата системаларини қабул қиламиз (Z ўқи O нуқтадан чиқади ва расм текислигига перпендикуляр йўналган). Стерженнинг симметрия ўқи x_1 бўлади ва y ўқи билан α, X ўқи билан $90° - \alpha$ бурчакни ташкил этади. Энди Z_1 ўқига нисбатан инерция моменти (100.7) формулага мувофиқ

$$I_x = I_{x_1} \sin^2\alpha + I_{y_1} \cos^2\alpha + I_z \cos^2 90°; \qquad (1)$$

y ўқига нисбатан

$$I_y = I_{x_1}\cos^2\alpha + I_{y_1}\sin^2\alpha + I\cos^2 90^\circ \qquad (2)$$

кўринишда ёзилади. Стерженнинг оғирлик маркази O нуқтадан ўтувчи y симметрия ўқига нисбатан инерция моменти (98.6) га мувофиқ

$$I_{y_1} = \frac{m\cdot AB^2}{12} = \frac{m\,(2\,l)^2}{12} = \frac{Pl^2}{3\,g} \qquad (3)$$

кўринишда ёзилади.

Масала шартига мувофиқ

$$I_{x_1} = 0 \qquad (4)$$

бўлганлиги учун (3) ва (4) ни ҳисобга олганимизда, (1) формуладан

$$I_x = I_{y_1}\cos^2\alpha = \frac{Pl^2}{3\,g}\cos^2\alpha, \qquad (5)$$

(2) формуладан

$$I_y = I_{y_1},\ \sin^2\alpha = \frac{Pl^2}{3\,g}\sin^2\alpha \qquad (6)$$

ифода ҳосил бўлади.

Энди стерженнинг I_{xy} марказдан қочма инерция моментини аниқлаймиз. Стерженнинг эни ва қалинлигини бир бирликка тенг деб қабул қилганимизда, стерженда фикран ажратилган бўлакчасини dm массаси

$$dm = \rho\,dl \qquad (7)$$

ва I_{xy} катталик

$$I_{xy} = \int dm\,xy = \int xy\,dm \qquad (8)$$

формула орқали аниқланади.

Расмдан X, $У$ қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$x = l\sin\alpha \qquad (9)$$

$$y = l\cos\alpha \qquad (10)$$

(9) ва (10) формулани (7) ва (8) га қўйиб,

$$I_{xy} = \rho\int^{l} l^2\sin\alpha\cos\alpha\,dl =$$

$$= \frac{2\,\rho\,l^3\sin\alpha\cos\alpha}{3} \qquad (11)$$

формулани ҳосил қиламиз.

Стерженнинг m тўлиқ массаси

$$m = 2\rho l \qquad (12)$$

формуладан аниқланишини ҳисобга олганимизда (11) формула

$$I_{xy} = \frac{2\rho l \sin\alpha\cos\alpha}{3} l^2 = \frac{m\sin 2\alpha}{6} l^2 \qquad (13)$$

шаклда ёзилади, чунки

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \qquad (14)$$

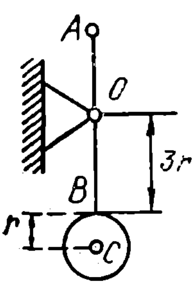
эканлигини ҳисобга олдик. Энди $m = \frac{P}{g}$ ифодадан фойдалансак, (13) формула

$$I_{xy} = \frac{Pl^2}{6g}\sin 2\alpha \qquad (15)$$

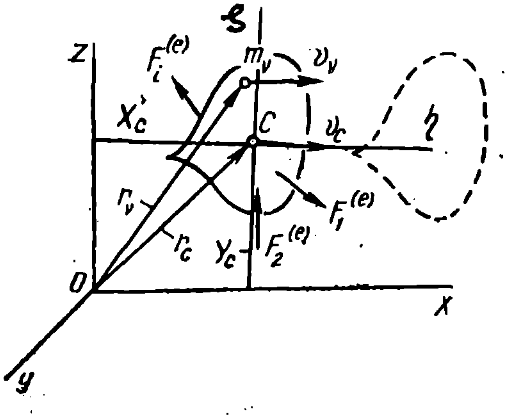
кўринишга эга бўлади, яъни марказдан қочма инерция моментини (15) формула билан ҳисоблаш мумкин.

86-мисол (34.21). Узунлиги $4r$ бўлган бир жинсли юпқа AB стержендан иборат бўлган маятник тузилган. Стерженнинг оғирлиги P_1 ва унинг охирига оғирлиги P_2 бўлган C бир жинсли диск маҳкамланган (274-расм). Маятникнинг O осилиш нуқтасидан ўтувчи ва стерженнинг A охирги нуқтасидан r масофада расм текислигига перпендикуляр бўлган ўққа нисбатан инерция моментини аниқланг.

Жавоб: $\frac{14P_1 + 99P_2}{6g} r^2$.



274- расм.



275- расм.

XVII БОБ. ҚАТТИҚ ЖИСМ ҲАРАКАТИНИНГ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ

101-§. Қаттиқ жисм илгариланма ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Кинематика бўлимида кўриб ўтканимиздек, қаттиқ жисм илгариланма ҳаракат қилганида унинг ҳамма нуқталари айнан бир хил тезлик ва тезланишга эга бўлиб, жисм нуқталарининг траекториялари эквидистант чизиқларни ҳосил қилади.

Энди қаттиқ жисм илгариланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси қандай кўринишда ёзилишини аниқлайлик. Фараз қилайлик, жисмнинг ν нуқтасининг массаси m_ν ва ҳаракат тезлиги v_ν бўлсин. Нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси (275-расм)

$$m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \vec{F}_\nu^{(e)} + \vec{F}_\nu^{(e)} \tag{101.1}$$

кўринишда ёзилади. Бунда $\vec{v}_\nu$, $\vec{F}_\nu^{(e)}$, $\vec{F}_\nu^{(e)}$ лар ν нуқтанинг тезлиги ва унга таъсир қиладиган ташқи ва ички кучларнинг тенг таъсир этувчилари

$$\vec{F}_\nu^{(e)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} \tag{101.2}$$

$$\vec{F}_\nu^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(i)} \tag{101.3}$$

формуладан аниқланади (n — нуқтага таъсир қиладиган ташқи ва ички кучлар сони).

Агар жисм N нуқтадан ташкил топган бўлса, ҳар бир нуқта учун ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини (1) тенглама шаклида ёзиб ҳосил бўлган тенгламаларни қўшсак, бутун жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини аниқлаган бўламиз, яъни

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_1^{(i)} \\ m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} &= \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_2^{(i)} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ m_N \frac{dv_v}{dt} &= \vec{F}_N^{(e)} + \vec{F}_N^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{101.4}$$

тенгламаларнинг чап ва ўнг томонларини қўшиб қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu^{(i)}. \qquad (101.5)$$

Маълумки жисмга таъсир қиладиган ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси нолга тенг

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu^{(i)} = 0 \qquad (101.6)$$

ва

$$\vec{F}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu^{(e)} \qquad (101.7)$$

эканлиги ҳам олдиндан маълум. Энди (101.5) тенгламанинг чап томонини

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu\right)\right]$$

шаклда ёзамиз. Бу ерда

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu = mr_c \qquad (101.8)$$

эканлиги (82.2) дан кўриниб турибди. Бунда m жисмнинг массаси бўлиб, r_c жисмнинг массалар марказини ифодаловчи радиус-вектордир.

Агар (101.8) ҳисобга олинса, (101.7)

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} \qquad (101.9)$$

кўринишда ва (101.6) ва (101.7) ифодалар ҳисобга олинса, (101.5)

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{(e)} \qquad (101.10)$$

кўринишда ёзилади.

Охирги тенгламага қаттиқ жисм илгариланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси дейилади. Бу тенглама битта нуқта ҳаракатининг (63.2) кўринишидаги дифференциал тенгламасига ўхшайди, бироқ фарқи ҳам бор. Фарқ шундаки, (101.10) тенглама жисмнинг ҳар қандай ихтиёрий нуқтаси учун эмас, балки аниқ бўлган нуқтани—жисмнинг массалар марказини (ёки оғирлик марказини) ифодалайдиган нуқта учун ёзилган. Шундай қилиб, илгариланма ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг дифференциал тенгламаси битта нуқта ҳаракатининг дифференциал тенгламаси сингари бўлади, деб айтиш мумкин.

Таъкидлаш зарурки, (101.10) тенгламада ички кучлар қатнашмайди ва ана шунинг учун системанинг массалар маркази V_c тезлигини фақатгина ташқи кучлар ўзгартиради.

Энди (101.10) тенгламанинг декарт ўқларидаги проекцияларини ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= F_x^{(e)}; \\ m\ddot{y}_c &= F_y^{(e)}; \\ m\ddot{z}_c &= F_z^{(e)}; \end{aligned}\right\} \qquad (101.11)$$

Бу ерда

$$\ddot{x}_c = \frac{d\vec{v}_{cx}}{dt}; \quad \ddot{y}_c = \frac{d\vec{v}_{cy}}{dt}; \quad \ddot{z}_c = \frac{d\vec{v}_{cz}}{dz}$$

эканлигини эътиборга олиш лозим.

102- §. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Қўзғалмас AB ўқ атрофида D қаттиқ жисм ω бурчакли тезлик билан айланади, деб ҳисоблайлик (276- расм). D жисм айланишини ифодаловчи дифференциал тенгламани аниқлайлик.

Қаттиқ жисмнинг кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодаловчи (90. 6) га мувофиқ

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^{(e)} \qquad (102.1)$$

тенглама ёзилади.

Бу тенгламада K қаттиқ жисмнинг кинетик моменти (89.2) асосида аниқланади:

$$\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu \qquad (102.2)$$

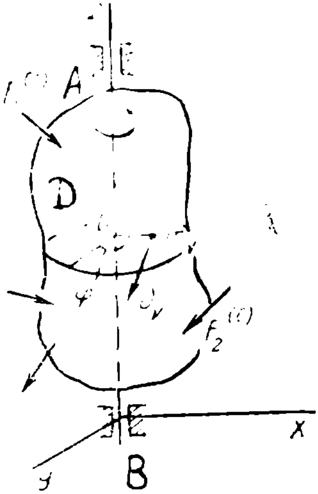
Маълумки, битта нуқтанинг Z ўқига нисбатан K_ν моменти

$$\vec{K}_\nu = \vec{r}_\nu \times (m_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{\omega}) = m_\nu \vec{r}_\nu \times (\vec{r}_\nu \times \vec{\omega}) \quad (102.3)$$

кўринишидаги формуладан топилади. (102. 3) эътиборга олинса, системанинг кинетик моменти

$$\vec{K} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 \vec{\omega} \quad (102.4)$$

шаклда ёзилади. Энди (96. 4) формула эътиборга олинса жисмнинг Z ўқига нисбатан I_z инерция моменти



276- расм.

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 \quad (102.5)$$

эканлиги кўриниб қолади ва демак,

$$\vec{K}_z = I_z \vec{\omega} \quad (102.6)$$

формулани ҳосил қиламиз. (102. 6) дан жисмнинг Z ўқига нисбатан кинетик моменти шу жисмнинг Z ўқига нисбатан I_z инерция моментининг ω бурчакли тезликка кўпайтирилганига тенглигини кўрамиз.

K_z ва ω векторлари бир хил йўналган бўлади. Кинематикадан маълум бўлган

$$\vec{\omega} = \frac{d\,\dot{\vec{\varphi}}}{dt} = \vec{\varphi}; \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\vec{\varphi}} \quad (102.7)$$

боғланишлар ҳисобга олинса, (102. 1) тенгламани

$$\frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}^{(e)}; \quad (102.8)$$

$$I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_z^{(e)} \quad (102.9)$$

$$I_z \vec{\ddot{\varphi}} = \vec{M}_z^{(e)} \qquad (102.10)$$

кўринишларда ифодалаш мумкин.

(102.8 ва 102.10) га қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаси ёки қисқароқ қилиб жисмнинг айланма ҳаракатининг дифференциал тенгламаси деб айтилади. Бу айланма ҳаракат учун динамиканинг асосий тенгламасидир. Бу яна

$$I_z \vec{\varepsilon} = \vec{M}_z^{(e)} \qquad (102.11)$$

шаклда ҳам ёзилади.

Агар тенгламани (101.10) билан таққосласак илгариланма ҳаракатни ифодалайдиган (101.10) дан (102.10) тенгламани ҳосил қилиш мумкин. Бунинг учун қуйидаги алмаштиришлар қилиш лозим:

1) айланма ҳаракатда m жисм массаси ўрнига I_z инерция моментини ёзиш лозим; 2) айланма ҳаракатдаги a чизиқли тезланиш ўрнига ε бурчакли тезланишни ёзиш лозим; 3) айланма ҳаракатдаги $\vec{F}^{(e)}$ бош векторнинг ўрнига $\vec{M}^{(e)}$ бош моментни ёзиш лозим. Илгариланма ҳаракатда масса инерция ўлчови бўлса, айланма ҳаракатда инерция моменти инерция ўлчови бўлади.

Агар: 1) $M^{(e)} = 0$ бўлса, $\vec{\varepsilon} = 0$ ва $\omega = \text{const}$ эканлиги (102. 11) дан кўриниб турибди, бу ҳолда жисм текис айланма ҳаракатда бўлади, 2) $\vec{M}^{(e)} > 0$ бўлса $\vec{\varepsilon} > 0$ ва бу ҳолда жисм текис тезланувчан айланма ҳаракатда бўлади, 3) $\vec{M}^{(e)} < 0$ бўлса $\vec{\varepsilon} < 0$ ва бу ҳолда жисм текис секинланувчан айланма ҳаракатда бўлади. (102. 11) дан фойдаланиб, қуйидаги масалалар ечилади:

1) жисмнинг $\varphi(t) = f(t)$ шаклдаги ҳаракат қонуни маълум бўлса, ташқи кучларнинг $\vec{M}^{(e)}$ бош моменти модулини

$$\vec{M}_z^{(e)} = I_z \ddot{\varphi}$$

формуладан аниқланади;

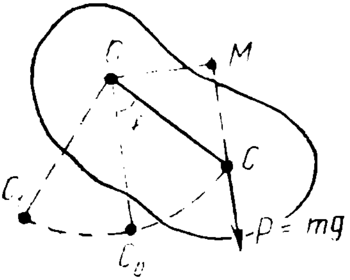
2) бош вектор $M_z^{(e)}$ ва I_z берилган тақдирда (102. 11) дифференциал тенгламани икки марта интеграллаб, жисмнинг $\varphi = f(t)$ кўринишдаги айланма ҳаракат қонуни аниқланади;

3) жисмнинг қўзғалмас ўқ атрофида айланишидаги ε

бурчакли тезланиши ва $\vec{M}^{(e)}$ жисмга таъсир қиладиган ташқи кучларнинг бош моменти берилган бўлса, (102. 11) дан фойдаланиб, жисмнинг Z қўзғалмас ўққа (симметрия ўқига) нисбатан I_z инерция моментини аниқлаш мумкин.

103- §. Физик маятник

Оғирлик марказидан ўтмайдиган горизонтал айланиш ўқига эга бўлган ва фақат оғирлик кучи таъсири остидаги ўқ атрофида тебранадиган қаттиқ жисм *физик маятник* дейилади.



277- расм.

Агар C нуқта жисмнинг оғирлик маркази бўлса ва жисм C нуқтадан ўтмайдиган, масалан, O нуқтадан ўтувчи ўққа ўрнатилса, бу жисм физик маятник бўлади (277- расм). Бу маятник P оғирлик кучи таъсири остида C ҳолатга келади, кейин инерция туфайли ҳаракатини давом эттириб, C_1 ҳолатига ва яна C_0 ва C ҳолатга келади ва O нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида тебранади. Маятник учун

$$I_0 \ddot{\varphi} = \vec{M}^{(e)} \qquad (103.1)$$

тенгламани ёзиш ўринлидир. Расмдан кўринадики, бош момент фақат P кучнинг O ўққа нисбатан ҳосил қилган моментига тенг. Бу моментнинг модули

$$\vec{M}^{(e)} = -POM \qquad (103.2)$$

формуладан аниқланади. (P кучнинг моменти, ҳаракат соат стрелкасига тескари йўналганлиги учун, манфий ишорали бўлади.) Агар $OC = a$ деб белгиласак,

$$OM = a \cdot \sin\varphi, \qquad (103.3)$$

$$\vec{M}^{(e)} = -mga\sin\varphi. \qquad (103.4)$$

ва

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -mga\sin\varphi \qquad (103.5)$$

ифодаларни ёзиш мумкин. Охирги ифодадаги $\sin\varphi \approx \varphi$ (кичик бурчакда шундай ёзиш мумкин) деб ҳисобласак, (103.5) қуйидагича ёзилади:

$$I_0\ddot{\varphi} + mga\varphi = 0$$

ёки

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \qquad (103.6)$$

Бунда

$$\omega^2 = \frac{mga}{I \cdot a} \qquad (103.7)$$

(103.6) физик маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаси бўлади. Бу бир жинсли, чизиқли, иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир. Бундай тенгламанинг ечими

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha) \qquad (103.8)$$

кўринишда бўлиши (75.8) дан маълум. Бунда φ_0—физик маятникнинг тебраниш амплитудаси, α — тебранишнинг бошланғич фазаси. Бу формуланинг математик маятник формуласидан фарқи албатта бор:

1) бунда тебраниш частотаси (75.11) дан аниқланадиган частотадан фарқ қилади;

2) бу ерда математик маятникнинг оғирлиги ҳисобга олинади.

Агар (103. 7) тенгламадан фойдаланиб, ω бурчакли тезликни аниқласак,

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \qquad (103.9)$$

эканлиги маълум. Ниҳоят, $T = 2\pi/\omega$ боғланишни ҳисобга олсак,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mag}} \qquad (103.10)$$

ёки

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}, \text{ бунда } L = \frac{I_0}{ma} \qquad (103.11)$$

формула ҳосил бўлади. Бунда L физик маятникнинг келтирилган узунлиги бўлиб, қуйидаги маънога эга.

Фараз қилайлик, физик маятник O_1 нуқтадан ўтувчи ўқ атрофида тебранганда T_1 тебраниш даврига эга бўлсин. Маятникнинг шундай O_2 нуқтасини топиш мумкинки, маятник O_2 нуқтадан ўтувчи ўққа нисбатан тебрангандаги T_2 тебраниш даври T_1, яъни $T_1=T_2$ бўлсин. Шундай $T_1=T_2$ бўлганда O_1 ва O_2 нуқталар орасидаги масофа физик маятникнинг келтирилган узунлиги бўлади. Демак, $L=O_1O_2$ бўлади.

Амалда T тажрибадан аниқланади ва маълум жой учун y ҳам аниқ қийматга эга эканлигини ҳисобга олганимизда (103.10) формуладан фойдаланиб, L аниқланиши мумкин деган хулоса чиқади.

Агар L аниқланса I (103.11) формуладан фойдаланиб жисмнинг симметрия ўқига нисбатан I_0 инерция моментини ҳисоблаш мумкин. Бундай усул билан баъзи мураккаб шаклга эга бўлган жисмларнинг I_0 инерция моментини аниқлаш ҳам назарияда, ҳам амалиётда муҳим аҳамиятга эга.

104-§. Айланма ҳаракатдаги системанинг кинетик моментининг сақланиш қонуни

Биз 102-§ да кўрдикки, қўзғалмас ўқ атрофида ҳаракат қилаётган қаттиқ жисмнинг кинетик моменти

$$\vec{K}_z = I_z \vec{\omega} \qquad (104.\ 1)$$

формула ёрдамида аниқланади. Агар қаттиқ жисмга таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош моменти $\vec{M}^{(e)}$ бўлса, кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан

$$\frac{d\vec{K}_z}{dt} = \vec{M}^{(e)} \qquad (104.\ 2)$$

ёки (104. 1) эътиборга олинганда,

$$\frac{d\,(I_z \vec{\omega})}{dt} = \vec{M}^{(e)} \qquad (104.\ 3)$$

тенгламани ёзиш мумкин. Агар $\vec{M}^{(e)} = 0$ бўлса, $d\,(I_z\vec{\omega}) = 0$ ва

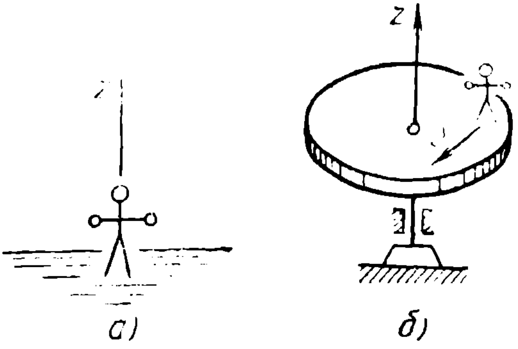
$$I_z \omega = \text{const} \qquad (104.\ 4)$$

ифода ҳосил бўлади. (104. 4) га айланма ҳаракатдаги қаттиқ жисм учун кинетик моментнинг сақланиш қонуни деб юритилади.

Агар биринчи ҳолатдаги жисмнинг кинетик моменти $I_{z_1}\cdot\omega_1$, иккинчи ҳолатдаги кинетик моменти $I_{z_2}\omega_2$ бўлса, (104. 4) тенгламага мувофиқ бош момент $\vec{M}^{(e)}=0$ бўлса

$$I_{z_1}\omega_1 = I_{z_2}\omega_2 \qquad (104.5)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан кўринадики, жисмнинг инерция моменти ортса, шу ортиш вақтида бурчакли тезлиги камаяди ва аксинча, I_z камайса ω ортади. I_z ва ω катталик шундай ўзгарадики, ҳамма вақт бу катталикларнинг кўпайтмасини ташкил этувчи вектор ўзгармасдан қолади. Шунинг учун муз устидаги раққоса икки қўлини бирданига пастга туширса, унинг оғирлик марказидан ўтувчи ўққа нисбатан I_z инерция моменти ортади. Иккала ҳолда (278- а расм) ҳам кинетик момент ўзгармасдан қолиши учун I_z кўпайганда ω камайиши ва I_z камайганда ω ортиши лозим. Шунинг учун раққоса қўлларини туширганда унинг ҳаракати тезлашади, яъни ω ортади.

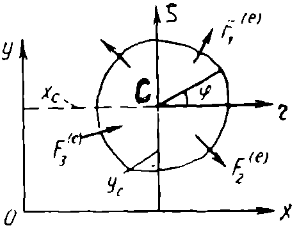


278- расм.

Худди шундай ҳодисани «Жуковский скамейкаси»да кузатиш мумкин. Скамейка доира шаклидаги массив диск бўлиб, диск оғирлик марказидан ўтадиган вертикал ўқ атрофида айланади. Диск устида киши жойлашган ва киши диск билан вертикал ўқ атрофида айланаётган бўлса (ишқаланиш кучлари ҳисобга олинмайди) «диск — киши» системасига ташқи кучлар таъсир этмаса, системанинг кинетик моменти ўзгармасдан сақланади. Ана шунинг учун киши икки қўлини кўтариб ёки гавда ҳолатини ўзгартириб Z ўқига нисбатан инерция моментини ўзгартиради ва $K_z = \mathrm{const}$ бўлишини таъминлаш учун дискнинг айланишидаги бурчакли тезлигини ўзгартиради. Системада $K_z = \mathrm{const}$ бўлганлиги учун диск устида (олдин диск тинч ҳолатда бўлган) киши v тезлик билан ҳаракат қилса, диск тескари томонга айланади (278- б расм).

105- §. Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатидаги дифференциал тенгламалари

Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракатини кинематика бўлимида, текис фигуранинг ҳаракати деб айтган эдик. Бундай ҳаракатни ҳамма вақт фигурадаги қутбнинг илгариланма ва фигуранинг қутб атрофидаги айланма ҳаракатларига ажратиш мумкинлигини ҳам биламиз.



б)

279- расм.

Қаттиқ жисм динамикасида одатда қутбни жисмнинг массалар марказини ифодалайдиган C нуқта деб қабул қилинади (279- расм). Шунинг учун жисмнинг текис параллел ҳаракатини C нуқтанинг илгариланма ва C нуқтадан ўтадиган ξ ўқ атрофидаги айланма ҳаракатлардан иборат деб қараш мумкин.

Маълумки, C нуқтанинг илгариланма ҳаракатини (101-§ га қаранг)

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = F_x^{(e)} \qquad (105.1)$$

$$m\frac{dv_{cy}}{dt} = F_y^{(e)} \qquad (105.2)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Фигуранинг ξ ўқи атрофидаги айланма ҳаракати дифференциал тенгламаси (102- § га қаранг):

$$I_\xi \frac{d\omega}{dt} = \vec{M}_\xi^{(e)} \qquad (105.3)$$

кўринишда ёзилади.

Қаттиқ жисмнинг текис параллел ҳаракати дифференциал тенгламалари (105. 1), (105. 2) ва (105. 3) ҳисобланади. Бу тенгламаларда: v_{cx}, v_{cy} — фигура массалар марказининг x ва y ўқларидаги тезлигининг проекциялари; $F_x^{(e)}$, $F_y^{(e)}$ — фигураларга таъсир қиладиган ташқи кучлар бош векторларининг x ва y ўқларидаги проекциялари; m — текис фигуранинг массаси; I_ξ — фигуранинг C нуқтасидан ўтувчи ва расм текислигига тик бўлган ξ ўқига (симметрия ўқи) нисбатан инерция моменти; ω — фигуранинг ξ ўқи атрофида айланишидаги бурчакли тезлиги; $M_\xi^{(e)}$ — фигурага таъсир қилаётган ташқи кучларнинг бош моменти.

Текис фигуранинг ҳаракат қонунларини аниқлаш учун (105. 1) ва (105. 3) тенглама системасини биргаликда ечиш лозим. Тенгламаларни ечиш вақтида, албатта, бошланғич шартлардан фойдаланиш керак. Бошланғич шартда $t = 0$ бўлганда x_{co}, y_{co}, φ_0 ва $\dot{x}_{co}$, $\dot{y}_{co}$, $\dot{\varphi}_0$ катталиклар берилган бўлади. Бу бошланғич шартларни эътиборга олиб, (105. 1)—(105. 3) тенгламалар системаси ечилганда (ҳар бир дифференциал тенглама икки марта интегралланади) текис фигуранинг ҳаракат қонунлари

$$x_c = f_1(t); \tag{105. 4}$$

$$y_c = f_2(t); \tag{105. 5}$$

$$\varphi = f_3(t). \tag{105. 6}$$

кўринишларда аниқланади. Кўриниб турибдики, бунда x_c, y_c массалар марказини илгариланма, φ эса фигуранинг ξ ўқига нисбатан айланма ҳаракатини ифодалайди.

Агар текис параллел ҳаракатдаги жисмга берилган ташқи кучлардан бўлак яна номаълум бўлган боғланишлар реакцияси таъсир қилган бўлса, бу реакция кучлари (105.1)—(105.3) тенгликларнинг ўнг томонида қўшилади. Натижада номаълумлар сони тенгламалар сонида кўпроқ бўлади. Номаълумлар ва тенгламалар сонини тенглаштириш учун боғланишларни ифодалайдиган тенгламалар тузилади. Бу боғланишлар тенгламалари билан (105.1)—(105.3) тенгламалар биргаликда ечилади.

Агар текис фигуранинг массалар маркази ҳаракатининг траектория тенгламаси берилган бўлса, бу ҳолда ҳаракатнинг дифференциал тенгламаларини табиий координаталар системасида ифодалаш қулай бўлади ва қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$m \frac{dv_e}{dt} \vec{\tau}_0 = \vec{F}_\tau^{(e)}$$

ёки

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \vec{F}_\tau^{(e)}, \qquad (105.7)$$

$$m \frac{v^2}{\rho} \vec{n}^0 = \vec{F}_n^{(e)} \qquad (105.8)$$

$$I_{c\xi} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_\xi^{(e)} \qquad (105.9)$$

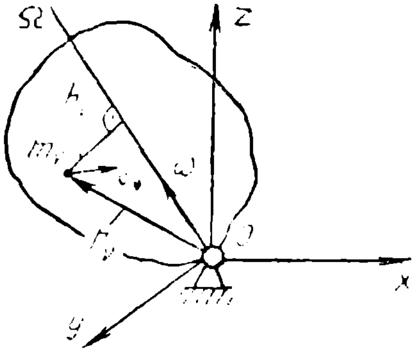
Бунда s — массалар марказининг ёйли координатаси; $\vec{F}_\tau^{(e)}$, $\vec{F}_n^{(e)}$ — бош векторнинг тангенциал ва нормал ташкил этувчилари; ρ — траекториянинг эгрилик радиуси; $\vec{\tau}_0$, $\vec{n}^0$ — уринма ва нормал бирлик векторлар.

106- §. Сферик ҳаракатдаги қаттиқ жисмнинг қўзғалмас нуқта ва координата ўқларига нисбатан кинетик моментини аниқлаш

Маълумки, жисмнинг кинетик моментини аниқлаш учун фикран бу жисм m_ν массали бўлакчаларга ажратилади (280-расм) ва жисмнинг O нуқтага нисбатан кинетик моменти

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu \vec{v}_\nu \qquad (106.1)$$

формула орқали аниқланади.



Жисм нуқталари чизиқли тезлигининг формуласини, яъни

$$\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu \qquad (106.2)$$

ифодани (106. 1) га қўямиз:

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times m_\nu(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu). \qquad (106.3)$$

Охирги формуланинг шаклини ўзгартирамиз. Бунинг учун

$$r_\nu \times (m_\nu \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_\nu \cdot m_\nu \vec{v}_\nu) - m_\nu \vec{r}_\nu \cdot (\vec{r}_\nu \cdot \vec{\omega}) \qquad (106.4)$$

тенгликни ҳисобга оламиз ва $\vec{r}_\nu$, $\vec{\omega}$ векторларини

$$\vec{r}_\nu = x_\nu \vec{l} + y_\nu \vec{j} + r_\nu \vec{k} \qquad (106.5)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{l} + \omega_y j + \omega_z \vec{k} \qquad (106.6)$$

кўринишда ёзилиши мумкинлигини эътиборга олиб, (83. 10) ва (83. 11) формулаларга мувофиқ, ушбу тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\vec{r}_\nu \cdot m_\nu \cdot \vec{r}_\nu = m_\nu r_\nu^2 \qquad (106.7)$$

$$\vec{r}_\nu \cdot \vec{\omega} = \omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu. \qquad (106.8)$$

Охирги икки тенглик ҳисобга олинса, (106. 4) ни

$$r_\nu \times (\vec{\omega} \times m_\nu \vec{r}_\nu) = \vec{\omega} m_\nu r_\nu^2 - m_\nu \vec{r}_\nu (\omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu) \qquad (106.9)$$

кўринишда ифодалаш мумкин. Бу ҳолда (106. 3) қуйидагича ифодаланади:

$$\vec{K}_0 = \vec{\omega} \cdot \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu (\omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu), \qquad (106.10)$$

бунда

$$r_\nu^2 = x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2. \qquad (106.11)$$

(106. 10) ифода сферик ҳаракатдаги жисмнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан кинетик моментини аниқлаш формуласидир. Агар K_0 нинг x, y, z ўқлардаги проекцияларини ёзсак,

$$K_{ox} = \omega_x \sum_\nu m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \sum_\nu m_\nu x_\nu (\omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu) \qquad (106.12)$$

$$K_{oy} = \omega_y \sum_{\nu} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \sum_{\nu} m_\nu y_\nu (\omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu) \qquad (106.13)$$

$$K_{oz} = \omega_z \sum_{\nu} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2) - \sum_{\nu} m_\nu z_\nu (\omega_x x_\nu + \omega_y y_\nu + \omega_z z_\nu) \qquad (106.14)$$

формулалар ҳосил бўлади. Бу тенгламаларни соддалаштириб, масалан, K_{ox} учун қуйидагини ёзамиз:

$$K_{ox} = \omega_x \sum_{\nu} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) - \omega_y \sum_{\nu} m_\nu x_\nu y_\nu - \omega_z \sum_{\nu} m_\nu x_\nu z_\nu \qquad (106.15)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонида

$$\left.\begin{aligned} \sum m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2) &= I_x; \\ \sum m_\nu x_\nu y_\nu &= I_{xy} \\ \sum m_\nu x_\nu z_\nu &= I_{xz} \end{aligned}\right\} \qquad (106.16)$$

эканлигини назарда тутсак, K_{ox} формуласи қуйидаги шаклни олади:

$$K_{ox} = \omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{xz} \qquad (106.17)$$

Айнан K_{ox} нинг формуласини чиқарганда қўлланган амаллардан фойдаланиб, K_{oy}, K_{oz} катталиклар учун қуйидаги формулаларни чиқарамиз:

$$K_{oy} = \omega_y I_y - \omega_z I_{zy} - \omega_x I_{xy}; \qquad (106.18)$$

$$K_{oz} = \omega_z I_z - \omega_x I_{xy} - \omega_y I_{yz}. \qquad (106.19)$$

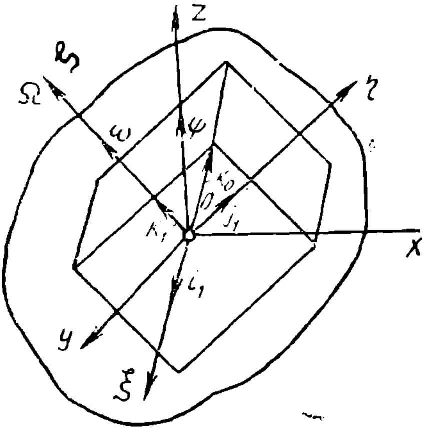
Бунда I_x, I_y, I_z — x, y, z ўқларига нисбатан жисмнинг инерция моменти; I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} жисмнинг xy, xz, yz ўқларига нисбатан марказдан қочма инерция моментларидир.

Координата ўқлари қилиб бош инерция ўқлари қабул қилинган ҳолда инерция ўқларига нисбатан марказдан қочма инерция моментлари нолга тенг, яъни $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ ва K_{ox}, K_{oy}, K_{oz} формулалари (106.17)—(106.19) қуйидагича

$$\left.\begin{aligned} K_{ox} &= \omega_x I_x;\\ K_{oy} &= \omega_y I_y;\\ K_{oz} &= \omega_z I_0 \end{aligned}\right\} \qquad (106.20)$$

ёзилади. (106. 20) қўзғалмас O нуқта бош инерция ўқларининг маркази бўлган ҳол учун жисм кинетик моментининг ўқларга нисбатан қийматини ҳисоблаш учун қўлланилади.

107- §. Қаттиқ жисм сферик ҳаракатининг дифференциал тенгламалари



281- расм.

Қаттиқ жисм O қўзғалмас нуқта атрофида сферик ҳаракат қилаётган жисм (281- расм) ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини аниқлайлик. O нуқтани марказ қилиб, $OXYZ$ қўзғалмас ва $O\zeta\eta\xi$ қўзғалувчан координата системаларини ўтказамиз, жисмнинг ζ, η, ξ ўқларига i_1, j_1, k_1 бирлик векторларини ҳам ўтказайлик. Жисмнинг қўзғалувчан ўқларга нисбатан ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини ёзамиз. Қаттиқ жисмнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан кинетик моментининг ўзгариши (90. 6) формулага мувофиқ қуйидагича бўлади:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}^{(e)}. \qquad (107.\ 1)$$

Олдинги параграфдан маълумки,

$$\vec{K}_0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu\ x\ m_\nu \vec{v}_\nu. \qquad (107.\ 2)$$

Жисмнинг K_0 кинетик моментини қўзғалувчан ўқлардаги K_η K_ζ, K_ξ проекциялари орқали ифодалайлик:

$$\vec{K_0} = K_\xi \vec{i_1} + K_\eta \vec{j_1} + K_\zeta \vec{k_1}. \qquad (107.\ 3)$$

Бунда K_ξ, K_η, K_ζ ва i, j, k катталикларнинг ҳар бири вақтга боғлиқ бўлганлигини эътиборга олганимизда $\frac{dK_0}{dt}$ мураккаб функциядан олинадиган ҳосила бўлиб қолади, яъни бу ҳосила

$$\frac{d\vec{K_0}}{dt} = \frac{dK_\xi}{dt}\vec{i_1} + \frac{dK_\eta}{dt}\vec{j_1} + \frac{dK_\zeta}{dt}\vec{k_1} + K_\eta \frac{d\vec{i_1}}{dt} + $$
$$+ K_\xi \frac{dj_1}{dt} + K_\zeta \frac{d\vec{k_1}}{dt} \qquad (107.\ 4)$$

кўринишдаги ифодага тенг бўлади.

Пуассон формулаларига мувофиқ

$$\frac{d\vec{i_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i_1}; \quad \frac{dj}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}; \quad \frac{d\vec{k_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k_1} \qquad (107.\ 5)$$

эканлигини назарда тутиб, (107. 4) тенгламанинг ўнг томонидаги охирги учта ҳадларининг йиғиндисини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$K_\xi \frac{d\vec{i}}{dt} + K_\eta \frac{d\vec{j}}{dt} + K_\zeta \frac{d\vec{k_1}}{dt} = K_\xi (\vec{\omega} \times \vec{i_1}) + K_\eta (\omega \times j_1) +$$
$$+ K_\zeta (\vec{\omega} \times \vec{k_1}) = \vec{\omega} \times (K_\xi \vec{i_1} + K_\eta \vec{j_1} + K_\zeta \vec{k_1}) =$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{K_0} = \begin{vmatrix} i_1 & j_1 & k_1 \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ K_\xi & K_\eta & K_\zeta \end{vmatrix} =$$
$$= (\omega_\eta \omega_\zeta - \omega_\zeta K_\eta)\vec{i_1} + (\omega_\zeta K_\xi - \omega_\xi K_\zeta) j_1 + (\omega_\xi K_\eta -$$
$$- K_\xi \omega_\eta)\vec{k}. \qquad (107.\ 6)$$

Агар (107. 6) ни (107. 4) тенгламага қўйсак,

$$\vec{K_0} = (\omega_\eta K_\zeta - \omega_\zeta K_\eta)\vec{i_1} + (\omega_\zeta K_\xi - \omega_\xi K_\zeta)\vec{j_1} + (\omega_\xi K_\eta -$$
$$- K_\xi \omega_\eta) K_1 + \frac{dk_\xi}{dt}\vec{i} + \frac{dk_\eta}{dt}\vec{j_1} + \frac{dk_\zeta}{dt}\vec{k_1} \qquad (107.\ 7)$$

ёки i_1, j_1, k_1 ортали ҳадлар бирлаштирилганда,

$$K_0 = \left(\frac{dK_\xi}{dt} + \omega_\eta K_\zeta - \omega_\zeta \cdot K_\eta\right)\vec{i_1} + \left(\frac{dK_\eta}{dt} + \omega_\zeta K_\xi -\right.$$

$$\left. - \omega_\xi K_\zeta\right)\vec{j_1} + \left(\frac{dK_\zeta}{dt} + \omega_\xi K_\eta - K_\xi \omega_\eta\right)\vec{k_1} \qquad (107.\ 8)$$

ҳосил бўлади. Энди бу тенглама билан (107. 3) таққосланса ва $\vec{i_1}$, $\vec{j_1}$, $\vec{k_1}$ орталар олдидаги коэффициентлар тенглаштирилса, бу коэффициентлар жисмга таъсир қиладиган ташқи кучларнинг $\vec{M}^{(e)}$ бош векторининг ξ, η, ξ ўқларидаги проекцияларига тенглиги келиб чиқади:

$$\frac{dK_\xi}{dt} + \omega_\eta K_\zeta \quad \omega_\zeta K_\eta - M_\xi^{(e)};$$

$$\frac{dK_\eta}{dt} + \omega_\zeta K_\xi - \omega_\xi K_\zeta = M_\eta^{(e)} \qquad (107.\ 9)$$

$$\frac{dK_\zeta}{dt} + \omega_\xi K_\eta - \omega_\eta K_\xi = M_\zeta^{(e)}$$

Жисмнинг қўзғалмас 0 нуқтасидан ўтадиган қўзғалувчан ўқларни бош инерция ўқлари деб ҳисобланса, у ҳолда ўқларга нисбатан инерция моментлари (106. 20) формулаларига мувофиқ қуйидагилар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} K_\xi &= \omega_\xi \cdot I_\xi; \\ K_\eta &= \omega_\eta \cdot I_\eta; \\ K_\zeta &= \omega_\zeta \cdot I_\zeta \end{aligned}\right\} \qquad (107.\ 10)$$

Охирги формулаларни (107. 9) қўйиб, ушбу тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} I_\xi \frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta (I_\zeta - I_\eta) &= M_\xi^{(e)} \\ I_\eta \frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi (I_\xi - I_\zeta) &= M_\eta^{(e)} \\ I \frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta (I_\eta - I_\xi) &= M_\zeta^{(e)} \end{aligned}\right\} \qquad (107.\ 11)$$

(107. 11) га қўзғалмас ўқ атрофида сферик ҳаракатда бўлган қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

ёки Эйлернинг динамик тенгламалари деб айтилади. Бу учта тенглама учта номаълум ўзгарувчилар ω_ξ, ω_η, ω_ζ ва шулар билан боғлиқ бўлган яна учта номаълумлар. Эйлер бурчаклари θ, ψ, φ катталикларни ўз ичига олади. Демак, (107.11) да олтита номаълум: ω_ξ, ω_η, ω_ζ θ, ψ, φ; тенгламалар сони эса (107. 11) ифодада ҳаммаси учта. Системани ечиш учун яна учта тенглама тузиш лозим. Бу янги учта тенглама кинематикадан маълум, яъни

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (107.\ 12)$$

Демак, (107. 11) ва (107. 12) ифодада олтита номаълум ва бу ерда олтита тенглама тузилган.

Агар жисмнинг қўзғалувчан системада бурчакли тезлик проекциялари

$$\omega = f_1(t); \quad \omega_\eta = f_2(t); \quad \omega_\zeta = f_3(t) \qquad (107.\ 13)$$

қонунлар шаклида аниқланса, ҳаракат қонунлари

$$\theta = f_4(t); \ \psi = f_5(t); \ \varphi = f_6(t) \qquad (107.\ 14)$$

кўринишда бўлади.

Эйлер бурчаклари маълум бўлса, жисмнинг қўзғалмас ўқларга нисбатан ҳаракат қонунларини ҳам аниқлаш учун Эйлернинг кинематик тенгламаларидан фойдаланилади. Агар ψ вектори ζ, η, ξ ўқлари билан α_1, α_2 ва α_3 бурчак ҳосил қилса, бу бурчакларнинг косинуслари Эйлернинг кинематик тенгламаларида қуйидаги шаклда ёзилади:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \sin\theta \sin\varphi, \\ \cos\alpha_2 &= \sin\theta \cos\varphi, \\ \cos\alpha_3 &= \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (107.\ 15)$$

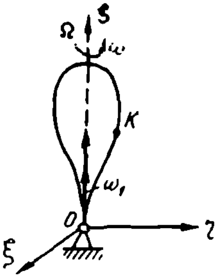
108-§. Гироскопик ҳодисаларнинг тахминий назарияси

Динамик симметрия ўқига эга бўлган ва шу ўқда ётган қўзғалмас нуқта атрофида айланаётган қаттиқ жисм *гироскоп* (жироскоп) дейилади.

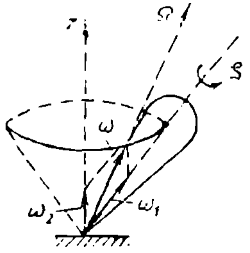
Гидроскопнинг ҳаракати қаттиқ жисм сферик ҳаракатига мисол бўлади. Бундай ҳаракатнинг турларини кинематика бўлимида ва олдинги икки параграфда кўрдик. Энди гироскопнинг ҳаракати вақтида динамик масалалар қандай ҳал этилишн билан танишиб чиқамиз. Агар гироскопнинг симметрик 0ζ ўқи жисмнинг массалар марказидан ўтувчи ўқ) вертикал ҳолатида бўлса (282-расм), у ҳолда 0ζ ўқига нисбатан гироскопнинг кинетик моменти (106.20) формулага мувофиқ

$$\vec{K}_\xi = 0;\ \vec{K}_\eta = 0;\ \vec{K}_\zeta = I_\zeta \vec{\omega}_1 \tag{108. 1}$$

формулалар орқали аниқланади, чунки гироскоп фақат $O\xi$ ўқи атрофида айланганлиги учун ω бурчакли тезликнинг проекциялари



282- расм.



283- расм.

$$\omega_\xi = 0;\ \omega_\eta = 0;\ \omega_\zeta = \omega_1 \tag{108. 2}$$

бўлиб қолади.

Бу ҳолда гироскопнинг 0 қўзғалмас нуқтага нисбатан кинетик моменти (107.3) га мувофиқ (108.1) ва (108.2) ифода эътиборга олинганда, қуйидагича аниқланади:

$$\vec{K}_0 = K_\zeta = I_\zeta \vec{\omega}_1. \tag{108. 3}$$

(108.3) фақат 0ξ ўқи вертикал бўлган ҳолда кучга эга. Чунки бу ҳолда: 1) гироскопнинг симметрия ўқи билан оний айланиш ўқи устма-уст тушади; 2) симметрия ўқи билан K_0 вектори устма-уст тушади ва бир томонга йўналган; 3) гироскопнинг айланиш ўқи симметрия ўқининг ўзгинасидир. Бу ҳолда 0ζ симметрия ўқи қўзғалмас бўлади, лекин бу ҳол кўп вақтларда учрамайди.

Амалда гироскопнинг 0ζ симметрия ўқи оғишган ҳолда кўпроқ учрайди (283-расм). Бундай оғишган ҳолдаги гироскоп симметрия $O\zeta$ ўқи атрофида ω_1 ва OZ қўзғалмас вертикал ўқ атрофида ω_2 бурчакли тезлик билан айланади. Гироскопнинг ω абсолют бурчакли тезлиги ω_1 ва ω_2 векторларидан тузилган параллелограммнинг диагоналига тенг бўлади, яъни

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \qquad (108.4)$$

Энди K_0 (108.3) формуладан аниқланмайди, балки (107.3) орқали топилади.

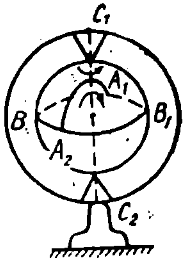
Масаланинг ечимини осонлаштириш учун қуйидаги мулоҳазани асос қилиб қабул қилинади: гироскопнинг симметрия ўқига нисбатан ω_1 бурчакли тезлиги гироскопнинг $O\zeta$ симметрия ўқининг OZ вертикал ўққа нисбатан ω_2 бурчакли тезлигидан анча катта деб, ω_2 ни (108.4) формуладан топилади ва $\omega \approx \omega_1$ деб ҳисобланади. Мана шу мулоҳазага асосланган назария гироскопнинг тахминий назарияси дейилади. Бу назарияга мувофиқ

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1, \qquad (108.5)$$

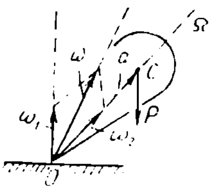
$$\vec{K}_0 = I\vec{\omega} \qquad (108.6)$$

деб қабул қилинади ёки бошқача айтганда, гироскопнинг қўзғалмас O нуқтага нисбатан кинетик моменти гироскопнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моментига тенг: гироскопнинг абсолют бурчакли тезлиги симметрия ўқи атрофида айланишидаги бурчакли тезлигига тенг деб қабул қилинади.

Агар гироскопнинг ҳаракати фақат битта қўзғалмас O нуқта атрофида бўлса, бунга эркинлик даражаси учта бўлган гироскоп дейилади. Агар гироскопнинг ҳаракати битта қўзғалмас O нуқта ва битта қўзғалмас ўқ билан чекланса, эркинлик даражаси иккита бўлган гироскоп дейилади ва ниҳоят, гироскопнинг ҳаракати битта қўзғалмас O нуқта ва иккита қўзғалмас ўқ билан чекланган бўлса, эркинлик даражаси битта бўлган гироскоп дейилади (284-расм). Расмда эркинлик даражаси учта бўлган (карданли осилма) гироскоп C_1C_2, B_1B_2 ва A_1A_2, ўқлари атрофида айланиши мумкин. Қурилган мисолда қўзғалмас O нуқта гирос-



284-расм.



285- расм.

копнинг массалар маркази бўлган C нуқта билан устма-уст тушади. Эркинлик даражаси учта бўлган гироскоп уч ўқ атрофида, эркинлик даражаси иккита бўлган гироскоп икки ўқ атрофида айланади. Эркинлик даражаси битта бўлса, битта ўқ атрофида айланади.

Энди оғишган ҳолатдаги гироскопнинг ҳаракатини батафсилроқ кўриб чиқайлик (285- расм). Бу гироскопнинг ўзига P оғирлик кучи таъсир этиб, унинг C массалар марказини пастга туширмоқчи бўлади, яъни P кучи

$$\vec{M}^{(e)}_{\text{оғ}} = \vec{a} \times \vec{P} \qquad (108.\ 7)$$

орқали аниқланадиган куч моментини ҳосил қилади. Бу момент таъсирида гироскоп O нуқта атрофида айланиб, горизонтал ҳолатга келиши лозим бўлади. Бироқ, ҳақиқатда гироскоп «тушмайди», яъни айланиб турганда горизонтал ҳолатга келмайди. Демак, гироскоп айланиб турганида $\vec{a} \times \vec{P}$ моментни мувозанатлаштирувчи момент ҳосил қилади. Мувозанатлаштирувчи момент гироскоп кинетик моментининг ўзгариши натижасида ҳосил бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, кинетик моментнинг ўзгариши ҳақидаги теоремага мувофиқ

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}^{(e)}_{\text{оғ}} \qquad (108.\ 8)$$

ёки

$$\vec{M}^{(e)}_{\text{оғ}} + \left(-\frac{d\vec{K}}{dt}\right) = 0 \qquad (108.9)$$

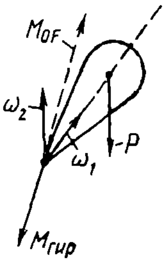
тенгламаларни ёзиш мумкин. Бунда $\frac{d\vec{K}}{dt}$ гироскопнинг кинетик моментининг ўзгариши натижасида ҳосил бўладиган моментдир. Бу момент $M_{\text{гир}}$ гироскопик момент дейилади:

$$\vec{M}_{\text{гир}} = -\frac{d\vec{K}}{dt}. \qquad (108.\ 10)$$

Охирги икки тенгламадан

$$M_{\text{гир}} = -M_{\text{оғ}} \qquad (108.\ 11)$$

тенглик ҳосил бўлади.



286- расм.

Тенгликдан гироскопнинг ҳаракати вақтида ҳамма вақт гироскопни оғдирувчи моментга модули тенг ва тескари йўналган гироскопик момент ҳосил бўлади, деган хулосага келамиз (286- расм). Расмдан кўринадики, оғдирувчи $M_{ог}$ момент O нуқтадан кузатувчига қараб йўналган бўлса, гироскопик момент тескари томонга — O нуқтадан ўтиб, расм текислигига тик кириб кетган. Бу иккала моментнинг геометрик йиғиндиси (108 . 9) тенгламага мувофиқ, ҳамма вақт нолга тенг бўлганлиги учун гироскоп динамик мувозанат ҳолатига эга бўлади. Пуассон формуласига мувофиқ, (108. 6) ҳисобга олинса,

$$\vec{M}_{\text{гир}} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\omega}_2 \times I\vec{\omega}_1 \qquad (108.\ 12)$$

деб ёзиш мумкин. Агар (108. 7) ва (108. 12) модулларини тенглаштирсак,

$$I\,\omega_1\omega_2 \sin(\widehat{\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2}) = ap \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{P}}) \qquad (108.\ 13)$$

ҳосил бўлади. 286- расмдан кўринадики, $\vec{\omega}_1$ билан $\vec{\omega}_2$ орасидаги бурчак $\vec{a}$ ва $\vec{P}$ орасидаги бурчакка тенг. Бу тенгликдан

$$\sin(\widehat{\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2}) = \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{P}})$$

эканлигини ҳисобга олиб, (108. 13) тенгламадан

$$\omega_2 = \frac{dP}{I\omega_1} \qquad (108.\ 14)$$

формулани ҳосил қиламиз. (108.14) гироскопнинг тахминий назариясидан келиб чиққан хулосадир. Бу ердан кўринадики, гироскопнинг $O\zeta$ симметрия ўқининг вертикал Z ўқи атрофида айланишидаги ω_1 бурчакли тезлиги гироскопнинг ўз ўқи атрофида айланишидаги бурчакли ω_2 тезлигига тескари пропорционал, яъни ω_1 ортса, ω_2 камаяди.

Бундай пропорционаллик ҳақиқатан ҳам тажрибадаги натижаларни тасдиқлайди, яъни гироскоп қанча тез айланса, унинг Z ўқи атрофидаги **прецессион** ҳаракати шунча камаяди. Демак, гироскопда ω_1 ортиши билан прецессион ҳаракат секинлашади. Гироскоп айланганда ҳосил бўладиган гироскопик момент гироскопнинг $O\zeta$ симметрия ўқининг вертикал OZ ўқига параллел бўлишга мажбур қилади, яъни $O\zeta$ ўқи OZ ўқига яқинлашади. Агар $\vec{M}^{(e)} = 0$ бўлса, гироскопнинг кинетик моментининг вектори

$$\vec{K} = I\vec{\omega}_1 = \text{const}$$

бўлади. Бу доимийлик кўрсатадики, гироскоп ҳаракати вақтида унинг айланиш ўқи фазодаги йўналишини ўзгартирмайди. Агар гироскопнинг ўқи осмондаги бирон-бир юлдузга йўналган бўлса, бу йўналиш $I\omega = \text{const}$ бўлган ҳолда ўзгармайди. Бундан фойдаланиб гироскопик компас ясайдилар. Бу компас магнит ёки гравитацион майдонлар бўлмаганда ҳам ишлайди, магнитли компас эса магнит майдон бўлмаганда ишламайди.

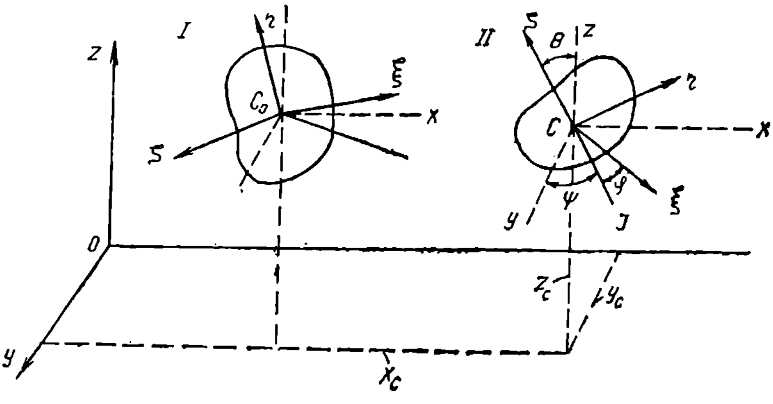
Фуко гироскопдан фойдаланиб (284-расмга қаранг), Ернинг ўз ўқи атрофида айланишини биринчилардан бўлиб исботлади. Фуко гироскопни доимий ω билан айлантирди ва (ишқаланиш кучлари Фуко тажрибасида ниҳоятда кичик бўлган) тажриба вақтида гироскопнинг айланиш ўқининг йўналиши Ер сиртидаги бирон-бир жисмга нисбатан ўзгармаслиги керак эди (агар Ер ўз ўқи атрофида айланмаса эди). Тажрибадан кўрдики, гироскоп айланиш ўқининг Ер сиртидаги жисмга нисбатан йўналиши ўзгаради. Демак, Ер ўз ўқи атрофида айланади деган хулосага келди.

Гироскопик моментнинг ҳосил бўлиши гироскопик эффект дейилади. Бу эффектдан фойдаланиб битта рельсда юрадиган поезд ёки вагонни ясаш мумкин. Агар вагон ичида массив гироскоп доимий бурчакли тезлик билан айлантириб турилса, вагон масалан, чап томонга оғганда гироскопик момент ўнг томонга йўналган бўлади ва вагонни вертикал ҳолатга келишга мажбур қилади ва аксинча, оғдирувчи момент ўнг томонга йўналган бўлса, гироскопик момент чап томонга йўналади ва яна вагонни вертикал ҳолатга келишга мажбур қилади. Бу жараён автоматик равишда амалга оширилади, чунки вагон оғганда гироскопнинг бўйланма ўқига ташқи куч таъсир қилади. Бу ташқи куч эса гироскопик моментни автоматик равишда ҳосил қилади, чунки ташқи куч таъсирида гироскопнинг кинетик моменги вектори K_0 ўзгаради. Бу ўзгариш эса (108. 12) га мувофиқ $M_{\text{гир}}$ ҳосил қилади.

Гироскопик моментнинг пайдо бўлиши вагоннинг ёки гироскоп билан боғлиқ бўлган бошқа жисмлар ҳаракатининг турғунроқ (стабилроқ) бўлишига ёрдам беради. Шунинг учун отиладиган ўқ ёки снарядлар ствол ичида винтсимон йўлни ўтади. Снаряд ёки ўқ ствол ичида тез айланади ва бу айланишини фазодаги ҳаракати вақтида ҳам давом эттиради ва шу билан бирга маълум траектория бўйлаб ҳаракат қилади. Ўқ ва снаряд бўйлама ўқлари атрофида айланганлиги учун ўқлар фазодаги ҳаракат йўналишини ўзгартирмасликка интилади ва шунинг учун ўқ ва снаряд ҳаракати траекторияси турғунроқ бўлади. Гироскопик қурилмалар одамсиз парвоз қиладиган баллистик ракеталарда, кемаларда, торпедаларда, самолётларда ва бомбалаштирувчи системаларда қўлланилади.

109- §. Эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари

Эркин қаттиқ жисм ҳаракати ҳамма вақт жисм билан бирга қутбнинг илгариланма ва қутб атрофида жисмнинг сферик ҳаракатларининг йиғиндисига тенглигини 57- § да кўрган эдик (287- расм). Энди жисм қутби массалар маркази бўлган C нуқтада жойлашган деб ҳисоблайлик ва ана шундай эркин жисм ҳаракатининг диф-



287- расм.

ференциал тенгламаларини аниқлайлик. Қаттиқ жисм I ҳолатдан II ҳолатга ўтганда унинг массалар маркази C_0 нуқтадан C нуқтага ўтсин. Бу ҳаракат илгариланма ҳаракат бўлади. Жисмнинг иккинчи хил ҳаракати C нуқта атрофидаги сферик ҳаракат ҳисобланади. Шундай қилиб, эркин қаттиқ жисм ҳаракатини қисқача қилиб C нуқтанинг илгариланма ва жисмнинг C нуқта атрофидаги сферик ҳаракати, яъни икки хил ҳаракатнинг йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин. Бу икки хил — илгариланма ва сферик ҳаракатларда бўлган жисмнинг дифференциал тенгламаларини (101.11) ва (107.11) шаклида ифодалаган эдик:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x^{(e)}; \quad m\frac{dv_y}{dt} = F_y^{(e)}; \quad m\frac{dv_z}{dt} = F_z^{(e)} \qquad (109.1)$$

$$\begin{aligned} I_\xi\frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta\omega_\zeta(I_\zeta - I_\eta) &= M_\xi^{(e)}; \\ I_\eta\frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta\omega_\xi(I_\xi - I_\zeta) &= M_\eta^{(e)}; \qquad (109.2) \\ I_\zeta\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi\omega_\eta(I_\eta - I_\xi) &= M_\zeta^{(e)}. \end{aligned}$$

Бу тенгламалардаги ҳарфий белгилашлар худди 101-§ ва 107-§ да қабул қилинган шартли белгилашларни ифодалайди. Бу тенгламалар олтита бўлиб, олтита тенгламаларга эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари деб аталади. Тенгламаларнинг ҳар биттаси чизиқли иккинчи тартибли дифференциал тенгламалардир.

Бу тенгламаларнинг ҳар бирини интеграллаганда иккита интеграллаш доимийси, жами $C_1, C_2, \ldots, C_{12}$, яъни ўн иккита интеграллаш доимийси ҳосил бўлади.

$C_1, C_2, \ldots, C_{12}$ доимийлик бошланғич шартлардан аниқланади. Бошланғич шартлар

$$t = 0;\ \varphi = \varphi_0;\ \psi = \psi_0;\ \theta = \theta_0;\ \dot\psi = \dot\psi_0;\ \dot\varphi = \dot\varphi_0;\ \dot\theta = \dot\theta_0$$

$$x = x_0;\ y = y_0;\ z = z_0;\ \dot x = \dot x_0;\ \dot y = \dot y_0;\ \dot z = \dot z_0 \qquad (109.3)$$

кўринишида берилган бўлиши лозим. Бошланғич шартлардан фойдаланиб, (109.1) ва (109.2) ифодада кўрсатилган жами олтита тенглама системаси ечилганда олтита номаълум x_c, y_c, z_c, φ, ψ, θ катталик аниқланади.

$$x_c = f_1(t); \quad y_c = f_2(t); \quad z_c = f_3(t); \quad \varphi = f_4(t);$$
$$\psi = f_5(t); \quad \theta = f_6(t). \tag{109.4}$$

(109.4) эркин қаттиқ жисмнинг ҳаракат қонунларидир. Кўриниб турибдики, ҳаракат қонунлари олтита тенгламадан иборат. Демак, эркин қаттиқ жисмнинг эркинлик даражаси олтига тенг деган хулосага келамиз. Бироқ тенгламаларни, айниқса, (109.2) билан белгиланган Эйлернинг динамик тенгламаларини интеграллаш ҳамма вақт ҳам осонгина ечиладиган масала эмас. Бу охирги уч тенгламанинг ечими Эйлер, Лагранж, С. В. Ковалевская ишларида анча батафсил баён этилган.

Энди қуйидаги икки ҳолни кўриб чиқамиз:

1) Жисм илгариланма ҳаракатда бўлса, унинг сферик ҳаракати бўлмайди. Демак, жисмнинг симметрия марказига нисбатан K_c кинетик моменти

$$\vec{K}_c = \text{const} = 0. \tag{109.5}$$

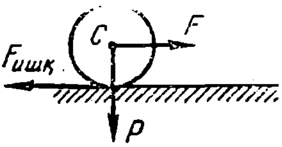
(109.5) ифодадан массалар маркази кинетик моментининг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайдиган (102.1) формулага мувофиқ

$$\vec{M}_c^{(e)} = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан: қаттиқ жисм илгариланма ҳаракат қилиши учун жисмнинг массалар марказига нисбатан кинетик моменти бошланғич вақтда нолга тенг ($K_c \approx 0$) ва массалар марказига нисбатан ташқи кучларнинг бош моменти ҳам нолга тенг бўлиши шарт деган хулоса чиқади. Табиийки, илгариланма ҳаракатланаётган жисм учун фақатгина (109.1) тенглама ўринлидир.

2) Қаттиқ жисм фақат сферик ҳаракат қилса, массалар марказининг тезлиги $v_c = 0$ бўлиб қолади. Бу ҳолда ташқи кучларнинг бош вектори бош моментни ҳосил қилади. Бош момент таъсирида жисм фақатгина сферик ҳаракатланади. Табиийки, жисм фақат сферик ҳаракатда бўлганида (109.2) тенглама ўринли бўлиб қолади ва жисмнинг массалар маркази қўзғалмас бўлади.

Шундай қилиб, эркин қаттиқ жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламалари олтита бўлиб, бу тенгламалардан учтаси жисмнинг массалар маркази илгариланма ҳаракатини, қолган учтаси эса жисмнинг мас-



288- расм.

салар маркази атрофидаги сферик ҳаракатини ифодалайди.

87-мисол (35.4). Автомашинанинг эргашувчи ғилдираги горизонтал йўлда F кучи таъсири остида сирпанади (288-расм). $F = 5fP$ ва сирпаниш ишқаланиш коэффициентини f деб олиб, ғилдиракнинг C массалар маркази ҳаракат қонунини аниқланг. Ҳаракат бошида ғилдирак тинч ҳолда деб ҳисобланг. P ни ғилдиракнинг оғирлиги деб олинг.

Ечиш. Ғилдирак ҳаракати F ва $F_{\text{ишқ}}$ кучининг таъсири остида ва ғилдирак фақат X ўқи бўйлаб ҳаракатда бўлади. Бу ҳаракат илгариланма ҳаракатдир ва (101.11) тенгламага мувофиқ,

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = F_{cx} \qquad (1)$$

дифференциал тенглама кўринишида ифодаланади. Расмдан кўринадики, F ва $F_{\text{ишқ}}$ кучининг X ўқидаги проекцияларининг йиғиндиси

$$F_{cx} = F - F_{\text{ишқ}} \qquad (2)$$

формуладан аниқланади. Бунда $F_{cx} = F^{(e)}$, яъни бош векторга тенг бўлади. Сирпаниш ишқаланиш кучи

$$F_{\text{ишқ}} = fP = fmg \qquad (3)$$

кўринишда ёзилганлигини ва (2) ни ҳисобга олганимизда (1) тенглама

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = 5fmg - fmg = 4fmg$$

кўринишни олади ёки

$$\frac{dv_{cx}}{dt} = 4fg,$$

бундан

$$v_{cx} = \int 4fgdt = 4fgt + C_1 \qquad (4)$$

ҳосил бўлади. (4) тенгламага агар

$$v_{cx} = \int 4fgdt = 4fgt + C_1; \qquad v_{cx} = \frac{dx}{dt} \qquad (5)$$

ифодани қўйсак ва интегралласак

$$x = 2fgt^2 + C_1t + C_2 \qquad (6)$$

ҳосил бўлади. Бошлангич шартга кўра

$$t = 0;\ x = x_0;\ v_{cx} = v_{cx_0} = \dot{x} = \dot{x}_0 = 0 \qquad (7)$$

эканлигини назарда тутганимизда (4) ва (6) тенгламадан $C_1 = 0$; $C_2 = 0$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Демак, ғилдиракнинг массалар марказининг ҳаракат қонуни

$$x = 2fgt^2$$

кўринишида бўлар экан.

88- мисол. (35. 3). Масса маркази $x_c = \frac{at^2}{2}$ қонун бўйлаб ҳаракат қиладиган P оғирликдаги ғилдирак қия текислик сиртидан пастга қараб сирпаниб тушмоқда. Шу ғилдиракка таъсир қиладиган ташқи кучларнинг бош векторини аниқланг.

Жавоб. Ташқи кучларнинг бош вектори X ўқига параллел ва ҳаракат йўналиши бўйлаб йўналган, бош векторнинг модули Pa/gга тенг.

89- мисол (37.7). Тез айланаётган катта маховикларни тормозлаш учун электр тормоздан фойдаланилади. Электр тормози ички диаметр бўйлаб жойлашган ва доимий ток билан таъминланадиган чулғамлардан тузилган. Маховик айланганда чулғамлар ҳосил қилган магнит майдони қутбларни кесиб ўтади ва шу маховик массаси бўйлаб индукцион электр токи ҳосил бўлади. Бу индукцион электр токи (уюрмали токлар) $M_1 \approx kv$ тормозловчи моментни ҳосил қилади (v—маховик гардишидаги нуқталар тезлиги; k — магнит оқими ва маховик ўлчамларига боғлиқ бўлган пропорционаллик коэффициенти). Маховик айланганда подшипникларда ишқалаииш натижасида ҳосил бўладиган M_2 моментини доимий деб ҳисоблаш мумкин. Агар маховикнинг диаметри D, симметрия ўқига нисбатан инерция моменти I бўлса, ω_0 бошлангич бурчакли тезлик билан айланаётган маховик қанча вақтдан кейин тўхтаб қолади?

Ечиш. Маховик айланишини ифодалайдиган дифференциал тенглама (102.9) кўринишида ёзилади:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M^{(e)}. \qquad (1)$$

Масаланинг шартига мувофиқ

$$M^{(e)} = -(M_1 + M_2) = -(kv + M_2). \qquad (2)$$

Кейинги тенгламани ҳисобга олганимизда, (1) қуйидаги шаклни олади:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -(kv + M_2). \qquad (3)$$

(3) маховик ҳаракатининг дифференциал тенгламасидир. Кейинги вазифамиз (3) тенгламани интеграллашдан иборат. Маълумки,

$$v = \frac{\omega D}{2} \qquad (4)$$

формула билан аниқланади. Агар (4) ни (3) тенгламага қўйсак,

$$I \frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{kD}{2}\omega + M_2\right)$$

ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратамиз:

$$\frac{d\omega}{\left(\frac{kD}{2}\omega + M_2\right)} = -\frac{1}{I}\mathrm{dt}$$

ва интеграллаймиз:

$$\frac{2I}{kd}\int \frac{d\left(\frac{kD}{2}\omega + M_2\right)}{\frac{kD}{2}\omega + M_2} d\omega = -\int dt$$

ёки

$$\frac{2I}{kD}\ln\left(\frac{kD}{2}\omega + M_2\right) = -t + C_1. \qquad (5)$$

Бошланғич шартга мувофиқ

$$t = 0; \quad \omega = \omega_0 \qquad (6)$$

эканлигини ҳисобга олганимизда, (5) тенгламадан

$$C_1 = \frac{2I}{Dk}\ln\left(\frac{kD}{2}\omega_0 + M_2\right) \qquad (7)$$

келиб чиқиши кўриниб турибди. Шунинг учун (5) тенгламани

$$-\frac{2I}{kD}\ln\left(\frac{kD}{2}\omega+M_2\right)-\frac{2I}{D}\left(\frac{kD}{2}\omega_0+M_2\right)=-t$$

ёки

$$\frac{2I}{kD}\ln\frac{\frac{kD}{2}\omega+M_2}{\frac{kD}{2}\omega_0+M_2}=-t$$

кўринишда ёзамиз. Бу тенгламанинг иккала томонини (—1) га кўпайтирамиз ва маховик тўхтаб қолганида $\omega=0$ бўлишини ҳисобга оламиз. Бу ҳолда ($t=T$ деб олсак)

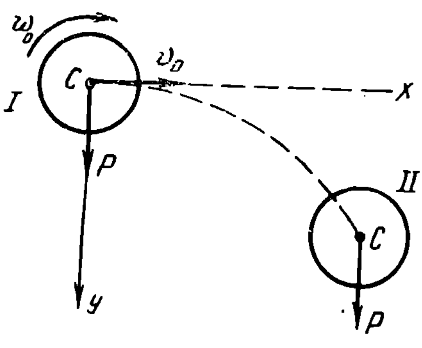
$$T=\frac{2I}{kD}\ln\left(1+\frac{kD}{2M_2}\omega_0\right)$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу маховик тўхтагунча кетган вақтни ҳисоблаш формуласи.

90-мисол (37.8). M доимий момент таъсирида тинч ҳолатдаги қаттиқ жисм айланма ҳаракатга келтирилади. Жисм айланганда $M_1\approx\alpha\omega^2$, яъни жисмнинг айланишдаги бурчакли тезлигининг квадратига пропорционал бўлган қаршилик момент ҳосил бўлади. Жисмнинг айланиш ўқига нисбатан инерция моментини I деб қабул қилиб жисм айланишидаги бурчакли тезлигининг ўзгариш қонунини аниқланг.

Жавоб: $\omega=\sqrt{\frac{M}{\alpha}}\cdot\frac{e^{\beta t}-1}{e^{\beta t}+1}$, бунда $\beta=\frac{\alpha}{I}\sqrt{\alpha\cdot M}$.

91-мисол. (39.2). Оғирлик кучи таъсири остида диск вертикал текислик бўйлаб пастга тушмоқда. Дискка ω_0 бошланғич бурчакли тезлик берилган ва дискнинг C оғирлик маркази v_0 бошланғич горизонтал тезликка эга деб дискнинг ҳаракат қонунлари аниқлансин (289-расм). Қаршилик кучлари ҳисобга олинмасин ва X, Y ўқлари расмда тасвирлангандек қабул қилинсин.



289-расм.

Ечиш. Дискни текис параллел ҳаракат қилади деб ҳисоблаймиз. Фараз қилайлик, диск II ҳолатга ўтсин. Дискнинг бу ҳолати учун (105.1) — (105.3) тенгламани ёзамиз:

$$m\frac{dv_{cx}}{dt} = F_x^{(e)}; \tag{1}$$

$$m\frac{dv_{cy}}{dt} = F_y^{(e)}; \tag{2}$$

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z^{(e)}. \tag{3}$$

Олдинги икки тенглама дискнинг массалар маркази илгариланма ҳаракатини, учинчи тенглама C нуқта атрофида дискнинг айланма ҳаракатини ифодалайдиган дифференциал тенгламадир.

Дискнинг ҳаракат қонунини аниқлаш учун (1) — (3) тенгламаларнинг ечимини топиш лозим ёки бошқача айтганда, (1) — (3) тенгламаларни интеграллаш керак. Масала шартига кўра дискка фақат P оғирлик кучи таъсир қилади.

Расмдан

$$F_x^{(e)} = 0 \tag{4}$$

$$F_y^{(e)} = P \tag{5}$$

Z ўқи дискнинг C марказидан ўтади ва расм текислигига тик йўналган ҳамда P оғирлик кучи ҳам C нуқтага қўйилганлиги учун

$$M_z^{(e)} = 0 \tag{6}$$

бўлиши кўриниб турибди.

Агар (4) — (6) ифодаларни (1) — (3) тенгламаларга қўйсак:

$$dv_{cx} = 0; \tag{7}$$

$$m\frac{dv_{zy}}{dt} = mg; \tag{8}$$

$$d\omega = 0 \tag{9}$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Системадаги биринчи тенгламани икки марта интеграллсак,

$$v_{cx} = C_1 \tag{10}$$

$$x = C_1t + C_2. \tag{11}$$

Иккинчи тенгламани икки марта интегралласак,

$$v_{cy} = gt + C_3 \qquad (12)$$

$$y = \frac{gt^3}{2} + C_3 t + C_4, \qquad (13)$$

учинчи тенгламани интеграллсак

$$\omega = C_5; \qquad \varphi = C_5 t + C_6 \qquad (14)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу (10) — (14) ифодалардаги C_1, $C_2 \ldots C_6$ интеграллаш доимийлари бошланғич шартдан фойдаланиб аниқланади.

Масаланинг шартига асосан, бошланғич шартлар қуйидаги кўринишда

$$t = 0;\ x = x_0 = 0;\ y = y_0 = 0;\ \omega = \omega_0; \qquad (15)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 0;\ \dot{y} = \dot{y}_0 = 0;\ \varphi = \varphi_0 = 0$$

ёзилишини эътиборга олганимизда, (10) — (14) тенгламалардан

$$C_1 = v_0;\ C_2 = 0;\ C_3 = 0;\ C_4 = 0;\ C_5 = \omega_0;\ C_6 = 0 \quad (16$$

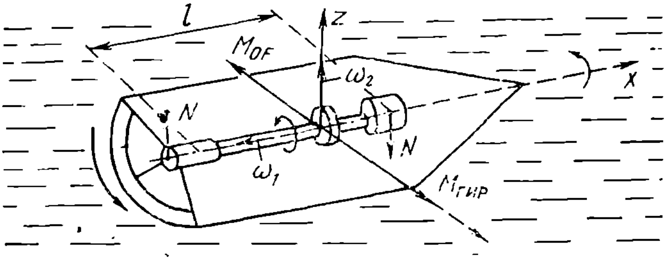
ҳосил қилинадики, бу қийматларни яна (10) — (14) га қўйиб дискнинг ҳаракат қонунлари қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$x = v_0 \cdot t_0;\ y = \frac{gt^2}{2};\ \varphi = \omega_0 \cdot t. \qquad (17)$$

92-мисол. (39.3). 91-масаланинг шартидан фойдаланиб, дискнинг C оғирлик марказидан ўтувчи ва дискнинг ҳаракат йўналишини кўрсатувчи горизонтал ўққа тик бўлган қаршилик моменти φ бурчакли тезликнинг биринчи даражасига тўғри пропорционал ва пропорционаллик коэффициенти β бўлган ҳол учун дискнинг ҳаракат қонунлари аниқлансин. Дискнинг симметрия ўқига нисбатан инерция моменти I_c деб олинсин.

Жавоб: $x_c = v_0 t;\ y_c = \dfrac{gt^2}{2};\ \varphi = \dfrac{I_c\omega_0}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{I_c}t}\right).$

Кўрсатма. Бу ерда ҳам олдинги масаладаги (1) — (3) тенглама қўлланилди ва (3) тенглама $I_c \dfrac{d\omega}{dt} = -\beta\omega$ шаклда ёзилади.



290- расм.

93- мисол. (40.3). Айланадиган қисмларининг оғирлиги 6 т., инерция радиуси $\rho = 0{,}7$ м бўлган кеманинг бўйлама ўқига параллел бўлган турбинасининг вали 1500 $\frac{\text{айл}}{\text{мин}}$ тезлик билан айланади. Агар кема вертикал ўқ атрофида циркуляцион ҳаракат қилиб, ҳар бир секундда 10° га айланса ва турбинани тутувчи подшипниклар орасидаги масофа $L = 2{,}7$ м бўлса, подшипникларга бериладиган гироскопик босим аниқлансин (290- расм).

Ечиш. Масаланинг шартига мувофиқ, кема ўз ўқи X атрофида ω_1 бурчакли тезлик билан, вертикал Z ўқи атрофида ω_2 бурчакли тезлик билан айланади. Бу бурчакли тезликларнинг модуллари

$$\omega_1 = 2\pi n = 50\,\pi с^{-1} \qquad (1)$$

$$\omega_2 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{10\,\pi}{180} = \frac{\pi}{18}\,с^{-1} \qquad (2)$$

эканлиги равшандир. Кема айланадиган қисмларининг X ўқига нисбатан инерция моменти қуйидагига тенг бўлади.

$$I = m\rho^2 = \frac{P}{g}\rho^2 = 120\ Т\cdot С^2\cdot М. \qquad (3)$$

Кема Z ўқи атрофида айланганида гироскопик момент: $I\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$, йўналиши X ва Z ўққа тик бўлиб Y ўқи томон йўналади. Гироскопик момент кеманинг Z ўқи атрофида айланишига қаршилик кўрсатади ва кеманинг бўйлама ўқини X ўқига яқинлаштиришга интилади. Ҳамма вақт гироскопик момент оғдирувчи моментга тенг бўлганда кема динамик мувозанат ҳолатида бўлади ва бу мувозанат ҳолати (108.9) тенгламага мувофиқ

$$\vec{M}_{\text{ог}} + \left(-\frac{d\vec{k}}{dt}\right) = 0 \qquad (4)$$

шаклда ифодаланади. Бу ерда масаланинг шартига асосан

$$M_{\text{гир}} = \frac{d\vec{k}}{dt} = I\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2 \qquad (5)$$

кўринишда ёзилади. Гироскопик моментнинг модули қуйидаги формуладан ҳисобланилади:

$$M_{\text{гир}} = I\,\omega_1\,\omega_2 \sin 90^\circ = I\,\omega_1\,\omega_2. \qquad (6)$$

Гироскопни оғдирувчи (айлантирувчи) момент таъсирида кема турбинасининг валини сақлаб турувчи подшипникларига $N_1 = -N_2 = N$ босим кучлари таъсир қилади, яъни $M_{\text{ог}}$ оғдирувчи момент модули N_1, N_2 жуфт кучлар моментининг абсолют қийматига тенг:

$$M_{\text{ог}} = N \cdot l. \qquad (7)$$

(6) ва (7) ни (4) тенгламага қўйганимизда

$$I\,\omega_1\,\omega_2 = N \cdot t$$

ва

$$N = \frac{I\omega_1\omega_2}{l}$$

келиб чиқади. Ниҳоят (1)—(3) ва $l = 2{,}7$ м эканлиги ҳисобга олинса, босим кучини аниқлаймиз:

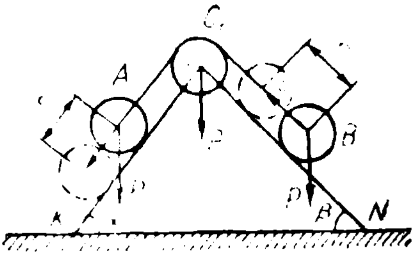
$$N = \frac{120\ \text{т}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2\cdot 50\,\text{л}\,\frac{\text{л}}{18}\ \text{с}^{-2}}{2{,}7\ \text{м}} \approx 3050\ \text{кг}.$$

94- мисол (40.2). Диаметри 30 см бўлган диск шаклидаги пилдироқ симметрия ўқи атрофида 80 с^{-1} бурчакли тезлик билан айланади. Диск пилдироқнинг бўйлама ўқи бўйлаб жойлаштирилган, узунлиги 20 см бўлган ўқига маҳкамланган. Пилдироқ ҳаракат миқдорининг бош моментини (кинематик моменти) $I\,\omega$ деб ҳисоблаб, унинг барқарор прецессиясидаги бурчакли тезлигини аниқланг.

Жавоб: 2,18 с^{-1}.

Кўрсатма. Масалани ечиш учун (108.14) формуладан фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

95- мисол. (38.43). *А* ҳалқа горизонт билан α бурчак ҳосил қилган *ОК* қия текислик бўйлаб пастга тушганида чўзилмайдаган AC_1 *В* сим арқон билан *В* ҳалқани горизонт билан β бурчак ҳосил қилган *NO* қия текислик бўйлаб кў-



291- расм.

таради (291- расм). Сим арқон горизонтал O ўқ атрофида айланаётган C_1 блок орқали ўтказилган ва сим арқон оғирлиги ҳисобга олинмайди. Ғилдирак ва блок радиуслари ҳамда оғирликлари бир хил бўлган дисклар деб ҳисоблаб, A ҳалқанинг OK текисликда s масофани ўтган вақтдаги v тезлиги аниқлансин. A ва B ҳалқалар сирпанишсиз думаланади деб ҳисоблансин.

Ечиш. Механик система иккита ҳалқа, блок ва сим арқондан, жами тўрт элементдан иборат. Лекин сим арқоннинг оғирлиги ҳисобга олинмаслигини эътиборга олсак, система уч элементдан тузилган.

Система учун кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремани ифодалайдиган (94.10) тенгламага мувофиқ қуйидаги ифода ёзилади:

$$T_c - T_{co} = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu^{(i)}. \tag{1}$$

Бунда T_{co} — системанинг бошланғич ҳолатидаги кинетик энергия; T_c — кейинги вақтдаги системанинг кинетик энергияси; $\sum_\nu A_\nu^{(e)}$, $\sum_\nu A_\nu^{(i)}$ — система элементларига ташқи ва ички кучлар таъсир этилганда бажарилган иш.

Масаланинг шартига асосан система олдин тинч ҳолатда бўлади, демак,

$$T_{CD} = 0. \tag{2}$$

$$\sum_\nu A_\nu^{(i)} = 0. \tag{3}$$

Система ҳаракат ҳолатида бўлганида (1) тенглама

$$T_c = \sum_\nu A_\nu^{(c)} \tag{4}$$

кўринишни олади. Системанинг тўлиқ кинетик энергияси A

ҳалқанинг T_A, B ҳалқанинг T_B ва C_1 блокнинг T_{C_1} кинетик энергияларининг йиғиндисига тенг:

$$T_C = T_A + T_B + T_{C_1}. \tag{5}$$

Кёнига формуласининг (93.7) кўринишдаги ифодасидан фойдалансак:

$$T_A = \frac{pv^2}{2g} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{6}$$

$$T_B = \frac{pv^2}{2g} + \frac{I\omega^2}{2}. \tag{7}$$

C_1 блок илгариланма ҳаракатланмайди ва фақат O ўқ атрофида айланади, шунинг учун

$$T_{C_1} = \frac{I\omega^2}{2} \tag{8}$$

формуладан топилади. Учала А, B, C_1 жисм ҳам бир хил радиусли диск бўлганлиги учун уларнинг I инерция моментлари

$$I = \frac{PR^2}{2g} \tag{9}$$

формуладан аниқланади.

Агар $v = \omega R$ боғланишни ҳисобга олиб, (6) — (10) тенгликни (5) га қўйсак, (10)

$$T_C = \frac{pv^2}{4g} \tag{11}$$

формулани ҳосил қиламиз.

Энди $\sum A^{(e)}$ ни аниқлашда C_1' блокни массалар маркази ҳаракат қилмаганлиги учун бу блокда иш бажармаслигини ҳисобга оламиз. Бу ҳолда тўлиқ иш A ҳалқанинг A_A ва B ҳалқанинг A_B бажарган ишларининг йиғиндисига тенг бўлиб қолади:

$$\sum A^{(e)} = A_A + A_B. \tag{12}$$

Расмдан

$$A_A = P \cdot S \sin\alpha, \tag{13}$$

$$A_B = -PS \sin\beta. \tag{14}$$

Охирги икки ифодани (12) га қўйиб,

$$\sum A^{(e)} = PS(\sin\alpha - \sin\beta)$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Ниҳоят, (11) ва (15) тенгламаларни (4) га қўйиб, A ҳалқа тезлигининг

$$v = 2\sqrt{\frac{1}{7} gS(\sin\alpha - \sin\beta}$$

кўринишдаги ҳисоблаш формуласини чиқарамиз.

96-мисол. (38.44). Олдинги 95-масаланинг шартларига асосланиб, ҳалқаларнинг қия текисликда думаланиш ишқаланиш коэффициенти f_k ва ҳалқалар радиусини r деб қабул қилиб, A ҳалқанинг яна v тезлиги аниқлансин.

Жавоб: $v = 2\sqrt{\frac{1}{7} gS\left[\sin\alpha \quad \sin\beta - \frac{f_к}{r}(\cos\alpha + \cos\beta)\right]}.$

Кўрсатма. Думаланиш ишқаланншида ишқаланиш кучлари $\frac{f_{к}p}{r}\cos\alpha$ ва $\frac{f_{к}p}{r}\cos\beta$ шаклда А ва B ҳалқалар учун аниқланади.

110-§. Ўзгарувчан массали жисмлар механикаси. Мешчерский тенгламаси

Қушдек ҳавога учай деб ният қилган инсониятнинг эзгу умиди самолётлар пайдо бўлиши билан амалга ошди. Бироқ пропеллерли самолётлар билан фақатгина ҳаво бўлган жойда парвоз қилиш мумкинлиги, бошқа, Ердан узоқроқ масофада бўлган самовий жисмларга саёҳат қилиш орзусига чек қўяр эди. Чунки Ердан бошқа самовий жисмларгача бўлган оралиқларда ҳаво йўқ ва оддий парракли самолётлар ҳавосиз жойда ҳаракат қилолмайди. Демак, бошқа самовий жисмларга бориш учун ҳавосиз жойларда ҳам ҳаракат қила оладиган, бошқа принципларга асосланиб ишлайдиган, реактив двигателларни кашф қилиш лозим эди.

Реактив двигателларнинг ишлаш принципи ўзгарувчан массали жисм назариясига асослангандир. Бу назария ўзгарувчан массали жисм механикасига таянади.

Биз шу вақтгача нуқта ёки механик система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларида қатнашаётган массани доимий деб қабул қилган эдик. Ҳақиқатда эса жисмнинг массаси вақт ўтиши билан ўзгариши мумкин. Масалан, думаланаётган қор коптоги ҳаракатида массаси ортиб боради; тикув машинасида ип ғалтаги массаси тикиш вақтида камаяди; снаряд (мушак) ёки ракета массаси ҳаракат давомида камаяди ва бошқа кўп мисоллар келтириш мумкинки, жисмнинг массаси вақт функцияси бўлади. Агар жисмнинг бошланғич массаси m_0 ва жисм ҳаракатланаётган $t_к$ вақтдаги массаси $m_к$ бўлса, бу $m_к$ ва m_0 ўзаро боғланган. Бу боғланиш

$$m_к = m_0 f(t) \qquad (110.1)$$

кўринишда ифодаланади. Бу ерда $f(t)$ вақт функциясидир. Агар жисмнинг бошланғич массаси m_0, кейинги массаси m бўлса, $f(t)$ функция

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{агар } t = 0 \text{ бўлса} \\ m_к, & \text{агар } t = t_к \text{ бўлса} \end{cases} \qquad (110.2)$$

кўринишда бўлади деб ҳисоблаш мумкин.

Масса ўзгарувчан бўлганда, жисмнинг массалар маркази ҳаракатини ифодалайдиган (101.10) дифференциал тengламанинг кўриниши бошқача бўлади. Бундай ўзгарувчан массали жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламасини И. В. Мешчерский қуйидаги мулоҳаза асосида келтириб чиқарди.

Жисмнинг тезлиги ташқи ва реактив кучлар таъсирида $dv_а$ ва $dv_р$ миқдорларга ўзгарсин. Бу ҳолда жисм тезлигининг тўлиқ ўзгариши

$$\overrightarrow{dv} = \overrightarrow{dv}_а + d\,\vec{v}_р \qquad (110.3)$$

тенглик орқали аниқланиши кўриниб турибди. Энди $dv_а$ ва $dv_р$ катталикларни аниқлаймиз.

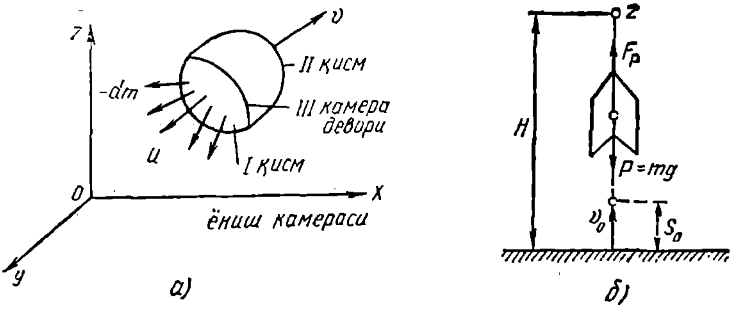
Жисмга таъсир қиладиган кучлар (берилган кучлар) — актив кучларни $F_а$ деб белгиласак, бу

$$F_а = m \frac{dv_а}{dt}$$

шаклда ёзилади. Бу тенгламадан

$$dv_а = \frac{F_а dt}{m}. \qquad (110.4)$$

Жисм икки қисмдан тузилган ва биринчи қисм жисм ҳаракати вақтида жисмдан ажралиб чиқиб кетиши мумкин бўлсин (292-*а* расм). Жисмнинг иккинчи қисми массаси (корпуснинг) $m_к$ доимий бўлади. Амалда снаряд ёки ракета шундай жисмга мисол бўлади.



а) б)

292- расм.

Жисмнинг I қисмида ёнувчи модда ёнганида Паскаль қонунига мувофиқ ёниш камерасининг ҳамма томонига бир хил босим беради. Лекин камера ёпиқ бўлганида босим кучларининг тенг таъсир этувчиси нолга тенг бўлади ва жисм ҳаракат қилмайди (ташқи актив кучлар таъсири ҳисобга олинмаса).

Ёниш камерасининг соплоси (ёниб турган газ моддаларини чиқарувчи тешик) очилса, ёниб битган газ моддалари соплодан чиқиб кетади ва газ чиққан томонда босим кучи кескин камаяди. Айнан шу вақтда ёниш камерасининг III деворига бўлган босим кучлари жисмнинг тескари томонга қараб ҳаракатланишига мажбур қилувчи куч — реактив куч деб айтиладиган куч ҳосил бўлади.

Реактив куч жисмнинг ичида ёқилғининг ёниши натижасида ҳосил бўлади ва бу реактив куч жисмни ўраб олган ташқи муҳитга боғлиқ эмас. Жисм реактив куч таъсирида ташқи муҳит бўлганда, (масалан, ҳаво бўлганда ва ҳаво бўлмаганда) ҳам ёки ташқи муҳит бўлмаганда ҳам барибир ҳаракат қилаверади. Демак, реактив куч таъсирида ишлайдиган двигателлар билан бошқа самовий жисмларга ҳаракат қилиш мумкин деган хулоса чиқади. Бу хулосани Қозон университети профессори И. В. Мешчерский 1897 йилда «Мешчерский тенгламалари» деб айтиладиган тенглама шаклида берди.

Агар реактив куч таъсирида жисм тезлиги $dv_{\text{р}}$ га ўзгарса, $dv_{\text{р}}$ қуйидагича аниқланади. Жисмнинг биринчи ҳолатидаги массаси m, тезлиги v бўлса, бу ҳолатдаги ҳаракат миқдори

$$\vec{Q}_1 = m\vec{v}. \qquad (110.5)$$

Жисмнинг иккинчи ҳолатида жисмдан dm массадаги зарралар u тезлик билан отилиб чиққанда, жисм тезлиги dv_p миқдорга ўзгарса, жисм тезлиги $v + dv_p$ ва массаси $m—dm$ бўлиб қолади. Иккинчи ҳолатда жисмнинг ҳаракат миқдори

$$Q_2 = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}_p) + dm\vec{u} \qquad (110.6)$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи ҳад жисмнинг ҳаракат миқдори, иккинчи ҳад эса отилиб чиққан зарраларнинг ҳаракат миқдори.

Таъкидлаймизки, (110.5) ва (110.6) тенглама ёзилганда актив кучларнинг таъсирини ҳисобга олганимиз йўқ. Демак, ҳаракат миқдорининг сақланиш қонунига мувофиқ (110.5) ва (110.6) нинг чап ва ўнг томонлари ўзаро тенг бўлиши мумкин:

$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}_p) + dm\vec{u}$$

ёки

$$m\vec{v} = m\vec{v} + md\vec{v}_p - dm\vec{v} - dm\,d\vec{v}_p + dm\vec{u}. \qquad (110.7)$$

Тенгликдаги $dm\,dv_p$ ҳад иккинчи, ҳатто учинчи тартибли кичик миқдор бўлганлиги учун ҳисобга олинмаса ва тенглик соддалаштирилиб $d\vec{v}_p$ га нисбатан ечилса

$$dv_p = -(\vec{v} - \vec{u})\frac{dm}{m} \qquad (110.8)$$

формула келиб чиқади. (110.8) реактив куч таъсирида жисм тезлигининг ўзгаришини ҳисоблаш формуласи бўлади. Бундан кўринадики, dv_p жисм массасининг ўзгариши, яъни $\frac{dm}{m}$ нисбатга пропорционал.

Охирги формула билан (110.4) ни келтириб, (110.3) тенгламага қўйилса

$$dv = \frac{F_a dt}{m} - (\vec{v} - \vec{u})\frac{dm}{m} \qquad (110.9)$$

тенглик ҳосил бўлади. (110.9) нинг иккала томонини $\frac{m}{dt}$ га кўпайтирсак, Мешчерский тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$m\frac{dv}{dt} = F_{\text{а}} - (\vec{v} - \vec{u})\frac{dm}{dt}. \qquad (110.10)$$

Бу тенгламанинг ўнг томонидаги иккинчи ҳад реактив кучни ифодалайди, яъни

$$\vec{F}_{\text{р}} = -(\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}, \qquad (110.11)$$

агар

$$\vec{V}_r = -(\vec{u} - \vec{v}) \qquad (110.12)$$

белгилашни киритсак (110.11)

$$\vec{F}_{\text{р}} = V_r\frac{dm}{dt} \qquad (110.13)$$

кўринишда ифодаланади ва Мешчерский тенгламасининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$m\frac{dv}{dt} = \vec{F}_{\text{а}} + \vec{V}_r\frac{dm}{dt}$$

ёки

$$m\frac{dv}{dt} = \vec{F}_{\text{а}} + \vec{F}_{\text{р}}. \qquad (110.14)$$

Мешчерский тенгламаси ўзгарувчан массали жисм механикасининг асосий тенгламасидир. Бу тенгламадан кўринадики, жисм массасининг массалар марказининг $\frac{dv}{dt}$ тезланишига бўлган кўпайтмаси унга таъсир қиладиган актив ва реактив кучларнинг (яъни $F_{\text{а}}$ ва $F_{\text{р}}$ векторларнинг) геометрик йиғиндисига тенг. Бу тенглама, Ньютоннинг иккинчи қонунидан, тенгламанинг ўнг томонида қатнашаётган $F_{\text{р}}$ реактив куч билан фарқ қилади. Реактив куч (110.13) формулага мувофиқ, жисм массасининг ўзгариш тезлигига, яъни $\frac{dm}{dt}$ катталикка боғлиқ. $\frac{dm}{dt}$ қанча катта бўлса, яъни ёқилғи қанча тез ёниб чиқиб кетса, реактив куч шунча катта бўлади. (110.13) формуладаги V_r катталик жисм тезлигининг зарралар тезлигидан фарқини кўрсатади. V_r катталик нисбий тезлик дейилади.

Мешчерский тенгламасини, яъни (110.10) тенгламани

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}_{\text{а}} + \vec{u}\frac{dm}{dt} \qquad (110.15)$$

шаклда ҳам ёзилади, чунки

$$\frac{d(mv)}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

эканлигини назарда тутсак, (110.16) тенгликнинг тўғрилигига ишонч ҳосил бўлади.

Агар зарраларнинг абсолют тезлиги $u=O$ бўлса,

$$\frac{d(mv)}{dt} = \vec{F}, \qquad (110.16)$$

яъни ўзгарувчан массали жисмнинг $\overrightarrow{mv}$ ҳаракат миқдоридан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила жисмга таъсир қиладиган актив кучларнинг бош векторига тенг деган натижа чиқади. (110.16) тенглама Мешчерскийдан хабарсиз ҳолда 1928 йилда Япония механиги Леви-Чивита томонидан матбуотда эълон қилинганлиги учун, айрим чет эл адабиётларида (110.16) Леви-Чивита тенгламаси дейилади.

Агар нисбий тезлик $\vec{V}_r = -(u - v) = 0$ деб олинса, (110.13) тенглама

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = F_a \qquad (110.17)$$

шаклда, яъни ўзгармас массали жисм тенгламаси шаклида ёзилса-да, (110.17) тенгламада жисм массаси (110.1) кўринишда ўзгарувчан эканлигини эсда тутиш лозим.

Ниҳоят Мешчерский тенгламасини декарт ўқларидаги проекцияларда ифодаласак, ушбу

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= F_{ax} + F_{px} \\ m\frac{dv_y}{dt} &= F_{ay} + F_{py} \\ m\frac{dv_z}{dt} &= F_{az} + F_{pz} \end{aligned}\right\} \qquad (110.18)$$

тенглама ҳосил бўлади. Мешчерский тенгламаларининг аниқ масалаларга қўлланилишини биринчи бўлиб, чиройли тарзда К. Э. Циолковский кўрсатди.

111-§. Циолковский масалалари

Мешчерский тенгламасидан фойдаланиб қуйидаги Циолковский (1857—1935) ечган икки масалани кўриб чиқайлик.

1. Биринчи масала. Жисм фақат реактив куч таъсирида ҳаракат қилганида тезлигининг ўзгариши ва ҳаракат қонуни аниқлансин. Масаланинг шартидан $F_a = 0$ бўлган ҳолда (110.14) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$m\frac{dv}{dt} = V_r\frac{dm}{dt}. \qquad (111.1)$$

Циолковский кўрсатдики, жисмнинг нисбий тезлигини, яъни $V_r = \text{const}$ деб ҳисоблаш мумкин (Циолковский гипотезаси). Шундай бўлган ҳолда (111.1) ифодадан

$$v = V_r\int\frac{dm}{m} \qquad (111.2)$$

формулани ҳосил қиламиз. Агар жисм массаси m_0 дан m гача ўзгарса, тезлик формуласини

$$v = V_r\ln m + C_1 \qquad (111.3)$$

кўринишда ёзамиз. Бошланғич шартни

$$t = 0;\ v = v_0;\ s = s_0;\ m = m_0 \qquad (111.4)$$

(111.3) га қўямиз, бу ҳолда

$$C_1 = v_0 - V_r\ln m_0. \qquad (111.5)$$

Топилган C_1 катталикни (111.3) га қўямиз ва математик ўзгаришлар киритгандан сўнг қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$v = v_0 + V_r\ln\frac{m}{m_0} = v_0 - V_r\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (111.6)$$

Агар $v = 0$ бўлса,

$$v = -V_r\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (111.7)$$

Циолковский формуласи деб айтиладиган (111.6) формула (111.7) шаклни олади. (111. 7) да жисм массасининг нисбий ўзгариши $\frac{m_0}{m}$ геометрик прогрессия бўйича ўзгарса, жисмнинг нисбий тезлиги v/V_r арифметик прогрессия қонуни бўйича ўзгаради деган хулосага келамиз. Бу хулоса Циолковский қонуни дейилади. Бу қонундан

$$\frac{m_0}{m} = r,\ r^2,\ r^3\ \ldots\ r^N = r^n$$

кўринишида ўзгарадиган бўлса,

$$\frac{v}{V_r} = \ln r,\ 2\ln r,\ 3\ln r\ \dots\ N\ln r$$

қонун бўйича ўзгаради, яъни $\frac{m_0}{m}$ геометрик прогрессия, $\frac{v}{V_r}$ арифметик прогрессия қонуни бўйича ўзгаради деган натижа келиб чиқади.

Энди жисмнинг ҳаракат қонунини аниқлаймиз, яъни жисм босиб ўтган масофани аниқлаймиз. Тезликнинг

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad (111.8)$$

кўринишда тасвирланишини ҳисобга олганимизда (111.7) формуладан

$$ds = V_r \ln \frac{m}{m_0} dt \qquad (111.9)$$

ифода ҳосил бўлади. Агар (110.1) эътиборга олинса

$$\ln \frac{m}{m_0} = \ln \frac{m_0 f(t)}{m_0} = \ln f(t) \qquad (111.10)$$

тенглик ёзилиши мумкинлигини эътиборга олганимизда қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$s = V_r \int \ln f(t)\, dt. \qquad (111.11)$$

Энди вақт функциясини ифодаловчи (110.2) тенгламасини қуйидаги икки хил ошкор шаклда ифодалайлик.

$$f(t) = 1 - \alpha t \text{ (чизиқли қонун)} \qquad (111.12)$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} \text{ (кўрсатгичли қонун).} \qquad (111.13)$$

Бу ерда α тажрибада аниқланадиган катталик. Охирги кўрсаткичли қонун ҳисобга олинганда

$$s = V_r \int \ln e^{-\alpha t} dt = -\frac{\alpha V_r t^2}{2} + C_1 \qquad (111.14)$$

формулани ҳосил қиламиз. (111.4) ни келтириб (111.14) га қўйсак, $C_1 = s_0$ бўлади ва (111.14) ифодадан

$$s = s_0 - \frac{\alpha V_r t^2}{2} \qquad (111.15)$$

формулани, яъни жисм босиб ўтаётган масофани (ҳаракат қонунини) вақтга қараб ўзгаришини аниқлаймиз.

2. **Иккинчи масала.** Жисмга таъсир қиладиган актив куч жисмнинг оғирлик кучига тенг бўлсин ($F_a = -P$)

ва яна жисмга реактив куч таъсир қилсин. Шу кучлар таъсирида жисм тезлигининг ўзгариш қонуни ва ҳаракат қонуни аниқлансин (ҳаво қаршилиги ҳисобга олинмасин) (292-б расм). Расмда кўрсатилганидек, реактив куч билан оғирлик кучлари қарама-қарши йўналишда бўлганда (110.14) тенглама, яъни Мешчерский тенгламаси қуйидаги шаклни олади:

$$m\frac{dv}{dt}=-mg+V_r\frac{dm}{dt}. \tag{111.16}$$

Охирги тенгламани $\frac{dt}{m}$ ифодага иккала томонини кўпайтириб интеграллаймиз:

$$\int dv=-\int g\,dt+V_r\int\frac{dm}{m}. \tag{111.17}$$

Агар

$$V_r=\text{const} \tag{111.18}$$

$$\frac{dm}{m}=\frac{df}{f}=d(\ln f)$$

эканлигини эсласак, (111.17) тенгламадан

$$v=-gt+v_r\ln f=C_3 \tag{111.19}$$

ҳосил бўлади. Агар (111.13) эътиборга олинса, (111.19) тенглама яна бир марта интегралланганидан кейин

$$S=-\frac{gt^2}{2}-\frac{\alpha V_r t^2}{2}+C_3t+C_4 \tag{111.20}$$

ҳосил бўлади.

Масаладаги бошланғич шартлар қуйидагича берилган бўлсин:

$$t=0;\ v=v_0;\ m=m_0;\ f(t)=1;\ s=s_0. \tag{111.21}$$

Бошлангич шартларни эътиборга олганимизда, (111.19) ва (111.20) тенгламадан

$$C_3=v_0;$$

$$C_4=s_0 \tag{111.22}$$

тенглик аниқланади. Бунда C_1 ва C_2 катталик учун аниқланган ифодалар юқоридаги (111—19), (111.20) тенгликларга қўйилса,

$$v=v_0-gt-\alpha V_r t, \tag{111.23}$$

$$s=s_0-\frac{gt^2}{2}-\frac{\alpha V_r t^2}{2}+v_0t \tag{111.24}$$

формула ҳосил бўлади. Бу формулалар ўзгарувчан массали жисмнинг тезлигини ва юрган масофасини ҳисоблаш учун қўлланилади. Формулалардан ва (III.7), (III.15) дан кўринадики, нуқтанинг тезлиги ва юрган масофаси иккала Циолкооский масалаларида икки хил қонун билан аниқланади.

Циолковский (III.7) дан фойдаланиб кўрсатдики, ракета биринчи космик тезликка $(7{,}9\frac{\text{км}}{\text{с}})$ эга бўлиб, Ернинг сунъий йўлдоши бўлиб қолиши учун ракеталарда ёқилғи массасининг ракета корпусининг массасига бўлган нисбати $\frac{m_ё}{m_к}=4$ бўлганда жисмнинг бошланғич тезлиги $6\frac{\text{км}}{\text{с}}$ бўлиши лозим. Шунинг учун ракеталар кўп босқичли қилиб ясалади. Биринчи босқичда ёқилғи ёниб тамом бўлгандан кейин биринчи босқич корпуси автоматик равишда ракетадан ажралади ва иккинчи босқич ишга тушади. Демак, биринчи босқич ажралганда ракетанинг массаси кескин камаяди ва тезлиги ортади. Бундан кейин иккинчи босқич ажралади ва ракета тезлиги иккинчи марта яна кескин ортади ва ҳоказо. Ҳар бир босқич ажралганда ракетанинг тезлиги ортишда давом этади ва охирги босқичдан кейин ракетанинг тезлиги биринчи космик тезликка тенг бўлиб қолади ва ракета сунъий йўлдошга айланади.

Энди $s_0=0$ бўлган ҳолда ракетанинг энг катта кўтарилиш баландлиги $H_{\max}$ ни аниқлайлик. Ракета энг юқорига кўтарилганда $v=0$ бўлади ва (III.23) дан $H_{\max}$ масофага кўтарилиш вақти

$$t=\frac{v_0}{g+\alpha V_r} \tag{III.25}$$

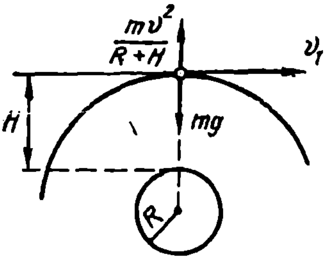
формуладан аниқланади. Бу ҳолда (III.24) $s=H_{\max}$ деб белгиланганда $(s_0=0)$:

$$H_{\max}=\frac{v_0^2}{2(g+\alpha V_r)} \tag{III.26}$$

кўринишда ёзилади. (III.26) ракета кўтарилишининг максимал баландлигини ҳисоблаш учун қўлланилади.

112- §. Космик тезликлар

Массаси m бўлган жисм масофанинг квадратига тескари пропорционал бўлган куч таъсири остида v_0 бошланғич тезлик билан ҳаракат қилаётган бўлсин. Муҳитнинг қаршилигини ҳисобга олмасдан жисмнинг охирги тезлиги $v=O$ бўлса, жисм H баландликка кўтарилиши учун унинг v_0 бошланғич тезлиги қандай аниқланишини кўрайлик. Жисм ҳаракат қилаётган гравитацион майдонда эркин тушиш тезланиши доимий бўлсин.



293- расм.

Жисмни нуқта деб ҳисобласак, жисм H баландликка кўтарилганда тезлигининг горизонтал ташкил этувчисини v_1 деб белгиласак, жисм Ер марказидан $R+H$ масофада бўлганда, оғирлик кучи марказдан қочма инерция кучига тенг бўлганида жисм (293-расм) радиуси $R+H$ бўлган айлана бўйлаб ҳаракат қилади:

$$\frac{mv_1^2}{R+H} = mg. \qquad (112.1)$$

Бундан

$$v_1 = \sqrt{g(R+H)} \qquad (112.2)$$

$H=0$ бўлса, жисм ер сиртида бўлади:

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 6370\,\text{км}} = 7{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{с}}\cdot$$

Бу биринчи космик тезликдир. Бу (112.2) эркин тушиш тезланиши доимий бўлган ҳолда ўз кучини сақлайди.

Агар гравитацион майдон ўзгарувчан бўлса (ҳақиқатан ҳам, майдон ўзгарувчан бўлади), эркин тушиш тезланишининг ўртача қиймати жисм Ер марказидан $H+R$ масофада бўлганда қуйидагича аниқланади:

$$\bar{g} = \frac{1}{\text{H}}\int_R^{R+H} g(r)\,dr. \qquad (112.3)$$

Лекин

$$g = \gamma\,\frac{m}{r^2} \qquad (112.4)$$

ва $h = r$ бўлганда $g = g_0$

$$\gamma M = g_0 R^2 \qquad (112.5)$$

бўлганлиги учун

$$g(r) = \frac{g_0 R^2}{r^2}$$

эканлигини ҳисобга олганимизда (112.3 га) асосан

$$\bar{g} = \frac{g_0 R}{R + H} \qquad (112.6)$$

формула ҳосил бўлади. Натижада биринчи космик тезлик яна $R \gg H$ ҳолда

$$v_1 = \sqrt{\bar{g}(R + H)} = \sqrt{g_0 R} \qquad (112.7)$$

шаклда ифодаланади.

v_1 тезликни қуйидаги мулоҳаза асосида ҳам чиқариш мумкин. Жисм (нуқта) тезлигини v_0 дан v гача ўзгартирганда ва $v = 0$ деб олинганда (тезликнинг радиал ташкил этувчиси), кинетик энергиянинг ўзгариши бажарилган ишга тенг, яъни

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_r F\,dr \qquad (112.8)$$

шаклда ёзиш мумкин. F куч эса бутун олам тортишиш қонунига мувофиқ

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \qquad (112.9)$$

эканлигини ва $v = 0$ деб қабул қилсак,

$$-\frac{mv_0^2}{2} = \gamma mM \int_R^H r^{-2}\,dr \qquad (112.10)$$

ёки

$$v_0^2 = \gamma M \frac{RH}{R(R + \mathrm{H})} \qquad (112.11)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Ер сиртидаги жисм учун

$$mg = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

$$\gamma M = gR^2 \qquad (112.12)$$

ифодаларни ёзиш мумкин, демак (112.10) ифодадан

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}} \qquad (112.13)$$

ифода ҳосил бўлади. Бундан $H = R$ бўлганда $v_0 = v_1$, яъни (112.7) ҳосил бўлади.

Энди жисм Ер таъсиридан ажралган ҳолини кўрайлик. Бу ҳолда жисм Ер сиртидан ажралиб чексизликкача узоқлашади, яъни (112.10) нинг ўнг томонида интеграллаш чегараси R дан ∞ гача бўлади.

$$\frac{mv^2}{r} = \gamma mM \int_R^\infty r^{-2}\alpha r$$

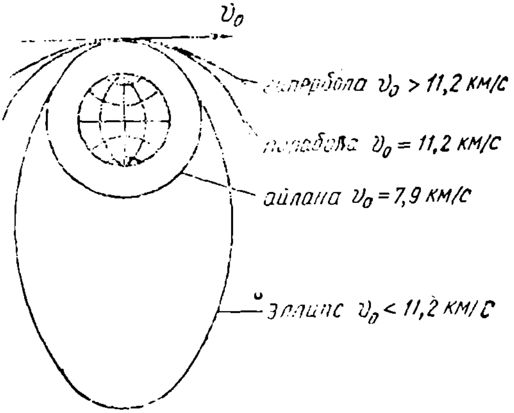
ёки

$$v_0^2 = 2gR^2 \left| -\frac{1}{2} \right|_R^\infty = 2gR.$$

Агар тезликни $v_0 = v_2$, яъни иккинчи космик тезлик деб ҳисобласак,

$$v_2 = \sqrt{2gR} = 11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$$

формула орқали аниқланади. Шунга ўхшаш йўл билан жисм Қуёш системасининг таъсиридан бутунлай ажралиш тезлигини, бошқача айтганда, учинчи космик тезликни аниқлаш мумкин. Фақат v_3 учинчи космик тезликни аниқлаш учун Қуёш системасининг массалар марказида тўпланган эквивалент массанинг ҳосил қилган



294- расм.

эркин тушиш тезланишини (Қуёш системаси ҳосил қилган гравитацион майдон учун g_0 катталикнинг қийматини назарда тутиш лозим) ҳисобга олиш лозим бўлади ва бу ҳолда $v_3 = 16\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$ бўлади.

Шундай қилиб, жисмнинг бошланғич тезлиги ўзгариши билан жисмнинг ҳаракат траекторияси ўзгаради (294- расм). Жисмнинг бошланғич тезлиги ортиши билан жисм ҳаракат траекториясининг эгрилик радиуси ҳам ортади. Тезлик $11{,}2\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$ дан ортмагунча Ер таъсиридан ажралмайди.

97- мисол (45.9). Ракета бир жинсли оғирлик кучи майдонида a доимий тезланиш билан ҳаракат қилмоқда. Атмосфера қаршилигини ҳисобга олмасдан туриб ва ракетадан оқиб чиқаётган газларнинг V_r эффектив тезлиги ўзгармайди деб ҳисоблаб, ракета қанча вақт ҳаракат қилганида унинг массаси икки марта камайишини аниқланг.

Ечиш. Ракета ҳаракатининг ўзгарувчан массали жисм ҳаракати деб ҳисоблаб, Мешчерский тенгламасидан фойдаланамиз:

$$m\frac{dv}{dt} = F_a + F_p, \tag{1}$$

масаланинг шартига кўра

$$F_a = -mg \tag{2}$$

$$F_p = V_r\frac{dm}{dt}$$

$$V_r = \text{const} \tag{3}$$

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{const} \tag{4}$$

эканлигини назарда тутсак, (1) қуйидаги

$$ma = -mg + V_r\frac{dm}{dt} \tag{5}$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгламанинг иккала томонини $\frac{dt}{m}$ га кўпайтирамиз

$$adt + gdt = -V_r\frac{dm}{m}$$

ёки

$$\int(a+g)dt = -V_r\int\frac{dm}{m}$$

$$(a+g)t = -V_r \ln m + C_1. \qquad (6)$$

Бошланғич шартни

$$t=0;\ m=m_0, \qquad (7)$$

яъни (7) ни (6) га қўйганимизда

$$C_1 = V_r \ln m_0 \qquad (8)$$

ҳосил бўлади. Энди C_1 ни (6) га қўйилади ва

$$t = \frac{-V_r \ln \frac{m}{m_0}}{a+g} = \frac{V_r \ln \frac{m_0}{m}}{a+g}, \qquad (9)$$

яъни ракета массаси икки марта камайиши учун сарф бўлган вақтни аниқлаймиз (бунда $\frac{m_0}{m} = 2$ эканлигини эслаш лозим).

98- мисол. (45,12). Бошланғич тезлиги нолга тенг бўлган ўзгарувчан массали жисм a ўзгармас тезланиш билан горизонтал йўналишда ҳаракат қилмоқда. Ёниб чиқиб кетаётган газни V_r эффектив тезлиги доимий.

Қаршилик кучларини ҳисобга олмай жисм массасини K марта камайтирганда жисм қанча йўл босиб ўтиши аниқлансин.

Ечиш. Мешчерский тенгламасига асосан

$$m_a = F_a + F_p. \qquad (1)$$

Масаланинг шартига мувофиқ қаршилик кучи ҳисобга олинмаслиги мумкинлигини, яъни $F_a = 0$ эканлигини ҳисобга оламиз. Маълумки, реактив куч

$$F_p = -V_ч \frac{dm}{dt} \qquad (2)$$

шаклда ифодаланади. Бу ҳолда (1) тенглама

$$m_a = -V_r \frac{dm}{dt} \qquad (3)$$

$$a = -V_r \cdot \frac{dm}{mdt} \qquad (4)$$

бўлиб қолади. Агар $a = dv/dt$ эканлигини эсласак, (4) дан

$$dv = -V_r \frac{dm}{m},$$

$$v = v_r \ln m + C_1. \qquad (5)$$

Бошланғич шартдан $t = 0$; $v = 0$; $m = m_0$; $s = 0$ (6) эканлиги ҳам маълумдир. Бу ҳолда (5) формуладан

$$C_1 = V_r \ln m_0 \tag{7}$$

ва

$$v = V_r \ln \frac{m_0}{m} = V_r \ln k \tag{8}$$

бўлади. Чунки $\frac{m_0}{m} = k$ эканлигини ҳисобга олдик.

Энди

$$v = \int_0^t a\,dt = at \tag{9}$$

$$s = \int_0^{-t} v dt = \frac{dt^2}{2} \tag{10}$$

тенгликдан фойдаланамиз. (9) ва (8) нинг ўнг томонларини тенглаштириб t ни аниқлаймиз ва ҳосил бўлган ифодани (10) га қўямиз. Натижада

$$s = \frac{V_r^2}{2a} (\ln k)^2$$

формула ҳосил бўлади.

99-мисол. (45.13). 98- масаланинг шартидан фойдаланиб, жисмга сирпаниш, ишқаланиш кучлари таъсир қилади деб ҳисоблаб ечинг, яъни s ни аниқланг.

Жавоб: $s = \frac{aV_r^2}{2(a + fg)} (\ln k)^2$,

бунда f — сирпаниш ишқаланиш коэффициенти.

Кўрсатма. Актив куч сирпаниш ишқаланиш кучига тенг деб қабул қилинади.

100-мисол. (45.18). Бошланғич массаси m_0 ва ёниб чиққан секундига масса исрофи β бўлган ракета бўшлиқда ва тортишиш майдони бўлмаган жойда қанча йўл юрганидан кейин ўз тезлигини нолдан V_r эффектив тезликкача етказади.

Ечиш. Мешчерский тенгламасига мувофиқ

$$m \frac{dv}{dt} = F_a + F_p. \tag{1}$$

Масаланинг шартидан

$$F_a = 0, \tag{2}$$

$$F_p = -V_r \frac{dm}{dt}, \tag{3}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta. \tag{4}$$

Демак,

$$m \frac{dv}{dt} = \beta V_r, \tag{5}$$

$$\int dv = \int \frac{\beta V_r}{m} dt. \tag{6}$$

Энди (5) интеграллашнинг учун (4) дан фойдаланамиз. Бошланғич шартлардан

$$t = 0;\ m = m_0;\ v = v_0 = 0;\ s = s_0 = 0 \tag{7}$$

фойдаланиб, C_1 ни аниқлаймиз. $C_1 = m_0$ бўлганлиги учун

$$m = m_0 - \beta t \tag{8}$$

ҳосил бўлади. (8) ни (5) га қўйиб,

$$v = \beta V_r \int \frac{dt}{m_0 - \beta t} = -V_r \int \frac{d(m_0 - \beta t)}{m_0 - \beta t}$$

ёки

$$v = -V_r \ln(m_0 - \beta t) + C_2, \tag{9}$$

яъни ракета тезлигини ҳисоблаш формуласини аниқлаймиз. Бунда C_2 ни (7) шартдан фойдаланиб аниқлаймиз:

$$C_2 = V_r \ln m_0. \tag{10}$$

Энди (10) ни (9) га қўямиз:

$$v = V_r \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t}. \tag{11}$$

Масаланинг шартига мувофиқ ракета тезлиги ҳаракат охирида газларнинг отилиш тезлигига тенг, яъни $v = V_r$ эканлигини ҳисобга олганимизда (11) тенглама

$$\ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t} = 1 = \ln e \tag{12}$$

бўлиши аниқ. Бу тенгликдан

$$\frac{m_0}{m_0 - \beta t} = e,$$

бундан

$$t = \frac{m_0}{\beta} \cdot \frac{e-1}{e} \tag{13}$$

ҳосил бўлади. (13) ракета тезлиги 0 дан V_r бўлгунча ўтган вақтни топиш формуласидир.

Энди t вақтда ракета юрган йўлни аниқлайлик. Бунинг учун ушбу

$$s = \int v\,dt \tag{14}$$

формулага (11) ни келтириб қўямиз:

$$s = \int V_r \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t}\,dt = -V_r \int \ln\left(1 - \frac{\beta}{m_0}t\right)dt. \tag{15}$$

Бунда

$$\int \ln\left(1 - \frac{\beta}{m_0}t\right)dt = -\frac{m_0}{\beta}\int \ln\left(1 - \frac{\beta}{m_0}t\right) d\left(1 - \frac{\beta}{m_0}t\right) =$$

$$= \frac{m_0}{\beta}\left[\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)\ln\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - \left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)\right] + C_3 \tag{16}$$

эканлигини ҳисобга олганимизда s учун

$$s = \frac{m_0V_r}{\beta}\left[\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)\ln\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - \left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)\right] + C_3 \tag{17}$$

тенглама ҳосил бўлади. Агар бунда (7) қўлланилса,

$$C_3 = \frac{m_0V_r}{\beta}$$

тенглик ҳосил бўлади ва демак,

$$s = \frac{m_0V_r}{\beta}\Bigl(\Bigl[1 - \frac{\beta t}{m_0}\Bigr)\ln\Bigl(1 - \frac{\beta t}{m_0}\Bigr) - \Bigl(1 - \frac{\beta t}{m_0}\Bigr) + 1\Bigr] \tag{19}$$

формулани ҳосил қиламиз. Бу формулада $\left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right)$ ифоданинг шаклини (13) дан фойдаланиб ўзгартирамиз:

$$1 - \frac{\beta}{m_0}t = 1 - \frac{\beta}{m_0} \cdot \frac{m_0}{\beta} \cdot \frac{e-1}{e} = \frac{1}{e}. \tag{20}$$

Ниҳоят, (20) ҳисобга олинса, (19) қуйидаги шаклда ёзилади:

$$s = \frac{m_0V_r}{\beta} \cdot \frac{e-2}{e}. \tag{21}$$

(21) тенглик ракета юрган йўлни ҳисоблаш формуласидир.

101-мисол (45.1). Қаршилиги тезликка тўғри пропорционал бўлган куч таъсирида тебранадиган маятник ҳаракатининг дифференциал тенгламаси тузилсин. Маятникнинг массаси маятникдан зарралар нолга тенг бўлган нисбий тезлик билан ажралиши натижасида $m = m(t)$ қонун билан ўзгаради. Маятник узунлиги l. Маятникка яна бурчакли тезликка тўғри пропорционал бўлган $R = -\beta\dot{\varphi}$ қаршилик кучи ҳам таъсир қилади.

Жавоб: $\ddot{\varphi} + \frac{\beta}{m(t)\cdot e} \cdot \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0.$

Кўрсатма: қаршилик кучи $-mg\sin\varphi - \beta\dot{\varphi}$ кўринишида бўлиши ва реактив куч нолга тенглиги ҳисобга олинсин.

XVIII БОБ. ЗАРБА НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСЛАРИ

113-§. Зарба ҳодисаси. Моддий нуқтага ва механик системага зарба кучларининг таъсири

Одатдаги кучлар таъсирида жисм нуқталари тезлигининг модули ва йўналиши узлуксиз ўзгариб туради. Бироқ шундай ҳоллар ҳам учрайдики, жисм нуқталарининг тезлиги ёки жисмнинг ҳаракат миқдори арзимаган чексиз кичик вақт оралиғида чекли ўзгаради.

Чексиз кичик вақт оралиғида жисм нуқталари тезлигининг чекли миқдорга ўзгариш ҳодисаси зарба ёки урилиш дейилади.

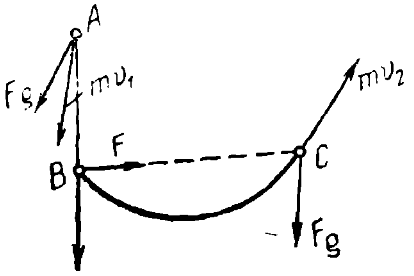
Тўпнинг деворга урилиши, бильярд шарига кийнинг урилиши, болғанинг сандонга урилиши, отилган тошнинг бошқа жисмга бориб урилиши ва бошқалар зарба ҳодисасига мисол бўлади.

Зарба вақтида жисм тезлигининг кескин ўзгаришига сабаб зарба кучи модулининг анча катталигидир. Шунинг учун таъсир қилиш вақти жуда кичик бўлишига қарамасдан, зарба импульси анча катта бўлади.

Агар жисмга dt вақтда F зарба кучи таъсир қилса, S зарба импульси қуйидагича аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} & S = \int F\,dt, \\ & t \to 0, \\ & F \to \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (113.1)$$

(113.1) дан зарба импульси жуда кичик вақт оралиғида ($\Delta t \to 0$) жисмга жуда катта куч таъсир қилганида ($F \to \infty$) ҳосил бўладиган куч импульсига зарба импульси деб айтилади, деган хулоса чиқади.



295-расм.

Материал M нуқта F_g куч таъсирида A ҳолатдан B ҳолатга ҳаракат қилиб ўтаётган бўлсин (295-расмга қаранг). Агар нуқтанинг B вазиятидан бошлаб F зарба кучи таъсир қилса, жисм ўзининг тезлигини v_1 дан кескин равишда v_2 гача ўзгартириб, B нуқтадан C нуқтага ўтади ва зарба кучининг таъсири тўхтагандан кейин, нуқта яна F_g кучи таъсирида ҳаракатини давом эттиради.

Нуқтанинг F_g кучи таъсирида оладиган импульси S_g, F зарба кучи таъсирида оладиган импульси S бўлсин. S_g ва S импульслар йиғиндисининг таъсирида нуқта ҳаракат миқдорини mv_1 дан mv_2 гача ўзгартиради. Ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан

$$\overrightarrow{mv_2} - m\vec{v}_1 = \vec{S} + \vec{S}_g. \tag{113.2}$$

Зарба ҳодисаси вақтида $S \gg S_g$ эканлигини ҳисобга олганимизда, (113.2) нинг ўнг томонидаги S_g катталикни иккинчи тартибли кичик миқдор деб ташлаб юбориш мумкин бўлади. Бу ҳолда (113.2) тенгламадан нуқта тезлигининг ўзгариши

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \frac{\vec{S}}{m} \tag{113.3}$$

кўринишдаги формуладан аниқланиши кўриниб турибди, яъни нуқта тезлигининг ўзгариши зарба ҳодисаси вақтида фақат зарба импульси орқали аниқланади. Шундай қилиб, зарба ҳодисаси вақтида:

1) фақат зарба кучи таъсирини ҳисобга олсак етарлидир;

2) нуқтага зарба вақтигача F таъсир кучини ҳисобга олмасак ҳам бўлади;

3) нуқта тезлигининг чекли ўзгариши зарба вақтида (113.3) тенгламадан фойдаланиб аниқланади.

Нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема механик система учун (қаттиқ жисм учун) қуйидагича аниқланади.

Механик система N нуқтадан тузилган бўлсин. Шу системанинг ν- нуқтасига таъсир қиладиган ташқи ва ички зарба кучларини $F_{\nu}^{(e)}$ ва $F_{\nu}^{(i)}$ деб белгиласак, (113.2) тенгламага мувофиқ, ν нуқта учун ҳаракат миқдорининг ўзгариши қуйидаги

$$m_{\nu}\vec{v}_{\nu} + m_{\nu}\vec{u}_{\nu} = \vec{S}_{\nu}^{(e)} + \vec{S}_{\nu}^{(i)} \qquad (113.4)$$

кўринишда ёзилади. Бунда ν нуқтанинг тезлиги урилгунча v_{ν}, урилгандан кейин u_{ν} билан белгиланган. (113.4) тенгламани системанинг ҳамма нуқталари учун ёзиб, ҳосил бўлган тенгламалар қўшилса,

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu}\vec{v}_{\nu} - \sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu}u_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{\nu}^{(e)} + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{\nu}^{(i)} \qquad (113.5)$$

тенглик ҳосил бўлади. Маълумки, (101- §) бу тенгликда

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu}\vec{v}_{\nu} = m\vec{v}_{c} \qquad (113.6)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu}\vec{u}_{\nu} = m\vec{u}_{c}. \qquad (113.7)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{\nu}^{(i)} = \vec{S}^{(i)} = 0 \qquad (113.8)$$

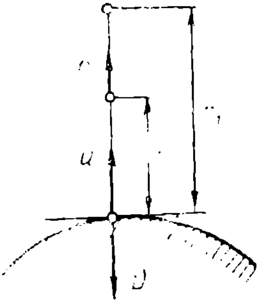
$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{S}_{\nu}^{(e)} = \vec{S}^{(e)} \qquad (113.9)$$

кўринишда ёзилиши мумкин. Бу белгилашларни ҳисобга олганимизда (113.5):

$$m\vec{v}_{c} - m\vec{u}_{c} = \vec{S}^{(e)} \qquad (113.1\ 0$$

шаклни олади. (113.10) зарба ҳодисаси вақтида система ҳаракат миқдорининг ўзгариши ҳақидаги теорема дейилади. Теоремадан кўринаяптики, система массалар марказининг ҳаракат миқдори ўзгариши шу системага таъсир қилаётган фақатгина зарба кучларининг импульсларининг йиғиндисига тенг бўлиб, ички зарба кучларининг импульслари системанинг массалар маркази ҳаракат миқдорининг ўзгаришига таъсир қилмайди. Агар $\vec{v}^{(e)} = 0$ бўлса, $\vec{v}_{e} = \vec{u}_{c}$ эканлиги равшандир. Бундан ички зарба кучлари системанинг массалар маркази тезлигини ўзгартирмайди деган хулоса чиқади.

114-§. Жисмнинг қўзғалмас сиртга зарбаси. Тикланиш коэффициенти



296- расм.

Қўзғалмас D сиртга массаси m бўлган M шар h_1 баландликдан v тезликда тушиб урилсин (296-расм). M шарнинг ҳаракати сиртга ўтказилган n нормалга параллел бўлсин. Шар сиртнинг A нуқтасига зарба остида v тезлик билан урилганда сирт ва шарнинг урилиш жойлари деформацияланади. Деформация вақтида иккала жисмга ҳам эластиклик кучлари таъсир қилади. Эластиклик кучларининг таъсири остида шар ва сирт ўзининг аввалги ҳолатини қисман тиклайди ҳамда шар u тезлик билан тескари томонга ҳаракат қилиб, h_2 баландликка кўтарилади.

Жисм (шар) нинг зарбадан кейинги тезлиги u ёки h_2 баландлиги урилаётган жисмларнинг табиатига қараб ўзгаради. Бу катталиклар (u, h_2) материаллар учун ҳар хил қийматга эга бўлиб, жисм ва сирт табиатига боғлиқ. Бу боғланишни ифодалаш учун тикланиш коэффициенти деган тушунча киритилади. Жисмнинг зарбадан кейинги u тезлигининг зарба тезлиги v га бўлган нисбати тикланиш коэффициенти дейилади:

$$K = \frac{u}{v}. \tag{114.1}$$

Бунда K тикланиш коэффициентидир. Бу коэффициент 0 дан 1 гача ўзгаради, яъни $0 \leqslant K \leqslant 1$. Агар $K=0$ бўлса, бундай жисмларга абсолют пластик, $K=1$ бўлса, абсолют эластик жисмлар деб айтилади. Абсолют пластик жисмларда зарба энергияси тўлиқ ички энергияга айланади, абсолют эластик жисмларда эса зарба энергияси зарба билан урган жисмга тўлиқ қайтарилади. Амалда абсолют пластик ёки абсолют эластик жисмлар йўқ. Мавжуд жисмлар учун тикланиш коэффициенти жисмларнинг табиатига, яъни жисм ва сирт ҳолатига қараб ўзгаради. Масалан, $v = 3\frac{\text{м}}{\text{с}}$ бўлганда K нинг ўртача қиймати шиша учун 0,94; фил суяги учун 0,9; пўлат учун 0,55; ёғоч учун 0,5. Тикланиш коэффициентини назарий йўл билан ҳисоблаб топиш жуда қийин, шунинг учун бу коэффициент амалда тажриба асосида аниқланади. Бунинг учун K коэффициентни ифодалайдиган (114.1) формуланинг шаклини ўзгартирайлик.

Жисм h_1 баландликдан тушиш жараёнида v тезликка эришади ва u тезлик билан h_2 баландликка кўтарилади. Кинетик энергиянинг ўзгариши ҳақидаги теоремага асосан

$$\frac{mv^2}{2} = mg{\cdot}h_1; \tag{114.2}$$

$$\frac{mu^2}{2} = mgh_2 \tag{114.3}$$

тенглнклар ёзилади. Бу тенгламалардан

$$\frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \tag{114.4}$$

келиб чиқишини эътиборга олганимизда тикланиш коэффициенти учун

$$K = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \tag{114.5}$$

формула ҳосил бўлади. (114.5) дан кўринадики, K ни аниқлаш учун h_1 ва h_2 катталик маълум бўлиши етарлидир. Бу формулани яна зарба импульслари орқали ҳам аниқланади.

Зарба жараёни икки фазага ажратилади.

1) Биринчи фаза τ_1 вақт давом этади ва бу вақтда иккала жисм ҳам деформацияланади ва шарнинг кинетик энергияси потенциал энергияга айланади.

2) Иккинчи фаза τ_2 вақт давом этади ва бу вақтда иккала жисм ҳам эластик кучлар таъсирида (потенциал энергияси ҳисобида) ўзининг аввалги шаклини қисман тиклайди ва шар u текликка эга бўлади.

Биринчи фаза охиридаги зарба импульси

$$S_1 = mv - 0 = mv, \tag{114.6}$$

иккинчи зарба охирида зарба импульси

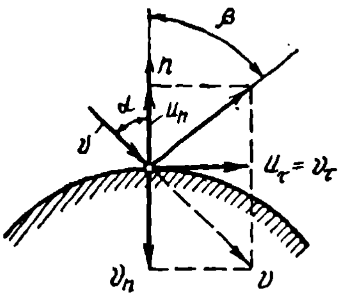
$$S_{II} = mu - 0 = mu. \tag{114.7}$$

Бу охирги икки тенглама нисбати K га тенг:

$$K = \frac{S_{II}}{S_I}, \text{ чунки } \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{u}{v}, \tag{114.8}$$

яъни тикланиш коэффициенти иккинчи фазадаги зарба импульсининг биринчи фаза импульсига бўлган ннсбати ёки зарба реакциялари импульслари нисбати орқали аниқланади, деган хулоса келиб чиқади.

Энди шарнинг қўзғалмас текисликка α бурчак остида келиб урилишини кўрайлик (297-расм). Зарбагача v тезлик ва зарбадан кейинги u тезликни нормал v_n, u_n ва уринма v_τ, u_τ ташкил этувчиларга ажратайлик.



297-расм.

Расмдан кўринадики $u_\tau = v_\tau$ ва тикланиш коэффициенти (114.1) га асосан

$$K = \frac{u_n}{v_n} \tag{114.9}$$

формуладан аниқланади. Расмдан кўринадики:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_\tau}{v_n}, \tag{114.10}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_\tau}{v_n} : \frac{u_\tau}{u_n}. \tag{114.11}$$

Бу тенгламалардан

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u_n}{v_n}\operatorname{tg}\beta. \tag{114.12}$$

эканлиги равшандир ва

$$v_n = v\cos\alpha; \qquad v_\tau = v\sin\alpha.$$

Расм ва (114.9) ҳисобга олинганда

$$u = \sqrt{u_n^2 + v_\tau^2} = \sqrt{K^2 v_n^2 + v_\tau^2} =$$

$$= \sqrt{K^2 v^2 \cos^2\alpha + v^2 \sin^2\alpha} = v\sqrt{\sin^2\alpha + K^2\cos^2\alpha} \tag{114.13}$$

ифода ҳосил бўлади.

(114.13) дан кўринадики, u тезлик K га боғлиқ, қайтиш бурчаги β, (114.11) ва (114.12) га асосан ҳам, K ва α га боғлиқдир. Агар (114.9) дан v_n ни аниқлаб, (114.12) га қўйсак,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{K}\operatorname{tg}\alpha \tag{114.14}$$

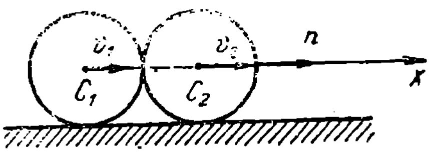
тенглама ҳосил бўлади. Маълумки, ҳамма вақт $K < 1$, шунинг учун

$$\mathrm{tg}\beta > \mathrm{tg}\alpha \text{ ва } \beta > \alpha$$

бўлиб қолади. Демак, қайтиш бурчаги тушиш бурчагидан катта бўлади. Абсолют эластик жисмлар учун $K = 1$ ва $\alpha = \beta$; яъни тушиш бурчаги қайтиш бурчагига тенг.

115-§. Икки жисмнинг марказий урилиши

Зарба (урилиш) бошида иккита жисм марказининг тезликлари шу жисмлар тегиб турган нуқтадан ўтадиган ва иккала жисм учун ҳам умумий бўлган, нормал бўйлаб йўналган бўлса, бундай урилиш марказий урилиш дейилади (298-расм). Агар биринчи ва иккинчи жисмларнинг тезликлари урилгунча v_1 ва v_2 $(v_1 > v_2)$ бўлса ва бу тезликлар C_1, C_2 нуқталардан ўтиб, X ўқида ётган n бўйлаб йўналган бўлса, бу урилиш марказий урилишдир.



298- расм.

Жисмлар урилишнинг биринчи фазасида деформацияланиб потенциал энергияга эга бўлади. Биринчи фаза τ_1 вақт давом этади ва бу вақт охирида ҳар иккала жисм тезлиги u бўлиб қолади.

Биринчи фазада биринчи жисм олган куч импульси

$$S_{\mathrm{I}}^{1\Phi} = m_1(v_1 - u), \qquad (115.1)$$

иккинчи жисм учун эса $(u > v_2)$

$$S_{\mathrm{II}}^{2\Phi} = m_2(u - v_2) \qquad (115.2)$$

шаклда ёзилади.

Урилишнинг иккинчи фазаси τ_2 вақт давом этади. Бу вақт оралиғида жисмлар потенциал энергиялари ҳисобида аввалги ҳолатини қисман тиклайди ва фаза охирида u_1 ва u_2 тезликка эга бўлади. Иккинчи фаза охиридаги биринчи ва иккинчи жисмлар олган импульслар қуйидагича аниқланади:

$$S_{\mathrm{I}}^{1\Phi} = -m_1(u_1 - u), \qquad (115.3)$$

$$S_{\mathrm{II}}^{2\Phi} = m_2(u_2 - u). \qquad (115.4)$$

Биринчи ва иккинчи фазадаги биринчи ва иккинчи жисмнинг тўлиқ импульслари

$$S_{\mathrm{I}} = S_{\mathrm{I}}^{1\Phi} + S_{\mathrm{I}}^{2\Phi} = m_1 (v_1 - u - u_1 + u) = $$

$$= -m_1 (u - v_1), \qquad (115.5)$$

$$S_{\mathrm{II}} = S_{\mathrm{II}}^{1\Phi} + S_{\mathrm{II}}^{2\Phi} = m_2 (u - v_2 + u_2 - u) =$$

$$= m_2 (u_2 - v_2). \qquad (115.6)$$

Биринчи фаза охирида иккала жисмнинг ҳаракат миқдори йиғиндиси $(m_1 + m_2)\, u$, урилгунча жисмлар ҳаракат миқдорининг йиғиндиси $(m_1 v_1 + m_2 v_2)$ га тенгдир.

$$(m_1 + m_2)\, u = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (115.7)$$

(115.7) билан урилишнинг биринчи фазаси охирида ҳар иккала жисмнинг умумий тезлиги ҳисобланади.

Худди шунингдек, айтиш мумкинки, жисмларнинг урилгунча ва урилгандан кейинги ҳаракат миқдорининг йиғиндиси доимий қолади ва ўзаро тенг бўлади:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \qquad (115.8)$$

Энди (114.8) ва (115.1)—(115.4) эътиборга олинса, қуйидагилар ёзилади:

$$K = \frac{S_{\mathrm{I}}^{2\Phi}}{S_{\mathrm{I}}^{1\Phi}} = \frac{u_1 - u}{u - v_1}\,, \qquad (115.9)$$

$$K = \frac{S_{\mathrm{II}}^{2\Phi}}{S_{\mathrm{II}}^{1\Phi}} = \frac{u_2 - u}{u - v_2} \qquad (115.10)$$

ва

$$u_1 = (K + 1)\, u - K v_1, \qquad (115.11)$$

$$u_2 = (K + 1)\, u - K v_2,. \qquad (115.12)$$

Энди (115.7) дан u ни келтириб (115.11) ва (115.12) га қўйганимизда

$$u_1 = v_1 - (1 + K)\, \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \qquad (115.13)$$

$$u_2 = v_2 + (1 + K)\, \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) \qquad (115.14)$$

ҳосил қилинади.

Олдинги (115.11) ва (115.12) нинг чап ва ўнг томонларини айириб, K ни аниқлаймиз:

$$K = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \qquad (115.15)$$

(115.5) дан жисмларнинг урилгандан кейинги тезликлар айирмасининг урилгунча тезликлар айирмасига бўлган нисбати тикланиш коэффициентига тенг деган хулоса келиб чиқади.

Энди (115.15) ва (115.14) дан фойдаланиб, ҳар бир жисмнинг импульсини аниқлаймиз.

$$S_{\text{I}} = S_{\text{I}}^{1\Phi} + S_{\text{I}}^{2\Phi} = m_1 (v_1 - u_1) = m_1 [v_1 - u_1 +$$

$$+ (1 + K) \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)] =$$

$$= (1 + K) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \qquad (115.16)$$

$$S_{\text{II}} = S_{\text{II}}^{1\Phi} + S_{\text{II}}^{2\Phi} = m_2 [v_2 + (1 + K) \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) -$$

$$- v_2] = (1 + K) \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} (v_1 - v_2). \qquad (115.17)$$

(115.17) эластик урилишда жисмларнинг ҳар иккала урилиш фазаси $\tau = \tau_1 + \tau_2$ вақтда импульсини ҳисоблаш учун қўлланилади. Бу ерда абсолют эластик урилиш учун $K = 1$

$$S_э = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \qquad (115.18)$$

Абсолют пластик урилиш учун $K = 0$

$$S_п = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \qquad (115.19)$$

ҳосил бўлади. Кўринаяптики, абсолют эластик урилишда зарба импульси абсолют пластикдаги зарба импульсидан икки марта катта бўлади. Зарба импульсининг икки марта кўпайиши абсолют эластик урилиш вақтида биринчи фазадаги деформация импульсига худди шундай миқдордаги тикланиш импульси қўшади. Абсолют пластик урилиш, яъни $K = 0$ бўлган ҳолда иккала жисм ҳам u тезлик билан, фақат биринчи фаза охиридаги u тезлик билан ҳаракат қилишини эсда тутиш лозим.

116-§. Урилиш вақтида кинетик энергиянинг йўқотилиши. Карно теоремаси

Жисмлар бир-бирига урилганда бу жисмлар деформацияланади. Деформация натижасида кинетик энергиянинг бир қисми потенциал энергияга ва бир қисми бошқа тур энергияга, иссиқлик энергиясига ёки нурланиш энергиясига айланади. Бу кинетик энергиянинг бошқа тур энергияга айланиши кинетик энергиянинг йўқотилишига олиб келади. Шу йўқотилган кинетик энергияни аниқлайлик.

Массалари m_1, m_2; урилгунча тезликлари v_1, v_2; урилгандан кейинги тезликлари u_1, u_2 бўлган иккига жисм бир-бири билан эластик урилсин.

Урилгунча жисмларнинг тўлиқ кинетик энергияси T_0 ва урилгандан кейинги тўлиқ кинетик энергия T қуйидаги тенгликлардан аниқланади:

$$T_0 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}; \tag{116.1}$$

$$T = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{116.2}$$

Жисмлар урилгандан кейин кинетик энергиянинг йўқотилган қисми

$$T_0 - T = \frac{m_1}{2}(v_1^2 - u_1^2) - \frac{m_2}{2}(v_2^2 - u_2^2). \tag{116.3}$$

Бу тенгламадаги қавс ичидаги ифодалар учун

$$\left.\begin{aligned} v_1^2 - u_1^2 &= (v_1 + u_1)(v_1 - u_1) \\ v_2^2 - u_2^2 &= (v_2 + u_2)(v_2 - u_2) \end{aligned}\right\} \tag{116.4}$$

кўринишдаги тенгламани ёзиш мумкин. Энди $v_1 - u_1$ ва $v_2 - u_2$ ифодаларни (115.11) ва (115.12) дан фойдаланиб, қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned} v_1 - u_1 &= v_1 - (K + 1)u + Kv_1 = (1 + K)(v_1 - v) \\ v_2 - u_2 &= v_2 - (K + 1)u + Kv_2 = (1 + K)(v_2 - u) \end{aligned}\right\} \tag{116.5}$$

Бу тенгламаларни (116.4) ни ҳисобга олиб (116.3) га қўямиз.

$$T_0 - T = \frac{1}{2}[m_1(v_1 + u_1)(1 + K)(v_1 - u) - \\ - m_2(v_2 + u_2)(1 + K)(v_2 - u)]. \tag{116.6}$$

Агар (115.1) ва (115.2) тенгламаларни эътиборга олсак,

$$T_0 - T = \frac{1}{2} S_{\text{I}}^{1\Phi} (1 + K)(v_1 - u_1) - \frac{1}{2} S_{\text{II}}^{2\Phi} (1 + K) \times$$
$$\times (v_2 + u_2) \qquad (116.7)$$

тенглик ҳосил бўлади.

Агар (116.5) ни ҳисобга олсак,

$$T_0 - T = \frac{1 - K}{1 + K} \left[\frac{m_1 (v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - u_2)^2}{2} \right] \qquad (116.8)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламада қавс ичидаги ифодани T^* билан белгилаймиз:

$$T^* = \frac{m_1 (v_1 - u_1)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2 - u_2)^2}{2}. \qquad (116.9)$$

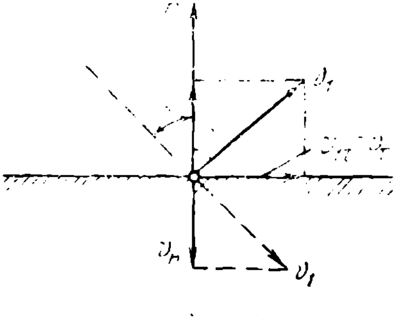
Бунда T^* биринчи ва иккинчи жисмлар тезликларини v_1 ва v_2 дан u_1 ва u_2 га камайтирганларига мос келадиган кинетик энергиядир. Демак, бу ҳолда

$$T_0 - T = \frac{1 - K}{1 + K} T^* \qquad (116.10)$$

тенглама ҳосил бўлади. (116.19) дан абсолют пластик жисмлар урилганда $K = 0$ ва $u_1 = u_2 = u$ эканлигига эътибор берилса,

$$T_0 - T = T^* = \frac{1}{2} m_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - u)^2 \qquad (116.11)$$

ҳосил бўлади. (116.20) дан кинетик энергиянинг йўқотилиши, абсолют пластик жисмлар учун тезликлар камайишига мос келадиган энергияга тенг деган хулосага келамиз. Бу хулоса ёки Карно теоремаси дейилади.



299- расм.

Абсолют эластик жисмлар урилганда $K = 1$ ва

$$T_0 = T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \qquad (116.12)$$

ифодани ҳосил қиламиз, яъни бу ҳолда кинетик энергия урилгунча ва урилгандан кейин бир хил қолади. (Н. Карно 1753 — 1823 йилларда яшаган буюк француз олими.)

102-мисол (44.13). Горизонтал қўзғалмас сирт устида шарча v тезлик билан қияланиб тушади ва $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ тезлик билан қайтади (299-расм).

Урилиш вақтида тикланиш коэффициенти $K = \frac{\sqrt{3}}{3}$ бўлганда α тушиш ва β қайтиш бурчаги аниқлансин.

Ечиш. Масалани ечиш учун v ва v_1 тезликни $v_{1\tau}$, v_τ уринма ва v_{1n}, v_n нормал ташкил этувчи (компонент) ларга ажратамиз.

Биз 114-§ дан биламизки,

$$v_{1\tau} = v_\tau; \quad v_{1\tau} = v_1 \sin\beta; \quad v_\tau = v \sin\alpha$$

ёки

$$v_1 \sin\beta = v \sin\alpha \tag{1}$$

формула (114.14) га мувофиқ

$$\operatorname{tg}\alpha = K \operatorname{tg}\beta \tag{2}$$

ва тригонометриядан маълумки,

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{3}$$

Энди (1) тенгламанинг иккала томонини квадратга кўтарамиз ва ҳосил бўлган тенгламага (3) ни қўямиз:

$$\frac{v_1^2 \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{v^2 \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{4}$$

янги ўзгарувчи

$$x^2 = \operatorname{tg}^2\beta \tag{5}$$

ва (2) тенгламани ҳисобга олганимизда, (4) тенглик қуйидаги шаклда ифодаланади:

$$\frac{v_1^2}{1 + x^2} = \frac{K^2 v^2}{1 + K^2 x^2}. \tag{6}$$

(6) дан x^2 аниқланади:

$$x^2 = \frac{v_1^2 - K^2 v^2}{K^2 (v^2 - v_1^2)}. \tag{7}$$

Масаланинг шартига кўра $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} v$; $K = \frac{\sqrt{3}}{3}$ эканлигини эътиборга олганимизда (7) дан

$$x^2 = 1: \quad x = \pm 1$$

ёки $\operatorname{tg}\beta = 1$ ва $\beta = \frac{\pi}{4} = 45°$; $\alpha = 30°$.

103-мисол. (44.7). Иккита бир хил эластик A ва B шарлар бир-бири томон ҳаракат қилмоқда. A ва B шарлар урилгунча тезликларининг нисбати қандай бўлганда А шар урилгандан кейин тўхтаб қолади? Урилишдаги тикланиш коэффициенти K.

Жавоб: $\frac{v_A}{v_B} = \frac{1+k}{1 \quad k}$.

104-мисол. (44.4). Шар горизонтал плита устига h баландликдан эркин тушади, кейин сакраб маълум баландликка кўтарилади ва яна плита сиртига тушади. Кейин яна кўтарилади ва пастга тушади ва ҳоказо. Тўхтагунча ана шундай ҳаракат давом эттиради. Урилиш вақтида тикланиш коэффициенти K маълум деб ҳисоблаб, шар тўхтагунча қанча масофа юриши аниқлансин.

Жавоб: $S = \frac{1+K^2}{1-K^2}$.

Кўрсатма: шарнинг юрган йўли камаювчи геометрик прогрессия тарзида тасвирланиши мумкинлиги ва бу прогрессиянинг биринчи ҳади $(1+K^2)h$ эканлигини эсда тутиш лозим.

XIX БОБ. УМУМЛАШГАН КООРДИНАТАЛАР ВА УМУМЛАШГАН КУЧ. МУМКИН БУЛГАН КУЧИШ ПРИНЦИПИ

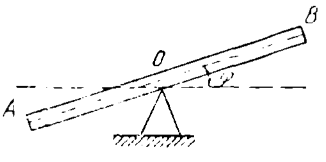
117-§. Умумлашган координаталар

Эркин бўлмаган нуқта ёки жисм ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини ёзганимизда ҳар бир нуқтанинг фазодаги вазияти камида учта координата билан аниқланишини ва нуқталар бир-бири билан боғланишлар орқали боғлиқлигини ҳисобга олганимизда, масала, яъни нуқта ёки механик система ҳаракати динамикаси қанчалик мураккаблигини тасаввур қилиш мумкин. Агар механик система N та нуқтадан тузилган бўлса, бу система учун $3N$ та ҳаракатни ифодаловчи дифференциал тенглама тузиб ва яна боғланишларни ифодаловчи тенгламалар тузиб, ҳосил бўлган тенгламалар системасини биргаликда ечиш лозим бўлади. Тенгламалар системасининг ҳар бири иккинчи тартибли дифференциал тенглама эканлигини эътиборга олсак, тенгламалар системасини ечиш қанчалик қийин эканлигини тасаввур этиш мумкин. Бу қийинчиликларни умумлашган координаталардан фойдаланганда анча камайтириш мумкинлигини Лагранж таклиф этди.

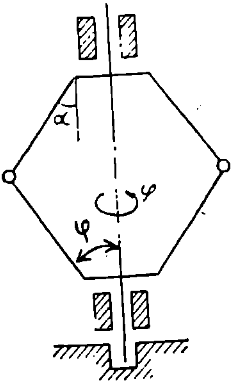
Бир-бирига боғлиқ бўлмаган координаталар умумлашган координаталар дейилади. Системанинг фазодаги вазиятини $q_1, q_2, \ldots, q_5$ умумлашган координаталар ёрдамида аниқланади. Бу координаталарни қисқача қилиб q_σ, $\sigma = 1, 2 \ldots S$ деб белгиланади. q_σ координаталар эркин, бир-бирига боғлиқ бўлмаган бўлиб, координаталар сони S га тенг. Шунинг учун голономли механик системанинг эркинлик даражаси ҳам S га тенг, яъни эркин координаталар сонига тенг бўлади.

Механик система нуқталарининг фазодаги вазиятини аниқлайдиган ва бир-бирига боғлиқ бўлмаган катталиклар умумлашган координаталар дейилади.

Умумлашган координаталар орқали ифодаланадиган система ҳаракатининг дифференциал тенгламалар сони S та бўлади. Бу ҳолда боғланишларни ифодалайдиган тенгламалар ҳисобга олинмайди. Бу боғланишлар сони умумий тенгламалар сони $3N$ дан эркин координаталар сони S нинг айирмасига, яъни $3N—S$ га тенг. Демак, система ҳаракатини ифодаловчи тенгламалар сони $3N—S$ тага камаяди. Агар боғланишлар сонини k деб белгиласак, $S=3N—k$ тенгликни ёзиш мумкин.



300- расм.



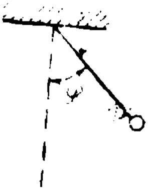
301- расм.

Умумлашган координаталар орқали ифодаланадиган система ҳаракатининг дифференциал тенгламалари сони сезиларли даражада кам бўлганлиги, системадаги динамик масалаларни ечишни соддалаштиради ва енгиллаштиради.

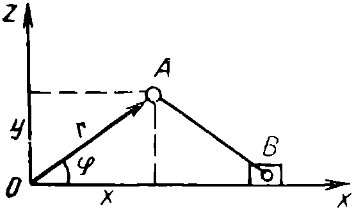
Агар AB ричаг O ўқ атрофида айланадиган бўлса, бу AB ричагнинг исталган нуқтасининг вазиятини φ бурчак орқали аниқлаш мумкин (300- расм). Бу ерда φ умумлашган координата бўлади ва $q = \varphi$ деб айтиш мумкин. Бу ҳолда AB ричагнинг эркинлик даражаси $i = 1$ бўлади.

Регуляторнинг исталган нуқтасининг вазиятини (301-расм) φ ва α бурчак орқали аниқлаш мумкин. Бу ерда $q_1 = \varphi$; $q_2 = \alpha$ ва регуляторнинг эркинлик даражаси $i = 2$.

Математик маятникда (302- расм) $q_1 = \varphi$ ва $i = 1$. Қўзғалмас ўқ атрофида айланаётган қаттиқ жисм учун ҳам $q_1 = \varphi$; $i = 1$. Кривошип шатун механизми учун ҳам (303-расм) φ бурчак орқали механизмнинг исталган нуқтасининг вазиятини аниқлаш мумкин. Шунинг учун бу ҳолда ҳам



302- расм.



303- расм.

$q_1 = \varphi$; $i = 1$, Фазода эркин ҳаракат қилаётган нуқта вазиятини x, y, z координаталар орқали аниқлаш мумкин. Бу ҳолда $q_1 = x$; $q_2 = y$; $q_3 = z$ ва $i = 3$. Сферик ҳаракатдаги жисм учун ҳам $q_1 = \varphi$; $g_2 = \psi$; $q_3 = 0$, $i = 3$. Эркин ҳаракатдаги жисм учун

$$i = 6 \text{ ва } x = q_1;\ y = q_2 z_2 = q_3;\ \varphi = g_4;\ \psi = q_5;\ \theta = q_6.$$

Келтирилган мисоллардан кўринадики, умумлашган координаталар орқали декарт координаталарини ва аксинча, декарт координаталаридан фойдаланиб умумлашган координаталарни аниқлаш мумкин. Масалан, A нуқтанинг декарт координаталари

$$\left.\begin{aligned} x &= OA\cos\varphi \\ y &= OA\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (117.1)$$

ёки $\varphi = q$ бўлганлиги учун қуйидаги

$$\left.\begin{array}{l} x = x[q) \\ y = y(q) \end{array}\right\} \qquad (117.2)$$

кўринишда ёзилади. Худди шундай мулоҳаза асосида системанинг ν нуқтаси вазиятини $q_1, q_2, \ldots, q_5$ умумлашган координаталар белгиласа, декарт координаталари

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu = x_\nu(q_1,\ q_2 \ldots q_5,\ t), \\ y_\nu = y_\nu(q_1,\ q_2 \ldots q_5,\ t), \\ z_\nu = z_\nu(q_1,\ q_2 \ldots q_5,\ t) \end{array}\right\} \qquad (117.3)$$

ёки

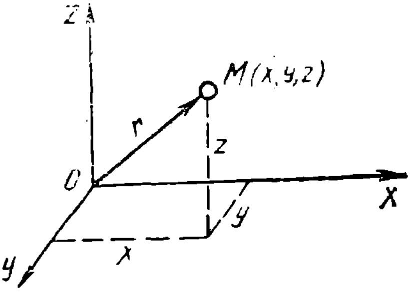
$$r_\nu = r_\nu(q_1,\ q_2 \ldots q_5,\ t)$$

боғланишдаги тенгламалардан аниқланади. Агар системадаги боғланишлар стационар бўлса, (117.3) да вақт қатнашмайди.

Умумлашган координаталардан вақт бўйича олинган биринчи тартибли ҳосила умумлашган тезлик дейилади. Таърифга мувофиқ умумлашган тезликлар $\dot q_1,\ \dot q_2 \ldots \dot q_3$ ёки $\dot q_\sigma,\ \sigma = 1,\ 2 \ldots S'$ кўринишида ёзилади. Умумлашган тезликлар юқорида (300—303-расмлардан) кўринган мисолларда бурчакли тезлик бўлади, яъни бу мисоллар учун $\dot q_\sigma = \dot\varphi = \omega$; сферик ҳаракатдаги жисм учун ҳам $\dot q_1 = \dot\varphi = \omega_\varphi$; $\dot q_2 = \dot\psi = \omega_\psi$; $\dot q_3 = \dot\theta = \omega_\theta$ бўлади. 304-расмда кўрсатилган нуқта учун $\dot q_1 = \dot x = v_x$;

$$\dot q_2 = \dot y = v_y;\quad \dot q_3 = \dot z = v_z$$

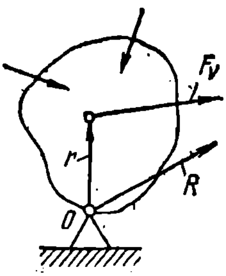
эканлиги, яъни умумлашган тезликлар нуқта тезлигининг декарт ўқларидаги проекциялари эканлиги кўриниб турибди.



304- расм.

118-§. Мумкин бўлган кўчишлар

Битта қўзғалмас нуқтага эга бўлган D қаттиқ жисмни ν нуқтасига тенг таъсир этувчи F_ν бўлган кучлар системаси таъсир қилсин (305-расм). O нуқтадаги реакция кучи R



305- расм.

бўлса, жисм мувозанатда бўлиши учун барча кучларнинг ўқлардаги проекцияларининг йиғиндиси алоҳида-алоҳида нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\sum_\nu F_{\nu x} + R_{Ox} = 0;\ \sum_\nu F_{y\nu} + R_{Oy} = 0;$$

$$\sum_\nu F_{\nu z} + R_{Oz} = 0. \qquad (118.1)$$

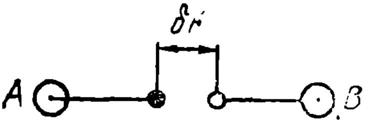
Агар барча кучларнинг O нуқтага нисбатан моментларини олсак, реакция кучларининг O нуқтага нисбатан моментлари нолга тенг бўлади (чунки реакция кучлари O нуқтани кесиб ўтади) ва моментлар орқали мувозанат тенгламалари қуйидагича ёзилади:

$$\sum_\nu M_x(F_\nu) = 0;\ \sum_\nu M_y(F_\nu) = 0;\ \sum_\nu M_z(F_\nu) = 0. \qquad (118.2)$$

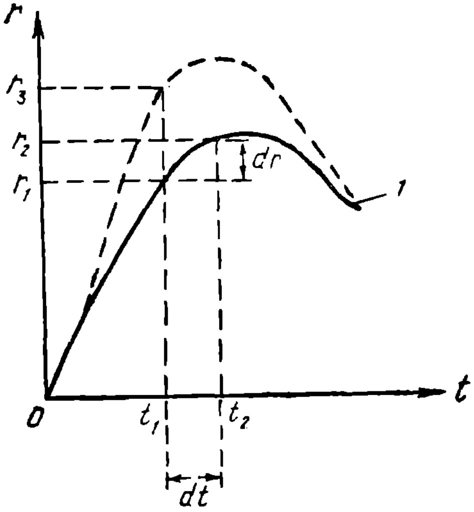
Бу тенгламаларда реакция кучлари қатнашмайди ва шунинг учун тузилган тенгламалар системасида номаълумлар сони сезиларли даражада камаяди ва бу ҳолда мувозанат шартларининг (тенгламаларнинг) сони жисмнинг эркинлик даражасига тенг.

Механик системанинг мувозанат шартларини аниқлашда шундай принципдан фойдаланиш мумкинки, натижада реакция кучлари мувозанат тенгламаларида қатнашмайди. Бу принцип мумкин бўлган кўчиш тушунчасига асосланади.

Боғланишлар йўл қўядиган кўчишлар мумкин бўлган кўчиш дейилади. Мумкин бўлган кўчишларни виртуал (туюладиган) кўчиш деб ҳам айтилади. Виртуал кўчиш биринчи тартибли кичик миқдордир. Бундай кўчиш бўлганда боғланишларда ўзгариш бўлмайди. Виртуал кўчишнинг ҳақиқий кўчишдан фарқи шундаки, виртуал кўчиш берилган вақтда бўлади ($t = \text{const}$), лекин ҳақиқий кўчиш эса dt вақтда содир бўлади. Виртуал кўчиш δr билан белгиланади (306-расм). Виртуал кўчиш δr ни «дельта эр» деб ўқилади ва δ белгисини вариация (ўзгариш) деб айтилади. Бундай вариация δr белгисини 84-§ да қўллаган эдик. Энди вариа-



306- расм.



307- расм.

ция тушунчасининг математик маъносини кўриб чиқайлик.

Фараз қилайлик, r функциясининг t вақтга боғланиши (307- расм) I эгрилик шаклида берилган бўлсин. Бу ерда $dt = t_2 - t_1$ вақтда r функция $r_3 - r_1 = dr$ га ўзгаради. dr ўзгариш ҳақиқий кўчишдир. Энди берилган t_1 вақтда r функциянинг шакли ўзгариб, функция r_3 қийматга эга бўлсин. $r_3 - r_1 = \delta r$ виртуал кўчиш дейилади. Вариация дифференциалдек математик оператор (амал) бўлиб, бу амал худди дифференциал оператор сингари бажарилади. Масалан:

$$\delta r = r_3 - r_1;\ \delta \dot{r} = \delta\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta r); \tag{118.3}$$

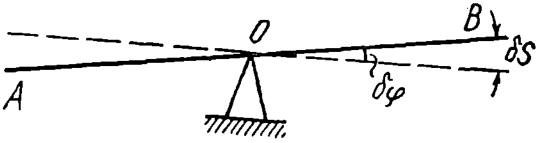
$$\delta(\dot{r}) = \delta(\dot{r}_3) - \delta(\dot{r}_1) = \delta\left(\frac{dr_3}{dt}\right) - \delta\left(\frac{dr_1}{dt}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}(\delta r_3) - \frac{d}{dt}(\delta r_1); \tag{118.4}$$

$$\delta \int r\, dt = \int \delta r\, dt. \tag{118.5}$$

Виртуал кўчиш берилган вақтда содир бўлганлиги учун вариацияланмайди, яъни $\delta t = 0$.

Виртуал кўчиш жуда кичик миқдор бўлганлигидан AB ричагнинг (308-расм) A ва B нуқталари δS ёйни бо-

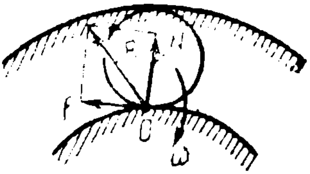


308- расм.

сиб ўтса-да, бу ёйни шу ёйга мос келадиган тўғри чизиқ (ватар) билан алмаштирадилар. Худди шундай кривошип механизмининг (303- расмга қаранг) A нуқтаси кўчишини ҳам жуда кичик чизиқли кесма билан алмаштириш мумкин. Бу ҳолларда виртуал кўчишлар

$$\delta S_B = OB\,\delta\varphi,$$
$$\delta S_A = OA\,\delta\varphi. \qquad (118.6)$$

Ҳақиқий кўчишлар виртуал кўчишларнинг бир қисмини ташкил қилади, агар ностационар боғланишлар бўлса, ҳақиқий кўчишлар виртуал кўчишларга кирмайди.



309- расм.

Сақлаб турувчи, голоном, идеал боғланишли (73- §) механик система учун N реакция кучларининг бажарган иши нолга тенглигини биламиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{N}_\nu\cdot\delta\vec{r}_\nu = 0. \qquad (118.7)$$

Жисм қўзғалмас абсолют силлиқ сиртда (309- расм) N реакция ва F ишқаланиш кучлари таъсирида ҳаракат қилса, бу кучларнинг бажарган элементар ишлари йиғиндиси

$$N\cdot\delta S\cdot\cos(\widehat{\vec{N},\ d\vec{S}}) + F\,dS\cos(\vec{F}_1\,\delta S) = N\,\delta S\cos 90^\circ +$$
$$+ F\,\delta S\cos 180^\circ = -F\,\delta S = 0$$

ифодага тенг бўлади, чунки идеал боғланишда ишқаланиш кучи бўлмайди.

Шундай қилиб, идеал ва стационар боғланишда системадаги реакция кучлари бажарган элементар ишлар йиғиндиси нолга тенг деган хулоса чиқади. Бу хулосага 73- § да идеал боғланишлар постулати деб айтилган эди.

119-§. Мумкин бўлган кўчиш принципи

Фараз қиламиз, жисм голоном, икки томонлама сақлаб турувчи, идеал боғланишлар таъсирида бўлсин. Агар бу жисмнинг ν-нуқтаси $\vec{F}_\nu$ актив ва $\vec{N}_\nu$ реакция кучлари таъсирида δr_ν га кўчса, бу ҳолда бажарилган элементар ишларнинг йиғиндиси

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \vec{N}_\nu \delta r_\nu = 0 \qquad (119.1)$$

тенглик билан аниқланади. Бу тенгликнинг нолга тенг бўлишига сабаб боғланишларнинг идеал бўлишидир. Чунки идеал боғланишлар постулатига асосан (73-§)

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{N}_\nu \delta\vec{r}_\nu = 0 \qquad (119.2)$$

ва (119.1) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F} \delta\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \delta r_\nu \cos(\vec{F}_\nu, \ \delta\vec{r}_\nu) = 0. \qquad (119.3)$$

Бу (119.3) тенглик мумкин бўлган кўчиш принципининг математик ифодаси дейилади. Бу принцип қуйидагича ўқилади: голоном, икки томонлама сақлаб турувчи, стационар ва идеал боғланишли механик системага таъсир қиладиган кучлар системасининг мувозанатда бўлишлигининг зарурий ва етарли шарти шундан иборатки, берилган кучларнинг (актив кучларнинг) системани ҳар қандай мумкин бўлган кўчиришдаги бажарган элементар ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши керак. Бу принцип Лагранжнинг тўғри ва тескари теоремаси деб ҳам аталади. Чиқарилган (119.3) ифода система мувозанатда бўлиши учун зарурий шартни ифодалайди (Лагранжнинг тўғри теоремаси). Энди (119.3) етарли шартни ҳам ифодалашини исботлайлик.

Фараз қиламиз (119.3) шарти бажарилди, лекин системага таъсир қиладиган кучлар мувозанатлаштирувчи кучлар эмас. Бу ҳолда системадаги нуқталар кучлар йўналишида кўчиб иш бажаради ва бу ишлар йиғиндиси нолдан катта бўлиши лозим.

$$\left(\sum_{\nu} \vec{F}_\nu \delta\vec{r}_\nu + \sum_{\nu} \vec{N}_\nu \delta\vec{r}_\nu\right) > 0 \qquad (119.4)$$

Лекин системада идеал боғланишлар бўлганлиги учун (119.2) шарт бажарилиши лозим бўлади. Бу (119.2) шарт бажарилганда (119.4) тенгсизликдан янги

$$\sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot \delta \vec{r}_{\nu} > 0 \qquad (119.5)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади, яъни (119.3) шарти бажарилмайди деган тескари хулоса чиқади. Бундай тескари хулоса олдинги (119.3) шартга зид бўлганлиги учун бизнинг фаразимиз нотўғри ва ҳақиқатдан (119.3) идеал ва стационар боғланишли системанинг мувозанатда бўлишлигининг етарли шартини ҳам ифодалайди (Лагранжнинг тескари теоремаси). Мумкин бўлган кўчиш принципини И. Бернулли (1717 йил) умумий ҳолда баён қилди ва бу принципга асосланиб Лагранж ўзининг аналитик механикасини тузди.

Агар актив кучлар F_{ν} ва виртуал кўчишлар δr_{ν} проекциялари орқали (119.3) тенглама ёзилса, қуйидаги ҳосил бўлади:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (F_{\nu x} \delta x_{\nu} + F_{\nu y} \delta y_{\nu} + F_{\nu z} \delta z_{\nu}) = 0. \qquad (119.6)$$

Бу мумкин бўлган кўчишнинг проекцияларда ифодаланишидир. Бу ерда $F_{\nu x}$, $F_{\nu y}$, $F_{\nu z}$ — кучларнинг ўқлардаги проекциялари: δx_{ν}, δy_{ν}, δz_{ν} — виртуал кўчишнинг ўқлардаги проекцияларидир.

(119.3) ёки (119.6) тенгламаларни мумкин бўлган тезлик тушунчасидан фойдаланиб яна бошқача шаклларда ҳам ёзадилар. Агар виртуал кўчиш чексиз кичик τ вақт давом этса, мумкин бўлган тезлик

$$\vec{v}_1 = \frac{\delta \vec{r}_1}{\tau}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\delta \vec{r}_2}{\tau}; \quad \dots\dots \quad \vec{v}_{\nu} = \frac{\delta r_{\nu}}{\tau} \qquad (119.7)$$

кўринишдаги формулалардан аниқланади. Энди (119.3) ва (119.6) тенгламаларнинг ҳар иккала томонини τ вақтга бўлиб

$$\sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_{\nu} \cdot \vec{v}_{\nu} = 0 \qquad (119.8)$$

ёки проекцияларда

$$\sum_{\nu=1}^{N} (F_{\nu x} v_{\nu x} + F_{\nu y} v_{\nu y} + F_{\nu} v_{\nu z}) = 0 \qquad (119.9)$$

ифодаларни ҳосил қиламиз.

120-§. Механиканинг умумий тенгламаси. Ҳаракатдаги система учун мумкин бўлган кўчиш принципи

Голоном, сақлаб турувчи, стационар боғланишли механик системанинг ν-нуқтасига F_ν актив, Φ_ν инерция кучлари ва N_ν реакция кучлари таъсир этса Даламбер принципига асосан (76-§) бу кучлар йиғиндиси нолга тенг:

$$\vec{F}_\nu+\vec{\Phi}_\nu+\vec{N}_\nu=0 \qquad (120.1)$$

Бутун механик система учун эса

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu+\vec{\Phi}_\nu+\vec{N}_\nu)=0 \qquad (120.2)$$

тенглик ёзилади. Энди системадаги ν-нуқтага δr_ν виртуал кўчиш берамиз ва (120.2) тенгламанинг иккала томонини $\vec{\delta r}_\nu$ векторига, ўнг томондан скаляр кўпайтирамиз

$$\sum(\vec{F}_\nu+\vec{\Phi}_\nu+\vec{N}_\nu)\,\vec{\delta r}_\nu=0, \qquad (120.3)$$

ёки

$$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu\vec{\delta r}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\vec{\Phi}_\nu\vec{\delta r}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\vec{N}_\nu\vec{\delta r}_\nu=0. \qquad (120.4)$$

Охирги (120.2), (120.4) тенгламаларга механиканинг умумий (универсал) тенгламаси деб айтилади: ҳаракатдаги механик системада ҳамма вақт актив, инерция ва реакция кучлари бажарган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг. Бу тенглама система учун мумкин бўлган кўчиш принципини ифодалайди.

Агар механик система стационар ва идеал боғланишли бўлса, (119.2) га мувофиқ (120.4) тенгламанинг чап томонидаги учинчи ҳад нолга тенг бўлади ва

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu+\vec{\Phi}_\nu)\vec{\delta r}_\nu=0 \qquad (120.5)$$

ҳосил бўлади. Охирги тенгламага идеал боғланишли система учун мумкин бўлган кўчиш принципи ёки механиканинг умумий тенгламаси дейилади. Агар система тинч ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлса, Φ инерция кучи нолга тенг бўлади ва бу тенгламалардан (119.2) ҳосил бўлади. Охирги тенгламадан икки томонлама сақлаб турувчи, стационар ва идеал боғланишли ҳаракатдаги системада ҳамма вақт актив ва инерция кучлар бажарган ишларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлади, деган натижа чиқади.

(120.5) тенгламани проекцияларда

$$\sum_{\nu=1}^{N}(F_{\nu x}+\Phi_{\nu x})\,\delta x_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}(F_{\nu y}+\Phi_{\nu y})\,\delta y_\nu+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{N}(F_{\nu z}+\Phi_{\nu z})\,\delta z_\nu=0 \qquad (120.6)$$

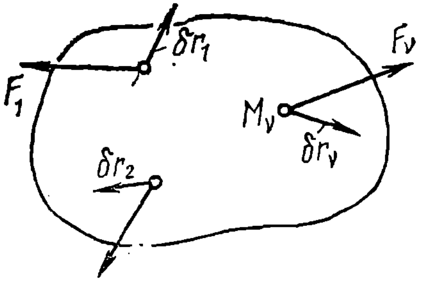
шаклда ҳам ифодаланади ва яна $\Phi_\nu=-m_\nu a_\nu$ эканлигини эътиборга олиб,

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\vec{F}_\nu-m_\nu\vec{a}_\nu)\,\delta\vec{r}_\nu=0 \qquad (120.7)$$

кўринишда ҳам тасвирланади. Бу ерда m_ν, a_ν системанинг ν-нуқтасининг массаси ва тезланишидир. Бу тенгламани идеал боғланишли система учун мумкин бўлган кўчиш принципи деб ҳам тушунмоқ мумкин. Бу тенгламадан берилган вақт учун (ёки берилган чексиз кичик вақт ёки берилган лаҳзада) системага таъсир қиладиган актив ва инерция кучлари бажарган ишларининг йиғиндиси ҳамма вақт нолга тенг эканлиги келиб чиқади, ёки агар актив ва инерция кучларининг бажарган ишларининг йиғиндиси нолга тенг бўлса, берилган чексиз кичик вақтда (бир онда) система динамик мувозанатда бўлади деб қараш мумкин. Бунда система фақат бир лаҳзада, бир онда маълум актив ва инерция кучларига эга бўлади, бошқа онларда, актив ва инерция кучлар бошқа қийматларга эга бўлади, албатта.

121-§. Умумлашган кучлар

Механик система $q_1, q_2 \ldots q_s$ ёки q_σ, $\sigma=1, 2, \ldots, S$ умумлашган координаталар билан характерланадиган бўлсин (310-расм). Бу системада $F_1, F_2 \ldots F_N$ нуқталарга таъсир қиладиган кучлар тенг таъсир этувчиси бўлсин. Агар q_σ умумлашган координатага δq_σ мумкин бўлган кўчиш берсак, қолган $q_1, q_2 \ldots q_\sigma$ координаталарни ўзгармас деб қараш мумкин, чунки $q_1, q_2 \ldots q_\sigma$ координаталар эркин координаталардир.



310- расм.

Энди 117-§ га асосан стационар боғланишли система учун

$$q_\sigma = q_\sigma(r_1, r_2 \ldots r_s) \qquad (121.1)$$

ёзиш мумкин ва бу тенгликдан

$$\delta q_\sigma = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial q_\sigma}{\partial r_\nu} \delta r_\nu; \quad \sigma = 1, 2 \ldots S \qquad (121.2)$$

боғланишни ҳосил қиламиз, яъни q_σ координата ўзгарганда системадаги ҳамма нуқталар силжийди ва ҳар бир силжишда ишлар бажарилади. Бу элементар ишларнинг йиғиндиси $F_1, F_2 \ldots F_N$ кучлар орқали бир томондан қуйидагича ифодаланади:

$$dA = \vec{F}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \delta \vec{r}_2 + \ldots + \vec{F}_N \delta \vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu. \qquad (121.3)$$

Худди шу dA элементар ишни, иккинчи томондан умумлашган q_σ координатани виртуал кўчиш орқали қуйидаги шаклда ёзиш мумкин:

$$\delta A_\sigma = Q_\sigma \cdot \delta q_\sigma. \qquad (121.4)$$

Охирги икки тенгламанинг ўнг томонини тенглаштирганимизда

$$Q_\sigma = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} \vec{F}_\nu \delta r_\nu}{\delta q_\sigma}, \quad \sigma = 1, 2 \ldots S \qquad (121.5)$$

формула ҳосил бўлади. Бунда Q_σ умумлашган куч деб айтилади. Бу формуладан кўринадики, умумлашган куч Q_σ бажарилган элементар ишлар йиғиндисининг умумлашган координата вариациясига бўлган нисбати билан аниқланадиган катталикдир.

Умумлашган кучнинг маъносини яққолроқ тасаввур қилиш учун AB ричагнинг B нуқтасига F куч таъсир қилганда бажарилган элементар иш формуласини икки кўринишда ёзайлик (308-расмга қаранг). Биринчи кўринишда F куч таъсирида B нуқтанинг радиус-вектори r нинг миқдори δr га ўзгаради ва B нуқта δS га силжийди, демак, элементар иш

$$\delta A = F \cdot \delta S \tag{а}$$

шаклда ёзилади.

Иккинчи кўринишда элементар иш, AB ричакка қўйилган M куч моменти таъсирида, ричагнинг $\delta \varphi$ бурчакка бурилиши натижасида бажарилади:

$$\delta A = M \cdot \delta \varphi. \tag{б}$$

Энди (*а*), (*б*) ва (121.4) тенгламаларни бир-бирига солиштирсак, умумлашган куч: а) ҳолда $Q_\sigma = F$; б) ҳолда $Q_\sigma = M$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Демак, умумлашган куч умуман куч ҳам, куч моменти ҳам бўлиши мумкин ва умуман Q_σ катталик (121.5) билан аниқланади ва бу катталикнинг бирлиги ҳам ўша (121.5) формуладан аниқланади.

Умумлашган актив кучлар, умумлашган инерция кучлари ва умумлашган реакция кучлари ҳамда умумлашган ички ёки ташқи кучлар тушунчалари ҳам қўлланилади.

Агар стационар идеал боғланишли системага δq_σ виртуал кўчиш берилса, (121.5) формулага мувофиқ,

$$Q_\sigma^N = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{N}_\nu \, \delta \vec{r}_\nu}{\delta q_\sigma} = 0 \tag{121.6}$$

ифодани ҳосил қиламиз. Бу ифодадан идеал боғланишли системаларда

$$Q_\sigma^N = 0, \quad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots\ S, \tag{121.7}$$

яъни умумлашган реакция кучлари нолга тенг. Демак, идеал боғланишли системаларда умумлашган кучларни аниқлаш учун реакция кучларини ҳисобга олмаслик мумкин экан.

Энди (120.5) тенгламани умумлашган координаталар ва умумлашган кучлар орқали ифодалаймиз. Бунинг учун (117.3) ёки (121.1) боғланишлардан фойдаланиб, δr_ν аниқланади:

$$\delta r_\nu = \sum_{\sigma=1}^{S} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma. \qquad (121.8)$$

Бу ифодани (120.5) га қўямиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (F_\nu + \Phi_\nu) \sum_{\sigma=1}^{S} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma = 0$$

ёки

$$\sum_{\sigma=1}^{S} \left(\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} + \sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma = 0 \qquad (121.9)$$

ҳосил қилинади. Энди (121.5) формулага мувофиқ,

$$\sum_{\nu=1}^{N} F_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma^F \qquad (121.10)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma^\Phi \qquad (121.11)$$

эканлигини ҳисобга олсак, механиканинг умумий тенгламаси, яъни (121.9) умумлашган Q_σ куч ва умумлашган q_σ координаталарда қуйидагича ифодаланади:

$$\sum_{\sigma=1}^{S} (Q_\sigma^F + Q_\sigma^\Phi) \delta q_\sigma = 0. \qquad (121.12)$$

Бунда: Q_σ^F, Q_σ^Φ умумлашган актив ва умумлашган инерция кучлари. Умумлашган координаталар эркин бўлганликлари учун $\delta q_\sigma \neq 0$, лекин (121.12) тенгламада δq_σ олдидаги коэффициентларни нолга тенг деб олиш мумкин. Яъни

$$Q_\sigma^F + Q_\sigma^\Phi = 0 \qquad (121.13)$$

бўлиб қолади.

Агар идеал боғланишли механик система тинч ёки тўғри чизиқли текис ҳаракат ҳолатида бўлса, инерция кучлари нолга тенг бўлади, албатта.

Демак,

$$Q_\sigma^\Phi = 0 \qquad (121.14)$$

ва (121.13) дан

$$Q_\sigma^F = 0; \; \sigma = 1, \; 2, \; \ldots \; S \qquad (121.15)$$

тенглик ҳосил бўлади, яъни актив ва умумлашган кучлар нолга тенг.

Агар механик система консерватив бўлса, яъни система потенциалли майдонда жойлашган бўлса, бу ҳолда куч (84.12) га асосан қуйидагича ёзилади:

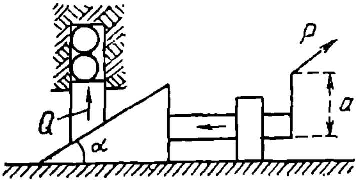
$$F_{\nu} = -\frac{\partial П}{\partial r_{\nu}}. \qquad (121.16)$$

Бунда $П$ системанинг потенциал энергияси. Агар (121.16) ҳисобга олинса, (121.5) дан қуйидаги келиб чиқади:

$$Q_{\sigma} = -\frac{\partial П}{\partial q_{\sigma}} \qquad (121.17)$$

ёки (121.15) га мувофиқ

$$\frac{\partial П}{\partial q_{\sigma}} = 0; \ \sigma = 1, \ 2 \ . \ . \ . \ S. \qquad (121.18)$$



311- расм.

Демак, (121.18) бажарилса, консерватив система статик мувозанат ҳолатида бўлади деган хулоса чиқади.

106-мисол. (46.3). Дастасининг узунлиги a бўлган понали пресс винтининг ўқига ва дастасига тик бўлган P куч таъсир қилмоқда (311-расм). Агар винт қадами h ва понанинг учидаги бурчак α бўлса, P ва Q кучнинг модуллари орасидаги боғланиш қандай аниқланади?

Ечиш. P кучи таъсирида пресс дастаси α бурчакка бурилса, пона δh_1 виртуал кўчиш олиб, чап томонга силжийди ва шу вақтнинг ўзида пресс δh баландликка кўтарилади (312-расм).

Расмдаги $\Delta \ BB_1C_1$ дан

$$\delta h = \delta h_1 \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

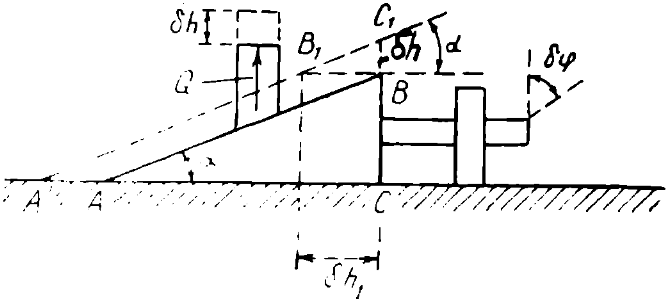
Мумкин бўлган кўчиш принципига асосан элементар ишлар тенгламаси

$$M\delta\varphi - Q\delta h = 0 \qquad (2)$$

кўринишда ёзилади.

Энди (1) ва (2) бирлаштириб ечилса,

$$M\delta\varphi = Q \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta h_1 \qquad (3)$$



312- расм.

ҳосил бўлади. Бу ерда куч моменти

$$M = P \cdot a \tag{4}$$

эканлиги эътиборга олинса,

$$\int_0^{2\pi} P a \delta\varphi = \int_0^h Q \ \mathrm{tg}\ \alpha\ \delta h_1$$

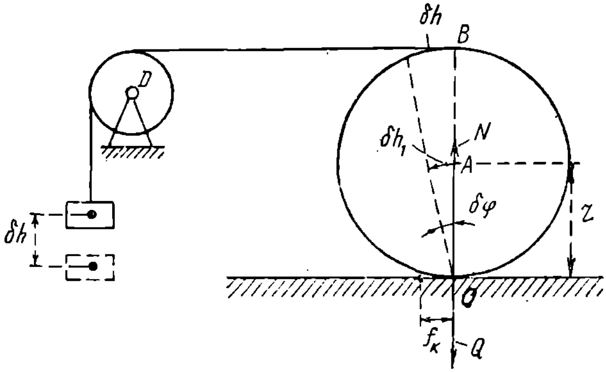
ёки

$$2\pi P \cdot a = Q \cdot h\ \mathrm{tg}\ \alpha$$

ва

$$Q = \frac{2\pi\, Pa}{h\ \mathrm{tg}\ \alpha} \tag{5}$$

ҳосил бўлади.



313- расм.

107-мисол (47.13). Оғирлиги Q ва радиуси r бўлган A цилиндр думалагичнинг оғирлиги P бўлган B юк ҳаракатга келтиради (313-расм).

Агар думаланишдаги ишқаланиш коэффициенти f_K бўлган A думалагич сирпанишсиз думаланса, B юкнинг тезланиши нимага тенг бўлади?

D блокнинг массаси ҳисобга олинмасин.

Ечиш. Фикран системага виртуал кўчиш берамиз (B юк ҳаракати йўналишида). Бу ҳолда B юк δh; A цилиндрнинг B нуқтаси ҳам δh силжиш олади, A цилиндр $\delta\varphi$ бурчакка бурилади, A цилиндрнинг маркази δh_1 га силжийди. Энди система учун механиканинг умумий тенгламасини (120.3) га мувофиқ тузамиз:

$$P\cdot\delta h - \frac{P}{g}a\delta h - M\,\delta\varphi - M_K\delta\varphi = 0. \qquad (1)$$

Бу тенгламада $\frac{P}{g}a\delta h$ — B юкнинг инерция кучини бажарган элементар иши; $M\delta\varphi$ — A цилиндр инерция кучининг бажарган иши; $P\delta h$ — B юк оғирлик кучининг бажарган иши.

Масаланинг шартидан фойдаланиб,

$$\delta h = 2r\delta\varphi; \; (2) \quad M_K = -f_K\cdot N = f_K\cdot Q; \; (3) \quad M = I_0\cdot\varepsilon; \quad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{2r} \quad (5)$$

ифодаларни ёзамиз.

Цилиндрнинг O ўқига нисбатан инерция моменти Гюйгенс теоремасига асосан

$$I_0 = I_A + \frac{Q}{g}r^2, \qquad (6)$$

аммо

$$I_A = \frac{Pr^2}{2g} \qquad (7)$$

бўлганлигини ҳисобга олганимизда

$$I_0 = \frac{3Q}{2g}r^2 \qquad (8)$$

формулани ҳосил қиламиз. Энди (2) — (5) ва (8) ни (1) га қўямиз:

$$2Pr\delta\varphi - \frac{2Pra}{g}\delta\varphi - \frac{3Qra}{4g}\delta\varphi - f_K Q\delta\varphi = 0. \qquad (9)$$

Бу тенгламенинг иккала томонини $\delta\varphi$ га бўламиз ва a тезланишга нисбатан ечамиз

$$2Pr - f_K Q = \frac{8P + 3Q}{4g} ra,$$

бундан

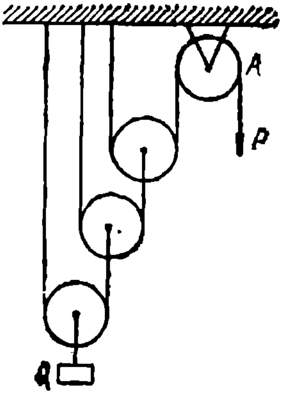
$$a = \frac{P - \frac{f_K}{2r} Q}{3Q + 8P} \cdot 8g,$$

яъни B юк тезланишини топган бўламиз.

108-мисол. (46.9). Полиспаст A қўзғалмас ва n та қўзғалувчан блоклардан тузилган.

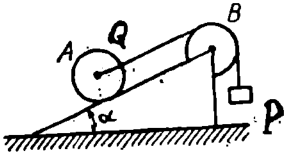
Мувозанат ҳолатидан кўтариладиган Q юкнинг A блокдан чиқадиган арқонга қўйилган P зўриқиш кучига бўлган нисбатини аниқланг (314-расм).

Жавоб: $\frac{Q}{P} = 2^n$.



314- расм.

109-мисол. (47.11). A думалагич думаланиб оғирликсиз чўзилмас ип билан қўзғалмас B блок орқали тортилган оғирлиги P бўлган юкни юқорига кўтаради. Бу ерда B блок O ўқ атрофида айланади. A думалагич ва B блок бир жинсли бир хил радиусли дисклар. Қия текислик горизонт билан α бурчак ташкил қилади. Думалагич ўқининг тезланиши аниқлансин (315-расм).



315- расм.

Жавоб: $a = \frac{Q \sin \alpha - P}{2Q + P} \cdot g.$

XX- Б О Б. ЛАГРАНЖ ТЕОРЕМАЛАРИ

122-§. Биринчи жинсли Лагранж теоремалари

Механик система N та нуқтадан тузилган бўлиб, системага K та голоном, идеал ва стационар боғланишлар қуйидаги шаклда берилган:

$$f_\sigma = (x_1, y_1, z_1 \ldots x_n, y_n, z_n) = 0,$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, k. \qquad (122.1)$$

Бу боғланишлар системадаги виртуал кўчишларга K та қўшимча нисбатларни қўяди. Қўшимча нисбатларни (122.1) дан тўлиқ дифференциал олиш билан аниқланади:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial z_N}\delta z_\nu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_1}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_1}{\partial z_\nu}\delta z_\nu=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_1}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_1}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0$$

ёки

$$\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0. \qquad (122.2)$$

Бу тенгламалар K та, система нуқталари $3N$ виртуал кўчса, эркин кўчишлар $3N-K$ бўлади. Тенгламалардан K та боғланишларни $(3N-K)$ эркин кўчишлар функцияси шаклида аниқлаб, механиканинг умумий тенгламасига қўйиб, эркин кўчишлар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштириб, $3N-K$ ҳаракат тенгламаларини ҳосил қиламиз. Агар ҳосил қилинган $3N-K$ тенгламаларга K та боғланишлар тенгламасини қўшсак, $3N$ та тенглама ҳосил қиламиз ва $3N$ тенгламалардан $x_1,\ y_1,\ z_1\ \ldots\ x_n,\ y_n,\ z_n$ катталикларни, жами $3N$ координаталарни аниқлаймиз. Бундай усул билан динамик тенгламаларни ҳосил қилиш мураккаб ва қийин.

Бундай мураккабликдан қутулиш учун номаълум кўпайтирувчи $\lambda_\varkappa$ коэффициентлар методидан фойдаланилади. Бунинг учун (122.2) тенгламаларнинг ҳар биттасини тегишли $\lambda_\varkappa$ коэффициентларга кўпайтириб, (120.6) билан қўшамиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left[\left(F_{\nu x}-m_\nu\ddot{x}_\nu+\sum_{\varkappa=1}^{K}\lambda_\varkappa\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}\right)\delta x_\nu+\left(F_{\nu y}-m_\nu\ddot{y}_\nu+\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{\varkappa=1}^{K}\lambda_\varkappa\frac{\partial f_\varkappa}{\partial y_\nu}\right)\times\delta y_\nu+\left(F_{\nu z}-m_\nu\ddot{z}_\nu+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\varkappa=1}^{K}\lambda_\varkappa\frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu}\right)\delta z_\nu\right]=0. \qquad (122.3)$$

Бу ерда $\lambda_\varkappa$ кўпайтирувчини шундай танлаш мумкинки, (122.3) тенгламадаги виртуал δx_ν, δy_ν, δz_ν кўчишлар олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиб қолади, яъни

$$\left.\begin{aligned} F_{\nu x} - m_\nu \ddot{x}_\nu &= -\sum_{\varkappa=1}^{K} \lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}, \\ F_{\nu x} - m_\nu \ddot{y}_\nu &= -\sum_{\varkappa=1}^{K} \lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_\nu}, \\ F_{\nu z} - m_\nu \ddot{z}_\nu &= -\sum_{\varkappa=1}^{K} \lambda_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial z_\nu} \end{aligned}\right\} \qquad (122.4)$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \ddot{x}_\nu &= F_{\nu x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} + \ldots + \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial x_\nu}, \\ m_\nu \ddot{y}_\nu &= F_{\nu y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_\nu} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_\nu} + \ldots + \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial y_\nu}, \\ m_\nu \ddot{z}_\nu &= F_{\nu z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_\nu} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_\nu} + \ldots + \lambda_K \frac{\partial f_K}{\partial z_\nu} \end{aligned}\right\} \qquad (122.5)$$

ҳосил бўлади. (122.5) биринчи жинсли Лагранж тенгламалари деб айтилади. Тенглама сони $3N$ та бўлиб, унга K та (122.2) тенгламаларни қўшиб, $3N+K$ та тенгламани ҳосил қилиб, $3N$ та координата ва K та номаълум λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_K кўпайтирувчиларни аниқлаймиз.

Ҳосил қилинган (122.5) тенгламага эътибор билан қараганимизда системаларда боғланишлар сони K катта бўлса, тенглама сони $3N+K$ бўлишини ва бу тенгламани ечиш қийинлашиб боришини англаймиз. Шунинг учун тенгламалардан системада боғланишлар сони K кўп бўлмаган ҳолда фойдаланиш мақсадга мувофиқдир.

Биринчи жинсли Лагранж тенгламаларидан фойдаланиб, голоном, стационар ва идеал боғланишли системага таъсир қиладиган кучлар потенциалли бўлган ҳолда энергиянинг сақланиш қонунини келтириб чиқариш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (122.5) тенгламани тегишли равишда dx_ν, dy_ν, dz_ν га кўпайтириб қўшсак:

$$\sum (m_\nu \ddot{x}_\nu dx_\nu + m_\nu \ddot{y}_\nu dy_\nu + m_\nu \ddot{z}_\nu dz_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N} (F_{\nu x} dx_\nu +$$

$$+F_{\nu y}dy_\nu + F_{\nu z}dz_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\sum_{x=1}^{K}\lambda_x\left(\frac{\partial f_x}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial f_x}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial f_x}{\partial z_\nu}dz_\nu\right). \qquad (122.6)$$

Буларнинг чап томони

$$\sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu \ddot{x}_\nu dx_\nu + m_\nu \ddot{y}_\nu dy_\nu + m_\nu \ddot{z}_\nu dz_\nu) = \sum_{\nu=1}^{N}(m_\nu v_{\nu x}dv_{\nu x} + m_\nu v_{\nu y}dv_{\nu y} + m_\nu v_{\nu z}dv_{\nu z}) = d\left(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right) = dT, \qquad (122.7)$$

$$T = \sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu v_\nu^2}{2} \qquad (122.8)$$

шаклда ёзилади. Бунда T системанинг кинетик энергияси. Тенгламанинг ўнг томонидаги биринчи ҳад:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(F_\nu dx_\nu + F_{\nu y}dy_\nu + F_{\nu z}dz_\nu) = -d\,П, \qquad (122.9)$$

бунда $П$ системанинг потенциал энергияси. Энди (122.6) тенгламанинг ўнг томонидагн иккинчи ҳад (122.1) даги боғланиш функцияси f_x нинг тўлиқ дифференциалининг λ_x га бўлган кўпайтмасига тенглигини ва ушбу

$$df_x = \sum_{x=1}^{K}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial f_x}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial f_x}{\partial z_\nu}dz_\nu\right) = 0 \qquad (122.10)$$

тенгликни эътиборга олганимизда бу икинчи ҳад нолга тенг бўлади.

Шунинг учун (122.7) ва (122.9) ифода (122.6) тенгламага қўйилса,

$$dT = -dП.$$

$$d(T + П) = 0$$

ва

$$T + П = \text{const} \qquad (122.11)$$

тенглама ҳосил бўлади. Бундан потенциалли система идеал ва стационар боғланишли бўлса, бу системада кинетик ва потенциал энергия йиғиндиси ўзгармай қолади деган хулоса чиқади. Бу хулоса механик энергиянинг сақланиш қонунидир. (Энергия интеграли деб ҳам айтилади.)

Кўрдикки, биринчи жинсли Лагранж тенгламаларининг боғланишлар сони K кўп бўлганда ишлатиш ноқулай, чунки масала мураккаблашади. Бу қийинчиликлардан қутулиш учун Лагранж умумлашган координаталардан фойдаланишни таклиф этди. Умумлашган координаталардан фойдаланганда бир неча афзалликлар бор: 1) тенгламаларда боғланишлар қатнашмайди; 2) тенгламалар сони K тага камаяди; 3) ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечиш уларнинг сони камроқ бўлганлиги учун осонроқдир.

123- §. Иккинчи жинсли Лангранж тенгламалари

Маълумки, голоном ва идеал боғланишли механик система нуқталарига виртуал кўчишлар берилганда механиканинг умумий тенгламаси исталган вақтда системанинг механик мувозанатини ифодалайди. Бу тенгламанинг (120.7) кўринишидан фойдаланамиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu - m_\nu \vec{a}_\nu)\delta r_\nu = 0. \qquad (123.1)$$

Система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини биринчи жинсли Лагранж тенгламаларидан фойдаланганда олдинги, 122- § да кўрсатилган қийинчиликлар борлигини кўрдик. Бу қийинчиликлардан қутулиш учун умумлашган координаталар ва умумлашган кучлар орқали система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини аниқлаймиз. Бундай умумлашган координаталар орқали система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузиш методини Лагранж илмий асослаган ва ҳосил қилинадиган тенгламалар иккинчи жинсли Лагранж тенгламалари дейилади. Иккинчи жинсли Лагранж тенгламаларини (123.1) дан фойдаланиб аниқлаймиз.

Олдинги (121.8) формулага мувофиқ

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{S} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \qquad (123.2)$$

эканлигини эътиборга олиб, (123.1) тенгламани қуйидаги шаклда ёзамиз:

$$\sum_{\sigma=1}^{S}\sum_{\nu=1}^{N}\left(\vec{F}_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma} - m_\nu \vec{a}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma = 0,$$

ёки

$$\sum_{\sigma=1}^{S}\left(\sum^{N}\vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{S}\left(\sum_{\sigma=1}^{N} m_\nu \vec{a}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right)\delta q_\sigma = 0. \qquad (123.3)$$

Агар (121.10) тенгламани эътиборга олсак, (123.3) нинг чап томонидаги биринчи ҳадни қавс ичидаги умумлашган куч эканлигига ишонч ҳосил қиламиз, яъни

$$\sum_{\nu=1}^{N}\vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{z}_\nu}{\partial q_\sigma} = \vec{Q}_\sigma. \qquad (123.4)$$

Энди (123.3) тенгламанинг чап томонидаги иккинчи ҳаддаги қавс ичидаги ифоданинг шаклини ўзгартирамиз. Ҳақиқатан ҳам, ушбу

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{a}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}\right) - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}\right) \qquad (123.5)$$

тенгликни ёзишга ҳақлимиз, чунки бу ерда

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right) = m_\nu \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} + m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right). \qquad (123.6)$$

Қуйидаги икки тенгликнинг

$$\frac{\partial r_\nu}{\partial q_r} = \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_r}, \qquad (123.7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}\right) = \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial q_\sigma} \qquad (123.8)$$

тўғрилигини исботлаймиз. Бунинг учун (117.3) тенглама системасининг тўртинчисидан, яъни r_ν дан вақт бўйича тўла ҳосила оламиз:

$$\frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \dot{\vec{r}}_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}. \qquad (123.9)$$

Охирги тенгламадан $\frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}$ ва $\frac{\partial r_\nu}{\partial t}$ ифодаларни умумлашган $\dot{q}_\sigma$ га боғлиқ эмаслигини ҳисобга олиб, q_σ бўйича ҳосила оламиз ва ушбу

$$\frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}. \qquad (123.10)$$

Кейинги (123.8) тенгликнинг тўғрилигини исботлаш учун яна (117.3) тенгламалар системасининг тўртинчисидан q_σ бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}. \qquad (123.11)$$

r катталиги ҳам, q_σ ҳам t вақт функцияси бўлганлигини ҳисобга олиб, (123.11) дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma}\right) = \sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma \cdot \partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma \partial t}\right). \qquad (123.12)$$

Энди (123.9) дан q_σ бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \sum_{\sigma=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma \partial q_\sigma}\dot{q}_\sigma + \frac{\partial^2 \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma \partial t}\right). \qquad (123.13)$$

Охирги икки тенгламанинг ўнг томонлари ўзаро тенг бўлганликлари учун чап томонлари ҳам тенг бўлиши лозимлигидан ушбу тенглик ҳосил бўлади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}\right) = \frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial q_\sigma}. \qquad (123.14)$$

Бу тенглик (123.8) тенгламанинг айнан ўзи.

Маълум $\dot{r}_\nu = v_\nu$ тенгликка асосланиб, (123.7) ва (123.8) формулаларни (123.5) тенгламага қўямиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{a}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_\nu v_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_\sigma}. \qquad (123.15)$$

Бу ерда

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}\right. = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right), \qquad (123.16)$$

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2},$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{v}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}. \qquad (123.17)$$

Охирги икки тенгликни (123.15) га қўямиз:

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu \frac{\partial r_\nu}{\partial r_\sigma} = \frac{\partial}{\partial q_\sigma}\left(\sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu v_\nu^2}{2}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\cdot \qquad (123.18)$$

Механиканинг умумий тенгламаси (123.3) га (123.4) ва (123.18) тенгликларни қўйиб

$$\sum_{\sigma=1}^{S} \left\{Q_\sigma - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma}\right)\right\}\delta q_\sigma = 0 \qquad (123.19)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Агар виртуал кўчишлар мавжуд бўлса, яъни $\delta q_\sigma \neq 0$ бўлиш учун (123.19) тенгламада δq_σ олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши лозим, яъни δq_1 дан бошқа ҳамма δq_σ нолга тенг деб

$$Q_1 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

ҳосил қилинади. Шундай мулоҳазалардан кейин қуйидаги тенгламалар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1;\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2;\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_S}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_S}=Q_S
\end{aligned}\right\}\qquad(123.20)$$

ёки қисқароқ кўринишда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma,\qquad(123.21)$$

бунда

$$\sigma=1,\ 2\ \ldots\ S.$$

Охирги (123.20) ёки (123.21) ифодаларга иккинчи жинсли Лагранж тенгламалари дейилади. Бу тенгламалар иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалардир. Тенгламаларнинг сони механик системанинг эркинлик даражасига тенг.

Иккинчи жинсли Лагранж тенгламаларидан фойдаланиш тартиби қуйидагича:

1) системанинг эркинлик даражаси i нечта бўлса, шунча q_σ ни, яъни умумлашган координаталарни аниқлаш лозим,

2) умумлашган $\dot{q}_\sigma$ тезликларни аниқлаш;

3) системанинг кинетик энергиясини умумлашган координаталар орқали ифодалаш;

4) $\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$ ни аниқлаш, яъни T дан q_σ ва $\dot{q}_\sigma$ бўйича ҳосила олиш;

5) умумлашган Q_σ кучни (123.4) формуладан аниқлаш;

6) 1—5 банддан аниқланган ифодаларни (123.11) га қўйиб, система ҳаракатининг дифференциал тенгламаларини тузиш;

7) ҳосил бўлган дифференциал тенгламаларни интеграллаш.

124-§. Потенциалли майдонлар учун иккинчи жинсли Лагранж тенгламалари

Олдинги (123.21) формуладан маълумки, иккинчи жинсли Лагранж тенгламалари қуйидаги кўринишда ифодаланар эди:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=Q_\sigma, \quad \sigma=1,\ 2\ \ldots\ S.$$

Энди шу тенгламаларнинг потенциалли майдонлар учун қандай кўринишда ёзилишини кўрайлик.

Қуйидаги янги ўзгарувчи функция

$$L=T+U$$

киритамиз. L функция Лагранж функцияси (Лагранжиан) ёки кинетик потенциал дейилади. Бу функция механик системанинг T кинетик энергияси билан U куч функциясининг йиғиндисига тенг. Маълумки, куч функцияси система потенциал энергиясининг манфий ишора билан олинган қийматига тенг, яъни $U=-П$ бўлганлиги учун (124.2) қуйидаги шаклда ёзилади:

$$L=T-П, \quad T=L+П. \tag{124.3}$$

Умумлашган кучни (121.17) формулага мувофиқ

$$Q_\sigma=-\frac{\partial П}{\partial q_\sigma} \tag{124.4}$$

шаклда ёзилар эди. Энди (124.4) ни (124.1) га қўямиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=-\frac{\partial П}{\partial q_\sigma}.$$

Бундаги T ва $П$ катталикларнинг умумлашган координаталар, умумлашган куч ва вақт функциялари эканлигини эсласак, яъни

$$T=T(q_1,\ q_2\ \ldots\ q_S,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2\ \ldots\ \dot{q}_S\ t), \tag{124.6}$$

$$П=П(q_1,\ q_2\ \ldots\ q_S,\ t). \tag{124.7}$$

$П$ функция фақат q_σ ва t нинг функцияси, T эса q_σ $\dot{q}_\sigma$ ва t нинг функцияси, чунки (123.7) га мувофиқ,

$$\frac{\partial \dot{r}_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial v_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}=\frac{\partial r_\nu}{\partial q_\sigma}, \tag{124.8}$$

яъни v катталик q_σ функциясидир. Ана шундай (124.7) ва (124.6) боғланишларни назарда тутганимизда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} = 0 \qquad (124.9)$$

ва

$$L = L(q_1,\ q_2\ \ldots\ q_S;\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2\ \ldots\ \dot{q}_S,\ t) \qquad (124.10)$$

ҳосил бўлади. Охирги боғланиш ва (124.9) эътиборга олинган ҳолда (124.3) тенгламадан $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}$; $\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}$ аниқланади:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}, \text{ чунки } \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_\sigma} = 0 \qquad (124.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}. \qquad (124.12)$$

Бу ердаги икки формулани (124.5) тенгламага қўямиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}.$$

Бу тенгламада $\frac{\partial \Pi}{\partial q_\sigma}$ ҳадлар қисқарганлиги учун

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0. \quad \sigma = 1,\ 2,\ \ldots\ S \qquad (124.13)$$

(124.13) тенглама потенциалли майдонлар ёки консерватив системалар учун иккинчи жинсли Лагранж тенгламалари дейилади. Бу тенгламалар сони S умумлашган координаталар сонига ёки системанинг эркинлик даражасига тенг. Бу тенгламалардан фойдаланиш тартиби қуйидагича: 1) системанинг эркинлик даражаси ва умумлашган координаталар аниқланади ($i = S$); 2) системанинг T кинетик ва Π потенциал энергиялари q_σ ва $\dot{q}_\sigma$ функциялари шаклида аниқланади; 3) системанинг кинетик потенциали, яъни Лагранж функцияси (124.3) формуладан фойдаланиб, q_σ; $\dot{q}_\sigma$ катталикларнинг функциялари шаклида ифодаланади; 4) Лагранж функциясидан фойдаланиб, $\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$ аниқланади; 5) Лагранж функциясидан фойдаланиб, $\frac{\partial L}{\partial q_\sigma}$ аниқланади; 6) 4 — 5 бандда аниқланган ифода (124.13) га — Лагранж тенгламаларига қўйилади; 7) ҳосил бўлган дифференциал тенгламалар интегралланади.

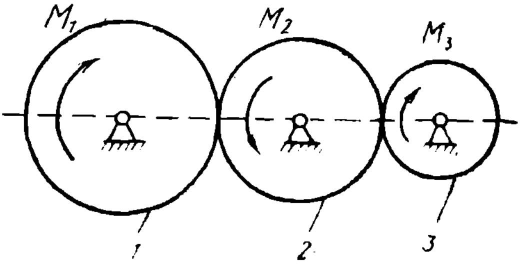
Агар механик системага консерватив Q_σ кучлардан ташқари яна консерватив бўлмаган Q^F кучлар таъсир қилса, бу ҳолда умумлашган куч

$$Q = Q_\sigma + Q^F$$

шаклда ва иккинчи жинсли Лагранж тенгламалари қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma + Q^F .$$

Лагранж тенгламалари механик системаларда эркин тебранишларни ўрганиш масалаларида, чекли эркинлик даражасига эга бўлган эркин ва мажбурий тебранишларни ўрганишда ва бошқа кўпгина техник масалаларни ечишда қўлланилади.



316- расм.

110-мисол. (48.2). 316-расмда кўрсатилган бирикмада *1* ғалтак M_1 момент билан ҳаракатга келтирилади. Ғалтак *2* қаршилик моменти M_2, ғалтак *3* қаршилик моменти M_3 ни ҳосил қилади.

Ғалтакларни массалари m_1, m_2, m_3, радиуслари r_1, r_2, r_3 бўлган дисклар деб қабул қилиб, биринчи ғалтакнинг бурчакли тезланиши аниқлансин.

Ечиш. Ғалтакларни механик система деб ҳисоблаймиз. Бу система учун иккинчи жинсли Лагранж тенгламаларининг (123.21) кўринишдаги тенгламасини ёзамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q. \qquad (1)$$

Масаланинг шартига кўра, ғалтаклар учун системанинг эркинлик даражаси бирга тенг ва биринчи ғалтакнинг бурилиш бурчаги φ бўлади, яъни $q=\varphi_1$, $\dot{q}$ умумлашган тезлик $\dot{q}=\dot{\varphi}_1$.

Системанинг кинетик энергияси *1*, *2*, *3* ғалтакнинг кинетик энергиялари T_1, T_2, T_3 йиғиндисига тенг:

$$T=T_1+T_2+T_3. \qquad (2)$$

Биринчи ғалтакнинг кинетик энергияси

$$T_1=\frac{I_1\omega_1^2}{2}; \qquad (3)$$

иккинчи ва учинчи ғалтаклар учун

$$T_2=\frac{I_2\dot{\omega}_2^2}{2}; \quad (4) \qquad T_3=\frac{I_3\dot{\omega}_3^2}{2}. \qquad (5)$$

Ғалтакни диск деб ҳисоблаб, симметрия ўқларига нисбатан инерция моментларини аниқлаймиз:

$$I_1=\frac{m_1 r_1^2}{2}, \quad (6) \qquad I_2=\frac{m_2 r_2^2}{2}, \quad (7)$$

$$I_3=\frac{m_3 r_3^2}{2}. \qquad (8)$$

Кинематикадан маълумки, ғалтакларнинг бурчакли тезликларининг нисбати ғалтаклар радиуслари нисбатига тескари пропорционалдир.

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2}=\frac{r_2}{r_1}; \qquad \frac{\dot{\varphi}_2}{\dot{\varphi}_3}=\frac{r_3}{r_2}. \qquad (9)$$

Бу нисбатлардан

$$\dot{\varphi}_3=\frac{r_1}{r_3}\dot{\varphi}_1. \qquad (10)$$

Ҳосил қилинган (6)—(10) формула (3)—(5) га қўйилса:

$$T_1 = \frac{m_1 r_1^2}{4}\dot{\varphi}_1^2, \quad (11) \qquad T_2 = \frac{m_2 r_1^2}{4}\dot{\varphi}_1^2, \quad (12)$$

$$T_3 = \frac{m_3 r_1^2}{4}\dot{\varphi}_1^2. \qquad (13)$$

Тўлиқ кинетик энергияни (2) формулага мувофиқ қуйидагича ифодалаймиз:

$$T = \frac{1}{4}(m_1 + m_2 + m_3)\, r_1^2\, \dot{\varphi}_1^2. \qquad (14)$$

Энди системага $\delta\varphi_1$ виртуал кўчнш берамиз ва бу ҳолда (121.4) га мувофиқ виртуал ишларнинг йиғиндисини аниқлаймиз:

$$\delta A = M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 - M_3\delta\varphi_3. \qquad (15)$$

Масаланинг шартига мувофиқ виртуал силжишлар нисбати радиуслар нисбатига тескари пропорционал бўлади:

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\varphi_2} = \frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_3} = \frac{r_3}{r_2},$$

бундан

$$\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1; \quad \delta\varphi_3 = \frac{r_2}{r_3}\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_3}\delta\varphi_1 \qquad (16)$$

Охирги формулаларни (15) тенгламага қўямиз:

$$\delta A = \left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3\right)\delta\varphi_1. \qquad (17)$$

Системадаги умумлашган кучни (121.4) формулага мувофиқ аниқлаймиз:

$$Q = \frac{\delta A}{\delta\varphi_1} = \left(M_1 - \frac{r_1}{r_2}M_2 - \frac{r_1}{r_3}M_3\right). \qquad (18)$$

Энди иккинчи жинсли Лагранж тенгламасини, яъни (1) тенгламани масала шартига мувофиқ ёзамиз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = Q. \qquad (19)$$

Формула (14) дан фойдаланамиз:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = 0, \\ &\frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)\, r_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Ҳосил қилинган (18) ва (20) формулаларни (19) тенгламага қўямиз:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)r_1^2\dot{\varphi}_1\right]=M_1-\frac{r_1}{r_2}M_2-$$

$$-\frac{r_1}{r_3}M_3\,(m_1+m_2+m_3)r_1^2\ddot{\varphi}_1=2\left(M_1-\frac{r_1}{r_2}M_2-\frac{r_1}{r_3}M_3\right).$$

Бундан

$$\varepsilon_1=\frac{2\left(M_1-\frac{r_1}{r_2}M_2-\frac{r_1}{r_3}M_3\right)}{(m_1+m_2+m_3)\,r_1^2} \tag{21}$$

ҳосил бўлади.

АДАБИЁТЛАР

1. О. **Аҳмаджонов.** Физика курси. Механика ва молекуляр физика. «Ўқитувчи», Т., 1984.
2. Н. Н. Никитин. «Курс теоритической механики». Высщая школа. М., 1990
3. И. В. Мешчерский. «Назарий механикадан масалалар тўплами». «Ўқитувчи», Т., 1989.
4. В. В. Мультановский. «Курс теоретической физики. «Классическая механика». «Просвещение». М., 1989.
5. Сборник задач по теоретической механике. Под общей редакцией Н. А. Бражниченко. «Высщая школа», М., 1986.
6. И. И. Ольховский. Курс теоретической механики для физиков. «Наука», М., 1970.
7. А. Шоҳайдарова, Ш. Шозиётов, Ш. Зоиров, «Назарий механика». «Ўқитувчи», Т., 1981.
8. М. Т. Ўрозбоев. «Назарий механика курси». «Ўқитувчи», Т., 1966.
9. Я. Л. Геронимус. «Теоретическая механика», «Наука», М., 1973.
10. А. А. Яблонский. «Курс теоретической механики». Часть II, «Высшая школа», М., 1984.

МУНДАРИЖА

XVIII боб. Зарба назариясининг асослари

XIX боб. Умумлашган координаталар ва умумлашган куч. Мумкин бўлган кўчиш принципи.

XX боб. Лагранж теоремалари

Е 93

Ёқубов Ю. Н., Саидов С. А.
Назарий механика:
Пед. ин-тларининг талабалари учун ўқув
Ўқитувчи, 1997.—?б.

I. Автордош.

БЕҚ 22.21я73

ЮНУС НЎМОНОВИЧ ЁҚУБОВ
САЪДУЛЛА АБДУЛЛАЕВИЧ САИДОВ

НАЗАРИЙ МЕХАНИКА

Педагогика институтларининг
талабалари учун ўқув қўлланмаси

Тошкент «Ўқитувчи» 1997

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррир *Х. Пўлатхўжаев*
Расмлар муҳаррири *М. Кудряшова*
Техник муҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳ *М. Иброҳимова*

ИБ № 6849

Теришга берилди 9.10.95. Босишга рухсат этилди 12.08.96. Формати $84\times108^1/_{32}$. Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 27,30. Шартли кр.-отт. 27,45. Нашр. л. 20,2. 2000 нусхада босилди. Буюртма № 2815.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-42-95.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1997.