Т.А. САРИМСОҚОВ

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ НАЗАРИЯСИ

Т. А. САРИМСОҚОВ

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ФУНКЦИЯЛАРИ НАЗАРИЯСИ

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим
вазирлиги дорилфунунларнинг ва педагогика
олийгоҳларининг математика ҳамда
физика-математика куллиётлари талабалари
учун дарслик сифатида рухсат этган*

УЧИНЧИ НАШРИ

ТОШКЕНТ
«ЎЗБЕКИСТОН»
1993

Қимматли онамнинг порлоқ
хотирасига бағишлайман

ИККИНЧИ НАШРГА СЎЗ БОШИ

Ушбу китобнинг биринчи нашри чиққанига 12 йилдан ошди. Бу вақт мобайнида китоб бутунлай тарқалиб, унинг иккинчи нашрига эҳтиёж сезилиб қолди. Ундан ташқари, бу вақт ичида университетларнинг ҳамда педагогика институтларининг ўқув программаларига ҳам баъзи бир ўзгартиришлар киритилди. Буни ҳисобга олиб, китобнинг иккинчи нашрини биринчи нашрга кирмаган бир қанча маълумотлар билан тўлдиришга тўғри келди. Хусусан, ҳозирги вақтда эҳтимоллар назарияси ва функционал анализда абстракт ўлчов тушунчасидан кенг фойдаланилаётганлигини кўзда тутиб, янги IV бобни (Ўлчов тушунчасини умумлаштириш), VII бобдаги (Лебег интеграли) 40—41-§ ларни, X бобдаги (Лебегнинг аниқмас интеграли. Абсолют узлуксиз функциялар) 51-§ ни қўшдик. Тўлалик учун яна бир янги XII бобни (Тартибланган тўпламлар. Трансфинит сонлар) ҳам киритдик.

Метрик фазолар назарияси муаллифнинг «Функционал анализ курси» китобида («Ўқитувчи», Т., 1980) кенгроқ берилганлиги туфайли уни иккинчи нашрга киритмадик.

Булардан ташқари, биринчи нашрдаги сезилган камчиликлар тузатилди, кўпгина параграфлар янги маълумотлар билан бойитилди ва матн бирмунча силлиқланди, машқ учун масалаларга кўпгина янги масалалар қўшилди ва фойдаланилган адабиёт рўйхати кенгайтирилди.

Китобни нашрга тайёрлашда проф. Ж. Ҳожиев ҳамда доц. О. Хаитовлар қатнашишди. Уларга ўз миннатдорчилигимни билдираман.

Т. А. Саримсоқов

Тошкент, 1980 йил, август

БИРИНЧИ НАШРГА СЎЗ БОШИ

Мазкур китобни ёзишда В. И. Ленин номидаги Тошкент Давлат университетининг физика-математика (кейинроқ эса механика-математика) факультетларида бир неча йиллар давомида ўқилган лекциялардан фойдаланиб:

1. Дарсликнинг илмий жиҳатдан жиддий бўлиши;

2. Унинг ҳажми деярли катта бўлмай, университетларнинг механика-математика ва педагогика институтларининг физика-математика факультетларининг программалари асосида тузилиши;

3. Методологик масалаларни фаннинг тарихий ривожланиши билан узвийлаштириб берилиши каби принципларга риоя қилишни лозим топдик.

Биринчи принцип ўз навбатида «Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси» дарслиги ўз ичига қандай илмий материалларни олиши зарур, деган масалага бевосита боғлиқдир. Бу масала рус тилидаги математик адабиётда асосан П. С. Александров ва А. Н. Колмогоровлар томонидан тузилган ва 1938 йилда биринчи марта нашр этилган «Теория функций действительного переменного» китобида қониқарли ҳал қилинган. Шунинг учун ҳам методологик жиҳатдан юқоридаги 1 ва 2- принципларни бажаришда кўрсатилган дарсликнинг ва бошқа мавжуд манбаларнинг ижобий хислатларидан фойдаландик.

3- принципга келганда эса бу китобда баён этилган илмий фактларни ёритишда биз уларнинг тарихий ривожланиши масаласини кўпроқ назарда тутдик.

Бу дарсликдан педагогика институтларининг физика-математика факультетларининг студентлари ҳам фойдалана олишлари учун биз қўшимча XI бобни, асосан педагогика институтларининг программаларига кирган бўлиб, университет программаларига кирмаган материалларга бағишладик.

Юқорида баён этилган принциплар китобда асосан акс эттирилган бўлса, муаллиф мамнун бўлар эди. Қўлёзмани нашрга тайёрлашда физика-математика фанлари кандидати Ж. Ҳожиев ўз устига китобнинг илмий муҳаррирлигини олиб, кўп қимматбаҳо маслаҳатлар берди. Унга самимий миннатдорчилигимни билдираман.

Т. А. Саримсоқов

Тошкент, 1967 йил, август

I боб

ТЎПЛАМЛАР НАЗАРИЯСИДАН АСОСИЙ МАЪЛУМОТЛАР

1- §. Тўплам тушунчаси

Тўплам тушунчаси математиканинг бошланғич тушунчаларидан биридир. Одатда бу тушунча таърифсиз қабул қилинади. Бунинг сабаби шундаки, бу тушунчага бериладиган таърифнинг ўзи ҳам янада соддароқ тушунчага асосланган бўлиши керак; аммо биз бундай тушунчага эга эмасмиз. Шунинг учун тўплам таърифини қидирмасдан, уни мисоллар билан тушунтирамиз.

Масалан, ўзбек алифбосининг барча ҳарфлари тўплам ҳосил қилади дейиш мумкин; шунингдек, Тошкент шаҳридаги ҳамма ўрта мактаблар, ҳамма бутун мусбат сонлар, ҳамма узлуксиз функциялар, бирор китобнинг саҳифалари, тўғри чизиқдаги барча нуқталар ҳам тўплам ташкил этади. Бундай мисолларни чексиз кўп келтириш мумкин. Умуман, тўплам тушунчасини англашда унинг турли нарсаларнинг бирлашмаси (мажмуаси) эканлигини унутмаслик керак.

Берилган тўпламни ҳосил қилган нарсаларни тўпламнинг *элементлари* дейилади. Тўпламнинг элементлари турли нарсалардан, масалан, функциялар, сонлар, мактаблар ва ҳоказолардан иборат бўлиши мумкинлигини юқоридаги мисоллардан кўриб турибмиз. Одатда тўплам берилганда унинг элементлари бир ёки бир неча белгиларга мувофиқ аниқланган бўлади. Бу белгиларга асосланиб, ҳар бир нарса берилган тўпламнинг элементи эканлигини ёки элементи эмаслигини айта олиш мумкин.

Тўплам тушунчаси янада ёрқинроқ бўлиши учун шуни айтиб ўтиш керакки, тўпламда бир хил (бир-биридан фарқ қилиб бўлмайдиган) элементлар бўлмайди. Масалан,

$$(x-1)^2(x+1)^3=0$$

тенгламанинг барча илдизлари тўплами 1,1,—1, —1, —1 элементлардан иборат бўлмасдан, балки 1 ва —1 элементлардан иборат.

Бундан буён қулайлик учун *бўш тўплам* тушунчасини киритамиз: *агар тўпламнинг бирорта ҳам элементи бўлмаса, бундай тўплам бўш тўплам дейилади.*

Бўш тўплам $\varnothing$ (баъзан эса Λ ёки 0) билан белгиланади.

Бундан буён тўпламларни латин алифбосининг A, B, C, ..., X, Y, Z сингари бош ҳарфлари билан, тўпламларнинг элементларини эса a, b, c, ..., x, y, z каби кичик ҳарфлари билан белгилаймиз. Бирор a нарса A тўпламнинг элементи эканлигини

$$a \in A$$

шаклда, a нарса A тўпламга тегишли эмаслиги эса

$$a \overline{\in} A$$

кўринишда (баъзан $a \notin$ A кўринишда) ёзилади. Ҳар қандай a нарса учун юқоридаги муносабатлардан биригина албатта ўринли бўлиши табиийдир.

Тўпламлар назариясининг тарихи у қадар узоқ эмас. Бу соҳадаги дастлабки жиддий ишлар XIX асрнинг иккинчи ярмида қилинган. Тўпламлар назарияси математиканинг алоҳида соҳаси сифатида немис математиги Георг Канторнинг ишларида юзага келди. Георг Канторнинг ғоялари математиклар орасида дастлаб ишончсизликка учраган бўлса-да, кейинчалик кенг тараққий қилди ва XX асрда бутун математика тўпламлар назарияси нуқтаи назаридан қайтадан қурилди.

Ҳозирги вақтда тўпламлар назарияси математиканинг жуда ҳам кенг ва чуқур ишланган соҳаларидан бири бўлиб, бу назария мазкур курснинг (ва ҳатто бутун математиканинг ҳам) пойдевори ҳисобланади.

2- §. Тўпламнинг қисмлари ва тўпламлар устида амаллар

Бундан кейин доимо қуйидаги асосий тушунчалар ва амаллар билан иш олиб боришга тўғри келади.

1-таъриф. *Агар A тўпламнинг ҳар бир элементи B тўпламнинг ҳам элементи бўлса, A тўплам B тўпламнинг қисми, баъзан қисм тўплами дейилади ва бу муносабат*

$$A \subset B$$

шаклда ёзилади.

Таърифдан ҳар қандай A тўпламнинг ўзи ўзининг қисми, яъни

$$A \subset A$$

экани бевосита кўринади.

Бўш $\varnothing$ тўплам эса ҳар қандай тўпламнинг қисмидир. A ва $\varnothing$ тўпламлар A тўпламнинг *хосмас қисмлари* дейилади; A тўпламнинг ҳамма бошқа қисмлари эса унинг *хос қисмлари* дейилади.

Мисоллар. 1. A тўплам 1 ва 2 рақамларидан, B тўплам эса 1, 2, 3, 4, 5 рақамларидан иборат бўлсин, яъни

$$A = \{1,\ 2\},\ B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},$$

у ҳолда A тўплам B нинг хос қисми бўлади.

2. $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 6\}$ ва $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ тўпламларнинг ҳеч бири иккинчисининг қисми эмас.

3. Ҳамма тоқ сонлар тўплами барча бутун сонлар тўпламининг хос қисмидир.

4. A тўплам

$$x^2 - 1 = 0$$

тенгламанинг илдизларидан, B тўплам эса

$$x^4 - 1 = 0$$

тенгламанинг ҳақиқий илдизларидан иборат бўлса, A тўплам B нинг хосмас қисми бўлади.

2-таъриф. *X ихтиёрий тўплам бўлиб, A тўплам унинг бирор қисми бўлсин. X тўпламнинг A га кирмаган барча элементларидан иборат тўпламни A нинг X га қадар тўлдирувчи тўплами дейилади ва у $C_X(A)$ каби белгиланади.*

Масалан, агар

$$A = \{1,\ 2\}, \qquad \overset{X}{\cancel{B}} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

бўлса, у ҳолда

$$C_X(A) = \{3,\ 4,\ 5\}.$$

3-таъриф. *Агар A тўплам B тўпламнинг қисми ва B тўплам A тўпламнинг қисми бўлса, A тўплам B тўпламга тенг дейилади ва бу муносабат*

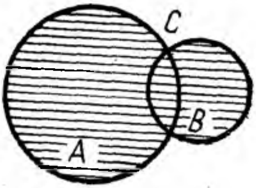
$$A = B$$

шаклда ёзилади; демак, $A = B$ тенглик $A \subset B$ ва $B \subset A$ муносабатларнинг биргаликда бажарилишига тенг кучлидир.

Масалан, A тўплам 1 ва -1 элементлардан, B тўплам эса ушбу

$$(x-1)^2(x+1)^3=0$$

тенгламанинг барча илдизларидан иборат бўлса, A тўплам B тўпламга тенг бўлади.



1- шакл.

4-таъриф. *A ва B икки ихтиёрий тўплам бўлсин. Агар C тўплам фақатгина A ва B тўпламларнинг элементларидан иборат бўлса, у ҳолда C тўплам A ва B тўпламларнинг йиғиндиси дейилади ва*

$$A \cup B = C$$

кўринишда ёзилади (1- шакл).

Бу $\cup$ амал *тўпламларни қўшиш амали* дейилади.

Шуни қайд қилиб ўтиш керакки, агар бирор элемент A тўпламга ҳам, B тўпламга ҳам кирса, бу элемент C тўпламда бир марта ҳисобланади.

Агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $A \cup B = B$; хусусий ҳолда $A \cup A = A$ бўлади.

Мисоллар. 1. A тўплам 1, 2, 3, 4, 5 рақамларидан, B тўплам эса 0, 2, 4, 6, 8 рақамларидан иборат бўлса, бу тўпламларнинг йиғиндиси бўлмиш C тўплам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 рақамларидан иборатдир, яъни

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

2. A тўплам барча жуфт сонлардан, B тўплам эса 3 га бўлинадиган барча бутун сонлардан иборат, яъни

$$A = \{\pm 2, \pm 4; \pm 6, \ldots\}, \quad B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9 \ldots\}$$

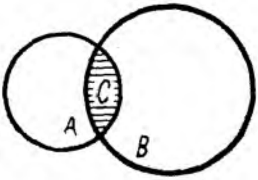
бўлса, у ҳолда

$$C = A \cup B = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \ldots\}.$$

5-таъриф. *Икки A ва B тўпламнинг умумий элементларидан тузилган C тўплам A ва B тўпламларнинг умумий қисми ёки кўпайтмаси (баъзан эса кесишмаси) дейилади* (2- шакл) ва

$$C = A \cap B \text{ ёки } C = A \cdot B$$

кўринишда ёзилади.



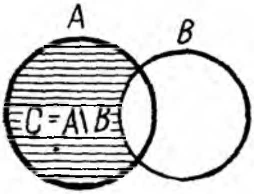
2- шакл.

Мисоллар. 1. Агар

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \; B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$



3- шакл.

2. Агар $A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \dots\}$,

$$B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \cap B = \{\pm 6, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \dots\}.$$

Хусусий ҳолда, масалан, ё $A \subset B$, ёки $A = B$, ёки $B = \varnothing$ бўлса, у ҳолда мос равишда $A \cap B = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$ бўлади. Агар A ва B тўпламларнинг умумий элементлари бўлмаса, у ҳолда $A \cap B = \varnothing$ бўлади.

6-таъриф. *A тўпламнинг B тўпламга кирмаган барча элементларидан тузилган C тўплам A ва B тўпламларнинг айирмаси дейилади ва у*

$$C = A \setminus B$$

кўринишда ёзилади (3- шакл).

Мисоллар. 1. Агар $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ бўлса, у ҳолда

$$A \setminus B = \{1, 3, 5\}.$$

2. Агар

$$A = \{\pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \dots\}$$
$$B = \{\pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \dots\}$$

бўлса, у ҳолда

$$A \setminus B = \{\pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 10, \pm 14, \dots\}.$$

Ушбу

$$C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

тўплам A ва B тўпламларнинг *симметрик айирмаси* дейилади ва

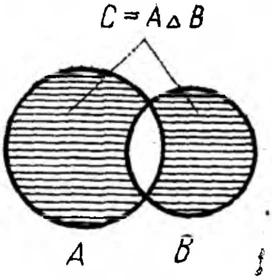
$$C = A \Delta B$$

кўринишда белгиланади (4- шакл).

Мисоллар. 1. Агар $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ *бўлса*, у ҳолда

$$A \Delta B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

2. Агар A тўплам $[0,1]$ сегментдаги барча ҳақиқий сонлар тўплами, B тўплам эса $[0,2]$ сегментдаги



4- шакл.

барча рационал сонлар тўплами бўлса, у ҳолда $A\triangle B$ тўплам [0,1] оралиқдаги барча иррационал сонлар ва (1,2) ярим очиқ оралиқдаги барча рационал сонлардан иборат тўплам бўлади.

7-таъриф. *Биринчи элементи X тўпламга ва иккинчи элементи Y тўпламга кирган барча (x, y) жуфтлардан иборат тўплам X ва Y тўпламларнинг Декарт (тўғри) кўпайтмаси дейилади ва*

$$[X,Y] \text{ ёки } X\times Y$$

каби белгиланади.

Мисоллар. 1. R ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб, $X=R$ ва $Y=R$ бўлса, у ҳолда $[R, R]$ текисликдаги барча нуқталар тўплами бўлади.

2. Z барча бутун сонлар тўплами бўлиб, $X=Z$, $Y=Z$ бўлса, $[Z, Z]$ текисликдаги координаталари бутун сонлардан иборат бўлган барча нуқталар тўпламидир.

Агар R^n фазо n ўлчамли фазо бўлиб, $X=R^k$, $Y=R^l$ бўлса, у ҳолда

$$[R^k, R^l] = R^{k+l}$$

бўлади.

Тўпламлар устида юқорида келтирилган амаллар қуйидаги хоссаларга эга:

$$\left.\begin{array}{l}1.\ A\cup B=B\cup A;\\ 2.\ A\cap B=B\cap A;\end{array}\right\}\text{ коммутативлик хоссаси}$$

$$\left.\begin{array}{l}3.\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C);\\ 4.\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;\end{array}\right\}\text{ ассоциативлик хоссаси}$$

$$\left.\begin{array}{l}5.\ (A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);\\ 6.\ (A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C);\\ 7.\ A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).\end{array}\right\}\text{ дистрибутивлик хоссаси}$$

Бу тенгликларнинг исботлари бир-бирига ўхшаш бўлгани сабабли, уларнинг биттасини, масалан, 5-тенгликни исбот қилиш билан чегараланамиз. 5-тенгликни исбот этиш учун унинг чап томонидаги $(A\cup B)\cap C$ тўпламнинг ҳар бир элементи унинг ўнг томонидаги $(A\cap C)\cup(B\cap C)$ тўпламнинг ҳам элементи эканлигини ва, аксинча, $(A\cap C)\cup(B\cap C)$ тўпламнинг ҳар бир элементи $(A\cup B)\cap C$ тўпламнинг ҳам элементи эканлигини кўрсатиш кифоя. $a\in(A\cup B)\cap C$ бўлсин деб фараз қилайлик. Бундан, кўпайтманинг таърифига мувофиқ, $a\in A\cup B$ ва $a\in C$ муносабатлар келиб чиқади; $a\in A\cup B$ муносабатдан эса $a\in A$ ёки $a\in B$ муносабатлардан камида бирининг ўринлилиги келиб чиқади; агар $a\in A$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $a\in A\cap C$ бўлади, агар $a \in B$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $a \in B \cap C$ бўлади. Демак, ҳар иккала ҳолда ҳам $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ муносабат келиб чиқади, яъни 5-тенгликнинг чап томонидаги тўпламнинг ихтиёрий элементи ўнг томондаги тўпламнинг ҳам элементи экан.

Энди $a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда, йиғиндининг таърифига асосан $a \in A \cap C$ ёки $a \in B \cap C$ муносабатларнинг камида бири ўринли: агар $a \in A \cap C$ бўлса, бундан $a \in A$ ва $a \in C$ муносабатлар келиб чиқади, агар $a \in B \cap C$ бўлса, бундан $a \in B$ ва $a \in C$ муносабатлар келиб чиқади. Демак, $a \in A \cup B$ ва $a \in C$ муносабатлар ҳаммавақт ўринли. Булардан эса $a \in (A \cup B) \cap C$ муносабат келиб чиқади, яъни 5-тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламнинг ихтиёрий элементи унинг чап томондаги тўпламнинг ҳам элементи экан. Шу билан 5-тенглик исбот этилади.

Юқорида келтирилган 1 — 7 хоссалардан кўриниб турибдики, тўпламлар устидаги амаллар сонлар устидаги амалларга ўхшаш экан. Лекин шу билан бирга тўпламлар устидаги амаллар сонлар устидаги амаллардан фарқ қилади. Масалан, юқорида кўрдикки, ҳар қандай A тўплам учун $A \cup A = A$ ва $A \cap A = A$. Ваҳоланки, ҳар қандай сон учун бу муносабатларга ўхшаш муносабатлар ўринли эмас.

3-§. Тўпламлар системаси. Тўпламларни синфларга ажратиш

Бирор X тўплам берилган бўлиб, унинг ҳар бир x элементига бирор A_x тўплам мос келтирилган бўлсин. Элементлари A_x тўпламлардан иборат H тўплам *тўпламлар системаси* дейилади. Келгусида H тўпламлар системасини қулайлик учун

$$H = \{A_x\}, \; x \in X$$

шаклда ёзамиз.

Мисоллар. 1. Агар $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ бўлса, у ҳолда

$$H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

бўлади. Бундай системани чекли система дейилади.

2. Агар $X = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ бўлса, у ҳолда

$$H = \{A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n, \ldots\}$$

бўлади. Одатда бундай тўпламлар системаси тўпламлар кетма-кетлиги (баъзан саноқли система) дейилади.

3. Агар xOy текисликни олиб, X деб Ox ўқнинг нуқталари тўпламини ва A_x деб Ox ўқни x нуқтада кесиб ўтувчи вертикал тўғри чизиқнинг нуқталаридан иборат тўпламни олсак, у ҳолда H тўпламлар системаси текисликдаги барча вертикал тўғри чизиқлардан иборат бўлади.

H тўпламлар системасининг баъзи элементларидан ташкил топган G системани унинг *қисми ёки қисм, системаси* дейилади.

Икки тўпламнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси каби, ихтиёрий тўпламлар системаси $H=\{A_x\}$, $x \in X$ ни ҳосил қилувчи A_x тўпламларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси тушунчаларини киритиш мумкин.

$H=\{A_x\}$, $x \in X$ тўпламлар системасини ташкил этувчи A_x *тўпламлар йиғиндиси* (қисқароқ, тўпламлар системасининг йиғиндиси) деб шундай C тўпламга айтиладики, A_x тўпламларнинг ҳар бири C тўпламнинг қисми бўлиб, C тўпламнинг ҳар бир элементи A_x тўпламларнинг камида биттасига тегишли бўлади. Тўпламлар системасининг йиғиндиси учун

$$C=\bigcup_{x\in X} A_x$$

белгилаш ишлатилади.

Хусусан, чекли $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ система учун

$$C=\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

белгилаш, саноқли $H=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ система учун

$$C=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

белгилаш ишлатилади.

Масалан, тўпламлар системаси учун юқорида берилган учинчи мисолда тўпламлар системасининг йиғиндиси текисликдаги барча нуқталардан иборат.

$H=\{A_x\}$, $x \in X$ *тўпламлар системасининг кўпайтмаси* (баъзан кесишмаси ёки умумий қисми) деб, бир вақтда ҳар бир A_x тўпламга кирувчи барча элементлардан иборат бўлган C тўпламга айтилади. Тўпламлар системасининг кўпайтмаси қуйидагича белгиланади:

$$C=\bigcap_{x\in X} A_x.$$

Хусусан, чекли $H=\{A_1, \ldots A_n\}$ система учун

$$C=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

белгилаш, саноқли $H=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ система учун

$$C=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

белгилаш ишлатилади.

Масалан, X деб 1 дан катта бўлган барча ҳақиқий сонлар тўпламини ва A_x деб

$$|z|<x$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча комплекс сонлар тўпламини олсак, у ҳолда $C=\bigcap_{x\in X}A_x$ тўплам ушбу

$$|z|\leqslant 1$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча комплекс сонлардан иборат бўлади.

2-§ даги дистрибутивлик қонуни тўпламлар системаси учун қуйидагича умумлаштирилади.

3.1-теорема. *Ихтиёрий E тўпламнинг исталган сондаги A_x, $x\in X$ қисм тўпламлари учун қуйидаги айниятлар ўринли:*

$$E\setminus\bigcap_{x\in X}A_x=\bigcup_{x\in X}(E\setminus A_x),\ [C_E(\bigcap_{x\in X}A_x)=\bigcup_{x\in X}C_E A_x]; \tag{1}$$

$$E\setminus\bigcup_{x\in X}A_x=\bigcap_{x\in X}(E\setminus A_x),\ [C_E(\bigcup_{x\in X}A_x)=\bigcap_{x\in X}C_E A_x]. \tag{2}$$

Бу айниятлар *иккилик қонунлари* деб аталади.

Исбот. Бу айниятларнинг иккаласи ҳам бир хил усулда исботланиши туфайли, масалан, биринчи айниятни исботлаш билан чегараланамиз. Бунинг учун юқоридагига ўхшаш

$$E\setminus\bigcap_{x\in X}A_x\subset\bigcup_{x\in X}(E\setminus A_x)\ \text{ва}\ E\setminus\bigcap_{x\in X}A_x\supset\bigcup_{x\in X}(E\setminus A_x)$$

муносабатларнинг иккаласи ҳам ўринли эканлигини кўрсатиш кифоядир.

Фараз қилайлик, $a\in E\setminus\bigcap_{x\in X}A_x$ ихтиёрий элемент бўлсин.

2-§ даги 6-таърифга асосан $a\in E$, аммо $a\,\overline{\in}\bigcap_{x\in X}A_x$. Бундан ҳеч бўлмаганда бирорта $x = x_0 \in X$ индекс учун $a \in A_{x_0}$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $a \in E \setminus A_{x_0}$ бундан $a \in \bigcup\limits_{x \in X} (E \setminus A_x)$.

a элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E \setminus \bigcap_{x \in X} A_x \subset \bigcup_{x \in X} (E \setminus A_x) \qquad (3)$$

муносабатни оламиз.

Энди аксинча, фараз қилайлик, $a \in \bigcup\limits_{x \in X} (E \setminus A_x)$ ихтиёрий элемент бўлсин. У ҳолда 2-§ даги 4-таърифга мувофиқ бирор $x = x_1 \in X$ индекс учун $a \in E \setminus A_{x_1}$ муносабатга эга бўламиз ёки бундан $a \in E$ ҳамда $\overline{a \in} A_{x_1}$. Охирги муносабатдан $a \overline{\in} \bigcap\limits_{x \in X} A_x$ эканлиги келиб чиқади. Бундан $a \in E \setminus \bigcap\limits_{x \in X} A_x$ муносабатни оламиз.

a элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E \setminus \bigcap_{x \in X} A_x \supset \bigcup_{x \in X} (E \setminus A_x) \qquad (4)$$

муносабатга эга бўламиз. (3) ва (4) муносабатлар (1) айниятни исботлайди.$_*$[1]

Энди чекли ёки саноқли система учун Декарт кўпайтмасининг таърифини берамиз.

Чекли $H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ тўпламлар системасининг *Декарт кўпайтмаси* деб, элементлари тартиб билан ёзилган n та элементли $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(a_i \in A_i)$ сатрлардан иборат тўпламга айтилади ва $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$, баъзан эса $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ ёки $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} A_k$ орқали белгиланади.

Саноқли $H = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ тўпламлар системасининг *Декарт кўпайтмаси* деб, элементлари $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $(a_i \in A_i)$ кўринишдаги барча кетма-кетликдан иборат тўпламга айтилади ва $\prod\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, баъзан эса $A_1 \times A_2 \times \ldots, \times A_n \times$ $\times \ldots$ ёки $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ орқали белгиланади.

---

[1] Юлдузча теореманинг исботи тугалланганлигини англатади.

Мисоллар. 1. Агар R ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб

$$A_i = R. \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

бўлса, у ҳолда

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = R^n$$

n ўлчамли фазодан иборат.

2. Агар $A_i = R$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ бўлса, у ҳолда

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = R^{\infty},$$

яъни координаталарининг сони саноқли (6-§ га қаранг) бўлган векторлардан иборат фазо бўлади.

Агар $H = \{A_x\}$, $x \in X$ тўпламлар системаси берилиб, бу системага кирувчи ҳар қандай икки тўпламнинг умумий элементлари бўлмаса ва бу системанинг йиғиндиси M бўлса, у ҳолда M тўплам *қисмларга* (ёки *синфларга*) *бўлинган* дейилади;

A_x тўпламлар M тўпламнинг *синфлари*, H система эса *бўлинма* дейилади. Масалан, натурал сонлар тўпламини жуфт сонлардан ва тоқ сонлардан иборат иккита синфга бўлиш мумкин.

M тўплам синфларга бўлинган бўлсин. Агар бу тўпламнинг икки a ва b элементи бир синфга тегишли бўлса, уларни берилган *бўлинмага нисбатан эквивалент дейилади* ва $a \sim b$ шаклда ёзилади.

Эквивалентлик муносабати қуйидаги хоссаларга эга:

1. Симметриклик хоссаси. Агар $a \sim b$ бўлса, у ҳолда $b \sim a$.

2. Транзитивлик хоссаси. Агар $a \sim b$, $b \sim c$ бўлса, у ҳолда $a \sim c$.

3. Рефлексивлик хоссаси. Ҳар қандай a элемент ўз-ўзига эквивалент, яъни $a \sim a$.

Энди M ихтиёрий тўплам бўлиб, унинг баъзи элементларини бирор қоидага мувофиқ эквивалент дейиш мумкин бўлсин, яъни симметриклик, транзитивлик ва рефлексивлик хоссаларига эга бўлган муносабат берилган деб фараз қилайлик. У ҳолда бу эквивалентлик муносабати M тўпламни синфларга бўлади.

Шуни исботлаймиз. $M(a)$ синф деб, M тўпламнинг a га эквивалент бўлган барча элементларидан иборат тўпламни белгилаймиз. Рефлексивлик хоссасига кўра, ҳар бир a элемент ўз синфига киради. Энди, агар

$M(a)\bigcup M(b)\neq\varnothing$ бўлса, $M(a)=M(b)$ муносабат ўринли бўлишини кўрсатамиз.

$M(a)$ ва $M(b)$ синфлар умумий c элементга эга бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда, синфларнинг таърифига асосан, $a\sim c$, $b\sim c$; демак, симметриклик хоссасига биноан $c\sim b$, булардан эса транзитивлик хоссасига кўра $a\sim b$.

Энди b' элемент $M(b)$ синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин. У ҳолда $a\sim b\sim b'$ ва транзитивлик хоссасига кўра $a\sim b'$, яъни $b'\in M(a)$. Демак, $M(b)\subset M(a)$. a' элемент $M(a)$ синфнинг ихтиёрий элементи бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда $a\sim a'$, симметриклик хоссасига асосан $a'\sim a$ ва $a\sim b$ бўлгани учун, транзитивлик хоссасига кўра $a'\sim b$, бундан эса $b\sim a'$, яъни $a'\in M(b)$; демак, $M(a)\subset M(b)$. Шундай қилиб, $M(b)\subset\subset M(a)$ ва $M(a)\subset M(b)$, яъни $M(a)=M(b)$.

Мисол. M сифатида барча натурал сонлар тўпламини оламиз. Агар иккита a ва b натурал сонни 3 га бўлганда улар тенг қолдиққа эга бўлса, бу сонларни эквивалент деймиз. Бу эквивалентлик муносабати M тўпламни 3 та M_0, M_1 ва M_2 қисмга бўлади. Бу ерда M_i $(i=0,\ 1,\ 2)$ тўплам 3 га бўлганда қолдиғи i бўлган барча натурал сонлардан иборат.

4- §. Тўпламларни бир-бирига акс эттириш

Турли тўпламлар орасидаги боғланиш акс эттириш тушунчаси орқали ўрнатилади.

1-таъриф. *Иккита X ва Y тўплам берилган бўлсин. Агар маълум бир қоида бўйича X тўпламнинг ҳар бир элементига Y тўпламнинг биргина элементи мос қўйилган бўлса, X тўплам Y га акс эттирилган дейилади ва бу муносабат*

$$f:X\to Y \tag{1}$$

шаклда ёзилади. Баъзан (1) акс эттиришни X тўпламда аниқланган ва қийматлари Y да бўлган *функция* (ёки *мослик)* деб ҳам аталади. Жумладан, Y деб ҳақиқий сонлар тўпламини олсак, у ҳолда (1) акс эттиришни X тўпламдаги *ҳақиқий функция* (баъзан *функционал)* дейилади. Комплекс функция (функционал) шунга ўхшаш таърифланади.

Мисоллар. 1. Агар R ҳақиқий сонлар тўплами бўлса, у ҳолда

$$y=f(x)=x^3$$

функция R ни R га акс эттиради.

2. Дирихле функцияси

$$y = \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

ҳақиқий сонлар тўпламини 0 ва 1 сонларидан иборат тўпламга акс эттиради.

3. Агар $X=R^2$ икки ўлчамли фазо ва $Y=R$ бир ўлчамли фазо бўлса, у ҳолда R^2 фазони R фазога ҳар қандай акс эттириш бу, аслини олганда, икки аргументли функциядир. Масалан,

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

4. Агар $X=R$ бир ўлчамли фазо ва $Y=R^2$ икки ўлчамли фазо бўлса, у ҳолда R фазони R^2 фазога ҳар қандай акс эттириш бу иккита бир аргументли функциядир. Масалан, ушбу $\psi(x) = (f(x), g(x)) = (x^3, 2x)$ жуфтлик.

5. Агар C $[a, b]$ орқали $[a, b]$ сегментдаги барча узлуксиз функциялар тўпламини белгиласак, у ҳолда

$$f(x) \to \int_a^b f(x)\,dx$$

мослик $C[a, b]$ ни R га акс эттиради.

X тўпламнинг Y тўпламга барча акс эттиришларининг ўзи тўплам ҳосил қилади. Бу тўплам Y^X билан белгиланади.

Мисоллар. 1. $\{1, 2\}$ тўпламнинг $\{a, b\}$ тўпламга барча акс эттиришлари тўплами қуйидаги элементлардан иборат:

$$(1 \to a,\ 2 \to a),\ (1 \to a,\ 2 \to b),\ (1 \to b,\ 2 \to a),\ (1 \to b,\ 2 \to b).$$

2. Ҳақиқий сонлар тўпламининг ўзини ўзига барча акс эттиришлар тўплами ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган барча ҳақиқий функциялардан иборат.

Берилган $f{:}X \to Y$ акс эттиришда x элементга мос келувчи y элемент учун $y=f(x)$ белгилаш ишлатилади ва уни x нинг *тасвири (образи)* дейилади. Масалан, юқорида келтирилган $y=x^3$ акс эттиришни олсак, бунда 2 сонининг тасвири 8 га тенг, — 3 нинг тасвири — 27 га тенг ва ҳоказо. Умуман, X тўпламнинг бирор P қисми берилган бўлса, P тўплам барча элементларининг Y даги тасвирларидан иборат бўлган тўплам P тўпламнинг f акс эттиришдаги *тасвири (образи)* дейилади ва у $f(P)$ билан белгиланади.

Y тўпламнинг ихтиёрий y элементи берилган бўлсин. X тўпламнинг y га аксланувчи барча элементларидан иборат қисми y элементнинг *асли (прообрази)* дейилади ва у $f^{-1}(y)$ каби ёзилади. Умуман, Y нинг Q қисми берилса, X нинг Q тўпламга ўтувчи қисми Q нинг *асли (прообрази)* деб аталади ва $f^{-1}(Q)$ каби ёзилади. Масалан, юқоридаги Дирихле функцияси орқали акс эттиришда 0 элементнинг асли барча иррационал сонлар тўпламидан, 1 элементнинг асли эса барча рационал сонлар тўпламидан иборатдир.

4.1-теорема. *Иккита A ва B тўплам йиғиндисининг (кўпайтмасининг) асли шу тўпламлар аслиларининг йиғиндисига (кўпайтмасига) тенг, яъни*

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\ (f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)).$$

Исбот. Теореманинг исботини йиғинди учун келтирамиз, кўпайтма учун исбот шунга ўхшаш. Фараз қилайлик, x элемент $f^{-1}(A\cup B)$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин. У ҳолда $f(x)\in A\cup B$. Бундан $f(x)\in A$ ёки $f(x)\in B$ муносабатларнинг камида бирига эга бўламиз. Бу муносабатлардан x элемент $f^{-1}(A)$ ёки $f^{-1}(B)$ тўпламларнинг камида биронтасига тегишли эканлиги келиб чиқади. Бу эса $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ эканлигини кўрсатади. x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$f^{-1}(A\cup B)\subset f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B) \tag{2}$$

муносабатга эга бўламиз.

Аксинча, фараз қилайлик, $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ ихтиёрий элемент бўлсин. У ҳолда $x\in f^{-1}(A)$ ёки $x\in f^{-1}(B)$ муносабатларнинг камида бирига эга бўламиз. Бу эса $f(x)\in A$ ёки $f(x)\in B$ муносабатлардан камида бирининг ўринли эканини кўрсатади. Демак, $f(x)\in A\cup B$ ёки $x\in f^{-1}(A\cup B)$ бўлади. Бундан

$$f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A\cup B) \tag{3}$$

муносабатга келамиз. (2) ва (3) муносабатлар теореманинг йиғинди учун ўринли эканини кўрсатади.*

Бу теорема чекли ёки чексиз сондаги тўпламларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси учун ҳам ўринлидир.

Агар Y тўпламдаги ҳар бир элементнинг асли бўш тўплам бўлмаса, у ҳолда X тўплам Y тўпламнинг *устига акс эттирилган* дейилади. Агар Y тўпламда шундай элемент мавжуд бўлсаки, бу элементнинг асли бўш тўплам бўлса, у ҳолда X тўплам Y тўпламнинг *ичига акс эттирилган* дейилади. Мисол учун, ҳақиқий сонлар тўпламини ўзини ўзига акс эттирувчи қуйидаги икки функцияни олайлик:

$$y=x^3,\qquad y=x^2.$$

Равшанки, уларнинг биринчиси устига акс эттириш, иккинчиси эса ичига акс эттиришдир.

Ичига акс эттиришни ҳар доим устига акс эттиришга келтириш мумкин; бунинг учун бу акс эттиришда Y тўпламни X тўпламнинг тасвири билан алмаштириш керак. Шундай қилиб, керак бўлганда, ихтиёрий акс эттиришни устига акс эттириш деб олиш мумкин.

Энди муҳим бир таърифни киритамиз.

2-таъриф. *$f:X\to Y$ устига акс эттириш берилган бўлсин. Агар Y даги ҳар бир элементнинг асли ягона бир элементдан иборат бўлса, у ҳолда бу акс эттириш ўзаро бир қийматли акс эттириш (муносабат) дейилади.*

Мисоллар. 1. $y=x^3$ функция ҳақиқий сонлар тўпламини ўзини ўзига ўзаро бир қийматли акс эттиради.

2. R_+ манфий бўлмаган барча ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Ушбу

$$y=x^2$$

функция R ни R_+ нинг устига акс эттиради. Бу акс эттириш ўзаро бир қийматли эмас, чунки, масалан, 1 сонининг асли иккита элементдан: 1 ва—1 сонларидан иборат.

Ихтиёрий

$$f:X\to Y$$

устига акс эттириш берилган бўлсин. Бу акс эттириш X тўпламни Y тўплам элементларининг аслиларидан (яъни $f^{-1}(y)$ лардан) иборат синфларга ажратади. Ҳосил бўлган синфлар тўпламини Z билан белгилаймиз. Ушбу

$$f^{-1}(y)\to y$$

мослик Z тўпламни Y тўпламга акс эттиради. Равшанки, бу акс эттириш ўзаро бир қийматлидир.

Энди ихтиёрий тўпламлар системаси учун Декарт кўпайтмасининг таърифини берамиз. $H=\{A_x\}$, $x\in X$ тўпламлар системасининг *Декарт кўпайтмаси* $\prod\limits_{x\in X} A_x$ деб, аниқланиш соҳаси X тўпламдан иборат бўлган шундай f функциялар тўпламига айтиладики, ҳар бир $x\in X$ учун $f(x)\in A_x$ муносабат бажарилади.

5-§. Тўпламнинг қуввати

Одатда чекли ва чексиз тўпламларни бир-биридан фарқ қиладилар. Элементларининг сони чекли бўлган тўплам чекли тўплам дейилади. Математикада кўпинча чексиз тўпламлар билан иш кўришга тўғри келади. Умуман, чексиз тўплам дейилганда шундай тўпламни кўзда тутиш кераки, бу тўпламдан битта, иккита ва ҳоказо элементларни олганда унда яна элементлар қолаверади. Масалан, натурал сонлар тўплами, барча тоқ сонлар тўплами, тўғри чизиқдаги ҳамма нуқталар тўплами, ҳамма узлуксиз функциялар тўплами — буларнинг ҳар бири чексиз тўпламдир.

Энди иккита чекли A ва B тўплам берилган бўлиб, уларни сон жиҳатдан солиштириш керак бўлсин. Бу масалани қуйидаги икки усул билан ҳал этиш мумкин:

1) бу тўпламлар элементларининг сонини ҳисоблаб чиқиб, чиққан сонларни солиштириш;

2) агар шундай бир қоида мавжуд бўлсаки, бу қоидага мувофиқ A тўпламнинг ҳар бир элементига B тўпламдан биргина элементни мос келтирилганда B тўпламнинг ҳар бир элементига A тўпламда ҳам биргина элемент мос келса, яъни A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлса, у ҳолда бу тўпламлар элементларининг сони жиҳатидан бир хил бўлади.

Иккинчи усулни яхшироқ тушуниш учун мисол кўрамиз.

Маълум бир аудиториядаги стуллар A тўпламни, маълум бир гуруҳ талабалари эса B тўпламни ташкил этсин. Биз A ва B тўпламларнинг элементларини ҳисобламасдан туриб, уларни сон жиҳатидан солиштирмоқчимиз. Агар ҳар бир стулга биттадан талаба ўтирганда, ўтирмаган талаба ҳамда бўш стул қолмаса, у ҳолда A тўпламдаги элементлар сони B тўпламдаги элементлар сонига тенг бўлади. Бунда A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат мавжуд бўлади.

Келтирилган усулларнинг фарқи чексиз тўпламларни солиштирганда яққол кўринади. Биринчи усул бўйича чексиз тўпламларни фарқ қилиб бўлмайди, чунки бу тўпламларнинг иккаласида ҳам элементларнинг сони чексиз. Аммо иккинчи усул билан, масалан, натурал сонлар тўплами элементлар сони жиҳатидан барча ҳақиқий сонлар тўпламидан фарқли эканлигини, яъни бу тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат мавжуд эмаслигини кўрсатиш мумкин (7-§ га қаранг).

1-таъриф. *Агар A ва B тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат мавжуд бўлса, у ҳолда бу тўпламлар эквивалент ёки тенг қувватли тўпламлар дейилади ва*

$$A \sim B$$

кўринишда ёзилади.

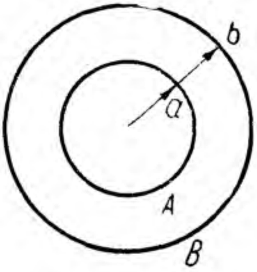
Одатда A тўпламга эквивалент бўлган тўпламлар синфи $\bar{A}$ билан белгиланади ва $\bar{A}$ ни A тўпламнинг *қуввати* ёки *кардинал сони* деб аталади. Чекли тўпламнинг қуввати (кардинал сони) сифатида одатда бу тўплам элементларининг сони олинади.

Тўпламларнинг эквивалентлиги, эквивалентлик тушунчасининг (3- § га қаранг) рефлексивлик, симметриклик ва транзитивлик хоссаларига эгалиги бевосита текширилади. Тўпламларнинг эквивалентлигига доир мисоллар келтирамиз:

1. Агар A тўплам ҳамма бутун мусбат сонлардан, B тўплам эса ҳамма бутун манфий сонлардан иборат бўлса, бу тўпламлар эквивалент бўлади. Эквивалентлик, масалан, қуйидагича ўрнатилади: мусбат n сонга манфий $-n$ сон мос қўйилади.

2. Агар A тўплам барча натурал сонлардан ва B тўплам барча $\frac{1}{n}$ (n — натурал сон) кўринишдаги сонлардан иборат бўлса, бу тўпламлар ўзаро эквивалент бўлади. Эквивалентлик, масалан, n натурал сонга $\frac{1}{n}$ сонни мос қўйиш билан ўрнатилади.

3. Агар A ва B тўпламлар радиуслари турлича бўлган иккита айлананинг нуқталаридан иборат бўлса, бу тўпламлар эквивалент бўлади. Эквивалентликни, масалан, қуйидагича ўрнатиш мумкин: бу айланаларни концентрик жойлаштириб, уларнинг бир радиусда ётган нуқталарини бир-бирига мос келтирамиз: бу мослик айланалар орасида ўзаро бир қийматли муносабат ўрнатади (5- шакл).



5- шакл.

Чекли тўпламларнинг қуввати сон бўлгани учун уларнинг қувватларини бир-бири билан солиштириш мумкин. Шунингдек, ихтиёрий тўпламларнинг қувватларини солиштириш учун қуйидаги таърифни киритамиз.

2- таъриф. *Қувватлари α ва β бўлган A ва B тўпламлар берилган бўлсин:*

$$\overline{\overline{A}}=\alpha,\ \overline{\overline{B}}=\beta.$$

Агар A ва B тўпламлар эквивалент бўлмаса ва B тўпламда A тўпламга эквивалент B' қисм мавжуд бўлса, B тўпламнинг қуввати A нинг қувватидан катта, A тўпламнинг қуввати эса B тўпламнинг қувватидан кичик дейилади ва

$$\beta>\alpha \quad \text{ёки} \quad \alpha<\beta$$

шаклда ёзилади.

Масалан, агар

$$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\ 200\}, \qquad \overline{\overline{A}} = 100,$$
$$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ 150\}, \qquad \overline{\overline{B}} = 150$$

бўлса, у ҳолда A тўплам B тўпламга эквивалент эмас, аммо унинг $B' = \{1,\ 2, \ldots,\ 100\}$ қисмига эквивалент. Демак,

$$\overline{\overline{A}} = 100 < \overline{\overline{B}} = 150.$$

Равшанки, ҳар қандай чекли тўпламнинг қуввати ҳар қандай чексиз тўпламнинг қувватидан кичик.

Энди чекли тўпламлар қувватларининг баъзи хоссаларини келтирамиз:

1) ихтиёрий икки A ва B чекли тўпламнинг қувватларини солиштириш мумкин, яъни уларнинг қувватлари учун қуйидаги уч муносабатдан фақат бири албатта ўринлидир:

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}.$$

2) агар $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$ тўплам N_n билан белгиланса, у ҳолда

$$N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_n,\ \ldots$$

тўпламлар барча чекли «эталон» тўпламларни беради, яъни ихтиёрий чекли тўплам ушбу $N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_n,\ \ldots$ тўпламларнинг биригагина эквивалент бўлади, бу тўпламларнинг ҳар қандай иккитаси эса ўзаро эквивалент эмас.

3) икки A ва B чекли тўплам йиғиндисининг қуввати чекли бўлиб,

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} - \overline{\overline{A \cap B}}$$

формула орқали топилади.

Бу хоссаларни чексиз тўпламларга умумлаштириш учун қуйидаги саволларга жавоб бериш керак:

1) бир-бирига эквивалент бўлмаган чексиз тўпламлар мавжудми?

2) ихтиёрий иккита чексиз тўпламни ўзаро солиштириш мумкинми, яъни ихтиёрий икки A ва B чексиз тўплам учун

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}, \quad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$$

муносабатларнинг фақат бири албатта ўринли бўладими?

3) чексиз «эталон» тўпламлар системасини тузиш мумкинми?

4) агар чексиз A ва B тўпламлар берилган бўлса, бу тўпламлар йиғиндисининг қуввати нимага тенг?

Ҳозирча биринчи саволга жавоб ижобий: масалан, барча натурал сонлар тўплами ва барча ҳақиқий сонлар тўплами ўзаро эквивалент эмас (7- § га қаранг).

Иккинчи савол фақат маълум шартни қаноатлантирувчи (тўла тартибланган) тўпламлар учунгина ижобий ҳал қилинган ([1] нинг III бобига қаранг).

Учинчи масала ҳали ҳал қилинмаган. Бу саволнинг бир қисми бўлган қуйидаги савол яқин кунларгача континуум муаммоси (проблемаси) номи билан машҳур эди: N — натурал сонлар тўплами ва R — ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Қуввати $\overline{\overline{N}} \leqslant \overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{R}}$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи A тўплам мавжудми? Бу муаммо 1963—1964 йилларда америка олими П. Д. Коэн томонидан ҳал қилинди. Коэннинг олган натижаси анча мураккаб бўлгани учун унинг устида тўхтаб ўтирмаймиз.

Тўртинчи савол ҳам иккинчи савол каби маълум шартни қаноатлантирувчи тўпламлар учун ечилган ([I] нинг III бобига қаранг).

6- §. Саноқли тўпламлар

Чексиз тўпламларнинг энг соддаси натурал сонлар тўпламидир.

1-таъриф. *Натурал сонлар тўплами ва унга эквивалент бўлган тўпламлар саноқли тўпламлар дейилади. Саноқли бўлмаган чексиз тўплам саноқсиз тўплам дейилади.*

Бу таърифдан кўринадики, ҳар қандай саноқли тўпламнинг элементларини барча натурал сонлар билан рақамлаб чиқиш имконияти бор; демак, саноқли тўпламни қуйидаги чексиз кетма-кетлик шаклида ёзишимиз мумкин:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

Энди саноқли тўпламларга оид бир неча теоремаларни исбот қиламиз.

6.1-теорема. *Чекли ёки саноқли тўпламларнинг сони чекли ёки саноқли йиғиндиси ҳам чекли ёки саноқли тўпламдир.*

Теореманинг мазмунини тушунишни осонлаштириш учун уни бир неча қисмга ажратамиз:

а) *ҳадларининг сони чекли бўлган чекли тўпламларнинг йиғиндиси чекли тўпламдир;*

б) *ҳадларининг сони чекли бўлган саноқли тўпламларнинг йиғиндиси саноқли тўпламдир;*

в) *ҳадларининг сони саноқли бўлган чекли тўпламларнинг йиғиндиси чекли ёки саноқлидир;*

г) *ҳадларининг сони саноқли бўлган саноқли тўпламларнинг йиғиндиси саноқли тўпламдир.*

Исбот. Биринчи қисм ўз-ўзидан равшан. Қолганларининг ҳаммасини исботламасдан, улардан бирини, масалан, тўртинчисини исботлаймиз; иккинчи ва учинчи қисмларнинг исботи шунга ўхшаш бўлади.

Ушбу

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots.$$

саноқли тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Уларнинг йиғиндисини A орқали белгилаймиз. A_n тўпламлар ҳар бирининг элементларини натурал сонлар билан қуйидагича номерлаб чиқамиз:

$$\left.\begin{array}{l} A_1: a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_3^{(1)},\ \ldots. \\ A_2: a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ a_3^{(2)},\ \ldots. \\ A_3: a_1^{(3)},\ a_2^{(3)},\ a_3^{(3)},\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_k: a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ a_3^{(k)},\ \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Бу жадвалдаги элементларни қуйидаги кетма-кетлик кўринишида ёзамиз:

$$b_1 = a_1^{(1)},\ b_2 = a_1^{(2)},\ b_3 = a_2^{(1)},\ b_4 = a_1^{(3)},\ b_5 = a_2^{(2)},\ b_6 = a_3^{(1)},\ \ldots \qquad (2)$$

Бу кетма-кетлик қуйидаги қоида бўйича тузилди: агар $i + k < j + l$ бўлса, у ҳолда $a_i^{(k)}$ элемент $a_j^{(l)}$ дан илгари ёзилади; агар $i + k = j + l$ ва $i < j$ бўлса, у ҳолда $a_i^{(k)}$ элемент $a_j^{(l)}$ дан илгари ёзилади.

Агар (2) кетма-кетликда бир хил элементлар учраса, уларнинг биттасини қолдириб, қолганини ўчирамиз. Натижада ушбу янги кетма-кетлик ҳосил бўлади:

$$c_1 = b_{n_1},\ c_2 = b_{n_2},\ \ldots,\ c_s = b_{n_s},\ \ldots. \qquad (3)$$

Бу кетма-кетлик чекли ёки чексиз бўлиб, унинг элементларидан тузилган тўплам

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

тўпламга тенг, чунки A нинг ҳар бир $a_i^{(j)}$ элементи (3) кетма-кетликда камида бир марта учрайди ва аксинча, ҳар бир c_s элемент (2) кетма-кетликда учрайди, демак, А тўпламга киради. Бундан A нинг саноқли тўплам эканлиги кўринади.

6.2-теорема. *Ҳар қандай чексиз тўпламнинг саноқли тўпламдан иборат қисми мавжуд.*

Бу теорема саноқли тўпламларнинг чексиз тўпламлар орасида энг соддаси эканлигини кўрсатади.

Исбот. E ихтиёрий чексиз тўплам бўлсин. Бу тўпламдан бирор элемент олиб, уни a_1 билан белгилаймиз. Бунинг натижасида E бўш бўлиб қолмайди, шунинг учун ундан иккинчи бошқа бир элементни олиш мумкин; бу элементни a_2 билан белгилаймиз ва ҳоказо. E тўпламдан элементларни бу тарзда ажратишни чексиз давом эттириш мумкин, чунки E — чексиз тўплам. Шундай қилиб, турли элементлардан иборат бўлган ушбу

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

кетма-кетликка эга бўламиз. Бу кетма-кетликнинг элементларидан иборат тўплам E тўпламнинг саноқли қисмидир.$_*$

6.3-теорема. *Агар чексиз E тўпламга чекли ёки саноқли A тўплам қўшилса, у ҳолда $E \cup A$ тўплам E тўпламга эквивалент бўлади, яъни $E \cup A \sim E$.*

Исбот. 6.2-теоремага асосланиб, E тўпламдан бирорта саноқли D қисмини оламиз ва $E \setminus D$ тўпламни P билан белгилаймиз. У ҳолда:

$$E = P \cup D,\quad E \cup A = P \cup (D \cup A)$$

тенгликлар ўринли бўлади. 6.1-теоремага асосан, D ва $D \cup A$ лар саноқли тўплам бўлгани учун $D \sim D \cup A$ муносабат ўринли. Бундан ва $P \sim P$ муносабатдан $P \cup D \sim P \cup (D \cup A)$, яъни $E \sim E \cup A$ муносабат келиб чиқади.$_*$

6.4-теорема. *Агар чексиз E тўплам саноқсиз бўлиб, A унинг чекли ёки саноқли қисми бўлса, у ҳолда $E \setminus A$ тўплам E тўпламга эквивалент бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $E \setminus A = M$ тўплам чекли ёки саноқли бўлиши мумкин эмас, чунки акс ҳолда $E = A \cup (E \setminus A)$ тўплам ҳам 6.1-теоремага асосан чекли ёки саноқли бўлар эди. 6.3-теоремага асосан, $M \cup A \sim M$, бундан $E \sim E \setminus A$ муносабат келиб чиқади.$_*$

6.1 ва 6.4-теоремалардан ҳар қандай чексиз тўплам ўзига эквивалент хос қисмга эга экани кўринади.

Маълумки, чекли тўпламлар бундай хоссага эга эмас. Шунинг учун чексиз тўпламларнинг иккинчи таърифи сифатида қуйидаги таърифни қабул қилиш мумкин.

2-таъриф (Дедекинд). *Агар E тўплам ўзининг бирор хос қисмига эквивалент бўлса, E тўплам чексиз дейилади.*

Энди амалда кўп учрайдиган баъзи бир тўпламларнинг қувватларини топишга ўтамиз.

6.5-теорема. *Рационал сонлар тўплами саноқлидир.*

Исбот. Q_+ *билан мусбат рационал сонлар тўпламини,* Q_- билан эса манфий рационал сонлар тўпламини белгилаймиз. У ҳолда ҳамма рационал сонлар тўпламини қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$Q = Q_+ \cup \{0\} \cup Q_-,$$

бу ерда $\{0\}$ билан биргина ноль сонидан иборат тўпламни белгиладик.

Агар Q_+ ва Q_- тўпламларнинг саноқли эканлигини кўрсатилса, у ҳолда 6.1-теоремага мувофиқ, Q ҳам саноқли бўлади.

Q_- тўплам Q_+ тўпламга эквивалент (эквивалентлик $r \in Q_+$ га — $r \in Q_-$ ни мос қўйиш орқали ўрнатилади) бўлганлиги учун Q_+ нинг саноқли эканлигини исботлаш кифоя.

Маълумки, ҳар қандай мусбат рационал сонни $\frac{p}{q}$ қисқармас каср кўринишида ёзиш мумкин. Q_+ тўпламнинг элементларини номерлашда қуйидаги қоидага амал қиламиз.

Аввал махражи ва суратининг йиғиндиси иккига тенг бўлган рационал сонларни номерлаймиз, сўнг махражи ва суратининг йиғиндиси 3 га тенг сонларни номерлаймиз ва ҳоказо; бу номерлашда икки рационал соннинг махражи ва суратининг йиғиндиси бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда сурати кичик бўлган рационал сонга кичикроқ номерни ёзамиз.

Бу қоидага мувофиқ мусбат рационал сонларни номерлаб чиқсак,

$$a_1 = \frac{1}{1},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{2}{1},\ a_4 = \frac{1}{3},\ a_5 = \frac{3}{1},\ a_6 = \frac{1}{4},\ a_7 = \frac{2}{3}, \ldots$$

кетма-кетликка эга бўламиз. Натижада ҳар бир мусбат рационал сон биргина номерга эга бўлади ва бу кетма-кетликда аниқ бир ўринни эгаллайди. Демак, Q_+ — саноқли тўплам.$_*$

Қуйидаги жумлалар 6.5-теоремага ўхшаш исбот қилинади:

а) *текисликдаги координаталари* рационал сонлардан иборат бўлган барча нуқталар саноқли тўплам ҳосил қилади;

б) *n* ўлчамли Эвклид фазосида координаталари рационал сонлар бўлган барча нуқталар тўплами саноқлидир.

7-§. Саноқсиз тўпламлар

Тўғри чизиқ нуқталаридан иборат тўплам натурал сонлар тўплами каби кўп учраб турадиган чексиз тўпламлар жумласидандир. Шуниси таажжублики, тўғри чизиқ нуқталари тўплами (ва ҳатто [0,1] сегментдаги нуқталар тўплами) натурал сонлар тўпламига эквивалент эмас, яъни тўғри чизиқ нуқталарини номерлаб чиқиш мумкин эмас.

Бу қуйидаги теоремада исботланади.

7.1-теорема. [0, 1] *сегментнинг нуқталаридан иборат тўплам саноқсиздир.*

Бу теорема 5-§да келтирилган тўпламларни солиштириш усулларининг иккинчиси биринчисидан қулайроқ эканлигини кўрсатади. Биз қуйида бу теореманинг икки хил исботини келтирамиз.

Биринчи исбот. $E = [0,1]$ сегментнинг нуқталаридан иборат тўплам саноқли деб фараз қилайлик. У ҳолда E нинг барча элементларини номерлаб чиқиш мумкин:

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}. \tag{1}$$

E ни $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ нуқталар билан учта тенг сегментга бўламиз:

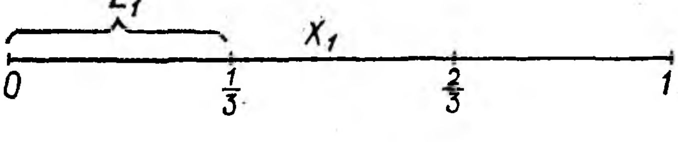
$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Равшанки, x_1 элемент бир вақтда бу учала сегментнинг ҳар бирига тегишли бўла олмайди, демак, уларнинг камида биттасига кирмайди. Ўша сегментни E_1 билан белгилаймиз (агар бундай сегментлар иккита бўлса, уларнинг чапроқдагисини E_1 билан белгилаймиз, 6-шакл). Энди E_1 сегментни учта тенг сегментга бўламиз. Бу сегментларнинг камида биттасига x_2 нуқта кирмайди; ўша сегментни E_2 билан белгилаймиз (бундай сегментлар иккита бўлса, чапроқдагисини E_2 билан белгилаймиз).

E_2 сегментни ўз навбатида яна учта тенг сегментга бўламиз; буларнинг орасида x_3 нуқта кирмаганини (иккита бўлса, чапроқдагисини) E_3 билан белгилаймиз ва ҳоказо.

Натижада бири иккинчисининг ичига жойлашган

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$$



6-шакл.

сегментлар кетма-кетлигига эга бўламиз. Бу тўпламларнинг ясалишига кўра x_n нуқта E_n сегментга кирмайди. E_n сегментнинг узунлиги $\frac{1}{3^n}$ бўлиб, n ортганда нолга интилади. Лимитлар назариясидаги маълум теоремага асосан, E_n сегментларнинг барчасига кирувчи биргина y нуқта мавжуд:

$$y \in E_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Бу y нуқта E тўпламга тегишли бўлгани учун (1) кетма-кетликда учрайди, яъни шундай m топиладики, бу m учун $y = x_m$ бўлади. Иккинчи томондан,

$$x_m \overline{\in} E_m, \quad y \in E_m$$

муносабатлардан $y \neq x_m$ келиб чиқади. Бу қарама-қаршилик теоремани исботлайди.

Иккинчи исбот. [0,1] сегментдаги нуқталар тўплами саноқли бўлсин деб фараз қилайлик; у ҳолда бу тўпламнинг элементларини натурал сонлар билан номерлаб чиқиш мумкин. Номерлаш натижасини (1) кетма-кетлик шаклида ёзамиз. Фаразимизга мувофиқ, $x_k \in [0, 1]$ ва [0, 1] сегментнинг ҳар бир элементи (1) кетма-кетликда бўлади. (1) кетма-кетликдаги ҳар бир сонни чексиз ўнли каср кўринишида ёзамиз[1]:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_3^{(1)} \dots a_n^{(1)} \dots \\
x_2 &= 0, a_1^{(2)} a_2^{(2)} a_3^{(2)} \dots a_n^{(2)} \dots \\
x_3 &= 0, a_1^{(3)} a_2^{(3)} a_3^{(3)} \dots a_n^{(3)} \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_m &= 0, a_1^{(m)} a_2^{(m)} a_3^{(m)} \dots a_n^{(m)} \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Маълумки (64-§ га қаранг), ҳар бир ҳақиқий сон ягона усул билан чексиз ўнли касрга ёйилади. Энди [0,1] сегментда ётувчи ва (1) кетма-кетликка кирмайдиган бирор x_0 сонни топа олсак, у ҳолда [0,1] сегментдаги сонлар тўпламининг саноқсизлигини исбот этган бўламиз. x_0 сифатида

$$x_0 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_m \dots (b_1 \neq a_1^{(1)}, b_2 \neq a_2^{(2)}, \dots, b_m \neq a_m^{(m)}, \dots)$$

---

[1] Ҳақиқий сонларни чексиз ўнли касрга ёйишнинг мумкинлиги ҳақида 64-§ га қаранг.

чексиз ўнли касрни олиб, бу каср (1) кетма-кетликда учрайди деб фараз қилайлик. Бу ҳолда x_0 сон (1) кетма-кетликдаги бирор сонга тенг, яъни $x_0 = x_k$ бўлиши керак. Аммо бу тенгликнинг бажарилиши мумкин эмас, чунки $b_k \neq a_k^{(k)}$. Бошқача айтганда, бу натижа қилган фаразимизга зид. Демак, [0, 1] сегментдаги сонлар тўплами саноқсиз тўплам экан.*

Таъриф. *[0,1] сегментдаги нуқталар тўпламига эквивалент бўлган тўпламларни континуум қувватли тўпламлар дейилади.*

Табиийки, албатта, континуум қувватга эга бўлган ҳар қандай тўплам саноқсиз тўпламдир.

Энди континуум қувватли тўпламлар ҳақида бир неча теорема исбат қиламиз:

7.2-теорема. *Ҳар қандай $[a, b]$ сегментдаги нуқталар тўплами континуум қувватли тўпламдир.*

Исбот. *Ҳақиқатан, агар* $[a, b]$ сегментнинг ўзгарувчи элементини z билан, [0,1] сегментнинг ўзгарувчи элементини x билан белгиласак, у ҳолда $z = a + (b - a)x$ алмаштириш бу сегментларни бир-бирига ўзаро бир қийматли акс эттиради. Демак, $[a, b]$ сегментдаги нуқталар тўплами континуум қувватга эга.*

Бу теоремадан ҳамда 6,4 ва 7.1-теоремалардан бевосита қуйидаги натижалар келиб чиқади:

7.3-натижа. *Ҳар қандай $[a, b)$ ёки $(a, b]$ ярим оралиқлар ва (a, b) оралиқдаги нуқталар тўплами континуум қувватга эга.*

7.4-теорема. *Континуум қувватга эга икки E_1 ва E_2, $(E_1 \cap E_2 = \varnothing)$ тўпламнинг йиғиндиси ҳам континуум қувватга эга.*

Исбот. E_1 тўплам континуум қувватга эга бўлгани сабабли [0, 1] сегментга эквивалент ва E_2 тўплам эса (1, 2] ярим оралиққа эквивалент, натижада E_1 ва E_2 тўпламларнинг йиғиндиси [0, 2] сегментга эквивалент бўлади. 7.2-теоремага асосан [0,2] сегмент континуум қувватга эга. Демак, $E_1 \cup E_2$ тўплам ҳам континуум қувватга эга.*

7.5 теорема. *Агар E тўплам $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ $(E_k \cap E_{k'} = \varnothing,\ k \neq k')$ тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, E_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ тўпламларнинг ҳар бири континуум қувватга эга бўлса, у ҳолда E тўплам ҳам континуум қувватга эга бўлади.*

Исбот. Қуйидаги ўсувчи ва яқинлашувчи сонлар кетма-кетлигини оламиз:

$$a = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots \to b < +\infty.$$

E_1 тўплам $(a_1, a_2]$ ярим оралиққа эквивалент, E_2 тўплам $(a_2, a_3]$ га эквивалент ва ҳоказо, E_n тўплам $(a_n, a_{n+1}]$ ярим оралиққа эквивалент ва ҳоказо. Натижада E тўплам (a, b) оралиққа эквивалент бўлади; бу оралиқ эса континуум қувватга эга. Демак, E тўплам ҳам континуум қувватга эга. $*$

7.6-изоҳ. 7.4 ва 7.5-теоремаларда $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ ва $E_k \cap E_{k'} = \varnothing$ $(k \neq k')$ шартлар талаб қилинган эди. Аммо бу теоремалар юқоридаги шартларсиз ҳам ўринлидир; буни исботлашни талабаларнинг ўзларига қолдирамиз.

Охирги теоремадан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

7.7-натижа. *Ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами континуум қувватга эга.*

Бу натижадан ҳамда 6.4 ва 6.5-теоремалардан бевосита қуйидаги натижани оламиз:

7.8-натижа. *Ҳамма иррационал сонлар тўплами континуум қувватга эга.*

8-§. Тўпламларнинг қувватларини солиштириш

Икки A ва B тўплам берилган бўлса, уларнинг қувватлари ҳақида қуйидаги мулоҳазаларни юритиш мумкин:

1) бу тўпламлар ўзаро эквивалент; яъни уларнинг қувватлари тенг;

2) A тўплам B тўпламнинг бирор B_1 хос қисмига эквивалент, аммо B тўплам A нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас (ёки B тўплам A тўпламнинг бирор A_1 хос қисмига эквивалент, аммо A тўплам B нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас);

3) A тўплам B тўпламнинг бирор B_1 хос қисмига эквивалент ва B тўплам A тўпламнинг бирор A_1 хос қисмига эквивалент, яъни

$$A \sim B_1 \ (B_1 \subset B) \text{ ва } B \sim A_1 \ (A_1 \subset A);$$

4) A тўплам B нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас ва B тўплам A нинг ҳеч қандай қисмига эквивалент эмас.

Агар A ва B тўпламлар чекли бўлса, учинчи ва тўртинчи ҳоллар рўй бермайди. A ва B тўпламлар баъзи бир шартларни қаноатлантирганда чексиз тўпламлар учун ҳам тўртинчи ҳолнинг ўринли бўлмаслигини кўрсатиш мумкин (масалан, [1] нинг III бобига қаранг).

Биринчи ҳолнинг чекли ва чексиз тўпламлар учун рўй бериши мумкинлиги олдинги параграфларда келтирилган мисолларда кўрилди. Иккинчи ва учинчи ҳолларнинг содир бўлиши мумкинлиги қуйидаги мисоллардан кўринади.

Иккинчи ҳолга мисол. A — рационал сонлар тўплами ва B — ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин. Агар $B_1 = A$ деб олсак, у ҳолда $A \sim B_1$ бўлиб, B тўплам A нинг ҳеч бир қисмига эквивалент эмас (7.1-теоремага асосан).

Учинчи ҳолга мисол. A ва B саноқли тўпламлар бўлсин. Агар A дан саноқли A_1 хос қисмини ва B дан саноқли B_1 хос қисмини олсак, у ҳолда $A \sim B_1$ ва $B \sim A_1$ бўлади.

Охирги мисолда $A \sim B$. Бу тасодифий ҳол эмас, балки умумий қонуниятдир.

8.1-теорема (Кантор — Бернштейн). *Агар икки A ва B тўпламнинг ҳар бири иккинчисининг қисмига эквивалент бўлса, у ҳолда улар ўзаро эквивалент бўлади.*

Исбот. Теореманинг шартларига биноан:

$$A \sim B_1 \ (B_1 \subset B) \text{ ва } B \sim A_1 \ (A_1 \subset A).$$

A_1 ва B_1 тўпламлар мос равишда A ва B тўпламларнинг хос қисмлари бўлсин, деб фараз қилайлик, чунки акс ҳолда, масалан, $A_1 = A$ бўлса, у ҳолда $B \sim A_1$ дан $B \sim A$ муносабат келиб чиқади.

B ва A_1 тўпламлар эквивалент бўлгани сабабли бирор $f: B \to A_1$ ўзаро бир қийматли акс эттириш мавжуд. Бу акс эттириш B_1 тўпламни A_1 нинг бирор A_2 қисмига акс эттиради. Натижада $A_2 \subset A_1 \subset A$ ва $A \sim B_1$, демак $A_2 \sim A$.

Агар A_1 нинг A га эквивалентлиги исбот этилса, у ҳолда $A_1 \sim B$ бўлганидан A нинг B га ҳам эквивалентлиги келиб чиқади.

Ўзаро бир қийматли f акс эттириш билан A ни A_2 га акс эттирганимизда A_1 бирор A_3 ($\subset A_2$) тўпламга, A_2 эса бирор A_4 тўпламга акс эттирилади ва ҳоказо. Бу ўзаро бир қийматли акс эттиришлардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\begin{gathered}
A \setminus A_1 \sim A_2 \setminus A_3 \\
A_1 \setminus A_2 \sim A_3 \setminus A_4 \\
A_2 \setminus A_3 \sim A_4 \setminus A_5 \\
A_3 \setminus A_4 \sim A_5 \setminus A_6 \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Бу муносабатларнинг тоқ ўриндагиларини оламиз:

$$\begin{gathered}
A \setminus A_1 \sim A_2 \setminus A_3 \\
A_2 \setminus A_3 \sim A_4 \setminus A_5 \\
A_4 \setminus A_5 \sim A_6 \setminus A_7 \\
\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Бу муносабатларнинг чап ва ўнг томонидаги тўпламларни алоҳида қўшиб ушбу

$$\begin{aligned} &(A\setminus A_1) \cup (A_2\setminus A_3) \cup (A_4\setminus A_5) \cup \ldots \sim \\ &\sim (A_2\setminus A_3) \cup (A_4\setminus A_5) \cup (A_6\setminus A_7) \cup \ \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

эквивалентликка эга бўламиз.

Энди қуйидаги айниятларнинг ўринли эканини исбот қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} A &= P \cup (A\setminus A_1) \cup (A_1\setminus A_2) \cup (A_2\setminus A_3) \ldots \\ A_1 &= P \cup (A_1\setminus A_2) \cup (A_2\setminus A_3) \cup (A_3\setminus A_4) \ldots \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

бу ерда $P = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Булардан бирини, масалан, биринчисини исбот этамиз; иккинчисининг исботи шунга ўхшашдир. A тўпламнинг бирор a элементини оламиз ва уни (2) даги биринчи айниятнинг ўнг томонига киришини кўрсатамиз. Бу элемент A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ тўпламларнинг ҳар бирига кириши мумкин, ёки $a \in A_n$, лекин $a \overline{\in} A_{n+1}$. Агар $a \in A_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ бўлса, у ҳолда $a \in P$; агар $a \in A_n$ бўлса-ю, лекин $a \overline{\in} A_{n+1}$ бўлса, у ҳолда $a \in A_n\setminus A_{n+1}$. Демак, иккала ҳолда ҳам a элемент биринчи айниятнинг ўнг томонидаги тўпламга киради.

Агар a ўнг томоннинг элементи бўлса, у ҳолда $a \in A$, чунки $P \subset A$ ва $(A_n\setminus A_{n+1}) \subset A$. Айният исбот бўлади.

(2) айниятларни ушбу

$$\begin{aligned} A &= [P \cup (A_1\setminus A_2) \cup (A_3\setminus A_4) \cup (A_5\setminus A_6) \cup \ \ldots] \cup \\ &\cup [(A\setminus A_1) \cup (A_2\setminus A_3) \cup (A_4\setminus A_5) \cup \ldots]; \\ A_1 &= [P \cup (A_1\setminus A_2) \cup (A_3\setminus A_4) \cup (A_5\setminus A_6) \cup \ \ldots] \cup \\ &\cup [(A_2\setminus A_3) \cup (A_4\setminus A_5) \cup \ldots] \end{aligned} \tag{3}$$

кўринишда ёзамиз.

Бу айниятларнинг ўнг томонларини солиштирсак, ҳар бирининг биринчи ўрта қавсдаги ифодалари айнан бир-бирига тенг, иккинчи ўрта қавсдаги ифодалари эса (1) муносабатга мувофиқ ўзаро эквивалент. Модомики, (3) айниятларнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўзаро эквивалент экан, уларнинг чап томонидаги A ва A_1 тўпламлар ҳам ўзаро эквивалент. Шу билан теорема исбот этилди.

Ихтиёрий икки A ва B тўпламни солиштиришда тўртинчи ҳол истисно этилса, теоремага асосланиб, ушбу натижани айтишимиз мумкин:

A ва B тўпламлар ўзаро эквивалент, демак, улар тенг қувватлидир ёки булардан бири, масалан, A тўплам иккинчисининг хос қисмига эквивалент, аммо шу билан бирга B тўплам A нинг на ўзига, ва на унинг бирор қисмига эквивалент эмас, бу ҳолда A нинг қуввати B нинг қувватидан кичик бўлади.

9-§. Қувватлар устида амаллар. Ихтиёрий катта қувватларнинг мавжудлиги

Кесишмайдиган чекли A ва B тўпламлар берилган бўлсин. Агар A да n та, B да m та элемент бўлса, у ҳолда бу тўпламлар йиғиндиси $A \cup B$ да $n+m$ та элемент бўлади. Тўпламларнинг қуввати тушунчаси чекли тўплам элементларининг сони тушунчасининг умумлаштирилган ҳоли бўлганлиги сабабли ихтиёрий қувватларни қўшиш амалининг таърифини қуйидагича бериш мумкин:

Икки A ва B тўплам умумий элементларга эга бўлмасин. α ва β мос равишда A ва B тўпламларнинг қувватлари бўлсин. $A \cup B$ тўпламнинг қуввати α ва β қувватларнинг *йиғиндиси* дейилади ва

$$\alpha+\beta$$

кўринишда ёзилади.

$\{X_\tau,\ \tau \in I\}$ тўпламлар системаси берилган бўлиб, бу системадаги тўпламлар ўзаро кесишмасин ва X_τ нинг қуввати α_τ бўлсин. Барча α_τ қувватларнинг йиғиндиси деб, $\{X_\tau\}$ тўпламлар системаси йиғиндисининг қувватига айтилади.

Масалан, ω — саноқли тўпламнинг қуввати, c — континуум қувват бўлса, 6- ва 7- § даги теоремаларга асосан:

$$\begin{aligned} \omega+\omega&=\omega,\\ \omega+c&=c, \\ c+c&=c. \end{aligned} \tag{1}$$

Сони саноқли ω ларнинг йиғиндиси ҳам ω га, сони саноқли c ларнинг йиғиндиси эса c га тенг.

9.1-изоҳ. (1) формулаларга кўра қуйидаги гипотезани айтиш мумкин: агар A чексиз тўплам бўлиб, қуввати α га тенг бўлса, у ҳолда $\alpha+\alpha=\alpha$. Бу гипотеза ихтиёрий чексиз қувват учун ҳозиргача исботланмаган; аммо у маълум шартни қаноатлантирувчи тўпламлар учун ўринли ([1] га қаранг).

Энди қувватлар кўпайтмасининг таърифига ўтамиз.

A ва B чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда n ва m га тенг бўлсин. A ва B нинг $A \times B$ Декарт кўпайтмаси $n \cdot m$ та элементдан иборат.

Бунга кўра ихтиёрий тўпламлар учун қуйидаги таърифни бериш мумкин.

A ва B ихтиёрий тўпламлар ва α, β — уларнинг қувватлари бўлсин. α ва β қувватларнинг *кўпайтмаси* деб A ва B тўпламларнинг $A \times B$ Декарт кўпайтмаси қувватига айтилади ва

$$\alpha \cdot \beta$$

кўринишда ёзилади.

Тўпламлар системасининг Декарт кўпайтмасидан фойдаланиб, сони ихтиёрий қувватларнинг кўпайтмасини ҳам таърифлаш мумкин.

Масалан, N натурал сонлар тўплами бўлса, $N \times N$ ҳам саноқли тўплам бўлгани учун

$$\omega \cdot \omega = \omega.$$

Агар R тўғри чизиқ нуқталари тўплами бўлса, $R \times R$ текислик нуқталари тўплами бўлгани ва R ҳамда $R \times R$ ларнинг қувватлари c бўлгани учун (10- § га қаранг)

$$c \cdot c = c.$$

9.2-изоҳ. Ҳар қандай чексиз α қувват учун

$$\alpha \cdot \alpha = \alpha$$

муносабатни гипотеза сифатида ёзиш мумкин. Бу гипотеза ҳам умумий ҳолда исботланмаган.

9.3-изоҳ. Ихтиёрий қувватларнинг чекли сонлардан фарқи (1) формулаларданоқ кўринади; иккинчи муҳим бир фарқ шуки, сони ихтиёрий қувватларни қўшиш ва кўпайтириш мумкин. Учинчи фарқ шундаки, қувватларнинг айирмаси тушунчасини (қувватларнинг йиғиндиси тўпламларнинг йиғиндиси орқали таърифланганидек) тўпламларнинг айирмаси орқали таърифлаш мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, агар $A \supset B$ тўпламлар берилиб, A нинг қуввати α, B нинг қуввати β бўлса, $A \setminus B$ тўплам, α ва β лар ўзгармаган ҳолда, чексиз, чекли ёки бўш бўлиши мумкин, шунинг учун бу тўпламнинг қуввати тўғрисида ҳеч нарса айтиш мумкин эмас ва демак, $\alpha - \beta$ аниқ бир маънога эга эмас.

Агар A, B — чекли тўпламлар бўлиб, n, m мос равишда бу тўпламлар элементларининг сони бўлса, A тўпламни B тўпламга барча акс эттиришлари сони m^n га тенг. Ҳақиқатан ҳам, A тўпламнинг ҳар бир x элементи B тўплам элементларининг сони m та бўлгани учун B га m та усул билан акс эттирилиши мумкин. A да n та элемент бўлгани ҳамда ҳар бир элемент бошқа элементларга боғлиқмас равишда B га m усул билан акс эттирилиши мумкинлиги сабабли A нинг B га барча акс эттирилишлари сони m^n га тенг. Бунга кўра ихтиёрий қувватларни даражага кўтаришни қуйидагича таърифлаш мумкин.

A ва B тўпламлар берилиб, A нинг қуввати α га, B нинг қуввати β га тенг бўлсин. У ҳолда A нинг B га барча акс эттиришлари тўплами B^A нинг қуввати β нинг *α-даражаси* дейилади ва

$$\beta^\alpha$$

кўринишда ёзилади.

Масалан, N натурал сонлар тўплами ва $Z_2=\{0,1\}$ тўплам бўлса, N нинг Z_2 га ҳар бир акс эттирилишини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n & \ldots \end{matrix}$$

бу ерда $i_s = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$. Бундан чиқадики, N нинг Z_2 га ҳар бир акс эттирилишига

$$0,\ i_1\ i_2 \ldots i_s \ldots$$

иккили касрни мос қўйиш мумкин. Натижада Z_2^N тўплам билан бутун қисми ноль бўлган барча иккили касрлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилди. Аммо бутун қисми ноль бўлган барча иккили касрлар тўплами c континуум қувватга эга (бунинг исботи 7.1-теореманинг иккинчи исботи кабидир).

Шундай қилиб, агар N нинг қуввати ω бўлса, Z_2^N нинг қуввати 2^ω бўлиб,

$$2^\omega = c.$$

Маълумки, чекли сонлар учун $2^\alpha > \alpha$ тенгсизлик ўринли.

Бу ҳол тасодифий бўлмай, қуйидаги умумий теорема ўринли.

9.4-теорема. *A бирор тўплам бўлиб, унинг қуввати α бўлса, у ҳолда A нинг барча қисм тўпламлари системасининг қуввати 2^α шу A тўпламнинг қувватидан катта, яъни $2^\alpha > \alpha$.*

Исбот. Бирор $A=\{a\}$ тўплам берилган бўлиб, $B=\{b\}$ тўплам A нинг барча қисм тўпламларидан тузилган система бўлсин. Бу системага, хусусан, A нинг бир элементли қисмлари, бўш тўплам ва A нинг ўзи ҳам киради.

B нинг қуввати A нинг қувватидан катталигини исботлаш учун B да A га эквивалент бўлган қисм борлигини, аммо B нинг A га эквивалент эмаслигини исботлаш керак.

B дан A нинг бир элементли қисмларидан иборат қисм системани ажратиб олсак, бу қисм система A га эквивалент бўлиши равшан.

Энди B нинг A га эквивалент эмаслигини кўрсатамиз. Аксинчасини фараз қилайлик, яъни $A \sim B$ бўлсин. У ҳолда B системанинг элементлари билан A нинг элементлари орасида бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин, яъни B ва A нинг элементлари маълум бир жуфтларга боғланган бўлади:

$$A_\tau \Leftrightarrow a, \quad A_\tau \in B, \quad a \in A.$$

Бу жуфтларнинг бирортасини олайлик: $A_\tau \Leftrightarrow a$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: ё A_τ тўплам A нинг қисми бўлгани учун a ни ўз ичига олади ёки A_τ тўплам A нинг қисми бўла туриб, a ни ўз ичига олмайди. Бу ҳолларга қараб A тўпламнинг a элементини мос равишда *1*-ёки *2-тур элементлар* дейилади.

Демак, 1-тур элементлар шундай элементларки, уларнинг

$$A_\tau \Leftrightarrow a$$

жуфтларидаги A_τ тўплам a ни ўз ичига олади, 2-тур элементлар шундай элементларки, уларнинг

$$A_\tau \Leftrightarrow a$$

жуфтларидаги A_τ тўплам a ни ўз ичига олмайди.

Барча 2-тур элементлар тўпламини A' билан белгилаймиз. A' нинг

$$A' \Leftrightarrow a$$

жуфтини оламиз. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: ё a элемент 1-тур элемент, ё 2-тур элемент. Агар a 1-тур элемент бўлса, a элемент A' га кириши керак, аммо A' тузилишига кўра 2-тур элементлардан иборат. Демак, бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас. Агар a 2-тур элемент бўлса, a элемент, бир томондан, таърифга асосан A' га кирмаслиги керак, иккинчи томондан, A' нинг тузилишига кўра, a элемент A' га кириши керак. Яна қарама-қаршиликка келдик. Демак, бу ҳолнинг ҳам бўлиши мумкин эмас.

Шундай қилиб, A' тўпламнинг мавжудлиги қарама-қаршиликка олиб келяпти. Демак, A ва B тўпламлар ўзаро эквивалент эмас.

Умуман қуйидаги теорема ўринли.

9.5-теорема. *Агар X ва Y тўпламларнинг қувватлари мос равишда α ва β бўлиб, $\beta>1$ бўлса, у ҳолда*

$$\beta^{\alpha}>a.$$

(Ўқувчи бу теорема ҳақида П. С. Александровнинг [1] китобига қараши мумкин.)

9.4-теорема аслида қуйидаги тасдиқни умумлаштиради: *агар n натурал сон бўлиб, $n>1$ бўлса,*

$$2^{n}>n$$

тенгсизлик ўринли.

Шунга ўхшаш, $n>4$ да

$$2^{n}>n^{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлгани учун қуйидаги тасдиқ тўғри бўлса керак: агар α қувват $\alpha>4$ тенгсизликни қаноатлантирса,

$$2^{\alpha}>\alpha^{2}.$$

тенгсизлик ўринли. Аммо бу тасдиқ ҳозиргача исботланмаган.

10-§. Тўпламлар Декарт кўпайтмасининг қуввати

Энди тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини текшириш билан шуғулланамиз.

10.1-теорема. *Агар A ва B саноқли тўпламлар бўлса, уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам саноқли бўлади.*

Исбот. A ва B тўпламлар саноқли бўлгани учун уларни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\},$$
$$B=\{b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\}.$$

Бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмасини эса қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A\times B=\left\{\begin{matrix}(a_1,\ b_1), & (a_1,\ b_2), & \ldots, & (a_1,\ b_n), & \ldots\\ (a_2,\ b_1), & (a_2,\ b_2), & \ldots, & (a_2,\ b_n), & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (a_n,\ b_1), & (a_n,\ b_2), & \ldots, & (a_n,\ b_n), & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{matrix}\right\}$$

Бу жадвалдаги элементларни, 6.1-теоремадагидек, қуйидагича номерлаб чиқамиз:

$$c_1 = (a_1, b_1),\ c_2 = (a_1, b_2),\ c_3 = (a_2, b_1),\ c_4 = (a_1, b_3),$$
$$c_5 = (a_2, b_2),\ c_6 = (a_3, b_1),\ c_7 = (a_1, b_4) \ldots \qquad (1)$$

Бу кетма-кетлик қуйидаги қоида бўйича тузилди: агар $i + k < j + l$ бўлса, у ҳолда (a_i, b_k) элемент (a_j, b_l) дан илгари ёзилади; агар $i + k = j + l$ ва $i < j$ бўлса, у ҳолда (a_i, b_k) элемент (a_j, b_l) дан илгари ёзилади.

(1) кетма-кетлик эса $A \times B$ тўпламнинг саноқлилигини кўрсатади.$_*$

Қуйидаги теорема худди шунга ўхшаш исботланади:

10.2-теорема. *Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ саноқли тўпламлар бўлса, у ҳолда бу тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси*

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

ҳам саноқлидир.

10.3-натижа. *n ўлчамли фазода координаталари бутун сонлардан иборат бўлган барча нуқталар тўплами саноқлидир.*

Бу натижанинг исботи барча бутун сонлар тўплами M нинг саноқлилигидан ва n ўлчамли фазодаги бутун координатали нуқталар тўплами

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \ \ldots \ \times M}_{n \text{ марта}}$$

га тенг бўлганлигидан келиб чиқади.$_*$

10.4-натижа. *n ўлчамли азода барча рационал координатали нуқталар тўплами Q^n саноқлидир.*

Бу натижанинг исботи Q рационал сонлар тўпламининг саноқлилигидан ва

$$Q^n = \underbrace{Q \times Q \times \ \ldots \ \times Q}_{n \text{ марта}}$$

тенгликдан келиб чиқади.$_*$

Энди $A_1, A_2. \ldots, A_n, \ldots$ тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Ушбу

$$B_n = A_1 \times A_2 \times \ \ldots \ \times A_n. \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

кетма-кетликни тузамиз. Барча B_n тўпламларнинг

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

йиғиндиси $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ кетма-кетликнинг *чала Декарт кўпайтмаси* дейилади.

10.5-теорема. *Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ саноқли тўпламлар бўлса, у ҳолда уларнинг чала Декарт кўпайтмаси ҳам саноқлидир.*

Исбот. $B_n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ тўпламларнинг саноқлилиги юқоридаги 10.1-теоремадан, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ тўпламнинг саноқлилиги эса 6.1-теоремадан келиб чиқади.$_*$

10.6-натижа. *Барча рационал коэффициентли кўпҳадлар тўплами P саноқлидир.*

Исбот. Даражаси $n-1$ дан катта бўлмаган рационал коэффициентли кўпҳадлар тўплами P^{n-1} аслида n ўлчамли фазодаги барча рационал координатали нуқталар тўпламини ташкил этади, демак, 10.4-натижага асосан саноқлидир. P тўплам P^{n-1} тўпламларнинг йиғиндисига тенг, яъни $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P^{n-1}$ бўлгани учун саноқлидир.$_*$

10.7-натижа. *Барча алгебраик*[1] *сонлар тўплами саноқлидир.*

Исбот. Бутун коэффициентли кўпҳадлар тўплами саноқли бўлгани учун ҳамда бир кўпҳад сони чекли илдизларга эга бўлгани учун алгебраик сонлар тўплами сони саноқли чекли тўпламларнинг йиғиндисига тенг. Бу тўплам эса 6.1-теоремага асосан саноқлидир.

10.8-натижа. *Трансцендент сонлар тўплами континуум қувватга эга.*

Бу натижанинг исботи 10.7-натижадан ҳамда 6-ва 7-§ лардаги теоремалардан бевосита келиб чиқади.

Энди саноқсиз тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси билан шуғулланамиз.

10.9-теорема. *Агар A ва B тўпламлар континуум қувватга эга бўлса, уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эга.*

Исбот. A ва B континуум қувватга эга бўлгани учун $A = I = [0, 1]$ ва $B = I = [0, 1]$ деб олиш мумкин. У ҳолда $A \times B$ нинг элементлари текисликдаги $I^2 = \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ квадратнинг нуқталари тўпламидан иборат. Теоремани исботлаш учун бу квадратнинг нуқталари билан $I = [0, 1]$ сегментнинг нуқталари орасида ўзаро бир қийматли муносабат-

---

[1] Агар бирор сон коэффициентлари бутун сонлардан иборат бўлган бирор кўпҳаднинг илдизи бўлса, бу сон *алгебраик сон* дейилади. Бу таърифни қаноатлантирмайдиган сонлар *трансцендент сонлар* дейилади.

ни ўрнатиш кифоя. Бундай муносабат қуйидагича ўрнатилади: агар $(p, q) \in I^2$ бўлиб, p ва q сонлар ушбу кўринишдаги

$$p = 0, p_1 p_2 \dots p_n \dots,$$

$$q = 0, q_1 q_2 \dots q_n \dots$$

чексиз ўнли касрларга ёйилса, бу (p, q) га I даги ушбу

$$0, p_1 q_1 p_2 q_2 p_3 q_3 \dots p_n q_n \dots$$

элементни мос қўямиз. Равшанки, бу мослик ўзаро бир қийматлидир.*

Индукция йўли билан қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

10.10-теорема. *Чекли сондаги континуум қувватли тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эга.*

Бу теоремадан ҳамда n ўлчамли фазо n та тўғри чизиқнинг Декарт кўпайтмасига тенг бўлгани ва тўғри чизиқ нуқталари тўплами континуум қувватга эга бўлганидан қуйидаги натижани ҳосил қилиш мумкин.

10.11-натижа. *n ўлчамли фазо континуум қувватга эга.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Қуйидаги тенгликлар исботлансин:

а) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
б) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
в) $A \triangle \varnothing = A$.

2. Ҳар қандай A, B, C тўпламлар учун қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

а) $[A, (B \cup C)] = [A, B] \cup [A, C]$;
б) $[(A \cup B), C] = [A, C] \cup [B, C]$;
в) $[A, (B \cap C)] = [A, B] \cap [A, C]$;
г) $[(A \cap B), C] = [A, C] \cap [B, C]$.

3. Қандай A ва B тўпламлар учун $[A, B]$ ва $[B, A]$ тўпламлар тенг бўлади?

4. Учта элементдан иборат барча ўрнига қўйишлар тўпламини S_3 билан белгилаймиз. Чизиқли алгебрада ўрнига қўйишларни ўзаро кўпайтириш амали киритилган. Иккита a ва b ўрнига қўйишлар берилганда шундай учинчи бир c ўрнига қўйиш топилиб, натижада

$$ac = cb,$$

яъни

$$c^{-1} ac = b$$

муносабат ўринли бўлса, бу икки a ва b ўрнига қўйишларни эквивалент ўрнига қўйишлар деймиз.

а) киритилган эквивалентлик муносабати рефлексивлик, транзитивлик ва симметриклик хоссаларига эгалигини исботланг;

б) киритилган эквивалентлик муносабати S_3 тўпламни синфларга ажратади. S_3 тўплам нечта синфга ажралади? Ҳар бир синфда нечта элемент бор? Ҳар бир синфга кирувчи элементларни топинг.

5. n та элементдан иборат барча ўрнига қўйишлар тўпламини S_n билан белгилаймиз. S_n тўплам учун 4-масаладаги саволларни ҳал қилинг.

6. $[0,1)$ ярим сегмент нуқталари билан $[0,\infty)$ тўпламнинг нуқталари орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатинг.

7. $(0,1)$ ва $[0,1]$ тўпламлар орасида ўзаро бир қийматли муносабат ўрнатинг.

8. Сон ўқидаги барча ҳақиқий сонлар тўплами ва барча иррационал сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли муносабат ўрнатинг.

9. $[0, 1]$ оралиғидаги барча рационал сонлар тўплами билан $\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ квадратдаги барча рационал координатали нуқталар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатинг.

10. Икки A ва B тўплам йиғиндисининг тасвири шу тўпламлар тасвирларининг йиғиндисига тенг эканлигини кўрсатинг.

11. Чекли ёки саноқли сондаги тўпламлар йиғиндисининг тасвири шу тўпламлар тасвирларининг йиғиндисига тенглигини кўрсатинг.

12. Шундай иккита A ва B тўплам топингки, бу тўпламлар кўпайтмасининг тасвири шу тўпламлар тасвирларининг кўпайтмасига тенг бўлмасин.

13. Агар $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ саноқли тўпламлар кетма-кетлиги бўлса у ҳолда уларнинг Декарт кўпайтмаси континуум қувватга эга бўлишини исботланг.

14. Монотон функциянинг узилиш нуқталари тўплами кўпи билан саноқли эканини исботланг.

15. Агар A_1, A_2, . . . , A_n, . . . континуум қувватга эга бўлган тўпламлар кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда уларнинг Декарт кўпайтмаси ҳам континуум қувватга эга бўлишини исботланг.

16. $[0, 1]$ сегментдаги барча узлуксиз функциялар тўплами континуум қувватга эгалигини исботланг.

17. $[0, 1]$ сегментдаги барча монотон функциялар тўплами континуум қувватга эгалигини исботланг.

18. A тўпламнинг элементлари $[0,1]$ сегментдаги ягона усул билан иккили касрга ёйилувчи нуқталардан иборат, B тўпламнинг элементлари эса $[0, 1]$ сегментдаги иккилик каср ёйилмасида камида бир марта 1 рақами қатнашувчи нуқталардан иборат. $C=A \setminus B$ тўпламнинг қувватини топинг.

II боб

НУҚТАЛИ ТЎПЛАМЛАР

Бу бобда элементлари ҳақиқий сонлар тўпламининг элементларидан (яъни тўғри чизиқ нуқталаридан) иборат тўпламлар билан шуғулланамиз. Бу тўпламлар *нуқтали тўпламлар* дейилади.

11-§. Лимит нуқта

Тўғри чизиқдаги ξ нуқтанинг *атрофи* деб шу нуқтани ўз ичига олган оралиққа айтилади. Ҳар бир нуқта чексиз кўп атрофларга эга.

1-таъриф. *Тўғри чизиқда бирор ξ нуқта ва E тўплам берилган бўлсин. Агар ξ нинг ҳар қандай атрофида E тўпламнинг ξ дан фарқли камида битта нуқтаси бўлса, ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси дейилади.*

Бу ерда ξ нинг E га тегишли бўлиши талаб қилинмайди.

Агар $\xi \in E$ бўлиб, ξ элементнинг бирор атрофида E тўпламнинг ξ дан бошқа элементи бўлмаса, у ҳолда ξ нуқта E тўпламнинг *ёлғиз нуқтаси* дейилади.

11.1-изоҳлар: а) агар ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у E тўпламга кириши ҳам, кирмаслиги ҳам мумкин (шу параграфдаги 2 ва 4-мисолларга қаранг);

б) ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда ξ нинг ихтиёрий атрофида E тўпламнинг чексиз кўп нуқталари мавжуд. Буни кўрсатиш учун тескарисини фараз қиламиз, яъни ξ нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, бу атрофга E тўпламнинг сони чекли элементларигина кирган бўлсин. Шу элементларни, масалан, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ билан белгилаймиз.

Бу ҳолда ξ нинг лимит нуқта эмаслигини кўрсатамиз. x_i $(i=\overline{1,n})$ нуқталар орасида ξ га энг яқин нуқта битта ёки кўпи билан иккита бўлиши мумкин. ξ дан уларгача энг яқин бўлган масофани δ билан белгилаймиз, у ҳолда $(\xi-\delta,\ \xi+\delta)$ оралиқ ξ дан бошқа (агар $\xi \in E$ бўлса) E тўпламга кирадиган бирорта ҳам нуқтани ўз ичига олмайди. Демак, ξ нуқта E тўплам учун лимит нуқта бўла олмайди;

в) агар $E_0 \subset E$ бўлиб, ξ нуқта E_0 тўпламнинг лимит нуқтаси бўлса, у ҳолда ξ нуқта E нинг ҳам лимит нуқтаси бўлади;

г) чекли тўплам бирорта ҳам лимит нуқтага эга эмас; унинг ҳар бир нуқтаси ёлғиз нуқта бўлади.

Мисоллар. 1. E_1 тўплам натурал сонлардан иборат бўлсин. Бу тўпламнинг бирорта ҳам лимит нуқтаси йўқ. Ҳақиқатан, ихтиёрий ҳақиқий a сонни олиб, унинг $\left(a-\frac{\delta}{2},\ a+\frac{\delta}{2}\right)$ атрофи олинса, бунда E_1 нинг (агар $a \in E_1$ бўлса, a дан бошқа) бирорта ҳам элементи бўлмайди (бу ерда δ сон a дан a га энг яқин бутун сонгача бўлган масофа).

2. E_2 тўплам $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ кўринишдаги сонлардан иборат бўлсин. Бу тўпламнинг биргина $\xi=0$ лимит нуқтаси бор ва $0 \overline{\in} E_2$.

11.2-теорема. *Ихтиёрий $[a, b]$ сегментнинг лимит нуқталари тўплами шу сегментнинг ўзига тенг.*

Исбот. $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий ξ нуқтаси шу сегмент учун лимит нуқта эканлиги бевосита таърифдан кўриниб турибди. Энди $[a, b]$ сегментнинг ташқарисида унинг лимит нуқтаси йўқлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, ξ нуқта $[a, b]$ сегментнинг лимит нуқтаси бўлиб, унга кирмасин ҳамда аниқлик учун a дан чапда бўлсин. У ҳолда ξ нуқтанинг $\left(\xi-\frac{a-\xi}{2},\ \xi+\frac{a-\xi}{2}\right)$ атрофи $[a, b]$ сегментнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмайди. Бу эса ξ нуқтанинг $[a, b]$ сегмент учун лимит нуқта эканлигига зид.$_*$

Юқоридаги мисолларни давом эттирамиз.

3. E_3 тўплам $(0, 1)$ оралиқдан иборат бўлсин. Бу тўпламнинг лимит нуқталари $[0, 1]$ сегментнинг барча нуқталаридан иборат.

4. E_4 тўплам $[0, 1]$ сегментдан иборат бўлсин. 11.2-теоремага асосан бу тўпламнинг лимит нуқталари $[0, 1]$ сегментнинг барча нуқталаридан иборат.

5. E_5 тўплам $(0, 1)$ оралиқдаги ҳамма рационал сон-

лардан иборат бўлсин. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам [0; 1] сегментнинг барча нуқталаридан иборат.

Дарҳақиқат, [0, 1] сегментдаги ҳар қандай ξ нуқтанинг ихтиёрий атрофида чексиз кўп рационал сонлар мавжуддир, чунки рационал сонлар тўғри чизиқда зич жойлашган (бу ўқувчига математик анализ курсидан маълум).

Демак, таърифга мувофиқ, [0, 1] сегментнинг ҳар бир нуқтаси E_5 тўплам учун лимит нуқта бўлади.

6. E_6 тўплам E_1 ва E_4 тўпламларнинг йиғиндисидан иборат, яъни $E_6 = E_1 \cup E_4$ бўлсин. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам [0,1] нинг барча нуқталаридан иборат.

E тўпламнинг барча лимит нуқталаридан иборат бўлган тўплам E тўпламнинг *ҳосила тўплами* дейилади. Уни E' билан белгилаймиз.

Индукция бўйича ихтиёрий n натурал сон учун $E^{(n)}$ тўплам қуйидагича аниқланади: $E^{(n)}$ орқали $E^{(n-1)}$ тўпламнинг ҳосила тўпламини белгилаймиз.

Юқоридаги мисолларда келтирилган тўпламларнинг ҳосила тўпламлари қуйидагилардан иборат:

$$E_1' = \varnothing,\ E_2' = \{0\},\ E_3' = [0,\ 1],$$
$$E_4' = [0,\ 1],\ E_5' = [0,\ 1],\ E_6' = [0,\ 1].$$

Бу мисоллардан кўринадики, берилган E тўплам билан унинг E' ҳосила тўплами орасида турли муносабатлар бўлиши мумкин. Масалан, юқоридаги мисоллар учун қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$E_1' \subset E_1,\ E_3 \subset E_3',\ E_4 = E_4',\ E_5 \subset E_5',\ E_6' \subset E_6.$$

Аммо E_2 билан E'_2 орасида бу муносабатлардан бирортаси ҳам бажарилмайди.

Агар тўплам ёлғиз нуқталардангина иборат бўлса, бундай тўплам *ёлғиз (дискрет) тўплам* дейилади.

Юқоридаги мисолларда келтирилган E_1 ва E_2 тўпламлар ёлғиз тўпламлардир.

Агар тўпламнинг бирорта ҳам ёлғиз нуқтаси бўлмаса, бундай тўпламни *ўзида зич тўплам* дейилади. Мисолларимиздаги E_3, E_4, E_5 тўпламлар ўзида зич тўпламлардир.

Агар $E \subset E'$ бўлса, E тўплам ўзида зич тўплам бўлади ва аксинча.

2-таъриф. *Агар E нинг ҳамма лимит нуқталари ўзига тегишли бўлса (яъни $E' \subset E$ бўлса), у ҳолда E тўплам ёпиқ тўплам дейилади.*

Бу таърифга мувофиқ, чекли тўплам, лимит нуқталари бўлмагани сабабли, ёпиқ бўлади.

Масалан, юқоридаги мисолларимизда E_1, E_4, E_6 тўпламлар ёпиқ тўпламлардир.

Бўш тўпламни ҳам ёпиқ тўплам деб ҳисоблаймиз.

Агар $E=E'$ бўлса, у ҳолда E тўплам *мукаммал тўплам* дейилади. Масалан, E_4 мукаммал тўпламдир. Равшанки, мукаммал тўплам ҳам ёпиқ, ҳам ўзида зич тўпламдир.

$\bar{E}=E \cup E'$ тўплам E тўпламнинг *ёпилмаси* дейилади.

Энди қуйидаги масалани кўрамиз. Қандай шарт бажарилганда чексиз тўплам лимит нуқтага эга?

Масалан, натурал сонлардан иборат бўлган E_1 чексиз тўплам бўлса-да, бирорта ҳам лимит нуқтага эга эмас.

Бу масалани ечиш учун муҳим бўлган ҳамда келажакда кўп ишлатиладиган қуйидаги тушунчани киритамиз.

3-таъриф. *Бирор сегмент ичига жойлаштирилиши мумкин бўлган тўпламни чегараланган тўплам дейилади.*

11.3-теорема (Больцано-Вейерштрасс). *Ҳар қандай чегараланган чексиз E тўплам ҳеч бўлмаганда битта лимит нуқтага эга.*

Исбот. E тўплам чегараланганлиги сабабли шундай $[a, b]$ сегмент мавжудки, E тўплам бу сегментда жойлашган бўлади.

$[a, b]$ сегментни $\frac{a+b}{2}=c$ нуқта орқали тенг иккига бўлиб, $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларни ҳосил қиламиз. Бу сегментлардан ҳеч бўлмаганда биттасида E тўпламнинг чексиз кўп элементлари бўлади. Ҳақиқатан, агар бу сегментларнинг ҳар бирида E тўпламнинг фақат сони чекли элементларигина бўлганда эди, $[a, b]$ сегментда ҳам E нинг фақат сони чекли элементлари бўлар эди. Бу эса E тўпламнинг чексизлигига зид.

Шундай қилиб, $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментларнинг камида бирида E нинг чексиз кўп элементи жойлашган. Шу сегментни (бундай сегментлар иккита бўлса, чапдагисини) $[a_1, b_1]$ билан белгилаймиз. $[a_1, b_1]$ сегментни яна $[a_1, c_1]$ ва $[c_1, b_1]$ $\left(c_1=\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ иккита сегментга бўламиз. Бу сегментларнинг ҳеч бўлмаганда бирида E нинг чексиз кўп элементи ётади. Ўша сегментни (бундай сегментлар иккита бўлса, чапдагисини) $[a_2, b_2]$ билан белгилаймиз.

Бу жараённи чексиз давом эттириб, ҳар бирида E нинг чексиз кўп элементлари ётадиган ушбу

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \qquad (1)$$

сегментлар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз. $[a_n, b_n]$ сегментнинг узунлиги $\frac{b-a}{2^n}$ га тенг ва у $n \to \infty$ да нолга интилади.

Демак, лимитлар назариясидаги маълум теоремага асосан, бу сегментлар кетма-кетлиги биргина умумий ξ нуқтага эга бўлади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi. \tag{2}$$

Энди ξ нуқта E нинг лимит нуқтаси эканлигини исбот этамиз. Бунинг учун ξ нинг ихтиёрий (α, β) атрофини олиб, унда E нинг чексиз кўп элементлари борлигини кўрсатамиз.

Модомики, $\xi \in (\alpha, \beta)$ экан, (2) га мувофиқ, шундай $[a_n, b_n]$ сегментни топиш мумкинки, n етарлича катта бўлганда $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$ муносабат бажарилади. $[a_n, b_n]$ сегмент E тўпламнинг чексиз кўп элементларига эга бўлгани учун (α, β) оралиқ ҳам E нинг чексиз кўп элементларига эга, яъни ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси.$_*$

11.4-изоҳ. Агар чексиз E тўплам лимит нуқтага эга бўлса, у ҳолда E тўплам чегараланган ва чексиз E_0 қисмга эга.

Бунинг исботини ўқувчиларга қолдирамиз.

12-§. Яқинлашувчи тўпламлар ва кетма-кетликлар

Агар чегараланган E тўплам биргина ξ лимит нуқтага эга бўлса, у ҳолда E ни *яқинлашувчи тўплам* дейилади ва E нинг ξ га яқинлашишини $E \to \xi$ кўринишда ёзилади. Қуйида яқинлашувчи тўпламларга оид икки теоремани исбот қиламиз.

12.1-теорема. 1) *агар E тўплам ξ га яқинлашса, у ҳолда ξ нинг ихтиёрий (x_1, x_2) атрофидан ташқарида E тўпламнинг кўпи билан сони чекли элементларигина бўлиши мумкин;*

2) *аксинча, агар ξ нинг ихтиёрий (x_1, x_2) атрофидан ташқарида чексиз E тўпламнинг кўпи билан сони чекли элементлари бўлса, у ҳолда $E \to \xi$.*

Исбот. 1) (x_1, x_2) оралиқ ξ нинг ихтиёрий атрофи ҳамда $E \to \xi$ бўлсин. Чегараланган E тўпламнинг (x_1, x_2) оралиқдан ташқарида чексиз кўп элементлари мавжуд деб фараз қилайлик, у ҳолда бу элементлардан иборат E_0 тўплам Больцано-Вейерштрасс теоремасига асосан энг камида битта лимит нуқтага эга бўлади, ана шу лимит нуқта η бўлсин. Бу нуқта E учун ҳам лимит нуқта бўлади ҳамда $\eta \bar{\in} (x_1, x_2)$.

Демак, E тўплам иккита лимит нуқтага эга, бу эса теореманинг шартига зид;

2) аксинчасини исбот этамиз. Бунинг учун ξ нинг E тўп-

лам учун ягона лимит нуқта эканлигини ва E нинг чегараланганлигини кўрсатиш кифоя.

ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси, чунки ξ нинг ихтиёрий атрофида E нинг чексиз кўп элементлари мавжуд.

Энди ξ нинг ягона лимит нуқта эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, E тўплам ξ дан бошқа яна бирорта лимит нуқтага эга деб фараз қилайлик; масалан, $\eta<\xi$ бўлсин.

Ушбу $x_1'<\eta<x_2'<\xi<x_3'$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи учта x_1', x_2', x_3' нуқтани оламиз. η лимит нуқта бўлганлиги учун унинг (x_1', x_2') атрофида E тўпламнинг чексиз кўп нуқталари бор. Демак, ξ нинг (x_2', x_3') атрофидан ташқарида E нинг чексиз кўп элементлари мавжуд, бу эса теореманинг шартига зид. Демак, E тўплам биргина лимит нуқтага эга.

Энди E нинг чегараланганлигини кўрсатамиз. (x_1, x_2) оралиқ ξ лимит нуқтанинг ихтиёрий атрофи бўлсин. Теорема шартига асосан (x_1, x_2) атрофдан ташқарида E тўпламнинг кўпи билан сони чекли элементлари мавжуд. Улардан x_1 дан чапда энг узоқ жойлашганини α орқали (агар x_1 дан чапда бўлмаса, x_1 нинг ўзини α орқали), x_2 дан ўнгда энг узоқ жойлашганини β орқали (агар x_2 дан ўнгда бўлмаса, x_2 нинг ўзини β орқали) белгиласак, ушбу

$$E\subset[\alpha, \beta]$$

муносабатга эга бўламиз. Бу эса E тўпламнинг чегараланганлигини кўрсатади.

12.2-теорема. *Ҳар қандай яқинлашувчи E тўплам саноқлидир.*

Исбот. 12.1-теоремага мувофиқ,

$$(\xi-1,\ \xi+1),\quad \left(\xi-\frac{1}{2},\ \xi+\frac{1}{2}\right),\ldots,\left(\xi-\frac{1}{n},\ \xi+\frac{1}{n}\right),\ldots$$

оралиқларнинг ҳар биридан ташқарида E тўпламнинг чекли сондаги элементлари бор. E нинг $\left(\xi-\frac{1}{n},\ \xi+\frac{1}{n}\right)$ оралиқдан ташқаридаги элементларидан иборат тўпламни E_n билан белгиласак, у ҳолда

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \quad \text{ёки} \quad E=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup\{\xi\}$$

муносабатлардан бири ўринлидир. E_n тўпламларнинг ҳар бири тузилишига асосан чекли; демак, E тўплам кўпи билан саноқли (6.1-теорема).

Энди яқинлашувчи тўплам тушунчасига яқин бўлган яқинлашувчи кетма-кетлик тушунчасини киритамиз.

Агар бирор қоида бўйича ҳар бир n натурал сонга аниқ x_n сон мос қўйилган бўлса, у ҳолда x_1, x_2, x_3,...

сонлар кетма-кетлиги берилган дейилади. Бу кетма-кетлик қисқача $\{x_n\}$ кўринишда ёзилади. Берилган кетма-кетликдаги турли рақамли (номерли) ҳадлар бир-бирига тенг бўлиши ҳам мумкин.

Агар бирор номердан бошлаб кетма-кетликнинг ҳамма элементлари a соннинг ихтиёрий $\varepsilon > 0$ атрофида, яъни $|x_n - a| \leqslant \leqslant \varepsilon (n \geqslant n_0)$ бўлса, у ҳолда $\{x_n\}$ кетма-кетлик a сонга *яқинлашувчи кетма-кетлик* дейилади. (Бу таъриф ўқувчига математик анализ курсидан маълум.)

Мисоллар. 1. Ушбу

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

кетма-кетликни олайлик. Бу кетма-кетлик тўплам сифатида икки элементдангина иборат. У кетма-кетлик сифатида ҳам, тўплам сифатида ҳам яқинлашувчи эмас.

Ушбу

$$0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи. Бу кетма-кетлик тўплам сифатида 6 элементдан иборат. Бу кетма-кетлик тўплам сифатида лимит нуқталарга эга эмас, шунинг учун бу тўплам яқинлашувчи эмас.

3. Ушбу

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

кетма-кетлик эса тўплам сифатида ҳам, кетма-кетлик сифатида ҳам яқинлашувчи.

Сонлар кетма-кетлиги учун Больцано-Вейерштрасс теоремасини қуйидагича ифодалаш мумкин:

Ҳар қандай чегараланган $\{x_n\}$ кетма-кетликдан яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ кетма-кетликни ажратиш мумкин:

Бунинг исботини талабаларга қолдирамиз.

13-§. Ёпиқ тўплам ва ҳосила тўпламларнинг хоссалари

Энди ёпиқ ва ҳосила тўпламларнинг баъзи хоссалари билан танишамиз.

13.1-теорема. *Ҳар қандай E тўпламнинг ҳосила тўплами E' ёпиқ тўпламдир, яъни $(E')' \subset E'$.*

Исбот. Агар E' тўпламнинг лимит нуқталари бўлмаса, теоремани исботлаб ўтиришнинг ҳожати йўқ. Энди E' учун x_0 бирор лимит нуқта бўлсин; бу нуқтанинг E' га киришини кўрсатамиз. Бунинг учун x_0 нуқтани ўз ичига олган ихтиёрий (x_1, x_2) оралиқни оламиз. Бу оралиқда E' нинг ҳеч бўлмаганда x_0 дан фарқли битта ξ элементи мавжуд, чунки x_0 нуқта E' учун лимит нуқта. Бу ξ нуқта E тўплам учун лимит нуқта бўлади, чунки $\xi \in E'$. Шунинг учун (x_1, x_2) оралиқда E тўпламнинг чексиз кўп элементлари бўлади. Демак, x_0 нуқтанинг ихтиёрий (x_1, x_2) атрофида E тўпламнинг чексиз кўп элементлари мавжуд. Бу эса x_0 нинг E учун лимит нуқта эканлигини кўрсатади, яъни $x_0 \in E'$.*

Қуйидаги теорема ҳосила тўплам таърифидан бевосита келиб чиқади.

13.2-теорема. *Агар $E_1 \subset E_2$ бўлса, $E'_1 \subset E'_2$.*

13.3-теорема. *Икки тўплам йиғиндисининг ҳосила тўплами уларнинг ҳосила тўпламларининг йиғиндисига тенг, яъни*

$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

Исбот. Агар $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ ва $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ муносабатларнинг ўринлилиги кўрсатилса, теорема исбот бўлади. $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$ муносабат 13.2-теоремадан келиб чиқади. $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ муносабатни исботлаймиз. Айтайлик, $\xi \in (A \cup B)'$ ихтиёрий бўлсин. У ҳолда ξ нинг ихтиёрий атрофида $A \cup B$ тўпламнинг чексиз кўп элементи бўлади. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин. Биринчи ҳол: ξ нинг ихтиёрий атрофида доимо A нинг чексиз кўп элементи бор; бу ҳолда $\xi \in A' \subset A' \cup B'$ бўлади. Иккинчи ҳол: ξ нинг шундай атрофи мавжудки, унда A нинг фақат чекли сондаги элементи бўлади; бу ҳолда бу атрофда B нинг чексиз кўп элементи бўлиб, $\xi \in B' \subset A' \cup B'$ бўлади. Шундай қилиб, ҳамма вақт $\xi \in A' \cup B'$ муносабатга эга бўламиз. Бундан $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$ муносабат келиб чиқади.*

13.4-натижа. *Ҳадларининг сони чекли бўлган тўпламлар йиғиндисининг ҳосила тўплами уларнинг ҳосила тўпламларининг йиғиндисига тенг, яъни*

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n.$$

13.5-теорема. *Ҳар қандай E тўпламнинг $\overline{E}$ ёпилмаси ёпиқ тўпламдир.*

Исбот. 13.2- ва 13.3-теоремалардан бевосита қуйидагини оламиз:

$$(\overline{E})' = (E \cup E')' = E' \cup (E')'.$$

Энди 13.1-теоремага асосан

$$(\overline{E})' = E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset \overline{E}.*$$

$\overline{E}$ тўпламнинг ёпилмасини $\overline{\overline{E}}$ билан белгилаймиз.

13.6-теорема. *Ҳар қандай E тўплам учун $\overline{E} = \overline{\overline{E}}$.*

Исбот. 13.5-теоремага асосан $\overline{E}$ тўплам ёпиқ, яъни $(\overline{E})' \subset \overline{E}$. Бундан $\overline{\overline{E}} = \overline{E} \cup (\overline{E})' = \overline{E}$.*

x_0 нуқта F_n тўпламларнинг ҳар бирига тегишли эканлигини исботлаш кифоя.

$F_{n_{k+1}} \subset F_{n_k}$ муносабатдан

$$x_k,\ x_{k+1},\ \ldots \tag{5}$$

кетма-кетликнинг барча элементлари F_{n_k} тўпламга кириши келиб чиқади. (5) кетма-кетликнинг элементларидан иборат тўпламни M_k билан белгилаймиз.

M ва M_k тўпламларнинг фарқи $k-1$ элементдан иборат бўлгани учун x_0 нуқта M_k тўплам учун ҳам лимит нуқта бўлади. Демак, x_0 нуқта F_{n_k} тўплам учун ҳам лимит нуқта бўлади, чунки $M_k \subset F_{n_k}$. Лекин F_{n_k} ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in F_{n_k}$, яъни x_0 нуқта (2) кетма-кетликдан олинган ихтиёрий F_{n_k} тўпламнинг элементи экан, демак, x_0 нуқта, кўпайтманинг таърифига мувофиқ, Φ тўплам учун ҳам элемент бўлади.*

13.11-изоҳ. Агар F_k тўпламларнинг чегараланганлиги талаб қилинмаса, теорема ўринли эмас, масалан, $F_k = [k, +\infty)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ тўпламларнинг ҳар бири ёпиқ бўлиб, уларнинг умумий қисми бўш тўплам.

E чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда 11.2- ва 13.2- теоремаларга асосан унинг ҳосила тўплами E' ҳам чегараланган бўлади. E' чегараланганлиги учун унинг аниқ юқори чегараси β_E ва аниқ қуйи чегараси α_E мавжуд. Бу чегаралар мос равишда E тўпламнинг *юқори* ва *қуйи лимитлари* дейилади.

Бошқача айтганда, E тўпламниит *юқори* (*қуйи*) *лимити* деб E' тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегарасига айтамиз. Одатда E тўпламнинг юқори (қуйи) лимити

$$\beta_E = \overline{\lim}\, E \quad (\alpha_E = \underline{\lim}\, E)$$

кўринишда ёзилади.

E тўпламнинг барча лимит нуқталари 11.2- ва 13.2- теоремаларга асосан $[\alpha_E, \beta_E]$ сегментда жойлашган.

13.12-теорема. *Агар E тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси ξ ўзига кирмаса, у ҳолда ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.*

Исбот. Дарҳақиқат, ξ нуқта E тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлсин ва $\xi \,\overline{\in}\, E$ муносабат ўринли бўлсин. У ҳолда аниқ юқори чегара таърифига мувофиқ ҳар қандай ε мусбат сон учун $(\xi - \varepsilon, \xi)$ оралиқда E тўпламнинг ҳеч бўлмаганда битта элементи мавжуд бўлади. ε ихтиёрий мусбат сон бўлганлиги учун ξ нуқта E тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

ξ нуқта аниқ қуйи чегара бўлгани ҳолда ҳам теорема шунга ўхшаш исбот этилади*.

13.13-натижа. *Ҳар қандай бўш бўлмаган, чегараланган, ёпиқ тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари ўзига киради.*

Агар E тўпламнинг ξ элементидан ўнгда (чапда) шу тўпламга тегишли бирорта ҳам нуқта топилмаса, у ҳолда бу элемент E тўпламнинг *энг ўнг (энг чап) нуқтаси* дейилади.

13. 14-теорема. *Ҳар қандай бўш бўлмаган E тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси $\bar{E}$ учун энг ўнг (энг чап) нуқта бўлади.*

Исбот. Дарҳақиқат, b_E нуқта E тўпламнинг аниқ юқори чегараси бўлса, у ҳолда b_E дан ўнгда E нинг бирорта ҳам элементи бўлмайди.

Демак, E' нинг ҳам b_E дан ўнгда бирорта элементи бўлилиши мумкин эмас. Шунинг учун b_E нуқта $\bar{E}$ тўпламнинг энг ўнг элементи бўлади, чунки b_E дан ўнгда $\bar{E} = E \cup E'$ тўпламнинг бирорта ҳам элементи йўқ.

Шунга ўхшаш, агар a_E нуқта E тўпламнинг аниқ қуйи чегараси бўлса, у ҳолда a_E нуқта $\bar{E}$ тўпламнинг энг чап элементи бўлади.*

Юқори ва қуйи лимитларнинг таърифига мувофиқ, E тўпламнинг юқори (қуйи) лимити E' тўпламнинг энг ўнг (энг чап) элементи бўлади.

Агар b_E аниқ юқори (a_E аниқ қуйи) чегара бўлиб, E учун лимит нуқта бўлса, у ҳолда b_E (a_E) нуқта E учун юқори (қуйи) лимит бўлади, яъни E тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси ўзининг юқори (қуйи) лимитига тенг.

14-§. Борель — Лебег теоремаси

Таъриф. *E бирор нуқтали тўплам ва M бирор оралиқлар системаси бўлсин. Агар E нинг ҳар бир нуқтаси учун M системада бу нуқтани ўз ичига оладиган оралиқ мавжуд бўлса, у ҳолда E тўплам M оралиқлар системаси билан қопланган дейилади; M система эса E тўпламни қопловчи система дейилади.*

14.1-теорема (Борель-Лебег). *Агар ёпиқ ва чегараланган F тўплам сони чексиз оралиқлар системаси билан қопланган бўлса, у ҳолда бу системадан F ни қоплайдиган чекли қисм системани ажратиб олиш мумкин.*

Исбот. Ёпиқ ва чегараланган F тўплам M чексиз система билан қопланган бўлиб, M системада F ни қоплайдиган чекли қисм система йўқ деб фараз қиламиз. Бундан, хусусан, F нинг чексиз тўплам эканлиги келиб чиқади. F чегараланган тўплам бўлганлиги учун шундай $[a, b]$ сегмент мавжудки, бу сегмент F тўпламни ўз ичига олади, яъни $F \subset [a, b]$.

Энди $c = \frac{a+b}{2}$ нуқтани олиб, $F_1 = F \cap [a, c]$ ва $\Phi_1 = F \cap [c, b]$ тўпламларни тузамиз.

Фаразимизга мувофиқ, бу тўпламларнинг ҳар бирини ҳам бирданига M системанинг чекли қисм системаси билан қоплаб бўлмайди, чунки акс ҳолда F тўплам ҳам M системанинг бирор чекли қисм системаси билан қопланган бўлар эди.

Агар F_1 (ёки Φ_1) тўплам M системанинг чекли қисм системаси билан қопланмаган бўлса, у ҳолда $[a_1, b_1]$ билан $[a, c]$ (мос равишда $[c, b]$) сегментни белгилаймиз. Агар F_1 ва Φ_1 тўпламларнинг ҳар иккаласи ҳам M нинг чекли қисм системаси билан қопланмаган бўлса, у ҳолда $[a_1, b_1]$ сифатида $[a, c]$ ва $[c, b]$ сегментлардан ихтиёрий биттасини олишимиз мумкин.

Равшанки, $F \cap [a_1, b_1]$ тўплам чексиз бўлади. Энди $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ нуқтани олиб, $F_2 = F \cap [a_1, c_1]$ ва $\Phi_2 = F \cap [c_1\ b_1]$ тўпламларни тузамиз. Агар F_2 (ёки Φ_2) тўплам M нинг чекли қисм системаси билан қопланмаган бўлса (фаразимизга мувофиқ, F_2 ёки Φ_2 тўплам M нинг ҳеч қандай чекли қисм системаси билан қопланмайди), $[a_2, b_2]$ билан $[a_1, c_1]$ (мос равишда $[c_1, b_1]$) сегментни белгилаймиз.

Бу жараённи давом эттириш натижасида ичма-ич жойлашган

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \quad (1)$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва $F \cap [a_n, b_n] = F_n (n = 1, 2, \ldots)$ тўплам фаразимизга мувофиқ M системанинг ҳеч қандай чекли қисм системаси билан қопланмайди; бундан, хусусан бу тўпламларнинг ҳар бири чексиз тўплам эканлиги келиб чиқади. (1) сегментлар кетма-кетлигида $[a_n, b_n]$ сегментнинг $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ узунлиги n чексизликка интилганда нолга интилади. 13.10- Кантор теоремасига асосан бу сегментлар кетма-кетлиги сегментларнинг ҳаммаси учун умумий бўлган ягона нуқтага эга бўлади. Бу нуқтани x_0 билан белгилаймиз ва унинг F тўплам элементи эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун $F \cap [a_1, b_1]$ тўпламдан x_1 нуқтани, $F \cap [a_2, b_2]$ тўпламдан

$x_2(x_2 \neq x_1)$ нуқтани, $F \cap [a_3, b_3]$ тўпламдан $x_3(x_3 \neq x_1, x_3 \neq x_2)$ нуқтани ва ҳоказо нуқталарни оламиз.

Энди, (1) га асосан $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ бўлиши кўринади; демак, x_0 нуқта F тўплам учун лимит нуқта бўлади. Лекин F ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in F$. Бундан фойдаланиб, теоремани исбот қиламиз. Бунинг учун юқорида қилган фаразимизга зид натижа келтириб чиқариш кифоя.

Дарҳақиқат, теореманинг шартига мувофиқ, x_0 нуқтани M системадаги бирор $\delta = (\alpha, \beta)$ оралиқ қоплайди, n етарли катта бўлганда $[a_n, b_n]$ сегментнинг узунлиги исталганча кичик қилиниши мумкинлигидан ва ҳар бир $[a_n, b_n]$ сегмент x_0 нуқтани ўз ичига олганлиги сабабли етарли катта n учун $[a_n, b_n] \subset \delta$ муносабатнинг бажарилиши келиб чиқади. Бу муносабатдан эса $F \cap [a_n, b_n] \subset \delta$ келиб чиқади; демак, $F \cap [a_n, b_n]$ тўплам M системадан олинган биргина оралиқ билан қопланади. Бу натижа эса $[a_n, b_n]$ сегментларнинг юқорида айтилган хоссасига зид.*

15-§. Қуюқланиш нуқталари

1-таъриф. *Агар ξ нуқтанинг ихтиёрий атрофи билан E тўпламнинг кесишмаси саноқсиз тўплам бўлса, ξ нуқта E тўпламнинг қуюқланиш нуқтаси дейилади; акс ҳолда бу нуқта қуюқланмаслик нуқтаси дейилади; яъни бу нуқтанинг шундай атрофи мавжудки, унинг E тўплам билан кесишмаси кўпи билан саноқли тўпламдир.*

Мисол. 11-§ да келтирилган E_3, E_4 ва E_6 тўпламларнинг ҳар бири учун қуюқланиш нуқталари тўплами [0,1] сегментдан иборат, E_1, E_2 ва E_5 тўпламларнинг эса бирорта ҳам қуюқланиш нуқтаси йўқ.

Ҳар қандай қуюқланиш нуқтаси лимит нуқталиги ҳамда саноқсиз тўпламларгина қуюқланиш нуқтасига эга бўлиши мумкинлиги таърифдан бевосита келиб чиқади.

Агар (x', x'') оралиқнинг чегара нуқталари x' ва x'' рационал сонлар бўлса, бу оралиқни рационал оралиқ деймиз.

15.1-теорема. *Элементлари рационал оралиқлардан иборат бўлган система саноқли тўпламдир.*

Бу теорема 6.5-теореманинг натижасидир.*

15.2-теорема. *Ихтиёрий ξ нуқтанинг бирор (x', x'') атрофи берилган бўлсин. У ҳолда бу нуқтани ўз ичига олган ва (x', x'') оралиқда жойлашган (y', y'') рационал оралиқ мавжуд.*

Исбот. Дарҳақиқат, агар y' ва y'' рационал сонлар $x'<y'<\xi$ ва $\xi<y''<x''$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қилиб олинса, у ҳолда (y', y'') оралиқ теореманинг шартларини қаноатлантиради.*

15.3-теорема (Линделёф). *Ҳар қандай саноқсиз E тўпламнинг қуюқланмаслик нуқталаридан иборат тўплам кўпи билан саноқлидир (хусусан, E нинг қуюқланиш нуқталаридан иборат тўплам саноқсиз тўплам).*

Исбот. Фараз қилайлик, ξ нуқта E тўпламнинг қуюқланмаслик нуқтаси бўлсин. У ҳолда E тўпламнинг кўпи билан саноқли қисмини ўз ичига олган ξ нуқтанинг (x', x'') атрофи мавжуд. 15.2-теоремага мувофиқ ξ нинг $(y' y'') \subset (x', x'')$ рационал атрофи мавжуд ва бу атроф ҳам E тўпламнинг кўпи билан саноқли қисмини ўз ичига олади.

15.1-теоремага мувофиқ, ҳамма рационал оралиқлардан иборат тўплам саноқли тўпламдир, яъни бу тўплам элементларини номерлаб чиқиш мумкин:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots . \quad (1)$$

Юқоридаги мулоҳазага мувофиқ, E тўпламнинг ҳар бир қуюқланмаслик нуқтаси (1) кетма-кетликдаги шундай рационал оралиқда жойлашганки, бу оралиқ E тўпламнинг кўпи билан саноқли қисмини ўз ичига олади. Фараз қилайлик,

$$\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_n}, \ldots \quad (2)$$

ана шундай рационал оралиқлар кетма-кетлиги бўлсин.

Натижада, 6.1-теоремага мувофиқ, (2) кетма-кетликдаги ҳамма рационал оралиқларда E тўпламнинг кўпи билан саноқли қисми ётади.

E тўпламнинг ҳар бир қуюқланмаслик нуқтаси (2) кетма-кетликдаги рационал оралиқларнинг бирига албатта киради ва бу оралиқларнинг ҳар бирида E тўпламнинг, кўпи билан саноқли элементлари ётади.*

15.4-теорема. *Ҳар қандай E тўпламнинг қуюқланиш нуқталаридан иборат тўплам мукаммал тўплам бўлади.*

Исбот. E тўпламнинг қуюқланиш нуқталаридан иборат тўпламни Q билан белгилаймиз.

Аввало, E тўплам чекли ёки саноқли бўлса, у ҳолда E тўплам бирорта ҳам қуюқланиш нуқтасига эга бўла олмайди. Демак, Q бўш тўплам бўлади, бўш тўплам эса мукаммал тўпламдир.

Энди E тўплам саноқсиз бўлсин. Теоремани исбот қилиш учун Q нинг ёпиқ эканини ва ўзида зичлигини исботлаш керак.

Дастлаб Q тўпламнинг ёпиқ эканлигини исбот қиламиз. x_0 нуқта Q тўпламнинг ихтиёрий лимит нуқтаси ва (x', x'') унинг ихтиёрий атрофи бўлсин, деб фараз қилайлик. У ҳолда (x', x'') оралиқда Q нинг ҳеч бўлмаганда битта ξ нуқтаси бўлади ва бу нуқта E тўплам учун қуюқланиш нуқтаси бўлади; демак, ξ нуқтанинг ихтиёрий атрофида ва шу жумладан, (x', x'') оралиқда E тўпламнинг саноқсиз элементлари мавжуд.

Бундан кўринадики, x_0 нуқта E тўплам учун қуюқланиш нуқтаси, яъни $x_0 \in Q$. Демак, Q ёпиқ тўплам.

Энди Q нинг ўзида зич тўплам эканини исбот қиламиз. Q ўзида зич бўлмасин, деб фараз қиламиз. У ҳолда Q тўпламнинг биронта ξ_0 ёлғиз нуқтаси бўлади. Бир томондан ξ_0 нинг шундай (x', x'') атрофи мавжудки, бу атрофда Q нинг ξ_0 дан бошқа бирорта ҳам нуқтаси бўлмайди. Аммо, иккинчи томондан, ξ_0 нуқта E тўпламнинг қуюқланиш нуқтаси бўлганлиги учун унинг атрофида, шу жумладан, (x', x'') оралиқда E тўпламнинг саноқсиз қисми ётади. Линделёф теоремасига мувофиқ E тўпламнинг (x', x'') оралиқдаги қуюқланмаслик нуқталари кўпи билан саноқли тўпламни ташкил этади; демак, (x', x'') оралиқда E нинг қуюқланиш нуқталари тўплами саноқсиз, яъни ξ_0 нуқтанинг ихтиёрий (x', x'') атрофида Q тўпламнинг саноқсиз қисми ётади. Бу натижа эса юқоридаги фаразимизга зид. Демак, Q ўзида зич тўплам экан.*

15.3 ва 15.4-теоремалардан қуйидаги теорема бевосита келиб чиқади.

15.5-теорема (Кантор-Бендиксон). *Ҳар қандай ёпиқ E тўпламни $E = Q \cup M$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда Q тўплам E нинг ҳамма қуюқланиш нуқталаридан иборат бўлган мукаммал тўплам, M эса E нинг қуюқланмаслик нуқталаридан иборат бўлган саноқли тўплам.*

2-таъриф. *Агар E тўпламни иккита ёпиқ, бўш бўлмаган ва ўзаро кесишмайдиган тўпламларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин бўлмаса, E тўпламни туташ тўплам дейилади.*

15.6-теорема. *Сегмент туташ тўпламдир.*

Исбот. Ихтиёрий $[a, b]$ сегмент берилган бўлсин. Бу сегментни туташ бўлмаган тўплам деб фараз қиламиз. У ҳолда таърифга мувофиқ уни

$$[a, b] = F_1 \cup F_2 (F_1 \cap F_2 = \varnothing)$$

кўринишда ёзиш мумкин; бунда F_1 ва F_2 тўпламлар ёпиқ, бўш бўлмаган тўпламлар.

a нуқта F_1 тўпламнинг элементи ва ξ нуқта F_2 тўпламнинг қуйи чегараси бўлсин. Агар $\xi = a$ бўлса, у ҳолда $\xi \in F_1$, аммо ξ нуқта F_2 тўпламга ҳам киради, натижада: $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$, бу эса шартимизга зид.

Агар $\xi \neq a$ бўлса, у ҳолда $[a, \xi)$ ярим оралиқ бутунлай F_1 тўпламга киради; бундан эса ξ нуқта $[a, \xi)$ ярим оралиқнинг лимит нуқтаси ва демак, F_1 нинг ҳам лимит нуқтаси эканлиги келиб чиқади. Яна шартимизга зид бўлган $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ натижага келдик*.

16-§. Ички нуқталар ва очиқ тўпламлар

Энди ёпиқ тўпламлар билан узвий боғланган очиқ тўпламларни ўрганишга ўтамиз.

1-таъриф. *Агар ξ нуқтани ўз ичига олган ва E тўпламга бутунлай кирган (x', x'') оралиқ мавжуд бўлса, ξ нуқта E тўпламнинг ички нуқтаси дейилади.*

2-таъриф. *Агар E тўпламнинг ҳамма нуқталари ички нуқталардан иборат бўлса, у ҳолда E тўплам очиқ тўплам дейилади. Бўш тўпламни ҳам очиқ тўплам деб ҳисоблаймиз.*

Мисоллар. 1. Ҳар қандай (a, b) оралиқ очиқ тўпламдир.

Ҳақиқатан, $\xi \in (a, b)$ бўлсин. Ушбу $c = \min\ (\xi - a,\ b - \xi)$ белгилашни киритамиз. У ҳолда ξ нуқтанинг $(\xi - c,\ \xi + c)$ атрофи (a, b) оралиқда бутунлай ётади. Бу эса ξ нинг (a, b) оралиқ учун ички нуқта эканини кўрсатади. ξ нинг ихтиёрийлигидан (a, b) оралиқнинг очиқ тўплам эканлиги келиб чиқади.

2. Ҳамма ҳақиқий сонлар тўплами очиқ тўплам ҳосил қилади.

3. $[a, b]$ сегмент очиқ тўплам ҳосил қилмайди. Ҳақиқатан, $\xi = a \in [a, b]$ нуқтани олиб, унинг ихтиёрий $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ атрофини олсак, бу атрофнинг a дан чапдаги нуқталари $[a, b]$ сегментга кирмайди. Демак, a нуқта $[a, b]$ сегментда бўла туриб, унинг учун ички нуқта бўла олмайди.

16.1-теорема. *Сони ихтиёрий бўлган очиқ тўпламларнинг йиғиндиси ҳам очиқ тўпламдир.*

Исбот. $G = \bigcup\limits_{\xi \in \Gamma} G_\xi$ тўплам очиқ G_ξ тўпламларнинг йиғиндиси бўлсин (Γ ихтиёрий қувватга эга бўлган тўплам). G тўпламнинг ихтиёрий x элементи шу тўпламнинг ички нуқтаси эканлигини кўрсатсак, теорема исботланади.

Модомики, $x \in G$ экан, демак, x нуқта G_ξ тўпламларнинг бирортасига киради. G_{ξ_0} шу тўпламларнинг бири бўлсин: $x \in G_{\xi_0}$.

Лекин G_{ξ_0} очиқ тўплам бўлганлиги учун шундай (α, β) оралиқ мавжудки, $x\in(\alpha, \beta)$ ва бу оралиқ бутунлай G_{ξ_0} га киради.

Демак, $(\alpha, \beta)\subset G$ ва x нуқта G тўпламнинг ҳам ички нуқтаси бўлади.$_*$

16.2-теорема. *Сони чекли очиқ тўпламларнинг кўпайтмаси очиқ тўпламдир.*

Исбот. $P=\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ тўплам очиқ G_k тўпламларнинг кўпайтмаси бўлсин. Агар P бўш тўплам бўлса, у ҳолда таърифга биноан у очиқ тўплам. Энди P бўш бўлмаган ҳолни кўрамиз. Бирор $x_0\in P$ элементни оламиз. Кўпайтманинг таърифига мувофиқ, $x_0\in G_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ва ҳар бир $k=\overline{1, n}$ учун шундай (α_k, β_k) оралиқ топиладики, $x_0\in(\alpha_k, \beta_k)$ ва бу оралиқ бутунлай G_k тўпламга киради.

Энди $\alpha=\max(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ва $\beta=\min(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ сонларни олиб, (α, β) оралиқни тузамиз. Бу оралиқ учун қуйидаги муносабатлар бажарилади:

$$x_0\in(\alpha, \beta)\subset(\alpha_k, \beta_k)\subset G_k \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Демак, $(\alpha, \beta)\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k=P$ ва x_0 нуқта P тўпламнинг ички нуқтасидир.$_*$

Изоҳ. Сони чексиз очиқ тўпламларнинг кўпайтмаси учун теорема ўринли эмас.

Масалан,

$$G_n=\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) \quad (n=1, 2, \ldots)$$

тўпламларнинг ҳар бири очиқ тўплам, лекин уларнинг кўпайтмаси

$$G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n=\left[-\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right]$$

ёпиқ тўпламдир.

16.3-теорема. *Агар G тўплам очиқ бўлса, у ҳолда унинг CG тўлдирувчиси ёпиқ тўплам бўлади.*

Исбот. CG тўпламни ёпиқ эмас деб фараз қилайлик. У ҳолда унинг ўзига тегишли бўлмаган x_0 лимит нуқтаси мавжуд. Демак, $x_0\in G$. G очиқ тўплам бўлганлиги учун x_0 нуқтанинг шундай (α, β) атрофи мавжудки, бу атрофнинг ҳамма нуқталари G тўпламга киради. Бундан кўринадики, (α, β) ораликда CG тўпламнинг бирорта ҳам элементи йўқ, бинобарин x_0 нуқта CG тўпламнинг лимит нуқтаси бўла олмайди. Бу эса фаразимизга зид.$_*$

16.4-теорема. *Агар F ёпиқ тўплам бўлса, унинг CF тўлдирувчиси очиқ тўплам бўлади.*

Исбот. CF тўпламнинг ихтиёрий x_0 нуқтасини олиб, унинг ички нуқта эканлигини кўрсатамиз.

F ёпиқ тўплам бўлганлиги учун x_0 нуқта F нинг лимит нуқтаси бўла олмайди. Шунинг учун x_0 нуқтани ўз ичига олган ва F тўпламнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмаган (x', x'') оралиқ мавжуд. Демак, бу оралиқнинг ҳамма нуқталари CF тўпламга киради, яъни x_0 нуқта CF тўпламнинг ички нуқтаси бўлади.$_*$

E чегараланган тўплам ва $a=\inf E$ ва $b=\sup E$ бўлсин. У ҳолда $S=[a, b]$ сегмент E ни ўз ичига олган *энг кичик сегмент* дейилади.

16.5-теорема. *Агар F чегараланган ёпиқ тўплам бўлиб, $S=[a, b]$ уни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлса, у ҳолда $C_S F=[a, b] \setminus F$ тўплам очиқ бўлади.*

Исбот. Шу параграфдаги 1-мисолга асосан (a, b) оралиқ очиқ ва 16.4-теоремага асосан эса CF тўплам ҳам очиқ.

Энди теореманинг исботи 16.2-теоремага асосан ушбу $C_S F= =(a, b) \cap CF$ айниятдан бевосита келиб чиқади. Бу айниятни исботлаймиз. Айтайлик, $x_0 \in C_S F$ бўлсин, у ҳолда $x_0 \overline{\in} F$ бўлади. 13.13-натижага асосан $a \in F$ ва $b \in F$ бўлганлиги учун $x_0 \neq a$ ва $x_0 \neq b$ муносабатларга эга бўламиз, яъни $x_0 \in (a, b)$. Иккинчи томондан эса $x_0 \in CF$. Демак, $x_0 \in (a, b) \cap CF$.

Аксинча, $x_0 \in (a, b) \cap CF$ бўлсин. У ҳолда $x_0 \in (a, b)$ ва $x_0 \in CF$ муносабатларга эга бўламиз. Бундан $x_0 \overline{\in} F$ бўлиб, $x_0 \in C_S F$ экани келиб чиқади.$_*$

16.6-натижа. *Агар очиқ G тўплам $[a, b]$ сегментнинг қисми бўлса, у ҳолда $[a, b] \setminus G$ тўплам ёпиқ бўлади; агар ёпиқ F тўплам (a, b) оралиқнинг қисми бўлса, у ҳолда $(a, b) \setminus F$ тўплам очиқ бўлади.*

Исбот. Бу фикрларнинг исботи 16.5-теоремадаги каби ушбу $[a, b] \setminus G=[a, b] \cap CG$ ва $(a, b) \setminus F=(a, b) \cap CF$ айниятлардан келиб чиқади.$_*$

Изоҳ. Агар F ёпиқ тўплам бўлиб, $[a, b]$ сегментда жойлашган бўлса, у ҳолда $[a, b] \setminus F$ тўплам ёпиқ ҳам, очиқ ҳам бўлмаслиги мумкин.

Масалан, $F=[-1, 1]$, $[a, b]=[-2, +2]$ бўлсин, у ҳолда $[a, b] \setminus F=[-2, -1) \cup (1, +2]$ тўплам ёпиқ ҳам эмас, очиқ ҳам эмас, чунки -1 лимит нуқта бўлиб, бу тўпламга кирмайди, — 2 нуқта эса бу тўпламга тегишли-ю, аммо бу тўпламнинг ички нуқтаси эмас.

17- §. Чегараланган очиқ ва ёпиқ тўпламларнинг тузилиши

Чегараланган очиқ ва ёпиқ тўпламларнинг тузилишини ўрганиш келгуси боблар учун катта аҳамиятга эга.

Очиқ G тўплам берилган бўлсин. Агар $(\alpha, \beta) \subset G$ ва $\alpha \overline{\in} G$, $\beta \overline{\in} G$ бўлса, (α, β) оралиқ G тўпламни тузувчи оралиқ дейилади.

17.1-теорема. *Очиқ G тўпламнинг турли тузувчи (α_1, β_1) ва $(\alpha_2\ \beta_2)$ оралиқлари умумий нуқтага эга эмас.*

Исбот. (α_1, β_1) ва (α_2, β_2) оралиқлар турли (яъни $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$ муносабатларнинг камида бири ўринли) бўлиб, умумий ξ нуқтага эга бўлсин. У ҳолда

$$\alpha_1 < \xi < \beta_1, \quad \alpha_2 < \xi < \beta_2$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликлардан $\alpha_2 < \xi < \beta_1$, $\alpha_1 < \xi < \beta_2$ тенгсизликлар бевосита келиб чиқади. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин:

$$\alpha_2 < \alpha_1 \text{ ёки } \alpha_2 > \alpha_1.$$

Агар $\alpha_2 < \alpha_1$ бўлса, у ҳолда $\alpha_1 \in (\alpha_2, \beta_2) \subset G$, бу муносабат эса бажарилиши мумкин эмас, чунки $\alpha_1 \overline{\in} G$. Зиддият келиб чиқди.

Агар $\alpha_2 > \alpha_1$ бўлса, у ҳолда $\alpha_2 \in (\alpha_1\ \beta_1) \subset G$; бу муносабат ҳам бажарилиши мумкин эмас, чунки $\alpha_2 \overline{\in} G$; яна зиддият келиб чиқди.$_*$

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

17.2-натижа. *Агар очиқ Q тўпламни тузувчи иккита оралиқ умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу оралиқлар бир-бирига айнан тенг бўлади.*

17.3-натижа. *Бўш бўлмаган очиқ G тўпламни тузувчи турли оралиқлар системаси чекли ёки саноқлидир.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, агар ҳар бир тузувчи оралиқдан биттадан рационал нуқта олинса, у ҳолда бу нуқталардан тузилган M тўплам кўпи билан саноқли бўлади ва G ни тузувчи турли оралиқлар системаси M билан ўзаро бир қийматли муносабатда бўлади$_*$.

17.4-теорема. *Агар G бўш бўлмаган очиқ ва чегараланган тўплам бўлса, у ҳолда G нинг ҳар бир нуқтаси G ни тузувчи бирорта оралиққа киради.*

Исбот. a нуқта G тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин. Ушбу $F = [a, +\infty) \cap CG$ тўпламни тузамиз. $[a, +\infty)$ ва CG тўпламларнинг ҳар бири ёпиқ бўлганлиги учун F тўплам ҳам ёпиқ. F тўпламнинг тузилишидан унинг қуйидан чегараланганлиги ва бўш эмаслиги кўринади. F нинг қуйи чегарасини α билан белгилаймиз; 13.13- натижага асосан $\alpha \in F$, чунки F ёпиқ тўплам. Сўнгра $\alpha > a$, чунки a ва ундан чапдаги ҳамма нуқталар F тўпламга кирмайди.

Бундан ташқари, $[a, \alpha) \subset G$. Акс ҳолда, яъни $[a, \alpha) \subset G$ бўлмаганда, шундай b нуқта мавжуд бўлардики, $b \in [a, \alpha)$ ва $b \overline{\in} G$ муносабатлар ўринли бўлади. Бу муносабатлардан кўринадики, $b \in F$ ва $b < \alpha$, сўнгги тенгсизлик α нинг F учун қуйи чегара эканига зид.

Натижада, α учун

$$\alpha > a, \quad \alpha \overline{\in} G, \quad [a, \alpha) \subset G \tag{1}$$

муносабатларнинг ҳаммаси ўринли эканлиги кўрсатилди.

Худди шунга ўхшаш, қуйидаги муносабатларнинг ҳаммасини қаноатлантирадиган β нуқтанинг мавжудлиги кўрсатилади:

$$\beta < a, \quad \beta \overline{\in} G, \quad (\beta, a] \subset G. \tag{2}$$

Бунинг учун $F = (-\infty, a] \cap CG$ тўпламни тузиб, юқоридагига ўхшаш мулоҳазалардан фойдаланиш керак.

(1) ва (2) муносабатлардан (β, α) оралиқ G нинг тузувчи оралиғи ва $a \in (\beta, \alpha)$ эканлиги кўринади.*

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади:

17.5- натижа. *G очиқ, чегараланган ва бўш бўлмаган тўплам бўлиб, (α, β) оралиқ G га бутунлай кирган бўлса, у ҳолда G нинг тузувчи оралиқлари орасида (α, β) оралиқни бутунлай ўз ичига олган оралиқ мавжуддир.*

17.6- теорема. *Чегараланган ҳар қандай очиқ $G (\neq \varnothing)$ тўпламни $G = \bigcup_k \delta_k$, $\delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ $(\alpha_k \overline{\in} G, \beta_k \overline{\in} G)$ кўринишда ёзиш мумкин; бу ерда δ_k лар G нинг тузувчи оралиқлари $\delta_k \cap \delta_{k'} = \varnothing$ (агар $k \neq k'$ бўлса) ва δ_k оралиқлардан иборат система кўпи билан саноқли бўлади.*

Теореманинг исботи 17.5- ва 17.3- натижалардан бевосита келиб чиқади.

Энди бўш бўлмаган, чегараланган, ёпиқ тўпламларнинг тузилишини текширишга ўтамиз.

F чегараланган ёпиқ тўплам бўлиб, $S = [a, b]$ уни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлсин. У ҳолда 16.5- теоремага асосан, $C_S F$ очиқ тўплам бўлади. Агар $C_S F$ бўш бўлмаса, унга 17.6-теоремани татбиқ қилиш мумкин. Натижада қуйидаги теоремага келамиз.

17.7-теорема. *Ҳар қандай чегараланган ёпиқ F тўплам ё сегментдир ёки бирор сегментдан сони чекли ёхуд саноқли оралиқлар системасини чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламдир.*

Шуни айтиш керакки, чиқариб ташланган оралиқларнинг чегара нуқталари F тўпламда қолади.

Аксинча, бирорта сегментдан сони чекли ёки саноқли оралиқлар системасини чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўплам ёпиқдир.

Очиқ $C_S F$ тўпламнинг тузувчи оралиқларини F тўпламни *тўлдирувчи оралиқлар* деймиз.

Юқоридаги мулоҳазалардан кўринадики, чегараланган ёпиқ $F(\neq\varnothing)$ тўпламнинг ҳар бир ёлғиз нуқтаси ё икки тўлдирувчи оралиқнинг умумий чегараси бўлади ёки a ва b нуқталарнинг бирортасига тенг бўлади.

Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади.

17.8-натижа. *Ҳар қандай чегараланган мукаммал $P\ (\neq\varnothing)$ тўплам ё сегментдан иборат, ёки бирорта сегментдан ўзаро кесишмаган, умумий чегара нуқтага эга бўлмаган ва чегаралари шу сегментнинг чегараларига тенг бўлмаган, сони чекли ёки саноқли оралиқларни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламдан иборат.*

18-§. Кантор тўпламлари

Энди $\Delta_0=[0,1]$ сегментни олиб, унинг устида қуйидаги амалларни бажарамиз.

Аввал бу сегментни $\frac{1}{3}$ ва $\frac{2}{3}$ нуқталар билан уч қисмга бўлиб, ундан унинг ўрта қисми бўлган $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ оралиқни чиқариб ташлаймиз. Натижада $\Delta_{00}=\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ ва $\Delta_{01}=\left[\frac{2}{3},1\right]$ сегментлар ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирини яна уч қисмга бўламиз ҳамда уларнинг ўрта қисмлари бўлган $\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$ ва $\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$ оралиқларни чиқариб ташлаймиз. Натижада

$$\Delta_{000}=\left[0,\ \frac{1}{9}\right],\ \Delta_{001}=\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right],\ \Delta_{010}=\left[\frac{6}{9},\ \frac{7}{9}\right],$$
$$\Delta_{011}=\left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

7- шакл.

сегментлар ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирини яна тенг уч қисмга бўлиб, мос равишда ўрта қисмлари бўлган 4 та оралиқни чиқариб ташлаймиз; натижада 8 та сегмент ҳосил бўлади. Бу жараённи чексиз давом эттирамиз (7- шакл). k-амал натижасида 2^k та сегмент ҳосил бўлади. Уларни $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ орқали белгилаймиз (бунда $i_s = 0,1$; $s = \overline{1,k}$).

Натижада $\Delta_0 = [0, 1]$ сегментдан ушбу

$$G_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \right.$$

$$\left. \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)\right\} \cup \dots$$

очиқ тўплам чиқариб ташланган бўлади. 17.8- натижага мувофиқ қолган $P_0 = \Delta_0 \setminus G_0$ тўплам мукаммал тўпламдир.

G_0 ва P_0 тўпламлар *Кантор тўпламлари* дейилади.

18.1- теорема. *P_0 тўплам саноқсиздир.*

Исбот. P_0 тўплам саноқли бўлсин, деб фараз қилайлик; у ҳолда P_0 тўплам

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади. Бунда икки ҳол бўлиши мумкин: x_1 нуқта ё Δ_{00} да, ёки Δ_{01} да ётади ($\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ сегментлар юқорида киритилган); x_1 нуқта ётмаган Δ_{0i} сегментни σ_1 билан белгилаймиз. σ_1 га кирувчи ҳамда x_2 ни ўз ичига олмаган Δ_{0ij} сегментни σ_2 билан белгилаймиз ва ҳоказо. Натижада бир-бирининг ичига жойлашган ҳамда n-си x_n нуқтани ўз ичига олмаган

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$$

сегментлар кетма-кетлигига эга бўламиз. 13.10- теоремага асосан буларнинг умумий қисми бўш эмас ҳамда P_0 тўпламнинг ясалишига кўра бу умумий қисм P_0 га тегишли. Демак, умумий қисмнинг барча элементлари (1) кетма-кетликда учраши керак, масалан, умумий қисмнинг y элементи (1) кетма-кетликда n-ўринда учрасин, яъни $y = x_n$. Аммо σ_n нинг ясалишига кўра x_n нуқта σ_n га кирмайди, демак, умумий қисмга ҳам кирмайди. Зиддият келиб чиқди.$_*$

Энди G_0 ва P_0 тўпламлар элементларининг арифметик хоссасини берамиз. Бунинг учун сонларнинг учли каср шаклида ёзилишига мурожаат қиламиз.

Маълумки[1], (0,1) сегментдаги ҳар бир сонни қуйидаги учли каср шаклида ёзиш мумкин:

$$0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \ (a_i = 0,\ 1,\ 2;\ i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Лекин $\frac{i}{3^k}$ $(i = 1, 2;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots)$ кўринишдаги сонларни (яъни юқоридаги амалларни бажаришдаги бўлиш нуқталарига мос сонларни) учли каср сифатида икки хил кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{1}{3^k} = \begin{cases} 0,\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k-1}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots \\ 0,\ \underbrace{00\ \ldots\ 0}_{k}\ 2\ 2\ 2\ 2\ \ldots \end{cases}$$

$$\frac{2}{3^k} = \begin{cases} 0,\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k-1}\ 2\ 0\ 0\ \ldots \\ 0,\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{k-1}\ 1\ 2\ 2\ 2\ \ldots \end{cases} \tag{2}$$

Бу икки кўринишдан бир рақами учрамайдиганини қабул қиламиз. Бошқа ҳар қандай сон учли каср шаклида биргина кўринишда ёзилади.

Юқоридаги амалларни бажаришда $\Delta_0 = [0, 1]$ сегментдан $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ оралиқни олиб ташлаган эдик; яъни биринчи амал натижасида [0, 1] сегментдан шундай сонлар олиб ташландики, уларнинг учли каср шаклидаги ёзувида биринчи учли рақами бирга тенг, иккинчи амални бажарганимизда $\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ ва $\Delta_{01} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ сегментлардан тегишлича $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ оралиқларни олиб ташлаган эдик, яъни иккинчи амал натижасида шундай сонлар олиб ташланадики, уларни учли каср шаклида ёзганимизда иккинчи учли рақами бирга тенг бўлар эди ва ҳоказо. *k*-*амал* бажариш натижасида [0, 1] сегментдан шундай сонлар олиб ташланадики, уларни учли каср шаклида ёзганимизда *k*-учли рақами бирга тенг бўлади. Демак юқоридаги амалларни бажариш натижасида [0, 1] сегментдан бирорта уч-

---

[1] Сонларни учли, умуман *p* ли касрларга ёйиш ҳақида 64- § га қаранг.

ли рақами бирга тенг бўлган ҳамма сонлар чиқариб ташланган бўлади.

Агар [0,1] сегментдан олинган ихтиёрий x соннинг бирор учли каср рақами бирга тенг бўлса, у G_0 тўпламга киради, акс ҳолда у сон P_0 тўпламга киради, яъни P_0 тўпламга кирган сонларнинг учли рақамлари фақат 0 ва 2 дан иборат.

18.1-теоремадан аниқроқ бўлган қуйидаги теорема ўринли.

18.2-теорема. *P_0 тўплам континуум қувватга эга.*

Исбот. [0,1] сегментдаги ҳар бир сонни ўнли касрга ёйиш мумкин бўлганидек, бу сегментдаги ҳар бир сонни иккили касрга ёйиш мумкин:

$$x = 0,\ i_1\, i_2\, \ldots\, i_n\, \ldots;\ i_s = 0,\ 1.$$

Аксинча, бу кўринишдаги ҳар бир иккили касрга [0, 1] даги битта нуқтани мос қўйиш мумкин. Ўнли касрдаги каби [0, 1] даги $\frac{N}{2^k}$ кўринишдаги сонлар икки усул билан, қолган сонлар эса бир усул билан иккили касрга ёйилади.

Иккинчи томондан, юқорида кўрсатилганидек, P_0 тўпламнинг ҳар бир элементини қуйидаги учли каср шаклида ёзиш мумкин:

$$\xi = 0,\ j_1\, j_2\, \ldots\, j_n\, \ldots;\ j_s = 0,\ 2.$$

Аксинча, бу кўринишдаги ҳар бир учли касрга P_0 нинг битта нуқтаси мос келади; P_0 даги $\frac{N}{3^k}$ нуқталар икки усул билан, қолган нуқталар эса бир усул билан учли касрга ёйилади.

Энди [0,1] сегмент билан P_0 орасида ўзаро бир қийматли мосликни ўрнатамиз; [0,1] сегментдан иккили каср шаклида ёзилган

$$x = 0,\ i_1\, i_2\, \ldots\, i_n\, \ldots$$

нуқтани олиб, унга P_0 тўпламнинг қуйидаги элементини мос қўямиз:

$$\xi = 0,\ j_1\, j_2\, \ldots\, j_n\, \ldots,$$

бу ерда $j_s = 0$, агар $i_s = 0$ бўлса ва $j_s = 2$, агар $i_s = 1$ бўлса. Бундан, [0,1] сегмент континуум қувватга эга бўлгани учун P_0 тўпламнинг ҳам континуум қувватга эгалиги келиб чиқади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Бирор E тўплам ва унга тегишли бўлмаган ξ нуқта берилган бўлсин. E тўпламдан ξ нуқтагача бўлган *масофа* $\rho(\xi, E)$ деб, $\rho(\xi, x)$ $(x \in E)$ сонларнинг қуйи чегарасига айти-

лади, бу ерда $\rho(\xi, x)$ сон ξ нуқтадан x гача бўлган масофа. $\rho(\xi, E)$ соннинг нолга тенг бўлиши учун ξ нуқта E учун лимит нуқта бўлиши зарур ва кифоялигини исботланг.

2. E ёпиқ тўплам бўлиб, ξ унга тегишли бўлмасин. У ҳолда шундай $x \in E$ нуқта мавжудки, унинг учун $\rho(\xi, x) = \rho(\xi, E)$ тенглик ўринли бўлади. Шуни исботланг.

3. Саноқсиз тўпламнинг камида битта қуюқланиш нуқтаси мавжудлигини исботланг.

4. K, M, N тўпламларнинг қуюқланиш нуқталари тўпламларини мос равишда K^0, M^0, N^0 орқали белгилаймиз. Агар $K = M \cup N$ *бўлса,* $K^0 = M^0 \cup N^0$ тенгликни исботланг.

5. Ҳар қандай ёпиқ тўплам сони саноқли очиқ тўпламларнинг кўпайтмасига тенглигини исботланг.

6. (a, b) интервалнинг сони саноқли ўзаро кесишмайдиган ёпиқ тўпламларнинг йиғиндисига тенг бўла олмаслигини кўрсатинг.

7. $[0,1]$ сегментни ҳадларининг сони континуум қувватга эга бўлган ва ўзаро кесишмайдиган мукаммал тўпламларнинг йиғиндисига ёйинг.

8. Шундай M тўплам тузингки, $M^{(n)} \neq M^{(n+1)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ тенгсизлик ўринли бўлсин.

9. Шундай M тўплам тузингки, $M^{(i)} \neq M^{(i+1)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, аммо $M^{(i+1)} = \varnothing$, $i > n$ бўлсин.

10. Борель — Лебег теоремасига тескари теорема ўринлими? Яъни агар F тўпламни қоплайдиган чексиз оралиқлар системасидан уни қоплайдиган чекли қисм системасини ажратиш мумкин бўлса, F ёпиқ ва чегараланган тўплам бўладими?

11. M'' тўплам $[0,1]$ даги барча рационал нуқталар тўпламидан иборат бўладиган M тўплам мавжудми?

12. $[0, 1]$ да умумий нуқтаси бўлмаган шундай иккита M_1 ва M_2 тўплам топилсинки, уларнинг ҳар бири $[0, 1]$ нинг ҳамма ерида зич, континуум қувватга эга ва $M_1 \cup M_2 = [0,1]$ тенгликни қаноатлантирсин.

13. $[0, 1]$ да шундай ўзаро кесишмайдиган $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ тўпламлар топилсинки, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i = [0,1]$ бўлиб, уларнинг ҳар бири $[0, 1]$ нинг ҳамма ерида зич ва континуум қувватга эга бўлсин.

14. $[0, 1]$ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкинми:

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i, \quad M_i \cap M_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad \overline{M_i} = M_i, \quad M_i \neq \varnothing\ ?$$

15. Масалани қўйишдан илгари қуйидаги усул билан Q тўпламни ясаб оламиз:

$\Delta_0 = [0,1]$ сегментни олиб, унинг устида қуйидаги амалларни бажарамиз. Аввал бу сегментни $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ ва $\frac{4}{5}$ нуқталар билан беш қисмга бўлиб, ундан $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ оралиқни олиб ташлаймиз. Натижада $\Delta_{00} = \left[0, \frac{1}{5}\right]$ ва $\Delta_{01} = \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ сегментлар ҳосил бўлади. Δ_{00} ва Δ_{01} сегментларнинг ҳар бирини яна тенг беш қисмга бўламиз, улардан $\left(\frac{1}{25}, \frac{4}{25}\right)$ ва $\left(\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)$ оралиқларни олиб ташлаймиз. Натижада

$$\Delta_{000} = \left[0, \frac{1}{25}\right], \ \Delta_{001} = \left[\frac{4}{25}, \frac{1}{5}\right], \ \Delta_{010} = \left[\frac{4}{5}, \frac{21}{25}\right], \ \Delta_{011} = \\ = \left[\frac{24}{25}, 1\right)$$

сегментлар ҳосил бўлади. Бу сегментларнинг ҳар бирини яна тенг беш қисмга бўлиб, улардан тегишлича 4 та оралиқни олиб ташлаймиз; натижада 8 та сегмент ҳосил бўлади. Бу жараённи чексиз давом эттирамиз. Юқоридаги жараённи давом эттириш натижасида $\Delta_0 = [0,1]$ сегментдан ушбу

$$G = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right) \cup \left\{\left(\frac{1}{25}, \frac{4}{25}\right) \cup \left(\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)\right\} \cup \left\{\left(\frac{1}{5^3}, \frac{4}{5^3}\right) \cup \left(\frac{21}{5^3}, \frac{24}{5^3}\right) \cup \right. \\ \left. \cup \left(\frac{101}{5^3}, \frac{104}{5^3}\right) \cup \left(\frac{121}{5^3}, \frac{124}{5^3}\right)\right\} \cup \ldots$$

— очиқ тўплам олиб ташланган бўлади. Қолган $\Delta_0 \setminus G$ тўпламни Q билан белгилаймиз. Q мукаммал тўплам эканлигини кўрсатинг.

16. Ҳар қандай туташ нуқтали тўплам ё сегмент ёки интервал ёки ярим сегмент ёки тўғри чизиқ ёки нуқта бўлишини исботланг.

III боб

ТЎПЛАМНИНГ ЎЛЧОВИ ВА ЎЛЧОВЛИ ТЎПЛАМЛАР

Тўғри чизиқда бирор (a, b) оралиқ (ёки сегмент) берилган бўлса, бу оралиқнинг (сегментнинг) *узунлиги* ёки *ўлчови* деб, одатда, $b-a$ сонга айтилади. Энди тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқтали тўплам учун ўлчов тушунчасини киритиш масаласи туғилади. Тўпламнинг ўлчови тушунчасини турлича киритиш мумкин; ўлчов тушунчаси узунлик тушунчасини умумлаштириш натижасида келиб чиққан. Ўлчов назариясини француз математиклари Э. Борель, К. Жордан ва А. Лебеглар яратганлар.

Бу бобда биз алоҳида огоҳлантирмасдан доимо чегараланган тўпламлар билан иш кўрамиз.

19-§. Тўпламнинг ўлчови

E чегараланган тўплам ва $[a, b]$ шу тўпламни ўз ичига олган энг кичик сегмент бўлсин. Фараз қилайлик, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ сони чекли ёки саноқли оралиқлар системаси бўлиб, E нинг ҳар бир x нуқтаси δ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ оралиқларнинг бирортасида жойлашган бўлсин. μ_i билан δ_i оралиқнинг узунлигини белгилаймиз. Бундай оралиқлар системасини чексиз кўп усуллар билан тузиш мумкин. У ҳолда $\sum\limits_i \mu_i$ йиғинди ҳам чексиз кўп қийматга эга бўлади, аммо $\sum\limits_i \mu_i > 0$, чунки μ_i —оралиқнинг узунлиги. Демак, $\sum\limits_i \mu_i$ йиғиндилар системаси қуйидан чегараланган ва шунинг учун у аниқ қуйи чегарага эга.

1-таъриф. $\sum\limits_i \mu_i$ *йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегарасини E тўпламнинг ташқи ўлчови дейилади ва уни $\mu^*(E)$ билан белгиланади, яъни* $\mu^*(E) = \inf \sum\limits_i \mu_i$.

19.1-изоҳ. а) $\sum\limits_i \mu_i > 0$ бўлганлиги учун $\mu^*(E) \geqslant 0$ бўлади.

б) $\mu^*(E) \leqslant b - a$ тенгсизлик ўринли; ҳақиқатан, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун $E \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Бундан:

$$\mu^*(E) < b - a + 2\varepsilon.$$

Бу ерда ε ихтиёрий бўлганлиги учун

$$\mu^*(E) \leqslant b - a.$$

Ушбу

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE) \qquad (CE = [a, b] \setminus E)$$

сон E тўпламнинг *ички ўлчови* дейилади. $\mu_*(E) \geqslant 0$, чунки, $CE \subset [a, b]$ ва ўз навбатида $\mu^*(CE) \leqslant b - a$.

Ташқи ва ички ўлчовнинг бир нечта хоссаларини кўриб ўтамиз.

19.2-теорема. *E тўпламнинг ташқи ўлчови унинг ички ўлчовидан кичик эмас, яъни*

$$\mu_* E \leqslant \mu^* E.$$

Исбот. Аниқ қуйи чегаранинг таърифига мувофиқ, ҳар қандай кичик мусбат $\eta > 0$ сон учун E тўпламни ўз ичига олган шундай $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ оралиқлар системаси мавжудки, ушбу

$$\sum_i \mu_i < \mu^*(E) + \eta \tag{1}$$

(μ_i сон δ_i оралиқнинг узунлиги) тенгсизлик бажарилади.

Шунга ўхшаш, CE тўпламни ўз ичига олган шундай δ_1', δ_2', . . . оралиқлар системаси мавжудки, ушбу

$$\sum_i \mu_i' < \mu^*(CE) + \eta \tag{2}$$

(μ_i' сон δ_i' оралиқнинг узунлиги) тенгсизлик бажарилади. $\{\delta_i\}$ ва $\{\delta_i'\}$ оралиқлар системасининг тузилишига кўра

$$E \subset \bigcup_i \delta_i \text{ ва } CE \subset \bigcup_i \delta_i'.$$

Демак,

$$E \cup CE = [a, b] \subset (\bigcup_i \delta_i) \cup (\bigcup_i \delta_i'). \tag{3}$$

(1), (2) ва (3) муносабатларга мувофиқ:

$$b - a \leqslant \sum_i \mu_i + \sum_i \mu_i' \leqslant \mu^*(E) + \mu^*(CE) + 2\eta.$$

Бундан:

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE) < \mu^*(E) + 2\eta.$$

Бу тенгсизлик ихтиёрий кичик $\eta > 0$ учун бажарилганлиги сабабли, ундан

$$\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E)$$

муносабат келиб чиқади.

19.3-теорема. *Агар A ва B тўпламлар учун $A \subset B$ бўлса, у ҳолда*

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B), \ \mu_*(A) \leqslant \mu_*(B).$$

Исбот. Бу тенгсизликларнинг исботи ўхшаш бўлганлиги сабабли уларнинг биринчисини исботлаш билан чегараланамиз. $A \subset B$ бўлганлиги учун B тўпламни қоплайдиган ҳар қандай $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системаси A тўпламни ҳам қоплайди. Маълумки, бундай оралиқлар системасини чексиз кўп усуллар билан тузиш мумкин. Натижада $\sum_i \mu_i$ йиғинди (бу ерда μ_i сон

δ_i оралиқнинг узунлиги) чексиз кўп қийматга эга бўлади. Агар B тўпламни қоплайдиган оралиқлар системаси учун тузилган $\sum\limits_i \mu_i$ йиғиндининг қийматлари тўпламини B_0 билан, A тўпламни қоплайдиган оралиқлар системаси учун тузилган $\sum\limits_i \mu_i$ йиғиндининг қийматлари тўпламини A_0 билан белгиласак, $B_0 \subset A_0$ муносабатга эга бўламиз. Бундан, аниқ қуйи чегаранинг таърифига асосан, ушбу

$$\mu^*(A) = \inf_{A\subset\bigcup\limits_i \delta_i} \sum_i \mu_i \leqslant \inf_{B\subset\bigcup\limits_i \delta_i} \sum_i \mu_i = \mu^*(B)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

19.4-теорема. *Агар чегараланган E тўплам чекли ёки сони саноқли $E_1, E_2, \ldots$ тўпламларнинг йиғиндисидан иборат, яъни $E = \bigcup\limits_k E_k$ бўлса, у ҳолда*

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_k \mu^*(E_k).$$

Исбот. Аниқ қуйи чегаранинг таърифига асосан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон ва ҳар бир k натурал сон учун шундай $\delta_1^{(k)}$, $\delta_2^{(k)}$, ... оралиқлар системаси топиладики, $E_k \subset \bigcup\limits_j \delta_j^{(k)}$ бўлиб,

$$\mu^*(E_k) \geqslant \sum_j \mu_j^{(k)} - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

бўлади (бу ерда $\mu_j^{(k)}$ сон $\delta_j^{(k)}$ оралиқнинг узунлиги). $\delta_j^{(k)}$ оралиқнинг танланишидан ва теорема шартидан қуйидагига эга бўламиз:

$$E \subset \bigcup_k E_k \subset \bigcup_k \bigcup_j \delta_j^{(k)}.$$

Бундан

$$\mu^*(E) = \inf \sum_k \sum_j \mu_j^{(k)} \leqslant \sum_k \sum_j \mu_j^{(k)} \leqslant \sum_k \left(\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

ε ихтиёрий бўлганлиги туфайли бу тенгсизликдан ушбу тенгсизликни оламиз:

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_k \mu^*(E_k).$$

19.5-**теорема.** *Агар чегараланган E тўплам учун* $E=\bigcup_k E_k$, $E_k\cap E_n=\varnothing$, $k\neq n$ бўлса, у ҳолда

$$\mu_*(E)\geqslant\sum_k\mu_*(E_k).$$

Исбот. Теоремани дастлаб иккита тўплам учун исботлаймиз. Фараз қилайлик, $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\varnothing$ бўлиб, E тўпламни ўз ичига олган энг кичик сегмент $[a, b]$ бўлсин. $CE_1=[a, b]\setminus E_1$ ва $CE_2=[a, b]\setminus E_2$ тўпламларни кўрамиз.

Ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\{\delta_i\}$ ва $\{\delta'_i\}$ оралиқлар системасини топиш мумкинки, улар учун ушбу

$$CE_1\subset\bigcup_i\delta_i \text{ ва } CE_2\subset\bigcup_j\delta'_j \tag{4}$$

ҳамда

$$\sum_i\mu_i<\mu^*(CE_1)+\varepsilon \text{ ва } \sum_j\mu'_j<\mu^*(CE_2)+\varepsilon \tag{5}$$

муносабатлар бажарилади; бу ерда μ_i ва μ'_j сонлар мос равишда δ_i ва δ'_i оралиқларнинг узунликлари. E_1 ва E_2 тўпламлар ўзаро кесишмаганлиги туфайли, CE_1 ва CE_2 тўпламлар (a, b) оралиқни қоплайди:

$$(a, b)\subset CE_1\cup CE_2.$$

Бундан (4) муносабатга асосан, ушбу муносабатга эга бўламиз:

$$(a, b)\subset(\bigcup_i\delta_i)\cup(\bigcup_j\delta'_j). \tag{6}$$

δ_i ва δ'_j оралиқларнинг кесишмаси $\delta_i\cap\delta'_j$ ҳам оралиқ бўлганлиги учун (6) муносабатдан ушбу

$$\sum_i\mu_i+\sum_j\mu'_j-\sum_{i,j}\mu(\delta_i\cap\delta'_j)\geqslant b-a \tag{7}$$

тенгсизлик келиб чиқади, бу ерда $\mu(\delta_i\cap\delta'_j)$ сон $\delta_i\cap\delta'_j$ оралиқнинг узунлиги.

Энди, ушбу

$$CE=C(E_1\cup E_2)=CE_1\cap CE_2\subset(\bigcup_i\delta_i)\cap(\bigcup_j\delta'_j)=\bigcup_{i,j}(\delta_i\cap\delta'_j)$$

муносабатдан

$$\mu^*(CE)\leqslant\sum_{i,j}\mu(\delta_i\cap\delta'_j)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан (7) тенгсизликка асосан, ушбу

$$\mu^*(CE) \leqslant \sum_{i,j} \mu(\delta_i \cap \delta'_j) \leqslant \sum_i \mu_i + \sum_j \mu'_j - (b-a)$$

тенгсизликни оламиз. Бундан (5) тенгсизликка асосан, ушбу

$$\mu^*(CE) \leqslant \mu^*(CE_1) + \mu^*(CE_2) - (b-a) + 2\varepsilon$$

тенгсизликни оламиз. $\varepsilon > 0$ нинг ихтиёрийлигидан эса

$$\mu^*(CE) \leqslant \mu^*(CE_1) + \mu^*(CE_1) - (b-a)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан

$$(b-a) - \mu^*(CE) \geqslant (b-a) - \mu^*(CE_1) + (b-a) - \mu^*(CE_2)$$

тенгсизликни олиб, ушбу натижага келамиз:

$$\mu_*(E) \geqslant \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2).$$

Ҳар қандай чекли n учун теорема индукция усули орқали исботланади.

Фараз қилайлик, энди $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$ бўлсин. Ихтиёрий n натурал сон учун ушбу

$$S_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

белгилашни киритамиз. Бундан $S_n \subset E$ муносабат келиб чиқади. 19.3- теоремага асосан $\mu_*(S_n) \leqslant \mu_*(E)$ тенгсизликка эга бўламиз. Ҳозиргина исботлаганимизга асосан эса

$$\mu_*(S_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_*(E_k).$$

Демак,

$$\mu_*(E) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_*(E_k).$$

Натурал n сон ихтиёрий бўлганлиги учун, бундан $n \to \infty$ да ушбу

$$\mu_*(E) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_*(E_k)$$

тенгсизлик келиб чиқади.$_*$

Изоҳ. Бу теоремада E_k тўпламларнинг кесишмайдиган қилиб олиниши муҳим, чунки, агар $E_1 = [0,1]$, $E_2 = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ бўлса, у ҳолда

$$\mu_*(E_1) = 1, \ \ \mu_*(E_2) = \frac{3}{2}.$$

$$E = E_1 \cup E_2 = [0, 2],$$

бундан эса $\mu_*(E) = 2$. Лекин

$$\mu_*(E_1) + \mu_*(E_2) = \frac{5}{2}.$$

Энди тўплам ўлчовининг таърифини берамиз.

2-таъриф (А. Лебег). *Агар E тўпламнинг $\mu^*(E)$ ташқи ўлчови унинг $\mu_*(E)$ ички ўлчовига тенг бўлса, у ҳолда E ўлчовли тўплам дейилади ва унинг ўлчовини $\mu(E)$ билан белгиланади, яъни*

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

Бу таъриф маъносидаги ўлчовли тўпламни (L) *ўлчовли тўплам* дейилади. Юқоридаги мулоҳазалардан $\mu([a, b]) = b - a$ ва $\mu((a, b)) = b - a$ тенгликларнинг ўринли эканлиги бевосита кўринади.

19.6-теорема. *Агар E тўплам ўлчовли бўлса, у ҳолда CE ҳам ўлчовли тўплам бўлади.*

Исбот. E ўлчовли бўлганлиги учун

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

Ички ўлчовнинг таърифига мувофиқ,

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE) = \mu(E)$$

ёки

$$\mu^*(CE) = b - a - \mu_*(E) = b - a - \mu(E). \tag{8}$$

Шунинг сингари

$$\mu_*(CE) = b - a - \mu^*(E) = b - a - \mu(E) \tag{9}$$

(8) ва (9) дан

$$\mu(CE) = \mu_*(CE) = \mu^*(CE) = b - a - \mu(E)$$

тенгликлар, яъни CE тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.*

Мисол. Иккинчи бобдан маълумки, сонлар ўқидаги ҳар қандай чегараланган очиқ тўплам сони чекли ёки саноқли ўзаро кесишмайдиган $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасининг (тузувчи оралиқлар системасининг) йиғиндисидан иборат:

$$G = \bigcup_i \delta_i.$$

Шунинг сингари ҳар қандай чегараланган ёпиқ F тўплам шу тўпламни ўз ичига олган энг кичик $[a, b]$ сегментдан сони чекли ёки саноқли ўзаро кесишмайдиган δ_1', δ_2', . . . оралиқлар системасини чиқариб ташлаш натижасида ҳосил этилади:

$$F = [a, b]\setminus G', \quad (G' = \bigcup_i \delta_i').$$

Агарда G очиқ ва F ёпиқ тўпламлар бир-бирини $[a, b]$ сегментгача тўлдирса, у ҳолда

$$F = [a, b]\setminus G, \quad G = \bigcup_i \delta_i.$$

Бундан ташқи ўлчов таърифига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$\mu^*(G) = \sum_i \mu_i, \quad \mu^*(F) = b - a - \sum_i \mu_i, \tag{10}$$

бу ерда μ_i сон δ_i оралиқнинг узунлиги.

Шунингдек, ички ўлчов таърифига асосан:

$$\left.\begin{aligned} \mu_*(G) &= b - a - \mu^*(CG) = b - a - \mu^*(F) = b - a - \\ &\quad - (b - a) + \sum_i \mu_i = \sum_i \mu_i, \\ \mu_*(F) &= b - a - \mu^*(CF) = b - a - \mu^*(G) = b - a - \sum_i \mu_i. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(10) ва (11) тengликлардан $\mu_*(G) = \mu^*(G) = \mu(G)$ ва $\mu_*(F) = \mu^*(F) = \mu(F)$; демак, ҳар қандай чегараланган очиқ ва ёпиқ тўпламлар ўлчовли.

19.7-теорема (А. Лебег). *E тўпламнинг ўлчовли бўлиши учун уни*

$$E = (G \cup e_1)\setminus e_2 \tag{12}$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги зарур ва кифоядир, бу тенгликнинг ўнг томонидаги G, e_1 ва e_2 тўпламлар ихтиёрий берилган $\eta > 0$ сонга мувофиқ қуйидагича тузилган: G ўзаро кесишмайдиган сони чекли оралиқлар системасининг йиғиндисидан иборат, e_1 ва e_2 нинг ҳар бири ташқи ўлчови η сондан кичик бўлган тўпламлар. (12) тенглик бажарилганда қуйидаги муносабат ҳам ўринли бўлади:

$$\mu(G) - \eta < \mu(E) < \mu(G) + \eta. \tag{13}$$

Зарурийлигининг исботи. E тўпламнинг ўлчовли эканлигидан фойдаланиб, уни (12) кўринишда ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз. E тўплам ўлчовли бўлгани учун:

$$\mu(E) = \mu_*(E) = \mu^*(E).$$

Ташқи ўлчов таърифидан фойдаланиб, ўзаро кесишмайдиган шундай $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасини тузишимиз мумкинки, булар учун ушбу

$$\sum_i \mu(\delta_i) < \mu(E) + \frac{\eta}{2}, \tag{14}$$

$$E \subset \bigcup_i \delta_i \tag{15}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Бу системадан дастлабки $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ оралиқларнинг йиғиндисини G билан белгилаймиз, яъни

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} \delta_i.$$

E тўпламнинг G тўпламга кирмаган элементларидан иборат бўлган тўпламни e_1 билан белгиласак, (15) муносабатга асосан ушбу

$$e_1 \subset \bigcup_{i>n} \delta_i \tag{16}$$

муносабатга эга бўламиз. Агар G тўпламнинг E тўпламга кирмаган элементларидан иборат бўлган тўпламни e_2 билан белгиласак, G, e_1, e_2 тўпламларнинг тузилишига мувофиқ

$$E = (G \cup e_1) \setminus e_2$$

тенглик ўринли бўлади.

G тўплам ўзаро кесишмайдиган n та оралиқнинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун ўлчовли тўплам бўлади ва унинг ўлчови

$$\mu(G) = \sum_{i=1}^{n} \mu(\delta_i).$$

(14) тенгсизликдан $\sum_i \mu(\delta_i)$ қаторнинг яқинлашиши келиб чиқади. Бундан берилган $\eta > 0$ учун n номерни шундай танлашимиз мумкинки, натижада

$$\sum_{i>n} \mu(\delta_i) < \frac{\eta}{2} \tag{17}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. (16) ва (17) муносабатлардан эса

$$\mu^*(e_1) < \eta$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Фараз қилайлик, E тўпламни ўз ичига олган энг кичик сегмент $[a, b]$ бўлсин. У ҳолда 19.6-теоремага асосан $CE = [a, b] \setminus E$ тўплам ўлчовли бўлади. Ташқи ўлчовнинг таърифидан фойдаланиб, ўзаро кесишмайдиган шундай δ_1', δ_2', ... оралиқлар системасини тузамизки, булар учун ушбу

$$\sum_i \mu(\delta_i') < \mu(CE) + \frac{\eta}{2} \tag{18}$$

ва

$$CE \subset \bigcup_i \delta_i' \tag{19}$$

муносабатлар ўринли бўлади. (15) ва (19) муносабатлардан

$$[a, b] = E \cup CE \subset (\bigcup_i \delta_i) \cup (\bigcup_i \delta_i')$$

муносабат келиб чиқади. Бундан ушбу

$$b - a \leqslant \sum_i \mu(\delta_i) + \sum_j \mu(\delta_j') - \sum_{i,j} \mu(\delta_i \cap \delta_j')$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бунга (14) ва (18) тенгсизликларни қўллаб,

$$b - a < \mu(E) + \frac{\eta}{2} + \mu(CE) + \frac{\eta}{2} - \sum_{i,j} \mu(\delta_i \cap \delta_j')$$

ёки

$$\sum_{i,j} \mu(\delta_i \cap \delta_j') < \mu(E) + \mu(CE) - (b - a) + \eta = \eta \tag{20}$$

тенгсизликни оламиз.

e_2 тўпламнинг таърифига мувофиқ,

$$e_2 = G \cap CE.$$

Бундан G тўпламнинг тузилишига ва (19) муносабатга асосан, ушбу

$$e_2 = G \cap CE \subset (\bigcup_{i=1}^{n} \delta_i) \cap (\bigcup_j \delta_j') \subset \bigcup_{i,j} (\delta_i \cup \delta_j')$$

муносабатни оламиз. Демак,

$$\mu^*(e_2) \leqslant \sum_{i\,j} \mu(\delta_i \cap \delta_j').$$

Бундан (20) тенгсизликка асосан $\mu^*(e_2) < \eta$ тенгсизлик келиб чиқади. Зарурийлик исботланди.

Кифояликнинг исботи. Энди E тўпламни (12) кўринишда ёзишимиз мумкин деб олиб, унинг ўлчовли эканлигини исботлаймиз. G, e_1 ва e_2 тўпламларнинг тузилишига асосан қуйидаги

$$E \subset G \cup e_1 \text{ ва } CE \subset CG \cup e_2, \quad (CG = [a, b] \setminus G)$$

муносабатлар ўринли. Ташқи ўлчовнинг хоссасига асосан (19.4- теорема)

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(G) + \mu^*(e_1) \leqslant \mu(G) + \eta$$

ва

$$\mu^*(CE) \leqslant \mu^*(CG) + \mu^*(e_2) \leqslant \mu(CG) + \eta. \tag{21}$$

Ички ўлчовнинг таърифига асосан ҳамда (21) тенгсизликдан

$$\mu_*(E) = b - a - \mu^*(CE) \geqslant b - a - \mu(CG) - \eta = \mu(G) - \eta$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак,

$$\mu(G) - \eta \leqslant \mu_*(E) \leqslant \mu^*(E) \leqslant \mu(G) + \eta.$$

Бу тенгсизликлар ихтиёрий $\eta > 0$ учун ўринли эканлигидан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\mu^*(E) = \mu_*(E).$$

Бу эса E тўпламнинг ўлчовли эканлигини кўрсатади. $_*$

20- §. Ўлчовли тўпламлар ҳақида теоремалар

20.1- теорема. *Агар $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ўлчовли тўпламлар бўлса, уларнинг йиғиндиси ҳам ўлчовли тўплам бўлади; йиғиндининг ҳадлари ўзаро кесишмайдиган тўпламлардан иборат бўлса, йиғиндининг ўлчови ҳадлар ўлчовларининг йиғиндисига тенг бўлади.*

Исбот. Теорема ҳадларининг сони икки тўпламдан иборат бўлган ҳол учун исбот этилса кифоя, чунки ҳадларининг сони n та тўпламдан иборат бўлган ҳолни математик индукция усули ёрдами билан ҳадларининг сони икки тўпламдан иборат бўлган ҳолга келтиришимиз мумкин. Шундай қилиб, E_1 ва E_2 ўлчовли тўпламлар бўлсин. 19.7- теоремага асосан, E_1 ва E_2 тўпламларни ушбу

$$E_1 = (G_1 \cup e_1') \setminus e_2', \quad E_2 = (G_2 \cup e_1'') \setminus e_2'' \tag{1}$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. Бу кўринишда G_1 ва G_2 тўпламларнинг ҳар бири сони чекли ва ўзаро кесишмайдиган оралиқлар системасининг йиғиндисидан иборат: e'_1, e'_2, e''_1 ва e''_2 ташқи ўлчовлари $\eta>0$ дан кичик бўлган тўпламлар; $\eta>0$ эса аввалдан берилган ихтиёрий кичик сон. Демак,

$$\mu^*(e''_2)<\eta,\ \mu^*(e'_2)<\eta,\ \mu^*(e'_1)<\eta,\ \mu^*(e''_1)<\eta \tag{2}$$

(1) тенгликлардан ушбу

$$E_1 \cup E_2 = (G_1 \cup G_2) \cup (e'_1 \cup e''_1) \setminus - e \tag{3}$$

тенглик келиб чиқади, бу ерда $e \subset e''_2 \cup e''_2$. (3) тенгликдаги $G = G_1 \cup G_2$ тўплам сони чекли ўзаро кесишмайдиган оралиқлар системасининг йиғиндисидан иборат.

Ташқи ўлчовнинг хоссасидан ва (2) тенгсизликлардан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\mu^*(e'_1 \cup e''_1) < 2\eta,\ \mu^*(e'_2 \cup e''_2) < 2\eta,\ \mu^*(e) < 2\eta.$$

Бу тенгсизликлардан 19.7- теоремага асосланиб, $E_1 \cup E_2$ тўпламни ўлчовли тўплам дейишимиз мумкин. Бундан ташқари:

$$\mu(G_1 \cup G_2) - 2\eta < \mu(E_1 \cup E_2) < \mu(G_1 \cup G_2) + 2\eta. \tag{4}$$

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот этамиз. Шу мақсадда ўзаро кесишмайдиган E_1 ва E_2 тўпламлар учун ушбу

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатан ҳам, 19.4- теоремага асосан

$$\mu^*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2). \tag{5}$$

Шунинг сингари, 19.5- теоремага асосан

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) \geqslant \mu_*(E_1) + \mu_*(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2). \tag{6}$$

19.2- теоремага асосан,

$$\mu_*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu^*(E_1 \cup E_2).$$

Бундан (5) ва (6) тенгсизликларга асосан, ушбу

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leqslant \mu^*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2),$$

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leqslant \mu_*(E_1 \cup E_2) \leqslant \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

тенгсизликларни оламиз. Булардан $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu_*(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ тенглик келиб чиқади.$_*$

20.2- теорема. *Ўлчовли E_1 ва E_2 тўпламларнинг айирмаси ҳам ўлчовли тўпламдир; агар $E_2 \subset E_1$ бўлса, у ҳолда*

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$$

бўлади.

Исбот. Ушбу

$$C(E_1 \setminus E_2) = CE_1 \cup E_2$$

тенглик ўринли[1].

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли бўлгани учун чап томонидаги тўплам ҳам 20.1-теоремага асосан ўлчовли бўлади; $E_1 \setminus E_2$ тўплам $C(E_1 \setminus E_2)$ тўпламга нисбатан тўлдирувчи тўплам бўлганлиги учун 19.6-теоремага асосан ўлчовли бўлади.

Энди теореманинг иккинчи қисмини исбот этамиз. $E_2 \subset E_1$ бўлгани учун ушбу

$$E_1 = (E_1 \setminus E_2) \cup E_2$$

тенглик ўринли. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $E_1 \setminus E_2$ ва E_2 тўпламлар ўлчовли, ўзаро кесишмайдиган тўпламлар бўлгани учун 20.1-теоремага мувофиқ,

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \setminus E_2) + \mu(E_2),$$

яъни

$$\mu(E_1 \setminus E_2) = \mu(E_1) - \mu(E_2)$$

тенгликларни ёзишимиз мумкин. ●

20.3-теорема. *Агар* $[a, b]$ *сегментда жойлашган ўлчовли* $E_1, E_2, \ldots,$ *тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси бўлмиш* $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *тўплам ўлчовли бўлади. Бундан ташқари, агар* $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ бўлса, у ҳолда

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Бу тенглик *ўлчовнинг тўла аддитивлик* ёки σ-*аддитивлик хоссаси дейилади.*

---

[1] Бу тенгликни одатдаги усул билан исбот қилиш мумкин, яъни чап томондаги тўпламнинг ҳар бир элементи ўнг томондаги тўпламга тегишлилигини ва аксинча, ўнг томондаги тўпламнинг ҳар бир элементи чап томондаги тўпламга тегишлилигини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, $x \in C(E_1 \setminus E_2)$ бўлсин. Бундан, $x \notin E_1 \setminus E_2$, ёки $x \in E_1$ ва $x \in E_2$, демак, $x \in CE_1 \cup E_2$ ёки $x \notin E_1$, демак, $x \in CE_1$ бундан $x \in CE_1 \cup E_2$. Натижада $C(E_1 \setminus E_2)$ тўпламнинг ҳар бир элементи $CE_1 \cup E_2$ тўпламга ҳам кирар экан.

Энди $x \in CE_1 \cup E_2$ бўлсин; бундан ё $x \in CE_1$, ёки $x \in E_2$ муносабат келиб чиқади. Агар $x \in CE_1$ бўлса, у ҳолда $x \notin E_1$, демак, $x \notin E_1 \setminus E_2$, яъни $x \in C(E_1 \setminus E_2)$. Агар $x \in E_2$ бўлса, у ҳолда $x \notin E_1 \setminus E_2$, демак, $x \in C(E_1 \setminus E_2)$, яъни $CE_1 \cup E_2$ тўпламнинг ҳар бир элементи $C(E_1 \setminus E_2)$ тўпламга ҳам кирар экан.

Исбот. Теоремани аввал $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ҳол учун исбот этамиз.

Ушбу

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

тўпламни қараймиз. Теореманинг шартига кўра $A_n \subset E$. 19.3-ва 20. 1-теоремаларга асосан

$$\mu_*(E) \geqslant \mu_*(A_n) = \mu(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \tag{7}$$

тенгсизлик келиб чиқади. (7) тенгсизлик ҳар қандай n учун ўринли бўлганлиги сабабли у $n \to \infty$ да ҳам ўринлидир, яъни

$$\mu_*(E) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{8}$$

E тўпламнинг тузилишидан ва ҳар бир E_i ларнинг ўлчовли эканлигидан 19.4-теоремага асосан

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \tag{9}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

19.2-теоремага мувофиқ (8) ва (9) дан

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) \leqslant \mu_*(E) \leqslant \mu^*(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(E_k)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Бундан

$$\mu_*(E) = \mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

тенгликка эга бўламиз.

Бу билан $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ҳол учун теорема исбот этилди.

Агар E_1, E_2, . . . тўпламлар ўлчовли бўлиб, умумий нуқталарга эга бўлса, у ҳолда $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ тўпламни ушбу $E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup [(E_3 \setminus E_2) \setminus E_1] \cup \ldots$ кўринишда ёзиб, бу ҳолни исбот этилган ҳолга келтиришимиз мумкин, чунки охирги тенгликнинг ўнг томонидаги E_1, $E_2 \setminus E_1$, $[(E_3 \setminus E_2) \setminus E_1]$,. . . . тўпламлар ўзаро кесишмайди.$_*$

20.4-теорема. *Ҳар қандай саноқли E тўплам ўлчовли ва унинг ўлчови нолга тенг.*

Исбот. E саноқли тўплам бўлганлиги учун унинг элементларини $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ кетма-кетлик шаклида ёзишимиз мумкин. Биргина x_k элементнинг ўзидан иборат бўлган тўпламни E_k билан белгилаймиз.

У ҳолда

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

E_k тўплам, ўлчов таърифига мувофиқ, ўлчовли бўлади ва унинг ўлчови нолга тенг (чунки битта нуқтадан иборат тўпламни узунлиги исталганча кичик бўлган оралиққа жойлаш мумкин). Демак, 20.3-теоремага мувофиқ E тўплам ҳам ўлчовли бўлади ва ўлчови нолга тенг.

Изоҳ. Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, 20.4-теореманинг тескариси доимо тўғри бўлмайди, яъни тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, бу тўпламнинг саноқли бўлиши шарт эмас. Бунинг тўғрилигини кўрсатиш учун мисол сифатида Канторнинг P_0 тўпламини оламиз. Маълумки, Канторнинг P_0 тўплами G_0 тўпламнинг $[0,1]$ сегментгача тўлдирувчиси ва

$$\mu(G_0) = \mu\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} + \mu\left\{\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right\} + \\ + \mu\left\{\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)\right\} + \\ + \ldots = \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots\right\} = 1.$$

Демак, 20.2-теоремага асосан

$$\mu(P_0) = \mu\{[0,1] \setminus G_0\} = \mu\{[0,1]\} - \mu(G_0) = 0.$$

Лекин 18.1-теоремага асосан P_0 саноқсиз тўплам. Кўрамизки, саноқсиз тўпламнинг ўлчови ҳам нолга тенг бўлиши мумкин экан.

20.5-теорема. *$[a,b]$ сегментда жойлашган, сони чекли ёки саноқли ўлчовли тўпламларнинг кўпайтмаси ўлчовли тўпламдир.*

Исбот. $E_1, E_2 \ldots$ ўлчовли тўпламлар бўлиб, уларнинг ҳар бири $[a, b]$ сегментда жойлашган бўлсин. $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ тўпламни тузамиз. Маълумки,

$$CE = \bigcup_{i=1}^{\infty} CE_i \ (CE = [a, b] \setminus E, CE_i = [a, b] \setminus E_i).$$

Иккинчи томондан, 19.6-га асосан E_i тўплам ўлчовли бўлганлиги учун CE_i тўплам ҳам ўлчовли. 20.3-теоремага асосан CE тўплам ҳам ўлчовлидир. Демак, E ўлчовли, чунки у CE тўпламга нисбатан тўлдирувчи тўплам.$_*$

20.6-теорема. *Агар* $[a, b]$ *сегментда жойлашган ўлчовли* $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ *тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Аввало $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ ва $E_0 = \varnothing$ белгилашларни киритиб, ушбу тенгликни ёзамиз:

$$E = (E_1 \setminus E_0) \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \ldots \cup (E_n \setminus E_{n-1}) \cup \ldots$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги $\{E_n \setminus E_{n-1}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тўпламлар ўлчовли ва ўзаро кесишмайдиган бўлганлиги учун 20.3-теоремага мувофиқ,

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i-1})$$

ёки

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}).$$

Аммо 20.2-теоремага мувофиқ

$$\mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \mu(E_i) - \mu(E_{i-1}),$$

бундан

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i \setminus E_{i-1}) = \mu(E_n).$$

Демак,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)._*$$

20.7-теорема. *Агар* $[a, b]$ *сегментда жойлашган ўлчовли* $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ *тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлса, у ҳолда*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Исбот. Берилган тўпламларнинг кўпайтмасини E билан белгилаймиз, яъни

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Бундан

$$CE = \bigcup_{n=1}^{\infty} CE_n;$$

$E_n \supset E_{n+1}$ дан $CE_n \subset CE_{n+1}$ муносабат келиб чиқади. Ундан ташқари, CE_n тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли, чунки E_n ўлчовли.

Демак, $\{CE_i\}$ тўпламлар системасига 20.6-теоремани қўллашимиз мумкин:

$$\mu(CE) = \lim_{n\to\infty} \mu(CE_n).$$

Бундан

$$b - a - \mu(CE) = b - a - \lim_{n\to\infty} \mu(CE_n)$$

ёки

$$b - a - \mu(CE) = \lim_{n\to\infty} [b - a - \mu(CE_n)].$$

Аммо

$$b - a - \mu(CE) = \mu(E)$$

ва

$$b - a - \mu(CE_n) = \mu(E_n)\cdot$$

Демак,

$$\mu(E) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).*$$

20.8-теорема (Н. Лузин). *Агар E тўплам ўлчовли бўлиб, унинг ўлчови мусбат бўлса, у ҳолда исталганча кичик $\eta>0$ учун шундай мукаммал $P\subset E$ тўплам топиш мумкинки, бу тўплам учун ушбу*

$$\mu(P) > \mu(E) - \eta$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот. Ўлчовли E тўпламни ўз ичига олган энг кичик сегмент $[a, b]$ бўлсин. $CE = [a, b] \setminus E$ тўплам ҳам ўлчовли бўлганлиги сабабли 19.7-теоремага асосан ҳар қандай $\eta>0$ учун CE тўпламни тўлиғича қоплайдиган шундай сони чекли ёки саноқли $\delta_1, \delta_2, \ldots$ оралиқлар системасини топиш мумкинки, булар учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$\sum_k \mu(\delta_k) < \mu(CE) + \eta. \qquad (10)$$

$[a, b]$ сегментдан $\delta_1, \delta_2 \ldots$ оралиқларни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган тўпламни F билан белгилаймиз. F ёпиқ тўплам бўлиб, $F \subset E$ ва

$$\mu(F) = b - a - \sum_i \mu(\delta_i)$$

бўлади. Бундан (10) га мувофиқ

$$\mu(F) > b - a - \mu(CE) - \eta = \mu(E) - \eta. \qquad (11)$$

Кантор — Бендиксон теоремасидан фойдаланиб, F тўпламни

$$F = P \cup D$$

кўринишда ёзишимиз мумкин; бу ерда P мукаммал тўплам ва у F нинг ҳамма қуюқланиш нуқталаридан иборат, D тўплам кўпи билан саноқли ва $P \cap D = \varnothing$.

20.4- теоремага асосан, $\mu(D) = 0$; демак,

$$\mu(F) = \mu(P \cup D) = \mu(P).$$

(11) га мувофиқ,

$$\mu(P) > \mu(E) - \eta \text{ ва } P \subset F \subset E._*$$

Бу теореманинг моҳияти шундаки, у ҳар қандай ўлчовли тўпламни ўлчови унинг ўлчовига исталганча яқин бўлган мукаммал қисм тўплам билан алмаштириш имкониятини беради.

21- §. Ўлчовли тўпламлар синфи

1-таъриф. *Агар E тўпламни сони саноқли очиқ $G_1, G_2, \ldots$ тўпламларнинг кўпайтмаси шаклида ёзиш мумкин бўлса, яъни*

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда уни G_δ типидаги тўплам дейилади.

2-таъриф. *Агар E тўпламни сони саноқли ёпиқ $F_1, F_2, \ldots$ тўпламларнинг йиғиндиси шаклида ёзиш мумкин бўлса, яъни*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{F}_k$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда E тўплам F_σ типидаги тўплам дейилади.

3-таъриф. *Агар E тўпламни очиқ ва ёпиқ тўпламлар устида қўшиш ва кўпайтириш амалларини чекли ёки саноқли марта бажариш натижасида ҳосил қилиш мумкин бўлса, ундай тўпламни Борель тўплами (қисқароқ, (B)-тўплам) дейилади. Чегараланган (B)-тўпламни (B) ўлчовли тўплам дейилади.*

Масалан, F_σ ва G_δ типидаги тўпламлар Борель тўпламлари бўлади.

Агар F_σ (ёки G_δ) типидаги сони саноқли тўпламларнинг йиғиндиси (мос равишда, кўпайтмаси) олинса, у яна F_σ (мос равишда G_δ) типидаги тўплам бўлади. Аммо F_σ типидаги сони саноқли тўпламларнинг кўпайтмаси олинса, у ҳолда умуман айтганда на F_σ типида ва на G_δ типида бўлмаган тўпламлар ҳосил бўлади; бундай тўпламларни $F_{\sigma\delta}$ *типидаги тўпламлар* дейилади. Шунга ўхшаш, G_δ типидаги сони саноқли тўпламларнинг йиғиндиси $G_{\delta\sigma}$ *типидаги тўплам* дейилади.

$F_{\sigma\delta}$ типидаги тўпламларни саноқли марта йиғиш натижасида $F_{\sigma\delta\sigma}$ типидаги ва $G_{\delta\sigma}$ типидаги тўпламларни саноқли марта кўпайтириш натижасида $G_{\delta\sigma\delta}$ типидаги тўпламлар ҳосил бўлади ва ҳоказо; бунинг натижасида ҳосил бўлган барча тўпламлар синфи (B) тўпламлар синфини ташкил этади. (B) тўпламлар синфи тузилишига кўра математикада ғоят муҳим аҳамиятга эга.

Теорема. *Ҳар қандай (B) ўлчовли тўплам (L) ўлчовли бўлади.*

Исбот. Бу теорема 20.3 ва 20.5-теоремаларнинг натижасидир. *

Лекин бу теореманинг тескариси тўғри эмас, яъни шундай (L) ўлчовли тўпламлар мавжудки, улар (B) ўлчовли эмас. Биринчи марта бундай мисолни москвалик математик М. А. Суслин тузган. У бу борада (A)-тўпламлар деб аталувчи тўпламлар синфини кашф этган. ([1] га қаранг). (A) тўпламлар синфи (B) тўпламлар синфидан кенгроқ бўлса ҳам, (A) тўпламлар синфига кирган ҳамма тўпламлар (L) ўлчовлидир.

20—21-§ ларда кўрдикки, ўлчовли тўпламлар синфи анча кенг экан. Қуйидаги савол туғилади: чегараланган ва (L) ўлчовли бўлмаган тўплам мавжудми? Шу савол билан шуғулланамиз.

22- §. Ўлчовсиз тўплам мисоли

Энди ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини кўрсатамиз ҳамда барча ўлчовсиз тўпламлардан тузилган системанинг қувватини топамиз.

9- § га асосан тўғри чизиқнинг барча қисмларидан тузилган тўпламлар системасининг қуввати 2^c га тенг, бу ерда c — континуум қуввати. Ўлчовли тўпламлардан тузилган тўпламлар системасининг қувватини ҳисобласак ҳам худди шу натижага келамиз, яъни қуйидаги теорема ўринли:

22.1-теорема. *Ўлчовли тўпламлардан тузилган тўпламлар системаси M нинг қуввати 2^c га тенг, яъни* $\overline{\overline{M}} = 2^c$.

Исбот. Ўлчовли тўпламлардан тузилган система тўғри чизиқдаги барча тўпламлардан тузилган системанинг қисми бўлгани учун унинг қуввати 2^c дан катта эмас, яъни

$$\overline{\overline{M}} \leqslant 2^c.{}_*$$

Тескари тенгсизлик $\overline{\overline{M}} \geqslant 2^c$ эса қуйидаги теоремадан келиб чиқади:

22.2-теорема. *Ўлчови нолга тенг бўлган тўпламлардан тузилган S системасининг қуввати 2^c га тенг.*

Исбот. Юқоридагига ўхшаш, дастлаб

$$\overline{\overline{S}} \leqslant 2^c$$

тенгсизлик олинади. Тескари тенгсизлик ўринлилигини кўрсатиш учун ўлчови нолга ҳамда қуввати c га тенг бўлган бирор ўлчовли E тўпламни оламиз (бунинг учун, масалан, Канторнинг мукаммал P_0 тўпламини олиш мумкин, 20.4-теоремадан кейинги изоҳга кўра P_0 нинг ўлчови нолга тенг). E нинг ҳар қандай қисми (ҳар қандай қисмининг ташқи ўлчови ноль бўлгани учун) ўлчовли тўплам бўлиб, ўлчови нолга тенг. Демак, $2^E \subset S$. Аммо

$$\overline{\overline{E}} = c \text{ ва } (\overline{\overline{2^E}}) = 2^c$$

бўлгани учун

$$\overline{\overline{S}} \geqslant 2^c.$$

Бу ва юқоридаги тенсизликлар 22.2-теоремани исботлайди. Шу билан 22.1-теорема ҳам исботланди.*

22.1-теорема кўрсатадики, тўғри чизиқда умуман «қанча» тўплам бўлса, ўлчовли тўпламлар ҳам «шунча».

Демак, бу йўл билан ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини аниқлаб бўлмайди.

Шу сабабли ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини кўрсатиш учун бевосита мисол келтирамиз.

22.3-**теорема.** *Чегараланган ўлчовсиз тўплам мавжуд.*

Исбот. Чегараланган ўлчовсиз тўплам мисоли қуйидагича қурилади. Бунинг учун $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ сегментнинг нуқталари орасида эквивалентлик тушунчасини киритамиз: агар x ва y нинг айирмаси $x-y$ сон рационал бўлса, улар *эквивалент* дейилади. Бу эквивалентлик 3-§ да киритилган эквивалентлик муносабатининг барча хоссаларига эга. Шунинг учун ўша параграфга асосан $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ сегмент ўзаро эквивалент бўлган элементлардан иборат $K(x)$, $x\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ синфларга ажралади, бунда $x\in K(x)$ ҳамда турли синфлар кесишмайди. Шундай қилиб, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ сегмент ўзаро кесишмайдиган синфларга бўлинади. Энди бу синфларнинг ҳар биридан биттадан элемент танлаб олиб, бу танлаб олинган элементлар тўпламини A билан белгилаймиз.

A тўпламнинг ўлчовсиз эканлигини исботлаймиз. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ сегментдаги барча рационал сонлар тўпламини номерлаб чиқамиз:

$$r_0 = 0, \quad r_1, \; r_2, \; \ldots .$$

A_k билан A тўпламни r_k сонга силжитишдан ҳосил бўлган тўпламни белгилаймиз, яъни агар $x\in A$ бўлса, у ҳолда $x+r_k\in A_k$, ва агар $x\in A_k$ бўлса, у ҳолда $x-r_k\in A$.

Хусусан, $A_0=A$. A_k тўплам A тўпламдан r_k га силжитиш орқали ҳосил қилингани учун $\mu_*(A_k)=\mu_*(A)$ ва $\mu^*(A_k)=\mu^*(A)$. Энди ушбу

$$\alpha=\mu_*(A_k)=\mu_*(A) \text{ ва } \beta=\mu^*(A_k)=\mu^*(A)\,(k=1, 2, \ldots)$$

белгилашларни киритамиз. Дастлаб $\beta>0$ эканини исботлаймиз. Равшанки,

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k.$$

Бундан 19. 4-теоремага асосан:

$$1=\mu^*\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\leqslant\mu^*\left[\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right]\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mu^*(A_k),$$

яъни

$$1\leqslant\beta+\beta+\ldots .$$

Бундан:

$$\beta>0 \tag{1}$$

Энди $\alpha=0$ эканини исботлаймиз. Равшанки,

$$A_n\cap A_m=\varnothing,\ n\neq m$$

ва

$$A_k\subset\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right],\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Бундан:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\subset\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right].$$

Бундан эса 19. 5-теоремага асосан:

$$3=\mu_*\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]\geqslant\mu^*\left[\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right]\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\mu_*(A_k).$$

Бундан

$$\alpha+\alpha+\ldots\leqslant 3$$

ва

$$\alpha=0. \tag{2}$$

(1) ва (2) муносабатларни солиштириб

$$\mu_*(A)<\mu^*(A)$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Бу A тўпламнинг ўлчовсизлигини кўрсатади.*

Ўлчовсиз тўпламларнинг мавжудлигини кўрсатдик. Энди ўлчовсиз тўпламлар «қанча» эканини аниқлаймиз.

22.4-теорема. *Ўлчовсиз тўпламлардан тузилган H тўпламлар системасининг қуввати 2^c га тенг.*

Исбот. Ушбу

$$\overline{\overline{H}}\leqslant 2^c \tag{3}$$

тенгсизлик 22.1-теоремадаги каби исботланади. Тескари тенгсизликни исботлашда қуйидаги леммага асосланамиз:

22.5-лемма. *Агар A тўплам ўлчовсиз бўлиб, B тўп-*

лам ноль ўлчовли бўлса, у ҳолда бу тўпламларнин йиғиндиси $A\bigcup B$ ўлчовсиз бўлади.

Лемманинг исботи. Агар $A\bigcup B$ ўлчовли бўлган да эди, у ҳолда 20.2-теоремага асосан $(A\bigcup B)\setminus B$ ўлчовл бўлиб, 20.1-теоремага кўра $A=[(A\bigcup B)\setminus B]\bigcup(A\bigcap B)$ ҳа ўлчовли бўлар эди. Бу эса лемманинг шартига зид.*

Теореманинг исботига ўтамиз.

22.1-теоремага асосан S ўлчовли тўпламлар системасинин қуввати 2^c га тенг. 22.3-теоремада тузилган A тўпламга S даг тўпламларнинг ҳар бирини қўшиб, янги L тўпламлар систем сини ҳосил қиламиз. 22.5-леммага асосан L даги тўпламла нинг ҳар бири ўлчовсиз. Демак,

$$L\subset H.$$

Бундан:

$$\overline{\overline{L}}\leqslant\overline{\overline{H}}. \qquad ($$

Аммо, тузилишига кўра, L система S га эквивалент бў гани учун

$$\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{L}}.$$

Бундан ва 22.1-теоремадан:

$$\overline{\overline{L}}=2^c.$$

(4) дан эса

$$2^c\leqslant\overline{\overline{H}} \qquad ($$

муносабатни ҳосил қиламиз. (3) ва (5) тенгсизликлар теорем ни исботлайди.*

23-§. Витали теоремаси

Таъриф. *E нуқтали тўплам ва сегментлардан ибора S система берилган бўлсин (бу ерда ҳар бир сегмент би гина нуқтадан иборат эмас деб фараз қилинади). Агар ҳ қандай $x\in E$ ва ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай Δ сегмент ма жуд бўлсаки, ушбу $\Delta\in S$, $x\in\Delta$, $\mu(\Delta)<\varepsilon$ муносабатл бажарилса, E тўплам Витали маъносида S сегментлар си темаси билан қопланган дейилади.*

23.1-теорема (Витали). *Агар чегараланган E тўпла Витали маъносида S сегментлар системаси билан қопланга бўлса, у ҳолда бу сегментлар системасидан шундай со чекли ёки саноқли $\{\Delta_k\}$ сегментларни ажратиб олиш му кинки, улар учун*

$$\Delta_i \cap \Delta_k = \varnothing \quad (i \neq k), \quad \mu^*(E \setminus \bigcup_k \Delta_k) = 0$$

тенгликлар бажарилади.

Исбот (С. Банах исботи). E тўпламни ўз ичига олган ва чегараланган бирор $\delta = (a, b)$ оралиқни оламиз. Даставвал δ оралиққа бутунлай кирмаган сегментларни S системадан чиқариб ташлаймиз. Бунинг натижасида қолган сегментлардан иборат бўлган системани S_0 билан белгилаймиз; S_0 система ҳам E тўпламни қоплайди. Ҳақиқатан, ихтиёрий $x \in E$ нуқтани олиб, $\varepsilon = \frac{1}{4} \min(x - a, b - x)$ сонни оламиз. У ҳолда x нуқтани ўз ичига олган ва $\mu(\Delta) < \varepsilon$ шартни қаноатлантирувчи $\Delta \in S$ мавжуд. Бу сегмент ε соннинг танланишига кўра δ оралиқда бутунлай ётади.

Энди S_0 системадан бирор Δ_1 сегментни оламиз; агар $E \subset \Delta_1$ бўлса, у ҳолда теорема исбот этилган бўлади, чунки $E \setminus \Delta_1 = \varnothing$ бўлиб, $\mu^*(E \setminus \Delta_1) = 0$.

Акс ҳолда бу жараённи давом эттириб, S_0 системадан ихтиёрий иккитаси ўзаро кесишмайдиган

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n \tag{1}$$

сегментларни оламиз. Агар $E \subset \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k$ бўлса, у ҳолда теорема яна исбот қилинган бўлади. Агар $E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k \neq \varnothing$ бўлса ушбу

$$F_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k, \quad G_n = \delta \setminus F_n$$

тўпламларни тузамиз ва S_0 системадан очиқ G_n тўпламга кирган сегментларни оламиз. Бу олинган сегментлар узунликларининг юқори чегарасини λ_n билан белгилаймиз. Равшанки,

$$0 < \lambda_n < \mu(\delta).$$

G_n тўпламга кирган сегментлардан узунлиги $\frac{1}{2} \lambda_n$ дан катта бўлган сегментни олиб, уни Δ_{n+1} билан белгилаймиз, яъни

$$\mu(\Delta_{n+1}) > \frac{1}{2} \lambda_n.$$

G_n тўпламнинг тузилишига кўра Δ_{n+1} сегмент (1) кетма-кетликка кирган бирорта ҳам сегмент билан кесишмайди. Натижада ихтиёрий иккитаси кесишмайдиган

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \Delta_{n+1}$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Агар яна $E \subset \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} \Delta_k$ бўлса, у ҳолда теорема исбот этилган бўлади; акс ҳолда юқоридаги жараённи чексиз давом эттирамиз. Натижада ихтиёрий иккитаси кесишмайдиган

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_n,\ \ldots$$

сегментлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади. Энди бу сегментлар кетма-кетлиги учун

$$\mu^* (E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k) = 0 \tag{2}$$

тенгликнинг бажарилиши кўрсатилса, теорема исбот қилинган бўлади.

Узунлиги Δ_k сегментнинг узунлигидан беш марта катта ва ўрта нуқтаси[1] Δ_k нинг ўрта нуқтаси билан устма-уст тушган сегментни Δ'_k билан белгилаймиз; демак, $\mu(\Delta'_k) = 5\mu(\Delta_k)$.

$\Delta_k (k > n)$ сегментларнинг ҳаммаси δ оралиқда жойлашганлиги ва ўзаро кесишмаганлиги учун

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta'_k) < +\infty$$

тенгсизлик келиб чиқади, яъни $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta'_k)$ қатор яқинлашувчи бўлади.

Энди вақтинча ҳар қандай натурал n сон учун

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta'_k \tag{3}$$

муносабат бажарилган дейлик. У ҳолда бу муносабат ҳамда $\sum_k \mu(\Delta'_k)$ қаторнинг яқинлашувчилигидан (2) тенгликнинг бажарилиши келиб чиқади. Демак, теоремани исботлаш учун (3) муносабатни исботлаш қолди. Уни исботлаймиз.

Дарҳақиқат, $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ бўлсин, у ҳолда ҳар қандай n учун $x \in G_n$ ва S_0 системага кирган шундай Δ сегмент мавжудки, $x \in \Delta \subset G_n$.

---

[1] $[a, b]$ сегментнинг ўрта нуқтаси деб $c = \frac{a+b}{2}$ нуқтани айтамиз.

Лекин ҳар қандай n учун

$$\Delta \subset G_n \tag{4}$$

муносабат бажарилмайди, чунки

$$\mu(\Delta) \leqslant \lambda_n \leqslant 2\mu(\Delta_{n+1})$$

тенгсизликлар $\mu(\Delta_{n+1}) \to 0$ учун бирор n дан бошлаб бажарилмайди.

(4) муносабат бирор n дан бошлаб бажарилмаганлиги сабабли худди шу n лар учун

$$\Delta \cap F_n \neq \varnothing$$

муносабат ўринли. Бу муносабатни қаноатлантирадиган энг кичик сонни n_0 билан белгилаймиз. У ҳолда

$$\Delta \cap F_n = \varnothing, \ n < n_0,$$

$$\Delta \cap F_{n_0} \neq \varnothing.$$

Булардан ва $F_k \subset F_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ дан

$$\Delta \cap \Delta_{n_0} \neq \varnothing \text{ ва } \Delta \subset G_{n_0-1}$$

муносабатларни ҳосил қиламиз. Сўнгги муносабатдан эса

$$\mu(\Delta) \leqslant \lambda_{n_0-1} \leqslant 2\mu(\Delta_{n_0}).$$

Бу ва $\Delta \cap \Delta_{n_0} \neq \varnothing$ дан $\Delta \subset \Delta'_{n_0}$ ва демак $\Delta \subset \bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty} \Delta'_k$ келиб чиқади. Натижада $x \in \Delta \subset \bigcup\limits_{k=n_0}^{\infty} \Delta'_k$, яъни (3) муносабат исбот этилди.*

23.2-теорема. *23.1-теореманинг шартлари бажарилганда ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай сони чекли ва ўзаро кесишмайдиган $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ сегментлар системаси мавжудки, улар учун*

$$\mu^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k) < \varepsilon.$$

Исбот. δ, S, S_0 лар 23.1-теоремадаги маънога эга бўлсин.

Ўша теоремага мувофиқ ўзаро кесишмайдиган шундай $\{\Delta_k\}$ $(\Delta_k \subset S_0,\ k = 1, 2, \ldots)$ сегментлар системаси мавжудки, (2) тенглик ўринли. Агар $\{\Delta_k\}$ система сони чекли сегментлардан иборат бўлса, теорема исбот этилган бўлади.

Агар $\{\Delta_k\}$ система сони саноқли сегментлардан иборат бўлса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Delta_k) \leqslant \mu(\delta);$$

шунинг учун қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган n сон мавжуд:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(\Delta_k) < \varepsilon. \tag{5}$$

Иккинчи томондан,

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k \subset (E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k) \cup (\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \Delta_k);$$

(2), (5) ва сўнгги муносабатдан $\mu^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k) < \varepsilon$ келиб чиқади. Бу эса исбот этилиши зарур бўлган тенгсизликдир.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Ўлчовли E_1, E_2, ... тўпламлар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Бу тўпламлар кетма-кетлигининг ҳар қандай чексиз қисм кетма-кетлигига тегишли элементларидан иборат тўпламни E_0 билан белгилаймиз. E_0 тўпламнинг ўлчовлилигини исбот этинг.

2. Ҳар қандай мукаммал тўплам ўлчови нолга тенг бўлган мукаммал қисмга эгалигини кўрсатинг.

3. Ҳар қандай чегараланган E тўплам учун мос равишда F_σ ва G_δ типидаги шундай A ва B тўпламларни тузиш мумкинки, улар қуйидаги тенгликни қаноатлантиради:

$$\mu(A) = \mu_*(E), \ \mu(B) = \mu^*(E).$$

Шу жумлани исбот этинг.

4. Чегараланган E тўплам ўлчовли бўлиши учун ҳар қандай чегараланган A тўплам учун қуйидаги тенгликнинг бажарилиши зарур ва кифоя:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap CE).$$

Бу теоремани (Каратеодори теоремаси) исбот этинг.

5. Шундай ўлчовли E тўплам тузингки, ҳар қандай $\delta \subset (a, b)$ оралиқ учун қуйидаги муносабатлар бажарилсин:

$$\mu(\delta \cap E) > 0, \ \mu(\delta \cap CE) > 0, \ CE = [a, b] \setminus E.$$

6. E чегараланган тўплам бўлиб, ушбу

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \ E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда

$$\mu^*(E_n) \to \mu^*(E)$$

ўринли. Бу муносабатни исбот этинг.

7. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар [0, 1] сегментнинг ўлчовли қисмлари бўлиб,

$$\mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) > n - 1$$

бўлса,

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) > 0$$

тенгсизликни исботланг.

IV боб

ЎЛЧОВ ТУШУНЧАСИНИ УМУМЛАШТИРИШ

Биз илгариги бобда тўғри чизиқдаги тўпламларнинг ўлчови ҳақидаги масалани кўриб ўтдик. Унга диққат билан эътибор берсак, μ ўлчов тўғри чизиқдаги ўлчовли тўпламлар системасида аниқланган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий функция эканлигини кўрамиз:

а) ҳар бир A ўлчовли тўплам учун $\mu(A) \geqslant 0$;

б) агар $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ўлчовли тўпламлар ўзаро кесишмаса, у ҳолда

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n).$$

Бу хосса ўлчовнинг *аддитивлик хоссаси* дейилади.

Тўпламлар системасида аниқланган ҳақиқий функция *тўплам функцияси* дейилади.

Бу бобда элементлари ихтиёрий табиатли бўлган тўпламлар системасида аниқланган ҳамда юқоридаги а) ва б) шартларни қаноатлантирувчи тўплам функцияси билан иш кўрамиз ва уни дастлаб олинган тўпламлар системасидан кенгроқ бўлган тўпламлар системасида аниқланган тўплам функциясигача давом эттириш масаласи билан шуғулланамиз.

24-§. Ҳалқалар ва алгебралар

Қуйида баъзи бир хоссаларга эга бўлган тўпламлар системасини қараймиз.

1-таъриф. *Агар H системанинг исталган иккита A ва*

B элементи учун $A \cap B \in H$ ва $A \Delta B \in H$ муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда H система тўпламлар ҳалқаси (қисқача, ҳалқа) дейилади.

Изоҳ. Ушбу

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \quad \text{ва} \quad A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$$

айниятлардан (24.4-теоремага қаранг) ҳалқанинг исталган иккита A ва B элементи учун $A \cup B \in H$ ва $A \setminus B \in H$ муносабатлар келиб чиқади. Демак, H ҳалқанинг исталган иккита A ва B элементи учун $A \cup B \in H$, $A \setminus B \in H$, $A \cap B \in H$ ва $A \Delta B \in H$ муносабатлар доимо ўринли. Бундан, хусусан, ҳалқанинг элементлари устида қўшиш (яъни $A \cup B$) ва кўпайтириш (яъни $A \cap B$) амалларини чекли сонда бажариш натижасида ҳалқанинг элементи олиниши келиб чиқади.

2-таъриф. *Агар H тўпламлар системасининг бирор E элементи ва шу системанинг исталган A элементи учун $E \cap A = A$ тенглик ўринли бўлса, у ҳолда E элемент H системанинг бирлик элементи дейилади.*

Изоҳ. Ҳалқада бирлик элемент ягонадир.

3-таъриф. *Бирлик элементга эга бўлган H ҳалқа тўпламлар алгебраси (қисқача, алгебра) дейилади.*

Мисоллар. 1. H система $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган система бўлсин. Исталган иккита $A \in H$ ва $B \in H$ учун $A \cap B \in H$ ва $A \Delta B \in H$ муносабатларнинг ўринли эканлиги H системанинг таърифидан кўриниб турибди. Демак, система ҳалқа ташкил этади. N_n тўплам ҳам H системанинг элементи бўлганлигидан у H система учун бирлик элемент бўлади. Демак, H система айни вақтда алгебра ҳам экан.

2. H система $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ тўпламнинг чекли қисм тўпламларидан тузилган система бўлсин. Бу система ҳам ҳалқа, аммо бу системада бирлик элемент йўқ. Демак, H система ҳалқа бўлиб, алгебра эмас.

Қуйидаги теорема ҳалқа таърифидан келиб чиқади:

24.1-теорема. *Исталган сондаги $\{H_\alpha, \alpha \in I\}$ ҳалқалар системасининг кўпайтмаси*

$$H = \bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha$$

ҳам ҳалқадир.

Фараз қилайлик, $\{F_\alpha, \alpha \in I\}$ система H тўпламлар системасини ўз ичига олган барча ҳалқалар системаси бўлсин. Агар $\{F_\alpha\}$ системанинг бирор F_{α_0} элементи учун $F_{\alpha_0} \subset F_\alpha$ муносабат ҳар қандай $\alpha \in I$ учун бажарилса, у ҳолда F_{α_0} ҳалқа H системани ўз ичига олган *минимал ҳалқа* дейилади.

24.2-теорема. *Ҳар қандай H тўпламлар системаси учун шу системани ўз ичига олган ягона минимал ҳалқа мавжуд.*

Исбот. Аввало H системани ўз ичига олган ҳалқанинг мавжудлигини кўрсатамиз. Бунинг учун H системага кирувчи барча тўпламларнинг йиғиндисини X орқали белгилаймиз:

$$X = \bigcup_{A \in H} A.$$

Агар X тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган системани M орқали белгиласак, бу система тузилишига асосан ҳалқа ташкил этади ҳамда H системани ўз ичига олади. Энди H системани ўз ичига олган, ҳар бири M ҳалқада жойлашган барча ҳалқалардан иборат системани T орқали белгилаймиз. У ҳолда 24.1-теоремага асосан

$$F = \bigcap_{G \in T} G$$

система ҳалқа бўлиб, у теорема шартини қаноатлантиради.

Ҳақиқатан, M_0 ҳалқа H системани ўз ичига олган ихтиёрий ҳалқа бўлсин. У ҳолда 24.1-теоремага асосан $M_1 = M_0 \cap M$ ҳалқа бўлиб, бу ҳалқа T системанинг бирор элементи бўлади. Шу сабабли F ҳалқанинг тузилишига асосан

$$H \subset F \subset M_0$$

муносабат ўринлидир. Бу муносабатдан ва M_0 нинг H системани ўз ичига олган ихтиёрий ҳалқалигидан теореманинг исботи келиб чиқади.*

Абстракт ўлчов назариясида ҳалқа тушунчаси билан бир қаторда ундан умумийроқ ва айни вақтда зарур тушунчалардан бири бўлган ярим ҳалқа тушунчаси ҳам муҳим ўрин тутади.

4-таъриф. *H тўпламлар системаси учун $\varnothing \in H$ ва ҳар қандай $A \in H$ ва $B \in H$ учун $A \cap B \in H$ бўлиб, шу системанинг A ва A_1 элементлари $A_1 \subset A$ муносабатни қаноатлантирганда H системадан ўзаро кесишмайдиган сони чекли A_2 A_3, . . . , A_n элементлар топилсаки, улар учун*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда H система ярим ҳалқа дейилади.

Юқорида ҳар қандай H система учун уни ўз ичига олган ягона F минимал ҳалқа мавжудлиги ҳақидаги теоремани исботладик. Агар қаралаётган H тўпламлар системаси ихтиёрий бўлса, у ҳолда F ҳалқа элементларининг кўриниши тўғрисида бирор нарса айтиш қийин. Лекин H тўпламлар системаси ярим ҳалқа ташкил этса, уни ўз ичига олган минимал F ҳалқанинг ҳар бир элементи қандай кўринишга эгалигини айтиш мумкин. Аниқроғи, қуйидаги теорема ўринлидир:

24-3-теорема. *H ярим ҳалқани ўз ичига олган F минимал ҳалқанинг ҳар бир A элементи H ярим ҳалқадан олинган сони чекли ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, \dots, A_n$ тўпламларнинг йиғиндисидан иборат, яъни ҳар бир $A \in F$ ушбу кўринишга эга:*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \; A_i \in H, \; i = \overline{1, n}, \; A_i \cap A_j = \varnothing, \; i \neq j.$$

Исбот. G орқали H ярим ҳалқанинг ўзаро кесишмайдиган сони чекли элементларининг йиғиндисидан тузилган тўпламлар системасини белгилаймиз. G система ҳалқа ташкил этади. Ҳақиқатан, агар $A \in G$ ва $B \in G$ бўлса, у ҳолда G системанинг таърифига асосан улар қуйидаги кўринишга эга:

$$\left.\begin{aligned} A &= \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \; A_k \in H, \; k = \overline{1, n}, \; A_k \cap A_j = \varnothing, \; k \neq j, \\ B &= \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \; B_j \in H, \; j = \overline{1, m}, \; B_k \cap B_j = \varnothing, \; k \neq j. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ярим ҳалқанинг таърифига асосан $A_k \in H$ ва $B_j \in H$ муносабатлардан $A_k \cap B_j = C_{kj} \in H$ муносабат бевосита келиб чиқади. Энди C_{kj} тўпламларнинг таърифланишидан $\bigcup\limits_j C_{kj} \subset A_k$ ва $\bigcup\limits_k C_{kj} \subset B_j$ муносабатларнинг ўринли эканлиги равшан. Бу муносабатлардан ярим ҳалқанинг таърифига асосан қуйидаги тенгликларни ёзишимиз мумкин:

$$A_k = (\bigcup_j C_{kj}) \cup (\bigcup_i D_{ki}) \text{ ва } B_j = (\bigcup_k C_{kj}) \cup (\bigcup_l E_{lj}), \tag{2}$$

бу ерда $D_{ki} \in H$ ва $E_{lj} \in H$ бўлиб, улар сони чекли бўлган ва ўзаро кесишмайдиган тўпламлардир. Энди (1) ва (2) муносабатлардан фойдаланиб, A ва B тўпламларни қуйидаги кўринишда ёзишимиз мумкин:

$$A = (\bigcup_{k,j} C_{kj}) \cup (\bigcup_{k,i} D_{ki}) \text{ ва } B = (\bigcup_{k,j} C_{kj}) \cup (\bigcup_{l,j} E_{lj}).$$

Бу тенгликлардан ҳамда C_{kj}, D_{ki} ва E_{lj} тўпламларнинг ўзаро кесишмаганлигидан қуйидаги тенгликлар келиб чиқади:

$$A \cap B = \bigcup_{k,l} C_{kl} \text{ ва } A \, \Delta \, B = (\bigcup_{l,i} D_{ki}) \cup (\bigcup_{l,j} E_{lj}).$$

Бундан ҳамда $C_{kj} \in H$, $D_{ki} \in H$ ва $E_{lj} \in H$ тўпламларнинг ўзаро кесишмайдиган сони чекли тўпламлар эканлигидан ушбу

$$A \cap B \in G \text{ ва } A \Delta B \in G$$

муносабатлар келиб чиқади. Демак, G система ҳалқа ташкил қилар экан. Бу ҳалқа H системани ўз ичиға олган барча ҳалқалар орасида минимал ҳалқа эканлиги унинг тузилишидан кўринади. Чунки H системани ўз ичига олган ҳар қандай F' ҳалқага (1) кўринишдаги барча тўпламлар киради.$_*$

Кўпчилик масалаларда H системанинг сони саноқли элементларининг йиғиндиси ва кесишмасини қарашга тўғри келади. Шу туфайли қуйидаги таърифни киритамиз:

5-таъриф. *Агар H тўпламлар ҳалқасида $A_n \in H$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ муносабатдан $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ муносабат келиб чиқса, бундай ҳалқа σ-ҳалқа дейилади.*

Бирлик элементга эга бўлган σ-ҳалқа σ-алгебра дейилади.

Мисол. H система $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ тўпламнинг барча қисм тўпламларидан тузилган система бўлсин. H системанинг ҳалқа ташкил этиши ўз-ўзидан равшан. Ундан ташқари, N тўпламнинг сони саноқли қисм тўпламларининг йиғиндиси ҳам унинг қисм тўплами бўлади. Демак, H система σ-ҳалқа экан. Айни вақтда H система σ-алгебра ҳамдир. Чунки N тўплам H σ-ҳалқанинг бирлик элементи.

6-таъриф. *Агар H тўпламлар ҳалқасида $A_n \in H$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ муносабатдан $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in H$ муносабат келиб чиқса, бундай ҳалқа δ-ҳалқа дейилади.*

24.4-теорема. *Ҳар қандай икки A ва B тўплам учун қуйидаги айниятлар ўринли:*

1. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.
2. $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$.
3. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.
4. $CA \Delta CB = A \Delta B$.
5. $B = (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)]$.

Исбот. Бу айниятларнинг исботи бир-бирига ўхшаш бўлганлиги сабабли улардан бирини, масалан, ушбу

$$CA \Delta CB = A \Delta B$$

айниятни исботлаш билан чекланамиз. Бунинг учун

$CA \Delta CB \subset A \Delta B$ ва $CA \Delta CB \supset A \Delta B$ муносабатларни исботлаш кифоя.

Фараз қилайлик, $x \in CA \Delta CB$ ихтиёрий элемент бўлсин. Бундан симметрик айирманинг аниқланишига асосан $x \in CA$ ва $x \overline{\in} CB$, ёки $x \overline{\in} CA$ ва $x \in CB$ муносабатларнинг бирига эга бўламиз. Булардан мос равишда $x \overline{\in} A$ ва $x \in B$ ёки $x \in A$ ва $x \overline{\in} B$ муносабатлар келиб чиқади. Буларнинг ҳар иккаласи учун ҳам $x \in A \Delta B$ муносабат ўринли. Бундан ва x элементнинг ихтиёрийлигидан $CA \Delta CB \subset A \Delta B$ муносабат келиб чиқади.

Энди $x \in A \Delta B$ бўлиб, x ихтиёрий элемент бўлсин. Бундан $x \in A$ ва $x \overline{\in} B$ ёки $x \overline{\in} A$ ва $x \in B$ муносабатлардан бирига эга бўламиз. Булардан мос равишда $x \overline{\in} CA$ ва $x \in CB$ ёки $x \in CA$ ва $x \overline{\in} CB$ муносабатлар келиб чиқади. Буларнинг ҳар иккаласи учун ҳам $x \in CA \Delta CB$ муносабат ўринли. Бундан ва x элементнинг ихтиёрийлигидан $A \Delta B \subset CA \Delta CB$ муносабат келиб чиқади.*

24.5-теорема. *Ҳар қандай* B, B_1, B_2 *ҳамда* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *тўпламлар учун ушбу*

1. $(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$.
2. $(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$.
3. $(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \Delta B \subset [(\bigcup\limits_{k=1}^{N} A_k) \Delta B] \cup (\bigcup\limits_{k>N} A_k)$ ($N > 1$-ихтиёрий

натурал сон) *муносабатлар ўринли.*

4. *Агар* A_1 *ва* A_2 *тўпламлар ўзаро кесишмаса, у ҳолда*

$$B_1 \cup B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

муносабат ўринли.

Исбот. Бу муносабатларнинг исботи бир-бирига ўхшаш бўлганлиги сабабли улардан бирини, масалан, ушбу

$$(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

муносабатни исботлаш билан чекланамиз. Бунинг учун, агар x элемент бу муносабатнинг ўнг томонига тегишли бўлмаса, у унинг чап томонига ҳам тегишли эмаслигини кўрсатиш кифоя.

Фараз қилайлик, $x \overline{\in} (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ бўлсин. У ҳолда $x \overline{\in} (A_1 \Delta B_1)$ ва $x \overline{\in} (A_2 \Delta B_2)$ бўлиб, симметрик айирманинг аниқланишига асосан буларнинг биринчисига кўра $x \in A_1$ ва $x \in B_1$, ёки $x \overline{\in} A_1$ ва $x \overline{\in} B_1$ муносабатлар, иккинчисига кўра эса $x \in A_2$ ва $x \in B_2$ ёки $x \overline{\in} A_2$ ва $x \overline{\in} B_2$ муносабатлар ўринли. Бу муносабатлардан қуйидаги тўртта ҳолнинг бўлиши мумкинлиги келиб чиқади:

биринчи ҳол — $x \in A_1$, $x \in B_1$, $x \in A_2$, $x \in B_2$;
иккинчи ҳол — $x \in A_1$, $x \in B_1$, $x \overline{\in} A_2$, $x \overline{\in} B_2$;
учинчи ҳол — $x \overline{\in} A_1$, $x \overline{\in} B_1$, $x \in A_2$, $x \in B_2$;
тўртинчи ҳол — $x \overline{\in} A_1$, $x \overline{\in} B_1$, $x \overline{\in} A_2$, $x \overline{\in} B_2$.

Булардан $x \in (A_1 \cup A_2)$ ва $x \overline{\in} (B_1 \cup B_2)$ ёки $x \overline{\in} (A_1 \cup A_2)$ ва $x \in$ $\in (B_1 \cup B_2)$ муносабатларга эга бўламиз. Симметрик айирманинг аниқланишига асосан булардан $x \in (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)$ муносабат келиб чиқади.*

25- §. Ўлчовнинг умумий таърифи. Ўлчовни ярим ҳалқадан ҳалқагача давом эттириш

Агар μ тўплам функцияси бирор G системанинг элементларида аниқланган бўлса, бундан буён аниқлик учун G системани G_μ орқали белгилаймиз.

1-таъриф. *G_μ ярим ҳалқада аниқланган μ ҳақиқий тўплам функцияси учун ушбу иккита шарт бажарилса, бундай тўплам функцияси ўлчов дейилади:*

1) *ҳар қандай* $A \in G_\mu$ *учун* $\mu(A) \geqslant 0$;

2) μ *аддитив функция, яъни* $A \in G_\mu$ *учун*

$A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, $A_k \cap A_j = \varnothing$, $k \neq j$, $A_k \in G_\mu$, $k = 1, 2, \ldots, n$ *бўлса, у ҳолда*

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k);$$

Изоҳ. $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$ тенгликдан 1-таърифни қаноатлантирадиган ҳар қандай μ тўплам функцияси учун $\mu(\varnothing) =$ $= 2\mu(\varnothing)$ бўлиб, унинг бўш тўпламдаги қиймати нолга тенглиги келиб чиқади, яъни $\mu(\varnothing) = 0$. Демак, бўш тўпламнинг ўлчови ноль экан.

Фараз қилайлик, иккита μ_1 ва μ_2 ўлчов берилган бўлсин.

2-таъриф. *Агар* μ_1 *ва* μ_2 *ўлчовлар учун* $G_{\mu_1} \subset G_{\mu_2}$ *бўлиб, ҳар бир* $A \in G_{\mu_1}$ *учун* $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ *бўлса, у ҳолда* μ_2 *ўлчов* μ_1 *ўлчовнинг давоми дейилади.*

Берилган ўлчовнинг давоми ягонами ёки йўқми, деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради:

25.1-теорема. *Бирор G_m ярим ҳалқада аниқланган ҳар бир m ўлчов учун шундай ягона m_1 давоми мавжудки, унинг аниқланиш соҳаси G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган F минимал ҳалқадан иборат.*

Исбот. Берилган G_m ярим ҳалқа учун уни ўз ичига олган F минимал ҳалқанинг мавжудлиги ҳақидаги 24.2-теорема олдинги параграфда исботланган эди. Ундан ташқари, 24.3-теоремага асосан бу ҳалқанинг ҳар бир $A \in F$ элементи ушбу

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \cap B_j = \varnothing, \quad k \neq j, \quad B_k \in G_m, \quad k = \overline{1, n} \tag{1}$$

кўринишдаги чекли ёйилмага эга. Бундан фойдаланиб, m_1 ўлчовнинг ҳар бир $A \in F$ элементдаги қийматини қуйидагича аниқлаймиз:

$$m_1(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k), \quad B_k \in G_m, \quad k = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Бу тенглик билан ифодаланган $m_1(A)$ миқдор A тўпламни (1) кўринишда ифодалаш усулига боғлиқ эмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, A тўплам қуйидагича икки хил усул билан ифодаланган бўлсин деб фараз қилайлик:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{j=1}^{p} C_j, \quad B_k \in G_m, \quad C_j \in G_m \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p}.$$

G_m ярим ҳалқа бўлгани сабабли, $B_k \cap C_j \in G_m$.

Иккинчи томондан, B_k ва C_j тўпламларнинг тузилишига асосан ушбу

$$B_k = \bigcup_{j=1}^{p} (B_k \cap C_j), \quad C_j = \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \cap C_j)$$

тенгликларни ёзишимиз мумкин.

Бу тенгликлардан ва m ўлчовнинг аддитивлик хоссасидан фойдаланиб ушбу

$$\sum_{k=1}^{n} m(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m(B_k \cap C_j) = \sum_{j=1}^{p} m(C_j)$$

тенгликка эга бўламиз.

m_1 тўплам функциясининг аддитивлиги ва манфий эмаслиги, m тўплам функцияси ўлчов бўлгани учун, (2) тенгликдан келиб чиқади. Шундай қилиб, аниқланиш соҳаси F ҳалқадан иборат ва m ўлчовнинг давоми бўлган m_1 ўлчовнинг мавжудлигини кўрсатдик. Энди унинг ягона эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, m_2 ўлчов F ҳалқада аниқланган ва m ўлчовнинг давоми бўлган ихтиёрий ўлчов бўлсин. 24.3-теоремага асосан ҳар қандай $A \in F$ учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, \quad B_k \cap B_j = \varnothing, \quad k \neq j, \quad B_k \in G_m, \quad k = \overline{1, n}.$$

m_2 ўлчов бўлгани учун таърифга асосан у аддитив функциядир. Ундан ташқари, m_2 ўлчов m ўлчовнинг давоми бўлганлиги сабабли ҳар бир $B_k \in G_m$ учун $m_2(B_k) = m(B_k)$. Булардан ушбу

$$m_2(A) = \sum_{k=1}^{n} m_2(B_k) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = m_1(A)$$

тенглик келиб чиқади. Демак, F дан олинган ихтиёрий A элемент учун $m_2(A) = m_1(A)$ тенглик ўринли.*

25.2-изоҳ. Шундай қилиб, агар ярим ҳалқада аниқланган ўлчов мавжуд бўлса, шу ярим ҳалқа орқали ҳосил бўлган минимал ҳалқада ўлчовни аниқлаш имкониятига эга бўлдик. Бу ўлчов қуйидаги муҳим хоссаларга эгадир:

1) агар m ўлчов F ҳалқада аниқланган бўлса ҳамда шу ҳалқадан олинган $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар учун ушбу

$$A \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \cap A_j = \varnothing, \quad k \neq j$$

муносабатлар бажарилса, у ҳолда

$$m(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

тенгсизлик ўринли бўлади;

2) F ҳалқадан олинган $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламларнинг қандай бўлишидан қатъи назар улар учун

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

муносабат бажарилса, у ҳолда

$$m(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Ҳақиқатан, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тўпламлар ўзаро кесишмаса ва уларнинг ҳар бири A тўпламнинг қисми бўлса, у ҳолда

$$A = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

тенгликдан m ўлчовнинг аддитивлигига асосан ушбу

$m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) + m\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ тенглик ўринли. Бундан

$m(A\setminus\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geqslant 0$ бўлгани учун $m(A) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$ тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса 1) хоссани исботлайди.

Энди 2) хоссани исботлаймиз. Ҳар қандай $A_1 \in F$ ва $A_2 \in F$ учун ушбу $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup [A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)]$ ва $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup \cup [A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)]$ муносабатлардан $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - - m(A_1 \cap A_2) \leqslant m(A_1) + m(A_2)$ муносабат келиб чиқади. Бундан ихтиёрий n учун

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \tag{3}$$

тенгсизлик индукция усулидан келиб чиқади. Энди $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ муносабатдан ушбу

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A \cup [(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus A]$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Бундан m ўлчовнинг аддитивлигига асосан

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = m(A) + m[(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \setminus A] \geqslant m(A).$$

Бундан ва (3) тенгсизликдан

$$m(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан 2) хосса ҳам исботланди.

Математик анализнинг кўпчилик масалаларида баъзи бир тўпламларни сони чекли тўпламларнинг йиғиндиси сифатида эмас, балки сони чексиз тўпламларнинг йиғиндиси сифатида ифодалашга тўғри келади. Масалан, доиранинг юзини ҳисоблашда уни сони чексиз бўлган тўғри тўртбурчакларнинг йиғиндиси шаклида ифодаланишидан фойдаланилади. Бундай масалаларда ўлчовнинг аддитивлик хоссаси етарли бўлмай қолади ва шу сабабли бу хосса умумийроқ бўлган ва қуйида таърифланадиган саноқли аддитивлик ёки σ- аддитивлик деб аталадиган хосса билан алмаштирилади.

3-таъриф. *Агар m ўлчовнинг G_m аниқланиш соҳасидан олинган сони саноқли ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ тўпламлар учун $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in G_m$ бўлганда $m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$ тенглик ўринли бўлса m ўлчов σ- аддитив ўлчов дейилади.*

Қуйида иккита мисол берилиб, уларнинг биринчисида σ- аддитив бўлган ўлчов, иккинчисида эса аддитив, лекин σ- аддитив бўлмаган ўлчовлар келтирилади.

1. Саноқли аддитив ўлчовга мисолни эҳтимоллар назариясидан келтириш мумкин. Айтайлик, ξ тасодифий миқдор ўзининг сони саноқли $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ қийматларини мос равишда $p_1, p_2 \ldots, p_n, \ldots$ эҳтимоллар билан қабул қилсин:

$$p(\xi = \xi_i) = p_i, \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

ξ тасодифий миқдорнинг қийматлари тўпламини X билан белгилаймиз:

$$X = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}.$$

G_m орқали X тўпламнинг барча қисм тўпламлари системасини белгилаймиз. G_m системага кирувчи ҳар бир A элементнинг ўлчовини қуйидагича аниқлаймиз:

$$m(A) = \sum_{\xi_i \in A} p_i.$$

Бу тенглик билан аниқланган m ўлчов σ- аддитив ўлчовдир. Ҳақиқатан,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \ A_k \cap A_j = \varnothing, \ k \neq j, \ A_k \in G_m, \ k = 1, 2, \ldots$$

бўлсин. G_m системанинг таърифланишига асосан $A \in G_m$ бўлади. m ўлчовнинг таърифланишига асосан эса

$$m(A) = \sum_{\xi_i \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\xi_i \in A_k} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Бундан, хусусан, $m(X) = 1$ эканлиги келиб чиқади.

2. Энди аддитив, аммо σ-аддитив бўлмаган ўлчовга мисол келтирамиз. Q орқали $[0,1]$ сегментдаги барча рационал сонлар тўпламини белгилаймиз. Q тўпламнинг $[0,1]$ сегментдаги ихтиёрий (a, b) интервал, $[a, b]$ сегмент ёки $(a, b]$, $[a, b)$ ярим сегментлар билан кесишиши натижасида ҳосил бўлган A_{ab} тўпламлар системасини G_m орқали белгилаймиз. G_m система таърифланишига асосан ярим ҳалқа ташкил этади. Бу ярим ҳалқанинг ҳар бир A_{ab} элементи G_m системанинг таърифланишига асосан ушбу

$$Q \cap (a, b); \ Q \cap [a, b]; \ Q \cap (a, b]; \ Q \cap [a, b)$$

тўпламларнинг бирига тенг. Бу кўринишдаги $A_{ab}\in G_m$ учун унинг $m(A_{ab})$ ўлчовини қуйидагича аниқлаймиз:

$$m(A_{ab})=b-a.$$

Бу тарзда аниқланган m ўлчов аддитив бўлиб, лекин σ-аддитив эмас. Ҳақиқатан, Q тўплам берилишига кўра саноқли бўлгани учун уни $A_{rr}=Q\cap[r,r]$ тўпламларнинг йиғиндиси сифатида ёзишимиз мумкин: $Q=\bigcup\limits_{r\in[0,1]}A_{rr}$, бу ерда r рационал сон бўлиб, йиғинди [0,1] сегментнинг барча рационал нуқталари бўйича олинган. m ўлчовнинг таърифланишига асосан ҳар бир рационал r учун

$$m(A_{rr})=r-r=0.$$

Фараз қилайлик, m ўлчов σ-аддитив ўлчов бўлсин. У ҳолда

$$m(Q)=\sum_{r\in[0,1]}m(A_{rr})=0.$$

Иккинчи томондан, $Q=Q\cap[0,1]=A_{0,1}$ тенгликдан ва m ўлчовнинг таърифланишидан $m(Q)=1$ бўлиб, фаразимизга зид натижага келамиз. Демак, m ўлчов σ-аддитив эмас экан. ∎

25.3-теорема. *Агар G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчов σ-аддитив ўлчов бўлса, у ҳолда бу ўлчовнинг G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган F минимал ҳалқага давоми μ ўлчов ҳам σ-аддитив ўлчов бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик, F минимал ҳалқанинг $A, A_1, A_2\ldots$ элементлари учун ушбу

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad A_k\cap A_j=\varnothing,\quad k\neq j$$

муносабатлар ўринли бўлсин. 24.3-теоремага асосан $A\in F$ тўплам ва ҳар бир $A_n\in F$ тўпламлар учун, мос равишда, G_m ярим ҳалқадан олинган сони чекли ўзаро кесишмайдиган шундай $B_1, B_2, \ldots, B_l$ ҳамда $B_{n_1}, B_{n_2}, \ldots, B_{np_n}$ тўпламлар мавжудки, ушбу

$$A=\bigcup_{i=1}^{l}B_i,\quad B_i\cap B_k=\varnothing,\quad i\neq k,\quad B_i\in G_m,$$

$$A_n=\bigcup_{i}^{p_n}B_{ni},\quad B_{ni}\cap B_{nk}=\varnothing,\quad i\neq k,\quad B_{ni}\in G_m$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Ушбу

$$C_{nij}=B_j\cap B_{ni}$$

белгилашларни киритамиз. Бу тўпламларнинг ўзаро кесишмаслиги ҳамда ушбу

$$B_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i} C_{nij}, \quad B_{ni} = \bigcup_{j} C_{nij}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги C_{nij} тўпламнинг таърифланишидан келиб чиқади (бу ерда ва қуйида i ва j индекслар сони чекли қийматларни қабул қилади). Булардан ва G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчовнинг σ- аддитивлигидан ушбу

$$m(B_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i} m(C_{nij}), \tag{4}$$

$$m(B_{ni}) = \sum_{j} m(C_{nij}) \tag{5}$$

тенгликларга эга бўламиз. F минимал ҳалқада аниқланган μ ўлчовнинг таърифланишидан

$$\mu(A) = \sum_{j} m(B_j), \tag{6}$$

$$\mu(A_n) = \sum_{i} m(B_{ni}) \tag{7}$$

тенгликларга эгамиз. (4)—(7) тенгликлардан

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).*$$

25.4- изоҳ. σ- аддитив ўлчов қуйидаги хоссаларга эга:

1) агар F ҳалқада аниқланган m ўлчов σ- аддитив бўлса, у ҳолда F ҳалқанинг ушбу

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j \tag{8}$$

муносабатларни қаноатлантирувчи $A, A_1, A_2, \ldots$ элементлари учун

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leqslant m(A)$$

тенгсизлик ўринли бўлади;

2) агар $A, A_1, A_2, \ldots$ тўпламлар F ҳалқанинг ихтиёрий элементлари бўлиб,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

бўлса, у ҳолда

$$m(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

бўлади.

Бу тенгсизлик баъзан m ўлчовнинг σ- *ярим аддитивлик хоссаси* деб ҳам юритилади.

1) хоссани исботлаймиз. $A_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$ тўпламлар ўзаро кесишмаганлиги сабабли (8) муносабатдан ҳар қандай натурал n учун

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан 25.2- изоҳга асосан m ўлчов учун ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \leqslant m(A)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик ҳар қандай n натурал сон учун ўринли бўлганлиги сабабли ундан $n \to \infty$ да

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leqslant m(A)$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди (2) хоссани исботлаймиз. Ушбу

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap A, \\ B_2 &= (A_2 \cap A) \setminus A_1, \\ B_2 &= (A_3 \cap A) \setminus (A_1 \cup A_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_n &= (A_n \cap A) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

тўпламларни қараймиз. B_n тўпламларнинг таърифланишидан уларнинг ўзаро кесишмайдиган эканлиги ҳамда

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n \subset A_n$$

муносабатларнинг ўринлилиги келиб чиқади. Бу муносабатлардан ва m ўлчовнинг σ- аддитивлигидан

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

тенгсизликни оламиз. Шу билан 2) хосса ҳам исботланди.

26- §. Ўлчовнинг Лебег маъносида давоми

Бу параграфда G_m ярим ҳалқада аниқланган σ-аддитив m ўлчовни Лебег маъносида давом эттириш масаласи билан шуғулланамиз. Бунда G_m ярим ҳалқада бирлик элемент бўлган ҳол билан чегараланамиз.

Шундай қилиб, G_m ярим ҳалқада аниқланган σ- аддитив m ўлчов берилган бўлсин. Бу ярим ҳалқадаги E бирлик элементнинг барча қисм тўпламларидан тузилган системани M орқали белгилаймиз. Маълумки, M система σ- алгебрани ташкил этади. Бу σ- алгебрада ташқи ўлчов тушунчасини киритамиз.

Фараз қилайлик, $A \subset E$ тўплам берилган бўлиб $\{B_1, B_2, \ldots\}$ тўпламлар системаси G_m ярим ҳалқадан олинган чекли ёки саноқли система бўлсин. Агар ушбу

$$A \subset \bigcup_k B_k$$

муносабат ўринли бўлса, $\{B_k\}$ тўпламлар системаси A тўпламни *қопловчи система* дейилади. A тўпламни қоплайдиган бундай системани чексиз кўп усул билан тузиш мумкинлиги равшан. Шунинг учун ҳам, ушбу

$$\sum_k m(B_k)$$

йиғинди чексиз кўп қийматга эга ва ҳар бир k натурал сон учун $m(B_k) \geqslant 0$ бўлгани туфайли бу йиғинди қуйидан чегараланган бўлади.

1- таъриф. $\sum_k m(B_k)$ *йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегараси A тўпламнинг ташқи ўлчови дейилади ва у*

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k B_k} \sum m(B_k), \quad (B_k \in G_m,\ k = 1, 2, \ldots)$$

орқали белгиланади.

26.1- теорема. *Агар G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқа F бўлиб, m ўлчовнинг F ҳалқага давоми m' бўлса, у ҳолда ҳар қандай $A \in F$ учун*

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

тенглик ўринли.

Исбот. Ҳақиқатан, 24.3- теоремага асосан ҳар қандай $A \in F$ тўплам G_m ярим ҳалқадан олинган сони чекли ўзаро кесишмайдиган B_1, B_2, ..., B_n тўпламларнинг йиғиндисидан иборат, яъни

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} B_k B_k, \cap B_j = \varnothing,\ k \neq j,\ B_k \in G_m,\ k = 1, 2, \dots, n.$$

m' ўлчовнинг аниқланишига асосан $m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(B_k)$ тенглик ўринли бўлиб, бу тенглик A тўпламни юқоридаги кўринишда ифодалаш усулига боғлиқ эмас (25.1- теореманинг исботига қаранг). B_k, $k = 1, 2, \dots, n$ тўпламлар A тўпламни қоплагани учун ташқи ўлчовнинг таърифига асосан

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{k=1}^{n} m(B_k) = m'(A)$$

тенгсизлик ўринли. Энди $\mu^*(A) \geqslant m'(A)$ тенгсизликнинг ўринли эканини кўрсатсак, теорема исботланган бўлади. Бунинг учун, фараз қилайлик, $\{C_k,\ C_k \in G_m,\ k = 1, 2, \dots\}$ тўпламлар системаси A тўпламни қоплайдиган ихтиёрий чекли ёки саноқли система бўлсин, яъни $A \subset \bigcup_k C_k$. У ҳолда 25.4- изоҳдаги иккинчи хоссага асосан

$$m'(A) \leqslant \sum_k m'(C_k).$$

Бундан m' ўлчов m ўлчовнинг давоми бўлганлиги сабабли ҳар бир $C_k \in G_m$ учун $m'(C_k) = m(C_k)$ тенгликнинг ўринлилигидан ушбу

$$m'(A) \leqslant \sum_k m(C_k)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик A тўпламни қоплайдиган ҳар қандай система учун ўринли бўлганлиги туфайли у $\sum_k m(C_k)$ йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегараси учун ҳам ўринлидир, яъни

$$m'(A) \leqslant \inf_{A \subset \bigcup_k C_k} \sum_k m(C_k) = \mu^*(A).$$

Бу тенгсизлик теоремани исботлайди.$_*$

26.2- теорема. Агар $A_1 \in M$ ва $A_2 \in M$ *тўпламлар учун* $A_1 \subset A_2$ *бўлса, у ҳолда* $\mu^*(A_1) \leqslant \mu^*(A_2)$ *бўлади.*

Исбот. A_i, $i = 1, 2$ тўпламни қоплайдиган тўпламлар системаси

$$B_1^{(i)},\ B_2^{(i)},\ B_3^{(i)},\ \ldots,B_k^{(i)},\ \ldots \in G_m \quad i = 1, 2$$

бўлсин. Маълумки, бундай тўпламлар системасини чексиз кўп усул билан тузиш мумкин. Натижада $\sum\limits_k m(B_k^{(i)})$, $(i = 1,\ 2)$ йиғинди чексиз кўп қийматга эга бўлади. $\sum\limits_k m(B_k^{(1)})$ йиғиндининг қийматлари тўпламини $B_0^{(1)}$ орқали, $\sum\limits_k m(B_k^{(2)})$ йиғиндининг қийматлари тўпламини $B_0^{(2)}$ орқали белгилаймиз.

$A_1 \subset A_2$ бўлгани учун A_2 тўпламни қоплайдиган ҳар қандай система A_1 тўпламни ҳам қоплайди. Натижада $B_0^{(2)} \subset B_0^{(1)}$ муносабатга эга бўламиз. Бундан аниқ қуйи чегаранинг таърифига асосан ушбу

$$\mu^*(A_1) = \inf_{A_1 \subset \bigcup\limits_k B_k^{(1)}} \sum_k m(B_k^{(1)}) \leqslant \inf_{A_2 \subset \bigcup\limits_k B_k^{(2)}} \sum_k m(B_k^{(2)}) = \mu^*(A_2)$$

тенгсизлик келиб чиқади.*

26.3-теорема. *Агар* $A \in M$ ва $A_n \in M$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ *тўпламлар учун* $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *бўлса, у ҳолда*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Исбот. Ташқи ўлчовнинг таърифига мувофиқ, $\varepsilon > 0$ сон учун ҳар бир $A_n \in M$, $n = 1,\ 2 \ldots$ тўпламни қоплайдиган шундай $B_{n1}, B_{n2}, B_{n3}, \ldots$ тўпламлар системаси мавжудки, ушбу

$$\sum_k m(B_{nk}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{1}$$

тенгсизлик бажарилади.

Теорема шартидан ва $B_{nk} \in G_m$ тўпламларнинг олинишидан

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_k B_{nk}$$

муносабатга эга бўламиз. Бу муносабатдан ташқи ўлчовнинг таърифига асосан ушбу

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k m(B_{nk})$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизликдаги $\sum_k m(B_{n_k})$ йиғинди учун (1) тенгсизлик ўринли эканлигидан фойдаланиб,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n) + \varepsilon$$

тенгсизликни оламиз. Бундан, $\varepsilon > 0$ ихтиёрий кичик сон бўлгани учун теореманинг исботи келиб чиқади.*

Энди G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқани F орқали белгилаб, ўлчовли тўпламга қуйидагича таъриф берамиз:

2-таъриф. *Агар бирор $A \in M$ тўплам берилган бўлиб, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун F минимал ҳалқадан шундай B тўплам топилсаки, $A \Delta B$ тўпламнинг ташқи ўлчови учун ушбу*

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда A тўплам ўлчовли тўплам дейилади.

Бошқача қилиб айтганда, агарда A тўпламни минимал ҳалқанинг элементлари билан етарлича аниқликда яқинлаштириш мумкин бўлса, у ҳолда A тўплам ўлчовли тўплам дейилади. M системанинг барча ўлчовли тўпламлари системасини Z орқали белгилаймиз.

26.4-теорема. *Агар A ўлчовли тўплам бўлса, у ҳолда унинг тўлдирувчиси $E \setminus A$ ҳам ўлчовли тўпламдир, яъни агар $A \in Z$ бўлса, у ҳолда $E \setminus A \in Z$ бўлади.*

Исбот. 24.4-теоремага асосан ушбу

$$(E \setminus A) \Delta (E \setminus B) = A \Delta B \tag{2}$$

тенглик ўринли. Агар F ҳалқа бўлиб, $B \in F$ бўлса, $E \setminus B \in F$ бўлади.

Энди $A \in Z$ бўлса, $E \setminus A \in Z$ бўлиши (2) тенгликдан келиб чиқади.*

26.5-теорема. *Ҳар қандай иккита ўлчовли тўпламнинг йиғиндиси, кўпайтмаси, айирмаси ва симметрик айирмаси ҳам ўлчовли тўпламдир.*

Исбот. Фараз қилайлик, $A_1 \in Z$ ва $A_2 \in Z$ ихтиёрий тўпламлар бўлсин. Ушбу

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2),$$
$$A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1),$$
$$A_1 \cup A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1) \cap (E \setminus A_2)]$$

айниятлар ҳар қандай A_1 ва A_2 тўпламлар учун ўринли бўлгани учун $A_1 \setminus A_2 \in Z$ муносабатнинг ўринли эканини кўрсатиш кифоя.

A_1 ва A_2 тўпламлар ўлчовли бўлганидан таърифга асосан ҳар бир $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $B_1 \in F$ ва $B_2 \in F$ (бу ерда F система G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқа) тўпламлар топиладики, ушбу

$$\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ва } \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

F система ҳалқа бўлгани учун $B_1 \setminus B_2 \in F$. Энди 24.5-теоремага асосан ушбу

$$(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

муносабат ўринли. Бундан ва (3) тенгсизликлардан 26.3-теоремага асосан

$$\mu^*[(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2)] \leqslant \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли. Демак, $(A_1 \setminus A_2) \in Z$.$_*$

26.6-натижа. *Z ўлчовли тўпламлар системаси алгебрадир.*

Ҳақиқатан, 26.5-теоремага асосан Z система ҳалқа. 26.4-теоремага асосан ҳар қандай $A \in Z$ учун $E \setminus A \in Z$ муносабат ўринли. 26.5-теоремага асосан эса $E = A \cup (E \setminus A)$ бўлади, яъни Z ҳалқа бирлик элементга эга.$_*$

26.7-теорема. *Агар*

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad A_k \cap A_j = \varnothing, \quad k \neq j, \quad A_k \in Z, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

бўлса, у ҳолда

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k).$$

Исбот. Теоремани иккита тўплам учун исботлаймиз. Ихтиёрий n та тўплам учун теореманинг исботи математик индукция усули орқали олинади.

Шундай қилиб,

$$A = A_1 \cup A_2, \quad A_1 \cap A_2 = \varnothing, \quad A_1 \in Z, \quad A_2 \in Z$$

бўлсин. У ҳолда 26.5-теоремага асосан $A \in Z$ бўлади. A_1 ва A_2 тўпламлар ўлчовли эканлигидан таърифга асосан ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $B_1 \in F$ ва $B_2 \in F$ (бу ерда F система G_m ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқа) тўпламлар топиладики, улар учун (3) тенгсизликлар ўринли бўлади. A_1 ва A_2 тўпламлар ўзаро кесишмаганлиги сабабли 24.5-теоремага асосан ушбу

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2) \quad (4)$$

муносабат ўринли.

G_m ярим ҳалқада аниқланган m ўлчовнинг F минимал ҳалқага давомини m' билан белгилаймиз. 25.1- теоремага асосан m' ўлчов аддитивдир.

26.1- теоремага асосан ҳар қандай $B \in F$ учун $\mu^*(B) = m'(B)$ тенглик ўринли. Бундан ҳамда $B_1 \cap B_2 \in F$ бўлгани учун (4) муносабатдан 26.3- теоремага асосан

$$\mu^*(B_1 \cap B_2) = m'(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан (3) тенгсизликка асосан

$$m'(B_1 \cap B_2) < \varepsilon. \quad (5)$$

Иккинчи томондан,

$$A_1 \subset B_1 \cup (A_1 \Delta B_1)$$

ва $A_2 \subset B_2 \cup (A_2 \Delta B_2)$ муносабатлардан 26.3- теоремага асосан ушбу

$$\mu^*(A_1) \leqslant \mu^*(B_1) + \mu^*(A_1 \Delta B_1) = m'(B_1) + \mu^*(A_1 \Delta B_1)$$

ва

$$\mu^*(A_2) \leqslant \mu^*(B_2) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) = m'(B_2) + \mu^*(A_2 \Delta B_2)$$

тенгсизликлар келиб чиқади. Булардан (3) тенгсизликка асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$m'(B_1) \geqslant \mu^*(A_1) - \frac{\varepsilon}{2} \text{ ва } m'(B_2) \geqslant \mu^*(A_2) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

A_1 ва A_2 тўпламлар ўзаро кесишмаганлиги сабабли 24.5- теоремага асосан ушбу

$$A \Delta B = (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$$

муносабат ўринли. Бундан, 26.3- теоремага ва (3) тенгсизликларга асосан

$$\mu^*(A \Delta B) \leqslant \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon. \quad (7)$$

Энди $B \subset A \cup (A \Delta B)$ муносабатдан 26.3- теоремага асосан ушбу

$$\mu^*(B) = m'(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B)$$

ёки

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \mu^*(A \Delta B)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан (7) тенгсизликка асосан

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \varepsilon. \quad (8)$$

Энди 24.4- теоремага асосан ушбу

$$B_1 \cup B_2 = B_1 \cup [B_2 \setminus (B_1 \cap B_2)],$$
$$B_2 = (B_1 \cap B_2) \cup [B_2 \setminus (B_2 \cap B_1)]$$

айниятларнинг ўринлилигидан ҳамда m' ўлчовнинг аддитивлигидан

$$m'(B_1 \cup B_2) = m'(B_1) + m'[B_2 \setminus (B_1 \cap B_2)],$$
$$m'(B_2) = m'(B_1 \cap B_2) + m'[B_2 \setminus (B_1 \cap B_2)]$$

тенгликларга эга бўламиз. Булардан

$$m'(B_1 \cup B_2) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2)$$

тенглик келиб чиқади. (5), (6) ва (8) тенгсизликлардан

$$\mu^*(A) \geqslant m'(B) - \varepsilon = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) -$$
$$-\varepsilon \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 3\varepsilon,$$

яъни

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 3\varepsilon.$$

Бундан $\varepsilon > 0$ ихтиёрий кичик сон бўлгани учун

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Энди тескари

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

тенгсизлик $A = A_1 \cup A_2$ тенгликдан 26.3-теоремага асосан келиб чиқади. Бу икки тенгсизликдан

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$$

тенгликка эга бўламиз.$_*$

Бу теорема кўрсатадики, Z ўлчовли тўпламлар системасида аниқланган μ^* тўплам функцияси (ташқи ўлчов) аслида ўлчов экан.

3-таъриф. *Z ўлчовли тўпламлар системасида аниқланган μ^* тўплам функцияси* (ташқи ўлчов) *Лебег ўлчови дейилади ва μ орқали белгиланади.*

26.8-теорема. *Сони саноқли ўлчовли тўпламларнинг йиғиндиси ва кўпайтмаси ўлчовли тўпламдир.*

Исбот. Фараз қилайлик $\{A_1, A_2, \ldots\}$ кетма-кетлик ўлчовли тўпламларнинг саноқли системаси бўлиб, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ бўлсин. Ушбу

$$A_1' = A_1,$$
$$A_2' = A_2 \setminus A_1$$
$$A_3' = A_3 \setminus (\cup A_2),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$A'_n = A_n \setminus (A_{n-1} \cup A_{n-2} \cup \ \dots \ \cup A_1),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

тўпламларни тузамиз. Бу тўпламларнинг ўзаро кесишмаслиги ҳамда $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k$ тенгликнинг ўринлилиги уларнинг аниқланишидан келиб чиқади. 26.5-теоремага асосан уларнинг ҳар бири ўлчовли тўплам. Ҳар қандай n натурал сон учун

$$\bigcup_{k=1}^{n} A'_k \subset A$$

муносабат ўринли. Бундан 26.2 ва 26.7-теоремаларга асосан

$$\sum_{n=1}^{n} \mu(A'_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leqslant \mu^*(A)$$

тенгсизликка эга бўламиз (бу ерда ҳар қандай ўлчовли B тўплам учун $\mu^*(B) = \mu(B)$ тенгликдан фойдаландик). Бу тенгсизлик ихтиёрий n учун бажарилганлиги сабабли у $n \to \infty$ да ҳам ўринлидир:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k) \leqslant \mu^*(A).$$

Демак, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k)$ қатор яқинлашувчи бўлиб, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N = N(\varepsilon)$ сон топиладики,

$$\sum_{k>N} \mu(A'_k) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

тенгсизлик ўринли бўлади. A'_n, $n = 1, 2, \dots$ тўпламлар ўлчовли бўлгани учун 26.5-теоремага асосан $C = \bigcup_{n=1}^{N} A'_n$ тўплам ҳам ўлчовли. Шунинг учун ўлчовли тўплам таърифига асосан шундай $B \in F$ тўплам топиладики,

$$\mu^*(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (10)$$

тенгсизлик бажарилади.

A ва C тўпламларнинг тузилишига ва 24.5-теоремага асосан ушбу

$$A\Delta B=\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k\Big)\Delta B\subset (C\Delta B)\cup\Big(\bigcup_{k>N} A'_k\Big)$$

муносабат ўринли. Бу муносабатдан 26.3-теоремага асосан

$$\mu^*(A\Delta B)\leqslant \mu^*(C\Delta B)+\sum_{k>N}\mu^*(A'_k)=\mu^*(C\Delta B)+\sum_{k>N}\mu(A'_k)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан ҳамда (9) ва (10) тенгсизликлардан

$$\mu^*(A\Delta B)<\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак,

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

тўплам ўлчовли экан.

Энди $A'=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ тўпламнинг ўлчовли эканини кўрсатамиз. 26.4-теоремага асосан A_k, $k=1, 2, \dots$ тўпламлар ўлчовли бўлгани учун $E\setminus A_k$, $k=1, 2, \dots$ тўпламлар ҳам ўлчовлидир. Ҳозиргина исботлаганимизга асосан $\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\setminus A_k)$ тўплам ҳам ўлчовли. 26.4-теоремага асосан

$$E\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}(E\setminus A_k)$$

тўплам ўлчовли. Иккилик принципига асосан

$$E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\setminus A_k)=\bigcap_{k=1}^{\infty}[E\setminus(E\setminus A_k)]=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

бўлгани учун $A'=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ тўплам ўлчовли.*

Бу теоремадан Z ўлчовли тўпламлар системасининг бир вақтда ҳам σ-ҳалқа, ҳам δ-ҳалқа эканлиги келиб чиқади. Z система E бирлик элементга эга бўлгани учун у айни вақтда σ- алгебра ҳамдир.

26.9-теорема. *Лебег ўлчови σ-аддитив ўлчовдир, яъни агар $A, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ўлчовли тўпламлар бўлиб,*

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad A_k\cap A_j=\varnothing,\quad k\neq j$$

бўлса,

$$\mu(A)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k).$$

Исбот. 26.8-теоремага асосан A ўлчовли тўплам. 26.3-теоремага асосан $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ тенгликдан

$$\mu(A)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k) \qquad (11)$$

тенгсизликка эга бўламиз (бу ерда ўлчовли тўплам учун $\mu^*(A)=\mu(A)$ тенгликдан фойдаландик).

Иккинчи томондан, ҳар қандай N натурал сон учун

$$\bigcup_{k=1}^{N}A_k\subset A$$

муносабатдан 26.2- ва 26.1-теоремаларга асосан

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{N}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{N}\mu(A_k)\leqslant\mu(A)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик ҳар қандай N учун ўринли бўлганлигидан у $N\to\infty$ да ҳам ўринлидир:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k\leqslant(A).$$

Бу ва (11) тенгсизлик теоремани исботлайди.*

26.10-теорема. *Агар* $A_1\supset A_2\supset,\ldots,A_k\in Z$, $k=1,2,\ldots$ *камаювчи ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги учун* $A=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$ *бўлса, у ҳолда*

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \qquad (12)$$

бўлади.

Исбот. Теоремани $A=\varnothing$ бўлган ҳол учун исботлаш кифоя, чунки умумий ҳол A_n тўпламни $A_n\setminus A$ тўпламга алмаштириш йўли билан бу ҳолга олиб келинади. Шундай қилиб, $A=\varnothing$ бўлсин. A_1, A_2, ... ўлчовли тўпламлар учун қуйидаги тенгликларни ёзишимиз мумкин:

$$\left.\begin{array}{l} A_1=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup,\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n=(A_n\setminus A_{n+1})\cup(A_{n+1}\setminus A_{n+2})\cup,\ldots \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Бу ерда $(A_k \setminus A_{k+1})$, $k=1, 2, \ldots$ тўпламлар ўзаро кесишмайдиган тўпламлардир. 26.9- теоремага асосан μ ўлчов σ- аддитив ўлчов бўлгани учун (13) ифодадан фойдаланиб, қуйидаги тенгликни ёзамиз:

$$\mu(A_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1}).$$

A_1 тўплам ўлчовли бўлгани учун бу тенгликнинг ўнг томонидаги қатор яқинлашувчи. Унинг қолдиқ ҳади

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1})$$

(13) ёйилмага асосан A_n тўпламнинг ўлчовига тенг, яъни

$$\mu(A_n)=\sum_{k=n}^{\infty}\mu(A_k \setminus A_{k+1}).$$

Маълумки, яқинлашувчи қаторнинг қолдиқ ҳади $n\to\infty$ да нолга интилади. Бундан $n\to\infty$ да $\mu(A_n)\to 0$ муносабат келиб чиқади.*

(12) тенгликни қаноатлантирувчи μ ўлчов *узлуксиз ўлчов* дейилади.

26.11- натижа. Агар $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset, \ldots, A_n \in F$, $n=1, 2, \ldots$ *ўсувчи ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги учун* $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *бўлса, у ҳолда*

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

бўлади.

Исботи 26.10- теоремада A_n тўпламдан унинг тўлдирувчиси CA_n га ўтиш орқали олинади.

26.12- изоҳ. Шундай қилиб, G_m ярим ҳалқада аниқланган σ- аддитив m ўлчовни аниқланиш соҳаси σ- алгебрадан иборат бўлган σ- аддитив ҳамда узлуксиз бўлган μ ўлчовга давом эттирдик. Бу усул билан давом эттирилган μ ўлчов m ўлчовнинг *Лебег маъносида давоми* дейилади.

27- §. Текисликдаги тўпламларнинг Лебег ўлчови

Бу ерда илгариги параграфларда баён этилган абстракт ўлчовнинг татбиқи сифатида текисликдаги тўпламларнинг Лебег ўлчови билан шуғулланамиз.

Фараз қилайлик, a, b, c ва d ҳақиқий сонлар берилган бўлсин.

Текисликдаги қуйидаги кўринишдаги тўпламлар *тўғри тўртбурчаклар* дейилади:

1. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d\}$.
2. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\quad c\leqslant y< d\}$.
3. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\quad c< y\leqslant d\}$.
4. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\quad c< y< d\}$.
5. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x< b,\quad c\leqslant y\leqslant d\}$.
6. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x< b,\quad c\leqslant y< d\}$.
7. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x< b,\quad c< y\leqslant d\}$.
8. $P=\{(x,\ y): a\leqslant x< b,\quad c< y< d\}$.
9. $P=\{(x,\ y): a< x\leqslant b,\quad c\leqslant y\leqslant d\}$.
10. $P=\{(x,\ y): a< x\leqslant b,\quad c\leqslant y< d\}$.
11. $P=\{(x,\ y): a< x\leqslant b,\quad c< y\leqslant d\}$.
12. $P=\{(x,\ y): a< x\leqslant b,\quad c< y< d\}$.
13. $P=\{(x,\ y): a< x< b,\quad c\leqslant y\leqslant d\}$.
14. $P=\{(x,\ y): a< x< b,\quad c\leqslant y< d\}$.
15. $P=\{(x,\ y): a< x< b,\quad c< y\leqslant d\}$.
16. $P=\{(x,\ y): a< x< b,\quad c< y< d\}$.

Масалан, 1-кўринишдаги $P=\{(x,\ y): a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ тўғри тўртбурчак $a<b$, $c<d$ бўлганда ёпиқ (ёки чегарали) тўғри тўртбурчакни; $a=b$, $c<d$ ёки $a<b$, $c=d$ бўлганда сегментни, $a>b$, $c>d$ бўлганда эса бўш тўпламни ифодалайди. Шунингдек, 16-кўринишдаги $P=\{(x,\ y): a<x<b,\ c<y<d\}$ тўғри тўртбурчак $a<b$, $c<d$ бўлганда *очиқ* (ёки чегарасиз) *тўғри тўртбурчакни*, қолган ҳолларда эса бўш тўпламни ифодалайди. 2, 3, 5 ва 9-кўринишдаги тўғри тўртбурчаклар *бир томони очиқ*, 4, 6, 7, 10, 11 ва 13-кўринишдаги тўғри тўртбурчаклар *икки томони очиқ*, 8, 12, 14 ва 15-кўринишдаги тўртбурчаклар *уч томони очиқ тўғри тўртбурчаклар* дейилади, бундай тўғри тўртбурчаклар *ярим очиқ тўғри тўртбурчаклар* деб ҳам аталади. Булар a ва b ҳамда c ва d сонлар орасида бўладиган муносабатга қараб тўғри тўртбурчакни, ё интервални, ё ярим интервални ёки бўш тўпламни ифодалайди.

Текисликдаги барча тўғри тўртбурчаклар тўпламини G_0 орқали белгилаймиз.

Тўғри тўртбурчакнинг таърифланишидан ҳамда ҳалқанинг таърифидан қуйидаги теорема келиб чиқади:

27.1-теорема. *G_0 тўғри тўртбурчаклар системаси ярим ҳалқадир.*

Исбот. Ҳар қандай икки $P_1 \in G_0$ ва $P_2 \in G_0$ тўғри тўртбурчак учун $P_1 \cap P_2$ ҳам тўғри тўртбурчак (агар улар кесишмаса, бўш тўплам) эканлиги равшан, яъни $P_1 \cap P_2 \in G_0$ ($\varnothing \in G_0$ эканлиги G_0 системанинг таърифланишидан келиб чиқади). Энди $P \in G_0$ ва $P_0 \in G_0$ тўғри тўртбурчаклар учун $P_0 \subset P$ бўлсин. У ҳолда тўғри тўртбурчакнинг таърифланишидан шундай ўзаро кесишмайдиган сони чекли $P_1, P_2, \ldots, P_n$ тўғри тўртбурчаклар топиладики, P тўғри тўртбурчак $P_0, P_1, \ldots, P_n$ тўғри тўртбурчакларнинг йиғиндисидан иборат бўлади, яъни $P = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_n$.

Энди G_0 ярим ҳалқада m тўплам функциясини қуйидагича аниқлаймиз:

$m(P) = 0$, агар $P = \varnothing$ бўлса, $m(P) = (b - a)(d - c)$, агар P ёпиқ, очиқ ёки ярим очиқ тўғри тўртбурчак бўлса.

m тўплам функцияси ўлчов. Ҳақиқатан, ҳар қандай $P \in G_0$ учун $m(P) \geqslant 0$ эканлиги m функциянинг таърифидан кўринади: $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, $P_k \cap P_j = \varnothing, k \neq j$, $P_k \in G_0$ бўлганда

$$m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

тенгликнинг ўринли эканлиги эса элементар геометриядан маълум.

Агар G_0 ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқани F_0 орқали белгиласак, 24.3-теоремага асосан унинг ҳар бир $A \in F_0$ элементи ушбу

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \quad P_k \cap P_j = \varnothing, \quad k \neq j, \quad P_k \in G_0, \quad k = \overline{1, n} \tag{1}$$

кўринишга эга. F_0 ҳалқада m' ўлчовни ушбу

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$$

кўринишда аниқлаймиз. m' ўлчов $A \in F_0$ тўпламни (1) кўринишда ифодалаш усулига боғлиқ эмас. Ҳақиқатан,

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k = \bigcup_{j=1}^{s} Q_j, \quad P_k \cap P_i = \varnothing, \quad k \neq i.$$

$$Q_i \cap Q_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \ P_k \in G_0,\ k=\overline{1,n},\ \ Q_j \in G_0,\ j=\overline{1,s}$$

бўлсин. G система ярим ҳалқа бўлгани учун $P_k \cap Q_j \in Q_0$, P_k, $k=\overline{1,n}$ ва G_j, $j=\overline{1,s}$ тўғри тўртбурчакларнинг олинишига асосан

$$P_k = \bigcup_{j=1}^{s}(P_k\cap Q_j),\qquad Q_j=\bigcup_{k=1}^{n}(P_k\cap Q_j)$$

тенгликлар ўринли. Бундан m ўлчов бўлгани учун

$$\sum_{k=1}^{n} m(P_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} m(P_k\cap Q_j) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n} m(P_k\cap Q_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} m(Q_j)$$

тенглик келиб чиқади.

G ярим ҳалқада m ва m' ўлчовларнинг устма-уст тушиши уларнинг таърифидан келиб чиқади.

Энди текисликда чегараланган A тўплам учун ташқи ўлчов тушунчасини киритамиз. Умумийликни камайтирмасдан, бундай тўпламларни бирор E тўғри тўртбурчакнинг қисмларидан иборат деб қарашимиз мумкин.

Фараз қилайлик, $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_k,\ \ldots,\ P_k \in G_0,\ k = 1,2,\ \ldots$ сони чекли ёки саноқли тўғри тўртбурчаклар системаси $A\subset \hat{E}$ тўпламни қопласин:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Маълумки, бундай тўғри тўртбурчаклар системасини чексиз кўп усул билан тузиш мумкин. Шунинг учун $\sum_{k} m(P_k)$ йиғинди ҳам чексиз кўп қийматга эга ва ҳар бир P_k учун $m(P_k) \geqslant 0$ бўлгани туфайли, бу йиғинди қуйидан чегараланган бўлади. Бу йиғиндилар системасининг аниқ қуйи чегараси A тўпламнинг *ташқи ўлчови* дейилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$\mu^*(A) = \inf_{A\subset \bigcup_k P_k} \sum_{k} m(P_k).$$

Агар $A \subset \hat{E}$ тўплам ва берилган $\varepsilon > 0$ сон учун $B \in F_0$ топилсаки, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A тўплам ўлчовли тўплам дейилади.

Текисликдаги барча ўлчовли тўпламлар системасини Z_0 орқали белгилаймиз. Z_0 системада аниқланган μ^* функция Лебег ўлчови дейилади ва μ орқали белгиланади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Сон ўқининг барча чегараланган қисм тўпламларидан тузилган H система ҳалқа ташкил этишини исботланг.

2. Фараз қилайлик, K ҳалқа берилган бўлиб, $A \in K$ ихтиёрий элементи бўлсин. $K(A)$ орқали барча $A \cap B$ кўринишдаги тўпламлардан иборат системани белгилаймиз, бу ерда $B \in K$. $K(A)$ системанинг $\grave{E} = A$ бирлик элементга эга бўлган алгебра эканлигини исботланг.

3. Агар A ихтиёрий чексиз тўплам бўлса, у ҳолда унинг чекли ёки саноқли қисм тўпламларидан тузилган H система σ-ҳалқа ташкил этади. Шуни исботланг. A тўпламга қандай шарт қўйилганда H система σ-алгебра бўлади?

4. Сон ўқидаги барча сегментлар, интерваллар ва ярим очиқ интерваллар тўплами ярим ҳалқа ташкил этишини исботланг.

5. Агар P ярим ҳалқа бўлиб, унинг исталган иккита $A \in P$ ва $B \in P$ элементи учун $A \cup B \in P$ бўлса, у ҳолда P ҳалқа бўлади. Шуни исботланг.

6. $P = \{(x, y): \ a \leqslant x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d\}$ тўплам текисликдаги тўғри тўртбурчак бўлиб, $E \subset P$ тўплам унинг ўлчовли қисми бўлсин. Ушбу $P(t) = \{(x, y) \in P: \ a \leqslant x \leqslant t, \ c \leqslant y \leqslant d\}$ белгилашни киритамиз. У ҳолда $f(t) = \mu(E \cap P(t)$, функциянинг $[a, b]$ сегментда узлуксизлигини исботланг.

7. Агар $\grave{E}$ тўплам текисликдаги ўлчовли тўплам бўлиб, $\mu(E) = p$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $q \ (0 \leqslant q \leqslant p)$ сон учун E тўпламнинг $\mu(\grave{E}_q) = q$ шартни қаноатлантирувчи ўлчовли $\grave{E}_q$ қисми мавжуд. Шуни исботланг.

8. $[0, 1]$ сегментдаги сонларнинг ўнли каср ёйилмасида 2 рақами 3 рақамидан олдин учрайдиган сонлар тўпламининг Лебег ўлчовини топинг.

9. $[0, 1]$ сегментдаги сонларнинг ўнли каср ёйилмасида 7 рақами қатнашмайдиган сонлар тўпламининг Лебег ўлчовини топинг.

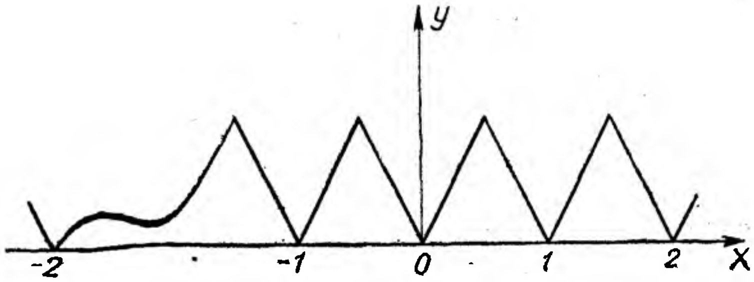
V боб

УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

28-§. Функция ва унинг узлуксизлиги

Биринчи бобда киритилган функция тушунчасини эслатиб ўтамиз.

1-таъриф. *Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор қоидага мувофиқ Y тўпламдан биргина y эле-*



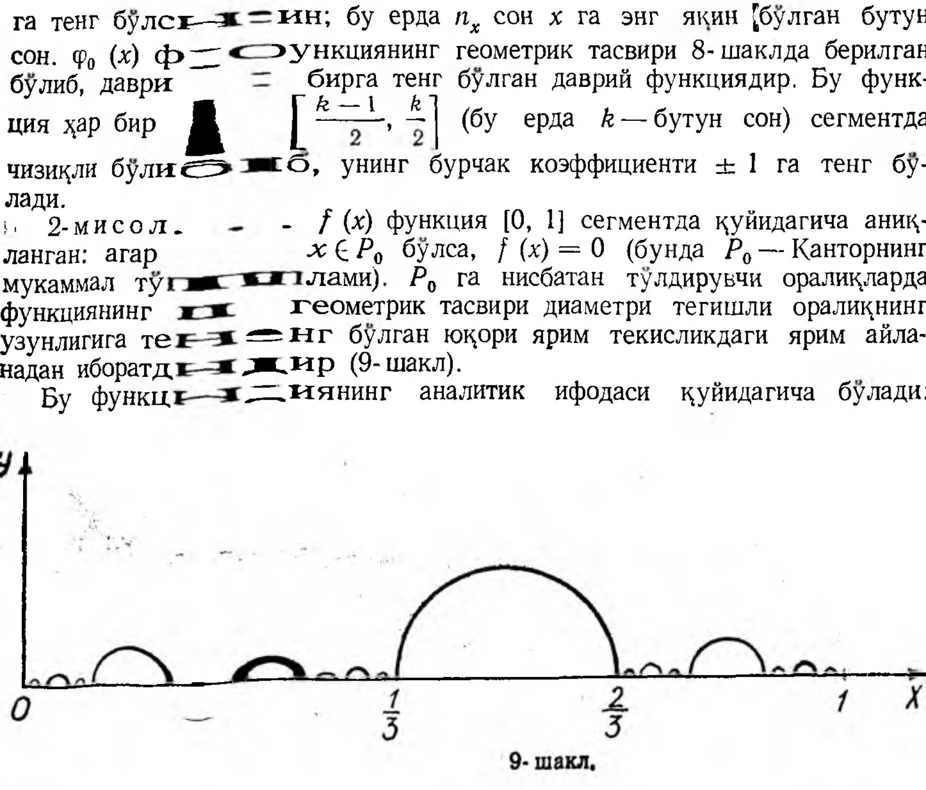
8- шакл.

си, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг (бўлувчи функция ҳеч қайси нуқтада нолга тенг бўлмаган ҳолда) узлуксизлиги математик анализ курсида қандай кўрсатилган бўлса, шу каби кўрсатилади. Энди узлуксиз функцияларга қуйидаги мисолларни келтирамиз.

1-мисол. $\varphi_0(x)$ функциянинг x нуқтадаги қиймати $|n_x—x$ га тенг бўлсин; бу ерда n_x сон x га энг яқин бўлган бутун сон. $\varphi_0(x)$ функциянинг геометрик тасвири 8-шаклда берилган бўлиб, даври бирга тенг бўлган даврий функциядир. Бу функция ҳар бир $\left[\frac{k-1}{2}, \frac{k}{2}\right]$ (бу ерда k — бутун сон) сегментда чизиқли бўлиб, унинг бурчак коэффициенти ± 1 га тенг бўлади.

2-мисол. - - - $f(x)$ функция [0, 1] сегментда қуйидагича аниқланган: агар $x \in P_0$ бўлса, $f(x) = 0$ (бунда P_0 — Канторнинг мукаммал тўплами). P_0 га нисбатан тўлдирувчи оралиқларда функциянинг геометрик тасвири диаметри тегишли оралиқнинг узунлигига тенг бўлган юқори ярим текисликдаги ярим айланадан иборатдир (9-шакл).

Бу функциянинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:



9- шакл.

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ агар } x\in P_0 \text{ бўлса,} \\ \sqrt{\left(\frac{b_n-a_n}{2}\right)^2-\left(x-a_n-\frac{b_n-a_n}{2}\right)^2}, \text{ агар } a_n\leqslant x\leqslant b_n \text{ бўлса,} \end{cases}$$

бунда (a_n, b_n) — Канторнинг P_0 тўпламига нисбатан ихтиёрий тўлдирувчи оралиқ. Бу функция $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлади. Агар $x_0\in(a_n, b_n)$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқтада $f(x)$ нинг узлуксизлиги бевосита унинг аналитик ифодасидан кўринади. Агар $x_0\in P_0$ бўлса, ихтиёрий мусбат ε сон учун x_0 нуқтанинг истаганча кичик $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ атрофини шундай танлаб оламизки, бу атроф билан кесишган тўлдирувчи (a_n, b_n) оралиқларнинг узунлиги ε дан кичик бўлсин.

Демак, $f(x)$ нинг тузилишига мувофиқ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ атрофнинг ҳар бир нуқтасида

$$0\leqslant f(x)<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилади; лекин $f(x_0)=0$, чунки $x_0\in P_0$ шунинг учун

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

тенгсизлик $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ оралиқнинг ҳамма нуқталари учун бажарилади. $\varepsilon>0$ ихтиёрий кичик сон бўлганлиги учун $f(x)$ нинг x_0 $(\in P_0)$ нуқтада узлуксизлиги ва шу билан бирга $f(x)$ нинг $[0, 1]$ сегментда ҳам узлуксизлиги келиб чиқади.

29- §. Узлуксиз функцияларнинг асосий хоссалари

1-таъриф. *Агар шундай ўзгармас k сон мавжуд бўлсаки, x нинг E даги ҳамма қийматлари учун*

$$|f(x)|\leqslant k$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция E тўпламда чегараланган дейилади.

29.1-теорема. *Чегараланган ҳамда ёпиқ E тўпламда аниқланган ва узлуксиз ҳар қандай $f(x)$ функция шу тўпламда чегараланган бўлади.*

Исбот. $f(x)$ ни E тўпламда чегараланмаган деб фараз қиламиз. У ҳолда ҳар қандай n натурал сон учун E тўпламда шундай x_n нуқта топиладики, унинг учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$f(x_n)>n. \tag{1}$$

E чегараланган бўлгани учун

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

нуқталар кетма-кетлиги ҳам чегараланган бўлади. Больцано-Вейерштрасс теоремасига мувофиқ $\{x_n\}$ кетма-кетликдан бирорта x_0 нуқтага яқинлашувчи $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. E ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in E$. $f(x)$ функция E тўпламда узлуксиз бўлганлиги сабабли,

$$f(x_{n_1}),\ f(x_{n_2}),\ \ldots,\ f(x_{n_k}),\ \ldots$$

кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити $f(x_0)$ га тенг бўлади (Гейне таърифига кўра). Иккинчи томондан, (1) муносабатга асосан

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

яъни k нинг бирор қийматидан бошлаб $\{f(x_{n_k})\}$ кетма-кетлик элементларининг абсолют қиймати истаганча катта n_k сондан катта бўлади; демак, $\{f(x_{n_k})\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўла олмайди. Бу зиддият теоремани исботлайди.$_*$

29.2-**теорема.** *Ёпиқ ва чегараланган E тўпламда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функциянинг қабул қиладиган қийматларидан иборат Φ тўплам ёпиқ тўпламдир.*

Исбот. Φ тўпламнинг ҳар қандай лимит нуқтаси ўзига киришлигини исбот қиламиз. y_0 нуқта Φ тўпламнинг ихтиёрий лимит нуқтаси ва $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ нуқталар Φ тўпламдан олинган ҳамда y_0 нуқтага яқинлашувчи кетма-кетлик бўлсин. Φ тўпламнинг y_n элементига E тўпламдан мос келган нуқтани x_n билан белгилаймиз (функциянинг таърифига кўра камида битта шундай нуқта мавжуд), яъни

$$y_n = f(x_n)\quad (x_n \in E).$$

E чегараланган ва ёпиқ тўплам бўлганлиги учун Больцано-Вейерштрасс теоремасига асосан $x_1,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$ кетма-кетлик камида битта x_0 лимит нуқтага эга бўлади ва бу лимит нуқта E тўпламга киради, яъни $x_0 \in E$. $\{x_n\}$ кетма-кетлик x_0 нуқтага яқинлашувчи ва $f(x)$ функция x_0 да узлуксиз бўлгани учун $f(x_n) \to f(x_0)$; иккинчи томондан, $y_n = f(x_n) \to y_0$. Демак, $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in E$ бўлгани учун $y_0 \in \Phi$ муносабат келиб чиқади.$_*$

Φ ёпиқ тўплам бўлганлиги учун унинг қуйи ва юқори чегаралари ўзига киради, булар $f(x)$ нинг энг кичик ва энг катта қийматлари бўлади.

Бу мулоҳазадан эса бевосита натижа сифатида қуйидиги теорема келиб чиқади:

29.3 **теорема** (Вейерштрасс). *Ёпиқ ва чегараланган E тўпламда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция*

E тўпламда ўзининг энг кичик ва энг катта қийматини қабул қилади.

2-таъриф. *Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд бўлсаки, E тўпламдаги ушбу $|x' - x''| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x' \in E$ ва $x'' \in E$ нуқталар учун*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция E тўпламда текис узлуксиз дейилади.

Бу таърифни функция узлуксизлигининг иккинчи таърифи билан солиштирганда қуйидаги фарқ кўринади.

Функция узлуксизлигининг иккинчи таърифидаги (28- §) $\delta > 0$ сон ε сонга ва умуман айтганда, x_0 нуқтага боғлиқ. Текис узлуксизлик таърифидаги δ сон эса фақат ε сонгагина боғлиқдир.

Ҳар қандай текис узлуксиз функция узлуксиздир, аммо бунинг тескариси доимо тўғри бўлмайди. Бу фикрни тасдиқловчи мисоллар ўқувчига математик анализ курсидан маълум. Аммо узлуксиз $f(x)$ функция ёпиқ ва чегараланган тўпламда берилган бўлса, унинг учун қуйидаги теорема ўринлидир.

29.4-теорема (Кантор). *Ёпиқ ва чегараланган E тўпламда берилган ҳар қандай узлуксиз $f(x)$ функция бу тўпламда текис узлуксиз бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция E тўпламда узлуксиз, лекин текис узлуксиз эмас деб фараз қиламиз. У ҳолда шундай мусбат ε сон топиладики, ҳар қандай мусбат δ сон учун E тўпламда шундай икки x', x'' нуқта мавжудки, бу нуқталар учун

$$|x' - x''| < \delta,$$
$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Энди δ га кетма-кет $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ қийматларни бериб,

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \ |f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon \ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин, бу ерда $x'_n \in E$ ва $x''_n \in E$ ($n = 1, 2, \ldots$). E чегараланган тўплам бўлганлиги учун

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$$

кетма-кетликдан бирорта x_0 нуқтага яқинлашувчи

$$x'_{n_1},\ x'_{n_2},\ \ldots,\ x'_{n_k},\ \ldots$$

қисм кетма-кетликни ажратиб олишимиз мумкин. E ёпиқ тўплам бўлганлиги учун $x_0 \in E$ бўлади. (2) га мувофиқ,

$$|x_0 - x''_{n_k}| \leqslant |x_0 - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x''_{n_k}| \leqslant |x_0 - x'_{n_k}| + \frac{1}{n_k}$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин. Бу муносабатлардан эса

$$x''_{n_1},\ x''_{n_2},\ \ldots,x''_{n_k},\ \ldots$$

кетма-кетликнинг ҳам x_0 нуқтага яқинлашиши келиб чиқади. x_0 нуқтада $f(x)$ функция узлуксиз бўлганлиги сабабли мусбат ε сон учун x_0 нинг шундай (x', x'') атрофини топиш мумкинки, $(x', x'') \cap E$ тўпламнинг ҳар қандай x элементи учун

$$|f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Энди $\{x'_{n_k}\}$ ва $\{x''_{n_k}\}$ кетма-кетликларнинг x_0 нуқтага яқинлашувчилигидан фойдаланиб, шундай n_0 сонни топиш мумкинки, $k \geqslant n_0$ бўлганда, x'_{n_k} ва x''_{n_k} нуқталар (x', x'') оралиққа кирган бўлади, чунки бу оралиқ x_0 нинг атрофи.

Демак, $k > n_0$ бўлганда

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \leqslant |f(x'_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x''_{n_k})| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин; бу натижа эса (2) муносабатларга зид.*

30-§. Узлуксиз функциялар кетма-кетлиги

Функциялар кетма-кетлиги билан кейинги бобда тўлароқ шуғулланамиз. Бу ерда эса узлуксиз функциялар кетма-кетлигига оид биргина теореманинг исботини келтириш билан чегараланамиз. Бу теорема келгусида зарур бўлади.

Бирор E тўпламда

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{1}$$

функциялар кетма-кетлиги аниқланган бўлсин. Агар $x_0 \in E$ учун

$$f_1(x_0),\ f_2(x_0),\ \ldots,\ f_n(x_0),\ \ldots$$

с онлар кетма-кетлиги бирор лимитга эга бўлса, у ҳолда (1) кетма-кетликни x_0 ($\in E$) *нуқтада яқинлашувчи* дейилади; бу лимитни $f(x_0)$ билан белгилаймиз. Агар (1) кетма-кетлик E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик *E тўпламда яқинлашувчи* дейилади ва лимит функцияни $f(x)$ билан белгилаймиз.

Бу таърифни бошқача («ε — δ» тилида) қуйидагича ҳам ифодалаш мумкин:

1-таъриф. *Агар ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон ва ҳар қандай $x_0 \in E$ нуқта учун шундай n_0 натурал сон мавжуд бўлсаки, барча $n \geqslant n_0$ учун*

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда (1) *кетма-кетлик E тўпламда $f(x)$ функцияга яқинлашувчи дейилади.*

Бу таърифдаги n_0 сон ε га ва x_0 нуқтага боғлиқдир.

2-таъриф. *Агар 1-таърифдаги n_0 сон ε сонгагина боғлиқ бўлиб, x_0 нуқтани танлаб олишга боғлиқ бўлмаса, яъни $n \geqslant n_0$ бўлганда,*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик барча $x \in E$ учун бажарилса, у ҳолда (1) *кетма-кетлик E тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи дейилади.*

Текис яқинлашиш тушунчаси математикада асосий тушунчалардан ҳисобланади ва бу тушунча математик анализда систематик равишда қўлланилади.

30.1-теорема. *Агар E тўпламда аниқланган*

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

узлуксиз функциялар кетма-кетлиги шу тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам E тўпламда узлуксиз бўлади.

Исбот. E тўпламдан ихтиёрий x_0 нуқтани оламиз. Бу нуқтада $f(x)$ нинг E га нисбатан узлуксизлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади.

Берилган кетма-кетлик $f(x)$ га текис яқинлашувчи бўлганлиги сабабли ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай n_0 натурал сонни топиш мумкинки, E тўпламнинг ҳамма x нуқталари учун

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \geqslant n_0) \tag{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $f_n(x)$ функция x_0 нуқтада E тўпламга нисбатан узлуксиз бўлганлиги учун x_0 нуқтанинг шундай $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ атрофи мавжудки, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap E$

тўпламнинг ҳар қандай нуқтаси учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади:

$$|f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

(2) тенгсизликка асосан

$$|f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

(2) — (4) тенгсизликлардан $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap E$ тўпламнинг ихтиёрий x нуқтаси учун қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$|f(x_0) - f(x)| \leqslant |f(x_0) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x)| +$$
$$+ |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.*$$

Бу теоремадан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади:

30.2-натижа. *Агар узлуксиз функцияларнинг бирор*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

кетма-кетлиги узлукли $f(x)$ функцияга яқинлашса, бу яқинлашиш текис яқинлашиш бўлмайди.

Шундай қилиб, узлуксиз функциялар кетма-кетлигининг текис яқинлашиши лимит функциянинг узлуксиз бўлиши учун кифоя экан; аммо бу шарт зарурий шарт эмас. Зарурий ва кифоявий шартларни XX асрнинг бошларида итальян математиги Арцела топган.

31-§. Узлуксиз функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталардан иборат тўпламнинг тузилиши

Маълумки, узлуксиз $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи деб ушбу

$$f_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{1}$$

ифоданинг $\delta \to 0$ даги лимитига (агар бу лимит мавжуд бўлса) айтилади.

Агар $\delta \to 0$ да $f_\delta(x)$ лимитга эга бўлмаса, у ҳолда x нуқтада $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлмайди.

Бу параграфда узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталардан иборат тўпламнинг тузилиши қандай эканлигини аниқлаймиз.

31.1-теорема. *Узлуксиз $f(x)$ функциянинг $f'(x)$ ҳосиласи мавжуд бўлган тўплам $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам бўлади. Хусусан, бу тўплам ўлчовлидир.*

Исбот. Ушбу

$$|\delta_1| \leqslant \frac{1}{m}, \ |\delta_2| \leqslant \frac{1}{m} \qquad (2)$$

тенгсизликлар бажарилганда ушбу

$$|f_{\delta_1}(x) - f_{\delta_2}(x)| \leqslant \frac{1}{n} \qquad (3)$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат тўпламни $F_{m,n}$ билан белгилаймиз. $F_{m,n}$ тўплам ёпиқ бўлади, чунки унинг лимит нуқтаси x_0 га яқинлашувчи ҳар қандай $\{x_k\}$ ($x_k \in F_{m,n}$, $k = 1, 2, \ldots$) кетма-кетликнинг элементлари учун δ_1 ва δ_2 лар (2) тенгсизликни қаноатлантирганда (3) тенгсизлик бажарилади ва бунинг чап томони узлуксиз функция бўлганлиги учун x_0 нуқтада ҳам (3) тенгсизлик бажарилади, яъни x_0 нуқта $F_{m,n}$ тўпламга киради.

Энди

$$B_n = \bigcup_m F_{m,n} \text{ ва } D = \bigcap_n B_n$$

тўпламларни тузамиз. D тўплам тузилишига мувофиқ $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам бўлади.

Агар $f(x)$ нинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталардан иборат тўпламнинг D тўпламга тенглиги кўрсатилса теорема исбот қилинган бўлади.

Агар x нуқтада $f'(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда ҳосиланинг таърифига мувофиқ ихтиёрий n натурал сон учун шундай мусбат ε сон топиладики, $|\delta| \leqslant \varepsilon$ бўлганда

$$|f'(x) - f_\delta(x)| < \frac{1}{2n}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан $|\delta_1| \leqslant \varepsilon$ ва $|\delta_2| \leqslant \varepsilon$ бўлганда

$$|f_{\delta_1}(x) - f_{\delta_2}(x)| \leqslant |f_{\delta_1}(x) - f'(x)| + |f'(x) - f_{\delta_2}(x)| <$$

$$< \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

тенгсизликни оламиз. Демак, $x \in D$, чунки $D = \bigcap_n B_n$.

Энди, аксинча, x нуқта D тўпламнинг элементи бўлса, бу нуқтада ҳосиланинг мавжудлигини кўрсатамиз.

(1) ифодадаги δ сонга $\frac{1}{m}$ ($m = 1, 2, \ldots$) кўринишдаги қийматларни бериб, ушбу $\{f_{\frac{1}{m}}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини

тузамиз. x нуқта ҳар бир n натурал сон учун B_n тўпламнинг элементи бўлганлиги туфайли, шундай m_0 сонни топиш мумкинки, $m \geqslant m_0$ бўлганда ушбу

$$|f_{\frac{1}{m}}(x) - f_{\frac{1}{m_0}}(x)| \leqslant \frac{1}{n} \qquad (4)$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан яқинлашишнинг Коши белгисига мувофиқ $\{f_{\frac{1}{m}}(x)\}$ кетма-кетлик лимитга эга; бу лимитни $f_0(x)$ билан белгилаймиз.

Энди ҳар бир n натурал сон учун $x \in B_n$ бўлганлиги сабабли топилган m_0 да $|\delta| \leqslant \frac{1}{m_0}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи δ учун

$$|f_\delta(x) - f_{\frac{1}{m}}(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ҳам бажарилади, яъни $f(x)$ функциялар $\delta \to 0$ да $f_0(x)$ га яқинлашади.

Демак, $f_0(x)$ функция ҳосиланинг таърифига мувофиқ $f'(x)$ функцияга тенг бўлади, яъни D тўпламнинг ҳар бир нуқтасида ҳосила мавжуддир.*

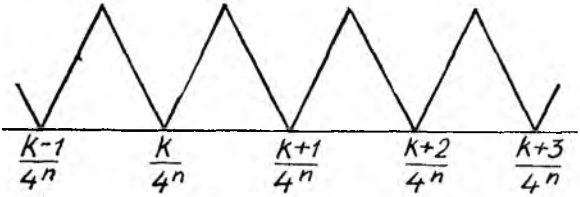
Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага эга бўлмаган узлуксиз функция мисоли. Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага эга бўлмаган узлуксиз функцияларни биринчи марта Вейерштрасс тузган. Қуйида келтириладиган мисолни Вандер-Варден тузган.

31-§ даги 1-мисолда келтирилган $\varphi_0(x)$ функцияни олиб (унинг геометрик тасвири 8-шаклда берилган) қуйидаги кўринишдаги функцияни тузамиз:

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi_0(4^n x)}{4^n}.$$

Бу функция ҳам даврий бўлиб, унинг даври $\frac{1}{4^n}$ га тенг (10-шакл); ҳар бир $\left[\frac{k-1}{2\cdot 4^n}, \frac{k}{2\cdot 4^n}\right]$ сегментда $\varphi_n(x)$ чизиқли функция ва унинг бурчак коэффициенти ± 1 га тенг. Энди

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$



10- шакл.

функционал қаторни тузамиз. $|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{4^n}$ бўлганлиги учун бу қатор текис яқинлашувчи ва $\varphi_n(x)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги сабабли 30.1-теоремага мувофиқ, $f(x)$ ҳам узлуксиз функция бўлади. Ихтиёрий x нуқтани олиб, бу нуқтани ўз ичига олган қуйидаги сегментлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$\Delta_n = \left[\frac{k_n - 1}{2\cdot 4^n}, \frac{k_n}{2\cdot 4^n}\right] \ (k_n \text{ — бутун сон}).$$

Δ_n сегментда доимо

$$|x_n - x| = \frac{1}{4^{n+1}}$$

тенгликни қаноатлантирувчи x_n нуқтани танлаб олишимиз мумкин. Энди $k > n$ бўлганда $\frac{1}{4^{n+1}}$ сонда $\varphi_k(x)$ функциянинг даври бўлган $\frac{1}{4^k}$ сон бутун сон марта жойлашгани учун $k > n$ ларда

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = 0$$

тенгликка, $k \leqslant n$ бўлганда эса $\varphi_k(x)$ функция Δ_k ва $\Delta_n \subset \Delta_k$ оралиқларда чизиқли бўлгани учун

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \pm 1$$

тенгликка эга бўламиз, яъни

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \begin{cases} 0, & k > n, \\ \pm 1, & k \leqslant n. \end{cases}$$

Булардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k(x_n)-\varphi_k(x)}{x_n-x}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)=\begin{cases}\text{бутун жуфт сонга, агар}\\ n \text{ тоқ бўлса}\\ \\ \text{бутун тоқ сонга, агар } n\\ \text{жуфт бўлса.}\end{cases}$$

Бу муносабат эса

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

ифоданинг n чексизликка интилганда ҳеч қандай чекли лимитга эга бўла олмаслигини кўрсатади.

Аммо n чексизликка интилганда: $x_n \to x$. Демак, $f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлмайди. x ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун $f(x)$ бирорта нуқтада ҳам ҳосилага эга эмас.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция учун $f(x)>c$ ва $f(x)<c$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $x \in [a, b]$ нуқталар тўплами ҳар қандай c да очиқ бўлса, бу функциянинг узлуксизлигини исботланг.

2. Агар $f(x)$ функция E тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(E)$ тўплам E тўпламнинг узлуксиз тасвири дейилади.

а) ёпиқ тўпламнинг узлуксиз тасвири F_σ типидаги тўплам эканлигини исботланг;

б) очиқ тўпламнинг узлуксиз тасвири G_δ типидаги тўплам эканлигини исботланг.

3. Агар $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган узлуксиз функция бўлса, у ҳолда Oy ўқдаги ҳар қандай F ёпиқ тўплам учун унинг асли $f^{-1}(F)$ тўплам ёпиқ ва ҳар қандай G очиқ тўплам учун унинг асли $f^{-1}(G)$ тўплам очиқ тўплам бўлади. Шуларни исботланг.

4. Агар $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган бўлса, у ҳолда унинг узлуксиз бўлиши учун Oy ўқидаги барча (a,b) интерваллар аслининг очиқ бўлиши зарур ва кифоядир. Шуни исботланг.

5. E тўплам $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий саноқли қисми бўлсин. E тўпламнинг барча нуқталарида узлукли ва $[a, b]\setminus E$ тўпламда узлуксиз бўлган функция тузинг.

6. Ихтиёрий функциянинг узилиш нуқталари тўплами F_σ типидаги тўплам эканлигини кўрсатинг.

7. [0,1] сегментдаги барча рационал сонларни номерлаб чиқамиз:

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

ва $f(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,|x - r_n|.$$

Бу функциянинг [0,1] да узлуксизлигини исботланг.

8. Агар $f(x)$ функция туташган E тўпламда узлуксиз бўлса, бу функциянинг E тўпламда қабул қиладиган қийматлари тўплами Ф ҳам туташган эканлигини исботланг.

VI боб

ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАР

32-§. Ўлчовли функциянинг таърифи ва хоссалари

Узлуксиз функция тушунчасига баъзи маънода яқин ва математик анализ учун муҳим аҳамиятга эга бўлган ўлчовли функция тушунчасини келтирамиз.

Аввал баъзи белгилашларни киритамиз: $f(x)$ функция ўлчовли E тўпламда аниқланган ва a бирор ҳақиқий сон бўлсин; ўзгарувчи $x \in E$ миқдорнинг $f(x) > a$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматларидан иборат тўпламни $E\{f > a\}$ билан белгилаймиз, яъни $E\{f > a\} = \{x \in E : f(x) > a\}$.

Шунга ўхшаш, $E\{f \geqslant a\}$, $E\{f \leqslant a\}$, $E\{f = a\}$, $E\{a < f < b\}$ тўпламларнинг ҳар бири $x \in E$ ўзгарувчининг катта қавс ичида ёзилган муносабатларни қаноатлантирадиган қийматларидан иборат.

Агар $f(x)$ функция E тўпламда чексиз қийматларга эга бўлса, келгусида аниқлик учун бу қийматларнинг ишораси маълум деб ҳисоблаймиз.

1-таъриф. *Агар ўлчовли E тўпламда берилган $f(x)$ функция учун $E\{f>a\}$ тўплам ҳар қандай ҳақиқий a да ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўлчовли функция дейилади.*

Бу таърифда (L) ўлчовли тўпламлар ҳақида гап борганлиги учун $f(x)$ функция баъзан (L) *ўлчовли функция* дейилади. Агар бу таърифда E ва $E\{f>a\}$ тўпламлар (B) ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам (B) ўлчовли дейилади.

Бу бобда ўлчовли тўплам ва функциялар (L) маъносида ишлатилади.

32.1-теорема. 1. *Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ҳар қандай ҳақиқий a ва b сонлар учун*

$$1)\ E\{f \leqslant a\},\ 2)\ E\{a < f \leqslant b\},\ 3)\ E\{f = a\},$$
$$4)\ E\{f \geqslant a\},\ 5)\ E\{f < a\}$$

тўпламларнинг ҳар бири ҳам ўлчовли бўлади.

2. *Агар ихтиёрий ҳақиқий a ва b сонлар учун* 1), 2), *4), 5) тўпламларнинг бирортаси ўлчовли бўлса, $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исбот. 1) E ва $E\{f > a\}$ тўпламлар ўлчовли бўлганлиги учун

$$E\{f \leqslant a\} = E \setminus E\{f > a\}$$

тенгликдан $E\{f \leqslant a\}$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

2) $E\{a < f \leqslant b\} = E\{a < f\} \cap E\{f \leqslant b\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли, демак, $E\{a < f \leqslant b\}$ тўплам ҳам ўлчовли.

3) $E\{f = a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E\left\{a - \frac{1}{n} < f \leqslant a + \frac{1}{n}\right\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли бўлгани учун 20.5-теоремага мувофиқ, бу тўплам ҳам ўлчовли бўлади.

4) $E\{f \geqslant a\} = E\{f > a\} \cup E\{f = a\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўплам 20.1-теоремага асосан ўлчовли, демак, $E\{f \geqslant a\}$ тўплам ҳам ўлчовли

5) $E\{f < a\} = E\{f \leqslant a\} \setminus E\{f = a\}$ тенгликдан $E\{f < a\}$ тўпламнинг ўлчовлилиги келиб чиқади.

Юқоридаги 1)—5) тенгликлар 1-бобдан маълум бўлган усул билан исбот этилади. Теореманинг иккинчи қисми биринчи қисмига ўхшаш исботланади.*

32. 2-теорема. *Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция E тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли E_1 қисмида ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. 1-таърифга мувофиқ, ҳар қандай ҳақиқий a сон учун $E_1\ \{f > a\}$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади. Бу тўпламнинг ўлчовлилиги ушбу

$$E_1\{f > a\} = E_1 \cap E\{f > a\}$$

тенгликдан келиб чиқади, чунки E_1 ва $E\{f > a\}$ тўпламларнинг ҳар бири теореманинг шартига мувофиқ ўлчовли, демак, 20.5-теоремага мувофиқ $E_1\{f > a\}$ тўплам ҳам ўлчовли.*

32.3-теорема. *$\{E_k\}$ сони чекли ёки саноқли, ҳар бири $[a, b]$ сегментда бутунлай жойлашган, ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар $f(x)$ функция бу тўпламларнинг ҳар бирида ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция уларнинг $E = \bigcup\limits_k E_k$ йиғиндисида ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. 1-таърифга ва теореманинг шартига мувофиқ ҳар қандай k учун E_k ва $E_k\{f > a\}$ тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли бўлади. Демак, 20.3-теоремага мувофиқ $E = \bigcup\limits_k E_k$ тўплам ҳам ўлчовли бўлади.

Энди

$$E\{f > a\} = \bigcup_k (E\{f > a\} \cap E_k)$$

тенгликдан эса $f(x)$ функциянинг E тўпламда ўлчовли эканлиги келиб чиқади.$_*$

32.4-теорема. *Агар $f(x)$ функция ўлчовли E тўпламда ўзгармас k сонга тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўлчовли функция бўлади.*

Исбот. Дарҳақиқат,

$$E\{f > a\} = \begin{cases} E, & \text{агар} \quad k > a \text{ бўлса,} \\ \varnothing, & \text{агар} \quad k \leqslant a \text{ бўлса.}_* \end{cases}$$

32.5-теорема. *Агар $f(x)$ ўлчовли функция бўлиб, k ўзгармас сон бўлса, у ҳолда $f(x)+k$ ва $kf(x)$ функциялар ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. Ушбу

$$E\{f + k > a\} = E\{f > a - k\},$$

$$E\{kf > a\} = \begin{cases} E\left\{f > \frac{a}{k}\right\}, & \text{агар} \quad k > 0 \text{ бўлса,} \\ E\left\{f < \frac{a}{k}\right\}, & \text{агар} \quad k < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

тенгликлардан $f(x)+k$ ва $kf(x)$ функцияларнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

Агар $k=0$ бўлса, иккинчи тенгликнинг ўнг томони ўз маъносини йўқотади, аммо бу ҳолда $kf(x)$ айнан нолга тенг бўлганлиги учун 32.4-теоремадан $kf(x)$ функциянинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.$_*$

32.6-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $E\{f > \varphi\}$ тўплам ўлчовли бўлади.*

Исбот. Агар барча рационал сонларни $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ кўринишда номерлаб чиқсак, у ҳолда тузамиз. x нуқта ҳар бир n натурал сон учун B_n тўпламнинг элементи бўлганлиги туфайли, шундай m_0 сонни топиш мумкинки, $m \geqslant m_0$ бўлганда ушбу

$$|f_{\frac{1}{m}}(x) - f_{\frac{1}{m_0}}(x)| \leqslant \frac{1}{n} \tag{4}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан яқинлашишнинг Коши белгисига мувофиқ $\{f_{\frac{1}{m}}(x)\}$ кетма-кетлик лимитга эга; бу лимитни $f_0(x)$ билан белгилаймиз.

Энди ҳар бир n натурал сон учун $x \in B_n$ бўлганлиги сабабли топилган m_0 да $|\delta| \leqslant \frac{1}{m_0}$ тенгсизликни қаноатлантирувчи δ учун

$$|f_\delta(x) - f_{\frac{1}{m}}(x)| \leqslant \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ҳам бажарилади, яъни $f(x)$ функциялар $\delta \to 0$ да $f_0(x)$ га яқинлашади.

Демак, $f_0(x)$ функция ҳосиланинг таърифига мувофиқ $f'(x)$ функцияга тенг бўлади, яъни D тўпламнинг ҳар бир нуқтасида ҳосила мавжуддир.*

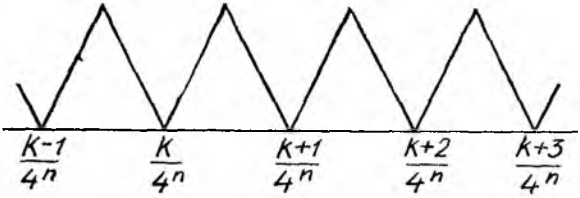
Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага эга бўлмаган узлуксиз функция мисоли. Бирорта ҳам нуқтада ҳосилага эга бўлмаган узлуксиз функцияларни биринчи марта Вейерштрасс тузган. Қуйида келтириладиган мисолни Вандер-Варден тузган.

31-§ даги 1-мисолда келтирилган $\varphi_0(x)$ функцияни олиб (унинг геометрик тасвири 8-шаклда берилган) қуйидаги кўринишдаги функцияни тузамиз:

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi_0(4^n x)}{4^n}.$$

Бу функция ҳам даврий бўлиб, унинг даври $\frac{1}{4^n}$ га тенг (10-шакл); ҳар бир $\left[\frac{k-1}{2 \cdot 4^n}, \frac{k}{2 \cdot 4^n}\right]$ сегментда $\varphi_n(x)$ чизиқли функция ва унинг бурчак коэффициенти ± 1 га тенг. Энди

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$



10- шакл.

функционал қаторни тузамиз. $|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{4^n}$ бўлганлиги учун бу қатор текис яқинлашувчи ва $\varphi_n(x)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги сабабли 30.1-теоремага мувофиқ, $f(x)$ ҳам узлуксиз функция бўлади. Ихтиёрий x нуқтани олиб, бу нуқтани ўз ичига олган қуйидаги сегментлар кетма-кетлигини тузамиз:

$$\Delta_n = \left[\frac{k_n - 1}{2 \cdot 4^n}, \frac{k_n}{2 \cdot 4^n}\right] \text{ (}k_n\text{ — бутун сон).}$$

Δ_n сегментда доимо

$$|x_n - x| = \frac{1}{4^{n+1}}$$

тенгликни қаноатлантирувчи x_n нуқтани танлаб олишимиз мумкин. Энди $k > n$ бўлганда $\frac{1}{4^{n+1}}$ сонда $\varphi_k(x)$ функциянинг даври бўлган $\frac{1}{4^k}$ сон бутун сон марта жойлашгани учун $k > n$ ларда

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = 0$$

тенгликка, $k \leqslant n$ бўлганда эса $\varphi_k(x)$ функция Δ_k ва $\Delta_n \subset \Delta_k$ оралиқларда чизиқли бўлгани учун

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \pm 1$$

тенгликка эга бўламиз, яъни

$$\frac{\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)}{x_n - x} = \begin{cases} 0, & k > n, \\ \pm 1, & k \leqslant n. \end{cases}$$

Булардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_k(x_n)-\varphi_k(x)}{x_n-x}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)=\begin{cases}\text{бутун жуфт сонга, агар } n \text{ тоқ бўлса}\\ \text{бутун тоқ сонга, агар } n \text{ жуфт бўлса.}\end{cases}$$

Бу муносабат эса

$$\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}$$

ифоданинг n чексизликка интилганда ҳеч қандай чекли лимитга эга бўла олмаслигини кўрсатади.

Аммо n чексизликка интилганда: $x_n \to x$. Демак, $f(x)$ функция x нуқтада ҳосилага эга бўлмайди. x ихтиёрий нуқта бўлганлиги учун $f(x)$ бирорта нуқтада ҳам ҳосилага эга эмас.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция учун $f(x)>c$ ва $f(x)<c$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи $x\in[a, b]$ нуқталар тўплами ҳар қандай c да очиқ бўлса, бу функциянинг узлуксизлигини исботланг.

2. Агар $f(x)$ функция E тўпламда аниқланган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(E)$ тўплам E тўпламнинг узлуксиз тасвири дейилади.

а) ёпиқ тўпламнинг узлуксиз тасвири F_σ типидаги тўплам эканлигини исботланг;

б) очиқ тўпламнинг узлуксиз тасвири G_δ типидаги тўплам эканлигини исботланг.

3. Агар $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган узлуксиз функция бўлса, у ҳолда Oy ўқдаги ҳар қандай F ёпиқ тўплам учун унинг асли $f^{-1}(F)$ тўплам ёпиқ ва ҳар қандай G очиқ тўплам учун унинг асли $f^{-1}(G)$ тўплам очиқ тўплам бўлади. Шуларни исботланг.

4. Агар $y=f(x)$ функция барча ҳақиқий сонлар тўпламида аниқланган бўлса, у ҳолда унинг узлуксиз бўлиши учун Oy ўқидаги барча (a,b) интерваллар аслининг очиқ бўлиши зарур ва кифоядир. Шуни исботланг.

5. E тўплам $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий саноқли қисми бўлсин. E тўпламнинг барча нуқталарида узлукли ва $[a, b]\setminus E$ тўпламда узлуксиз бўлган функция тузинг.

6. Ихтиёрий функциянинг узилиш нуқталари тўплами F_σ типидаги тўплам эканлигини кўрсатинг.

7. $[0,1]$ сегментдаги барча рационал сонларни номерлаб чиқамиз:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

ва $f(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |x - r_n|.$$

Бу функциянинг $[0,1]$ да узлуксизлигини исботланг.

8. Агар $f(x)$ функция туташган E тўпламда узлуксиз бўлса, бу функциянинг E тўпламда қабул қиладиган қийматлари тўплами Φ ҳам туташган эканлигини исботланг.

VI боб

ЎЛЧОВЛИ ФУНКЦИЯЛАР

32- §. Ўлчовли функциянинг таърифи ва хоссалари

Узлуксиз функция тушунчасига баъзи маънода яқин ва математик анализ учун муҳим аҳамиятга эга бўлган ўлчовли функция тушунчасини келтирамиз.

Аввал баъзи белгилашларни киритамиз: $f(x)$ функция ўлчовли E тўпламда аниқланган ва a бирор ҳақиқий сон бўлсин; ўзгарувчи $x \in E$ миқдорнинг $f(x) > a$ тенгсизликни қаноатлантирадиган қийматларидан иборат тўпламни $E\{f > a\}$ билан белгилаймиз, яъни $E\{f > a\} = \{x \in E : f(x) > a\}$.

Шунга ўхшаш, $E\{f \geqslant a\}$, $E\{f \leqslant a\}$, $E\{f = a\}$, $E\{a < f < b\}$ тўпламларнинг ҳар бири $x \in E$ ўзгарувчининг катта қавс ичида ёзилган муносабатларни қаноатлантирадиган қийматларидан иборат.

Агар $f(x)$ функция E тўпламда чексиз қийматларга эга бўлса, келгусида аниқлик учун бу қийматларнинг ишораси маълум деб ҳисоблаймиз.

1-таъриф. *Агар ўлчовли E тўпламда берилган $f(x)$ функция учун $E\{f>a\}$ тўплам ҳар қандай ҳақиқий a да ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўлчовли функция дейилади.*

Бу таърифда (L) ўлчовли тўпламлар ҳақида гап борганлиги учун $f(x)$ функция баъзан (L) *ўлчовли функция* дейилади. Агар бу таърифда E ва $E\{f>a\}$ тўпламлар (B) ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам (B) ўлчовли дейилади.

Бу бобда ўлчовли тўплам ва функциялар (L) маъносида ишлатилади.

32.1-теорема. 1. *Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ҳар қандай ҳақиқий a ва b сонлар учун*

$$1)\ E\{f\leqslant a\},\ 2)\ E\{a<f\leqslant b\},\ 3)\ E\{f=a\},$$
$$4)\ E\{f\geqslant a\},\ 5)\ E\{f<a\}$$

тўпламларнинг ҳар бири ҳам ўлчовли бўлади.

2. *Агар ихтиёрий ҳақиқий a ва b сонлар учун 1), 2), 4), 5) тўпламларнинг бирортаси ўлчовли бўлса, $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исбот. 1) E ва $E\{f>a\}$ тўпламлар ўлчовли бўлганлиги учун

$$E\{f\leqslant a\}=E\setminus E\{f>a\}$$

тенгликдан $E\{f\leqslant a\}$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

2) $E\{a<f\leqslant b\}=E\{a<f\}\cap E\{f\leqslant b\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли, демак, $E\{a<f\leqslant b\}$ тўплам ҳам ўлчовли.

3) $E\{f=a\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E\left\{a-\frac{1}{n}<f\leqslant a+\frac{1}{n}\right\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўпламлар ўлчовли бўлгани учун 20.5-теоремага мувофиқ, бу тўплам ҳам ўлчовли бўлади.

4) $E\{f\geqslant a\}=E\{f>a\}\cup E\{f=a\}$ тенгликнинг ўнг томонидаги тўплам 20.1-теоремага асосан ўлчовли, демак, $E\{f\geqslant a\}$ тўплам ҳам ўлчовли

5) $E\{f<a\}=E\{f\leqslant a\}\setminus E\{f=a\}$ тенгликдан $E\{f<a\}$ тўпламнинг ўлчовлилиги келиб чиқади.

Юқоридаги 1)—5) тенгликлар 1-бобдан маълум бўлган усул билан исбот этилади. Теореманинг иккинчи қисми биринчи қисмига ўхшаш исботланади.*

32.2-теорема. *Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция E тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли E_1 қисмида ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. 1-таърифга мувофиқ, ҳар қандай ҳақиқий a сон учун $E_1\{f>a\}$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади. Бу тўпламнинг ўлчовлилиги ушбу

$$E_1\{f>a\}=E_1\cap E\{f>a\}$$

тенгликдан келиб чиқади, чунки E_1 ва $E\{f>a\}$ тўпламларнинг ҳар бири теореманинг шартига мувофиқ ўлчовли, демак, 20.5-теоремага мувофиқ $E_1\{f>a\}$ тўплам ҳам ўлчовли.*

32.3-**теорема.** $\{E_k\}$ *сони чекли ёки саноқли, ҳар бири* $[a, b]$ *сегментда бутунлай жойлашган, ўлчовли тўпламлар кетма-кетлиги бўлсин. Агар* $f(x)$ *функция бу тўпламларнинг ҳар бирида ўлчовли бўлса, у ҳолда бу функция уларнинг* $E = \bigcup\limits_k E_k$ *йиғиндисида ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. 1-таърифга ва теореманинг шартига мувофиқ ҳар қандай k учун E_k ва $E_k\{f > a\}$ тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли бўлади. Демак, 20.3-теоремага мувофиқ $E = \bigcup\limits_k E_k$ тўплам ҳам ўлчовли бўлади.

Энди

$$E\{f > a\} = \bigcup_k (E\{f > a\} \cap E_k)$$

тенгликдан эса $f(x)$ функциянинг E тўпламда ўлчовли эканлиги келиб чиқади. $*$

32.4-**теорема.** *Агар* $f(x)$ *функция ўлчовли* E *тўпламда ўзгармас* k *сонга тенг бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *ўлчовли функция бўлади.*

Исбот. Дарҳақиқат,

$$E\{f > a\} = \begin{cases} E, & \text{агар} \quad k > a \text{ бўлса}, \\ \varnothing, & \text{агар} \quad k \leqslant a \text{ бўлса}. \end{cases} *$$

32.5-**теорема.** *Агар* $f(x)$ *ўлчовли функция бўлиб,* k *ўзгармас сон бўлса, у ҳолда* $f(x)+k$ *ва* $kf(x)$ *функциялар ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. Ушбу

$$E\{f + k > a\} = E\{f > a - k\},$$

$$E\{kf > a\} = \begin{cases} E\left\{f > \dfrac{a}{k}\right\}, & \text{агар} \quad k > 0 \text{ бўлса}, \\ E\left\{f < \dfrac{a}{k}\right\}, & \text{агар} \quad k < 0 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

тенгликлардан $f(x)+k$ ва $kf(x)$ функцияларнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.

Агар $k=0$ бўлса, иккинчи тенгликнинг ўнг томони ўз маъносини йўқотади, аммо бу ҳолда $kf(x)$ айнан нолга тенг бўлганлиги учун 32.4-теоремадан $kf(x)$ функциянинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.$*$

32.6-**теорема.** *Агар* $f(x)$ *ва* $\varphi(x)$ *функциялар* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда* $E\{f > \varphi\}$ *тўплам ўлчовли бўлади.*

Исбот. Агар барча рационал сонларни $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ кўринишда номерлаб чиқсак, у ҳолда

$$E\{f>\varphi\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f>r_k\}\cap E\{\varphi<r_k\}] \qquad (1)$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Ҳақиқатан, агар $x\in E\{f>\varphi\}$ ихтиёрий элемент бўлса, у ҳолда $f(x)>\varphi(x)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, шундай r_k рационал сон топиладики, унинг учун

$$f(x)>r_k>\varphi(x)$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан $x\in E\{f>r_k\}$ ва $x\in E\{\varphi<r_k\}$ муносабатларга эга бўламиз. Демак,

$$x\in E\{f>r_k\}\cap E\{\varphi<r_k\}.$$

Бундан $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f>r_k\}\cap E\{\varphi<r_k\}]$ муносабат келиб чиқади. x элементнинг ихтиёрийлигидан ушбу

$$E\{f>\varphi\}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f>r_k\}\cap E\{\varphi<r_k\}] \qquad (2)$$

муносабатни оламиз.

Энди $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f>r_k\}\cap E\{\varphi<r_k\}]$ ихтиёрий элемент бўлсин. У ҳолда камида битта r_n рационал сон топиладики, $x\in[E\{f>r_n\}\cap E\{\varphi<r_n\}]$ бўлади. Демак, $x\in E\{f>r_n\}$ ва $x\in E\{\varphi<r_n\}$ бўлиб, булардан ушбу $f(x)>r_n$ ва $\varphi(x)<r_n$ тенгсизликларни оламиз. Бу тенгсизликлардан $f(x)>\varphi(x)$ тенгсизлик келиб чиқади. Бундан $x\in E\{f>\varphi\}$. x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E\{f>\varphi\}\supset\bigcup_{k=1}^{\infty}[E\{f>r_k\}\cap E\{\varphi<r_k\}].$$

Бу ва (2) муносабатлар (1) тенгликни исботлайди. $E\{f>r_k\}$ ва $E\{\varphi<r_k\}$ тўпламлар ҳар бир r_k рационал сон учун ўлчовли бўлганлиги сабабли, 20.3 ва 20.5-теоремаларга асосан (1) тенгликнинг ўнг томони ўлчовли тўплам. Демак, $E\{f>\varphi\}$ тўплам ҳам ўлчовли бўлади.$_*$

32.7-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)+\varphi(x)$* ва *$f(x)-\varphi(x)$ функциялар ҳам E тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исбот. Ушбу

$$E\{f+\varphi>a\}=E\{f>a-\varphi\},$$
$$E\{f-\varphi>a\}=E\{f>a+\varphi\}$$

тенгликлар ёрдами билан бу теореманинг исботи 32.6-теоремага келтирилади.$_*$

32.8-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot\varphi(x)$ функция ҳам E тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исбот. Агар $f(x)$ ўлчовли бўлса, у ҳолда $f^2(x)$нинг ўлчовлилиги $a\geqslant 0$ бўлганда

$$E\ \{f^2>a\}=E\{f>\sqrt{a}\}\cup E\{f<-\sqrt{a}\}$$

тенгликдан, $a<0$ бўлганда

$$E\{f^2>a\}=E$$

тенгликдан кўринади. Бундан ва ушбу

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{1}{4}[f(x)+\varphi(x)]^2-\frac{1}{4}[f(x)-\varphi(x)]^2$$

тенгликдан теореманинг умумий ҳолда тўғрилиги келиб чиқади, чунки ўнг томондаги функциялар 32.7 ва 32.8-теоремаларга асосан ўлчовли бўлади.*

32.9-теорема. *Агар $\varphi(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлиб, E да $\varphi(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\varphi(x)}$ функция ҳам E тўпламда ўлчовли бўлади.*

Теореманинг исботи, агар $a>0$ бўлса,

$$E\left\{\frac{1}{\varphi}>a\right\}=E\left\{0<\varphi<\frac{1}{a}\right\}$$

тенгликдан; агар $a<0$ бўлса,

$$E\left\{\frac{1}{\varphi}>a\right\}=E\{\varphi>0\}\cup E\left\{\varphi<\frac{1}{a}\right\}$$

тенгликдан; агар $a=0$ бўлса,

$$E\left\{\frac{1}{\varphi}>a\right\}=E\{\varphi>0\}$$

тенгликдан келиб чиқади. Чунки бу тенгликларнинг ўнг томонидаги тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли.*

32.10-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлиб, E да $\varphi(x)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ функция ҳам E тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исбот. Бу теореманинг тўғрилиги ушбу

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=f(x)\,\frac{1}{\varphi(x)}$$

муносабатдан ҳамда 32.8 ва 32.9-теоремалардан бевосита келиб чиқади.*

32.11-**теорема.** *Агар $f(x)$ функция E тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ бу тўпламда ўлчовли бўлади.*

Исбот. Аввало $F = E\{f \leqslant c\}$ тўпламнинг ёпиқлигини исбот қиламиз. Дарҳақиқат, $x_0 \in E$ бу тўплам учун лимит нуқта бўлсин. У ҳолда F тўпламда x_0 нуқтага яқинлашувчи $\{x_n\}$ кетма-кетлик мавжуд бўлиб, ихтиёрий $n = 1, 2, \ldots$ учун $f(x_n) \leqslant \leqslant c$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда $f(x)$ функциянинг узлуксизлигига мувофиқ: $f(x_0) \leqslant c$, бундан $x_0 \in F$, демак, F ёпиқ тўплам.

Энди теореманинг тўғрилиги

$$E\{f > c\} = E \setminus E\{f \leqslant c\} = E \setminus F$$

тенгликдан келиб чиқади, чунки E ва F тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли.$_*$

2-**таъриф.** *Агар $\mu(E\{f \neq \varphi\}) = 0$ бўлса, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар E тўпламда эквивалент дейилади.*

$f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг эквивалентлиги $f \sim \varphi$ кўринишда ёзилади. Икки эквивалент функция E тўпламда бир вақтда ўлчовли ёки ўлчовсиз бўлиши таърифдан бевосита кўринади.

3-**таъриф.** *Бирор ўлчовли E тўплам берилган бўлиб, $\mu(E) > 0$ бўлсин. Агар бирор хосса ўлчови нолга тенг $A \subset E$ тўпламда бажарилмай, E тўпламнинг қолган қисмида (яъни $E \setminus A$ тўпламда) бажарилса, у ҳолда бу хосса E тўпламда деярли бажарилади дейилади.*

Масалан, E тўпламда эквивалент бўлган икки функция бир-бирига деярли тенг дейилади.

4-**таъриф.** *Бирор ўлчовли E тўплам берилган бўлиб, $\mu(E) > 0$ бўлсин. Агар E тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ўлчови нолга тенг бўлган бирор A тўпламнинг ташқарисида (яъни $E \setminus A$ тўпламда) $f(x)$ функцияга яқинлашса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга деярли яқинлашувчи дейилади.*

Бошқача айтганда $\{x : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ тўпламнинг ўлчови нолга тенг.

5-**таъриф.** *Агар бирор ўлчовли E тўпламда $f(x)$ функциянинг чексиз қийматга эга бўлган нуқталаридан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса, $f(x)$ функцияни E тўпламда деярли чекли дейилади.*

33-§. Ўлчовли функциялар кетма-кетлиги. Лебег, Рисс, Егоров теоремалари

Илгариги параграфдаги теоремалардан кўринадики, ўлчовли функциялар устидаги арифметик амалларнинг натижаси яна ўлчовли функциядир. Энди ўлчовли функциялар синфида бир неча хил лимитга ўтиш амалини кўриб, уларнинг хоссаларини ўрганамиз.

33.1-**теорема.** *Ўлчовли E тўпламда ўлчовли $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар E тўпламнинг ҳар бир x нуқтасида*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

Исбот. Ихтиёрий ўзгармас a сонни олиб,

$$E_{m,k} = E\left\{f_k > a + \frac{1}{m}\right\}, \quad m = 1,2, \dots ; k = 1, 2, \dots$$

ва

$$F_{m,n} = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_{m,k}$$

тўпламларни тузамиз. f_k функция ўлчовли бўлгани учун $E_{m,k}$ тўпламлар ўлчовли. 20.5-теоремага мувофиқ, $F_{m,n}$ тўпламлар ҳам ўлчовли бўлади.

Агар

$$E\{f > a\} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{m,n}$$

тенгликни исбот қилсак, у ҳолда 20.3-теоремага асосан теорема исбот қилинган бўлади.

Бу тенгликни исбот қилиш учун қуйидаги икки муносабатнинг тўғрилигини кўрсатиш кифоя:

$$E\{f > a\} \subset \bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{m,n}, \tag{1}$$

$$\bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{m,n} \subset E\{f > a\}. \tag{2}$$

Фараз қилайлик, x_0 нуқта $E\{f > a\}$ тўпламнинг ихтиёрий элементи бўлсин, яъни $f(x_0) > a$; бу тенгсизликдан фойдаланиб, етарли катта m натурал сон учун ушбу

$$f(x_0) > a + \frac{1}{m}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Аммо $\lim_{k\to\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$; демак, шундай n натурал сонни топиш мумкинки, барча $k \geqslant n$ учун

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m},$$

яъни

$$x_0 \in E_{m,n}$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан кўринадики,

$$x_0 \in \bigcap_{k=n}^{\infty} E_{m,k} = F_{m,n} \subset \bigcup_{m,n=1}^{\infty} F_{m,n},$$

яъни $E\{f > a\}$ тўпламнинг ихтиёрий x_0 элементи $\bigcup\limits_{m,n} F_{m,n}$ тўпламга ҳам кирар экан.

Демак, (1) муносабат исбот бўлди. Энди (2) муносабатни исботлаймиз. $x_0 \in \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} F_{m,n}$ бўлсин; у ҳолда шундай m ва n натурал сонлар мавжудки, улар учун $x_0 \in F_{m,n}$ муносабат ўринли. Сўнгги муносабатдан барча $k \geqslant n$ учун

$$x_0 \in E_{m,k},$$

яъни

$$f_k(x_0) > a + \frac{1}{m}$$

муносабат келиб чиқади.

k га нисбатан лимитга ўтсак, қуйидаги тенгсизликка келамиз:

$$f(x_0) \geqslant a + \frac{1}{m} > a,$$

яъни

$$x_0 \in E\{f > a\}.$$

Бу билан (2) муносабат ҳам исбот бўлди.*

33.2-изоҳ. Агар

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

муносабат E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида эмас, балки E тўпламда деярли бажарилганда ҳам (яъни бу муносабат бажарилмаган нуқталардан иборат бўлган тўпламнинг ўлчови нолга тенг бўлса) теорема ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатан,

$$\mu\{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\} = 0 \text{ бўлса,}$$

$$E_0 = E \setminus \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$$

тўпламнинг ҳар бир $x \in E_0$ нуқтасида $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ тенглик ўринли. $\{x \in E: \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}$ тўпламнинг ўлчови ноль бўлгани учун $f(x)$ функция E_0 тўпламда ўлчовли. У ҳолда у E тўпламда ҳам ўлчовли бўлади.

1-**таъриф** (Ф. Рисс). *Ўлчовли E тўпламда деярли чекли, ўлчовли $f(x)$ функция ва деярли чекли, ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар ҳар қандай мусбат σ сон учун ушбу*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}) = 0$$

муносабат[1] *бажарилса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашувчи дейилади ва $f_n \Rightarrow f$ кўринишда ёзилади.*

Қуйидаги Лебег, Егоров, Лузин теоремаларидаги барча функцияларни деярли чекли деб фараз қиламиз ва уни бундан кейин алоҳида айтиб ўтирмаймиз.

33.3-**теорема** (А. Лебег). *$f(x)$ функцияга ўлчовли E тўпламда деярли яқинлашувчи ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича ҳам яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. 33.1-теорема ва 33.2-изоҳга биноан $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлади.

Қуйидаги тўпламларни тузамиз:

$$A = \{|f| = +\infty\},\ A_n = E\{|f_n| = +\infty\},\ B = E\{f_n \not\to f\},$$

$$C = A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup B,\ E_k(\sigma) = E\{|f_k - f| \geqslant \sigma\}$$

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\sigma),\ P = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\sigma).$$

Теореманинг шартларига кўра бу тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли ва

$$\mu(C) = 0. \tag{3}$$

Ушбу

$$R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$$

муносабатларга ва 20.7-теоремага мувофиқ

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\sigma)) = \mu(P). \tag{4}$$

---

[1] Агар x_0 нуқтада $f_n(x_0)$ ва $f(x_0)$ функциялар чексиз қийматга эга бўлиб, ишоралари бир хил бўлса, аниқмасликка йўл қўймаслик учун x_0 нуқтани $E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}$ тўпламга киритамиз.

Энди

$$P \subset C \tag{5}$$

муносабатни исбот қиламиз. Бунинг учун P тўпламдан ихтиёрий x_0 элементни оламиз. Агар $x_0 \overline{\in} C$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

бўлади. Демак, шундай n натурал сон топиладики, унинг учун

$$|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma \quad (k \geqslant n)$$

тенгсизлик бажарилади ёки бошқача айтганда,

$$x_0 \overline{\in} E_k(\sigma) \quad (k \geqslant n).$$

Бундан $x_0 \overline{\in} R_n(\sigma)$ ва $x_0 \overline{\in} P$ муносабатлар олинади. Шу билан (5) муносабат исбот бўлди. (3) — (5) муносабатлардан

$$\lim_{n \to \infty} \mu(R_n(\sigma)) = 0$$

тенглик келиб чиқади. Шу билан ўлчов бўйича яқинлашишнинг Ф. Рисс таърифига мувофиқ теорема ҳам исбот этилди, чунки

$$E_n(\sigma) \subset R_n(\sigma)$$

ва демак,

$$\mu(E_n(\sigma)) = \mu(E\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}) \leqslant \mu(R_n(\sigma)) \to 0, \quad n \to \infty.*$$

Изоҳ. Теореманинг тескариси тўғри эмас, яъни ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли яқинлашиш келиб чиқмайди.

Мисол. Ҳар бир натурал k ва $l = \overline{1, k}$ сонлар учун $[0,1)$ ярим оралиқда ушбу

$$f_l^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right), \\ 0, & x \overline{\in} \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right) \end{cases} \quad (l = \overline{1, k})$$

тенглик билан аниқланган $f_l^{(k)}(x)$ функцияни тузамиз. Бу $f_l^{(k)}(x)$ функцияларни ушбу

$$\varphi_1(x) = f_1^{(1)}(x),\ \varphi_2(x) = f_1^{(2)}(x),\ \varphi_3(x) = f_2^{(2)}(x),\ \varphi_4(x) = f_1^{(3)}(x),\ \ldots$$

кетма-кетлик кўринишида ёзамиз. Бу функциялар кетма-кетлиги ўлчов бўйича нолга интилади; дарҳақиқат, агар $\varphi_n(x) = f_l^{(k)}(x)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\sigma (0 < \sigma \leqslant 1)$ сон учун

$$E\{|\varphi_n| \geqslant \sigma\} = \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right]$$

тенглик ўринли бўлади. Бундан

$$\mu(E\{|\varphi_n| \geqslant \sigma\}) = \frac{1}{k} \to 0, \ n \to \infty,$$

чунки $n \to \infty$ да k сон ҳам чексизликка интилади. Иккинчи томондан, $\varphi_n(x) \to 0$ муносабат $[0, 1)$ ярим оралиқнинг бирорта ҳам нуқтасида бажарилмайди. Ҳақиқатан, агар $x_0 \in [0, 1)$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай k учун шундай l сон топиладики, улар учун ушбу

$$x_0 \in \left[\frac{l-1}{k}, \frac{l}{k}\right]$$

муносабат бажарилади, демак, $f_l^{(k)}(x_0) = 1$. Бошқачасига айтганда,

$$\varphi_1(x_0), \ \varphi_2(x_0), \ \ldots, \ \varphi_n(x_0), \ \ldots$$

сонлар кетма-кетлигида бир сони чексиз марта учрайди. Демак, бу кетма-кетлик x_0 нуқтада 0 га яқинлашмайди. x_0 нуқта ихтиёрий бўлгани учун $\varphi_n(x)$ кетма-кетлик $[0, 1)$ нинг ҳеч қандай нуқтасида 0 га интилмайди.

Бу мисолдан ва Лебег теоремасидан ўлчов бўйича яқинлашиш тушунчаси деярли яқинлашиш тушунчасига қараганда кенгроқ эканлиги кўринади; деярли яқинлашиш тушунчаси эса ҳар бир нуқтада яқинлашиш тушунчасидан кенгроқдир.

33.4-теорема. *Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда ўлчов бўйича $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларга яқинлашса, бу функциялар E тўпламда эквивалент бўлади.*

Исбот. Ҳар қандай $\sigma>0$ мусбат сон учун

$$E\{|f-g| \geqslant \sigma\} \subset E\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup E\left\{|f_n - g| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

муносабат доимо ўринли. Буни исботлаш учун бирор x элемент бу муносабатнинг ўнг томонига кирмаса, у бу муносабатнинг чап томонига ҳам кирмаслигини кўрсатиш кифоя. Ҳақиқатан, агар

$$x \overline{\in} E\left\{|f_n - g| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \cup E\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

бўлса, у ҳолда

$$x \overline{\in} E\left\{|f_n - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\} \text{ ва } x \overline{\in} E\left\{|f_n - g| \geqslant \frac{\sigma}{2}\right\}$$

бўлади. Демак,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\sigma}{2} \text{ ва } |f_n(x) - g(x)| < \frac{\sigma}{2}$$

тенгсизликлар ўринли. Булардан

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| < \sigma$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса

$$x \overline{\in} E\{|f - g| \geqslant \sigma\}$$

эканлигини кўрсатади. Теореманинг шартига кўра юқоридаги муносабатнинг ўнг томонидаги тўпламларнинг ҳар бирининг ўлчови $n \to \infty$ да нолга интилади; демак,

$$\mu(E\{|f - g| \geqslant \sigma\}) = 0$$

тенглик ўринли, яъни

$$f \sim g._*$$

33.3- теоремада деярли яқинлашишдан ўлчов бўйича яқинлашиш келиб чиқишини, бу теоремадан кейинги изоҳда эса аксинчаси, яъни ўлчов бўйича яқинлашишдан деярли яқинлашиш келиб чиқмаслигини кўрдик. Шунга қарамай, аксинчаси баъзи бир маънода ўринли эканлиги қуйидаги теоремадан кўринади.

33.5-теорема (Ф. Рисс). *Агар* $\{f_n(x)\}$ *функциялар кетма-кетлиги* E *тўпламда* $f(x)$ *функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликдан шундай* $\{f_{n_i}(x)\}$ *қисм кетма-кетликни ажратиб олиш мумкинки, бу қисм кетма-кетлик* E *тўпламда* $f(x)$ *функцияга деярли яқинлашувчи бўлади.*

Исбот. $n \to \infty$ да $\mu E(\{|f_n - f| \geqslant \sigma\}) \to 0$ бўлгани учун қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\{\sigma_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\{n_i\}$ сонлар кетма-кетликлари мавжуд;

$$\sigma_n > 0, \ \lim_{n \to \infty} \sigma_n = 0, \ \varepsilon_n > 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty,$$

$$n_1 < n_2 < n_3 \ldots < n_k < \ldots,$$

ва

$$\begin{aligned} &\mu(E\{|f_{n_1} - f| \geqslant \sigma_1\}) < \varepsilon_1, \\ &\mu(E\{|f_{n_2} - f| \geqslant \sigma_2\}) < \varepsilon_2, \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ &\mu(E\{|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k\}) < \varepsilon_k. \\ &\quad \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Бу $\{f_{n_i}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг E тўпламда деярли яқинлашувчи эканлигини кўрсатсак, теорема исбот қилинган бўлади. Ушбу

$$R_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E\{|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k\}, \quad Q = \bigcap_{m=1}^{\infty} R_m$$

тўпламларни тузамиз. $R_1 \supset R_2 \supset \dots$ муносабатлардан 20.7-теоремага мувофиқ $m \to \infty$ да

$$\mu(R_m) \to \mu(Q)$$

Иккинчи томондан, (6) га мувофиқ,

$$\mu(R_m) < \sum_{k=m}^{\infty} \varepsilon_k.$$

Демак, $\mu(R_m) \to 0$, $m \to \infty$, чунки $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty$. Бундан эса ўз навбатида

$$\mu(Q) = 0$$

тенглик келиб чиқади.

Энди $E \setminus Q$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $\{f_{n_i}(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг яқинлашувчи эканлигини исбот қиламиз.

Ҳар бир $x_0 \in E \setminus Q$ учун шундай m_0 топиладики, $x_0 \overline{\in} R_m$ муносабат ўринли бўлади. Бундан, агар $k \geqslant m_0$ бўлса, $x_0 \overline{\in} E\{|f_{n_k} - f| \geqslant \sigma_k\}$. Демак, $k \geqslant m_0$ бўлганда

$$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \sigma_k.$$

Аммо $k \to \infty$ да $\sigma_k \to 0$ бўлгани учун $k \to \infty$ да охирги муносабатдан $f_{n_k}(x_0) \to f(x_0)$, яъни $\{f_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда деярли яқинлашади.*

33.6-теорема (Д. Ф. Егоров). *Ўлчовли E тўпламда $f(x)$ функцияга деярли яқинлашувчи ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $\varepsilon > 0$*

учун шундай ўлчовли $P \subset E$ тўпламни топиш мумкинки, унинг учун $\mu(P) > \mu(E) - \varepsilon$ муносабат бажарилиб, бу P тўпламда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.

Исбот. Шу параграфдаги Лебег теоремасини исбот қилишда ушбу

$$\lim_{n \to \infty} \mu(R_n(\sigma)) = 0$$

муносабатни келтириб чиқарган эдик, бу ерда

$$R_n(\sigma) = \bigcup_{k=n}^{\infty} E\{|f_k - f| \geqslant \sigma\}.$$

Энди қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\{\sigma_k\}$, $\{n_k\}$ ва $\{\delta_k\}$ сонлар кетма-кетликларини тузамиз:

$$\sigma_{k+1} < \sigma_k, \quad \sigma_k \to 0 \ (k \to \infty),$$

$$\delta_k > 0, \ \mu(R_{n_k}(\sigma_k)) < \delta_k \text{ ва } \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty.$$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k$ қаторнинг яқинлашувчилигидан фойдаланиб, теореманинг шартида берилган ε учун шундай q натурал сонни топамизки, унинг учун

$$\sum_{k=q}^{\infty} \delta_k < \varepsilon \tag{7}$$

тенгсизлик бажарилсин.

Қуйидаги тўпламларни тузамиз.

$$e = \bigcup_{k=q}^{\infty} R_{n_k}(\sigma_k), \quad P = E \setminus e.$$

(7) га асосан $\mu(e) < \varepsilon$, демак, $\mu(P) > \mu(E) - \varepsilon$.

Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг P да $f(x)$ функцияга текис яқинлашишини исбот қилсак, теорема исбот этилган бўлади.

Энди ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, $x \in P$ бўлсин, демак, $x \overline{\in} e$. m ни шундай танлаймизки, $m \geqslant q$ ва $\sigma_m < \varepsilon$ бўлсин ($\sigma_m \to 0$ бўлгани учун бундай m сон мавжуд). У ҳолда $x \overline{\in} R_{n_m}(\sigma_m)$. Бошқача айтганда, $k \geqslant n_m$ бўлганда

$$x \overline{\in} E\{|f_k - f| \geqslant \sigma_m\}.$$

Бундан ушбу

$$|f_k(x)-f(x)| < \sigma_m \quad (k \geqslant q)$$

муносабат ва $\sigma_m < \varepsilon$ бўлгани учун ушбу

$$|f_k(x)-f(x)| < \varepsilon \quad (k \geqslant n_q)$$

муносабат келиб чиқади.

$\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг P тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашиши сўнгги муносабатдан кўринади, чунки бунда n_q сон ε сонгагина боғлиқ бўлиб, x га боғлиқ эмас. $*$

33.7-изоҳ. 20.8-теоремага мувофиқ, Егоров теоремасидаги P тўплам сифатида мукаммал тўпламни олиш мумкин эди.

34-§. Лузин теоремаси

Функциялар назариясида узлуксиз функциялар синфи ғоят катта аҳамиятга эга. 32.11-теоремадан маълумки, ҳар қандай узлуксиз функция ўлчовли функция бўлади.

Энди узлуксиз функциялар билан ўлчовли функциялар орасида (уларнинг тузилиши маъносида) қандай муносабат бор, деган савол туғилади. Бу саволга Лузин теоремаси жавоб беради.

Лузин теоремасини исботлашдан олдин қуйидаги теоремани исботлаймиз.

34.1-теорема. *Фараз қилайлик,* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *тўпламлар ўзаро кесишмайдиган ёпиқ тўпламлар бўлсин. Агар* $F=\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ *тўпламда аниқланган* $f(x)$ *функция ҳар бир* F_k, $k=\overline{1, n}$ *тўпламда ўзгармас бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция* F *тўпламда узлуксиз бўлади.*

Исбот. F тўплам чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси бўлганлиги сабабли 13.8-теоремага асосан у ёпиқ тўплам бўлади. Бундан $x_n \to x_0$ бўлган ҳар қандай $\{x_n\}$, $x_n \in F$ кетма-кетлик учун $x_0 \in F$ муносабат келиб чиқади. Демак, шундай $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ топиладики, $x_0 \in F_m$ бўлиб, F_k тўпламларнинг ўзаро кесишмаганлигидан $k \neq m$ бўлганда $x_0 \overline{\in} F_k$ муносабат ўринли бўлади. Бундан $F_1, F_2, \ldots, F_{m-1}, F_{m+1}, \ldots, F_n$ тўпламларда $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг кўпи билан чекли сондаги элементларигина бўлиши мумкинлиги келиб чиқади. Фараз қилайлик, x_N бу элементларнинг энг охиргиси бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $k > N$ учун $x_k \in F_m$ муносабатга эга бўламиз. У ҳолда теорема шартига кўра $f(x_k) = f(x_0)$ тенглик барча $k > N$ учун ўринли бўлади. Бундан $f(x)$ функциянинг узлуксиз эканлиги келиб чиқади.$_*$

34.2-теорема (Н. Н. Лузин). *Агар $f(x)$ функция E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай ёпиқ $F \subset E$ тўпламни топиш мумкинки, бу тўпламда $f(x)$ функция узлуксиз ва*

$$\mu(F) > \mu(E) - \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлади.

Исбот. Ушбу $E_n = E(-n \leqslant f(x) < n)$ белгилашни киритиб, E тўпламни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Сўнгра $E_n \subset E_{n+1}$ муносабатдан ва 20.6-теоремадан ушбу

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

муносабат келиб чиқади. Бу тенгликдан фойдаланиб, ҳар қандай $\varepsilon > 0$ ва етарли катта бўлган N натурал сон учун ушбу

$$\mu(E_N) > \mu(E) - \varepsilon \tag{1}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин.

Энди $[-N, N]$ сегментни тенг $2nN$ қисмга бўламиз (n — ихтиёрий натурал сон):

$$a_0^{(n)} = -N,\ a_1^{(n)} = -N + \frac{1}{n},\quad a_2^{(n)} = -N + \frac{n}{2}, \dots,$$

$$a_k^{(n)} = -N + \frac{k}{n}, \dots, a_{2nN}^{(n)} = N.$$

$E_k^{(n)}$ билан $E\{a_{k-1}^{(n)} \leqslant f(x) < a_k^{(n)}\}$, $(k = 1, 2, \dots, 2nN)$ тўпламни белгилаймиз. Ушбу

$$E_N = \bigcup_{k=1}^{2nN} E_k^{(n)},\quad E_k^{(n)} \cap E_l^{(n)} = \varnothing \quad (k \neq l)$$

тенгликлар ўз-ўзидан тушунарли. $E_k^{(n)}$ тўпламнинг ҳар биридан 20.8-теоремага асосан ўлчови қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирадиган $F_k^{(n)}$ ёпиқ қисм тўпламни ажратиб оламиз:

$$\mu(F_k^{(n)}) > \mu(E_k^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n 2nN}.$$

F_n билан $F_k^{(n)}$ тўпламларнинг k бўйича йиғиндисини белгилаймиз, яъни $F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2nN} F_k^{(n)}$.

13.8-теоремага асосан F_n тўплам ҳам ёпиқ. F_n тўпламнинг ўлчови

$$\mu(F_n) = \sum_{k=1}^{2nN} \mu(F_k^{(n)}) > \sum_{k=1}^{2nN} \mu(E_k^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n} = \mu(E_N) - \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (2)$$

тенгсизликни қаноатлантиради. $F_k^{(n)}$ тўпламда $f_n(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз:

$$f_n(x) = \begin{cases} a_{k-1}^{(n)}, & \text{агар } x \in F_k^{(n)} \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \overline{\in} F_k^{(n)} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

34.1-теоремага асосан $f_n(x)$ функция F_n тўпламда узлуксиз бўлади.

Агар x нуқта F_n тўпламнинг элементи бўлса, у $F_k^{(n)}$, $k = 1, 2, . . ,$. тўпламларнинг биригагина киради.

Агар $x \in F_k^{(n)} \subset E_k^{(n)}$ бўлса, у ҳолда

$$a_{k-1}^{(n)} \leqslant f(x) < a_k^{(n)}.$$

Демак, ҳар бир $x \in F_k^{(n)}$ учун

$$0 \leqslant f(x) - f_n(x) < a_k^{(n)} - a_{k-1}^{(n)} = \frac{1}{n}.$$

Бундан $F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2nN} F_{n_k}$ бўлгани сабабли x нинг F_n дан олинган ҳамма қийматлари учун

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли.

Энди $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ тўпламни оламиз. Ушбу

$$F_n \subset E_N, \quad F_n = E_N \setminus (E_N \setminus F_n) \qquad (3)$$

ва (2) муносабатлардан

$$\mu(E_N \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (4)$$

тенгсизликни оламиз. (3) ва

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

дан

$$F = E_N \setminus [\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_N \setminus F_n)]$$

муносабатни топамиз. Бундан ва (4) дан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$\mu(F) > \mu(E_N) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \mu(E_N) - \varepsilon. \qquad (5)$$

Ҳар қандай n натурал сон учун

$$F_n \supset F$$

муносабат бажарилганлиги сабабли $f_n(x)$ функция F тўпламда узлуксиз бўлади ва қуйидаги

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n} \quad (x \in F)$$

тенгсизлик бажарилади. Сўнгги тенгсизлик F тўпламнинг ҳар қандай элементи учун ўринли; демак, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги F тўпламда узлуксиз ва унда $f(x)$ функцияга текис яқинлашади.

30.1-теоремага асосан $f(x)$ функция F тўпламда узлуксиз бўлади ва (1), (5) муносабатларга асосан

$$\mu(F) > \mu(E_N) - \varepsilon > \mu(E) - 2\varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади.*

Баъзи муаллифлар функциянинг Лузин теоремасида ифодаланган хоссасини ўлчовли функциянинг таърифи сифатида оладилар ва ундан функциянинг Лебег маъносида ўлчовли эканлигини келтириб чиқарадилар.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Агар $f(x)$ функция ўлчовли E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда унинг мусбат қисми $f^+ = \max\{f, 0\}$ ва манфий қисми $f^- = -\min\{f, 0\}$ ҳам шу тўпламда ўлчовли бўлишини исботланг.

2. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда қуйидаги функцияларнинг ҳам ўлчовли бўлишини исботланг:

а) $H(x) = \max\{f(x), g(x)\}$;
б) $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$;
в) агар $f(x) > 0$ бўлса, $\varphi(x) = (f(x))^{g(x)}$.

3. $f(x)$ функция ўлчовли E тўпламда ўлчовли бўлсин. Ушбу

$$\varphi(t) = \mu[E\{x \in E: f(x) < t\}]$$

функциянинг камаймайдиган ва чапдан узлуксизлигини, ушбу

$$\varphi(t) = \mu[E\{x \in E: f(x) > t\}]$$

функциянинг эса ўсмайдиган ва ўнгдан узлуксизлигини исботланг.

4. Агар $f^2(x)$ ўлчовли бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг ўлчовли бўлиши шарт эмас. Шунга мисол келтиринг.

5. $[0, 1]$ да аниқланган ўлчовли $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган ва $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ тенгсизлик ўринли бўлсин. Бу функцияларнинг суперпозицияси $g(f(x))$ ўлчовлими?

6. $[0, 1]$ да ўлчовли ва деярли чекли $f(x)$ функция берилган. $[0, 1]$ да аниқланган камаювчи шундай $g(x)$ функция мавжудки, ҳар қандай a учун

$$\mu(E\{g > a\}) = \mu(E\{f > a\})$$

тенглик ўринли. Исботланг.

7. $[0, 1]$ да аниқланган ўлчовли ва деярли чекли $f(x)$ функция берилган. Ушбу

$$\mu(E\{f \geqslant h\}) \geqslant \frac{1}{2}, \ \mu(E\{f \geqslant H\}) < \frac{1}{2}, \ H > h$$

шартларни қаноатлантирувчи h соннинг мавжудлиги ва ягоналигини исботланг (Л. В. Канторович масаласи).

VII боб

ЛЕБЕГ ИНТЕГРАЛИ

Математик анализ курсидан маълум бўлган Риман интеграли тушунчасига назар ташласак, унда Риман интегралининг баъзи бир синф функциялари учун мавжуд эмаслигини кўрамиз. Бунга мисол келтиришдан олдин Риман интегралининг таърифига тўхталиб ўтамиз: Агар $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция берилган бўлса, Риманнинг ғояси бўйича $[a, b]$ сегмент, узунликлари $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ бўлган n та бўлакка бўлинар эди ва ҳар бир бўлакчадан ихтиёрий ξ_k нуқта танланиб, қуйидаги интеграл йиғинди

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta_k$$

тузилар эди. Бунда, $n \to \infty$ да $(\max\limits_{1<k<n} \Delta_k \to 0)$ S_n кетма-кетликнинг лимити мавжуд бўлса ва бу лимит $[a, b]$ сегментни бўлакчаларга бўлиш усулига ҳамда ҳар бир бўлакчадан ξ_k нуқталарнинг танланишига боғлиқ бўлмаса, бу лимит $f(x)$ функциядан $[a, b]$ сегмент бўйича олинган Риман интеграли дейилар эди.

Агарда $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция сифатида Дирихле функциясини олсак, яъни

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ — рационал бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ — иррационал бўлса,} \end{cases}$$

у ҳолда юқорида келтирилган Риман таърифи бўйича бу функциянинг интеграли мавжуд бўлмайди. Ҳақиқатан, агар Δ_k бўлакчаларнинг ҳар биридан ξ_k нуқта рационал қилиб танланса, $S_n = 0$, яъни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$ бўлади. Агарда Δ_k бўлакчаларнинг ҳар биридан ξ_k нуқта иррационал қилиб танланса, $S_n = b - a$, яъни

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b - a$$

бўлади. Кўрамизки, S_n кетма-кетликнинг лимити Δ_k бўлакчалардан ξ_k нуқтани танлашга боғлиқ.

Бу каби мисолларни кўплаб келтириш мумкин.

Кўрамизки, Риман интеграли тушунчасини математикада кўплаб ишлатиладиган муҳим функцияларга татбиқ қилиб бўлмайди. Шу сабабли Риман интеграли тушунчасини кенгайтириш масаласи туғилади. Бу масала билан кўп математиклар шуғулланиб, Риман интегралининг турли умумлаштиришларини топишган. Буларнинг ичида энг муҳими Лебег томонидан киритилган интеграл тушунчасидир.

Лебег интегралининг асосий ғояси шундаки, у функциянинг аниқланиш соҳаси бўлган $[a, b]$ сегментни бўлакларга бўлаётганда аргумент қийматларнинг яқинлигини эмас, балки функция қийматларининг яқинлигини ҳисобга олади. Бу ғоя бир йўла Риман интеграли мавжуд бўлган функциялар синфидан кенгроқ функциялар синфи учун интеграл тушунчасини аниқлашга имкон беради. Риман ва Лебег ғояларини бошқача яна қуйидагича ҳам солиштириш мумкин. Айтайлик, $[a, b]$ сегментнинг узунлигига тенг бўлган ипга ихтиёрий равишда ҳар хил қийматли тангалар текис тизилган дейлик. Шу тангаларнинг умумий қийматини ҳисоблаш учун Риман уларнинг ҳар бирининг қийматини ипда жойлашиш тартибида қўшиш усулини қўлласа, Лебег эса аввало уларнинг бир хил қийматлиларини гуруҳлаб, сўнг уларни қўшиш усулини қўллайди. Юзаки қараганда бу икки усулда ҳисоблашларнинг бир-биридан устунлиги сезилмаса-да, қуйида биз Лебег усулининг катта имкониятларга эга эканлигини кўрамиз.

35- §. Чегараланган функциянинг Лебег интеграли

Аввало Лебег интегралини $[a, b]$ сегментдаги ўлчовли E тўпламнинг характеристик функцияси учун аниқлаймиз.

Ушбу

$$f_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \overline{\in} E \end{cases}$$

функцияни E тўпламнинг *характеристик функцияси* дейилади. $f_E(x)$ функциянинг *Лебег интеграли* деб $\mu(E)$ сонга (яъни E тўпламнинг ўлчовига) айтилади ва қуйидагича белгиланади:

$$(L) \int_E f_E(x)\,dx = \mu(E).$$

Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} k, & x \in E, \\ 0, & x \overline{\in} E \end{cases}$$

функция учун эса Лебег интегралини

$$(L) \int_E f(x)\,dx = k\,\mu(E)$$

тенглик билан аниқлаймиз.

Умумий ҳолга ўтиш учун A ва B билан ўлчовли E тўпламда аниқланган $f(x)$ функциянинг мос равишда аниқ қуйи ва аниқ юқори чегараларини белгилаймиз ҳамда $[A, B]$ сегментни қуйидагича n қисмга бўламиз:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B.$$

Сўнгра

$$e_\nu \quad (\nu = \overline{0, n-1})$$

билан

$$y_\nu \leqslant f(x) < y_{\nu+1}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган x нуқталардан иборат тўпламни белгилаймиз. $f(x)$ функция ўлчовли бўлганлиги учун e_ν ($\nu = \overline{0, n-1}$) тўпламлар ўлчовли бўлади.

Энди ушбу

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu \mu(e_\nu), \qquad S = \sum_{\nu=0}^{n-1} y_{\nu+1} \mu(e_\nu)$$

йиғиндиларни тузамиз (s ва S ни мос равишда *қуйи ва юқори йиғиндилар* дейилади) ва қуйидаги таърифни киритамиз:

Таъриф. *Агар* $\lambda_n \left(= \max\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant n-1} [y_{\nu+1} - y_\nu]\right)$ *нолга интилганда* ($n \to \infty$) s *ва* S *йиғиндиларнинг лимити мавжуд бўлиб, бир-бирига тенг бўлса ва бу лимит* y_ν *нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда бу лимитни* $f(x)$ *функциянинг* E *тўпламдаги Лебег интеграли дейилади ва бу интеграл юқоридаги хусусий ҳоллар каби ушбу* $(L) \int\limits_E f(x)\,dx$ *кўринишда белгиланади.*

Теорема. *Агар* $f(x)$ *функция ўлчовли* E *тўпламда ўлчовли ва чегараланган бўлса, у ҳолда унинг учун Лебег интеграли мавжуддир.*

Исбот. Чегараланган ва ўлчовли $f(x)$ функцияни олиб, унинг учун s ва S йиғиндиларнинг умумий лимитга эга эканлигини кўрсатамиз. Бу функция чегараланганлиги учун унинг аниқ қуйи ва аниқ юқори чегаралари мавжуд; улар мос равишда A ва B бўлсин. $[A, B]$ сегментни икки усул билан қуйидагича n_1 ва n_2 қисмларга бўламиз:

$$A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n_1-1} < y_{n_1} = B, \tag{1}$$

$$A = y_0' < y_1' < y_2' < \ldots < y_{n_2-1}' < y_{n_2}' = B. \tag{2}$$

Агар

$$\lambda_{n_1} = \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n_1-1} (y_{\nu+1} - y_\nu), \quad \lambda_{n_2} = \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n_2-1} (y_{\nu+1}' - y_\nu'),$$

$$\lambda = \max\{\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}\}$$

белгилашларни киритсак, у ҳолда бўлиниш нуқталари учун ушбу

$$\begin{cases} y_{\nu+1} - y_{\nu} \leqslant \lambda & (\nu = \overline{0, n_1 - 1}), \\ y'_{\nu+1} - y'_{\nu} \leqslant \lambda & (\nu = \overline{0, n_2 - 1}) \end{cases}$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу тенгсизликлардан қуйидаги муносабатлар келиб чиқади:

$$S - s = \sum_{\nu=0}^{n_1-1} (y_{\nu+1} - y_{\nu}) \mu (e_{\nu}) \leqslant \lambda \sum_{\nu=0}^{n_1-1} \mu (e_{\nu}) = \lambda \mu (E),$$

$$S' - s' = \sum_{\nu=0}^{n_2-1} (y'_{\nu+1} - y'_{\nu}) \mu (e'_{\nu}) \leqslant \lambda \sum_{\nu=0}^{n_2-1} \mu (e'_{\nu}) = \lambda \mu (E),$$

бу ерда s' ва S' сонлар (2) бўлиниш учун тузилган қуйи ва юқори йиғиндилар. Энди (1) ва (2) бўлиниш нуқталарини, яъни y_{ν}, y'_{ν} нуқталарнинг ҳаммасини бўлувчи нуқталар сифатида оламиз ва тегишли s'', S'' йиғиндиларни тузамиз. Бунинг натижасида s ва s' йиғиндилар камаймайди. S ва S' йиғиндилар эса ортмайди, яъни

$$\begin{gathered} s \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S, \\ s' \leqslant s'' \leqslant S'' \leqslant S' \end{gathered} \tag{3}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Дарҳақиқат, агар $(y_{\nu}, y_{\nu+1})$ оралиқни бирорта янги ξ нуқта ёрдами билан (y_{ν}, ξ), $(\xi, y_{\nu+1})$ оралиқларга бўлсак, у ҳолда ушбу

$$y_{\nu} \mu (e_{\nu}) \leqslant y_{\nu} \mu \{E (y_{\nu} \leqslant f < \xi)\} + \xi \mu \{E (\xi \leqslant f < y_{\nu+1})\}$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан кўринадики, $s \leqslant s''$, яъни қўшимча бўлиниш нуқталари киритилиши натижасида қуйи йиғинди камаймайди.

Шунга ўхшаш ушбу

$$y_{\nu+1} \mu (e_{\nu}) \geqslant \xi \mu \{E (y_{\nu} \leqslant f < \xi)\} + y_{\nu+1} \mu \{E (\xi \leqslant f < y_{\nu+1})\}$$

тенгсизликни ҳам ёзишимиз мумкин; бундан кўринадики, янги нуқтани киритиш натижасида S йиғиндининг тегишли ҳади ортмас экан, демак, S юқори йиғиндининг ўзи ҳам ортмайди.

(3) муносабатлардан кўринадики, (s, S) ва (s', S') оралиқлар (s'', S'') оралиқдан иборат умумий қисмга эга экан. Демак, s, s', S ва S' сонларнинг ҳаммаси узунлиги $2\lambda\mu(E)$ дан катта бўлмаган оралиқда жойлашгандир. λ ни истаганча кичик қилиш мумкинлигидан ва математик анализдаги умумий яқинлашиш принципига мувофиқ s, S йиғиндиларнинг умумий лимитга эга эканлиги келиб чиқади.

Демак, юқорида берилган таърифга мувофиқ ҳар қандай чегараланган ўлчовли $f(x)$ функция учун Лебег интеграли доимо мавжуд.*

36- §. Чегараланган функция Лебег интегралининг асосий хоссалари

Бу параграфда учрайдиган барча ўлчовли функциялар чегараланган деб ҳисобланади.

36.1-теорема (ўрта қиймат ҳақида). *Агар E тўпламда ўлчовли $f(x)$ функция учун $m \leqslant f(x) \leqslant M$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда*[1]

$$m \leqslant \mu(E) \int_E f(x)\,dx \leqslant M\,\mu(E).$$

Исбот. s ва S йиғиндиларнинг тузилишига мувофиқ ушбу

$$m\mu(E) \leqslant s \leqslant S \leqslant M\mu(E)$$

тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларда тегишли лимитга ўтилса, юқоридаги муносабатлар келиб чиқади.*

Лебег интегралининг қуйидаги 36.2, 36.3 ва 36.4-хоссалари унинг таърифидан ва 36.1-теоремадан бевосита келиб чиқади.

36.2-натижа. *Агар ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда манфий бўлмаса, у ҳолда унинг бу тўплам бўйича интеграли ҳам манфий бўлмайди, яъни агар $f(x) \geqslant 0$ бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant 0.$$

36.3-натижа. *Агар E тўпламнинг ўлчови ноль бўлса* (яъни $\mu(E) = 0$), *у ҳолда ҳар қандай чегараланган ўлчовли $f(x)$ функция учун*

$$\int_E f(x)\,dx = 0$$

бўлади.

36.4-натижа. *Агар c ўзгармас сон бўлса, у ҳолда*

$$\int_E c f(x)\,dx = c \int_E f(x)\,dx.$$

36.5-теорема. *Агар E, E_i, $i = \overline{1, \infty}$ ўлчовли тўплам-*

---

[1] Интеграл символи олдида L ҳарфи ёзилмаган бўлсада, келгусида у интегрални Лебег интеграли деб тушунамиз.

лар бўлиб, $E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\,(E_k\cap E_s=\varnothing,\ k\neq s)$ ва $f(x)$ *функция* E *тўпламда ўлчовли бўлса, у ҳолда*

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{E_i} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Интегралнинг бу хоссаси унинг *тўла аддитивлиги* дейилади.

Исбот. Аввал ушбу

$$E=E_1\cup E_2\ \ (E_1\cap E_2=\varnothing)$$

хусусий ҳолни кўрамиз. $f(x)$ функция E тўпламда чегараланганлиги учун шундай A ва B сонлар мавжудки, улар учун ушбу

$$A\leqslant f(x)\leqslant B$$

тенгсизликлар бажарилади. $[A,\,B]$ сегментни $y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n$ нуқталар билан n қисмга бўлиб, қуйидаги тўпламларни тузамиз:

$$e_\nu=E\,(y_\nu\leqslant f(x)<y_{\nu+1}),$$

$$e'_\nu=E_1\,(y_\nu\leqslant f(x)<y_{\nu+1}),$$

$$e''_\nu=E_2(y_\nu\leqslant f(x)<y_{\nu+1}).$$

Ушбу $e'_\nu\cup e''_\nu=e_\nu$ ва $e'_\nu\cap e''_\nu=\varnothing$ тенгликлар ўз-ўзидан тушунарли. Булардан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu\,\mu(e_\nu)=\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu\,\mu(e'_\nu)+\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\nu\,\mu(e''_\nu).$$

Бу тенгликда $\lambda_n=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant n-1}(y_{\nu+1}-y_\nu)$ ни нолга интилтириб, лимитга ўтилса, Лебег интегралининг таърифига мувофиқ

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\int\limits_{E_1} f(x)\,dx+\int\limits_{E_2} f(x)\,dx$$

тенглик келиб чиқади.

Агар $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ (n — натурал сон) ва $E_i\cap E_j=\varnothing$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{E_i} f(x)\,dx \qquad (2)$$

тенгликни юқоридаги хусусий ҳолдан математик индукция ёрдами билан бевосита келтириб чиқарилади.

Энди умумий ҳолга ўтамиз, яъни

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\ (E_k\cap E_s=\varnothing,\ k\neq s)$$

бўлсин. Бундан $\mu(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ келиб чиқади. $\mu(E)<+\infty$ бўлганлиги учун $n\to\infty$ да

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\mu(E_i)\to 0. \tag{3}$$

Энди $\bigcup_{i=n+1}^{\infty}E_i$ тўпламни R_n билан белгилаймиз. У ҳолда $E=$ $=E_1\cup\ldots\cup E_n\cup R_n$. Бу тенгликда ҳадларнинг сони чекли бўлгани учун (2) тенгликка асосан

$$\int_E f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}f(x)\,dx+\int_{R_n}f(x)\,dx. \tag{4}$$

36.1-теоремага мувофиқ,

$$A\mu(R_n)\leqslant\int_{R_n}f(x)\,dx\leqslant B\mu(R_n). \tag{5}$$

(3) га асосан $n\to\infty$ да $\mu(R_n)\to 0$. Демак, (5) дан $n\to\infty$ да

$$\int_{R_n}f(x)\,dx\to 0.$$

(4) ва охирги муносабатдан (1) тенглик келиб чиқади.*

36.6-теорема. *Агар ўлчовли E тўпламда ўлчовли $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар берилган бўлса, у ҳолда*

$$\int_E(f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int_E f_1(x)\,dx+\int_E f_2(x)\,dx. \tag{6}$$

Исбот. Аввал қуйидаги хусусий ҳолни кўрамиз: $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялардан бири, масалан, $f_1(x)$ функция E тўпламда ўзгармас c сонга тенг бўлсин. Бу ҳолда Лебег интеграли таърифидан фойдаланиб, ушбу

$$\int_E(f_1(x)+f_2(x))\,dx=c\mu(E)+\int_E f_2(x)\,dx \tag{7}$$

тенгликни ёзишимиз мумкин.

Энди $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ ихтиёрий чегараланган ўлчовли функциялар бўлсин. $f_1(x)$ функциянинг қийматлари ўзгарадиган $[A, B]$ сегментни $y_0, y_1, \ldots y_n$ нуқталар ёрдами билан n та қисмга бўламиз ва ушбу

$$e_\nu = E(y_\nu \leqslant f_1(x) < y_{\nu+1}) \quad (\nu = \overline{0, n-1})$$

тўпламларни кўрамиз. 36.5- теоремадан ва (7) тенгликдан фойдаланиб, ушбу

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{e_\nu} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{e_\nu} [y_\nu + f_2(x)]\,dx = S + \int_E f_2(x)\,dx$$

муносабатларни оламиз.

Шунга ўхшаш, y_ν ўрнига $y_{\nu+1}$ ёзилса, ушбу

$$\int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx \leqslant S + \int_E f_2(x)\,dx$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак,

$$S + \int_E f_2(x)\,dx \leqslant \int_E [f_1(x) + f_2(x)]\,dx \leqslant S + \int_E f_2(x)\,dx.$$

Энди бу муносабатларнинг чап ва ўнг томонида $\lambda_n (= \max\limits_{0 \leqslant \nu \leqslant n-1}(y_{\nu+1} - y_\nu))$ ни нолга интилтириб лимитга ўтилса, (6) тенглик келиб чиқади.*

Интегралнинг 36.3, 36.5 ва 36.6- хоссаларидан қуйидаги натижа келиб чиқади.

36.7-натижа. *Агар ўлчовли $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар E тўпламда эквивалент бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$$

Исбот. Дарҳақиқат, $e = E(f(x) \neq g(x))$ деб олсак, f ва g функциялар эквивалент бўлгани учун $\mu(e) = 0$. У ҳолда $E \setminus e$ тўпламда $f(x) \equiv g(x)$ бўлади. 36.5- теоремага асосан

$$\int_E (f - g)\,dx = \int_e (f - g)\,dx + \int_{E \setminus e} (f - g)\,dx$$

тенглик ўринли. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги биринчи интеграл нолга тенг, чунки $\mu(e) = 0$. Иккинчи интеграл ҳам нолга тенг, чунки $E \setminus e$ тўпламда $f(x) \equiv g(x)$.*

36.8-теорема. *Агар ўлчовли E тўпламда ўлчовли $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар берилиб, бу тўпламда $f(x) \leqslant \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \int_E \varphi(x)\,dx. \tag{8}$$

Исбот. $f(x)$ функцияга тегишли y_ν бўлиш нуқталарини олиб, e_ν тўпламларни тузамиз. e_ν тўпламда ушбу $\varphi(x) \geqslant f(x) \geqslant \geqslant y_\nu$ тенгсизликлар бажарилади.

Демак,

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \sum_\nu \int_{e_\nu} \varphi(x)\,dx \geqslant \sum_\nu y_\nu\,\mu(e_\nu).$$

Бу муносабатнинг ўнг томонидаги йиғинди $\int_E f(x)\,dx$ га интилади, шунинг учун бундан (8) тенгсизлик келиб чиқади.*

36.9-теорема. *Қуйидаги тенгсизлик ўринли:*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx. \tag{9}$$

Исбот. Ушбу

$$E_1 = E\{f(x) \geqslant 0\},\quad E_2 = E\{f(x) < 0\}$$

тўпламларни оламиз.

Энди (9) тенгсизлик

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| = \left|\int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} |f(x)\ |\ dx\right| \leqslant \int_{E_1} f(x)\,dx + \\ + \int_{E_2} |f(x)|\,dx,\quad \int_E |f(x)|\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} |f(x)|\,dx$$

муносабатларнинг чап ва ўнг томонларини солиштиришдан бевосита келиб чиқади.*

36.10-теорема. *Агар $f(x) \geqslant 0$ ва $\int_E f(x)\,dx = 0$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда деярли нолга тенг.*

Исбот. M сон $f(x)$ функциянинг юқори чегараси бўлсин. Ушбу

$$E_n = E\left\{\frac{M}{n+1} < f(x) \leqslant \frac{M}{n}\right\},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$E_+ = E_1 \cup E_2 \cup \ \ldots$$

тўпламларни тузамиз. Равшанки, $E\{x: f(x) > 0\} = E_+$ ва ушбу

$$\mu(E_n) \leqslant \frac{n+1}{M}\int\limits_{E_n} f(x)\,dx \leqslant \frac{n+1}{M}\int\limits_{E_+} f(x)\,dx \leqslant \frac{n+1}{M}\int\limits_{E} f(x)\,dx = 0$$

муносабатлар ўринли. Демак, $\mu(E_n)=0$ $(n=1,\ 2,\ \dots)$. Бундан

$$\mu(E_+) = 0.*$$

37-§. Лебег интеграли остида лимитга ўтиш

Ўлчовли E тўпламда аниқланган ўлчовли ва чегараланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, бу кетма-кетлик ўлчовли $F(x)$ функцияга E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида ё деярли ёки ўлчов бўйича яқинлашувчи бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E F(x)\,dx \qquad (1)$$

муносабат доимо ўринлими, деган савол туғилади. Бу муносабатнинг, умуман айтганда, доимо ўринли эмаслигини қуйидаги мисолдан кўриш мумкин.

Масалан, $f_n(x)$ функция $[0,\ 1]$ сегментда қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} \left(0,\ \frac{1}{n}\right), \\ n, & x \in \left(0,\ \frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

У ҳолда ҳар қандай $x \in [0,\ 1]$ учун ушбу

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

тенглик ўринлидир, лекин

$$\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1,$$

яъни (1) муносабат бажарилмас экан.

Энди, $f_n(x)$ функциялар кетма-кетлиги қандай шартларни қаноатлантирганда (1) муносабат ўринли бўлади, деган савол туғилади. Бу саволга А. Лебегнинг қуйидаги теоремаси жавоб беради:

37.1-теорема (А. Лебег). *Ўлчовли E тўпламда ўлчовли ва чегараланган $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, бу кетма-кетлик ўлчовли $F(x)$ функцияга ўлчов бўйи-*

ча яқинлашувчи бўлсин. Агар E тўпламнинг барча элементлари учун ва ҳар қандай n натурал сон учун ушбу

$$|f_n(x)| < K$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган K сон мавжуд бўлса, у ҳолда бундай функциялар кетма-кетлиги учун (1) муносабат ўринли.

Исбот. Дастлаб E тўпламда ушбу

$$|F(x)| \leqslant K \tag{2}$$

тенгсизликнинг деярли бажарилишини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликдан 33.5-Рисс теоремасига асосан шундай $\{f_{n_k}(x)\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкинки, у $F(x)$ функцияга деярли яқинлашади.

Энди

$$|f_{n_k}(x)| < K$$

тенгсизликда лимитга ўтилса, (2) муносабат келиб чиқади. Ихтиёрий $\sigma > 0$ сон учун

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - F| \geqslant \sigma);$$

$$B_n(\sigma) = E(|f_n - F| < \sigma)$$

тўпламларни тузамиз. У ҳолда

$$\left|\int_E f_n(x) - \int_E F(x)\,dx\right| \leqslant \int_E \left|f_n(x) - F(x)\right| dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} \left|f_n(x) - F(x)\right| dx + \int_{B_n(\sigma)} \left|f_n(x) - F(x)\right| dx. \tag{3}$$

$A_n(\sigma)$ тўпламда

$$|f_n(x) - F(x)| < 2K$$

тенгсизлик деярли бажарилганлиги учун ушбу

$$\int_{A_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx \leqslant 2K\mu(A_n(\sigma)) \tag{4}$$

муносабат ўринли. Иккинчи томондан, 36.1-теоремага асосан

$$\int_{B_n(\sigma)} |f_n(x) - F(x)|\,dx \leqslant \sigma\mu(B_n(\sigma)) \leqslant \sigma\mu(E).$$

(3), (4) ва охирги муносабатлардан:

$$\left|\int_E f_n(x)\,dx - \int_E F(x)\,dx\right| \leqslant 2K\mu(A_n(\sigma)) + \sigma\mu(E). \tag{5}$$

Ихтиёрий кичик $\varepsilon > 0$ сон учун $\sigma > 0$ сонни

$$\sigma < \frac{\varepsilon}{2\mu(E)} \tag{6}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб оламиз. Теореманинг шартига мувофиқ, ҳар қандай $\sigma > 0$ учун $n \to \infty$ да

$$\mu(A_n(\sigma)) \to 0.$$

Демак, шундай n_0 натурал сон мавжудки, ушбу

$$2K\mu(A_n(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geqslant n_0) \tag{7}$$

муносабат ўринли.

Энди (5) тенгсизликдан (6), (7) ларга мувофиқ қуйидаги тенгсизликни оламиз:

$$\left|\int_E f_n(x)\,dx - \int_E F(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad (n \geqslant n_0).$$

Бу муносабат эса теоремани исботлайди.$_*$

37.2-изоҳ. Агар теореманинг шартида $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $F(x)$ га деярли яқинлашса ва $|f_n(x)| < K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тенгсизлик E тўпламда деярли бажарилса, у ҳолда теорема ўз кучини сақлайди. Чунки бу ҳолда 33.3-теоремага асосан $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $F(x)$ функцияга ўлчов бўйича ҳам яқинлашади.

38-§. Чегараланмаган функциянинг Лебег интеграли. Жамланувчи функциялар

Ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда аниқланган бўлсин. Аввал $f(x)$ ни E тўпламда манфий эмас, яъни $f(x) \geqslant 0$ деб фараз қиламиз ва ушбу

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{агар } f(x) \leqslant n \text{ бўлса,} \\ n, & \text{агар } f(x) > n \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни тузамиз. Бу функция E тўпламда чегараланган ва демак унинг Лебег интеграли мавжуд.

1-таъриф. *Агар*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E [f(x)]_n\,dx \tag{1}$$

мавжуд бўлса, бу лимитни $f(x)$ *функциянинг* E *тўпламдаги Лебег интеграли дейилади ва у* $\int_E f(x)\,dx$ *орқали белгиланади.*

E тўпламда ўлчовли ва мусбат $f(x)$ функция Лебег интегралига эга бўлиши учун

$$\int_E [f(x)]_n \, dx$$

интегралларнинг чегараланган бўлиши зарур ва кифоядир, чунки

$$\int_E [f(x)]_n \, dx \leqslant \int_E [f(x)]_{n+1} \, dx$$

тенгсизлик n нинг ҳамма қийматлари учун бажарилади.

Манфий функцияларнинг Лебег интеграли ҳам худди шунга ўхшаш аниқланади.

Энди умумий ҳолни, яъни ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда ҳар хил ишорали қийматларни қабул қиладиган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда E тўпламни қуйидагича икки ўзаро кесишмайдиган E_1 ва E_2 қисмларга ажратамиз:

$$\begin{aligned} E_1 &= E\,\{f(x) \geqslant 0\}, \\ E_2 &= E\,\{f(x) < 0\}, \end{aligned} \tag{2}$$

яъни E_1 нинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ функция манфий эмас, E_2 нинг ҳар бир нуқтасида эса $f(x)$ функция манфий.

2-таъриф. *Агар $f(x)$ функция учун ушбу*

$$\int_{E_1} f(x)\, dx, \quad \int_{E_2} f(x)\, dx$$

интегралларнинг ҳар бири мавжуд бўлса, у ҳолда $f(x)$ функцияни E тўпламда жамланувчи дейилади ва E тўплам бўйича интеграли ушбу

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{E_1} f(x)\, dx + \int_{E_2} f(x)\, dx \tag{3}$$

тенглик билан аниқланади.

Жамланувчи функцияларнинг баъзи хоссалари билан танишамиз.

38.1-теорема. *Ўлчовли $f(x)$ функциянинг жамланувчи бўлиши учун $|f(x)|$ функциянинг жамланувчи бўлиши зарур ва кифоядир; $|f(x)|$ жамланувчи бўлган ҳолда ушбу*

$$\left| \int_E f(x)\, dx \right| \leqslant \int_E |f(x)|\, dx$$

муносабат ўринли.

Исбот. Зарурийлиги. Ўлчовли $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлсин. $|f(x)|$ функциянинг жамланувчи эканини кўрсатамиз. Берилган $f(x)$ функция учун (2) даги E_1

ва E_2 тўпламларни тузамиз. $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлгани учун 2-таърифга асосан бу функция E_1 ва E_2 тўпламларда ҳам жамланувчи. Бундан ва ушбу

$$\int_E |f(x)|\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} f(x)\,dx$$

тенгликдан $|f(x)|$ функциянинг ҳам жамланувчи эканлиги келиб чиқади.

Кифоялиги. $|f(x)|$ функция E тўпламда жамланувчи бўлсин. $f(x)$ функциянинг ҳам шу тўпламда жамланувчи эканлигини кўрсатамиз. Ушбу тенгсизлик ўринли:

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} f(x)\,dx = \int_E |f(x)|\,dx.$$

Чунки $f(x)$ функция E_2 тўпламда манфий. Бундан ва $|f(x)|$ нинг жамланувчи эканлигидан $f(x)$ нинг ҳам жамланувчи эканлиги келиб чиқади. Теореманинг охирги натижаси ушбу тенгсизликдан келиб чиқади:

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| = \left|\int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{E_1} f(x)\,dx - \int_{E_2} f(x)\,dx\right| = \int_E |f(x)|\,dx._*$$

Қуйидаги 38.2—38. 6-теоремалар 38.1-теоремага ўхшаш осон исбот этилади. Бу теоремаларда учрайдиган функциялар ўлчовли деб ҳисобланади.

38.2-теорема. *Агар k ўзгармас сон бўлса, у ҳолда*

$$\int_E kf(x)\,dx = k\int_E f(x)\,dx.$$

Исбот. 1-таърифга асосан

$$\int_E kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E [kf(x)]_n\,dx.$$

36.4-натижага асосан

$$\int_E [kf(x)]_n\,dx = k\int_E [f(x)]_n\,dx.$$

Бундан

$$\int_E kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E [kf(x)]_n\,dx =$$

$$= k \lim_{n\to\infty} \int_E [f(x)]_n \, dx = k \int_E f(x)\, dx._*$$

38.3-**теорема.** *Агар $f \sim g$ бўлиб, булардан бири жамланувчи бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам жамланувчи бўлади ва*

$$\int_E f(x)\, dx = \int_E g(x)\, dx.$$

Исбот. $f \sim g$ бўлгани учун E тўпламда $[f(x)]_n \sim [g(x)]_n$ муносабат ҳам ўринли. Фараз қилайлик $f(x)$ функциянинг интеграли мавжуд бўлсин. У ҳолда $\int\limits_E f(x)\, dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_n dx$ бўлиб, 36.7-натижага асосан

$$\int_E [f(x)]_n \, dx = \int_E [g(x)]_n \, dx.$$

Бундан

$$\int_E [f(x) - g(x)]\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \{[f(x)]_n - [g(x)]_n\}\, dx = 0$$

тенглик келиб чиқади.$_*$

38.4-**теорема.** *Агар* $f(x) \geqslant 0$ ва $\int\limits_E f(x)\, dx = 0$ *бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда деярли нолга тенг.*

Исбот. $E_+ = \{x \in E : f(x) > 0\}$ бўлсин. Ушбу

$$E_n = \{x \in E : f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}, \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

тўпламларни тузамиз. Равшанки, $E_+ = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Энди

$$\mu(E_n) = \int_{E_n} dx \leqslant n \int_{E_n} f(x)\, dx < n \int_E f(x)\, dx = 0.$$

Демак $\mu(E_n) = 0$. Бундан ва $\mu(E_+) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ тенгсизликдан $\mu(E_+) = 0$ келиб чиқади.$_*$

38.5-**теорема.** *Агар $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E нинг ҳар қандай ўлчовли E_0 қисмида ҳам жамланувчи бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи бўлганлиги учун 38.1-теоремага асосан $|f(x)|$ функция ҳам E тўпламда жамланувчи. Агар E_0 тўплам E тўпламнинг ихтиёрий ўлчовли қисми бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{E_0} \left| f(x) \right| dx \leqslant \int\limits_{E} \left| f(x) \right| dx$$

тенгсизликдан $|f(x)|$ функциянинг E_0 тўпламда жамланувчи эканлиги келиб чиқади. Демак, 38.1-теоремага асосан $f(x)$ функция ҳам E_0 да жамланувчи. $*$

38.6-теорема. *E тўпламдаги ўлчовли $f(x)$ ва $F(x)$ функциялар учун $|f(x)| \leqslant F(x)$ $(x \in E)$ тенгсизлик ўринли бўлиб, $F(x)$ жамланувчи бўлсин. У ҳолда $f(x)$ ҳам жамланувчи ва*

$$\int\limits_{E} |f(x)| dx \leqslant \int\limits_{E} F(x) dx.$$

Исбот. Ҳар қандай n натурал сон учун

$$[|f(x)|]_n \leqslant F(x)$$

тенгсизлик ўринли бўлганлиги туфайли 38.8-теоремага асосан

$$\int\limits_{E} [|f(x)|]_n \, dx \leqslant \int\limits_{E} F(x) dx.$$

Бундан $n \to \infty$ да

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{E} [|f(x)|]_n \, dx \leqslant \int\limits_{E} F(x) dx$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, 1-таърифга асосан $|f(x)|$ функция E тўпламда жамланувчи. Юқоридаги тенгсизликдан

$$\int\limits_{E} |f(x)| \, dx \leqslant \int\limits_{E} F(x) \, dx.$$

Энди $f(x)$ функциянинг жамланувчи эканлиги 38.1-теоремадан келиб чиқади. $*$

38.7-теорема (интегралнинг тўла аддитивлиги). *Агар $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи ва E ўзаро кесишмайдиган сони саноқли, ўлчовли $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots, E_k \cap E_{k'} = \varnothing$, $k \neq k'$ тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда*

$$\int\limits_{E} f(x) \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{E_i} f(x) \, dx.$$

Исбот. Аввало теоремани $f(x) \geqslant 0$ бўлган ҳол учун исботлаймиз. Бу ҳолда $f(x)$ функция ва ихтиёрий n натурал сон учун $[f(x)]_n$ функцияни тузамиз. У ҳолда 36.5-хоссага асосан

$$\int\limits_E [f(x)]_n\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f(x)]_n dx$$

муносабат ўринли. Бундан 38.6-хоссага асосан

$$\int\limits_E [f(x)]_n\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\, dx$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизликдан $n \to \infty$ да лимитга ўтиб,

$$\int\limits_E f(x)\, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\, dx \tag{4}$$

муносабатни оламиз. Иккинчи томондан, 36.5-теоремага асосан

$$\int\limits_E [f(x)]_n\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} [f(x)]_n\, dx.$$

Бундан E тўпламда $f(x) \geqslant 0$ бўлгани учун ҳар қандай m натурал сон учун ушбу

$$\int\limits_E [f(x)]_n\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{E_k} [f(x)]_n\, dx$$

муносабат ўринли. Бу муносабатда аввал n ни, сўнг m ни чексизга интилтириб, ушбу

$$\int\limits_E f(x)\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)\, dx \tag{5}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз, (4) ва (5) тенгсизликлардан, $f(x) \geqslant 0$, $x \in E$ ҳол учун теореманинг исботи келиб чиқади. $f(x) < 0$ бўлган ҳол учун ҳам теорема худди шунга ўхшаш исбот этилади.

Умумий ҳолда теореманинг исботи (3) формуладан ва юқорида кўрилган ҳоллардан бевосита келиб чиқади. *

38.8-теорема. *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар E тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда уларнинг $f(x) + g(x)$ йиғиндиси ҳам жамланувчи ва*

$$\int\limits_E (f(x) + g(x))\, dx = \int\limits_E f(x)\, dx + \int\limits_E g(x)\, dx.$$

Исбот. 1. Қисқалик учун $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ белгилаш киритамиз. Аввал $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар манфий бўлмаган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда $[\varphi]_n \leqslant [f]_n + [g]_n \leqslant [\varphi]_{2n}$ бўлади. Демак,

$$\int_E [\varphi]_n \, dx \leqslant \int_E [f]_n \, dx + \int_E [g]_n \, dx \leqslant \int_E [\varphi]_{2n} \, dx.$$

Бундан $n \to \infty$ да ушбу

$$\int_E \varphi(x) \, dx \leqslant \int_E f(x) \, dx + \int_E g(x) \, dx \leqslant \int_E \varphi(x) \, dx$$

муносабатлар келиб чиқади. Шу билан кўрилаётган хусусий ҳол учун теорема исбот бўлди.

2. Энди қуйидаги тўпламларни қараймиз:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in E : f(x) \geqslant 0,\ g(x) \geqslant 0\},\\
E_2 &= \{x \in E : f(x) \geqslant 0,\ g(x) < 0,\quad \varphi(x) \geqslant 0\},\\
E_3 &= \{x \in E : f(x) \geqslant 0,\ g(x) < 0,\quad \varphi(x) < 0\},\\
E_4 &= \{x \in E : f(x) < 0,\ g(x) \geqslant 0,\quad \varphi(x) \geqslant 0\},\\
E_5 &= \{x \in E : f(x) < 0,\ g(x) \geqslant 0,\quad \varphi(x) < 0\},\\
E_6 &= \{x \in E : f(x) < 0,\ g(x) < 0\},
\end{aligned}$$

Бундан $E_k \cap E_j = \varnothing$, $k \neq j$ ва $E = \bigcup_{k=1}^{6} E_k$ эканлиги равшан. Энди 38.7-теоремага асосан ҳар бир $k (= 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ учун

$$\int_{E_k} (f(x) + g(x)) \, dx = \int_{E_k} f(x) \, dx + \int_{E_k} g(x) \, dx$$

тенгликни исботлаш кифоя. Бу тенгликнинг исботи ҳар бир k учун ўхшаш бўлганлиги сабабли уни E_k тўпламларнинг бири, масалан, E_5 тўплам учун исботлаш билан чекланамиз. E_5 тўпламда $f(x) < 0$, $g(x) \geqslant 0$ ва $\varphi(x) < 0$ бўлгани учун $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ тенгликни

$$-f(x) = g(x) + [-\varphi(x)]$$

кўринишда ёзиб, E_5 тўпламда бу тенгликнинг ўнг томонидаги қўшилувчиларнинг ҳар бири мусбат эканлигига эришамиз. Натижада юқоридаги 1-ҳолга асосан

$$\int_{E_5} (-f(x)) \, dx = \int_{E_5} g(x) \, dx + \int_{E_5} [-\varphi(x)] \, dx$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан 38.2-теоремага асосан

$$\int_{E_5} \varphi(x) \, dx = \int_{E_5} f(x) \, dx + \int_{E_5} g(x) \, dx$$

тенглик келиб чиқади. ●

38.9-**теорема** (интегралнинг абсолют узлуксизлиги). *Агар $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи ва $E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots$, тўпламлар кетма-кетлигининг ҳар бири E нинг қисми бўлиб, $\mu(E_m) \to 0$ $(m \to \infty)$ бўлса, у ҳолда $\int\limits_{E_m} f(x)\,dx \to 0$ $(m \to \infty)$, яъни ихтиёрий берилган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжудки, $\mu(E_m) < \delta$ бўлганда*

$$\int\limits_{E_m} f(x)\,dx < \varepsilon$$

бўлади.

Исбот. (3) формулага асосланиб, теоремани $f(x) \geqslant 0$ бўлган ҳол учун исбот этиш кифоя. $f(x)$ функциянинг жамланувчи бўлганлигидан ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай n натурал сон мавжудки, унинг учун ушбу

$$\int\limits_{E} \{f(x) - [f(x)]_n\}\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

тенгсизлик бажарилади.

$[f(x)]_n$ функциянинг таърифига асосан

$$\int\limits_{E_m} [f(x)]_n\,dx \leqslant n\mu(E_m). \tag{7}$$

Теоремадаги $\mu(E_m) \to 0$ $(m \to \infty)$ шартга кўра, юқоридаги ε ва n сонлар учун шундай m_0 сон топиладики, унинг учун

$$n\mu(E_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (m > m_0) \tag{8}$$

тенгсизлик бажарилади.

(6) — (8) ларга мувофиқ,

$$\int\limits_{E_m} f(x)\,dx = \int\limits_{E_m} [f(x)]_n\,dx + \int\limits_{E_m} \{f(x) - [f(x)]_n\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{E_m} [f(x)]_n\,dx + \int\limits_{E} \{f(x) - [f(x)]_n\}\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема исботланди. *

38.10-**теорема** (А. Лебег). *Ўлчовли E тўпламда жамланувчи $F(x)$ функция ва ўлчовли*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

функциялар кетма-кетлиги берилган бўлиб, x нинг E тўпламдаги барча қийматлари учун ушбу

$$|f_n(x)| \leqslant F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots,\ x \in E) \tag{9}$$

тенгсизлик бажарилган бўлсин. Агар берилган $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик E тўпламда $f(x)$ функцияга ўлчов бўйича яқинлашса, у ҳолда E тўпламда $f(x)$ функция жамланувчи ва

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx \tag{10}$$

муносабат ўринли.

Исбот. (9) тенгсизликдан ва 38.6-хоссадан ҳар бир $f_n(x)$ функциянинг жамланувчи эканлиги келиб чиқади.

33.5-Рисс теоремасига асосан $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликдан $f(x)$ функцияга деярли яқинлашувчи $\{f_{n_i}(x)\}$ қисм кетма-кетлик ажратиш мумкин. Бундан 33.2-изоҳга асосан $f(x)$ ўлчовли. Ушбу

$$|f_{n_i}(x)| \leqslant F(x)$$

тенгсизликда $n_i \to \infty$ да лимитга ўтсак, $f(x)$ функция учун

$$|f(x)| \leqslant F(x) \tag{11}$$

тенгсизликнинг деярли бажарилиши келиб чиқади.

Бундан $F(x)$ функция жамланувчи бўлгани учун 38.6-теоремага асосан $f(x)$ функция ҳам жамланувчи бўлади. Сўнг ихтиёрий $\sigma > 0$ сонни олиб, ушбу

$$A_n(\sigma) = E(|f_n - f| \geqslant \sigma),$$
$$B_n(\sigma) = E(|f_n - f| < \sigma)$$

тўпламларни тузамиз. Бу тўпламлар учун ушбу

$$E = A_n(\sigma) \cup B_n(\sigma), \quad A_n(\sigma) \cap B_n(\sigma) = \varnothing$$

муносабатлар ўринли. $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $f(x)$ га ўлчов бўйича яқинлашгани учун

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n(\sigma)) = 0. \tag{12}$$

Берилган $\varepsilon > 0$ сон учун ушбу

$$\sigma\,\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган мусбат σ сонни оламиз.

38.9-теорема ва (12) муносабатдан фойдаланиб, n_0 ни шу қадар катта қилиб оламизки, унинг учун

$$\int_{A_n(\sigma)} F(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n > n_0)$$

тенгсизлик бажарилсин. (9), (11), (13) ва охирги муносабатларга биноан:

$$\left| \int_E f_n(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx \right| \leqslant \int_E \left| f_n(x) - f(x) \right| dx =$$

$$= \int_{A_n(\sigma)} \left| f_n(x) - f(x) \right| dx + \int_{B_n(\sigma)} \left| f_n(x) - f(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int_{A_n(\sigma)} F(x)\,dx + \sigma\mu(B_n(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ (n \geqslant n_0).$$

Бундан эса (10) муносабат келиб чиқади. *

38.11-теорема (Фату). *Агар ўлчовли ва манфий бўлмаган жамланувчи $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ функциялар кетма-кетлиги E тўпламда $f(x)$ функцияга деярли яқинлашса, у ҳолда*

$$\int_E f(x)\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx. \qquad (14)$$

Исбот. Дастлаб $\{x \in E : \lim\limits_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида

$$\lim_{m\to\infty} [f_m(x)]_n = [f(x)]_n \qquad (15)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан,

$$x_0 \in \{x \in E : \lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)\}$$

ихтиёрий нуқта бўлсин. Бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин: 1) $f(x_0) > n$; 2) $f(x_0) < n$; 3) $f(x_0) = n$.

Агар $f(x_0) > n$ бўлса, етарлича катта m учун $f_m(x_0) > n$ бўлиб, $[f_m(x)]_n$ функциянинг таърифига асосан

$$[f_m(x_0)]_n = n = [f(x_0)]_n$$

тенгликка эга бўламиз. Агар $f(x_0) < n$ бўлса, у ҳолда яна етарлича катта m учун $f_m(x_0) < n$ бўлиб,

$$[f_m(x_0)]_n = f_m(x_0) \to f(x_0) = [f(x_0)]_n$$

муносабатга эга бўламиз.

Танланган x_0 нуқтада $f(x_0) = n$ бўлса, у ҳолда ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай m_0 натурал сон топиладики, барча $m > m_0$ учун

$$f_m(x_0) > n - \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $[f_m(x_0)]_n$ функциянинг таърифидан

$$n - \varepsilon < [f_m(x_0)]_n \leqslant n$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан $f(x_0)=n$ бўлгани учун

$$|[f_m(x_0)]_n-[f(x_0)]_n|<\varepsilon$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, барча ҳоллар учун (15) тенглик $x=x_0$ нуқтада ўринли. x_0 нуқта ихтиёрий бўлгани учун бу тенглик $\{x\in E:\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x)=f(x)\}$ тўпламнинг барча нуқталарида ўринли. (15) тенгликдан 37.1-теоремага асосан

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_E [f_m(x)]_n\,dx=\int\limits_E [f(x)]_n\,dx.$$

Аммо $f_m(x)\geqslant 0$ бўлгани учун

$$\int\limits_E [f_m(x)]_n\,dx\leqslant\int\limits_E f_m(x)\,dx.$$

Демак,

$$\int\limits_E [f(x)]_n\,dx\leqslant\lim_{m\to\infty}\int\limits_E f_m(x)\,dx.$$

Бундан, агар $n\to\infty$ да лимитга ўтсак, (14) тенгсизлик келиб чиқади. Хусусан, агар барча $f_m(x)$ функциялар жамланувчи бўлиб,

$$\int\limits_E f_m(x)\,dx\leqslant A<\infty$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ лимит функция ҳам жамланувчи бўлади. Агар бирор мусбат ўлчовли e тўпламда $f(x)=+\infty$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий n учун ушбу

$$\int\limits_E [f(x)]_n\,dx\geqslant n\mu(e)$$

тенгсизлик бажарилади, демак, (14) тенгсизликнинг ўнг томони чексизга тенг бўлади. $_*$

38.12-теорема (Леви). *Ўлчовли E тўпламда манфий бўлмаган жамланувчи $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$ функцияларнинг ўсиб борувчи (яъни $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$) кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар ҳар бир n учун*

$$\int\limits_E f_n(x)\,dx\leqslant M\qquad \text{(M-ўзгармас сон)}\qquad (16)$$

бўлса, у ҳолда E тўпламда ушбу

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

(чекли) лимит деярли мавжуд бўлиб, $f(x)$ функция E тўпламда жамланувчи ва

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Исбот. Умумийликни камайтирмасдан, $f_1(x) \geqslant 0$ деб олишимиз мумкин. $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг чекли лимитга эга бўлмаган нуқталар тўпламини E_0 орқали белгилаймиз:

$$E_0 = \{x \in E : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}.$$

Агар $\mu(E_0) = 0$ тенглик кўрсатилса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг E тўпламда деярли чекли лимитга интилиши келиб чиқади. Шу мақсадда ҳар қандай r натурал сон учун ушбу

$$E_n^{(r)} = \{x \in E : f_n(x) > r\},\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

тўпламларни қараймиз. У ҳолда қуйидаги тенглик ўринли:

$$E_0 = \bigcap_{r=1}^{\infty} [\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}]. \tag{17}$$

Ҳақиқатан, $x \in E_0$ бўлиб, у ихтиёрий бўлсин. У ҳолда E_0 ва $E_n^{(r)}$ тўпламларнинг таърифланишидан ҳар бир r натурал сон учун шундай n натурал сон мавжудки, $f_n(x) > r$ тенгсизлик ўринли бўлади, яъни $x \in E_n^{(r)}$. Бундан, ҳар бир r натурал сон учун $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}$ муносабат келиб чиқади. Демак,

$$x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} [\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}].$$

бўлиб, x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E_0 \subset \bigcap_{r=1}^{\infty} [\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}] \tag{18}$$

муносабатга эга бўламиз.

Энди тескари муносабатни кўрсатиш учун $x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} [\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}]$ элементни ихтиёрий деб оламиз. Бундан кўпайтманинг таърифига асосан ҳар бир r натурал сон учун $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}$ муносабат ўринли бўлиб, шундай k натурал сон топиладики $x \in E_k^{(r)}$ бўлади. Бундан $E_k^{(r)}$ тўпламнинг таърифланишига асосан $f_k(x) > r$ бўлгани сабабли, $x \in E_0$ муносабат келиб чиқади. x элементнинг ихтиёрийлигидан эса

$$\bigcap_{r=1}^{\infty}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}\right] \subset E_0 .$$

Бу ва (18) муносабат (17) тенгликни исботлайди.

$E_n^{(r)}$ тўпламнинг таърифланишига асосан

$$\mu(E_n^{(r)}) = \int\limits_{E_n^{(r)}} dx \leqslant \frac{1}{r} \int\limits_{E_n^{(r)}} f_n(x)\, dx$$

тенгсизлик ўринли. Бундан ва (16) тенгсизликдан ҳар қандай n натурал сон учун ушбу

$$\mu(E_n^{(r)}) \leqslant \frac{M}{r} \tag{19}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Теорема шартига асосан $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ўсувчилигидан ҳар бир r натурал сон учун ушбу

$$E_1^{(r)} \subset E_2^{(r)} \subset \ldots \subset E_n^{(r)} \subset \ldots$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n^{(r)})$$

бўлиб, (19) тенгсизликка асосан, ушбу

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}) \leqslant \frac{M}{r} \tag{20}$$

тенгсизликни оламиз. (17) тенгликка асосан ҳар қандай r натурал сон учун

$$E_0 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}$$

муносабат ўринли. Бундан ва (20) тенгсизликдан

$$\mu(E_0) \leqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{(r)}) \leqslant \frac{M}{r}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик ҳар қандай r натурал сон учун ўринли бўлганлиги туфайли, у $r \to \infty$ да ҳам ўринлидир. Демак, $\mu(E_0) = 0$ бўлиб, бундан $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг E тўпламда деярли чекли лимитга эга эканлиги келиб чиқади. Бу лимитни $f(x)$ орқали белгилаймиз. Энди $f(x)$ функциянинг E тўпламда жамланувчи эканлигини кўрсатамиз. Шу мақсадда қуйидаги тўпламни қараймиз:

$$E_m = \{x \in E : m - 1 \leqslant f(x) < m\},\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

Бундан $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ эканлиги равшан. Агар $\varphi(x)$ функциянинг қийматини ҳар бир E_m тўпламда m сонга тенг деб олсак, у ҳолда $f(x)$ функция учун E тўпламда $f(x) < \varphi(x)$ тенгсизлик ўринли эканлиги E_m тўпламнинг таърифланишидан келиб чиқади. Энди $f(x)$ функциянинг E тўпламда жамланувчи эканлигини кўрсатиш учун 38.6-теоремага асосан $\varphi(x)$ функциянинг шу тўпламда жамланувчи эканлигини кўрсатиш кифоя. Бунинг учун

$$A_s = \bigcup_{m=1}^{s} E_m$$

белгилашни киритамиз. E_m тўпламнинг таърифланишига асосан $E_m \cap E_k = \varnothing$, $k \neq m$ бўлиб, $f_n(x)$ ва $f(x)$ функциялар A_s тўпламда чегараланган бўлади. Шу сабабли 37.2-изоҳга асосан

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_s} f_n(x)\,dx = \int_{A_s} f(x)\,dx \tag{21}$$

тенглик ўринли. Энди

$$\int_{A_s} f(x)\,dx = \sum_{m=1}^{s} \int_{E_m} f(x)\,dx \geqslant \sum_{m=1}^{s} \int_{E_m} (m-1)\,dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{s} \int_{E_m} (\varphi(x) - 1)\,dx = \int_{A_s} \varphi(x)\,dx - \mu(A_s)$$

тенгсизликдан (21) тенгликка ва (16) тенгсизликка асосан ушбу

$$\int_{A_s} \varphi(x)\,dx \leqslant \int_{A_s} f(x)\,dx + \mu(A_s) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_s} f_n(x)\,dx + \mu(A_s) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{E} f_n(x)\,dx + \mu(E) \leqslant M + \mu(E),$$

яъни

$$\int_{A_s} \varphi(x)\,dx \leqslant M + \mu(E) \tag{22}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Иккинчи томондан, $\varphi(x)$ функциянинг таърифланишига асосан

$$\int_{A_s} \varphi(x)\,dx = \sum_{m=1}^{s} \int_{Em} \varphi(x)\,dx = \sum_{m=1}^{s} \int_{E_m} m\,dx = \sum_{m=1}^{s} m\,\mu(E_m)$$

бўлиб, (22) тенгсизликдан ушбу

$$\sum_{m=1}^{s} m\mu(E_m) \leqslant M + \mu(E)$$

тенгсизликни оламиз. Бундан ўз навбатида $s \to \infty$ да

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\mu(E_m) \leqslant M + \mu(E)$$

бўлади, яъни қатор яқинлашувчи. $\varphi(x)$ функциянинг таърифланишига асосан эса ушбу

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\mu(E_m) = \int_E \varphi(x)\,dx$$

тенглик ўринли. Демак,

$$\int_E \varphi(x)\,dx \leqslant M + \mu(E).$$

Бу тенгсизлик $\varphi(x)$ функциянинг E тўпламда жамланувчи эканини кўрсатади. Демак, $f(x)$ функция ҳам E тўпламда жамланувчи.

Энди қуйидаги тенгликни кўрсатамиз:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

$f_n(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг E тўпламда жамланувчилигидан 38.9-теоремага (Лебег интегралининг абсолют узлуксизлиги) асосан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиш мумкинки, $\mu(B) < \delta$ бўлган ҳар қандай ўлчовли $B \subset E$ тўплам учун

$$\int_B f_n(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4} \text{ ва } \int_B f(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Егоров теоремасига (33.6-теорема) асосан B тўпламни шундай танлашимиз мумкинки, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $C = E \setminus B$ тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашади. У ҳолда шундай N натурал сон топиладики, $n > N$ бўлган барча n учун ҳар қандий $x \in C$ да

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{}{2\mu(C)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Энди булардан ва ушбу

$$\int_E f_n(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx =$$

$$= \int_C [f_n(x) - f(x)]\,dx + \int_B f_n(x)\,dx - \int_B f(x)dx$$

тенгликдан қуйидаги тенгсизликни оламиз:

$$\left|\int_E f_n(x)\,dx - \int_E f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Бундан

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)dx$$

тенглик келиб чиқади.$_*$

Бу теоремадан натижа сифатида қуйидаги теорема келиб чиқади.

38.13-теорема. *E тўпламда жамланувчи $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$, $\ldots$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар $\varphi_n(x) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ бўлиб,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E \varphi_k(x)\,dx < \infty$$

бўлса, у ҳолда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ қатор E тўпламда деярли яқинлашади ва

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int \varphi_k(x)\,dx.$$

Исбот. Агар $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$ белгилаш киритилса, у ҳолда бу теорема 38.12-теоремага олиб келинади.$_*$

39-§. Риман ва Лебег интегралларини солиштириш

Таъриф. *Агар бирор ўлчовли E тўпламда берилган $f(x)$ функциянинг узилиш нуқталаридан иборат тўпламнинг ўлчови ноль бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция E тўпламда деярли узлуксиз функция дейилади.*

39.1-теорема (А. Лебег). $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функциянинг *Риман интеграли мавжуд бўлиши учун унинг* *бу сегментда чегараланган ва деярли узлуксиз бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда интегралланувчи бўлиши учун аввало чегараланган бўлиши кераклиги Риман интегралининг таърифидан бевосита кўринади.

Чегараланган $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги узилиш нуқталаридан иборат бўлган тўпламни Q билан белгилаймиз.

Энди $\omega(x)$ билан $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги тебранишини (60-§ га қаранг) белгилаб, $Q_n = Q\left\{\omega(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ тўпламни кўрамиз. Ҳар бир узилиш нуқтаси Q_n тўпламларнинг бирига албатта киради ва аксинча, шунинг учун

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n. \tag{1}$$

Энди Q_n тўпламнинг ёпиқлигини кўрсатамиз. Дарҳақиқат, агар x_0 нуқта Q_n тўплам учун лимит нуқта бўлса, у ҳолда x_0 ни ўз ичига олган ҳар қандай оралиқ Q_n тўпламнинг камида битта нуқтасини ўз ичига олади, демак, бу оралиқда $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{n}$ дан кичик бўлмайди. Демак, Q_n ёпиқ тўплам ва шунинг учун у ўлчовли. (1) тенгликдан 20.3-теоремага асосан Q тўпламнинг ҳам ўлчовли эканлиги келиб чиқади. $\mu(Q) > 0$ деб фараз қиламиз, у ҳолда Q_n тўпламлар орасида шундай Q_r тўплам топиладики, унинг учун ушбу

$$\mu(Q_r) = \alpha > 0 \tag{2}$$

муносабат бажарилади. Дарҳақиқат, агар

$$\mu(Q_p) = 0, \quad p = 1, 2, \ldots$$

бўлганда эди, у ҳолда

$$\mu(Q) = \lim_{n\to\infty} \mu(Q_n) = 0 \tag{3}$$

бўлар эди, чунки

$$Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \ldots$$

(3) муносабат фаразимизга зид, шунинг учун (2) муносабат ўринли. Энди $[a, b]$ сегментни n та $[a_k, a_{k+1}]$ $(k = \overline{0, n-1})$ сегментга бўлиб, ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k (a_{k+1} - a_k) \tag{4}$$

йиғиндини тузамиз, бу ерда ω_k орқали $f(x)$ функциянинг $[a_k, a_{k+1}]$ сегментдаги тебраниши белгиланди. Бу йиғиндидан Q_r тўпламнинг бирорта ҳам нуқтасини ўз ичига олмаган $[a_k, a_{k+1}]$ сегментларга мос ҳадларни чиқариб ташлаймиз. Q_r тўплам бўш бўлмаганлиги учун (чунки $\mu(Q_r) > 0$), (4) йиғиндининг ҳамма ҳадлари чиқиб кетмайди. Демак, ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \, (a_{k+1} - a_k) \geqslant \sum{}' \omega_k \, (a_{k+1} - a_k) \geqslant \frac{1}{r} \sum{}' (a_{k+1} - a_k) \quad (5)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, бу ерда $\sum'$ орқали чиқариб ташлаш натижасида қолган сегментларга тегишли ҳадлар йиғиндиси белгиланди. Аммо

$$\sum{}' (a_{k+1} - a_k) \geqslant \mu \, (Q_r) = \alpha,$$

чунки $\sum'$ га кирган ҳадларга тегишли $[a_k, a_{k+1}]$ сегментлар системаси Q_r тўпламни бутунлай ўз ичига олади. Шунинг учун (5) тенгсизликдан ушбу

$$\sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \, (a_{k+1} - a_k) \geqslant \frac{\alpha}{r}$$

тенгсизлик келиб чиқади, бундан эса

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \, (a_{k+1} - a_k) \neq 0 \quad (\delta_n = \max_{0<k<n-1} (a_{k+1} - a_k))$$

муносабат, яъни $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда Риман интеграли мавжуд эмаслиги келиб чиқади.

Демак, агар $[a, b]$ сегментда чегараланган $f(x)$ функция учун $\mu(Q) > 0$ бўлса, у ҳолда бу функция Риман маъносида интегралланувчи бўлмас экан. Шундай қилиб, $f(x)$ функциянинг интегралланувчи бўлиши учун унинг $[a, b]$ сегментда чегараланган ва деярли узлуксиз бўлиши зарур экан.

Кифоялиги. Чегараланган ва деярли узлуксиз $f(x)$ функцияни $[a, b]$ сегментда Риман маъносида интегралга эга эмас, деб фараз қилайлик. У ҳолда шундай $\varepsilon > 0$ сон топиладики, унинг учун $[a, b]$ сегментни ҳар қандай $[a_k, a_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ сегментчаларга бўлганда ҳам ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \, (a_{k+1} - a_k) \geqslant \varepsilon \quad (6)$$

тенгсизлик бажарилади. Энди r натурал сонни ушбу

$$r > \frac{2\,(b-a)}{\varepsilon} \tag{7}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган қилиб олиб, $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмаган нуқталардан иборат Q_r тўпламнинг ўлчови мусбат эканлигини исбот қиламиз.

Бунинг учун

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k\,(a_{k+1}-a_k)$$

йиғиндини тузиб, уни ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(a_{k+1}-a_k) = \sum_k{}' \omega_k\,(a_{k+1}-a_k) + \sum_k{}'' \omega_k\,(a_{k+1}-a_k) \tag{8}$$

кўринишда ёзамиз, бу ерда $\sum'$ ва $\sum''$ мос равишда $\omega_k < \frac{1}{r}$ ва $\omega_k \geqslant \frac{1}{r}$ шартларни қаноатлантирувчи ҳадларнинг йиғиндисидан иборат. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда чегараланган бўлганлиги учун шундай $K > 0$ сон мавжудки, унинг учун ушбу

$$|f(x)| < K \quad (x \in [a, b])$$

тенгсизлик бажарилади. Бундан

$$0 \leqslant \omega_k < 2K$$

тенгсизлик келиб чиқади. (7) ни ҳисобга олиб, ушбу

$$\sum_k{}' \omega_k\,(a_{k+1}-a_k) < \frac{1}{r} \sum_k{}' (a_{k+1}-a_k) \leqslant \frac{b-a}{r} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

$$\sum_k{}'' \omega_k\,(a_{k+1}-a_k) < 2K \sum_k{}'' (a_{k+1}-a_k) = 2Kl \tag{10}$$

муносабатларни ёзамиз, бу ерда

$$l = \sum_k{}'' (a_{k+1}-a_k). \tag{10'}$$

(6), (8), (9), (10) муносабатлардан

$$\varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{n} \omega_k\,(a_{k+1}-a_k) < \frac{\varepsilon}{2} + 2Kl$$

муносабатлар келиб чиқади. Бундан эса $l > \frac{\varepsilon}{4K} > 0$.

Энди $[a, b]$ сегментни 2^n $(n = 1, 2, \ldots)$ та тенг қисмга бўламиз. Юқоридагига ўхшаш, бу бўлинишларнинг ҳар бирига тегишли (10′) сон ушбу

$$l \geqslant \frac{\varepsilon}{4K}$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

$[a, b]$ сегментни 2^n та тенг қисмга бўлганимизда $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмаган сегментчаларнинг йиғиндисидан тузилган тўпламни H_n билан ва барча H_n ларнинг умумий қисмини H билан белгилаймиз, яъни

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Ушбу $H_{n+1} \subset H_n$ муносабат ўринли, чунки 2^{n+1} та тенг қисмга бўлишга тегишли бирорта сегментча учун $\omega_k \geqslant \frac{1}{r}$ бўлса, у ҳолда 2^n та тенг қисмга бўлишга тегишли бирор сегментча бу сегментчани ўз ичига олади ва узунлиги икки марта катта бўлгани учун унда $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмайди.

Демак,

$$\mu(H) = \lim_{n \to \infty} \mu(H_n) = \lim_{n \to \infty} l \geqslant \frac{\varepsilon}{4k}. \qquad (11)$$

H тўпламнинг ҳар бир нуқтасида $f(x)$ нинг тебраниши $\frac{1}{r}$ дан кичик бўлмаганлиги учун ушбу

$$H \subset Q_r \subset Q$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин, бу ерда $Q_r = Q\left(\omega(x) \geqslant \frac{1}{r}\right)$ ва $Q = \bigcup_{r=1}^{\infty} Q_r$. Бундан эса (11) га мувофиқ

$$\mu(Q) \geqslant \mu(Q_r) \geqslant \frac{\varepsilon}{4K} > 0$$

тенгсизлик келиб чиқади. Шу билан кифоялик ҳам исбот бўлди.*

39.2-теорема. *Агар $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функция учун Риман интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда бу функция учун Лебег интеграли ҳам мавжуд бўлиб, бу интеграллар ўзаро тенг бўлади.*

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда Риман интеграли мавжудлигидан қуйидаги хулосалар келиб чиқади: 1) $f(x)$ функция чегараланган; 2) $f(x)$ функциянинг узилиш нуқталаридан иборат тўпламнинг ўлчови нолга тенг, яъни $f(x)$ деярли узлуксиз.

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда деярли узлуксизлигидан 32. 11-теоремага асосан унинг $[a, b]$ сегментда ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(x)$ чегараланган ва ўлчовли. 35-§ даги теоремага асосан $f(x)$ функция учун Лебег интеграли мавжуд.

Энди $f(x)$ функциянинг Риман ва Лебег интегралларининг ўзаро тенглигини исбот қиламиз.

$[a, b]$ сегментни n та $[x_k, x_{k+1}]$ сегментчаларга бўламиз ва Лебег интегралининг 36.1-хоссасидан фойдаланиб, ушбу

$$m_k \Delta x_k \leqslant (L) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx \leqslant M_k \Delta x_k \tag{12}$$

тенгсизликларни ёзамиз, бу ерда $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, m_k ва M_k мос равишда $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ сегментдаги қуйи ва юқори чегаралари. (12) дан:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (L) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx =$$

$$= (L) \int_a^b f(x)dx \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S, \tag{13}$$

бунда s ва S йиғиндилар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги Дарбу йиғиндилари. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда Риман интеграли мавжуд бўлганлиги учун, унинг таърифига мувофиқ ушбу

$$\lim_{\alpha_n \to 0} s = \lim_{\alpha_n \to 0} S = (R) \int_a^b f(x)dx \tag{14}$$

муносабатлар ўринли бўлади, бу ерда $\alpha_n = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (\Delta x_k)$.

(13) ва (14) муносабатлардан бевосита қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$(R) \int_a^b f(x)dx = (L) \int_a^b f(x)dx._*$$

40-§. Абстракт Лебег интеграли

Бу параграфда E бирлик элементга эга бўлган Z ўлчовли тўпламлар системасида аниқланган μ Лебег ўлчовини кўрамиз ва ҳар бир $x \in E$ элементда аниқланган $f(x)$ функция учун абстракт Лебег интегралининг таърифини берамиз.

32- § да сонлар ўқининг ўлчовли E тўпламида аниқланган ўлчовли $f(x)$ функцияга таъриф берилган эди. Бу ерда биз Z ўлчовли тўпламлар системасининг E бирлик элементида аниқланган ўлчовли $f(x)$ функцияга қуйидагича таъриф берамиз.

1-таъриф. *Агар E тўпламда аниқланган $f(x)$ функция учун ҳар қандай ҳақиқий c сонда $E(f<c)=\{x: f(x)<c\}$ тўплам ўлчовли бўлса (яъни $E(f<c) \in Z$ бўлса), у ҳолда $f(x)$ функция ўлчовли функция дейилади.*

32- ва 33- § ларда ўлчовли функциялар ҳамда ўлчовли функциялар кетма-кетлиги учун исботланган теоремаларнинг барчаси ҳозиргина киритилган 1- таърифдаги ўлчовли функциялар учун ҳам ўз кучини сақлайди. Исботлари эса у ерда берилган исботларга ўхшаш. Шунинг учун у теоремаларнинг барчасини бу ерда келтирмасдан, фақат қуйидаги теореманинг исботини келтирамиз (33.1- теорема билан солиштиринг).

40.1-теорема. *Агар $\{f_n(x)\}$ ўлчовли функциялар кетма-кетлиги ҳар бир $x \in E$ да $f(x)$ функцияга яқинлашса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам ўлчовли бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик, $n \to \infty$ да ҳар бир $x \in E$ учун $f_n(x) \to f(x)$ бўлсин. Ушбу

$$E(x: f(x)<c) = \bigcup_k \bigcup_n \bigcap_{m \geqslant n} E\left(x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right) \qquad (1)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз.

Ҳақиқатан, агар $x \in E(x: f(x)<c)$ ихтиёрий бўлса, у ҳолда шундай k натурал сон топиладики, $f(x) < c - \frac{1}{k}$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $n \to \infty$ да $f_n(x) \to f(x)$ бўлгани учун шундай n натурал сон топиладики, $m \geqslant n$ бўлган барча m натурал сонлар учун $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Бундан $m \geqslant n$ бўлган барча m сон учун

$$x \in E\left(x: f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right),$$

яъни

$$x \in \bigcap_{m>n} E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right)$$

бўлади. Бундан ушбу

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n} E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right)$$

муносабат бевосита келиб чиқади. Бундан ва x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E(x : f(x) < c) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geqslant n} E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right) \quad (2)$$

муносабатга эга бўламиз.

Аксинча, агар $x \in \bigcup\limits_{k} \bigcup\limits_{n} \bigcap\limits_{m>n} E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right)$ бўлса, у ҳолда шундай k ва n натурал сонлар топиладики, $m > n$ натурал сон учун

$$x \in E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right),$$

яъни, $f_m(x) < c - \frac{1}{k}$ бўлади. Бундан $m \to \infty$ да $f_m(x) \to f(x)$ бўлгани сабабли $f(x) < c - \frac{1}{k} < c$ тенгсизлик келиб чиқади, яъни $x \in E\ (x : f(x) < c)$. Бундан ва x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$E(x : f(x) < c) \supset \bigcup_{k} \bigcup_{n} \bigcap_{m \geqslant n} E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right)$$

муносабатга эга бўламиз. Бу ва (2) муносабат (1) тенгликни исботлайди.

$f_m(x)$ функциялар ўлчовли бўлганлиги сабабли, $E\left(x : f_m(x) < c - \frac{1}{k}\right)$ тўпламларнинг ҳар бири ўлчовли тўпламдир. Демак, 26.8-теоремага асосан (1) тенгликнинг ўнг томони кўпи билан сони саноқли ўлчовли тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун ўлчовли тўплам. Шу сабабли $E\ (x : f(x) < c)$ тўплам ҳам ўлчовли бўлади. Бундан таърифга асосан $f(x)$ функциянинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади.$_*$

2-таъриф. *Агар E тўпламда аниқланган ҳақиқий $f(x)$ функция ўлчовли бўлиб, унинг қийматлари тўплами чекли ёки саноқли бўлса, бундай функция содда функция дейилади.*

40.2-теорема. *E тўпламда берилган ҳамда қийматлари* *тўплами чекли ёки саноқли* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ *тўпламдан иборат бўлган* $f(x)$ *функциянинг ўлчовли бўлиши учун*

$$A_n = \{x \in E : f(x) = y_n\},\ n = 1, 2, \ldots$$

тўпламларнинг ўлчовли бўлиши зарур ва кифоядир.

Исбот. Зарурийлиги. $f(x)$ функцияни ўлчовли деб олиб, A_n тўпламларнинг ўлчовли эканини кўрсатамиз. Соддалик учун $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ сонларни турли деб ҳисоблаб, ўсиш тартибида жойлашган деб оламиз. Шундай қилиб, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots$ бўлсин. $f(x)$ функция ўлчовли бўлгани учун таърифга асосан $\{x \in E : f(x) < y_{n+1}\}$ ва $\{x \in E : f(x) < y_n\}$ тўпламлар ўлчовли. $f(x)$ функциянинг таърифидан ушбу

$$A_n = \{x \in E : f(x) = y_n\} = \{x \in E : f(x) < y_{n+1}\} \setminus \{x \in E : f(x) < y_n\}$$

тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади. Бу тенгликнинг ўнг томони 26.5-теоремага асосан ўлчовли тўпламларнинг айирмаси сифатида ўлчовли. Демак, A_n тўплам ўлчовли.

Кифоялиги. A_n тўпламларни ўлчовли деб, $f(x)$ функциянинг ўлчовли эканини кўрсатамиз. c сон ихтиёрий бўлсин. У ҳолда ушбу

$$E\,(x : f(x) < c) = \bigcup_{y_n < c} A_n$$

тенглик A_n тўпламларнинг таърифланишидан келиб чиқади. Бу тенгликнинг ўнг томони кўпи билан сони саноқли ўлчовли тўпламларнинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун 26.8-теоремага асосан ўлчовли тўплам. Бундан $E\,(x : f(x) < c)$ тўпламнинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Демак, $f(x)$ — ўлчовли функция.$_*$

3-таъриф. *Агар ҳар қандай* $\varepsilon > 0$ *сон учун шундай* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *натурал сон мавжуд бўлиб, барча* $n > n_0$ *натурал сонлар ва барча* $x \in E$ *учун*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда ўлчовли E *тўпламда аниқланган ўлчовли* $\{f_n(x)\}$ *функциялар кетма-кетлиги шу тўпламда* $f(x)$ *функцияга текис яқинлашувчи дейилади.*

40.3-теорема. E *тўпламда аниқланган* $f(x)$ *функциянинг ўлчовли бўлиши учун бу функцияга шу тўпламда текис яқинлашувчи ўлчовли содда* $\{f_n(x)\}$ *функциялар кетма-кетлигининг мавжуд бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурийлиги. $f(x)$ функцияни ўлчовли деб, унга текис яқинлашувчи ўлчовли $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини қуйидагича тузамиз: ҳар бир тайинланган n натурал сон учун ўлчовли $f(x)$ функция

$$\frac{m}{n} \leqslant f(x) < \frac{m+1}{n}$$

тенгсизликни қаноатлантирган нуқталарда (бу ерда m — бутун сон) $f_n(x)$ функцияни ушбу

$$f_n(x) = \frac{m}{n}$$

тенглик билан аниқлаймиз. У ҳолда $f_n(x)$ содда функция бўлиб, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $n \to \infty$ да $f(x)$ функцияга текис яқинлашади. Ҳақиқатан, $f_n(x)$ функциянинг таърифланишидан ҳар қандай $x \in E$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли эканлиги равшан. Бу эса $n \to \infty$ да $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га текис яқинлашишини кўрсатади.

Кифоялиги. E тўпламда аниқланган $\{f_n(x)\}$ ўлчовли содда функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда 40.1-теоремага асосан $f(x)$ функция ўлчовли бўлади.$_*$

Энди содда функциялар учун Лебег интеграли тушунчасини берамиз.

Фараз қилайлик, E тўпламнинг бирор ўлчовли A қисмида аниқланган содда $f(x)$ функцня берилган бўлиб, $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$; $(y_k \neq y_j,\ k \neq j)$ сонлар унинг барча қийматлари кетма кетлиги бўлсин. Ушбу

$$A_n = \{x \in A : f(x) = y_n\}$$

тўпламни оламиз. 40.2-теоремага асосан бу тўплам ўлчовли. Демак, $\mu(A_n)$ сон аниқ қийматга эга. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \, \mu(A_n) \tag{3}$$

қаторни тузамиз.

4-таъриф. *Агар $f(x)$ содда функция орқали ҳосил қилинган (3) қатор абсолют яқинлашса, у ҳолда унинг қиймати $f(x)$ функциянинг Лебег интеграли дейилади ва у ушбу*

$$\int_A f(x)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, \mu(A_n)$$

кўринишда ёзилади, $f(x)$ *функция эса* μ *ўлчов бўйича* A *тўпламда интегралланувчи ёки жамланувчи функция дейилади.*

Бу таърифда $f(x)$ содда функциянинг қийматлари бўлган y_k сонлар бир-биридан фарқли деб қаралди. Лекин содда функциянинг Лебег интегралини унинг қийматлари бир-биридан фарқли бўлмаган ҳол учун ҳам таърифлаш мумкин. Бу қуйидаги теоремадан кўринади:

40-4-теорема. *Агар* $A=\bigcup\limits_k B_k$, $B_k\cap B_j=\varnothing$, $k\neq j$, $k=1, 2, 3, \dots$ *бўлиб,* $f(x)$ *функция ҳар бир* B_k *тўпламда ўзгармас* c_k *сонга тенг бўлса, у ҳолда*

$$\int_A f(x)\,d\mu=\sum_k c_k\mu(B_k) \tag{4}$$

бўлади.

$f(x)$ *функциянинг жамланувчи бўлиши учун (4) қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Теореманинг биринчи қисмини, яъни (4) тенгликни исботлаймиз. Ушбу

$$A_n=\{x\in A: f(x)=y_n\}=\bigcup_{c_k=y_n} B_k,$$

тенглик ўз-ўзидан равшан (бунда $\bigcup\limits_{c_k=y_n} B_k$ тўплам $c_k=y_n$ бўлган B_k тўпламларнинг йиғиндисидан иборат). 4-таърифга ва μ ўлчовнинг σ-аддитивлик хоссасига асосан

$$\int_A f(x)\,d\mu=\sum_n y_n\mu(A_n)=\sum_n y_n\sum_{c_k=y_n}\mu(B_k)=\sum_k c_k\mu(B_k)$$

бўлиб, (4) тенглик келиб чиқади.

Энди теореманинг иккинчи қисмини, яъни $f(x)$ функциянинг жамланувчи бўлиши учун (4) қаторнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши зарур ва кифоя эканлигини исботлаймиз.

Ҳақиқатан, агар $f(x)$ функция A тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда 4-таърифга асосан

$$\sum_n y_n\mu(A_n)$$

қаторнинг абсолют яқинлашиши келиб чиқади. Бундан ва ўлчов манфий бўлмаганлиги сабабли ушбу

$$\sum_n |y_n|\mu(A_n)=\sum_n |y_n|\sum_{c_k=y_n}\mu(B_k)=\sum_k |c_k|\mu(B_k)$$

тенгликдан

$$\sum_k c_k \mu (B_k)$$

қаторнинг абсолют яқинлашиши келиб чиқади.

Агар (4) қатор абсолют яқинлашувчи бўлса, $f(x)$ функциянинг жамланувчи бўлиши (4) тенгликка асосан 4-таърифдан келиб чиқади.$_*$

Энди содда функция учун Лебег интегралининг баъзи бир хоссаларини келтирамиз

1. *Агар ўлчовли A тўпламда аниқланган $f(x)$ ва $g(x)$ содда функциялар μ ўлчов бўйича A тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси $f(x)+g(x)$ ҳам μ ўлчов бўйича A тўпламда жамланувчи бўлади ва қуйидаги тенглик ўринлидир*:

$$\int_A (f(x)+g(x))\,d\mu = \int_A f(x)\,d\mu + \int_A g(x)\,d\mu.$$

Исбот. Фараз қилайлик, $f(x)$ содда функция ўзининг $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ қийматларини $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots, F_i \subset A$, $i = 1, 2, \ldots$ ўлчовли тўпламларда, $g(x)$ содда функция эса, ўзининг $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ қийматларини $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ $G_j \subset A$, $j = 1, 2, \ldots$ ўлчовли тўпламларда қабул қилинсин. У ҳолда 4-таърифга асосан

$$I_1 = \int_A f(x)\,d\mu = \sum_i f_i \mu (F_i), \tag{5}$$

$$I_2 = \int_A g(x)\,d\mu = \sum_j g_j \mu (G_j) \tag{6}$$

тенгликларни ёзишимиз мумкин. Ушбу

$$\mu (F_i) = \sum_j \mu (F_i \cap G_j), \tag{7}$$

$$\mu (G_j) = \sum_i \mu (F_i \cap G_j) \tag{8}$$

тенгликлар F_i ва G_j тўпламларнинг таърифланишидан ва μ ўлчовнинг σ-аддитивлигидан келиб чиқади. Энди 40.4-теоремага асосан

$$\int_A (f(x)+g(x))\,d\mu = \sum_i \sum_j (f_i + g_i)\, \mu (F_i \cap G_j) \tag{9}$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. (7) ва (8) тенгликлардан ушбу

$$\sum_i \sum_j (f_i + g_j)\, \mu (F_i \cap G_j) = \sum_i f_i \mu (F_i) + \sum_j g_j \mu (G_j)$$

тенглик келиб чиқади. Бундан (5) ва (6) тенгликларнинг ўнг томонидаги қаторлар абсолют яқинлашса, (9) тенгликнинг ўнг томонидаги қаторнинг ҳам абсолют яқинлашиши келиб чиқади ҳамда

$$\int_A [f(x) + g(x)]\, d\mu = \int_A f(x)\, d\mu + \int_A g(x)\, d\mu$$

тенглик ўринли бўлади.*

2. *Агар $f(x)$ содда функция μ ўлчов бўйича A тўпламда жамланувчи бўлса, у ҳолда ҳар қандай ўзгармас c сон учун $cf(x)$ функция ҳам μ ўлчов бўйича A тўпламда жамланувчи бўлади ва*

$$\int_A c f(x)\, d\mu = c \int_A f(x)\, d\mu$$

тенглик ўринли.

3. *A тўпламда чегараланган f содда функция шу тўпламда μ ўлчов бўйича жамланувчи. Агар A тўпламда $|f(x)| \leqslant M$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда ушбу*

$$\int_A |f(x)|\, d\mu \leqslant M \mu\ (A)$$

тенгсизлик ўринли.

2 ва 3-хоссалар ҳам худди 1-хоссага ўхшаш исботлангани учун уларни исботлашни ўқувчига қолдирамиз.

Энди умумий ҳол учун Лебег интегралининг таърифини берамиз.

5-таъриф. *Агар A тўпламда μ ўлчов бўйича жамланувчи содда функциялардан иборат $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик шу тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашса ҳамда ушбу*

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu$$

лимит мавжуд бўлиб, бу лимит A тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашган $\{f_n(x)\}$ содда функциялар кетма-кетлигини танлашга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда I лимитнинг қиймати $f(x)$ функциянинг A тўпламда μ ўлчов бўйича Лебег интеграли дейилади ва

$$\int_A f(x)\, d\mu$$

кўринишда белгиланади.

Агар $f(x)$ функциянинг μ ўлчов бўйича A тўпламда Лебег интеграли мавжуд бўлса, у ҳолда бу функция интегралланувчи ёки жамланувчи функция дейилади.

40.5-теорема. *A тўпламда жамланувчи содда функциялардан иборат $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда ушбу*

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu$$

лимит мавжуд.

Исбот. A тўпламда текис яқинлашувчи ҳар қандай $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги учун n, $m \to \infty$ да ушбу

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \tag{10}$$

муносабатнинг ўринли эканлиги математик анализ курсидан маълум.

Содда функция учун Лебег интегралининг 1—3-хоссаларига асосан ушбу

$$\left| \int_A f_n(x)\, d\mu - \int_A f_m(x)\, d\mu \right| \leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)|$$

тенгсизлик ўринли. Бундан (10) га асосан $I_n = \int_A f_n(x)\, d\mu$ сонлар кетма-кетлиги учун Коши шартининг бажарилиши келиб чиқади. Демак, I_n кетма-кетлик яқинлашувчи.$_*$

40.6-теорема. *Агар* $\{f_n(x)\}$ *ва* $\{g_n(x)\}$ *кетма-кетликлар A тўпламда жамланувчи бўлган содда функциялардан иборат бўлиб, шу тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашса, у ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n(x)\, d\mu.$$

Исбот. $\{f_n(x)\}$ ва $\{g_n(x)\}$ кетма-кетликлар A тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашгани сабабли $n \to \infty$ да

$$\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ ва } \sup_{x\in A} |g_n(x) - g(x)| \to 0 \tag{11}$$

муносабатлар ўринли. Бундан ва содда функция учун Лебег интегралининг 1—3-хоссаларига асосан

$$\left| \int_A f_n(x)\, d\mu - \int_A g_n(x)\, d\mu \right| = \left| \int_A \{[f_n(x) - f(x)] - [g_n(x) -$$

$$- f(x)]\}\, d\mu \right| \leqslant \left| \int_A [f_n(x) - f(x)]\, d\mu \right| + \left| \int_A [g_n(x) - f(x)]\, d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| + \mu(A) \sup_{x\in A} |g_n(x) - f(x)|$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан (11) га асосан

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n(x)\, d\mu$$

тенглик келиб чиқади.$_*$

Бу параграфда таърифланган абстсракт маънодаги

Лебег интеграли учун 36—38-§ ларда сонлар ўқида аниқланган ўлчовли функциянинг Лебег интеграли учун исботланган теоремаларнинг барчаси ўз кучини сақлайди. Бу ерда у теоремалардан бирини абстракт Лебег интеграли учун исботлаш билан чегараланамиз.

40.7-теорема. *Агар $\varphi(x)$ функция $A \in Z$ тўпламда жамланувчи бўлиб, ўлчовли $f(x)$ функция учун $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ тенгсизлик ҳар бир $x \in A$ да бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция ҳам A тўпламда жамланувчи ва*

$$\int_A |f(x)|\, d\mu \leqslant \int_A \varphi(x)\, d\mu.$$

Исбот. Фараз қилайлик, $f(x)$ ва $\varphi(x)$ содда функциялар бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x \in A$ учун $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$ бўлгани туфайли A тўпламни сони чекли ёки саноқли $A_1, A_2, A_3, \ldots$ тўпламларнинг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкинки, ҳар бир A_k тўпламда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар мос равишда a_k ва b_k қийматларни қабул қилиб, улар учун $|a_k| \leqslant b_k$ тенгсизлик ўринли бўлади. $\varphi(x)$ функция A тўпламда жамланувчи бўлгани учун

$$\sum_k |a_k| \mu(A_k) \leqslant \sum_k b_k \mu(A_k) = \int_A \varphi(x)\, d\mu$$

тенгсизликдан $\sum\limits_k a_k \mu(A_k)$ қаторнинг абсолют яқинлашиши келиб чиқади. Бу эса $f(x)$ функциянинг A тўпламда жамланувчи эканлигини таъминлайди. Демак,

$$\int_A f(x)\, d\mu$$

мавжуд. Бундан ва

$$\left|\int_A f(x)\, d\mu\right| = \left|\sum_k a_k \mu(A_k)\right| \leqslant \sum_k |a_k| \mu(A_k) = \int_A |f(x)|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \int_A \varphi(x)\, d\mu$$

тенгсизликдан содда функция учун теореманинг исботи келиб чиқади.

Энди теоремани умумий ҳолда исботлаймиз. Фараз қилайлик, A тўпламда $\{f_n(x)\}$ содда функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга, $\{\varphi_n(x)\}$ жамланувчи содда функциялар кетма-кетлиги $\varphi(x)$ жамланувчи функцияга текис яқинлашсин. У ҳолда ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай N натурал сон мавжудки, барча $n > N$ учун

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ ва } |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли. Бундан ва теорема шартидан

$$|f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(x) = \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(x) -$$

$$- \varphi_n(x) + \varphi_n(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varphi_n(x) = \varepsilon + \varphi_n(x)$$

тенгсизликка эга бўламиз. ε нинг ихтиёрийлигидан эса барча $n > N$ учун

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi_n(x)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан ҳозиргина исботлаганимизга асосан

$$\int_A |f_n(x)|\, dx \leqslant \int_A \varphi_n(x)\, dx$$

тенгсизликни оламиз. Бу тенгсизлик барча $n > N$ учун ўринли бўлганлиги сабабли у $n \to \infty$ да ҳам ўринли, яъни

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(x)|\, dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n(x)\, dx.$$

40.5-теоремага асосан $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A \varphi_n(x)\, dx$ лимит мавжуд.

Бундан $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A |f_n(x)|\, dx$ лимитнинг ҳам мавжудлиги келиб чиқади. $\{f_n(x)\}$ ва $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетликлар A тўпламда мос равишда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларга текис яқинлашганликлари сабабли, 4-таърифга асосан

$$\int_A |f(x)|\, dx \leqslant \int_A \varphi(x)\, dx$$

тенгсизлик ўринли.$_*$

41-§. Тўпламлар системасининг ва ўлчовнинг тўғри кўпайтмаси. Фубини теоремаси

Математик анализда каррали интегрални такрорий интегралга келтириш масаласи муҳим роль ўйнайди. Қуйида исбот қилинадиган Фубини теоремаси Лебег каррали интеграли назариясида асосий теоремалардан бири бўлиб ҳисобланади. Бу теореманинг исботига киришишдан илгари мустақил аҳамиятга эга бўлган баъзи бир тушунча ва маълумотларни келтирамиз.

3-§ да $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тўпламнинг тўғри (Декарт) кўпайтмаси тушунчасини киритиб, бу кўпайтмани қуйидагича белгилаган эдик:

$$X = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

Агар $G_1, G_2, \ldots, G_n$ системалар мос равишда $X_1, X_2, \ldots, X_n$ тўпламларнинг қисм тўпламларидан тузилган системалар бўлса, у ҳолда

$$G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$$

система X тўпламнинг қисм тўпламларидан тузилган система бўлиб, G системанинг ҳар бир $A \in G$ элементи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

бу ерда

$$A_k \in G_k, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

41.1-теорема. *Агар G_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ системаларнинг ҳар бири ярим ҳалқа бўлса, у ҳолда $G = \prod_{k=1}^{n} G_k$ система ҳам ярим ҳалқа бўлади.*

Исбот. Теореманинг исботини $n = 2$ бўлган ҳол учун келтирамиз. Умумий ҳол математик индукция усули билан исботланади. Шундай қилиб, агар G_1 ва G_2 ярим ҳалқалар бўлса, $G = G_1 \times G_2$ ҳам ярим ҳалқа бўлади. Бунинг учун, ярим ҳалқанинг таърифига асосан $A, B \in G$ бўлса, $A \cap B \in G$ ва $A, B_1 \in G$ бўлиб, $B_1 \subset A$ бўлса, шундай $B_2, B_3, \ldots, B_m$, $B_k \cap B_j = \varnothing$, $k \neq j$, $B_k \in G$, $k = \overline{2,n}$ мавжудки, улар учун $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ эканлигини кўрсатишимиз керак. Фараз қилайлик, $A \in G_1 \times G_2$ ва $B \in G_1 \times G_2$ бўлсин, у ҳолда Декарт кўпайтманинг таърифига асосан

$$A = A_1 \times A_2, \quad A_1 \in G_1, \quad A_2 \in G_2, \tag{1}$$
$$B = B_1 \times B_2, \quad B_1 \in G_1, \quad B_2 \in G_2 \tag{2}$$

бўлиб, ушбу

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_1 \cap B_2)$$

тенглик ўринли.

Ҳақиқатан, $x \in A \cap B$ ихтиёрий элемент бўлсин. У ҳолда кўпайтманинг таърифига асосан $x \in A$ ва $x \in B$ бўлади.

$A = A_1 \times A_2$ ва $B = B_1 \times B_2$ (A_1, $B_1 \in G_1$; A_2, $B_2 \in G_2$)

бўлгани учун

$x = (x_1, x_2) \in A = A_1 \times A_2$ ва $x = (x_1, x_2) \in B = B_1 \times B_2$

муносабатлардан $x_1 \in A_1$, $x_1 \in B_1$ ва $x_2 \in A_2$, $x_2 \in B_2$ муносабатлар келиб чиқади. Булардан $x_1 \in A_1 \cap B_1$ ва $x_2 \in A_2 \cap B_2$ бўлиб, $x = (x_1,\ x_2) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ муносабат ўринли. Бундан x ихтиёрий элемент бўлгани учун

$$A \cap B \subset (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \tag{3}$$

муносабатга эга бўламиз.

Энди, $x = (x_1,\ x_2) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ бўлиб, ихтиёрий бўлсин. У ҳолда Декарт кўпайтманинг таърифига асосан $x_1 \in A_1 \cap B_1$ ва $x_2 \in A_2 \cap B_2$ муносабатлар ўринли. Булардан $x_1 \in A_1$, $x_1 \in B_1$ ва $x_2 \in A_2$, $x_2 \in B_2$ муносабатлар келиб чиқади. Бу муносабатлардан, хусусан,

$$x = (x_1,\ x_2) \in A_1 \times A_2 = A \text{ ва } x = (x_1,\ x_2) \in B_1 \times B_2 = B$$

муносабатларни оламиз. Булардан $x \in A \cap B$ бўлиб, x элементнинг ихтиёрийлигидан

$$(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \subset A \cap B \tag{4}$$

муносабатга эга бўламиз. (3) ва (4) муносабатлардан

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \tag{5}$$

тенглик келиб чиқади.

G_1 ҳамда G_2 системалар ярим ҳалқа бўлганлиги учун

$$A_1 \cap B_1 \in G_1,\ A_2 \cap B_2 \in G_2.$$

Бундан

$$A \cap B \in G_1 \times G_2$$

муносабат келиб чиқади.

Фараз қилайлик, энди (1) ва (2) муносабатлар билан бирга $B_1 \subset A_1$ ва $B_2 \subset A_2$ шартлар ҳам бажарилсин. У ҳолда G_1 ва G_2 системаларнинг иккаласи ҳам ярим ҳалқа бўлганлиги сабабли ярим ҳалқа таърифига асосан шундай $B_i^{(j)} \in G_i$ тўпламлар мавжудки, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$A_1 = B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \ldots \cup B_1^{(k)},$$
$$A_2 = B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \ldots \cup B_2^{(l)}.$$

Бундан қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\begin{aligned} A = A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup (B_1 \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1 \times B_2^{(l)}) \cup \\ \cup (B_1^{(1)} \times B_2) \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(l)}) \cup \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cup (B_1^{(k)} \times B_2) \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}) \cup \ldots \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}). \end{aligned}$$

Бунда $B_1 \times B_2 = B \in G_1 \times G_2$ ва $B_1^{(i)} \times B_2^{(j)} \in G_1 \times G_2$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,l}$. Теорема $n=2$ бўлган ҳол учун исбот бўлди.$_*$

41.2-изоҳ. Агар G_1 ва G_2 системалар ҳалқа (алгебра, σ-ҳалқа, σ-алгебра) бўлса, у ҳолда $G = G_1 \times G_2$ система, умуман айтганда, ҳалқа (алгебра, σ-ҳалқа, σ-алгебра) бўлмайди.

Мисол. M система ўзаро кесишмайдиган $[\alpha, \beta)$ кўринишдаги ярим интервалларнинг чекли системаси бўлсин. M системанинг ярим ҳалқа ташкил этиши равшан. M ярим ҳалқани ўз ичига олган минимал ҳалқани F_1 орқали белгилаймиз. 24.3-теоремага асосан F_1 системанинг ҳар бир $A \in F_1$ элементи сони чекли ўзаро кесишмайдиган $[\alpha_k, \beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ярим интервалларнинг йиғиндисидан иборат, яъни

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} [\alpha_k, \beta_k), \ [\alpha_k, \beta_k) \cap [\alpha_j, \beta_j) = \varnothing, \ k \neq j.$$

Агар $F_1 = F_2$ деб олиб, $F = F_1 \times F_2$ системани қарасак, у ҳолда $[0.1) \in F_1$ ва $[0, 1) \in F_2$ учун

$$\{(x, y) : 0 \leqslant x < 1, \ 0 \leqslant y < 1\} \in F_1 \times F_2 = F$$

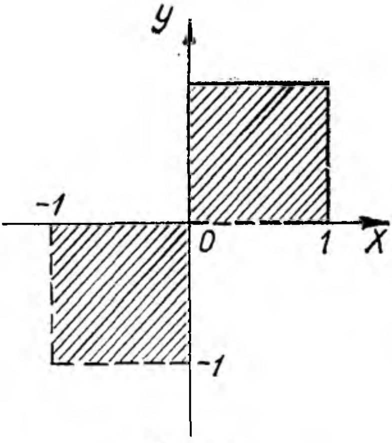
ҳамда $[-1, 0) \in F_1$ ва $[-1, 0) \in F_2$ учун

$$\{(x, y) : -1 \leqslant x < 0, \ -1 \leqslant y < 0\} \in F_1 \times F_2 = F$$

бўлиб, ушбу

$$\{(x, y) : 0 \leqslant x < 1, \ 0 \leqslant y < 1\} \cup \cup \{(x, y) : -1 \leqslant x < 0, \ -1 \leqslant y < 0\}$$

йиғинди F системанинг элементи бўла олмайди (11-шаклга қаранг).



11-шакл.

Таъриф. $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *ярим ҳалқаларда мос равишда* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *ўлчовлар берилган бўлсин.* $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ *ярим ҳалқада ушбу*

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2) \ldots \mu_n(A_n) \quad (A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$$

тенглик билан аниқланган μ *тўплам функцияси* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *ўлчовларнинг кўпайтмаси дейилади ва*

$$\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$$

кўринишда белгиланади.

41.3-теорема. $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ *ярим ҳалқада аниқланган* $\mu = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n$ *тўплам функцияси ўлчовдир.*

Исбот. Теоремани $n = 2$ бўлган ҳол учун исботлаш кифоя (ихтиёрий n учун исбот математик индукция усули орқали олинади).

Шундай қилиб, $G = G_1 \times G_2$ бўлиб, $A \times B \in G_1 \times G_2$ бўлсин. Дастлаб $\mu\ (A \times B) \geqslant 0$ эканини кўрсатамиз. Бу эса ҳар қандай $A \in G_1$ учун $\mu_1 (A) \geqslant 0$ ва ҳар қандай $B \in G_2$ учун $\mu_2\ (B) \geqslant 0$ бўлганлиги сабабли ушбу

$$\mu\ (A \times B) = \mu_1\ (A) \cdot \mu_2\ (B)$$

тенгликдан келиб чиқади.

Энди

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{r} (A_k \times B_k),\ (A_k \times B_k) \cap (A_j \times B_j) = \varnothing,\ k \neq j \qquad (6)$$

бўлганда

$$\mu\ (A \times B) = \mu_1\ (A) \cdot \mu_2\ (B) = \sum_{k=1}^{r} \mu_1\ (A_k) \cdot \mu_2\ (B_k)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун ёрдамчи $f_k\ (x)$ функцияни $A \in G_1$ тўпламда қуйидаги тенглик билан аниқлаймиз:

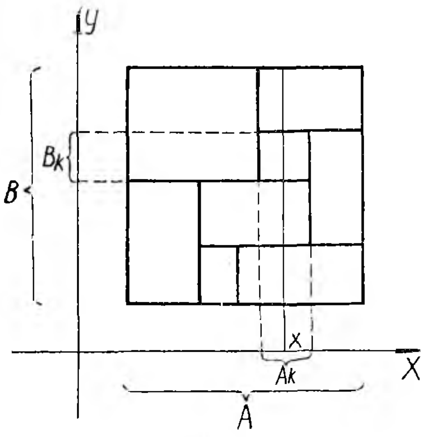
$$f_k\ (x) = \begin{cases} \mu_2\ (B_k), \text{ агар } x \in A_k \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x \,\overline{\in}\, A_k \text{ бўлса,} \end{cases} \qquad (7)$$

У ҳолда ҳар қандай $x \in A$ учун

$$\sum_{k=1}^{r} f_k\ (x) = \mu_2\ (B) \qquad (8)$$

тенглик ўринли.

Ҳақиқатан, $x \in A$ бўлиб, тайинланган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $y \in B$ учун $(x,\ y) \in A \times B$ муносабат ўринли. Бундан (6) тенгликка асосан шундай $m\ (1 \leqslant m \leqslant r)$ натурал сон топиладики, $(x,\ y) \in A_m \times B_m$ бўлади. Фараз қилайлик, бирор $y \in B$ учун $A_p \times B_p,\ A_q \times B_q, \ldots$ (p, q сонлар бир-бирига тенг эмас) $(x,\ y)$ жойлашган тўпламлар бўлсин (12-шакл). У ҳолда ихтиёрий $y \in B$ учун $(x,\ y) \in A_p \times B_p$, $(x,\ y) \in A_q \times B_q, \ldots$, муносабатлардан бири, яъни $x \in B_p$, $y \in B_q, \ldots$ муносабатлардан бири ўринли.



12- шакл.

Бундан $y \in B_p \cup B_q \cup \dots$ бўлиб, y элементнинг ихтиёрийлигидан

$$B \subset B_p \cup B_q \cup \dots \quad (9)$$

муносабат келиб чиқади. Иккинчи томондан, (6) тенгликка асосан ҳар бир k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ натурал сон учун $B_k \subset B$ муносабатга асосан

$$B_p \cup B_q \cup \dots \subset B$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан (9) муносабатга асосан

$$B = B_p \cup B_q \cup \dots$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликдаги B_p, B_q, . . ., тўпламлар ўзаро кесишмайди. Ҳақиқатан, агар $p \neq q$ да $B_p \cap B_q \neq \varnothing$ бўлганда эди, тайинланган x учун $x \in A_p \cap A_q \neq \varnothing$ муносабат ўринли бўлганлиги сабабли

$$(A_p \times B_p) \cap (A_q \times B_q) = (A_p \cap A_q) \times (B_p \cap B_q) \neq \varnothing$$

бўлиб ((5) тенгликка қаранг), бу муносабат (6) тенгликка зид натижага олиб келар эди. Демак, B тўплам ўзаро кесишмайдиган B_p, B_q, . . . тўпламларнинг йиғиндисидан иборат экан. Бундан μ_2 ўлчовнининг аддитивлик хоссасига асосан

$$\mu_2(B) = \mu_2(B_p) + \mu_2(B_q) + \dots$$

тенглик ўринли. Шунинг учун тайинланган $x \in A$ да (7) тенгликка асосан

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \mu_2(B_q) + \mu_2(B_q) + \dots = \mu_2(B)$$

тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни A тўпламда μ_1 ўлчов бўйича интеграллаб,

$$\sum_{k=1}^{n} \int_A f_k(x)\, d\mu_1 = \int_A \mu_2(B)\, d\mu_1$$

тенгликка ёки бундан (7) тенгликка асосан

$$\int_A f_k(x)\, d\mu_1 = \mu_2(B_k) \cdot \mu_1(A_k)$$

бўлгани учун

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_1(A_k)\cdot\mu_2(B_k) = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B)$$

тенгликка эга бўламиз.$_*$

41.4-теорема. *Агар G_1 ва G_2 ярим ҳалқаларда мос равишда аниқланган μ_1 ва μ_2 ўлчовлар σ-аддитив бўлса, у ҳолда $G = G_1 \times G_2$ ярим ҳалқада аниқланган $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ўлчов ҳам σ-аддитив ўлчов бўлади.*

Исбот. G системанинг таърифланишига асосан унинг ҳар қандай $C \in G$ элементи

$$C = A \times B,\quad A \in G_1,\quad B \in G_2$$

кўринишга эга бўлади. Фараз қилайлик, $\chi_A(x)$ функция $A \in G_1$ тўпламнинг характеристик функцияси бўлсин, яъни

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ агар } x \in A, \\ 0 \text{ агар } x \overline{\in} A. \end{cases}$$

Ушбу

$$f_C(x) = \chi_A(x)\cdot\mu_2(B)$$

белгилашни киритамиз. У ҳолда

$$\int_X f_C(x)\, d\mu_1 = \mu_1(A)\cdot\mu_2(B)$$

тенглик равшан.

Агар $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, $C_k \cap C_j = \varnothing$, $k \neq j$, $C_k \in G$ бўлса, у ҳолда μ_2 ўлчовнинг σ-аддитивлигига асосан

$$f_C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{C_k}(x)$$

тенглик келиб чиқади ((8) тенглик билан солиштиринг), бу ерда

$$f_{C_k}(x) = \chi_{A_k}(x)\cdot\mu_2(B_k). \tag{10}$$

Энди 38.13-теоремага асосан

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_{C_k}(x)\, d\mu_1 = \int_A \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_{C_k}(x)\Big)\, d\mu_1 = \int_A f_C(x)\, d\mu_1 =$$

$$= \mu_1(A)\cdot\mu_2(B) = \mu(C) \tag{11}$$

тенглик ўринли. Иккинчи томондан, (10) тенгликка асосан

$$\int_A f_{C_k}(x)\, d\mu_1 = \mu_1(A_k)\cdot\mu_2(B_k) = \mu(C_k).$$

Бундан ва (11) тенгликдан

$$\mu(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1(A_k)\cdot\mu_2(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(C_k)$$

тенглик келиб чиқади.*

41.5-изоҳ. Бу теорема исталган сони чекли ўлчовларнинг кўпайтмаси учун ҳам ўринлидир.

Агар G_1 ва G_2 системалар σ-алгебра бўлиб, мос равишда уларда аниқланган μ_1 га μ_2 ўлчовлар σ-аддитив бўлса, у ҳолда μ_1 ва μ_2 ўлчовларнинг кўпайтмаси деб $\mu_1\times\mu_2$ ўлчовнинг Лебег маъносидаги давомига айтилади ва $\mu_1\oplus\mu_2$ кўринишда белгиланади.

Фараз қилайлик, X ва Y тўпламлар берилган бўлиб, уларнинг ҳар бири барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлсин (у ҳолда $X\times Y$ кўпайтма текисликдан иборатдир). X тўпламда унинг барча Борель тўпламлари системасида аниқланган σ-аддитив μ_x ўлчов ҳамда Y тўпламда унинг барча Борель тўпламлари системасида аниқланган σ-аддитив μ_y ўлчов берилган бўлсин. Қуйидаги теоремани исботлаймиз:

41.6-теорема. *Манфий бўлмаган жамланувчи ва ўлчовли $f(x)$ функция ва ўлчовли $M\subset X$ тўплам учун тузилган*

$$A = \{(x, y) : x\in M,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

тўпламнинг ўлчови $f(x)$ функциянинг μ_x ўлчов бўйича M тўпламдаги Лебег *интегралига тенг, яъни*

$$\mu(A) = \int_M f(x)\,d\mu_x. \tag{12}$$

Исбот. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция ўлчовли M тўпламда ўзгармас c сонга тенг бўлсин:

$$f(x) = c,\ x\in M.$$

У ҳолда

$$A = \{(x, y) : x\in M,\ 0\leqslant y\leqslant c\} = M\times[0, c]$$

бўлиб,

$$\mu(A) = \mu(M\times[0, c]) = \mu_x(M)\cdot\mu_y([0, c]) = \int_X \chi_M(x)\,d\mu_x\cdot c =$$

$$= \int_M c\,d\mu_x = \int_M f(x)\,d\mu_x$$

бўлади. Бу ерда $\chi_M(x)$ функция M тўпламнинг характеристик функциясидир. Демак, $f(x)$ функция ўзгармас бўлган ҳол учун теорема исбот бўлди.

Энди, фараз қилайлик, $f(x)$ функция M тўпламда аниқланган содда функциядан иборат бўлсин, яъни

$$M = \bigcup_k M_k, \ M_k \cap M_j = \varnothing; \ k \neq j$$

бўлиб, ҳар бир M_k тўпламда $f(x)$ функция ўзгармас c_k сонга тенг бўлсин. У ҳолда

$$A = \{(x, y) : x \in M, \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} =$$
$$= \bigcup_k \{(x, y) : x \in M_k, \ 0 \leqslant y \leqslant c_k\} = \bigcup_k (M_k \times [0, c_k])$$

тенглик ўринли. Бундан 41-4- теоремага асосан

$$\mu(A) = (\mu_x \times \mu_y)(A) = \sum_k (\mu_x \times \mu_y)(M_k \times [0, c_k]) =$$
$$= \sum_k \mu_x(M_k) \cdot \mu_y([0, c_k]) = \sum_k \int_X \chi_{M_k}(x) d\mu_x c_k =$$
$$= \sum_k \int_{M_k} c_k \, d\mu_k = \int_M f(x) \, d\mu_x$$

тенгликка эга бўламиз. Бу ерда $\chi_{M_k}(x)$ функция M_k тўпламнинг характеристик функцияси. Шундай қилиб, теорема $f(x)$ функция содда функция бўлган ҳол учун ҳам исбот бўлди.

Энди жамланувчи ўлчовли $f(x)$ функция ихтиёрий бўлса у ҳолда M тўпламда $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи монотон ўсувчи $\{f_n(x)\}$ содда функциялар кетма-кетлигини олиб ([12] даги 285- бет, 26.10- теоремага қаранг), ушбу

$$A_n = \{(x, y) : x \in M, \ 0 \leqslant y \leqslant f_n(x)\}$$

тўпламни тузамиз. Юқорида исботлаганимизга асосан

$$\mu(A_n) = \int_M f_n(x) \, d\mu_x. \tag{13}$$

Энди A_n тўпламларнинг тузилишидан ва $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг монотон ўсувчилигидан ушбу

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан ва $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ функцияга текис яқинлашишидан

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

муносабат келиб чиқади. μ_x ва μ_y ўлчовлар σ- аддитив ўлчов бўлганлиги сабабли 41.4- теоремага асосан $\mu = \mu_x \times \mu_y$ ўлчов ҳам σ- аддитив ўлчов бўлиб, 26.11- натижага асосан

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

тенглик келиб чиқади. Бундан ва (13) тенгликдан

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, d\mu_x$$

тенгликни оламиз. 40.5- теоремага асосан

$$\lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, d\mu_x$$

лимит мавжуд. 40.6- теоремага асосан эса бу лимитнинг қиймати $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи содда функциялар кетма-кетлигини танлашга боғлиқ эмас. Бундан ва 40- § даги 4- таърифга асосан

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, d\mu_x = \int_M f(x)\, d\mu_x$$

тенгликка эга бўламиз. Бу эса теоремани исботлайди.*

41.7- теорема (Фубини). *Агар* μ_x ва μ_y *ўлчовлар мос равишда* X *ва* Y *тўпламларнинг барча ўлчовли тўпламлари системасида аниқланган σ-аддитив ўлчовлар бўлиб,* $f(x, y)$ *функция* $A \subset X \times Y$ *тўпламда* $\mu = \mu_x \times \mu_y$ *ўлчов бўйича жамланувчи бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглик ўринлидир*:

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x \right) d\mu_y.$$

Бу ерда $A_x = \{y : (x, y) \in A, \quad x \text{ — тайинланган}\}$.

$A_y = \{x : (x, y) \in A, \quad y \text{ — тайинланган}\}$.

Исбот. Теоремани дастлаб $f(x,y) \geqslant 0$ бўлган ҳол учун исботлаймиз. Айтайлик, Z ҳақиқий сонлар тўплами бўлиб, μ_z унинг барча ўлчовли тўпламлари системасида аниқланган Лебег ўлчови бўлсин. Қуйидаги тўпламни

$$U = X \times Y \times Z$$

ва шу билан бир қаторда

$$\lambda = \mu_x \times \mu_y \times \mu_z = \mu \times \mu_z$$

ўлчовни оламиз. U тўпламдаги W қисм тўпламни қуйидагича аниқлаймиз:

$$W = \{(x, y, z) : (x, y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}.$$

41.6- теоремага асосан

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y)\, d\mu. \tag{14}$$

Энди қуйидаги иккита тўпламни оламиз:

$$W_x = \{(y, z) : y \in A_x,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\},$$

$$W_y = \{(x, z) : x \in A_y,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}.$$

Шу билан бирга $\xi_x = \mu_y \times \mu_z$ ва $\xi_y = \mu_x \times \mu_z$ белгилашларни киритамиз. Булардан қуйидаги

$$\lambda(W) = \int_X \xi_x(W_x)\, d\mu_x, \tag{15}$$

$$\xi_x(W_x) = \int_{A_x} f(x, y)\, d\mu_y \tag{16}$$

тенгликлар 41.5-теоремага ва (12) тенгликка асосан бевосита келиб чиқади. Худди шунингдек,

$$\lambda(W) = \int_Y \xi_y(W_y)\, d\mu_y, \tag{17}$$

$$\xi_y(W_y) = \int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x. \tag{18}$$

Энди (14—(16) тенгликларни таққослаб,

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_X \Big(\int_{A_x} f(x, y)\ \ d\mu_y \Big) d\mu_x$$

тенгликни ҳамда (14), (17) ва (18) тенгликларни таққослаб,

$$\int_A f(x, y)\, d\mu = \int_Y \Big(\int_{A_y} f(x, y)\, d\mu_x \Big) d\mu_y$$

тенгликни оламиз. Шу билан теореманинг исботи $f(x, y) \geqslant 0$ бўлган ҳол учун тугалланди. Теореманинг умумий ҳол учун исботи

$$f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$$

тенглик ёрдамида $f(x, y) \geqslant 0$ ҳолга келтирилади. Бу ерда

$$f^+(x, y) = \frac{|f(x, y)| + f(x, y)}{2},\ f^-(x, y) = \frac{|f(x, y)| - f(x, y)}{2}.*$$

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Лебег интеграли учун бўлаклаб интеграллаш формуласини ёзинг.

2. P_0 — II бобда киритилган Кантор мукаммал тўплами бўлсин. Агар

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ бўлса, } x \in P_0, \\ 1 \text{ бўлса, } x \in [0,1] \setminus P_0 \end{cases}$$

бўлса,

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

ни ҳисобланг.

3. Q — II боб, 15-масалада тузилган тўплам бўлсин. Агар

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ бўлса, } x\in Q,\\ 1 \text{ бўлса, } x\in[0,\ 1]\setminus Q\end{cases}$$

бўлса,

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

ни ҳисобланг.

4. Q—II боб, 15- масаладаги тўплам бўлсин. Агар

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ бўлса, } x\in Q,\\ x \text{ бўлса, } x\in[0,\ 1]\setminus Q\end{cases}$$

бўлса,

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

ни ҳисобланг.

5. Агар $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots f_n(x), \ldots,$ $F(x)$ функциялар E тўпламда ўлчовли бўлиб, E да аниқланган ихтиёрий ўлчовли $g(x)$ функция учун

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\ g(x)\,dx=\int_E F(x)\,g(x)dx$$

муносабат ўринли бўлса, бундан

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F(x)$$

муносабатнинг деярли ўринлилиги келиб чиқадими?

6. (Е. Титчмарш масаласи). P_0 — II бобда киритилган Кантор тўплами бўлсин. Агар $f(x)$ функция P_0 да 0 ва P_0 га тўлдирувчи бўлиб, узунлиги 3^{-n} га тенг интервалда n га тенг бўлса,

$$\int_0^1 f(x)\,dx=3$$

эканини исботланг.

7. Агар $f_n(x \geqslant 0$ ва $\int\limits_E f_n(x)\,dx \to 0$ бўлса, у ҳолда $f_n(x)$ функция 0 га ўлчов бўйича яқинлашади, яъни $f_n(x) \Rightarrow 0$, аммо $f_n(x)$ нинг 0 га деярли яқинлашиши шарт эмас. Шунга мисол келтиринг.

8. Ушбу

$$\int\limits_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\,dx \to 0$$

муносабат $f_n(x)$ функциянинг 0 га ўлчов бўйича яқинлашишига, яъни $f_n(x) \Rightarrow 0$ га эквивалент эканини кўрсатинг.

VIII боб

L_p ФАЗОЛАР

Бирор ўлчовли E тўпламда аниқланган ва абсолют қийматининг p-даражаси билан жамланувчи $f(x)$ ўлчовли функциялар тўплами математиканинг турли соҳаларида муҳим татбиқларга эгадир. Бу бобда мана шу тўпламлар билан шуғулланамиз.

42- §. L_p синфлар ва асосий тенгсизликлар

Фараз қилайлик, бирор ўлчовли X тўпламнинг барча ўлчовли қисм тўпламлари системасида аниқланган σ-аддитив μ ўлчов берилган бўлсин. X тўпламда μ ўлчов бўйича жамланувчи функциялар тўпламини $L_1(X, \mu)$ орқали белгилаймиз. Бу тўплам 38.2- ва 38.8-теоремаларга асосан чизиқли фазодир (функцияларни қўшиш ва функцияларни сонга кўпайтириш амалига нисбатан).

Таъриф. *Функцияларнинг* $L_p(X, \mu)$ $(p > 0)$ *синфи деб*

$$\int\limits_X |f(x)|^p\,d\mu$$

интеграли мавжуд бўлган барча ўлчовли $f(x)$ *функциялар тўпламига айтилади.*

Атайлик, X тўпламнинг ўлчови чекли бўлсин, у ҳолда X тўпламда ўлчовли бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция учун

$$|f(x)| \leqslant \frac{1+f^2(x)}{2}$$

тенгсизлик ўринли бўлгани туфайли $L_2(X, \mu)\subset L_1(X, \mu)$ муносабат келиб чиқади. Аммо бунинг аксинчаси ўринли эмас. Бунга мисол келтириш учун X тўпламни [0, 1] сегментдан иборат деб, μ ўлчовни эса бу сегментдаги Лебег ўлчови деб оламиз. Агар $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ бўлса, у ҳолда $f(x)\in L_1(X, \mu)$, аммо $f(x)\overline{\in} L_2(X, \mu)$. Сўнгги муносабат $L_2(X, \mu)$ синфнинг таърифидан келиб чиқади.

Агарда X тўпламнинг ўлчови чексиз бўлса, у ҳолда $L_2(X, \mu), \subset L_1(X, \mu)$ муносабат ўринли эмас. Ҳақиқатан, агар X ни барча ҳақиқий сонлар тўплами (яъни $(-\infty, \infty)$ оралиқ) деб, μ ўлчовни эса Лебег ўлчови деб олсак, у ҳолда $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ функция $L_2(X, \mu)$ синфнинг элементи бўлиб, аммо у $L_1(X, \mu)$ синфнинг элементи бўлмайди. Чунки бу функция $(-\infty, \infty)$ оралиқда жамланувчи эмас.

Биз қуйида соддалик учун X тўпламни $(-\infty, \infty)$ оралиқдан иборат деб, μ ўлчовни эса Лебег ўлчови деб оламиз. Бу ҳол учун $L_p(X, \mu)$ синфни қисқалик мақсадида L_p орқали белгилаймиз. Баъзи бир мулоҳазаларни эса $(-\infty, \infty)$ оралиқнинг чегараланган қисми учун олиб борамиз.

42.1-теорема (Буняковский-Шварц тенгсизлиги). *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_2 синфга кирса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)\in L_1$* ва

$$\left|\int f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left\{\left[\int|f(x)|^2dx\right]\cdot\left[\int|g(x)|^2dx\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\qquad(1)$$

муносабатлар ўринли

Исбот. $f(x)\cdot g(x)$ кўпайтманинг жамланувчилиги ушбу

$$2\,|g(x)\cdot f(x)|\leqslant f^2(x)+g^2(x),$$

муносабатдан бевосита келиб чиқади. (1) тенгсизликнинг ўринлилигини кўрсатиш учун қуйидаги тенгсизликка мурожаат қиламиз:

$$\int\{\lambda f+g\}^2dx=\lambda^2\int f^2\,dx+2\lambda\int f\cdot g\,dx+\int g^2\,dx=$$
$$=a\lambda^2+2b\lambda+c\geqslant 0,$$

бу ерда $a=\int f^2(x)\,dx$, $b=\int f(x)g(x)\,dx$ ва $c=\int g^2(x)\,dx$. Маълумки, $a\lambda^2+2b\lambda+c$ ифода λ нинг ҳамма ҳақиқий қийматларида манфий бўлмаслиги учун a мусбат бўлган ҳолда коэффициентлар ушбу

$$b^2\leqslant ac$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва кифоядир. Бундан эса (1) тенгсизлик бевосита келиб чиқади.*

42.2-**натижа.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_p синфга кирса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)\in L_{p/2}$.

Исбот (1) тенгсизликни $f^{p/2}\cdot g^{p/2}$ функцияга татбиқ қилишдан келиб чиқади.$_*$

42.3-**натижа** *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_2 га кирса, у ҳолда $f\pm g$ ҳам L_2 га киради.*

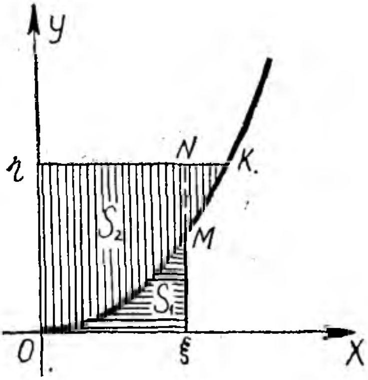
Бу натижа $(f\pm g)^2=f^2\pm 2f\cdot g+g^2$ тенгликдан келиб чиқади, чунки унинг ўнг томонидаги функциялар жамланувчи функциялардир.$_*$

42.4-**теорема** (Гёлдер тенгсизлиги). *Агар $p>1$ бўлиб, $f(x)\in L_p$, $g(x)\in L_{\frac{p}{p-1}}$ бўлса, у ҳолда $f(x)\cdot g(x)\in L_1$ ва*

$$\left|\int f(x)\cdot g(x)dx\right|\leqslant\left\{\int\left|f(x)\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int\left|g(x)\right|^{\frac{p}{1-p}}dx\right\}^{\frac{p-1}{p}} \tag{2}$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Исбот. $y=x^\alpha$. $\alpha>0$ функцияни қараймиз. Бу функция $x>0$ қийматларда мусбат ва ўсувчи функциядир. Шунинг учун ҳам $x=y^{1/\alpha}$ тескари функция мавжуд. x ўқдан ихтиёрий $\xi>0$ нуқтани, y ўқдан эса ихтиёрий $\eta>0$ нуқтани олиб, бу нуқталар ва $y=x^\alpha$ функциянинг графиги ёрдамида $O\xi M$ ва $O\eta K$ эгри чизиқли учбурчакларни ҳосил қиламиз (13- шакл). Ҳосил бўлган учбурчакларнинг юзлари мос равишда



13- шакл.

$$S_1=\int_0^\xi x^\alpha dx=\frac{\xi^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ \text{ва}\ S_2=\int_0^\eta y^{\frac{1}{\alpha}}dy=\frac{\eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

сонларга тенг. Иккинчи томондан, шаклдан

$$\xi\cdot\eta\leqslant S_1+S_2$$

тенгсизликнинг ўринли эканини кўриш қийин эмас. Тенглик ишораси эса $\eta=\xi^\alpha$ бўлгандагина ўринлидир, чунки бу ҳолдагина M ва K нуқталар устма-уст тушади. Агар $\alpha+1=p$ деб белгиласак, ушбу

$$\xi\cdot\eta \leqslant \frac{\xi^p}{p}+\frac{\eta^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} \tag{3}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Айтайлик, $f(x)\in L_p$ ва $g(x)\in L_p(p>1)$ бўлсин.

$$I_1 = \int |f(x)|^p\, dx \text{ ва } I_2 = \int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, dx$$

белгилашларни киритиб, $I_1 \neq 0$ ва $I_2 \neq 0$ бўлганда ξ ва η сонларни қуйидагича танлаймиз:

$$\xi = \frac{|f(x)|}{I_1^{\frac{1}{p}}} \text{ ва } \eta = \frac{|g(x)|}{I_2^{\frac{p-1}{p}}}$$

Бу тенгликларни (3) тенгсизликка қўйиб, ушбу

$$\frac{|f(x)\cdot g(x)|}{I_1^{\frac{1}{p}}\cdot I_2^{1-\frac{1}{p}}} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\cdot I_1}+\frac{|g(x)|^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1} I_2}$$

тенгсизликка келамиз. Бунинг ўнг томони жамланувчи бўлганлиги учун чап томони ҳам жамланувчидир. Шунинг учун бу тенгсизликни $\grave{E}$ тўплам бўйича интеграллаб, қуйидагини оламиз:

$$I_1^{-\frac{1}{p}} I_2^{\frac{1}{p}-1} \int |f(x)\, g(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p}{p-1}} = 1.$$

Демак,

$$\int |f(x)\, g(x)| dx \leqslant I_1^{\frac{1}{p}}\cdot I_2^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$=\left\{\int |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

Агар I_1 ёки I_2 лардан бири нолга тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ ёки $g(x)$ функция нолга эквивалент бўлиб, (2) тенгсизлик ўринлилигича қолади.*

42.5-**теорема** (Минковский ва Коши тенгсизликлари). *Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар L_p синфга кирса, у ҳолда* $(f(x)+g(x))\in L_p$ *ва*

$$\left\{\int|f+g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int|f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int|g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $(f+g)\in L_p$ муносабат ушбу

$$|f+g|^p \leqslant (|f|+|g|)^p \leqslant (|f|+|f|)^p + (|g|+|g|)^p =$$
$$= 2^p|f|^p + 2^p|g|^p$$

тенгсизликдан келиб чиқади. Гёлдер тенгсизлигига биноан:

$$\int|f+g|^p dx = \int|f+g|\cdot|f+g|^{p-1}dx \leqslant \int|f|\cdot|f+g|^{p-1}dx +$$
$$+\int|g|\cdot|f+g|^{p-1}dx \leqslant \left\{\int|f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int|f+g|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}} +$$
$$+\left\{\int|g|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int|f+g|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}.$$

Бу муносабатнинг икки томонини, $\int|f+g|^p dx \neq 0$ деб фараз қилиб,

$$\left\{\int|f+g|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}}$$

миқдорга бўлинса, (4) тенгсизлик келиб чиқади.*

Агар (4) тенгсизликда $p=2$ бўлса, Кошининг

$$\left\{\int|f+g|^2 dx^{\frac{1}{2}}\right\} \leqslant \left\{\int f^2 dx\right\}^{1/2} + \left\{\int g^2 dx\right\}^{1/2} \qquad (5)$$

тенгсизлиги келиб чиқади.

Бу тенгсизлик L_2 синфни ўрганишда катта аҳамиятга эга.

43-§. Норма. Ўрта маънода яқинлашиш ва суст яқинлашиш

Бу параграфда X тўпламни $[a, b]$ сегментга тенг деб оламиз. $L_2 = L_2(a, b)$ синфдан олинган ҳар бир $f(x)$ функция учун

$$+\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

сон $f(x)$ функциянинг *нормаси* дейилади ва бу норма $\|f\|$ билан белгиланади. Ҳар бир $f(x)\in L_2$ функция учун киритилган $\|f\|$ сон қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\|f\| \geqslant 0$ бўлиб, $f(x)\sim 0$ бўлгандагина $\|f\| = 0$.

2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$.

3. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ (учбурчак тенгсизлиги).

1 ва 2- муносабатлар норманинг таърифидан бевосита кўринади, 3- тенгсизлик Коши тенгсизлигидан келиб чиқади.

Нормадан фойдаланиб, L_2 фазода Эвклид фазоси учун ўринли бўлган кўпгина теоремаларни исбот этиш мумкин. Тегишли хоссалар қуйида келтирилади. L_2 фазонинг кўпгина хоссалари n ўлчамли Эвклид фазосининг хоссаларига жуда яқин. L_2 синфни биринчи марта немис математиги Д. Гильберт чуқур ўргана бошлаган ва бу фазога чекли ўлчамли Эвклид фазоси нуқтаи назаридан қараган; шу сабабли L_2 синфни *Гильберт фазоси* деб ҳам атайдилар. Бу фазода икки f ва g функция (кўпинча L_2 нинг элементларини унинг *нуқталари* ҳам дейилади) орасидаги масофа тушунчаси киритилади. Масофа сифатида улар айирмасининг нормаси қабул қилинади, яъни

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

Бу масофани одатда тўғри чизиқ, текислик ва Эвклид фазоларидаги масофа тушунчаларининг умумлашгани деб ҳам қараш мумкин.

Албатта, икки эквивалент функция бу фазода биргина нуқта сифатида қабул қилинади.

Масофа ёрдамида Гильберт фазоси нуқталари кетма-кетлиги учун яқинлашиш тушунчасини киритиш мумкин.

1-таъриф. *Агар* f, $f_n \in L_2$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ *учун* $n \to \infty$ *да* $\|f_n - f\| \to 0$ *бўлса, у ҳолда* f *нуқта* $\{f_n\}$ *кетма-кетликнинг лимити дейилади ва*

$$f_n \to f \text{ ёки } \lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad (1)$$

кўринишда ёзилади.

Бу маънода яқинлашишни *ўрта маънода яқинлашиш* дейилади.

Норманинг таърифига мувофиқ, (1) муносабатни яна қуйидагича ёзишимиз ҳам мумкин:

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx \to 0.$$

Агар $[a, b]$ сегментда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга текис яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик шу функцияга ўрта маънода ҳам яқинлашади.

Ҳақиқатан, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг $f(x)$ га текис яқинлашишидан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон ҳамда барча етарлича катта n натурал сонлар учун

$$|f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \varepsilon$$

муносабат барча $x \in [a, b]$ учун бажарилади. Бундан

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx \leqslant \varepsilon^2 (b-a)$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг $f(x)$ функцияга ўрта маънода яқинлашиши келиб чиқади.

Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $[a, b]$ сегментда $f(x)$ функцияга деярли яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик шу функцияга ўрта маънода яқинлашмаслиги мумкин. Масалан,

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{агар } x \in \left[a,\ a + \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{агар } x \in \left(a + \dfrac{1}{n},\ b\right] \end{cases}$$

функция барча $x \in (a, b]$ учун $n \to \infty$ да $f_n(x) \to 0$. Лекин

$$\int_a^b |f_n(x) - 0|^2 dx = \int_a^b |f_n(x)|^2\,dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} n\,dx = 1 \not\to 0.$$

Ўрта маънода яқинлашишга оид бир неча теоремани исбот қиламиз.

43.1-теорема. *Ўрта маънода яқинлашувчи $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик биргина лимитга эга.*

Исбот. $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик икки турли f ва $g \not\sim f$ лимитларга эга деб фараз қилайлик, яъни $f_n \to f$ ва $f_n \to g (n \to \infty)$ бўлсин. Норманинг 3-хоссасидан, яъни учбурчак тенгсизлигидан фойдаланиб, ушбу

$$\|f - g\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f_n - g\|$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин. Бу тенгсизликнинг ўнг томони $n \to \infty$ да нолга интилади; демак, биринчи аксиомага мувофиқ $f \sim g$ ёки f ва g функциялар L_2 фазода илгари айтганимиздек, бир нуқтанигина тасвирлайди; бу эса фаразимизга зид.*

43.2-теорема. *Агар $f_n \to f$ бўлса, у ҳолда $\|f_n\| \to \|f\|$.*

Исбот. Норманинг 3-хоссасига асосан $\|f\| \leqslant \|f_n\| + \|f - f_n\|$ ва $\|f_n\| \leqslant \|f\| + \|f_n - f\|$ тенгсизликлар ўринли. Булардан

$$\big|\|f_n\| - \|f\|\big| \leqslant \|f_n - f\|$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса теоремани исботлайди.*

Норманинг бу хоссаси унинг *узлуксизлиги* дейилади.

Энди ўрта маънода яқинлашиш тушунчаси деярли ва ўлчов бўйича яқинлашиш тушунчаларига нисбатан қандай муносабатда эканлигини аниқлаймиз.

43.3-**теорема.** *Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ўрта маънода $f(x)$ га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик $f(x)$ га ўлчов бўйича ҳам яқинлашади.*

Исбот. Ҳар қандай мусбат σ сон учун қуйидаги муносабатлар ўринли бўлади:

$$\rho^2(f_n, f) = \int_a^b (f_n - f)^2\, dx \geqslant \int_{A_n\sigma} (f_n - f)^2\, dx \geqslant \sigma^2 \mu(A_n(\sigma)), \qquad (2)$$

бу ерда $A_n(\sigma) = \dot{E}(|f_n - f| \geqslant \sigma)$. Теореманинг шартига мувофиқ $n \to \infty$ да

$$\rho(f_n, f) \to 0,$$

демак, (2) тенгсизликдан σ тайин мусбат сон бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty} \mu[A_n(\sigma)] = 0;$$

яъни $n \to \infty$ да

$$f_n \Rightarrow f. *$$

Исбот этилган теоремадан ва 33.5- Рисс теоремасидан қуйидаги натижа келиб чиқади.

43.4-**натижа.** *Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ўрта маънода $f(x)$ га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетликдан деярли яқинлашувчи $\{f_{n_k}(x)\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин.*

2-таъриф. Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги учун ушбу

$$\rho^2(f_m, f_n) = \int_a^b [f_m(x) - f_n(x)]^2\, dx \to 0 \qquad (3)$$

муносабат бажарилса (m билан n бир-бирига боғлиқ бўлмаган равишда чексизга интилганда), бу кетма-кетлик L_2 фазодаги фундаментал кетма-кетлик, баъзан эса Коши кетма-кетлиги дейилади.

Равшанки, (1) муносабатдан (3) муносабат келиб чиқади.

Бу таърифнинг биринчи таърифдан фарқи шундаки, бу ерда $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақида бирор нарса дейилмайди, яъни бу таърифда кетма-кетлик лимитининг мавжуд бўлиши шарт эмас.

Бу таърифдаги (3) шарт ҳақиқий сонларнинг яқинлашиши ҳақидаги Коши шартига ўхшашдир.

Математик анализдан маълумки, сонлар кетма-кетлиги учун яқинлашишнинг Коши шарти бажарилса, у кетма-кетлик лимитга эга бўлади.

Мана шунга ўхшаш жумла L_2 фазодан олинган кетма-кетликлар учун ҳам ўринлими ёки йўқми, яъни агар бирорта $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги учун (3) муносабат бажарилса, (1) муносабат ҳам бажариладими, деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради:

43.5-теорема (Фишер), *Агар* $\{f_n(x)\}$ *кетма-кетлик* L_2 *фазодаги фундаментал кетма-кетлик бўлса, у ҳолда* L_2 *фазода шундай* $f(x)$ *функция топиладики,* $f_n(x)$ *кетма-кетлик унга ўрта маънода яқинлашади.*

Исбот. Кетма-кетликнинг фундаменталлигига асосан, ҳар бир k натурал сон учун шундай n_k ва n_{k+1} натурал сонлар мавжудки, улар учун ушбу

$$\int_a^b [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]^2\,dx < \frac{1}{3^k}\ (k = 1, 2, \ldots)$$

муносабатлар бажарилади. Бундан

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \| < +\infty$$

эканлиги келиб чиқади.

42.1-Буняковский-Шварц тенгсизлигига биноан:

$$\int_a^b | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|dx \leq \sqrt{b-a}\, \| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|,$$

демак, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\,|\,dx$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

38.13-теоремага мувофиқ,

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\{ f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\}$$

қатор деярли яқинлашувчи бўлади. Бундан эса $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетликнинг деярли яқинлашувчилиги келиб чиқади.

Энди $f(x)$ функцияни қуйидагича тузамиз:

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x), & \text{агар } x \text{ нуқтада бу лимит чекли}\\ & \text{қийматга эга бўлса,}\\ 0, & \text{агар тегишли нуқтада бу лимит мавжуд}\\ & \text{бўлмаса ёки } \infty \text{ га тенг бўлса.}\end{cases}$$

Тузилган $f(x)$ функция L_2 фазога тегишли. Ҳақиқатан, $f(x)$ функциянинг таърифланишидан 38.11- Фату теоремасига асосан

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_a^b f^2_{n_k}(x)\,dx$$

бўлгани учун бундан $f(x)\in L_2$ муносабат келиб чиқади. Энди $f(x)$ функция $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ўрта маънода лимити эканлигини кўрсатамиз. Аввал $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га ўрта маънода яқинлашувчи эканлигини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат, 38.11- Фату теоремасига мувофиқ,

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\int_a^b [f_{n_k}(x)-f_{n_\nu}(x)]^2\,dx \geqslant \int_a^b [f_{n_k}(x)-f(x)]^2\,dx. \qquad (4)$$

$\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлганлиги сабабли берилган $\varepsilon>0$ сон учун шундай $n_0=n_0(\varepsilon)$ сон топиладики, барча $k>n_0$ ва $\nu>n_0$ сонлар учун

$$\int_a^b [f_{n_k}(x)-f_{n_\nu}(x)]^2\,dx<\varepsilon.$$

Бундан (4) га асосан:

$$\int_a^b [f_{n_k}(x)-f(x)]^2\,dx<\varepsilon\;(k>n_0)$$

ёки

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b [f_{n_k}(x)-f(x)]^2\,dx=0, \qquad (5)$$

яъни $\{f_{n_k}(x)\}$ кетма-кетлик ўрта маънода $f(x)$ функцияга яқинлашади. Энди $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ҳам $f(x)$ га ўрта маънода яқинлашишини кўрсатамиз.

Коши тенгсизлигига мувофиқ,

$$\left\{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left\{\int_a^b [(f-f_{n_k})+(f_{n_k}-f_n)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_a^b [f-f_{n_k}]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b [f_{n_k}-f_n]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

бу ерда ўнг томоннинг биринчи хади (5) га асосан $n\to\infty$ да нолга интилади, иккинчи ҳади ҳам $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигига асосан n ва $n_k\to\infty$ да нолга интилади.

Демак, $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг ўзи ҳам ўрта маънода $f(x)$ функцияга яқинлашар экан.$_*$

43.6-натижа. *Фишер теоремасининг шарти бажарилганда ушбу*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^2(x)\,dx=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

муносабат ҳам ўринли бўлади.

Исбот. 42-§ даги (5) Коши тенгсизлигига мувофиқ,

$$\left\{\int_a^b f_n^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\left\{\int_a^b f_n^2(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Булардан ва $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га ўрта маънода яқинлашишидан

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^2(x)\,dx=\int_a^b f^2(x)\,dx$$

тенглик келиб чиқади.$_*$

L_2 фазонинг Фишер теоремасида келтирилган хоссаси унинг *тўлалик хоссаси* дейилади; бу хосса тўғри чизиқ нуқталаридан иборат фазонинг тўлалик хоссасига ўхшашдир.

3-таъриф. *$L_2(a, b)$ фазодан олинган $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси деб ушбу*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

сонга айтилади. Бу сон қисқалик учун $(f,\ g)$ орқали белгиланади.

Бу сон учун ушбу $(f,\ g)\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$ Буняковский-Шварц тенгсизлиги ўринли.

4-таъриф. *Агар $\{f_n(x)\}$ $(f_n\in L_2)$ функциялар кетма-кетлиги ва ихтиёрий $\varphi(x)\in L_2$ функция учун*

$$(f_n, \varphi) \to (f, \varphi)$$

муносабат бажарилса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ *кетма-кетлик* $f(x)$ *га суст яқинлашувчи дейилади.*

43.7-теорема. *Агар* $\{f_n(x)\}$ *функциялар кетма-кетлиги ўрта маънода* $f(x)$ *га яқинлашса, у ҳолда бу кетма-кетлик* $f(x)$ *га суст маънода ҳам яқинлашади.*

Исбот. Теореманинг шартига ва Буняковский-Шварц тенгсизлигига асосан

$$|(\varphi, f_n - f)| = |(\varphi, f_n) - (\varphi, f)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|f_n - f\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

муносабат ўринли бўлади.*

Бу параграфда келтирилган тушунчаларнинг ва хоссаларнинг кўпчилиги, масалан, норма, ўрта ва суст маънода яқинлашиш ва уларга оид теоремаларнинг $L_p(a, b)$ $(p \geqslant 1)$ синф учун ҳам ўринлилигини кўрсатиш мумкин.

44- Ортонормал системалар

Француз математиги Фурье иссиқликнинг тарқалиш масаласи билан шуғулланиши натижасида берилган функцияни ушбу

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \qquad (1)$$

қатор шаклида тасвир этиш масаласини қўйган. Бу *қатор тригонометрик қатор* дейилади, бу ерда $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ — коэффициентлар ўзгармас сонлардир.

(1) қатор $f(x)$ га шундай яқинлашсинки, натижада уни ҳадлаб интеграллаш мумкин бўлсин. Масалан, бу яқинлашиш $[0, 2\pi]$ сегментда текис бажарилса, (1) қаторни ҳадлаб интеграллаш мумкин.

(1) қаторни $f(x)$ функцияга текис яқинлашувчи деб фараз қилиб, a_n ва b_n коэффициентларни $f(x)$ функция орқали ифодалаймиз. Бунинг учун ушбу

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

тенгликнинг ҳар икки томонини $\cos m x$ га (m — натурал сон) кўпайтириб, $[0, 2\pi]$ сегмент бўйича ҳадма-ҳад интеграллаймиз.

Натижада ушбу

$$\int_0^{2\pi} \cos m x \cos n x \, dx = \begin{cases} \pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0 \quad (m \text{ ва } n \text{ — ихтиёрий})$$

тенгликларга асосланиб,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx\, dx, \qquad (2)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx\, dx \qquad (3)$$

формулаларга эга бўламиз.

Лекин $f(x)$ функция олдиндан берилган бўлса, уни (I) қатор шаклида тасвир этиш мумкинлиги, умуман айтганда, ҳеч қаердан келиб чиқмайди. Шунинг учун масалага бир оз бошқача қараймиз, яъни масалани қаторни ёзишдан эмас, балки функцияни беришдан бошлаймиз ва бу функцияни тригонометрик функциялар ёки уларга ўхшаш бошқа функциялар системаси орқали ифода қилишга уринамиз.

1-таъриф. *Агар*

$$\int_a^b \varphi_i(x) \cdot \varphi_k(x)\, dx = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad (4)$$

тенгликлар бажарилса, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ *функциялар кетма-кетлиги* $[a, b]$ *сегментдаги ортонормал система дейилади.*

Масалан,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

функциялар кетма-кетлиги $[-\pi, \pi]$ сегментда ортонормал системадир.

2-таъриф. $\{\varphi_k(x)\}$ *ортонормал система ва* $f(x)$ *функция* L_2 *фазодан олинган ихтиёрий функция бўлсин.* $c_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ *сонни* $f(x)$ *функциянинг* $\{\varphi_k(x)\}$ *системага нисбатан Фурье коэффициенти,* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ *қаторни эса Фурье қатори дейилади.*

Энди $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$ йиғиндини тузиб, бу йиғинди билан $f(x)$ функция орасида L_2 фазода аниқланган масофага нисбатан қандай яқинлик бор, деган масала билан шуғулланамиз. Бунинг учун ушбу

$$\rho^2(S_n, f) = \int_a^b [S_n(x) - f(x)]^2\,dx$$

миқдорни ҳисоблаб чиқамиз:

$$\rho^2(S_n, f) = \int_a^b (S_n^2 - 2f S_n + f^2)dx = \int_a^b S_n^2\,dx - 2\int_a^b f S_n\,dx + \int_a^b f^2(x)dx,$$

$$\int_a^b S_n^2(x)dx = \sum_{i,k=1}^{n} c_i c_k (\varphi_i, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2, \qquad (5)$$

чунки $(f, \varphi_k) = c_k$ ва $i \neq k$ учун $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$,

$$\int_a^b f S_n\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Демак, (5) тенгликни ушбу

$$\rho^2(S_n, f) = \int_a^b f^2\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \qquad (6)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу формулани *Бессель айнияти* дейилади. Бу миқдор манфий бўлмаганлиги учун

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Бу тенгсизлик n нинг ҳамма натурал қийматлари учун ўринли. Бундан $n \to \infty$ да ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|f\|^2 \qquad (7)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик *Бессель тенгсизлиги* дейилади. Агар (7) да тенглик бажарилса, яъни

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 \qquad (8$$

бўлса, у ҳолда бу тенгликни *ёпиқлик формуласи ёки Парсеваль тенглиги* дейилади.

3-таъриф. *Агар (8) тенглик L_2 дан олинган ихтиёрий $f(x)$ функция учун бажарилса, у ҳолда $\{\varphi_n(x)\}$ система L_2 да ёпиқ дейилади.*

(6) дан (8) га асосан:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(S_n, f) = 0.$$

Демак, ёпиқлик формуласи бажарилганда $S_n(x)$ йиғинди Гильберт фазосидаги масофа маъносида (яъни ўрта маънода) $f(x)$ га яқинлашар экан.

44.1-теорема (Рисс—Фишер). *$\{c_n\}$ сонлар кетма-кетлиги учун $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ қатор яқинлашувчи бўлиб,*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

$[a, b]$ да аниқланган ортонормал функциялар кетма-кетлиги бўлсин. У ҳолда L_2 фазода биргина шундай $f(x)$ функция мавжудки, унинг учун c_k сонлар Фурье коэффициентлари бўлади ва ёпиқлик формуласи бажарилади.

Исбот. Аввало $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ёрдамида $\{S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)\}$ йиғиндилар кетма-кетлигини тузиб, $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигини кўрсатамиз.

Бунинг учун $m > n$ деб олиб, $\rho^2(S_m, S_n)$ масофани ҳисоблаймиз:

$$\rho^2(S_m, S_n) = \int_a^b \Big[\sum_{k=n+1}^{m} c_k \varphi_k(x)\Big|^2 dx = \sum_{i,k=n+1}^{m} c_i c_k (\varphi_i, \varphi_k) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2.$$

Теореманинг шартига кўра ҳар қандай мусбат ε сон учун шундай n_0 сон мавжудки, унинг учун $m > n > n_0$ бўлганда

$$\sum_{k=n+1}^{m} c_k^2 < \varepsilon$$

муносабат ўринли бўлади.

Демак, $m > n > n_0$ да $\rho^2(S_m, S_n) < \varepsilon$.

Бу муносабат $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг фундаменталлигини кўрсатади. Бундан 43.5-Фишер теоремасига мувофиқ, $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг бирор $f(x) \in L_2$ функцияга ўрта маънода яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади, яъни $n\to\infty$ да $\rho^2(S_n, f)\to 0$. 43.7- теоремага мувофиқ, бундан $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ га суст маънода ҳам яқинлашувчилиги келиб чиқади, яъни ҳар қандай $g(x)\in L_2$ учун

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\cdot S_n(x)\,dx=\int_a^b g(x)\cdot f(x)\,dx. \tag{9}$$

Аммо $n>k$ бўлганда

$$\int_a^b \varphi_k(x)\cdot S_n(x)\,dx=\int_a^b\Big[\sum_{i=1}^n c_k\varphi_i\cdot\varphi_k\Big]dx=c_k.$$

Бундан ва (9) дан

$$(\varphi_k, f)=\int_a^b \varphi_k(x)\cdot f(x)\,dx=c_k,$$

яъни c_k сон f нинг Фурье коэффициенти эканлиги келиб чиқади, демак, теореманинг биринчи қисми исбот этилди.

Теореманинг иккинчи қисми $\{S_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $f(x)$ функцияга ўрта маънода яқинлашишидан, яъни

$$\rho^2(S_n, f)=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n c_k^2\to 0$$

муносабатдан келиб чиқади.

Энди $f(x)$ нинг ягоналигини исбот қиламиз. Рисс—Фишер теоремасининг шартларини қаноатлантирадиган функция иккита деб фараз қиламиз ва иккинчи функцияни $g(x)$ билан белгилаймиз. У ҳолда биринчи шартга мувофиқ c_k сонлар f ва g функциялар учун Фурье коэффициенти бўлади ва иккинчи шартга кўра

$$\rho(S_n, f)\to 0,\ \rho(S_n, g)\to 0.$$

Булардан, $\rho(f, g)=0$ ёки $f\sim g$. Аммо L_2 фазода ўзаро эквивалент функцияларни битта элемент деб ҳисоблаганимиз учун биринчи ва иккинчи шартларни қаноатлантирадиган функциянинг ягоналиги келиб чиқади.$_*$

4- таъриф. *Агар L_2 (a, b) фазода $\{\varphi_k(x)\}$ функциялар системасига ортогонал бўлган бирорта ҳам функция мав-*

жуд бўлмаса[1], *бу функциялар системасини тўла система дейилади.* •

44.2-изох. Бу таърифда $\{\varphi_k(x)\}$ функциялар системасининг ортонормал бўлиши талаб қилинмайди.

44.3-теорема. *L_2 фазода $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормал функциялар системаси бўлиб, $\{c_k\}$ сонлар кетма-кетлиги учун $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 < +\infty$ шарт бажарилсин. У ҳолда L_2 фазода Фурье коэффициентлари c_k сонларга тенг бўлган биргина $f(x)$ функциянинг мавжуд бўлиши учун $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасининг тўла бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Кифоялиги. $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормал функциялар системасини тўла деб олиб, теорема шартини қаноатлантирувчи функциянинг ягоналигини кўрсатамиз. Бу эса 44.1-Рисс—Фишер теоремасидан бевосита келиб чиқади.

Зарурлиги. Теореманинг шартини қаноатлантирувчи функция биргина $f(x)$ бўлса-да, $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасини тўла эмас деб фараз қилайлик, у ҳолда нолга тенг функцияга эквивалент бўлмаган шундай $\omega(x)$ функция топиладики, унинг учун

$$\int_a^b \omega(x)\varphi_k(x)\,dx = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Бундан кўринадики, $\omega(x) + f(x)$ функция ҳам теореманинг шартини қаноатлантиради. Бу эса $f(x)$ нинг ягоналигига зид.*

44.4-теорема. *Ортонормал $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системасининг тўла бўлиши учун унинг ёпиқ бўлиши зарур ва кифоядир.*

Исбот. Кифоялиги. $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар системаси ёпиқ бўлсин. Агар бирорта $f(x) \in L_2$ функция бу системага ортогонал бўлса, у ҳолда

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Бундан ёпиқлик формуласига мувофиқ,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0 \text{ ёки } f \sim 0$$

---

[1] Айнан нолга тенг функцияга эквивалент бўлган функция ҳар қандай функциялар системасига ортогонал бўлганлиги учун бу таърифда бундай функциялар истисно қилинади.

муносабат келиб чиқади. Бу эса $\{\varphi_n(x)\}$ системанинг тўлалигини кўрсатади.

Зарурлиги. Энди, аксинча, $\{\varphi_n(x)\}$ система тўла бўлсин. Ёпиқлик формуласи бирорта $\varphi(x)$ функция учун ўринли эмас, деб фараз қиламиз. У ҳолда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|\varphi\|^2$, $(c_k = (\varphi, \varphi_k))$.

Рисс—Фишер теоремасига мувофиқ, шундай $f(x)$ функция топиладики, унинг учун ушбу

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = c_k, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

тенгликлар бажарилади ва $f(x) - \varphi(x)$ функция $\{\varphi_n(x)\}$ системага нисбатан ортогонал бўлади, яъни

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,\varphi_k(x)\,dx = 0 \text{ ёки } f \sim \varphi.$$

Сўнгги муносабатлар $\|f\| < \|\varphi\|$ тенгсизликка зид.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. L_2 фазода суст яқинлашишдан ўлчов бўйича яқинлашиш келиб чиқмаслигига мисол тузинг.

2. Агар $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги L_2 фазода $f(x)$ га суст яқинлашса, у ҳолда бирор M сон учун $\|f_n\| \leqslant M$ бўлишини исбот қилинг.

3. Агар $\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx$ ҳар қандай $f(x) \in L_2\,[0,1]$ функция учун мавжуд бўлса, у ҳолда $\varphi(x) \cdot \in L_2$ бўлишини исботланг.

4. Сони чекли функциялар системасининг L_2 да тўла бўла олмаслигини кўрсатинг.

5. Агар $p > 1$ бўлиб, Минковский тенгсизлигида тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $g(x) \sim kf(x)$ муносабатни исбот этинг.

6. Агар $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) \in L_p$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ функциялар кетма-кетлиги ҳамда $f(x) \in L_p$ функция учун $n \to \infty$ да

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^p\,dx \to 0$$

муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга p *кўрсаткичли ўрта маънода* (қисқача, *ўрта маънода) яқинлашади* дейилади. L_p фазода $(p > 1)$ $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга ўрта маънода яқинлашсин. У ҳолда $n \to \infty$ да

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^r \, dx \to 0 \quad (1 \leqslant r < p)$$

муносабатнинг ўринли эканлигини кўрсатинг.

7. $f(x) = x^{\alpha}$ функция қандай α ларда L_p [0, 1] фазога тегишли бўлади?

8. $\{x_n(t) = \sin n \pi t\}$ функциялар кетма-кетлигининг L_2 [0,1] фазода нолга суст яқинлашиши, аммо ўрта маънода яқинлашувчи эмаслигини кўрсатинг.

IX боб

ЎЗГАРИШИ ЧЕГАРАЛАНГАН ФУНКЦИЯЛАР

45-§. Монотон функциялар

Дастлаб, математик анализ курсидан маълум бўлган баъзи маълумотларни тўлиқлик учун келтирамиз.

1-таъриф. *$[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция берилган бўлсин. Агарда ҳар қандай $x_1, x_2 \in [a, b]$ учун $x_1 < x_2$ бўлганда*

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $f(x)$ функция монотон камаймайдиган функция дейилади.

Монотон ўсмайдиган функциянинг таърифи ҳам шунинг сингари берилади.

Барча ҳақиқий сонлар тўпламида берилган ҳар қандай функция учун

$$\lim_{h \to +0} f(x_0 + h) \text{ ва } \lim_{h \to -0} f(x_0 + h)$$

лимитлар мавжуд бўлса, бу лимитлар мос равишда $f(x)$ функциянинг x_0 ***нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари*** дейилади ҳамда мос равишда $f(x_0+0)$ ва $f(x_0-0)$ орқали белгиланади. Агар $f(x_0+0) = f(x_0-0)$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада *узлуксиз* дейилади. Мабодо $f(x_0+0)$ ва $f(x_0-0)$ лар мавжуд бўлиб, бир-бирига тенг бўлмаса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада ***биринчи тур узилишга эга*** дейилади ва $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ айирманинг қиймати $f(x)$ функциянинг шу x_0 нуқтадаги *сакраши* дейилади.

Монотон камаймайдиган функциянинг баъзи бир хоссаларини қуйида келтирамиз.

45.1-теорема. *$[a, b]$ сегментда монотон камаймайдиган ҳар қандай $f(x)$ функция шу сегментда ўлчовли, чегараланган ҳамда жамланувчи функциядир.*

Исбот. Ҳақиқатан, $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда монотонлигидан ҳар қандай $x\in[a, b]$ учун

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$$

тенгсизлик ўринли. Бундан $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда чегараланганлиги келиб чиқади. Энди унинг ўлчовли эканини кўрсатамиз. Шу мақсадда исталган d ҳақиқий сон учун ушбу

$$E_d=\{x:f(x)<d\}$$

тўпламни қараймиз. $f(x)$ функциянинг монотонлигидан $f(x)<d$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар мавжуд бўлса, E_d тўплам ёки $[d, c]$ сегмент ёки $[d, c)$ ярим сегмент кўринишидаги тўплам эканлиги келиб чиқади. Бу эса E_d тўпламнинг ўлчовли эканлигини кўрсатади. Бундан $f(x)$ функциянинг ўлчовли эканлиги келиб чиқади. Энди 36.1-теоремага асосан $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлади.$_*$

45.2-теорема. *Монотон функциянинг узилиш нуқталари фақат биринчи турдаги бўлиши мумкин.*

Исбот. Ҳақиқатан, $x_0\in[a, b]$ ихтиёрий нуқта бўлиб, $\{x_n\}$ $(x_n\in[a, b],\ n=1,2,\ \ldots)$ кетма-кетлик x_0 нуқтага чапдан яқинлашсин, яъни $x_n\to x_0-0$. 45.1-теоремага асосан $\{f(x_n)\}$ кетма-кетлик қуйидан ва юқоридан мос равишда $f(a)$ ва $f(b)$ сонлар билан чегаралангандир. Математик анализдаги монотон кетма-кетликнинг лимити ҳақидаги теоремага асосан бундай кетма-кетлик лимитга эга. $f(x)$ функциянинг монотонлигига асосан бу лимит нуқта ягонадир. Шу билан $f(x_0-0)$ нинг мавжудлиги исботланди. $f(x_0+0)$ нинг мавжудлиги шунга ўхшаш исботланади.$_*$

45.3-теорема. *Монотон функциянинг узилиш нуқталари тўплами кўпи билан саноқлидир.*

Исбот. Ҳақиқатан, $[a, b]$ сегментда монотон бўлган $f(x)$ функциянинг чекли сондаги сакрашларининг йиғиндиси $f(b)-f(a)$ айирмадан катта бўла олмайди. Бундан қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади: ҳар бир n натурал сон учун қиймати $\frac{1}{n}$ дан катта бўлган сакрашлар сони чеклидир. Булардан, $n=1, 2, 3,\ \ldots$ бўйича қўшиб чиқиб, сакраш нуқталардан иборат тўплам чекли ёки саноқли деган хулосани оламиз.

2-таъриф. *Агар $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ монотон функция учун $x_0 \in [a, b]$ нуқтада $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ тенглик бажарилса, у $x = x_0$ нуқтада чапдан узлуксиз, агарда $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ тенглик бажарилса, $x = x_0$ нуқтада ўнгдан узлуксиз функция дейилади.*

Келажакда ишлатиладиган монотон функцияларга мисоллар келтирамиз.

1. Айтайлик, $[a, b]$ сегментдан олинган сони чекли ёки саноқли $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нуқталарга $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ мусбат сонлар мос қўйилган бўлиб, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k < +\infty$ бўлсин. $[a, b]$ сегментда

$$h(x) = \sum_{x_n < x} h_n \tag{1}$$

тенглик билан аниқланган $h(x)$ функция *сакраш функцияси* дейилади. Бу функция $x = x_0$ нуқтада чапдан узлуксиз монотон функциядир. Ҳақиқатан, n натурал сонни шундай катта танлашимиз мумкинки, $x_k < x_0$ бўлганда $x_k < x_0 - \frac{1}{n}$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бундан $h(x)$ функциянинг таърифланишига асосан

$$h(x_0) = \sum_{x_k < x_0} h_k = \sum_{x_k < x_0 - \frac{1}{n}} h_k = h\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)$$

тенглик келиб чиқади. Бундан $n \to \infty$ да $h(x_0) = h(x_0 - 0)$ ни оламиз. Агар (1) тенглик билан аниқланган $h(x)$ функция ўрнига ушбу

$$h_1(x) = \sum_{x_k \leqslant x} h_k \tag{2}$$

тенглик билан аниқланган $h_1(x)$ функцияни олсак, бу функция узилиш нуқталари $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ лардан ва бу нуқталарга мос келган сакрашлари $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ сонлардан иборат бўлган ўнгдан узлуксиз монотон функция бўлади.

Ҳақиқатан, агар x нуқта x_k нуқталарнинг бирортаси масалан, $x = x_m$ билан мос тушса, у ҳолда

$$h_1(x_m + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_1(x_m + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_k \leqslant x_m + \varepsilon} h_k = \sum_{x_k \leqslant x_m} h_k,$$

$$h_1(x_m - 0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_1(x_m - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_k \leqslant x_m - \varepsilon} h_k = \sum_{x_k < x_m} h_k$$

тенгликлардан $h_1(x)$ функциянинг таърифланишига асосан

$$h_1(x_m + 0) - h_1(x_m - 0) = h_m$$

тенгликка эга бўламиз. Агар x нуқта x_k нуқталарнинг бирортаси билан устма-уст тушмаса, у ҳолда $\varepsilon > 0$ сонни шундай танлаш мумкинки, $x_k < x < x_{k+1}$ тенгсизлик билан бирга $x_k < x + \varepsilon < x_{k+1}$ тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Бундан ва $h_1(x)$ функциянинг таърифланишидан

$$h_1(x + \varepsilon) - h_1(x) = \sum_{x_k < x+\varepsilon} h_k - \sum_{x_k < x} h_k = 0$$

тенглик келиб чиқиб, $h_1(x)$ функция узлуксиз бўлади. Энди $h_1(x)$ функциянинг ўнгдан узлуксизлиги

$$h_1(x + 0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} h_1(x + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \sum_{x_k \le x+\varepsilon} h_k = \sum_{x_k < x} h_k = h_1(x)$$

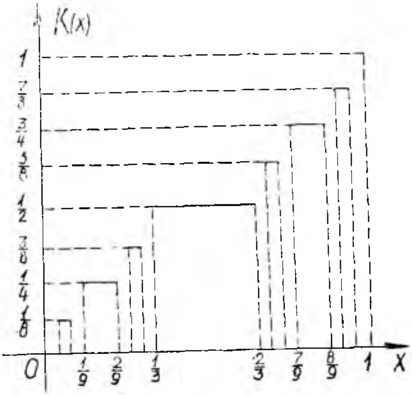
тенгликдан келиб чиқади.

2. $[0,1]$ сегментдаги P_0 Кантор мукаммал тўпламини қараймиз ва $K(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз: агар $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ бўлса, $K(x) = \frac{1}{2}$; иккинчи қадамда тушириб қолдириладиган $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ интервалда $K(x) = \frac{1}{4}$ ва $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ интервалда $K(x) = \frac{3}{4}$; ва умуман k-қадамда тушириб қолдириладиган чапдан биринчи интервалда $K(x) = \frac{1}{2^k}$, иккинчи интервалда $\frac{3}{2^k}$ ва ҳоказо, охирги интервалда $K(x) = \frac{2^k - 1}{2^k}$ каби аниқлаймиз. Бу жараённи чексизгача давом эттирамиз. Натижада $K(x)$ функция $[0, 1]$ сегментнинг P_0 Кантор мукаммал тўпламидан бошқа барча нуқталарида аниқланган бўлади (14-шакл). Энди P_0 тўпламда $K(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз: агар $x \in P_0$ бўлса,

$$K(x) = \sup_{\xi < x,\ \xi \in CP_0} K(\xi) \qquad (CP_0 = [0,1] \setminus P_0).$$

Бундан ташқари, $x = 0$ нуқтада $K(0) = 0$ деб олсак, $K(x)$ функцияни бутун $[0,1]$ оралиқда аниқлаган бўламиз. Бу усул билан аниқланган $K(x)$ функция монотон камаймайдиган узлуксиз функциядир. Ҳақиқатан, $K(x)$ функциянинг монотонлиги унинг таърифланишидан равшан. $K(x)$ функциянинг узлуксизлигини исботлаймиз. Агар бу функция $x = x_0$ нуқтада узилишга эга бўлса, у ҳолда $(K(x_0),\quad K(x_0 + 0))$

ёки $(K(x_0-0), K(x_0))$ сегментлардан бирортаси $K(x)$ функциянинг қийматларини ўз ичига олмайди. Лекин $K(x)$ функциянинг таърифланишига асосан унинг қийматлари [0,1] интервалдаги барча иккилик рационал сонлардан иборат бўлиб, унда зич жойлашган. Бу қарама-қаршилик $K(x)$ функциянинг узлуксизлигини исботлайди. $K(x)$ функция *Кантор функцияси* дейилади. Бу функцияга келгусида бир неча марта мурожаат этамиз.



14- шакл.

45.4-теорема. *Чапдан узлуксиз бўлган ҳар қандай монотон функцияни ягона усул билан узлуксиз монотон функция ва чапдан узлуксиз бўлган сакраш функциясининг йиғиндиси сифатида ёзиш мумкин.*

Исбот. Айтайлик, $f(x)$ чапдан узлуксиз монотон функция бўлсин. Бу функциянинг узилиш нуқталарини $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$ орқали ва бу нуқталарга мос келган функциянинг сакрашларини $h_1, h_2, \dots h_n, \dots$ орқали белгилаймиз, $h(x)$ орқали қуйидаги функцияни белгилаймиз:

$$h(x) = \sum_{x_n<x} h_n.$$

$f(x)-h(x)=\varphi(x)$ тенглик билан аниқланган $\varphi(x)$ функция камаймайдиган узлуксиз функция эканлигини кўрсатсак, теорема исботланган бўлади. Дастлаб $\varphi(x)$ функциянинг камаймайдиган функция эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $x' \leqslant x''$ деб олиб,

$$\varphi(x'')-\varphi(x') = [f(x'')-f(x')]-[h(x'')-h(x')]$$

айирмани қарасак, у ҳолда бу тенгликнинг ўнг томонида $f(x)$ функциянинг $[x', x'']$ оралиқдаги тўла орттирмаси билан, унинг шу оралиқдаги сакрашлари йиғиндисининг фарқи турганлигини кўрамиз. $f(x)$ функция монотон бўлгани учун бу айирманинг манфий эмаслиги равшан. Демак, $\varphi(x)$ камаймайдиган функция экан. Энди $\varphi(x)$ нинг узлуксизлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $x=x_0$ нуқтани ихтиёрий танлаб, қуйидаги тенгликларни ёзишимиз мумкин:

$$\varphi(x_0-0)=f(x_0-0)-h(x_0-0)=f(x_0-0)-\sum_{x_n<x_0} h_n ,$$

$$\varphi(x_0+0)=f(x_0+0)-h(x_0+0)=f(x_0+0)-\lim_{\varepsilon\to 0+}\sum_{x_n<x_0+\varepsilon} h_n=$$

$$=f(x_0+0)-\sum_{x_n\leqslant x_0} h_n .$$

Бундан

$$\varphi(x_0+0)-\varphi(x_0-0)=f(x_0+0)-f(x_0-0)-h_0=0$$

тенгликни оламиз, бу ерда h_0 сон $h(x)$ функциянинг $x=x_0$ нуқтадаги сакраши. Бу тенгликдан, $f(x)$ ва $h(x)$ функцияларнинг чапдан узлуксизлигидан ҳамда $x=x_0$ нуқтанинг ихтиёрийлигидан $\varphi(x)$ функциянииг узлуксизлиги келиб чиқади.*

46- §. Монотон функциянинг ҳосиласи

Маълумки, $f(x)$ функциянинг ҳосиласи

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

мавжуд бўлиши ёки бўлмаслиги мумкин, лекин қуйидаги тўрт ифоданинг ҳар бири аниқ бир маънога эга бўлиб ё чекли қийматга, ёки $+\infty$ га ёки $-\infty$ га тенг:

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D^+f(x),$$

$$\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D_+f(x),$$

$$\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D^-f(x),$$

$$\underline{\lim_{h\to-0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=D_-f(x).$$

D^+f, D_+f, D^-f, D_-f сонлар f нинг x нуқтадаги *ҳосила сонлари* дейилади.

Агар $D^+f=D_+f(D^-f=D_-f)$ бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция *ўнг* (мос равишда *чап*) *ҳосилага эга* дейилади ва бу ҳосилалар $f'_+(x)$ (мос равишда $f'_-(x)$) билан белгиланади.

Табиийки, функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлиши учун юқоридаги тўртта ҳосила сонларнинг бир-бирига тенг бўлиши зарур ва кифоядир.

Мисоллар. 1) $f(x)=|x|$ функция $x=0$ нуқтада турли ўнг ва чап ҳосилаларга эга.

Ҳақиқатан,

$$D^+f=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1,$$

$$D_+f=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1,$$

$$D^-f=\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{|h|-0}{h}=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{|-h|-0}{-h}=-\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=-1,$$

$$D^-f=\underline{\lim_{h\to-0}}\frac{|h|-0}{h}=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{|-h|-0}{-h}=-\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=-1.$$

$$2)\ f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

функция учун $x=0$ нуқтада:

$$D_+f=-1,\ D^+f=1,\ D_-f=-1,\ D^-f=1.$$

Ҳақиқатан,

$$D^+f=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\overline{\lim_{h\to+0}}\sin\frac{1}{h}=1,$$

чунки $\sin x$ функциянинг энг катта қиймати $+1$ га тенг;

$$D_+f=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\underline{\lim_{h\to+0}}\sin\frac{1}{h}=-1,$$

чунки $\sin x$ функциянинг энг кичик қиймати -1 га тенг. Худди шунингдек,

$$D^-f=\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{(-h)\sin\frac{1}{(-h)}-0}{(-h)}=$$

$$=-\underline{\lim_{h\to+0}}\sin\frac{1}{h}=1;$$

$$D_-f=\underline{\lim_{h\to-0}}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{-h\sin\frac{1}{(-h)}-0}{(-h)}=$$

$$= -\overline{\lim_{h\to -0}} \sin\frac{1}{h} = -1.$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases} ax\sin^2\frac{1}{x}+bx\cos^2\frac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ cx\sin^2\frac{1}{x}+dx\cos^2\frac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$$

бу ерда $a<b$, $c<d$.

$x=0$ нуқтада:

$$D_+f=a,\ D^+f=b,\ D_-f=c,\ D^-f=d.$$

Ҳақиқатан,

$$D^+f=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{ah\sin^2\frac{1}{h}+bh\cos^2\frac{1}{h}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to+0}\left(a+(b-a)\cos^2\frac{1}{h}\right)=a+(b-a)\cdot 1=b,$$

чунки $\cos^2 x$ функциянинг энг катта қиймати $+1$ га тенг.

$$D_+f=\lim_{h\to+0}\frac{ah\sin^2\frac{1}{h}+bh\cos^2\frac{1}{h}-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to+0}\left(a+(b-a)\cos^2\frac{1}{h}\right)=a+(b-a)\cdot 0=a,$$

чунки $\cos^2 x$ функциянинг энг кичик қиймати 0 га тенг. Худди шунингдек,

$$D^-f=\overline{\lim_{h\to-0}}\frac{ch\sin^2\frac{1}{h}+dh\cos^2\frac{1}{h}-0}{h}=$$

$$=\underline{\lim_{h\to-0}}\left(c+(d-c)\cos^2\frac{1}{h}\right)=c+(d-c)\cdot 1=d;$$

$$D_-f=\lim_{h\to-0}\frac{ch\sin^2\frac{1}{h}+dh\cos^2\frac{1}{h}-0}{h}=$$

$$=\underline{\lim_{h\to-0}}\left(c+(d-c)\cos^2\frac{1}{h}\right)=c+(d-c)\cdot 0=c.$$

Бу мисоллар, ҳақиқатан ҳам, ҳосила сонларнинг турли бўлиши мумкинлигини кўрсатади.

46.1-**теорема** (Лебег). *$[a, b]$ сегментда аниқланган ихтиёрий монотон функция бу сегментнинг деярли ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга.*

Исбот. Аввал теоремани $[-a, a]$ сегментда узлуксиз монотон функциялар учун исбот этиб, сўнгра шу сегментда узлуксиз бўлмаган монотон функциялар учун ўринлилигини кўрсатамиз. Бундан теореманинг ихтиёрий $[a, b]$ сегмент учун исботи $y=\frac{b+c}{2}+\frac{b-a}{2a}x$ чизиқли алмаштириш орқали келиб чиқади.

Узлуксиз функцияларга оид қуйидаги леммани исбот қиламиз:

46.2-лемма (Ф. Рисс). *$[-a, a,]$ сегментда аниқланган узлуксиз $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. E тўплам $[-a, a]$ сегментнинг шундай ички x нуқталаридан иборат бўлсинки, бу нуқталарнинг ҳар биридан ўнгда*

$$\varphi(\xi)>\varphi(x) \qquad (x<\xi) \tag{1}$$

муносабатни қаноатлантирадиган ξ нуқта мавжуд бўлсин. У ҳолда E очиқ тўплам бўлиб, уни тузувчи (a_k, b_k) оралиқларнинг ҳар бирида $\varphi(a_k)\leqslant\varphi(b_k)$ тенгсизлик бажарилади.

Леммaнинг исботи. Дарҳақиқат, E очиқ тўплам, чунки $\xi>x_0$ ва $\varphi(\xi)>\varphi(x_0)$ бўлса, у ҳолда φ нинг узлуксизлигига мувофиқ x_0 нинг бирон атрофидан олинган x нинг ҳамма қийматлари учун ҳам $\xi>x$, $\varphi(\xi)>\varphi(x)$ тенгсизликлар ўринлилигича қолади. Агар, масалан, φ камаювчи функция бўлса, у ҳолда E бўш тўплам бўлади.

Энди (a_k, b_k) оралиқ E тўпламни тузувчи оралиқларнинг бири бўлсин. Бу тузувчи оралиқдан олинган ихтиёрий x нуқта учун $\varphi(x)\leqslant\varphi(b_k)$ тенгсизликнинг ўринлилиги кўрсатилса, у ҳолда x ни a_k га интилтириб, (1) тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Дарҳақиқат, x_1 нуқта x ва b_k нуқталар орасида бўлиб (яъни $x<x_1<b_k$),

$$\varphi(x_1)>\varphi(b_k) \tag{2}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ва b_k га энг яқин нуқта бўлсин. У ҳолда $x_1=b_k$ тенгликнинг ўринлилигини кўрсатамиз. Агар бундай бўлмаса, E нинг таърифига кўра шундай $\xi_1<b_k$ нуқта мавжудки, унинг учун

$$\varphi(x_1)<\varphi(\xi_1) \tag{3}$$

тенгсизлик ўринли; иккинчи томондан,

$$\varphi(\xi_1)\leqslant\varphi(b_k). \tag{4}$$

Сўнгги (2), (3) ва (4) тенгсизликлар зиддият ҳосил қилади.

Демак, $x_1 = b_k$ ва юқоридаги мулоҳазага кўра $\varphi(a_k) \leqslant \varphi(b_k)$, яъни лемма исботланди.$_*$

46.3-изоҳ. (1) шартларни қаноатлантирувчи x нуқтани, қисқалик учун, *ўнгга кўтарилиш нуқтаси* дейилади. Чапга кўтарилиш нуқтаси таърифи ҳам шунга ўхшаш берилади: агар x нуқта учун

$$\xi < x, \ \varphi(\xi) > \varphi(x)$$

шартларни қаноатлантирувчи ξ нуқта топилса, *x чапга кўтарилиш нуқтаси* дейилади. Юқоридагига ўхшаш, чапга кўтарилиш нуқталари тўплами очиқлиги ҳамда бу тўпламни тузувчи (a_k, b_k) оралиқларда

$$\varphi(a_k) \geqslant \varphi(b_k)$$

муносабатларнинг ўринлилиги кўрсатилади.

Энди монотон $f(x)$ функцияни $[-a, a]$ сегментда узлуксиз деб, теореманинг исботига ўтамиз. Масалан, $f(x)$ камаймайдиган бўлсин. Ушбу

$$\text{а)}\ D_+ f < +\infty, \qquad \text{б)}\ D^+ f \leqslant D_- f$$

тенгсизликларнинг деярли ўринлилигини фараз қилган ҳолда теоремани исботлаймиз.

Дарҳақиқат, $f(x)$ камаймайдиган функция бўлгани сабабли

$$f_1(x) = -f(-x)$$

функция ҳам камаймайдиган функциядир ҳамда

$$D^+ f_1(x) = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{-f[-(x+h)] + f(-x)}{h} =$$

$$= \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = \overline{\lim_{\tau\to-0}} \frac{f(-x+\tau) - f(-x)}{\tau} =$$

$$= D \ \ f(-x)$$

ва

$$D_- f_1(x) = \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{-f(-x-h) + f(-x)}{h} =$$

$$= \underline{\lim_{h\to-0}} \frac{f(-x-h) - f(-x)}{-h} = \underline{\lim_{\tau\to+0}} \frac{f(-x+\tau) - f(-x)}{\tau} =$$

$$= D_+ f(-x).$$

Энди, б) тенгсизликни $f_1(x) = -f(-x)$ функцияга татбиқ қилинса, қуйидаги тенгсизликнинг деярли бажарилиши келиб чиқади:

$$D^+f_1(x) = D^-f(-x) \leqslant D_-f_1(x) = D_+f(-x),$$

яъни

$$D^-f(-x) \leqslant D_+f(-x).$$

D_+f, D^+f, D^-f ва D_-f сонларнинг таърифланишидан ушбу

$$D_+f \leqslant D^+f \text{ ва } D_-f \leqslant D^-f$$

тенгсизликлар бевосита келиб чиқади.

Булардан ҳамда а) ва б) тенгсизликлардан

$$D^+f \leqslant D_-f \leqslant D^-f \leqslant D_+f \leqslant D^+f < \infty$$

тенгсизликларнинг деярли бажарилиши келиб чиқади: булардан эса чекли ҳосиланинг деярли мавжудлиги аниқ кўриниб турибди.

Теоремани тўла исботлаш учун а) ва б) тенгсизликларни исботлаш қолди.

а) тенгсизликни исбот этмоқ учун

$$E_\infty = \{x : D^+f(x) = \infty\} \quad \text{ва } E_c = \{x : D^+f(x) > c\}$$

тўпламларни киритамиз; $E_\infty \subset E_c$ экани равшан. Агар $D^+f(x)>c$ бўлса, у ҳолда шундай $\xi(>x)$ нуқта мавжудки, унинг учун

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} > c.$$

Бундан, агар $g(x) = f(x)-cx$ деб олсак, у ҳолда: $g(\xi)>g(x)$. Демак, E_c тўплам $g(x)$ функция учун юқоридаги леммада аниқланган (a_k, b_k) оралиқларда жойлашган. Шу билан бирга, ўша леммага асосан,

$$f(b_k) - cb_k \geqslant f(a_k) - ca_k \text{ ёки } c\,(b_k - a_k) \leqslant f(b_k) - f(a_k)$$

тенгсизликлар бажарилади. Бундан:

$$c\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \sum_k [f(b_k) - f(a_k)] \leqslant f(b) - f(a).$$

Бу тенгсизликлардан кўринадики, c етарли катта бўлганда (a_k, b_k) оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси истаганча кичик қилиниши мумкин. Демак, E_∞ тўпламнинг ўлчови нолга тенг, яъни а) муносабат деярли ўринли.

б) тенгсизлик ҳам юқоридаги мулоҳазаларни кетма-кет татбиқ қилиш билан исбот этилади. Бу тенгсизликка тескари бўлган

$$D^+f > D_-f$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами E^* ушбу

$$D_-f < c < C < D^+f$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами E_{cC} ларнинг йиғиндисига тенг; бунда c ва C сонлар, $c<C$ муносабатни қаноатлантирган ҳолда, барча рационал қийматларни қабул қилади, яъни

$$E^* = \bigcup_{\substack{c\leqslant C_1 \\ Cc\in Q}} E_{cC}. \tag{5}$$

бу ерда Q — рационал сонлар тўплами. Аммо $\{(c, C): c\in Q, C\in Q\}$ тўплам саноқли бўлгани учун (5) йиғинди ҳадларининг сони саноқли. Демак, агар E_{cC} лар ҳар бирининг ўлчови ноль эканлиги кўрсатилса, E^* тўпламнинг ўлчови ҳам ноллиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, теоремани исботлаш учун E_{cC} тўпламнинг ўлчови ноль эканлигини кўрсатиш кифоя.

$x\in E_{cC}$ бўлсин. У ҳолда $D^-f<c$ бўлганлиги учун x дан чапда ётувчи ҳамда

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}<c \tag{6}$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи ξ нуқта мавжуд. $\xi-x\leqslant 0$ бўлгани учун (6) тенгсизликдан

$$f(\xi)-c\xi>f(x)-cx$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, x нуқта $g(x)=f(x)-cx$ функциянинг чапга кўтарилиш нуқтаси. Бу функцияга Рисс леммасини ва унинг изоҳини татбиқ қилиб, чапга кўтарилиш нуқталаридан иборат бўлган очиқ тўпламнинг тузувчи оралиқлари учун

$$f(a_k)-ca_k\geqslant f(b_k)-cb_k$$

тенгсизликни, бундан эса

$$f(b_k)-f(a_k)\leqslant c(b_k-a_k) \tag{7}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Юқорида олинган x нуқта топилган (a_k, b_k) оралиқларнинг бирида ётади. Бу нуқтада

$$D^+f>C$$

бўлгани учун (a_k, b_k) оралиқда

$$\xi>x,\ \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}>C \tag{8}$$

тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқтани топиш мумкин. Кейинги ясашларимизни (a_k, b_k) оралиқларнинг ичида бажарамиз.

(8) тенгсизликлар x нуқтанинг $f(x) - Cx$ функция учун ўнгга кўтарилиш нуқтаси эканлигини кўрсатади. Бу функциянинг (a_k, b_k) оралиқдаги барча ўнгга кўтарилиш нуқталари тўплами очиқ бўлиб, бу тўплам (a_{kj}, b_{kj}) $(j = 1,2, \ldots)$ тузувчи оралиқларнинг йиғиндисига тенг, шу билан бирга бу оралиқларнинг чегарасида

$$f(a_{kj}) - Ca_{kj} \leqslant f(b_{kj}) - Cb_{kj}$$

ёки

$$f(b_{kj}) - f(a_{kj}) \geqslant C(b_{kj} - a_{kj}).$$

Буни j индекс бўйича йиғиб,

$$\sum_j (b_{kj} - a_{kj}) \leqslant \frac{1}{C}\sum_j [f(b_{kj}) - f(a_{kj})] \leqslant \frac{1}{C}[f(b_k) - f(a_k)]$$

тенгсизликларни ҳосил қиламиз. (7) дан фойдаланиб

$$\sum_j (b_{kj} - a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C}(b_k - a_k)$$

муносабатга, k бўйича йиғиб эса

$$\sum_k \sum_j (b_{kj} - a_{kj}) \leqslant \frac{c}{C}\sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{c}{C}(a + a) = \frac{2ac}{C} \qquad (9)$$

муносабатларга эга бўламиз. Кўринадики, (a_{kj}, b_{kj}) оралиқлар системаси, (a_k, b_k) оралиқлар системаси каби, E_{cC} тўпламни қоплайди, аммо (a_{kj}, b_{kj}) оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси (a_k, b_k) лар узунликларининг йиғиндисидан кичик.

E_{cC} тўпламнинг ҳар бир x нуқтаси учун (a_{kj}, b_{kj}) оралиқларнинг ичида юқоридаги ясашларни қайтариш мумкин. Натижада янги учинчи хил (a_{kjm}, b_{kjm}) $(m = 1, 2, \ldots)$ системани ва тўртинчи хил (a_{kjmn}, b_{kjmn}) $(m, n = 1,2, \ldots)$ системани ҳосил қиламиз ва булар учун:

$$\sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) \leqslant \frac{c}{C}\sum (b_{kjm} - a_{kjm}) \leqslant \frac{c}{C}(b_{kj} - a_{kj}).$$

Бу ифодани k ва j бўйича йиғиб ва (9) дан фойдаланиб

$$\sum_k \sum_j \sum_m \sum_n (b_{kjmn} - a_{kjmn}) = \left(\frac{c}{C}\right)^2 \sum (b_k - a_k) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^2 (a + a) = \left(\frac{c}{C}\right)^2 \cdot 2a$$

тенгсизликларни ёза оламиз.

Бу ифода кўрсатадики, тўртинчи қадамда олинган (a_{kjmn}, b_{kjmn}) оралиқларнинг (E_{cC} тўпламни қоплаган ҳолда) узунликлари йиғиндиси илгариги қадамда олинган оралиқларнинг узунликлари йиғиндисидан кичик. Агар юқоридаги ясашларни давом эттирсак, у ҳолда p-қадамдаги оралиқлар системаси ҳам E_{cC} тўпламни қоплайди ва бу системадаги оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси $\left(\frac{c}{C}\right)^p\cdot 2a$ дан катта бўлмайди ва демак, p етарли катта бўлганда, уни ихтиёрий сондан кичик қилиниши мумкин. Бундан E_{cC} тўпламнинг ўлчови нолга тенглиги келиб чиқади.

Шу билан теорема узлуксиз монотон функциялар учун исбот қилинди. Энди теоремани узлукли монотон функциялар учун исботлаймиз.

Эслатамизки, ихтиёрий монотон функция фақат биринчи турдаги узилишларга эга бўлиши мумкин. Шунинг учун ҳар қандай нуқтада $f(x)$ функциянинг ўнг ва чап лимитлари мавжуд:

$$f(x+0)=\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi>x}} f(\xi), \qquad f(x-0)=\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi<x}} f(\xi),$$

Дарҳақиқат, бирор томондан бир нечта турли лимит қийматларнинг мавжуд бўлиши функциянинг монотонлигига зид. $(f(x-0), f(x+0))$ оралиқ узилиш оралиғи, бу оралиқнинг узунлиги, яъни $f(x+0)-f(x-0)$ айирма $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги сакраши бўлади. $f(x)$ функция монотон бўлгани учун турли узилиш оралиқлари кесишмайди (кўпи билан умумий учга эга бўлиши мумкин); агар ҳар бир оралиқдан биттадан рационал сонни танлаб олсак, бундай оралиқларнинг сони кўпи билан саноқли бўлишини кўрамиз. Демак, монотон функциянинг узилиш нуқталари кўпи билан саноқли экан.

Узлукли монотон функциянинг ҳосиласи мавжудлигини текшириш учун Рисс леммасини умумлаштирамиз. $f(x)$ функция узлуксиз бўлмаса ҳам кўпи билан биринчи турдаги узилишга эга бўлган функция бўлсин. Агар x нуқта учун

$$x<\xi, \ \max[f(x), f(x-0), f(x+0)]<f(\xi-0))]$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ξ нуқта мавжуд бўлса, x нуқта *ўнгга кўтарилиш нуқтаси дейилади* (45.3-изоҳдаги таъриф билан солиштиринг). Юқорида келтирилган Рисс леммасидаги мулоҳазаларни такрорлаб, барча ўнгга кўтарилиш нуқталаридан иборат бўлган тўпламнинг очиқлигини ва бу тўпламни тузувчи (a_k, b_k) оралиқларда

$$f(a_k+0) \leqslant f(b_k-0)$$

тенгсизликнинг ўринлилигини ҳосил қиламиз. Бу эса теореманинг исботини ўзгаришсиз ўтказиш учун кифоя. Шу билан теорема тўла исботланди.*

46.4-теорема (Фубини). *$[a, b]$ сегментда*

$$S(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ \ldots \tag{10}$$

қатор берилган бўлиб, унинг ҳадлари камаймайдиган (ўсиб бормайдиган) функциялар бўлсин. У ҳолда бу қаторни деярли ҳар бир нуқтада ҳадлаб дифференциаллаш мумкин, яъни деярли ҳар бир нуқтада:

$$S'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ \ldots .$$

Исбот. Теореманинг умумийлигини чегараламасдан $f_n(a)=0$ ва ҳамма f_n функцияларни камаймайдиган деб фараз қилиш мумкин. $f_n'(x)$ ва $S'(x)$ лар деярли ҳар бир нуқтада мавжуд, демак, $[a, b]$ да ўлчови $b-a$ га тенг бўлган шундай E тўплам мавжудки, бунинг ҳар бир нуқтасида ҳам $f_n'(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, ҳам $S'(x)$ лар мавжуд. $x(\in E)$ ва ихтиёрий ξ учун ушбу

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f_n(\xi)-f_n(x)]}{\xi-x}=\frac{S(\xi)-S(x)}{\xi-x}$$

муносабатни ёзамиз. Чап томондаги ифоданинг ҳадлари манфий бўлмагани сабабли бундан ихтиёрий натурал N учун:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}[f_n(\xi)-f_n(x)]}{\xi-x}\leqslant\frac{S(\xi)-S(x)}{\xi-x}.$$

Бундан $\xi\to x$ да лимитга ўтиб,

$$\sum_{n=1}^{N} f_n'(x)\leqslant S'(x)$$

тенгсизликни ва N ни ∞ га интилтириб, $f_n'(x)$ ларнинг манфий эмаслигини ҳисобга олинса,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\leqslant S'(x) \tag{11}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

Энди охирги (11) муносабатда деярли ҳар бир нуқтада тенглик ўринлилигини кўрсатамиз. (10) муносабат ўринли бўлгани учун шундай k топиладики, (10) қаторнинг S_{n_k} хусусий йиғиндиси учун:

$$0 \leqslant S(b) - S_{n_k}(b) < \frac{1}{2^k} \; (k = 1,2, \ldots).$$

Ушбу

$$S(x) - S_{n_k}(x) = \sum_{j > n_k} f_j(x)$$

айирма камаймайдиган функция эканлигидан барча x учун

$$0 \leqslant S(x) - S_{n_k}(x) < \frac{1}{2^k}$$

бўлади. Бундан

$$\sum_{k=1}^{\infty} [S(x) - S_{n_k}(x)]$$

қаторнинг $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчилиги (ҳатто текис яқинлашувчилиги) келиб чиқади. У ҳолда (11) муносабатни исботлаганимиз каби, ушбу

$$\sum_{k=1}^{\infty} [S'(x) - S'_{n_k}(x)]$$

қаторнинг деярли ҳар бир нуқтада яқинлашувчанлигини келтириб чиқарамиз. Бу қаторнинг умумий ҳади $S'(x) - S'_{n_k}(x)$ деярли ҳар бир нуқтада нолга интилади, демак, деярли ҳар бир нуқтада $S'_{n_k}(x) \to S'(x)$. Иккинчи томондан, агар (11) муносабатда $<$ ишораси турганда эди, ҳеч қандай хусусий йиғиндилар $S'(x)$ га интила олмас эди. Шундай қилиб, (11) да деярли ҳар бир нуқтада тенглик бўлиши керак. Бизга эса шуни исботлаш керак эди. $*$

Мисол. Энди хосиласи деярли ҳар бир нуқтада ноль бўлган ҳамда ҳеч қандай оралиқда ўзгармас сонга тенг бўлмаган монотон узлуксиз функцияга мисол келтирамиз. (0,1) интервалдан бирор t сонни танлаб, [0,1] сегментни $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$ кўринишдаги 2^n та тенг бўлакларга бўлиб, индукция усули ёрдами билан [0,1] сегментда аниқланган қуйидаги функциялар кетма-кетлигини тузамиз: $n=0$ да $\varphi_0(x) = x$ бўлиб, ихтиёрий n да $\varphi_n(x)$ функция [0,1] сегментда аниқланган, узлуксиз ҳамда ҳар бир $(\alpha, \beta) = (k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ кўринишдаги бўлакчада чизиқли бўлсин. $n+1$ да $\varphi_{n+1}(x)$ функцияни қуйидагича аниқлаймиз: $x = \alpha$ ва $x = \beta$ нуқталарда

$$\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x);$$

(α, β) оралиқнинг ўртасида, яъни $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ нуқтада:

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1-t}{2}\varphi_n(\alpha)+\frac{1+t}{2}\varphi_n(\beta),$$

бу ерда t — юқорида танлаб олинган сон, $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ва $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ оралиқларда эса $\varphi_{n+1}(x)$ ни чизиқли деб ҳисоблаймиз.

Равшанки, бундай аниқланган $\varphi_n(x)$ функциялар ўсувчи функциялардир ва

$$0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)\leqslant 1.$$

Шунинг учун $\{\varphi_n(x)\}$ кетма-кетлик бирор камаймайдиган $\varphi(x)$ функцияга яқинлашади. Бу $\varphi(x)$ функциянинг узлуксиз, жиддий ўсиб борувчи ва деярли ҳар бир нуқтада ҳосиласи нолга тенг эканлигини исбот қиламиз. Бунинг учун $[0,1]$ сегментдан бирон x нуқтани оламиз ва ҳар бири бу нуқтани ўз ичига олган ва бир-бирининг ичига жойлашган (α_n, β_n) оралиқлар кетма-кетлигини тузамиз, бу ерда

$$\alpha_n=k\ 2^{-n},\quad \beta_n=(k+1)2^{-n},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n-1.$$

Агар бирор $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})=(m\,2^{-n-1}, (m+1)\,2^{-n-1})$, $(m=0, 1, 2, \ldots, 2^{n+1}-1)$ бўлакчани олсак, у ҳолда α_{n+1} нуқта (худди шунингдек, β_{n+1} нуқта) ёки бирор $(\alpha_n, \beta_n)=(k2^{-n}, (k+1)2^{-n})(k=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1)$ оралиқнинг ўрта нуқтаси бўлади ё бўлмаса α_n нуқта билан ёки β_n нуқта билан устма-уст тушади.

Масалан, агар α_{n+1} нуқта α_n нуқта билан устма-уст тушса, у ҳолда β_{n+1} нуқта (α_n, β_n) оралиқнинг ўрта нуқтаси бўлиб, $\varphi_n(x)$ функциянинг аниқланишига асосан ушбу

$$\varphi_{n+1}(\beta_{n+1})=\frac{1-t}{2}\varphi_n(\alpha_n)+\frac{1+t}{2}\varphi_n(\beta_n),$$

$$\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})=\varphi_n(\alpha_n)$$

тенгликларга эга бўламиз. Булардан

$$\varphi_{n+1}(\beta_{n+1})-\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1})=\frac{1+t}{2}[\varphi_n(\beta_n)-\varphi_n(\alpha_n)]$$

тенгликни оламиз.

Аксинча, агар α_{n+1} нуқта бирор (α_n, β_n) оралиқнинг ўрта нуқтаси бўлса, у ҳолда β_{n+1} нуқта β_n нуқта билан устма-уст тушиб, яна $\varphi_n(x)$ функциянинг аниқланишига асосан

$$\varphi_{n+1}(\beta_{n+1}) = \varphi_n(\beta_n),$$

$$\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1-t}{2}\ \varphi_n(\alpha_n) + \frac{1+t}{2}\ \varphi_n(\beta_n)$$

тенгликларга эга бўламиз. Булардан

$$\varphi_{n+1}(\beta_{n+1}) - \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1-t}{2}[\varphi_n(\beta_n) - \varphi_n(\alpha_n)]$$

тенгликни оламиз.

Демак, умумий ҳолда ушбу

$$\varphi_{n+1}(\beta_{n+1}) - \varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}[\varphi_n(\beta_n) - \varphi_n(\alpha_n)]$$

тенгликни ёзишимиз мумкин. Бундан ва

$$\varphi_p(\alpha_p) = \varphi(\alpha_p), \quad \varphi_p(\beta_p) = \varphi(\beta_p)$$

тенгликлардан

$$\varphi(\beta_{n+1}) - \varphi(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}[\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)]$$

тенгликни, бундан эса

$$\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \varepsilon_k t}{2} \quad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. $t \in (0,1)$ бўлгани учун $0 < 1 + \varepsilon_k t < 2$ бўлгандан

$$\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) > 0$$

муносабат ва $n \to \infty$ да

$$\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n) \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \to 0$$

муносабат келиб чиқади. Демак, $\varphi(x)$ узлуксиз, жиддий ўсувчи функция ва унинг ҳосиласи (мавжуд бўлган нуқталарда) қуйидаги ифоданинг $n \to \infty$ даги лимит қийматига тенг:

$$\frac{\varphi(\beta_n) - \varphi(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1 + \varepsilon_k t}{2}}{\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}} = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + \varepsilon_k t}{2} = \prod_{k=1}^{n} (1 + \varepsilon_k t).$$

Аммо бу ифоданинг лимити ё аниқ бўлмайди ёки чексиз ёхуд нолга тенг. Натижада ҳосила мавжуд бўлган ҳамма нуқталарда: $\varphi'(x) = 0$.

46.1-теоремага асосан ҳосила деярли ҳар бир нуқтада мавжуд. Демак, деярли ҳар бир нуқтада $\varphi'(x) = 0$.*

47-§. Ўзгариши чегараланган функциялар

Муҳим ва кўпгина татбиқларга эга бўлган функциялар орасида ўзгариши чегараланган функциялар синфи катта аҳамиятга эга.

Таъриф. *$[a, b]$ сегментда аниқланган $\Phi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ сегментни*

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

нуқталар билан ихтиёрий n қисмга бўлганимизда a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) нуқталарни танлаб олишга боғлиқ бўлмаган ва ушбу

$$\sum_{i=1}^{n} |\Phi(a_i) - \Phi(a_{i-1})| < K \tag{1}$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган ўзгармас K сон мавжуд бўлса, у ҳолда $\Phi(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган дейилади.

Ҳар қандай ўзгариши чегараланган функция чегараланган функциядир. Ҳақиқатан, $\Phi(x)$ ўзгариши чегараланган бўлгани сабабли ҳар қандай $x \in [a, b]$ учун

$$|\Phi(x) - \Phi(a)| < K$$

Бундан ва

$$|\Phi(x)| \leqslant |\Phi(x) - \Phi(a)| + |\Phi(a)| \leqslant K + |\Phi(a)|$$

тенгсизликдан $\Phi(x)$ функциянинг чегараланганлиги келиб чиқади.

Одатда (1) тенгсизликнинг чап томонидаги йиғиндининг аниқ юқори чегарасини ($[a, b]$ сегментни қисмларга турлича бўлишлар тўпламига нисбатан) $V_a^b(\Phi)$ билан белгиланади ва бу сонни $\Phi(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментдаги *тўла ўзгариши* дейилади.

Мисоллар. 1) $[a, b]$ сегментда аниқланган ва монотон ўсувчи $\Phi(x)$ функция чегараланган ўзгаришга эга, чунки унинг учун (1) кўринишдаги ҳар қандай йиғинди $\Phi(b) - \Phi(a)$ га тенг.

Шунга ўхшаш, $[a, b]$ сегментда аниқланган ва монотон камаювчи $\Phi(x)$ функция ҳам чегараланган ўзгаришга эга.

2) Агар бирор мусбат ва ўзгармас A сон ҳамда ихтиёрий $x, y \in [a, b]$ нуқталар учун $|f(x)-f(y)| \leqslant A|x-y|$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда *Липшиц шартини қаноатлантирувчи* дейилади. $[a, b]$ сегментда чегараланган ва Липшиц шартини қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланган бўлади. Дарҳақиқат, Липшиц шартига мувофиқ:

$$|f(a_{k+1})-f(a_k)| \leqslant A|a_{k+1}-a_k|,$$

бундан: $V_a^b(f) \leqslant A(b-a)$, яъни f нинг ўзгариши чегараланган.

Энди ўзгариши чегараланган функцияларнинг тузилиши ва хоссаларини ўрганишга ўтамиз.

47.1-теорема. *$[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган икки $\Phi_1(x]$ ва $\Phi_2(x)$ функциянинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси ҳам ўзгариши чегараланган функциялар бўлади.*

Исбот. Дарҳақиқат, $[a, b]$ сегментни ихтиёрий n қисмга бўлиб,

$$\sum_{i=1}^{n}|\Phi(a_i)-\Phi(a_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\Phi_1(a_i)-\Phi_1(a_{i-1})| +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|\Phi_2(a_i)-\Phi_2(a_{i-1})|$$

тенгсизликларни ёзишимиз мумкин; бу ерда: $\Phi(x)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x)$. Бундан

$$V_a^b(\Phi) \leqslant V_a^b(\Phi_1)+V_a^b(\Phi_2),$$

яъни $\Phi(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланганлиги бевосита келиб чиқади.

Айирма учун ҳам теорема шунга ўхшаш исботланади.

Энди $\Phi_1(x)$ ва $\Phi_2(x)$ функцияларнинг кўпайтмасини оламиз:

$$\Phi(x)=\Phi_1(x)\cdot\Phi_2(x).$$

$p=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\Phi_1(x)|$, $q=\sup\limits_{x\in[a,b]}|\Phi_2(x)|$ бўлсин. $\Phi_1(x)$ ва $\Phi_2(x)$ функциялар ўзгариши чегараланган бўлгани сабабли чегараланганди. Шунинг учун p ва q сонлар чекли. Бу ҳолда:

$$|\Phi(a_{k+1})-\Phi(a_k)| \leqslant |\Phi_1(a_{k+1})\cdot\Phi_2(a_{k+1})-\Phi_1(a_k)\cdot\Phi_2(a_{k+1})| +$$

$$+|\Phi_1(a_k)\cdot\Phi_2(a_{k+1})-\Phi_1(a_k)\cdot\Phi_2(a_k)|\leqslant q|\Phi_1(a_{k+1})-$$
$$-\Phi_1(a_k)|+p|\Phi_2(a_{k+1})-\Phi_2(a_k)|.$$

Бундан

$$V_a^b(\Phi)\leqslant q\,V_a^b(\Phi_1)+p\,V_a^b(\Phi_2),$$

яъни $\Phi_1\cdot\Phi_2$ функциянинг ўзгариши чегараланган.*

47.2-теорема. *Агар $a<c<b$ бўлса, у ҳолда:*

$$V_a^b(\Phi)=V_a^c(\Phi)+V_c^b(\Phi). \tag{2}$$

Исбот. Агар c нуқта бўлиш нуқталаридан бирига тенг, масалан, $c=a_m$ бўлса, у ҳолда

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\Phi(a_{i+1})-\Phi(a_i)|=\sum_{i=0}^{m-1}|\Phi(a_{i+1})-\Phi(a_i)|+$$
$$+\sum_{i=m}^{n-1}|\Phi(a_{i+1})-\Phi(a_i)| \tag{3}$$

тенглик ўринли бўлади. $[a, b]$ сегментни ихтиёрий майда қисмларга бўлиш ҳисобига бу тенгликнинг ўнг томонидаги йиғиндини $V_a^c(\Phi)+V_c^b(\Phi)$ сонга истаганча яқин қилиш мумкин. Шунинг учун

$$V_a^b(\Phi)=\sup\sum_{i=0}^{n-1}|\Phi(a_{i+1})-\Phi(a_i)|\geqslant V_a^c(\Phi)+V_c^b(\Phi) \tag{4}$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин.

Иккинчи томондан, ихтиёрий қисмларга бўлинган $[a, b]$ сегментни олиб, қўшимча c бўлиш нуқтаси киритилса, (1) тенгсизликнинг чап томони ортишигина мумкин. Шунинг учун c бўлиш нуқтасими ёки бўлиш нуқтаси эмасми, барибир, (3) га мувофиқ қуйидаги тенгсизлик ўринли:

$$\sum_{i=0}^{n-1}|\Phi(a_{i+1})-\Phi(a_i)|\leqslant V_a^c(\Phi)+V_c^b(\Phi).$$

Бу тенгсизлик чап томонининг юқори чегараси олинса,

$$V_a^b(\Phi)\leqslant V_a^c(\Phi)+V_c^b(\Phi) \tag{5}$$

тенгсизлик келиб чиқади.

(4) ва (5) муносабатлардан (2) тенглик келиб чиқади.*

47.3-теорема. *$[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган ҳар қандай $\Phi(x)$ функция икки монотон ўсувчи функциянинг айирмаси сифатида ёзилиши мумкин.*

Исбот.

$$F(x) = V_a^x(\Phi), \quad G(x) = V_a^x(\Phi) - \Phi(x)$$

функцияларни киритиб, уларнинг ҳар бирининг монотон ўсувчилиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади.

47.2-теоремага мувофиқ, агар $y \geqslant x$ бўлса.

$$V_a^y(\Phi) - V_a^x(\Phi) = V_x^y(\Phi) \geqslant 0,$$

яъни $F(x)$ — монотон ўсувчи функция. $G(x)$ функция ҳам монотон ўсувчи. Дарҳақиқат, $y \geqslant x$ бўлсин. У ҳолда:

$$G(y) - G(x) = V_a^y(\Phi) - V_a^x(\Phi) - \Phi(y) + \Phi(x) =$$

$$= V_x^y(\Phi) - [\Phi(y) - \Phi(x)] \geqslant 0,$$

чунки

$$V_x^y(\Phi) \geqslant |\Phi(y) - \Phi(x)|. *$$

Сўнгги теореманинг моҳияти шундаки, бунинг ёрдами билан ўзгариши чегараланган функцияларнинг баъзи хоссаларини монотон ўсувчи функцияларнинг хоссасидан келтириб чиқариш мумкин ва аксинча. Масалан, ўзгариши чегараланган $\Phi(x)$ функция бирон нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $G(x)$ функциялар ҳам шу нуқтада ўнгдан узлуксиз бўлади. Масалан, бу жумлани $F(x)$ функция учун исбот этамиз.

$\Phi(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксизлигидан фойдаланиб, ихтиёрий берилган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ сонни топамизки, агар $x_1 - x_0 < \delta$ ва $x_1 > x_0$ бўлса,

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

тенгсизликни ёзишимиз мумкин.

Энди $[x_0, b]$ сегментни n та $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ қисмга бўламизки, улар учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| > V_{x_0}^b(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

x_1 нуқтани олишда $x_1 < x_0 + \delta$ тенгсизликка риоя қилишимиз керак. У ҳолда (6) га мувофиқ:

$$V_{x_0}^{b}(\Phi) < \sum_{k=0}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n-1} |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| + \varepsilon < V_{x_1}^{b} + \varepsilon$$

ёки 47.2-теоремага асосан

$$V_{x_0}^{x_1}(\Phi) = V_{x_0}^{b}(\Phi) - V_{x_1}^{b}(\Phi) < \varepsilon,$$

бундан эса $F(x) = V_a^x(\Phi)$ функциянинг $x = x_0$ нуқтада ўнгдан узлуксизлиги бевосита келиб чиқади.

47.4-натижа. *Агар ўзгариши чегараланган $\Phi(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $G(x)$ функциялар ҳам шу сегментда узлуксиз бўлади.*

47.5-натижа. *Бирон функциянинг $[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган бўлиши учун унинг икки монотон ўсувчи функциянинг айирмаси сифатида ёзиш мумкинлиги зарур ва кифоядир.*

47.6-натижа (Лебег). *Ўзгариши чегараланган ҳар қандай функция деярли ҳар бир нуқтада чекли ҳосилага эга.*

Бу натижалар 46.1, 47.1 ва 47.3-теоремалардан бевосита келиб чиқади.

Биз 45-§ да чапдан ва ўнгдан узлуксиз бўлган сакраш функцияларини киритган эдик. Энди бу параграфда сакраш функциясини қуйидагича умумлаштирамиз: фараз қилайлик, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нуқталар $[a, b]$ сегментдан олинган сони чекли ёки саноқли нуқталар бўлсин. Ҳар бир x_k, $k=1,2, \ldots$ нуқтага иккита q_k ва h_k сонларни мос қўямиз ва улар учун ушбу

$$\sum_k (|q_k| + |h_k|) < +\infty$$

муносабатнинг бажарилишини талаб этамиз: ундан ташқари, $x_k = a$ бўлганда $q_k = 0$ ва $x_k = b$ бўлганда эса $h_k = 0$ бўлсин. Қуйидаги тенглик билан аниқланган

$$H(x) = \sum_{x_k \leqslant x} q_k + \sum_{x_k < x} h_k$$

функция *сакраш функцияси* дейилади. Бу функция учун $V_a^b(H) = \sum_k (|q_k| + |h_k|)$ эканини бевосита текшириб кўриш мумкин. $H(x)$ функциянинг узилиш нуқталари $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нуқталардан иборат бўлиб, ҳар бир k натурал сон учун q_k ва h_k сонлардан бироргаси нолдан фарқли бўлса, унинг x_k нуқтадаги сакраши қуйидагига тенгдир:

$$H(x_k) - H(x_{k-0}) = q_k,$$
$$H(x_{k+0}) - H(x_k) = h_k.$$

45.4- теоремага ўхшаш теорема бу ерда ҳам ўринлидир.

47.7- теорема. $[a, b]$ *сегментда аниқланган ҳар қандай ўзгариши чегараланган* $f(x)$ *функция ягона усул билан* $\varphi(x)$ *узлуксиз функция ва* $H(x)$ *сакраш функцияларининг йиғиндиси сифатида ифода этилади.*

Бу теореманинг исботи 45.4- теореманинг исботидан фарқ қилмаганлиги сабабли, унинг исботига тўхталмаймиз.

Энди узлуксиз, лекин ўзгариши чегараланмаган функцияга мисол келтирамиз.

$$\Phi(x) = x\cos\frac{\pi}{x}, \quad (x \neq 0),$$
$$\Phi(0) = 0$$

бўлсин. Бу функция $x=0$ нуқтанинг атрофида сони чексиз максимум ва минумум нуқталарга эга. Қуйидаги жадвални тузамиз:

$$x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

$$\Phi(x) = -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^n\frac{1}{n}, \ldots.$$

Бундан кўринадики:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Phi\left(\frac{1}{k}\right) - \Phi\left(\frac{1}{k+1}\right)\right| = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{7}{12} + \ldots + \frac{2n+1}{n(n+1)} >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

яъни $\Phi(x)$ функциянинг $[0,1]$ сегментдаги ўзгариши

$$V_0^1(\Phi) = +\infty.$$

47.8- теорема. *Агар* $[a, b]$ *сегментда аниқланган ва ўзгариши чегараланган* $\Phi(x)$ *функция бирон* $x_0 (\in [a, b])$ *нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда бу нуқтада* $\varphi(x) = V_a^x(\Phi)$ *функция ҳам узлуксиз бўлади.*

Исбот. $x_0 < b$ бўлсин; $\varphi(x)$ функциянинг x_0 нуқтада ўнгдан узлуксизлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $[x_0, b]$ сегментни шундай

$$x_0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

n та қисмга бўламизки, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун қуйидаги муносабат ўринли бўлсин:

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| > V_{x_0}^{b}(\Phi) - \varepsilon. \qquad (7)$$

Чап томондаги йиғинди бўлиш нуқталари кўпайганда ўсишигина мумкин; шунинг учун x_1 нуқтани қуйидаги тенгсизлик ўринли бўладиган қилиб танлаб оламиз:

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_0)| < \varepsilon.$$

У ҳолда (7) дан:

$$V_{x_0}^{b}(\Phi) < 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{n-1} |\Phi(a_{i+1}) - \Phi(a_i)| \leqslant 2\varepsilon + V_{x_1}^{b}(\Phi).$$

Бундан:

$$V_{x_0}^{x_1} = V_{a}^{x_1} - V_{a}^{x_0} = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) < 2\varepsilon, \text{ яъни}$$

$$\varphi(x_0 + 0) - \varphi(x_0) < 2\varepsilon;$$

ε ихтиёрий бўлганлиги учун: $\varphi(x_0 + 0) = \varphi(x_0)$. $\varphi(x_0 - 0) = \varphi(x_0)$ тенглик ҳам худди шунга ўхшаш исбот этилади, яъни $\varphi(x)$ функция (агар $x_0 > a$ бўлса) x_0 нуқтада чапдан узлуксиз. Хусусий $x_0 = b$ $(x_0 = a)$ ҳолда $\varphi(x)$ ни x_0 нуқтада чапдангина (x_0 нуқтада ўнгдангина) узлуксизлигини кўрсатиш кифоя. *

47.9-теорема. *$[a, b]$ сегментда аниқланган функциялардан иборат $P = \{\Phi\}$ чексиз тўплам берилган бўлиб, бу функциялар тўплами бирор ўзгармас M сон билан чегараланган, яъни*

$$|\Phi(x)| \leqslant M \quad (x \in [a, b];\ \Phi \in P) \qquad (8)$$

бўлса, у ҳолда ихтиёрий саноқли $E \subset [a, b]$ тўплам чун P тўпламдан шундай $\{\Phi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини ажратиб олиш мумкинки, бу кетма-кетлик E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи бўлади.

Исбот. E тўплам саноқли бўлганлиги учун унинг элементларини $\{x_k\}$ кетма-кетлик шаклида ёзиб,

$$H_1 = \{\Phi(x_1)\} \quad (\Phi \in P)$$

тўпламни тузамиз; бу ерда Φ нинг ўзи P тўпламда ўзгаради.

(8) шартга кўра H_1 тўплам чегараланган бўлади. Демак, Больцано — Вейерштрасс теоремасига мувофиқ бу тўпламдан яқинлашувчи кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин:

$$\Phi_1^{(1)}(x_1),\ \Phi_2^{(1)}(x_1)\ \ldots;\ \lim_{n\to\infty} \Phi_n^{(1)}(x_1) = a_1.$$

Энди қуйидаги чегараланган кетма-кетликни тузамиз:

$$\Phi_1^{(1)}(x_2),\quad \Phi_2^{(1)}(x_2),\ \ldots.$$

Бу кетма-кетликка ҳам Больцано — Вейерштрасс теоремасини татбиқ қилиб, x_2 нуқтада яқинлашувчи

$$\Phi_1^{(2)}(x_2),\ \Phi_2^{(2)}(x_2)\ldots;\ \lim_{n\to\infty} \Phi_n^{(2)}(x_2) = a_2$$

кетма-кетликни ҳосил қиламиз. Бу жараённи чексиз давом эттириб, қуйидаги яқинлашувчи, сони саноқли кетма-кетликларни тузишимиз мумкин:

$$\left.\begin{array}{ll}
\Phi_1^{(1)}(x_1),\ \ \Phi_2^{(1)}(x_1),\ \ldots; & \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(1)} = a_1; \\
\Phi_1^{(2)}(x_2),\ \ \Phi_2^{(2)}(x_2),\ \ldots; & \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(2)}(x_2) = a_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Phi_1^{(m)}(x_m),\ \ \Phi_2^{(m)}(x_m),\ \ldots; & \lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(m)}(x_m) = a_m. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \tag{9}$$

Бу кетма-кетликларнинг ҳар бири олдингисининг қисм кетма-кетлигидир. (9) кетма-кетликларнинг диагоналида жойлашган элементлардан

$$\Phi_1^{(1)}(x),\quad \Phi_2^{(2)}(x),\ \Phi_3^{(3)}(x),\ \ldots \tag{10}$$

кетма-кетлик тузилса, бу кетма-кетлик саноқли E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи бўлиб, биз излаган кетма-кетлик бўлади. (10) кетма-кетлик E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашади, чунки агар $x_k \in E$ бўлса, у ҳолда $\{\Phi_n^{(n)}(x_k)\}$ кетма-кетликнинг тузилишига кўра $n \to \infty$ да a_k га яқинлашади. $*$

47.10-теорема. $[a, b]$ *сегментда аниқланган ўсувчи функциялардан иборат чексиз* $P = \{\Phi\}$ *тўплам берилган бўлиб, бу функциялар тўплами бирон ўзгармас* M *сон билан чегараланган, яъни*

$$|\Phi(x)| \leqslant M \quad (x \in [a, b];\quad \Phi \in P)$$

(11) га мувофиқ, x_i ва x_j нуқталар учун шундай натурал n_0 сон мавжудки, $n > n_0$ бўлганда

$$|\Phi^{(n)}(x_i) - \psi(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\Phi^{(n)}(x_j) - \psi(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади, яъни

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \Phi^{(n)}(x_i) - \psi(x_i) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad -\frac{\varepsilon}{2} < \Phi^{(n)}(x_j) - \psi(x_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\psi(x)$ нинг тузилишига мувофиқ, бу муносабатларга асосланиб, $n > n_0$ бўлганда қуйидаги тенгсизликларни ёзишга ҳақлимиз:

$$\Phi^{(n)}(x_i) = (\Phi^{(n)}(x_i) - \psi(x_i)) + (\psi(x_i) - \psi(x_0)) + \psi(x_0) >$$

$$> -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} + \psi(x_0) = \psi(x_0) - \varepsilon;$$

$$\Phi^{(n)}(x_j) = (\Phi^{(n)}(x_j) - \psi(x_j)) + (\psi(x_j) - \psi(x_0)) + \psi(x_0) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \psi(x_0) = \psi(x_0) + \varepsilon.$$

Булардан ва $x_i < x_0 < x_j$ учун

$$\Phi^{(n)}(x_i) \leqslant \Phi^{(n)}(x_0) \leqslant \Phi^{(n)}(x_j)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигидан $n > n_0$ да

$$\psi(x_0) - \varepsilon < \Phi^{(n)}(x_0) < \psi(x_0) + \varepsilon$$

тенгсизликлар ўринли бўлади ва бундан ($\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлганлиги учун) (12) муносабат келиб чиқади. 45.3-теоремага асосан $\psi(x)$ функциянинг узилиш нуқталари тўплами кўпи билан саноқли бўлгани учун

$$\lim_{n\to\infty} \Phi^{(n)}(x) = \psi(x) \tag{13}$$

тенглик $[a, b]$ сегментнинг кўпи билан саноқли Q қисмидагина бажарилмаслиги мумкин. Шуни назарда тутиб, 47.9-теоремани $H = \{\Phi^{(n)}(x)\}$ кетма-кетликка татбиқ қиламиз; E тўплам сифатида Q нинг (13) муносабат бажарилмаган нуқталарини оламиз. Бунинг натижасида H кетма-кетликдан $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида яқинлашувчи $H_1 = \{\Phi^{(n_k)}(x)\}$ қисм кетма-кетлик ажратиб олиш мумкин. Энди $\varphi(x)$ сифатида

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi^{(n_k)}(x)$$

функция олинса, у ўсувчи бўлиб, биз излаган функция бўлади.●

47.11-теорема (Хелли). *$[a, b]$ сегментда аниқланган функциялардан иборат чексиз тўплам $H=\{\Phi(x)\}$ берилган бўлиб, бу функциялар тўплами ва уларнинг $[a, b]$ сегментда тўла ўзгариши бирон ўзгармас M сон билан чегараланган, яъни*

$$|\Phi(x)|\leqslant M, \quad V_a^b(\Phi)\leqslant M \quad (x\in[a, b], \ \Phi\in H)$$

бўлса, у ҳолда H тўпламдан $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида бирон ўзгариши чегараланган $\Phi(x)$ функцияга яқинлашувчи кетма-кетликни ажратиб олиш мумкин.

Исбот. H тўпламнинг ихтиёрий Φ элементи учун қуйидаги муносабатларни ёзишимиз мумкин:

$$|F(x)|=|V_a^x(\Phi)|\leqslant M; \quad |F(x)-\Phi(x)|\leqslant 2M.$$

$\{F(x)\}$ системага 47.10-теоремани татбиқ қилиб, ундан бирон $f(x)$ функцияга яқинлашувчи $\{F_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини ажратиб оламиз, яъни

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=f(x).$$

Ҳар бир $F_n(x)$ функцияга $G_n(x)=F_n(x)-\Phi_n(x)$ функцияни мос келтириб $\{G_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигига ҳам 47.10-теоремани татбиқ қиламиз. Натижада $[a, b]$ сегментда бирон $\varphi(x)$ функцияга яқинлашувчи $\{G_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги ҳосил бўлади, яъни

$$\lim_{n\to\infty} G_{n_k}(x)=\varphi(x).$$

Натижада $\{F_{n_k}(x)-G_{n_k}(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги H тўпламдан ажратиб олинган бўлиб, $\psi(x)=f(x)-\varphi(x)$ функцияга $[a, b]$ сегментда яқинлашади.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. $[0,1]$ даги узлуксиз функциянинг ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталари тўпламини D орқали белгилаймиз. D нинг ўлчовли ва $F_{\sigma\delta}$ типидаги тўплам эканини исботланг.

2. $[0, 1]$ даги узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи (бу функция олдинги масалада киритилган D тўпламда аниқланган) ўлчовли эканлигини исботланг.

3. $f(x)$ функция $[a, b]$ да аниқланган бўлиб, бу оралиқнинг ҳар бир нуқтасида $f'(x)$ ҳосиласи мавжуд бўлсин. У ҳолда $f'(x)$ функция (a, b) да $f'(a)$ ва $f'(b)$ орасидаги барча қийматларни қабул қилишини исботланг.

4. Агар $f'(x)$ ҳар бир нуқтада мавжуд бўлса, у биринчи турдаги узилишга эга бўла олмаслигини исботланг.

5. [0, 1] даги барча рационал сонларни рақамлаб чиқамиз:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$$

ва

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (x - r_n)$$

функцияни тузамиз (V боб, 7- масалага қаранг). Бу функция [0, 1] сегментнинг барча иррационал нуқталарида ҳосилага эга бўлиб, рационал нуқталарида ҳосиласи мавжуд эмаслигини исботланг.

6. [0, 1] да узлуксиз $f(x)$ функция берилган бўлсин. Бу функциянинг n-ҳосиласи мавжуд бўлган нуқталар тўпламини $D^{(n)}$ билан белгилаймиз. Бу тўпламнинг ўлчовли эканлигини исботланг.

7. $[a, b]$ да аниқланган $f(x)$ функция берилган бўлиб, у $[a, b]$ нинг деярли ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга. Бундан $f(x)$ нинг ўзгариши чегараланганлиги келиб чиқадими? (Бу масалани 47.6- натижа билан солиштиринг.)

8. Монотон функция саноқли ва ҳар ерда зич тўпламдан иборат узилиш нуқталарига эга бўлиши мумкинлигини мисолда кўрсатинг.

9. Ушбу $f(x) = x^p \sin(x^q)$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ функция p ва $q(-\infty < p, q < +\infty)$ параметрларнинг қандай қийматлари учун [0,1] сегментда тўла ўзгариши чегараланган бўлади ва уларнинг қандай қийматлари учун ўзгариши чегараланган бўлмайди?

10. Қуйидаги функциянинг [0,1] сегментда тўла ўзгаришини ҳисобланг:

$$f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x}, \quad (x \neq 0),$$

$$f(0) = 0.$$

11. Агар $[a,b]$ сегментда $f(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланган бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функциянинг ҳам ўзгариши чегараланган бўлишини ҳамда ушбу

$$V_a^b(|f|) \leqslant V_a^b(f)$$

тенгсизликнинг ўринли эканини кўрсатинг.

12. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ сегментдаги ўзгариши чегараланган бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда камаймайдиган бўлиши учун

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a)$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва кифоя эканлигини исботланг.

X боб

ЛЕБЕГНИНГ АНИҚМАС ИНТЕГРАЛИ. АБСОЛЮТ УЗЛУКСИЗ ФУНКЦИЯЛАР

48- §. Лебегнинг аниқмас интеграли

Фараз қилайлик, $[a, b]$ сегментда жамланувчи $f(x)$ функция берилган бўлсин. Лебег интегралининг хоссасига асосан бу функция $[a, b]$ сегментнинг ҳар қандай ўлчовли қисм тўпламларида ҳам жамланувчи бўлади. Хусусан, $f(x)$ функцияни олиб, $[a, b]$ оралиқнинг ҳар қандай $[a, x]$ қисмида

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Лебег интегралини қарасак, унинг қиймати x га боғлиқ бўлади. Бу интеграл *Лебегнинг аниқмас интеграли* дейилади. Биз уни $L(x)$ орқали белгилаймиз. Лебегнинг аниқмас интеграли жуда муҳим функциялар синфини текширишга олиб келади. Уларнинг баъзи бирлари билан кейинги параграфларда танишамиз.

Математик анализ умумий курсидан маълумки, $[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция ва унинг Риман маъносидаги аниқмас интеграли

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)$$

учун $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

муносабат ҳамда $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз ҳосилага эга бўлган $\varphi(x)$ функция учун

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(t)\,dt \tag{2}$$

Ньютон — Лейбниц формуласи ўринлидир.

Шунга ўхшаш ибора Лебег интеграли учун ҳам ўринлими, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлса, (1) ва (2) тенгликлар сақланадими? Қуйида шу саволга жавоб берамиз.

Дастлаб қуйидаги теоремани исботлаймиз.

48.1-теорема. *Агар $f(x)$ жамланувчи функция бўлса, у ҳолда унинг Лебег маъносидаги аниқмас интеграли*

$$L(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ўзгариши чегараланган функция бўлади.

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда жамланувчилигидан шу оралиқда $L(x)$ функциянинг мавжудлиги келиб чиқади. Агар $[a, b]$ сегментда $f(x) \geqslant 0$ бўлса, $L(x)$ монотон функция бўлиб, унинг ўзгариши чегаралангандир (47-§, 1-мисолга қаранг). Умумий ҳол эса $f(x)$ функцияни икки манфий бўлмаган $f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ ва $f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ функцияларнинг айирмаси сифатида, яъни

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \tag{3}$$

кўринишда ёзиш мумкинлигидан келиб чиқади.*

48.2-теорема (Лебег). *Жамланувчи $f(x)$ функциянинг аниқмас Лебег интеграли $L(x)$ деярли ҳар бир нуқтада қиймати $f(x)$ га тенг ҳосилага эга.*

Исбот. 48.1-теоремага асосан $L(x)$ функция ўзгариши чегараланган функциядир. 47.6-натижага асосан эса $L(x)$ функция деярли ҳар бир нуқтада чекли ҳосилага эга. Энди (1) тенгликнинг деярли ҳар бир нуқтада ўринли эканлигини $f(x)$ функция манфий бўлмаган ҳол учун кўрсатиш кифоя, чунки умумий ҳол (3) тенглик ёрдамида бу ҳолга келтирилади. $f(x)$ манфий бўлмагани учун унга монотон ўсиб яқинлашувчи манфий бўлмаган поғонали $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги мавжуд[1]. Равшанки, поғонали $\varphi_n(x)$ функциянинг аниқмас Лебег

---

[1] $\varphi_n(x)$ функцияларни, масалан, қуйидагича олиш мумкин:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n, & \text{агар } x \text{ нуқтада } f(x) \geqslant n \text{ бўлса,} \\ \dfrac{i-1}{2^n} & \text{агар } x \text{ нуқтада } \dfrac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \dfrac{i}{2^n}, \ i = 1, 2, \ldots, 2^n \cdot n \end{cases}$$

бўлса. Равшанки, $\varphi_n(x)$ функция поғонали бўлиб, $n \to \infty$ да монотон ўсиб $f(x)$ функцияга яқинлашади.

интеграли $L_n(x)$ деярли ҳар бир нуқтада чекли $L_n'(x)$ ҳосилага эга ва $L_n'(x) = \varphi_n(x)$ тенглик ўринли.

37.1-теоремага асосан

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} L_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[L_1(x) + \sum_{k=1}^{n}[L_{k+1}(x) - L_k(x)]\right] =$$

$$= L_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[L_{k+1}(x) - L_k(x)]$$

бўлиб, бундан 46.4-теоремага асосан деярли ҳар бир нуқтада

$$L'(x) = L_1'(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[L_{k+1}'(x) - L_k'(x)] =$$

$$= \varphi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)] = f(x)$$

тенгликка эга бўламиз.*

48.3-**теорема.** $[a, b]$ *сегментда аниқланган $f(x)$ функциянинг аниқмас Лебег интеграли $L(x)$ чегараланган тўла ўзгаришга эга ва*

$$V_a^b(L) = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Исбот. $[a, b]$ сегментни $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots a_n = b$ нуқталар билан ихтиёрий равишда n та қисмга бўлиб, ҳар бир $[a_{k-1}, a_k]$ қисмда қиймати ε_k ($|\varepsilon_k| \leqslant 1$) сонга тенг бўлган поғонали $\varepsilon(x)$ функцияни тузамиз. У ҳолда

$$\int_a^b \varepsilon(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [L(a_k) - L(a_{k-1})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |L(a_k) - L(a_{k-1})| \leqslant V_a^b(L)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар $[a_{k-1}, a_k)$ ярим сегментлардан энг каттасининг узунлиги истаганча кичик қилиб олинса ҳамда ε_k сон ушбу

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & \text{агар } L(a_k) - L(a_{k-1}) > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } L(a_k) - L(a_{k-1}) = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } L(a_k) - L_n(a_{k-1}) < 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

кўринишда танланса, у ҳолда $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k [L(a_k) - L(a_{k-1})]$ йиғинди $V_a^b(L)$ га исталганча яқин қилиниши мумкин. Демак,

$$V_a^b(L) = \sup_{|\varepsilon(x)| \leqslant 1} \int_a^b \varepsilon(x) f(x)\, dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{4}$$

Бу тенгсизликда, ҳақиқатда, тенглик муносабати ўринли эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун $f(x)$ функцияга деярли яқинлашувчи поғонали $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигини олиб, қуйидаги функцияни тузамиз:

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } n\varphi_n(x) \geqslant 1 \text{ бўлса,} \\ n\varphi_n(x), & \text{агар } -1 < n\varphi_n(x) < 1 \text{ бўлса,} \\ -1 & \text{агар } n\varphi_n(x) \leqslant -1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

У ҳолда $\lambda_n(x)$ функциянинг тузилишига асосан деярли $f(x) > 0$ бўлган нуқталарда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = +1$ ва деярли $f(x) < 0$ бўлган нуқталарда $\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) = -1$ муносабатларга эга бўламиз. Бундан

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(x) f(x) = |f(x)|$$

тенглик келиб чиқади. Иккинчи томондан, $\lambda_n(x)$ функциянинг тузилишига асосан

$$|\lambda_n(x) f(x)| \leqslant f(x)|$$

тенгсизлик ўринли. 37.2-изоҳга асосан:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b n\varphi_n(x) f(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Бундан ва (4) дан

$$V_a^b(L) = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

тенглик келиб чиқади.$_*$

48.2-теоремани кучайтириш мақсадида қуйидаги таърифни киритамиз.

Таъриф. *$[a, b]$ сегментда бирор ўлчовли $f(x)$ функция аниқланган бўлсин. Агар $x \in [a, b]$ нуқтада*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt = 0$$

муносабат бажарилса, у ҳолда бу нуқта $f(x)$ функциянинг Лебег нуқтаси дейилади.

48.4-теорема. *Агар $x \in [a, b]$ нуқта $f(x)$ функциянинг Лебег нуқтаси бўлса, у ҳолда бу нуқтада Лебег аниқмас интеграли*

$$L(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

нинг ҳосиласи $f(x)$ га тенг.

Исбот. Равшанки,

$$\frac{L(x+h) - L(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\,dt$$

ёки

$$\left|\frac{L(x+h) - L(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,dt.$$

Теорема шартига кўра x нуқта $f(x)$ функциянинг Лебег нуқтаси бўлгани сабабли бу тенгсизликдан $h \to 0$ да $L'(x) = f(x)$ тенглик келиб чиқади.$_*$

48.5-теорема. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлса, у ҳолда $[a, b]$ сегментнинг деярли ҳар бир нуқтаси $f(x)$ функциянинг Лебег нуқтасидир.*

Исбот. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда жамланувчи эканлигидан 38.9-теоремага асосан ҳар қандай r рационал сон учун $f(x) - r$ функциянинг ҳам жамланувчи эканлиги келиб чиқади. У ҳолда 38.1-теоремага асосан $|f(x) - r|$ функция ҳам жамланувчи бўлади. Бундан 48.2-теоремага асосан

$$\lim_{h \to C} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - r|\,dt = |f(x) - r| \quad (r - \text{рационал сон}) \qquad (5)$$

муносабатнинг деярли ҳар бир $x \in [a, b]$ нуқтада ўринли эканлиги келиб чиқади. Агар бу муносабат бажарилмаган нуқталар тўпламини M_r билан белгиласак, у ҳолда унинг ўлчови нолга тенг эканлиги равшан. Теорема шартига кўра $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлгани учун

$$B = \{x \in [a, b] : |f(x)| = +\infty\}$$

тўпламнинг ҳам ўлчови нолга тенг эканлиги келиб чиқади. Демак,

$$A = (\bigcup_{r \in Q} M_r) \cup B$$

тўпламнинг ҳам ўлчови нолга тенг (бу ерда Q тўплам рационал сонлар тўплами). Энди $P=[a, b]\setminus A$ тўпламнинг барча нуқталари $f(x)$ функциянинг Лебег нуқтаси эканлиги кўрсатилса, теорема исбот этилган бўлади. Шуни кўрсатамиз.

Бунинг учун ихтиёрий $\varepsilon>0$ сонни ва ихтиёрий $x_0 \in P$ нуқтани олиб, q рационал сонни шундай танлаймизки, унинг учун

$$|f(x_0)-q|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

тенгсизлик бажарилсин. У ҳолда

$$||f(t)-q|-|f(t)-f(x_0)||<\frac{\varepsilon}{3}$$

ёки

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f(t)-q\right|dt-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f(t)-f(x_0)\right|dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ҳам бажарилади. Берилган $\varepsilon>0$ сонга қараб, $\delta>0$ сонни шундай танлаймизки, $|h|<\delta$ бўлганда (5) муносабатга асосан

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-q|\,dt-|f(x_0)-q|\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан (6) тенгсизликка мувофиқ,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-q|\,dt<\frac{2}{3}\varepsilon.$$

Демак,

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\varepsilon$$

бўлиб, бундан $\varepsilon>0$ соннинг ихтиёрийлигидан x_0 нуқтанинг Лебег нуқтаси эканлиги келиб чиқади. $*$

48.4 ва 48.5-теоремалардан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

48.6-натижа. *Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жамланувчи бўлиб,*

$$L(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

бўлса, у ҳолда $[a, b]$ сегментнинг деярли ҳар бир нуқтасида $L'(x)=f(x)$.

48.7-теорема. *Жамланувчи $f(x)$ функциянинг ҳар бир узлуксизлик нуқтаси унинг Лебег нуқтаси бўлади.*

Исбот. x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг узлуксизлик нуқтаси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ сонни топиш мумкинки, $|t-x_0|<\delta$ тенгсизлик бажарилганда

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

бўлади. Бундан

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt<\varepsilon$$

бўлиб, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг Лебег нуқтаси эканлиги келиб чиқади. *

49- §. Абсолют узлуксиз функциялар

Энди абсолют узлуксиз функциялар синфини киритамиз. Бу функциялар синфи ўзгариши чегараланган функциялар синфидан кенгроқ бўлиб, жамланувчи функцияларнинг аниқмас интеграли билан яқин боғланган.

1-таъриф. $[a, b]$ *сегментда аниқланган* $f(x)$ *функция берилган бўлсин. Агар ихтиёрий* $\varepsilon>0$ *учун шундай* $\delta>0$ *мавжуд бўлсаки, сони чекли ва ҳар иккиси ўзаро кесишмайдиган ҳар қандай*

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \ldots,\ [a_n,\ b_n] \tag{1}$$

сегментлар системаси учун

$$\bigcup_{k=1}^{n}[a_k,\ b_k]\subset[a,\ b],\ \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \tag{2}$$

шартлар бажарилганда

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $f(x)$ *функция* $[a,\ b]$ *сегментда абсолют узлуксиз дейилади.*

Таърифдан равшанки, ҳар қандай абсолют узлуксиз функция одатдаги маънода ҳам узлуксиз: буни кўрсатиш учун юқоридаги таърифда $n=1$ қилиб олиш кифоя.

Абсолют узлуксиз функцияга мисол сифатида Липшиц шартини, яъни

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи функцияни олишимиз мумкин.

Ҳақиқатан, агар (1) сегментлар системаси учун (2) шартлар бажарилса, у ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < M\delta$$

бўлиб, δ сонни $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ деб танласак,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

бўлади.

49.1-теорема. *Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар абсолют узлуксиз бўлса, у ҳолда уларнинг йиғиндиси, айирмаси ва кўпайтмаси ҳам абсолют узлуксиз функциялар бўлади. Бундан ташқари, агар берилган сегментда $\varphi(x)$ нолга тенг бўлмаса, у ҳолда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ҳам ўша сегментда абсолют узлуксиз бўлади.*

Исбот. Йиғинди ва айирманинг абсолют узлуксизлиги қуйидаги тенгсизликдан бевосита келиб чиқади:

$$|\{f(b_k) \pm \varphi(b_k)\} - \{f(a_k) \pm \varphi(a_k)\}| \leqslant$$
$$\leqslant |f(b_k) - f(a_k)| + |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)|.$$

H_f ва H_φ лар билан мос равишда $|f(x)|$ ва $|\varphi(x)|$ ларнинг $[a, b]$ даги аниқ юқори чегарасини белгилаб,

$$|f(b_k)\varphi(b_k) - f(a_k)\varphi(a_k)| = |\{f(b_k)\varphi(b_k) - f(a_k)\varphi(b_k)\} +$$
$$+ \{f(a_k)\varphi(b_k) - f(a_k)\varphi(a_k)\}| \leqslant H_\varphi |f(b_k) - f(a_k)| +$$
$$+ H_f |\varphi(b_k) - \varphi(a_k)|$$

муносабатларни ёзишимиз мумкин. Бундан эса $f(x) \cdot \varphi(x)$ кўпайтманинг абсолют узлуксизлиги келиб чиқади.

$\varphi(x)$ функция $[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз ва нолдан фарқли бўлгани сабабли бирор $\lambda > 0$ сон учун $|\varphi(x)| \geqslant \lambda$ тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан

$$\left| \frac{1}{\varphi(b_k)} - \frac{1}{\varphi(a_k)} \right| \leqslant \frac{|\varphi(b_k) - \varphi(a_k)|}{\lambda^2}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу эса $\frac{1}{\varphi(x)}$ функциянинг абсолют узлуксизлигини кўрсатади. Бундан $f(x)\frac{1}{\varphi(x)}$ функциянинг абсолют узлуксизлиги келиб чиқади. $*$

49.2-теорема. *$[a, b]$ сегментдаги абсолют узлуксиз функциянинг бу сегментда ўзгариши чегараланганди р.*

Исбот. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз бўлсин. У ҳолда $f(x)$ функция учун $\varepsilon=1$ га мос δ сон мавжудки, узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлган ўзаро кесишмайдиган ва сони чекли (n та) интервалларнинг

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n), \sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$$

системаси учун

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1$$

тенгсизлик ўринли.

Бу δ сон бўйича шундай m натурал сон топиш мумкинки, $[a, b]$ сегментни ҳар бирининг узунлиги δ дан кичик бўлган m та қисмга бўлиш мумкин, яъни

$$a=c_0<c_1<c_2< \ldots <c_m=b$$

ва

$$c_{k+1}-c_k<\delta \quad (k=0, 1, 2, \ldots, m-1).$$

Сўнгра, $[c_k, c_{k+1}]$ сегмент ўзаро кесишмайдиган ва сони чекли қандай қисмларга бўлинмасин, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$V_{c_k}^{c_{k+1}}(f)\leqslant 1 \text{ ва демак, } V_a^b(f)\leqslant m,$$

яъни $f(x)$нинг ўзгариши чегараланган. $*$

Бу теоремадан кўринадики, узлуксиз, аммо ўзгариши чегараланмаган функция абсолют узлуксиз эмас экан. Бундай функцияга мисол 47.7-теоремадан кейин келтирилган эди.

49.3-теорема. *Ҳар қандай $F(x)$ абсолют узлуксиз функцияни иккита ўсувчи абсолют узлуксиз функциянинг айирмаси шаклида ифода қилиш мумкин:*

$$F(x)=V(x)-G(x), \quad V(x)=V_a^x(F).$$

Исбот. Теоремани исботлаш учун 49.2 ва 47.3-теоремаларга асосан $V(x)$ ва $G(x)$ функцияларнинг абсолют узлуксизлигини исботлаш кифоя. Агар $V(x)$ нинг абсолют узлуксизлигини кўрсатсак, 49.1-теоремага асосан, $G(x) = V(\overline{x}) - F(x)$ абсолют узлуксиз бўлади. $V(x)$ нинг абсолют узлуксизлигини исботлаймиз.

Ихтиёрий ε ни олиб, $F(x)$ нинг абсолют узлуксизлиги шартидан δ ни топамиз. Узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлган (a_1, b_1), (a_2, b_2), . . . , (a_n, b_n) оралиқлар олиб

$$\sum_{k=1}^{n} \{V(b_k) - V(a_k)\} = \sum_{k=1}^{n} V_{a_k}^{b_k}[F] \tag{3}$$

йиғиндини кўрамиз. Бу йиғинди

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_k-1} |F(x_{k_{j+1}}) - F(x_{k_j})| \tag{4}$$

йиғиндиларнинг юқори чегарасига тенг, бу ерда $a_k = x_{k_0} < x_{k_1} < \ldots < x_{k_{n_k}} = b_k$ эса (a_k, b_k) оралиқларнинг ихтиёрий бўлинмасидир. Равшанки,

$$b_k - a_k = \sum_{j=0}^{n_k-1} (x_{k_{j+1}} - x_{k_j}).$$

Барча (a_k, b_k) оралиқларнинг узунликлари йиғиндиси δ дан кичик бўлгани сабабли $F(x)$ нинг абсолют узлуксизлигига кўра (3) ифода (4) ифодаларнинг юқори чегараси бўлгани учун ҳар бир (4) ифода ε дан катта эмас. Бу ҳолда (3) ифода ҳам ε дан катта бўлмайди, бу эса $V(x)$ нинг абсолют узлуксизлигини кўрсатади. *

49.4-теорема. *$[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз функция берилган бўлиб, унинг қийматлари $[A, B]$ сегментда жойлашган бўлсин. Агар $[A, B]$ сегментда берилган $\psi(y)$ функция Липшиц шартини қаноатлантирса, у ҳолда мураккаб $\psi((f(x))$ функция абсолют узлуксиз бўлади.*

Исбот. $\psi(y)$ Липшиц шартини қаноатлантиради, яъни

$$|\psi(y_2) - \psi(y_1)| \leqslant K|y_2 - y_1|$$

тенгсизлик ўринли. Демак, ихтиёрий ўзаро кесишмайдиган, сони чекли (n та) ва $[a, b]$ сегментда жойлашган $\{(a_k, b_k)\}$ оралиқлар системаси учун

$$\sum_{k=1}^{n} |\psi[f(b_k)] - \psi[f(a_k)]| \leqslant K \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)|$$

муносабат ўринли.

Агар $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ йиғинди исталганча кичик бўлса, у ҳолда $f(x)$ нинг абсолют узлуксизлигига мувофиқ охирги муносабатнинг ўнг томони ҳам исталганча кичик бўлади. *

49.5-теорема. *Агар $[a, b]$ сегментда аниқланган абсолют узлуксиз $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ деярли ҳар бир нуқтада нолга тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ ўзгармас сонга тенг.*

Исбот. $f'(x) = 0$ тенгликни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат тўпламни E билан белгилаб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сонни оламиз. Агар $x \in E$ бўлса, у ҳолда етарли кичик $h > 0$ сон учун

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \varepsilon \tag{5}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. $[x, x+h]$ (h мусбат ва (5) тенгсизликни қаноатлантиради) сегментлар системаси Витали маъносида (23-§ га қаранг) E тўпламни қоплайди. Чунки ҳар бир $x \in E$ учун $x \in [x, x+h]$ бўлиб, $\mu[x, x+h] = h$ ва h — етарли кичик сон.

Шунинг учун 23.2-теоремага мувофиқ ҳар иккиси ўзаро кесишмайдиган, сони чекли ва $[a, b]$ сегментда жойлашган шундай

$$\sigma_1 = [x_1, x_1 + h_1], \ \sigma_2 = [x_2, x_2 + h_2], \ \ldots, \ \sigma_n = [x_n, x_n + h_n]$$

$(x_k < x_{k+1})$ сегментлар системасини тузишимиз мумкинки, E тўпламнинг булар қопламаган қисмининг ташқи ўлчови олдиндан берилган ихтиёрий $\delta > 0$ сондан кичик қилиниши мумкин.

$[a, b]$ сегментдан $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ сегментларни чиқариб ташлаш натижасида ҳосил бўлган оралиқлар

$$\begin{gathered}[a_1, x_1), \ (x_1 + h_1, \ x_2), \ (x_2 + h_2, x_3), \ \ldots, \\ \ldots, \ (x_{n-1} + h_{n-1}, \ x_n), \ (x_n + h_n, \ b]\end{gathered} \tag{6}$$

оралиқлардан иборат бўлиб, булар узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлади, чунки

$$b - a = \mu(E) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k) + \mu^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \sigma_k) < \sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k) + \delta.$$

Бундан

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k) > b - a - \delta.$$

Энди $f(x)$ нинг абсолют узлуксизлигидан фойдаланиб, берилган ε бўйича δ ни шундай кичик қилиб оламизки, унинг учун $f(x)$ функциянинг (6) оралиқлар системасидаги орттирмалари йиғиндисининг модули ε дан кичик, яъни

$$|\{|f(x_1) - f(a)|\} + \sum_{k=1}^{n-1} \{|f(x_{k+1}) - f(x_k + h_k)|\} + \\ + \{|f(b) - f(x_n + h_n)|\}| < \varepsilon \tag{7}$$

бўлсин.

Иккинчи томондан, σ_k сегментларнинг тузилишига кўра

$$|f(x_k + h_k) - f(x_k)| < \varepsilon h_k,$$

бундан:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \{f(x_k + h_k) - f(x_k)\}\right| < \varepsilon(b - a), \tag{8}$$

чунки

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n} \mu(\sigma_k) \leqslant b - a.$$

(7) ва (8) лардан:

$$f(b) - f(a) < \varepsilon(1 + b - a)$$

ва ε нинг ихтиёрийлигидан

$$f(b) = f(a)$$

тенглик келиб чиқади.

Аммо юқоридаги мулоҳазаларни ҳар қандай $[a, x]$ $(a < x \leqslant b)$ сегмент учун жорий этишимиз мумкин эди. Шунинг учун $[a, b]$ сегментдан олинган ихтиёрий x учун ҳам

$$f(x) = f(a),$$

яъни $f(x)$ функция ўзгармас сонга тенг экан.*

49.6-натижа. *Агар икки абсолют узлуксиз* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функцияларнинг ҳосилалари* $f'(x)$ *ва* $g'(x)$ *ўзаро эквивалент* (яъни деярли тенг) *бўлса, у ҳолда бу функцияларнинг айирмаси ўзгармас сонга тенг.*

49.7-**теорема.** *Лебегнинг аниқмас интеграли $F(x)$ абсолют узлуксиз функциядир.*

Исбот. 38.9-теоремага асосан ҳар қандай $\varepsilon>0$ учун шундай δ сон мавжудки, агар e тўпламнинг ўлчови δ дан кичик, яъни $\mu(e)<\delta$ бўлса, у ҳолда

$$\left|\int_e f(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

Хусусий ҳолда, яъни ўзаро кесишмайдиган сони чекли $\{(a_k, b_k)\}$ $(k=\overline{1, n})$ оралиқлар системаси узунликларининг йиғиндиси δ дан кичик бўлса, у ҳолда

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt\right|<\varepsilon.$$

Аммо

$$\int_{a_k}^{b_k} f(t)\,dt=F(b_k)-F(a_k);$$

булардан:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\{F(b_k)-F(a_k)\}\right|<\varepsilon,$$

яъни $F(x)$ абсолют узлуксиз. $*$

49.8-**теорема** (Лебег). *$[a, b]$ сегментда аниқланган абсолют узлуксиз $F(x)$ функциянинг ҳосиласи $F'(x)=$ $=\varphi(x)$ жамланувчи ва ҳар бир x учун*

$$\int_a^x \varphi(x)\,dx=F(x)-F(a). \qquad (9)$$

Исбот. 49.3-теоремага асосан абсолют узлуксиз функцияни иккита камаймайдиган абсолют узлуксиз функциянинг айирмаси шаклида ифодалаш мумкин; шунинг учун теоремани камаймайдиган абсолют узлуксиз функциялар учун исботлаш кифоя.

49.2-теоремага асосан $F(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланган. 47.6-натижага асосан эса $F(x)$ функциянинг ҳосиласи деярли ҳар бир нуқтада мавжуд; уни $\varphi(x)$ билан белгилаймиз. Энди $\varphi(x)$ нинг жамланувчилигини кўрсатамиз.

$F(x)$ нинг ҳосиласи

$$\Phi_h(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

нисбатнинг лимитига тенг[1]. $F(x)$ камаймайдиган бўлгани учун $h>0$ бўлганда $\Phi_h(x)$ манфий эмас ва $h\to 0$ да $[a, b]$ сегментнинг деярли ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ функцияга яқинлашади.

$\varphi(x)$ функциянинг жамланувчилигини кўрсатиш учун 38.11-Фату теоремасидан фойдаланамиз. Бунинг учун $\Phi_h(x)$ функциялардан $[a, b]$ сегмент бўйича олинган интегралларнинг чегараланганлигини кўрсатамиз.

Дарҳақиқат,

$$\int_\alpha^\beta \Phi_h(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_{\alpha+h}^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^\beta F(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} F(x)\,dx$$

ифода $h\to 0$ да $F(\beta)-F(\alpha)$ га интилади. Чунки $F(x)$ функциянинг абсолют узлуксизлигига асосан ихтиёрий $\varepsilon>0$ сон учун $\delta>0$ сонни шундай танлаймизки, $h<\delta$ бўлганда ҳар бир $x\in[\beta, \beta+h]$ учун

$$|F(x)-F(\beta)|<\varepsilon$$

бўлади. Шунингдек, агар $x\in[\alpha, \alpha+h]$ бўлса,

$$|F(x)-F(\alpha)|<\varepsilon$$

бўлади. Булардан

$$\left|\frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} F(x)\,dx - (F(\beta)-F(\alpha))\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h}(F(x)-F(\beta))\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h}(F(x)-F(\alpha))\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h}|F(x)-F(\beta)|\,dx + \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h}|F(x)-F(\alpha)|\,dx < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon.$$

Бундан, $\varepsilon>0$ сонниНг ихтиёрийлигидан $h\to 0$ да

$$\frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} F(x)\,dx \to F(\beta)-F(\alpha)$$

---

[1] Агар $x+h$ сон $[a, b]$ сегментдан ташқарига чиқиб кетса, $F(x)$ ни ўзгармас қилиб давом эттирамиз.

муносабат келиб чиқади. Демак, $\Phi_h(x)$ функциянинг интеграли чегараланган бўлади. Шундай қилиб, Фату теоремасини татбиқ қилиш мумкин. Бу теоремадан $F'(x) = \varphi(x)$ нинг жамланувчилиги билан бирга

$$\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)\,dx \leqslant F(\beta) - F(\alpha)$$

тенгсизлик ҳам келиб чиқади. Агар $\alpha \to a$, $\beta \to b$ бўлса, у ҳолда $F'(x)$ ҳосила $[a, b]$ да жамланувчи ва

$$\int_{a}^{b} F'(x)\,dx \leqslant F(b-0) - F(a+0).$$

$F(x)$ функция a ва b нуқталарда узлуксиз бўлгани учун

$$\int_{a}^{b} F'(x)\,dx \leqslant F(b) - F(a). \tag{10}$$

$F(x)$ абсолют узлуксиз бўлганда (9) тенглик ўринли бўлишини кўрсатамиз[1].

Ушбу

$$G(x) = \int_{a}^{x} \varphi(x)\,dx$$

функцияни киритамиз. $G(x)$ функция 49.7-теоремага асосан абсолют узлуксиз ва 48.1-теоремага асосан деярли ҳар бир нуқтада $G'(x) = \varphi(x)$. Аммо иккинчи томондан, $F'(x) = \varphi(x)$; шунинг учун $H(x) = F(x) - G(x)$ айирманинг ҳосиласи деярли ҳар бир нуқтада нолга тенг.

Демак, 49.5-теоремага асосан $H(x)$ ўзгармас C_0 сонга тенг. У ҳолда

$$F(x) = G(x) + H(x) = \int_{a}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi + C_0.$$

Агар $x=0$ бўлса, $C_0 = F(a)$. Шу билан теорема тўла исбот этилди.*

Шундай қилиб, абсолют узлуксиз функция ўз ҳосиласининг аниқмас интегралидир.

49.7- ва 49.8-теоремалардан қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади:

---

[1] 46-§ нинг охирида келтирилган мисолдан кўринадики, узлуксиз (ҳатто жиддий монотон узлуксиз) функциялар учун (10) да $<$ ишораси бўлиши мумкин.

49.9-натижа. *$F(x)$ функция бирор жамланувчи функциянинг аниқмас интеграли бўлиши учун абсолют узлуксиз бўлиши зарур ва кифоя.*

50-§. Бошланғич функцияни тиклаш

Энди биз 48-§ нинг бошида қўйилган саволнинг иккинчи қисмига, аниқроғи, ундаги (2) тенгликка қайтамиз ва унинг Лебег интеграли учун қанчалик ўринли эканлигини кўрсатамиз. Агар $f(x)$ функциянинг $f'(x)$ ҳосиласи учун Лебег интеграли қаралаётган бўлса, 48-§ даги (2) тенглик ҳамма вақт ҳам ўринли бўлавермайди.

50.1-теорема. *$[a, b]$ сегментда монотон камаймайдиган $f(x)$ функциянинг $f'(x)$ ҳосиласи шу сегментда жамланувчи ва*

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a). \tag{1}$$

Исбот. Таъриф бўйича $f(x)$ функциянинг x нуқтадаги ҳосиласи

$$h_\tau(x)=\frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau} \tag{2}$$

функцяннг $\tau\to0$ даги лимитига тенг. $f(x)$ функциянинг монотонлигидан 45.1-теоремага асосан у жамланувчидир. Бундан ҳар бир τ учун $h_\tau(x)$ функциянинг жамланувчилиги келиб чиқади. Шунинг учун (2) тенгликни $[a, b]$ сегмент бўйича интеграллаб,

$$\int_a^b h_\tau(x)\,dx=\frac{1}{\tau}\int_a^b f(x+\tau)\,dx-\frac{1}{\tau}\int_a^b f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_b^{b+\tau} f(x)\,dx-\frac{1}{\tau}\int_a^{a+\tau} f(x)\,dx$$

тенгликка келамиз. $\tau\to+0$ да бу тенгликнинг ўнг томони $f(b)-f(a+0)$ га интилади. Иккинчи томондан, $f(x)$ функциянинг монотон камаймайдиганлигидан

$$\int_a^b h_\tau(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a).$$

Лебег интеграли остида лимитга ўтиш ҳақидаги 38.11-Фату теоремасига асосан

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \lim_{\tau\to 0}\int_a^b h_\tau(x)\,dx = f(b) - f(a+0) \leqslant f(b) - f(a).*$$

(1) муносабатда қатъий тенгсизлик ўринли бўлган монотон функцияга мисол қилиб, 45-§ да аниқланган Кантор функциясини олишимиз мумкин. Тузилишига асосан бу функция монотон ва узлуксиз бўлиб, унинг ҳосиласи деярли нолга тенг. Демак,

$$0 = \int_0^1 K'(x)\,dx < K(1) - K(0) = 1 - 0 = 1.$$

50.2-теорема. *Агар $f'(x)$ функция ҳар бир нуқтада мавжуд бўлиб, чекли ва жамланувчи бўлса, у ҳолда* (1) *муносабатда тенглик ўринли.*

Теореманинг исботи қуйидаги учта леммага асосланган:

50.3-лемма. *$[a, b]$ сегментда бирор чекли $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ функциянинг ҳосила сонлари манфий бўлмаса, у ҳолда $\varphi(x)$ ўсувчи функциядир.*

Исбот. Бирор $\varepsilon>0$ олиб,

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \varepsilon\cdot x$$

функция тузамиз. Теорема шартига кўра $\varphi(x)$ функциянинг ҳосила сонлари манфий бўлмаганлиги учун, яъни $D\varphi \geqslant 0$ (бу ерда ва келгусида D^+, D_+, D^- ва D_- лар ўрнига қисқалик учун D ни ёздик) бўлгани учун $D\varphi_1 \geqslant \varepsilon$ бўлади.

Фараз қилайлик, шундай $\alpha < \beta\,(a \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant b)$ сонлар мавжудки, улар учун $\varphi_1(\beta) < \varphi_1(\alpha)$ бўлсин. Агар $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$ бўлса, у ҳолда $[\alpha, \gamma]$ ва $[\gamma, \beta]$ сегментларга мос келувчи ушбу

$$\varphi_1(\gamma) - \varphi_1(\alpha), \quad \varphi_1(\beta) - \varphi_1(\gamma)$$

айирмаларнинг камида биттаси манфий бўлади. $[\alpha, \gamma]$ ва $[\gamma, \beta]$ сегментларнинг мос айирмаси манфий бўлганини (иккаласи ҳам қаноатлантирилса, чапдагисини) $[\alpha_1, \beta_1]$ орқали белгилаймиз. Демак, $[\alpha_1\ \beta_1]$ сегмент учун $\varphi_1(\beta_1) < \varphi_1(\alpha_1)$. Агар $\gamma_1 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ бўлса, $[\alpha_1, \gamma_1]$ ва $[\gamma_1, \beta_1]$ сегментларга мос келувчи

$$\varphi_1(\gamma_1) - \varphi_1(\alpha_1), \ \varphi_1(\beta_1) - \varphi_1(\gamma_1)$$

айирмаларнинг камида бири манфийдир. $[\alpha_2, \beta_2]$ орқали $[\alpha_1, \gamma_1]$, $[\gamma_1, \beta_1]$ сегментларнинг мос айирмаси манфий бўлганини (иккаласи ҳам қаноатлантирилса, чапдагисини) белгилаймиз. Демак, $[\alpha_2, \beta_2]$ сегмент учун

$$\varphi_1(\beta_2) < \varphi_1(\alpha_2).$$

Бундай ясашларни давом эттириб, $\varphi_1(\beta_n) < \varphi_1(\alpha_n)$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ сегментлар кетма-кетлигини тузамиз.

x_0 нуқта $[\alpha_n, \beta_n]$ сегментларнинг ҳаммасига тегишли нуқта бўлсин. У ҳолда ҳар бир n учун

$$\varphi_1(\beta_n) - \varphi_1(x_0), \quad \varphi_1(x_0) - \varphi_1(\alpha_n)$$

айирманинг камида биттаси манфий. Агар $\varphi_1(\beta_n) < \varphi_1(x_0)$ бўлса, $h_n = \beta_n - x_0$ ва агар $\varphi_1(\beta_n) \geqslant \varphi_1(x_0)$ бўлса, $h_n = \alpha_n - x_0$ деб оламиз. Биринчи ҳолда $h_n > 0$ ва $\varphi_1(x_0 + h_n) - \varphi_1(x_0) = \varphi_1(\beta_n) - \varphi_1(x_0) < 0$, иккинчи ҳолда эса $h_n < 0$ ва $\varphi_1(x_0 + h_n) - \varphi_1(x_0) = \varphi_1(\alpha_n) - \varphi_1(x_0) \geqslant 0$, натижада

$$\Delta_n = \frac{\varphi_1(x_0 + h_n) - \varphi_1(x_0)}{h_n} < 0.$$

Агар бу кетма-кетликдан чекли ёки чексиз лимитга эга бўлган $\{\Delta_{n_k}\}$ қисм кетма-кетликни танлаб олсак, ҳосила сон учун

$$D\varphi_1(x_0) \leqslant 0$$

тенгсизлик олинади. Аммо бундай бўлиши мумкин эмас, чунки

$$D\varphi_1(x) \geqslant \varepsilon$$

тенгсизлик ҳар бир $x \in [a, b]$ учун ўринли.

Шундай қилиб, $\varphi_1(\beta) < \varphi_1(\alpha)$ тенгсизликни бажарувчи $\alpha < \beta$ $(a \leqslant \alpha, \beta \leqslant b)$ сонлар мавжуд эмас экан. Демак,

$$\varphi_1(\beta) \geqslant \varphi_1(\alpha),$$

яъни

$$\varphi(\beta) + \varepsilon\beta \geqslant \varphi(\alpha) + \varepsilon\alpha.$$

Бундан ε сон ихтиёрий бўлгани учун

$$\varphi(\beta) \geqslant \varphi(\alpha)$$

бўлиб, лемма исботланди.

50.4-лемма. *$[a, b]$ сегментда ўлчови нолга тенг бўлган ихтиёрий E тўплам берилган бўлсин. У ҳолда шундай ўсувчи узлуксиз $g(x)$ функция мавжудки, E тўпламнинг ҳар бир x нуқтасида:*

$$g'(x) = +\infty.$$

Исбот. Ҳар бир n натурал сон учун

$$G_n \supset E, \ \mu(G_n) < \frac{1}{2^n}$$

шартларни қаноатлантирувчи очиқ тўпламни тузамиз. $G_n \cap [a, x]$ тўпламнинг ўлчовини $\psi_n(x)$ билан белгилаймиз, яъни

$$\psi_n(x) = \mu\{G_n \cap [a, x]\};$$

$\psi_n(x)$ функция ўсувчи, манфий эмас, узлуксиз ва

$$\psi_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

тенгсизликни қаноатлантиради. Шунинг учун

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$$

қатор $[a, b]$ да текис яқинлашувчи; бу қаторнинг йиғиндисини $g(x)$ билан *белгилаймиз.* $g(x)$ функция манфий эмас, ўсувчи ва узлуксиз. Агар n сон ва $x_0 \in E$ тайин бўлса, у ҳолда $|h|$ етарлича кичик бўлганда $[x_0, x_0+h]$ сегмент бутунлай G_n нинг ичида ётади. Бундай h учун (қулайлик учун $h > 0$ дейиш мумкин)

$$\psi_n(x_0+h) = \mu\{(G_n \cap [a, x_0]) \cup [G_n \cap (x_0, x_0+h)]\} =$$
$$= \psi_n(x_0) + h$$

муносабат ўринли. Бундан:

$$\frac{\psi_n(x_0+h) - \psi_n(x_0)}{h} = 1.$$

Аммо бундан N натурал сон қандай бўлмасин, $[h]$ етарлича кичик бўлганда

$$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\psi_n(x_0+h) - \psi_n(x_0)}{h} = N.$$

Демак,

$$g'(x_0) = +\infty.$$

Лемма исботланди.

50.5-лемма. *$[a, b]$ сегментда чекли $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. Агар $[a, b]$ сегментнинг деярли ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ функциянинг барча ҳосила сонлари манфий бўлмай, $[a, b]$ нинг ҳеч қандай нуқтасида $-\infty$ га тенг бўлмаса, у ҳолда $\varphi(x)$ ўсувчидир.*

Исбот. $\varphi(x)$ функциянинг ҳосила сонларидан камида биттаси манфий бўлган нуқталар тўпламини E билан белгилаймиз. Лемманинг шарти бўйича

$$\mu(E)=0.$$

50.4-леммага асосан шундай узлуксиз ўсувчи $g(x)$ функция мавжудки, E тўпламнинг ҳар бир нуқтасида

$$g'(x)=+\infty .$$

Бирор $\varepsilon\,(>0)$ олиб,

$$\Phi(x)=\varphi(x)+\varepsilon g(x)$$

функцияни киритамиз ва $\Phi(x)$ нинг ҳеч бир ҳосила сони $[a, b]$ сегментнинг ҳеч қандай нуқтасида манфий бўлолмаслигини кўрсатамиз. Ҳақиқатан ҳам, $g(x)$ ўсувчи бўлгани учун

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}\geqslant\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

тенгсизлик ўринли, бундан эса $[a, b]$ сегментнинг E тўпламга тегишли бўлмаган ихтиёрий x нуқтасида

$$D\Phi(x)\geqslant 0$$

тенгсизлик ўринли (чунки E дан ташқарида $\varphi(x)$ функциянинг ҳосила сонлари манфий эмас). Агар $x\in E$ бўлса,

$$\frac{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)}{h_n}$$

ифода $h_n\to 0$ да қуйидан чегараланганлиги (чунки акс ҳолда $\varphi(x)$ функциянинг бирор ҳосила сони учун $D\varphi(x)=-\infty$ бўлади) ва $g'(x)=+\infty$ бўлгани учун: $\Phi'(x)=+\infty$. Шундай қилиб, $[a, b]$ сегментнинг ҳар қандай нуқтаси учун

$$D\Phi(x)\geqslant 0.$$

Бундан, 50.3-леммага асосан, $\Phi(x)$ ўсувчи, яъни $x<y$ да

$$\Phi(x)\leqslant\Phi(y)$$

ёки

$$\varphi(x)+\varepsilon g(x)\leqslant\varphi(y)+\varepsilon g(y);$$

ε сонни нолга интилтириб,

$$\varphi(x)\leqslant\varphi(y)$$

ифодани оламиз. Лемма исботланди. *

50.2-теореманинг исботи. Қуйидаги функцияларни киритамиз:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f'(x), \text{ агар } f'(x) \leqslant n \text{ бўлса,} \\ n, \text{ агар } f'(x) > n \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Равшанки,

$$\varphi_n(x) \leqslant f'(x). \tag{3}$$

Бундан, 38.6-теоремага асосан, $\varphi_n(x)$ нинг жамланувчилиги келиб чиқади. Ушбу

$$R_n(x) = f(x) - \int_a^x \varphi_n(x)\, dx$$

белгилашни киритиб, $R_n(x)$ нинг ўсувчилигини кўрсатамиз. Теорема шартига кўра ҳар бир нуқтада $f'(x)$ мавжуд бўлгани учун 48.1-теоремага асосан ҳар бир нуқтада

$$R'_n(x) = f'(x) - \varphi_n(x)$$

бўлиб, $\varphi_n(x)$ функциянинг таърифланишига асосан $R'_n(x) \geqslant 0$ тенгсизлик ўринли бўлади. Шунинг учун $R_n(x)$ нинг бирор ҳосила сони манфий бўлган нуқталар тўпламининг ўлчови нолга тенг. Иккинчи томондан, $\varphi_n(x) \leqslant n$ бўлгани учун

$$\frac{1}{n}\int_x^{x+h} \varphi_n(t)\, dt \leqslant n.$$

Бундан эса

$$\frac{R_n(x+h) - R_n(x)}{h} \geqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - n.$$

Охирги муносабат теорема шартига кўра $f(x)$ функциянинг ҳосиласи ҳар бир нуқтада мавжуд бўлиб, чекли бўлганлиги учун $R_n(x)$ функциянинг ҳеч бир ҳосила сони $-\infty$ га тенг бўлолмаслигини кўрсатади. Шунинг учун, 50.5-леммага асосан $R_n(x)$ ўсувчидир.

Демак,

$$R_n(b) \geqslant R_n(a),$$

яъни

$$f(b) - f(a) \geqslant \int_a^b \varphi_n(x)\, dx.$$

Аммо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x).$$

Бу ва (3) тенгсизликдан, 38.12- теоремага асосан

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx$$

муносабатни оламиз. Демак,

$$f(b)-f(a) \geqslant \int_a^b f'(x)\,dx.$$

Агар юқоридаги мулоҳазаларни $-f(x)$ функцияга татбиқ қилсак,

$$f(b)-f(a) \leqslant \int_a^b f'(x)\,dx$$

муносабатни оламиз. Охирги икки муносабатдан

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx$$

келиб чиқади. Бу билан теорема тўла исботланди. *

Энди иккита мисол келтирамиз.

1. Ушбу

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x} \quad (0 < x \leqslant 1),$$
$$f(0) = 0$$

функция $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x} \quad (x > 0),$$
$$f'(0) = 0$$

ва бу ҳосила жамланувчи функция бўлади, чунки

$$|f'(x)| \leqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Шунинг билан $f(x)$ функция 50.2- теореманинг шартларини қаноатлантиради ва демак,

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt.$$

2. Ушбу

$$f(x) = x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} \quad (0 < x \leqslant 1),$$
$$f(0) = 0$$

функция ҳам $[0, 1]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида чекли ҳосилага эга, аммо унинг ҳосиласи жамланувчи функция бўлмайди. Дарҳақиқат, агар $\alpha < \beta \leqslant 1$ бўлса, у ҳолда $[\alpha, \beta]$ сегментда $f'(x)$ чегараланган ва шунинг учун

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(t)\, dt = \beta^2 \cos \frac{\pi}{\beta^2} - \alpha^2 \cos \frac{\pi}{\alpha^2}.$$

Агар $\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{4n+1}}$, $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{\alpha_n}^{\beta_n} f'(t)\, dt = \frac{1}{2n}$$

бўлади. Лекин $[\alpha_n, \beta_n]$ сегментлар ўзаро кесишмайди; шунинг учун, агар $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]$ бўлса, у ҳолда

$$\int_{E} f'(t)\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

яъни $f'(t)$ жамланувчи эмас. Бу мисол кўрсатадики, Лебег маъносида интеграллаш жараёни ҳам ҳосила-функция ёрдами билан бошланғич функцияни тиклаш масаласини тўла ҳал қилмас экан. Бу масалани Лебегнинг интеграллаш жараёнини умумлаштирувчи Перон — Данжуа интеграллаш жараёни тўла ҳал қилади.

47.7- теоремада ҳар қандай ўзгариши чегараланган $f(x)$ функция ягона усул билан узлуксиз $g(x)$ функция ҳамда поғонали $H(x)$ функциянинг йиғиндиси сифатида

$$f(x) = g(x) + H(x) \tag{4}$$

ифода этилиши мумкинлигини кўрган эдик.

Энди ўзгариши чегараланган узлуксиз, аммо абсолют узлуксиз бўлмаган $g(x)$ функцияни қараймиз ва $\alpha(x)$ функцияни қуйидаги тенглик орқали аниқлаймиз:

$$\alpha(x) = \int_{a}^{x} g'(t)\, dt.$$

49.7-теоремага асосан $\alpha(x)$ абсолют узлуксиз функциядир. 49.2-теоремага асосан эса унинг ўзгариши чегараланган. $g(x)$ ва $\alpha(x)$ функцияларнинг ушбу

$$S(x) = g(x) - \alpha(x) \tag{5}$$

айирмасини қараймиз. Бу тенглик билан аниқланган $S(x)$ функция узлуксиз ва ўзгариши чегараланган функция эканлиги равшан. 47.6-натижага асосан $S(x)$ функция деярли чекли ҳосилага эга. Шунинг учун $S'(x) = g'(x) - \alpha'(x)$ тенглик деярли ўринли. 48.2-теоремага асосан $\alpha'(x) = g'(x)$ тенглик деярли ўринли бўлгани учун

$$S'(x) = g'(x) - \alpha'(x) = 0$$

тенгликнинг деярли ўринли эканлиги келиб чиқади.

Таъриф. *Узлуксиз, ўзгариши чегараланган ва ҳосиласи деярли нолга тенг бўлган $S(x)$ функция сингуляр функция дейилади.*

Сингуляр функцияга мисол қилиб 45-§ да аниқланган Кантор функциясини ҳамда 46.4-теоремадан кейинги мисолда қурилган функцияни келтириш мумкин.

(4) ва (5) тенгликлар қуйидаги муҳим хулосага олиб келади:

Ҳар қандай ўзгариши чегараланган $f(x)$ функция учта: абсолют узлуксиз $(\alpha(x))$, поғонали $(H(x))$ ва сингуляр $(S(x))$ функцияларнинг йиғиндиси сифатида ифода этилиши мумкин, яъни

$$f(x) = \alpha(x) + H(x) + S(x). \tag{6}$$

(6) тенгликни дифференциаллаб деярли ўринли бўлган

$$f'(x) = \alpha'(x)$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан эса ўзгариши чегараланган функциянинг ҳосиласини интегралланганда бу функциянинг ўзи эмас, балки унинг фақат абсолют узлуксиз қисмигина тикланар экан, деган хулосага келамиз.

51-§. Ишорали ўлчов. Радон — Никодим теоремаси

Бу параграфда III бобда киритилган ўлчов тушунчасини янада кенгайтирамиз.

Фараз қилайлик, бирор σ-аддитив μ ўлчовга эга бўлган E тўпламда жамланувчи $f(x)$ функция берилган бўлсин. У ҳолда 38.5-теоремага асосан бу функция E тўпламнинг ҳар қандай ўлчовли A қисмида ҳам жамланувчи бўлади.

Агар тайинланган $f(x)$ функция учун қуйидаги Лебегнинг аниқмас интеграли

$$L(A)=\int\limits_A f(t)\,d\mu \tag{1}$$

ни қарасак, Лебег интегралининг σ-аддитивлик хоссасига асосан, (1) тенглик билан аниқланган $L(A)$ тўплам функция σ-аддитив ўлчовнинг манфий эмаслик хоссасидан ташқари барча хоссаларига эга бўлади (чунки, агар E тўпламда $f(x)\leqslant 0$ бўлса, ҳар қандай ўлчовли $A\subset E$ тўплам учун $L(A)\leqslant 0$ бўлади). Бу эса қийматлари тўплами манфий сонлардан иборат бўлган ҳолни ҳам ўз ичига олувчи ихтиёрий тўплам функциялари синфини ўрганишга олиб келади.

1-таъриф. *Бирор тўпламлар системасида аниқланган $L(\cdot)$ тўплам функцияси учун шу системадан олинган ҳар қандай ўзаро кесишмайдиган сони саноқли $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, $(A_k\cap A_j=\varnothing,\ k\neq j)$ тўпламларда*

$$L\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}L(A_k)$$

тенглик ўринли бўлса, бундай тўплам функцияси σ-аддитив тўплам функцияси дейилади.

2-таъриф. *σ-аддитив μ ўлчовга эга бўлган E тўпламнинг ўлчовли қисм тўпламларидан иборат $Z(E)$ системада аниқланган ҳар қандай σ-аддитив $L(\cdot)$ тўплам функцияси ишорали ўлчов дейилади.*

3-таъриф. *Агар исталган $B\in Z(E)$ учун $L(A\cap B)\leqslant 0$ $(L(A\cap B)\geqslant 0)$ бўлса, $A\in Z(E)$ тўплам $L(\cdot)$ ишорали ўлчовга нисбатан манфий (мусбат) тўплам дейилади.*

Манфий ва мусбат тўпламларнинг мавжудлиги ҳақидаги қуйидаги теоремани исботлаймиз:

51.1-теорема. *Агар ишорали $L(\cdot)$ ўлчов $Z(E)$ системада аниқланган бўлса, у ҳолда E тўпламнинг шундай ўлчовли E^- қисми мавжудки, $L(\cdot)$ ишорали ўлчовга нисбатан E^- тўплам манфий, $E^+=E\setminus E^-$ тўплам эса мусбат бўлади.*

Исбот. Фараз қилайлик,

$$\alpha=\inf_{B\subset E:L(B)\leqslant 0}L(B) \tag{2}$$

бўлсин. Агар ишорали $L(\cdot)$ ўлчовга нисбатан манфий бўлган ўлчовли тўпламларнинг $\{E_n\}$ кетма-кетлиги учун

$$\lim_{n\to\infty}L(E_n)=\alpha \tag{3}$$

муносабат ўринли бўлса,

$$E^{-} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad (4)$$

тенглик билан аниқланган E^{-} тўплам ишорали $L(\cdot)$ ўлчовга нисбатан манфий бўлиб, $L(E^{-}) = \alpha$ бўлади.

Ҳақиқатан, E^{-} тўпламнинг ишорали $L(\cdot)$ ўлчовга нисбатан манфий эканлиги равшан. (2) муносабатга асосан E^{-} тўплам учун

$$L(E^{-}) \geqslant \alpha$$

тенгсизликка эга бўламиз. (4) тенгликка асосан эса

$$E_n \subset E^{-}$$

муносабат ўринли. Бундан $L(E_n) \geqslant L(E^{-})$ тенгсизлик келиб чиқади. Демак,

$$\alpha \leqslant L(E^{-}) \leqslant L(E_n)$$

бўлиб, бундан $n \to \infty$ да

$$\alpha \leqslant L(E^{-}) \leqslant \alpha$$

муносабатни оламиз. Бундан $L(E^{-}) = \alpha$ тенглик келиб чиқади.

E^{-} тўплам теорема шартини қаноатлантирувчи тўплам эканлигини, яъни $E+ = E \setminus E^{-}$ тўпламнинг ишорали $L\ (\cdot)$ ўлчовга нисбатан мусбат тўплам эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, E тўплам ишорали $L(\cdot)$ ўлчовга нисбатан мусбат бўлмасин. У холда шундай $A \in Z\ (E)$ тўплам мавжудки, $L(E+ \cap A) < 0$ бўлади. $A_0 = E+ \cap A$ белгилаш киритамиз. A_0 тўплам ишорали $L\ (\cdot)$ ўлчовга нисбатан манфий бўла олмайди. Акс ҳолда A_0 тўпламни E тўпламга қўшиб,

$$L(E^{-} \cup A_0) = L(E^{-}) + L(A_0) < \alpha$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса α соннинг аниқланишига зид. Демак, шундай n натурал сон мавжудки, унинг учун A_0 тўпламнинг қисми бўлган A_1 тўплам топилиб,

$$L(A_1) \geqslant \frac{1}{n}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу тенгсизликни қаноатлантирувчи барча n натурал сонларнинг энг кичигини n_1 орқали белгилаймиз:

$$L(A_1) \geqslant \frac{1}{n_1}.$$

Бу фикрни $A_0 \setminus A_1$ тўплам учун такрорлаб, $L(A_2) \geqslant \frac{1}{n_2}(n_2 \geqslant n_1)$ муносабатни қаноатлантирадиган $A_2 \subset (A_0 \setminus A_1)$ тўпламни топамиз. Бу жараённи чексиз давом эттирамиз. Натижада бўш бўлмаган

$$B_0 = A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

тўпламни ҳосил қиламиз (чунки $L(A_0) < 0$ ва барча n учун $L(A_n) > 0$). Тузилишига асосан B_0 тўплам ишорали $L(\cdot)$ ўлчовга нисбатан манфий тўпламдир. Буни E^- тўпламга қўшиб, яна α соннинг аниқланишига зид бўлган натижага келамиз. Демак, барча ўлчовли $A \subset E \setminus E^-$ тўпламлар учун $L(A) \geqslant 0$, яъни $E^+ = E \setminus E^-$ тўплам ишорали $L(\cdot)$ ўлчовга нисбатан мусбат тўплам.$_*$

E тўпламнинг мусбат E^+ ва манфий E^- тўпламларнинг йиғиндиси шаклида ифодаланиши, яъни

$$E = E^+ \cup E^-$$

ёйилмаси унинг *Хан маъносидаги ёйилмаси* дейилади.

E тўпламнинг Хан маъносидаги ёйилмаси $L(\cdot)$ ишорали ўлчовга нисбатан эквивалентликкача ягонадир, яъни агар

$$E = E_1^+ \cup E_1^- \text{ ва } E = E_2^+ \cup E_2^-$$

бўлса, у ҳолда исталган $A \in Z(E)$ учун

$$L(A \cap E_1^+) = L(A \cap E_2^+) \text{ ва } L(A \cap E_1^-) = L(A \cap E_2^-)$$

бўлади. Ҳақиқатан,

$$A \cap (E_1^- \setminus E_2^-) \subset A \cap E_1^- \text{ ва } A \cap (E_1^- \setminus E_2^-) \subset A \cap E_2^+$$

муносабатлардан мос равишда

$$L(A \cap (E_1^- \setminus E_2^-)) \leqslant 0 \text{ ва } L(A \cap (E_1^- \setminus E_2^-)) \geqslant 0$$

тенгсизликларни оламиз. Булардан $L(A \cap (E_1^- \setminus E_2^-)) = 0$ тенглик келиб чиқади. Ушбу $L(A \cap (E_2^- \setminus E_1^-)) = 0$ тенглик ҳам худди юқоридаги сингари исботланади. Бу охирги икки тенгликдан эса $L(A \cap E_1^-) = L(A \cap E_2^-)$ тенглик келиб чиқади. Ушбу $L(A \cap E_1^+) = L(A \cap E_2^+)$ тенглик ҳам шунинг сингари исбот этилади.

Агарда биз $Z(E)$ σ-алгебрада $L^+(\cdot)$ ва $L^-(\cdot)$ тўплам функцияларини мос равишда

$$L^+(A) = L(A \cap E^+) \text{ ва } L^-(A) = -L(A \cap E^-)$$

тенгликлар орқали аниқласак, иккита σ-аддитив ўлчовга эга бўламиз. Бундан ишорали $L(\cdot)$ ўлчовни

$$L = L^+ - L^-$$

кўринишда ёзиш мумкинлиги келиб чиқади. Ишорали ўлчовнинг бу кўриниши унинг *Жордан маъносидаги ёйилмаси* дейилади.

Энди μ σ-аддитив ўлчов бўлиб, $Z(E)$ система E тўпламнинг барча ўлчовли қисм тўпламларидан тузилган σ-алгебра бўлсин. Агар бирор $A_0 \in Z(E)$ тўплам ҳамда ишорали $L(\cdot)$ ўлчов учун ҳар бир $B \in E \setminus A_0$ да $L(B)=0$ ва ҳар қандай ўлчовли $C \subset A_0$ учун $L(C)>0$ бўлса, у ҳолда A_0 тўплам ишорали $L(\cdot)$ ўлчовнинг *ташувчиси* дейилади.

Агар ҳар қандай ёлғиз нуқтали A тўплам учун $L(A)=0$ бўлса, бундай ишорали ўлчов *ишорали узлуксиз ўлчов* дейилади.

Агар ишорали $L(\cdot)$ ўлчовнинг ташувчиси чекли ёки саноқли тўпламдан иборат бўлса, *ишорали дискрет ўлчов* дейилади.

4-таъриф. *Агар $\mu(A)=0$ бўлган ҳар қандай $A \in Z(E)$ учун $L(A)=0$ бўлса, $L(\cdot)$ ни μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз ишорали ўлчов дейилади.*

Ниҳоят, агар ишорали $L(\cdot)$ ўлчовнинг ташувчиси μ-ўлчови ноль бўлган бирор $A \in Z(E)$ тўпламдан иборат бўлса, у μ ўлчовга нисбатан *сингуляр ишорали ўлчов* дейилади.

Лебег интегралининг σ-аддитивлик хоссасига асосан (38.7-теорема)

$$L(A)=\int_A f(x)\,d\mu$$

тенглик орқали аниқланган $L(A)$ тўплам функцияси σ-аддитив ишорали ўлчов бўлади. Лебег интегралининг абсолют узлуксизлик хоссасидан эса (38.9-теорема) ишорали $L(A)$ ўлчовнинг μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксизлиги келиб чиқади. Энди бирор ишорали ν ўлчовнинг σ-аддитив μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксизлиги маълум бўлганда, уларни (1) кўринишда ифодалаш мумкинми, деган савол туғилади. Бу саволга Радон — Никодим теоремаси жавоб беради. Дастлаб қуйидаги ёрдамчи леммани исботлаймиз:

Лемма. *Агар айнан нолга тенг бўлмаган ν ўлчов μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай натурал n ва $\mu(B)>0$ бўлган ўлчовли B тўплам топиладики, B тўплам ишорали $\nu-\frac{1}{n}\mu$ ўлчовга нисбатан мусбат тўплам бўлади.*

Исбот. Ҳар бир ишорали $\nu-\frac{1}{n}\mu$, $n=1, 2, \ldots$ ўлчовга мос келган $E=E_n^+ \cup E_n^-$ Хан ёйилмасини ёзиб, қуйидаги тўпламларни тузамиз:

$$E_0^+=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+, \quad E_0^-=E\setminus E_0^+=E\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^+\right)=$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus E_n^+) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^-.$$

У ҳолда барча n учун $\left(\nu - \frac{1}{n} \mu\right)(E_0^-) \leqslant 0$ тенгсизликдан

$$\nu(E_0^-) \leqslant \frac{1}{n} \mu (E_0^-)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу тенгсизлик ҳар қандай n учун ўринли эканлигидан $\nu(E_0^-) \leqslant 0$ муносабатга эга бўламиз. Демак, 51.1-теоремага асосан $\left(\nu - \frac{1}{n} \mu\right)(E_0^+) \geqslant 0$ бўлиб,

$$\nu(E_0^+) \geqslant \frac{1}{n} \mu(E_0^+)$$

тенгсизлик ҳар бир n натурал сон учун ўринли эканлигидан $\nu(E_0^+) > 0$ тенгсизлик келиб чиқади. ν ўлчов μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз бўлгани учун $\mu(E_0^+) > 0$ бўлади. Бундан ва E_0^+ тўпламнинг тузилишидан шундай n натурал сон топиладики, $\mu (E_n^+) > 0$ бўлади. Агар шу n учун $B = E_n^+$ деб олсак, лемма исботланган бўлади.*

51.2-теорема (Радон — Никодим). *Агар ишорали ν ўлчов ҳамда σ-аддитив μ ўлчов Z (X) σ-алгебрада аниқланиб, ишорали ν ўлчов μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз бўлса, у ҳолда X тўпламда μ ўлчов бўйича жамланувчи шундай $f(x)$ функция мавжудки, ҳар бир $A \in Z(X)$ учун*

$$\nu(A) = \int_A f(x) \, d\mu$$

тенглик ўринлидир.

$f(x)$ функция ишорали ν ўлчовнинг μ ўлчов бўйича ҳосиласи дейилади ва деярли бир қийматли аниқланади, яъни агар $\nu(A) = \int_A g(x) \, d\mu$ ва $\nu(A) = \int_A f(x) \, d\mu$ бўлса, у ҳолда

$$\mu \{x \in X : f (x) \neq g (x)\} = 0$$

бўлади.

Исбот. Жордан ёйилмасига асосан μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз бўлган ҳар бир ишорали ν ўлчов μ га нисбатан абсолют узлуксиз бўлган ν_1 ва ν_2 ўлчовларнинг айирмаси сифатида ёзилиши мумкин. Шунинг учун теоремани мусбат ишорали ўлчов учун исботлаш кифоя. Шундай қилиб, умумий аниқланиш соҳасига эга бўлган ν ва μ ўлчовлар берилган бўлиб, ν ўлчов μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксиз бўлсин. Ҳар қандай ўлчовли $A \in Z(X)$

тўплам учун μ ўлчов бўйича жамланувчи, манфий бўлмаган ҳамда

$$\int_A f(x)\, d\mu \leqslant \nu(A)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган функциялар тўпламини K^+ орқали белгилаймиз. Фараз қилайлик,

$$M = \sup_{f\in K^+} \int_X f(x)\, d\mu$$

бўлсин. K^+ тўпламдан

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = M$$

шартни қаноатлантирувчи $\{f_n\}$ функциялар кетма-кетлигини оламиз ва

$$g_n(x) = \max(f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

функцияни тузиб, $g_n \in K^+$ эканини кўрсатамиз. Ҳақиқатан, $E \in Z(X)$ ўлчовли ихтиёрий тўплам бўлсин. У ҳолда E ни ўзаро кесишмайдиган шундай $E_1, E_2, \ldots, E_n$ тўпламларнинг йиғиндиси сифатида

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

ифодалаш мумкинки, уларнинг ҳар бири учун $x \in E_k$ бўлганда $g_n(x) = f_k(x)$ бўлади. Бундан

$$\int_E g_n(x)\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_k(x)\, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k) = \nu(E)$$

муносабатни оламиз. Демак, $g_n \in K^+$. Агар $f(x) = \sup_n \{f_n(x)\}$ десак, у ҳолда $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Демак, Лебег интеграли остида лимитга ўтиш ҳақидаги 38.12-Леви теоремасига мувофиқ,

$$\int_X f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\, d\mu = M. \tag{5}$$

Агар

$$\nu_0(E) = \nu(E) - \int_E f(x)\, d\mu$$

деб олсак, у ҳолда $f(x)$ функциянинг таърифланишига асосан $\nu_0(E) \geqslant 0$ бўлади. Энди $\nu_0(\cdot)$ ўлчовнинг айнан ноль эканлиги кўрсатилса, теореманинг биринчи қисми исботланган бўлади. Фараз қилайлик, $\nu_0(\cdot)$ айнан нолга тенг бўлмасин, яъни ҳар қандай $E \in Z(X)$ учун $\nu_0(E) > 0$ бўлсин, у ҳолда леммага асосан шундай $\varepsilon > 0$ ва $\mu(B) > 0$ бўлган μ ўлчовли B тўплам топиладики,

$$\varepsilon \mu (E \cap B) \leqslant \nu_0 (E \cap B)$$

тенгсизлик ихтиёрий $E \in Z(X)$ учун бажарилади. Агар $h(x) = f(x) + \varepsilon \chi_B(x)$ (бу ерда $\chi_B(x)$ функция B тўпламнинг характеристик функцияси) деб олсак, уни ихтиёрий ўлчовли E тўпламда μ ўлчов бўйича интеграллаб,

$$\int_E h(x)\, d\mu = \int_E f(x)\, d\mu + \varepsilon \mu(E \cap B) \leqslant \int_E f(x)\, d\mu + \nu_0(E \cap B) =$$

$$= \int_E f(x)\, d\mu + \nu_0(E \cap B) - \int_{E \cap B} f(x)\, d\mu = \int_{E \setminus B} f(x)\, d\mu +$$

$$+ \nu_0(E \cap B) < \nu_0(E \setminus B) + \nu_0(E \cap B) = \nu_0(E),$$

яъни

$$\int_E h(x)\, d\mu < \nu_0(E)$$

тенгсизликка эга бўлар эдик. Бу эса $h \in K^+$ эканини кўрсатади. Иккинчи томондан, (5) муносабатга асосан

$$\int_X h(x)\, d\mu = \int_X f(x)\, d\mu + \varepsilon \mu(B) = M + \varepsilon \mu (B) > M$$

тенгсизлик ўринли бўлиб, бу M соннинг аниқланишига зид. Демак, $\nu_0(\cdot) \equiv 0$ экан. Шундай қилиб,

$$\nu (A) = \int_A f(x)\, d\mu \tag{6}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $f(x)$ функциянинг мавжудлиги исботланди.

Энди теореманинг иккинчи қисмини, яъни $f(x)$ функциянинг ягоналигини исботлаймиз. (6) тенгликни қаноатлантирувчи икки $f(x)$ ва $g(x)$ функция мавжуд бўлсин. У ҳолда ҳар бир $A \in Z\ (X)$ тўплам учун

$$\nu(A) = \int_A f(x)\, d\mu = \int_A g(x)\, d\mu$$

тенгликлар ўринли. Ҳар қандай m ва n натурал сонлар учун A_m ва B_n тўпламларни мос равишда қуйидагича аниқлаймиз:

$$A_m = \left\{ x : f(x) - g(x) > \frac{1}{m} \right\},$$

$$B_n = \left\{ x : g(x) - f(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

A_m ва B_n тўпламларнинг таърифланишига асосан

$$\mu(A_m) = \int_{A_m} d\mu = \int_{A_m} \frac{f(x) - g(x)}{f(x) - g(x)} d\mu \leqslant m \int_{A_m} f(x)\, d\mu -$$

$$- m \int_{A_m} g(x)\, d\mu = m\nu(A_m) - m\nu(A_m) = 0$$

муносабат ўринли. Бундан ва μ нинг ўлчов эканлигидан $\mu(A_m)=0$ тенглик келиб чиқади. $\mu(B_n) = 0$ тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Ушбу

$$\{x : f(x) \neq g(x)\} = (\bigcup_m A_m) \cup (\bigcup_n B_n)$$

тенглик A_m ва B_n тўпламларнинг таърифланишидан келиб чиқади. Бундан ва μ ўлчовнинг σ-аддитивлигидан

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = 0$$

тенгсизлик ўринли. μ ўлчов бўлгани учун бу тенгликдан

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

тенглик келиб чиқади.*

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Агар $f(x)$ функция абсолют узлуксиз бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функция ҳам абсолют узлуксиз бўлишини исботланг.

2. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $|f(x)|$ функция шу сегментда абсолют узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг ҳам абсолют узлуксиз бўлишини исботланг.

3. $y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда жиддий ўсувчи абсолют узлуксиз функция бўлсин. $\varphi(y)$ функция эса $[f(a), f(b)]$ сегментда абсолют узлуксиз бўлсин. У ҳолда $z=\varphi[f(x)]$ функция $[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз бўлишини исботланг.

4. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз бўлиб, ўлчовли $A \subset [a, b]$ тўпламнинг ўлчови ноль бўлсин. У ҳолда унинг тасвири $f(A)$ тўпламнинг ҳам ўлчови ноль бўлишини исботланг.

5. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, ўзгариши чегараланган бўлсин. Агар ўлчови нолга тенг бўлган ҳар бир $A \subset [a, b]$ тўплам учун унинг тасвири бўл-

ган $f(A)$ тўпламнинг ҳам ўлчови ноль бўлса, $f(x)$ функциянинг абсолют узлуксиз эканлигини исботланг.

6. Фараз қилайлик, $A \subset [a, b]$ тўплам $[a, b]$ сегментнинг ўлчовли қисми бўлсин. Ҳар бир $x \in [a, b]$ ва $h > 0$ сон учун

$$\varphi(x, h) = \mu(A \cap [x - h, \ x + h])$$

функцияни киритамиз. Агар

$$\lim_{h \to +0} \frac{\varphi(x, h)}{2\,h} = 1$$

муносабат ўринли бўлса, $x \in [a, b]$ нуқта A тўпламнинг зичлик нуқтаси дейилади. Агар $A \subset [a, b]$ ўлчовли тўплам бўлса унинг деярли барча нуқталари зичлик нуқтаси бўлишини ис, ботланг.

7. $A \cup [a, b]$ ўлчовли тўплам бўлиб, $x \in A$ нуқта унинг зичлик нуқтаси бўлсин. У ҳолда x нуқтани ўз ичига олган ихтиёрий (a_k, b_k) интерваллар кетма-кетлиги учун $k \to \infty$ да $b_k - a_k \to 0$ шарт бажарилса,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\mu(A \cap (a_k, b_k))}{b_k - a_k} = 1$$

муносабатнинг ўринли эканини исботланг.

8. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда камаймайдиган абсолют узлуксиз функция бўлиб, $A \subset [a, b]$ ўлчовли тўплам бўлсин. Агар $\mu[\varphi(A)]$ сон A тўпламнинг тасвири бўлган $\varphi(A)$ тўпламнинг ўлчови бўлса,

$$\mu\ [\varphi(A)] = \int_A \varphi'(t)\ dt$$

тенгликни исботланг.

XI боб

СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛИ

52-§. Лебег — Стилтьес ўлчови

Юқорида Лебег ўлчовини қараганимизда, $[a, b]$ сегментнинг Лебег ўлчови деб унинг узунлиги $(b-a)$ ни айтган эдик. Лекин $[a, b]$ сегментни ва унинг қисм тўпламларини бошқача умумийроқ усул билан ҳам ўлчаш мумкин.

Фараз қилайлик, $[a, b]$ сегментда аниқланган, чапдан узлуксиз ва монотон камаймайдиган $F(x)$ функция берилган бўлсин. Бу функция орқали $[a, b]$ сегментнинг, $[a, b)$ ва $(a, b]$ ярим интервалларнинг ҳамда (a, b) интервалнинг ўлчовларини мос равишда қуйидагича аниқлаймиз:

$$\left.\begin{aligned} m[a, b] &= F(b+0) - F(a), \\ m[a, b) &= F(b) - F(a), \\ m(a, b] &= F(b+0) - F(a+0), \\ m[a, b) &= F(b) - F(a+0). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Энди $[a, b]$ сегмент берилган бўлиб, бу сегментнинг барча $[\alpha, \beta)$ кўринишдаги ярим интервалларидан ташкил топган системани H орқали белгилайлик. H системанинг ярим ҳалқа ташкил этиши равшан. (1) га асосан ҳар қандай $[\alpha, \beta) \in H$ учун

$$m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{2}$$

тенгликка эга бўламиз. H системада бу тенглик билан аниқланган m тўплам функцияси ўлчовдир. Ҳақиқатан ҳар қандай $[\alpha, \beta) \in H$ учун $m\,[\alpha, \beta) \geqslant 0$ эканлиги (2) тенгликка асосан $F(x)$ функциянинг монотон камаймайдиганлигидан келиб чиқади. Энди m тўплам функциясининг аддитив функция эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик,

$$[\alpha, \beta) = [\alpha, \gamma_1) \cup [\gamma_1, \gamma_2) \cup \ldots \cup [\gamma_{n-1}, \gamma_n) \cup [\gamma_n, \beta)$$

бўлсин. У ҳолда (2) га асосан

$$m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = [F(\beta) - F(\gamma_n)] + [F(\gamma_n) -$$

$$- F[\gamma_{n-1})] + \ldots + [F(\gamma_2) - F(\gamma_1)] + [F(\gamma_1) - F(\alpha)] =$$

$$= m[\gamma_n, \beta) + m[\gamma_{n-1}, \gamma_n) + \ldots + m[\gamma_1, \gamma_2) + m[\alpha, \gamma_1)$$

тенгликка эга бўламиз. Демак, H системада (2) тенглик билан аниқланган m тўплам функцияси ўлчов экан.

1-таъриф. *Агар $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда аниқланган, чапдан узлуксиз ва монотон камаймайдиган функция бўлиб, H система $[a, b]$ сегментнинг барча $[\alpha, \beta]$ кўринишдаги ярим интерваллар системаси бўлса, у ҳолда H системада* (2) *тенглик билан аниқланган m тўплам функцияси F функция орқали ҳосил қилинган Стилтьес ўлчови дейилади. $F(x)$ функция Стилтьес ўлчовини келтириб чиқарувчи* (яратувчи) *функция дейилади.*

$F(x)$ ва $F(x) + c\ (c = \mathrm{const})$ функциялар бир хил Стилтьес ўлчовини келтириб чиқаради. Умуман, (2) ўлчовни келтириб чиқарадиган функцияларнинг умумий кўриниши $F(x) + c$ дан иборат бўлади. Ҳақиқатан, $F(x)$ ва

$\Phi(x)$ функциялар (2) ўлчовни келтириб чиқарадиган ихтиёрий функциялар бўлсин. $[a, b]$ сегментдан бирор $x_0 \in [a, b]$ нуқтани тайинлаб олиб, ихтиёрий $x \in [a, b]$ нуқтани оламиз. Агар $x_0 \leqslant x$ бўлса, у ҳолда (2) тенгликка асосан $[x_0, x)$ ярим интервал учун ($F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар m ўлчовни келтириб чиқарадиган функциялар бўлганлиги сабабли)

$$m[x_0,x) = F(x) - F(x_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0)$$

бўлиб, бундан

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x_0) - F(x_0) \tag{3}$$

тенгликка эга бўламиз. Шунга ўхшаш, агар $x<x_0$ бўлса, яна (2) тенгликдан $[x, x_0]$ ярим интервал учун

$$m[x, x_0) = F(x_0) - F(x) = \Phi(x_0) - \Phi(x)$$

бўлиб, бундан яна

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x_0) - F(x_0)$$

тенгликка келамиз. $x \in [a, b]$ ихтиёрий бўлгани учун, бундан

$$\Phi(x) - F(x) = c(c = \mathrm{const})$$

тенглик келиб чиқади. Демак, ҳар бир $x \in [a, b]$ учун m ўлчовни келтириб чиқарадиган ҳар қандай $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар орасида

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

муносабат ўринли экан.

52.1-теорема. *$F(x)$ функция $[a, b]$ сегментда камаймайдиган функция бўлиб,*

$$m[\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \tag{4}$$

ўлчов H системада аниланган Стилтьес ўлчови бўлсин. (4) ўлчовнинг σ-аддитив ўлчов бўлиши учун $F(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда чапдан узлуксиз бўлиши зарур ва кифоядир.

Исбот. Зарурийлиги. (4) ўлчовни σ-аддитив ўлчов деб, $F(x)$ функциянинг чапдан узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $F(x)$ функция $[a, b]$ сегментнинг бирор нуқтасида чапдан узлуксиз бўлмасин, яъни x_0 нуқтада $F(x)$ функция учун

$$F(x_0 - 0) \neq F(x_0)$$

муносабат ўринли бўлсин, $[a, b]$ сегментдан шу x_0 нуқтага ўсиб интиладиган $\{x_n\}$ кетма-кетликни оламиз:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x_0, \quad x_n \to x_0, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

$F(x)$ функция камаймайдиган функция бўлганлиги сабабли

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x_n < x_0}} F(x_n) = F(x_0 - 0)$$

лимит мавжуд ва фаразимизга асосан

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x_n < x_0}} F(x_n) = F(x_0 - 0) \neq F(x_0)$$

муносабат ўринли. (5) муносабатга асосан

$$[x_1, x_2) \subset [x_1, x_3) \subset \ldots \subset [x_1, x_n) \subset \ldots$$

муносабатнинг ўринли эканлиги равшан. Бу муносабатдан ва $n \to \infty$ да $x_n \to x_0$ эканлигидан,

$$[x_1, x_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_1. x_n)$$

тенглик келиб чиқади. Бундан ва m ўлчовнинг σ- аддитивлигидан, 20.6- теоремага асосан

$$m\,[x_1, x_0) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [x_1, x_n)\right) = \lim_{n \to \infty} m\,[x_1, x_n)$$

тенгликни оламиз. Натижада (4) тенгликка асосан

$$\lim_{n \to \infty} [F(x_n) - F(x_1)] = F(x_0) - F\,(x_1)$$

ёки

$$\lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x_0)$$

тенглик ҳосил бўлади. Бу эса фаразимизга зид. Демак, $F(x)$ функция чапдан узлуксиз экан.

Кифоялиги. $F(x)$ функцияни $[a, b]$ сегментда чапдан узлуксиз деб, (4) тенглик билан аниқланган m ўлчовнинг σ- аддитив эканлигини кўрсатамиз.

Фараз қилайлик,

$$[\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n), \quad [\alpha_k, \beta_k) \cap [\alpha_j, \beta_j) = \varnothing, \quad k \neq j \tag{6}$$

бўлсин. У ҳолда ҳар қандай N натурал сон учун $\bigcup_{n=1}^{N} [\alpha_n, \beta_n) \subset [\alpha, \beta)$ муносабат ўринли бўлади. Бундан ва m ўлчовнинг аддитивлик ҳамда монотонлик хоссасидан

$$\sum_{n=1}^{N} m\,[\alpha_n, \beta_n) \leqslant m\,[\alpha, \beta)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизлик ҳар қандай натурал сон учун ўринли бўлганлиги сабабли у $N \to \infty$ ҳам ўринлидир:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\,[\alpha_n, \beta_n) \leqslant m\,[\alpha, \beta).$$

Энди тескари тенгсизликни исботлаймиз. (6) муносаб
$\alpha < \beta$ бўлсин, у ҳолда $\alpha < \beta' < \beta$ муносабатни қаноатла
рувчи β' сон ҳамма вақт мавжуд. $F(x)$ функция чапдан узлуксиз бўлганлиги сабабли ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун ҳар б
натурал сонда $\alpha'_n < \alpha_n$ муносабатни қаноатлантирувчи шу
α_n ва α'_n сонлар топиладики, улар учун

$$F(\alpha_n) - F(\alpha'_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

муносабат ўринли бўлади. Бундан

$$F(\beta_n) - F(\alpha'_n) < F(\beta_n) - F(\alpha_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

муносаба

тенгсизлик келиб чиқади. Бу ерда β_n сон (6), α_n ва β
$[\alpha_n, \beta_n)$ ярим интервални ташкил этувчи сон. α'_n сонларнинг олинишига асосан $[\alpha_n, \beta_n) \subset (\alpha'_n, \beta_n)$ муносабат ўр
Демак, $[\alpha, \beta)$ ярим интервалда жойлашган $[\alpha, \beta']$ сегмент
саноқли (α'_n, β_n) интерваллар системаси билан қопланар э

14.1-Борель — Лебег теоремасига асосан бу систе
$[\alpha, \beta']$ сегментни қоплайдиган сони чекли $\{(\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k})(k =$
$\ldots, r)\}$ қисм системани ажратиб олиш мумкин. Агар
чекли $\{(\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k})\}$ интерваллар системаси $[\alpha, \beta']$ сегментни қоплаласа, у ҳолда $[\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k})$ ярим интерваллар системаси ҳам
сегментни қоплайди, яъни

$$[\alpha, \beta'] \subset \bigcup_{k=1}^{r} [\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k}).$$

Бундан қуйидаги муносабат бевосита келиб чиқади:

$$[\alpha, \beta') \subset \bigcup_{k=1}^{r} [\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k}).$$

Бу муносабатдан ҳамда m ўлчовнинг аддитивлик ва монотонлик хоссасидан

$$m\,[\alpha, \beta') \leqslant \sum_{k=1}^{r} m\,[\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k}) \tag{9}$$

тенгсизликка эга бўламиз. (4) тенгликка асосан $m[\alpha, \beta') = F(\beta') - F(\alpha)$ ва

$$m[\alpha'_{n_k}, \beta_{n_k}) = F(\beta_{n_k}) - F(\alpha'_{n_k})$$

тенгликлар ўринли бўлганлиги учун (9) муносабатдан

$$F(\beta') - F(\alpha) \leqslant \sum_{k=1}^{r} [F(\beta_{n_k}) - F(\alpha'_{n_k})]$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бундан ва $F(x)$ функциянинг камаймайдиган эканлигидан

$$F(\beta') - F(\alpha) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [F(\beta_n) - F(\alpha'_n)]$$

муносабатга эга бўламиз. Бунинг ўнг томонидаги йиғинди остидаги ифодага (8) тенгсизликни қўллаб,

$$F(\beta') - F(\alpha) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [F(\beta_n) - F(\alpha_n)] + \varepsilon$$

тенгсизликни оламиз. Бу тенгсизлик $\alpha<\beta'<\beta$ муносабатни қаноатлантирувчи ҳар қандай β' сон учун ўринли бўлганлиги сабабли у $F(x)$ функциянинг чапдан узлуксизлигига асосан, $\beta' \to \beta$ бўлганда ҳам ўринлидир, яъни

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [F(\beta_n) - F(\alpha_n)] + \varepsilon.$$

Бундан ва $\varepsilon>0$ соннинг ихтиёрийлигидан

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} [F(\beta_n) - F(\alpha_n)]$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу муносабатдан (4) тенгликка асосан

$$m[\alpha, \beta) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m[\alpha_n, \beta_n)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу ва (7) тенгсизлик теоремани исботлайди. *

Шундай қилиб, H ярим ҳалқада (4) тенглик билан аниқланган σ- аддитив m ўлчовга эга бўлдик.

Бу ўлчовни 25-§ да баён этилган усул билан H системани ўз ичига олган минимал $Z(H)$ ҳалқага давом эттириб, 25.3-теоремага асосан σ-аддитив μ_F ўлчовга эга бўламиз. Бу ўлчов *F функцияга мос бўлган* (ёки *F функция келтириб чиқарган*) *Лебег — Стилтьес ўлчови* дейилади. F функция эса μ_F ўлчовни *келтириб чиқарувчи функция* дейилади.

Лебег — Стилтьес ўлчовининг учта муҳим хусусий ҳоли билан танишиб ўтамиз.

1. Фараз қилайлик, $F(x)$ функция 45-§ да (1) тенглик билан аниқланган чапдан узлуксиз $h(x)$ поғонали функция бўлсин. Бу функциянинг узилиш нуқталари $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ бўлиб, шу нуқталарга мос келган сакрашлар эса $h_1 > 0,\ h_2 > 0, \ldots, h_n > 0, \ldots, \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k < \infty\right)$ сонлардан иборат бўлсин. 1-таърифда $F(x)$ сифатида $h(x)$ функцияни оламиз. У ҳолда $h(x)$ функция келтириб чиқарган μ ўлчов бўйича $[a, b]$ оралиқнинг ҳар қандай қисми ўлчовли бўлиб, $A \subset [a, b]$ тўпламнинг μ_h ўлчови шу тўпламга тегишли x_i ларга мос келган h_i ларнинг йиғиндисига тенг, яъни

$$\mu_h(A) = \sum_{x_i \in A} h_i. \tag{10}$$

Ҳақиқатан, Лебег — Стилтьес ўлчовининг таърифидан кўринадики, ҳар бир x_i нуқтанинг ўлчови h_i га тенг, яъни

$$\mu_F(\{x_i\}) = h_i.$$

Агар $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ бўлса, у ҳолда

$$\mu_h([a, b] \setminus D) = 0$$

тенглик ўринли. Демак, μ_h ўлчовнинг ташувчиси D экан. Бундан ва μ_h ўлчовнинг σ-аддитивлигидан ҳар қандай $A \subset [a, b]$ учун (10) тенглик келиб чиқади.

2-таъриф. *Бирор F поғонали монотон функция келтириб чиқарган μ_F ўлчов дискрет ўлчов дейилади.*

2. Фараз қилайлик, F монотон функция $[a, b]$ сегментда абсолют узлуксиз бўлиб, унинг ҳосиласи $F'(x) = f(x)$ бўлсин. 49.8- Лебег теоремасига асосан ҳар бир ярим интервал $[\alpha, \beta) \subset [a, b]$ учун унинг ўлчовини

$$m_F([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d\mu$$

тенглик орқали аниқлаймиз (бу ерда μ ўлчов $[a, b]$ сегментдаги Лебег ўлчови). У ҳолда, элементлари $[a, b]$ сегментнинг барча $[\alpha, \beta)$ кўринишдаги ярим интервалларидан иборат бўлган H системада аниқланган σ-аддитив m_F ўлчовга эга бўламиз. 25.2-теоремага асосан m_F ўлчов H системани ўз ичига олган минимал $Z(H)$ ҳалқада аниқланган σ-аддитив μ_F ўлчовгача давом эттирилиши мумкин. Бу усулда аниқланган μ_F ўлчов ҳар қандай $A \in Z(H)$ учун

$$\mu_F(A) = \int_A f(x)\, d\mu \tag{11}$$

тенглик билан аниқланади.

3-таъриф. *Агар μ_F ва μ ўлчовлар берилган бўлиб (μ — Лебег ўлчови), $\mu(A) = 0$ бўлган ҳар қандай ўлчовли A тўплам учун $\mu_F(A) = 0$ бўлса, μ_F ўлчовни (μ ўлчовга нисбатан) абсолют узлуксиз ўлчов дейилади.*

Лебег интегралининг абсолют узлуксизлигига асосан (11) тенгликдан μ_F ўлчовнинг μ ўлчовга нисбатан абсолют узлуксизлиги келиб чиқади.

3. Фараз қилайлик, F монотон сингуляр функция бўлсин. Маълумки, бундай функция узлуксиз бўлиб, ўзгариши чегараланган ва ҳосиласи деярли нолга тенг. Бундан, F сингуляр функция келтириб чиқарган μ_F ўлчовнинг ташувчиси Лебег ўлчови ноль бўлган тўпламдан иборат эканлиги келиб чиқади.

4-таъриф. *Агар μ_F* ва *μ ўлчовлар берилган бўлиб* (μ — *Лебег ўлчови) ҳар қандай битта нуқтали тўпламда μ_F нолга тенг, лекин шундай $\mu(A) = 0$ бўлган ўлчовли A тўплам бўлсаки, $\mu_F(CA) = 0$ тенглик бажарилса, μ_F га μ ўлчовга нисбатан сингуляр ўлчов дейилади.*

Демак, бирор F сингуляр функция орқали келтириб чиқарилган ўлчов Лебег ўлчовига нисбатан сингуляр ўлчов бўлар экан.

Агар $F = F_1 + F_2$ бўлса, $m_F([\alpha, \beta)) = F(\beta) - F(\alpha) =$
$= F_1(\beta) - F_1(\alpha) + F_2(\beta) - F_2(\alpha) = M_{F_1}([\alpha, \beta) + m_{F_2}([\alpha, \beta))$

тенгликка асосан $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$.

50-§ дан маълумки (50-§, (6) тенгликка қаранг), ҳар қандай монотон функцияни учта функция — абсолют узлуксиз, поғонали ва сингуляр функцияларнинг йиғиндиси сифатида ифодалаш мумкин. Бундан ва (11) тенгликдан ҳар қандай Лебег — Стилтьес ўлчови абсолют узлуксиз, дискрет ва сингуляр ўлчовларнинг йиғиндиси сифатида ифода этилиши мумкин, деган муҳим хулоса келиб чиқади.

53- §. Лебег — Стилтьес интеграли

Фараз қилайлик, $[a, b]$ сегментда аниқланган монотон F функция орқали келтириб чиқарилган μ_F Лебег—Стилтьес ўлчови берилган бўлсин. Бу ўлчов учун Лебег интеграли тушунчасини киритиб, одатдагидек, жамланувчи функциялар синфини аниқлашимиз мумкин. $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функциянинг μ_F ўлчов бўйича Лебег интеграли *Лебег — Стилтьес интеграли* дейилади ва у қуйидагича белгиланади:

$$\int_a^b f(x)\, dF\,(x).$$

Мисоллар. 1. $F(x) = h(x) = \sum_{x_i<x} h_i$, бу ерда $h\,(x)$—поғонали функция бўлиб, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ лар $h\ (x)$ нинг узилиш нуқталари, $h_1, h_2, h_3, \ldots$ лар эса шу нуқталарга мос функциянинг сакрашлари. $F\ (x)$ функция яратган μ_F ўлчовнинг ташувчиси $x_1, x_2, x_3, \ldots$ нуқталар эканлиги ва ҳар бир x_i нуқтанинг ўлчови $\mu_F\ (\{x_i\}) = h_i,\ i = 1, 2, \ldots$ эканлигини 52- § да Лебег — Стилтьес ўлчовининг биринчи ҳолида кўрган эдик. Энди, агар μ_F ўлчовга мос келган Лебег — Стилтьес интегралини олсак, қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b f\ (x)\ d\,\mu_F = \int_a^b f\ (x)\ dh\,(x) = \sum_{i=1} f\ (x_i)\ h_i.$$

2. Агар F абсолют узлуксиз функция бўлса,

$$\int_a^b f\ (x)\ dF\ (x) = \int_a^b f\ (x)\ F'\ (x)\ dx \tag{1}$$

тенглик ўринли. Демак, бу ҳолда Лебег — Стилтьес интеграли Лебег интегралига айланар экан.

Ҳақиқатан, агар $f(x)$ функция поғонали функция бўлса, у ҳолда $[a,\ b]$ сегментни сони чекли ёки саноқли, ўзаро кесишмайдиган ўлчовли $A_1,\ A_2, \ldots$ тўпламларнинг йиғиндиси сифатида ифода қилиш мумкинки, ҳар бир A_k тўпламда $f\ (x)$ функция ўзгармас c_k сонга тенг бўлади. Бундай функция учун μ_F ўлчовнинг σ-аддитивлигидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \int_a^b f(x)\,d\mu_F = \int_{\bigcup_k A_k} f(x)\,d\mu_F = \sum_k \int_{A_k} f(x)\,d\mu_F =$$

$$= \sum_k c_k\,\mu_F(A_k) = \sum_k c_k \int_{A_k} F'(x)\,dx = \sum_k \int_{A_k} c_k\,F'(x)\,dx =$$

$$= \int_{\bigcup_k A_k} f(x)\;F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,F'(x)\,dx. \blacksquare$$

Демак, поғонали функциялар учун (1) тенглик ўринли экан.

Энди, агар $f(x)$ ихтиёрий жамланувчи функция бўлса, у ҳолда бу функцияга текис яқинлашувчи $f_n(x)$ поғонали функциялар кетма-кетлиги мавжуд. Бу кетма-кетликни камаймайдиган деб ҳисоблаш мумкин. У ҳолда $\{f_n(x)\,F'(x)\}$ кетма-кетлик ҳам камаймайдиган кетма-кетлик бўлади ва у $f(x)\,F'(x)$ функцияга деярли яқинлашади. Агар ушбу

$$\int_a^b f_n(x)\;dF(x) = \int_a^b f_n(x)\,F'(x)\,dx$$

тенгликда (38.12-Леви теоремасига асосан) $n\to\infty$ да лимитга ўтсак, (1) тенглик ҳосил бўлади.

Юқорида Лебег — Стилтьес ўлчовини қурганимизда, шу ўлчовни келтириб чиқарган F функцияни монотон камаймайдиган қилиб олган эдик. Лекин Лебег — Стилтьес ўлчовини ҳар қандай ўзгариши чегараланган $G(x)$ функция учун ҳам аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан $G(x)$ функция $[a, b]$ сегментда ўзгариши чегараланган ихтиёрий функция бўлсин. 47.3-теоремага асосан бундай функция иккита $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ монотон функциянинг айирмаси сифатида ифодаланиши мумкин, яъни

$$G(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Энди, $G(x)$ функция орқали Лебег — Стилтьес интегралининг таърифига кўра

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x)$$

тенглик билан аниқлаймиз. Агар $G(x)$ функция бошқа $\varphi_1(x)$ ва $\psi_1(x)$ монотон функцияларнинг айирмаси сифатида ифода этилган бўлса, яъни

$$G(x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x)$$

бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^b f(x)\,d\varphi_1(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi_1(x)$$

тенглик ўринли бўлади. Ҳақиқатан, таърифга кўра

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^b f(x)\,dG(x) =$$

$$= \int_a^b f(x)\,d\varphi_1(x) - \int_a^b f(x)\,d\psi_1(x)$$

тенгликка бевосита эга бўламиз.

54- §. Лебег — Стилтьес интегралининг баъзи бир татбиқлари

Лебег — Стилтьес интеграли татбиқий масалаларда жуда кўп қўлланилади. Қуйида шулардан баъзи бирларига тўхталиб ўтамиз.

Эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F(x) = P(\xi < x)$$

тенглик ёрдамида берилади (бу ерда $P(\xi<x)$ сон ξ тасодифий миқдор қийматларининг x дан кичик бўлиш эҳтимоли). Тасодифий миқдорнинг қийматлари дискрет ёки узлуксиз бўлиши мумкин. Агар ξ тасодифий миқдор дискрет бўлса, унинг қийматлари тўплами кўпи билан саноқли бўлади. Фараз қилайлик, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ лар ξ тасодифий миқдорнинг қийматлари бўлиб, $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ сонлар эса шу қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари бўлсин:

$$p_i = P(\xi = x_i), \quad p_i \geqslant 0, \sum_i p_i = 1.$$

Бундай тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ 53- § даги биринчи мисолдан таниш бўлган

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$

$[a, b]$ сегментда сакраш функциясидан иборат бўлади.

$[a, b]$ сегментда тақсимот функцияси аниқ бўлган тасодифий миқдорлар учун унинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда

$$M\xi = \int_a^b x\,dF(x)$$

ва

$$D\xi = \int_a^b (x - M\xi)^2 \, dF(x)$$

Лебег — Стилтьес интеграллари орқали топилади. Агар буни дискрет тасодифий миқдорга татбиқ этсак, мос равишда ушбу йиғиндиларни оламиз:

$$M\xi = \sum_i x_i P_i$$

ва

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i.$$

Агар ξ тасодифий миқдор узлуксиз бўлса, у ҳолда унинг $F(x)$ тақсимот функцияси абсолют узлуксиз функция бўлади. Тақсимот функциясининг $F'(x) = p(x)$ ҳосиласи эса ξ тасодифий миқдор эҳтимолликларининг тақсимланиш зичлиги дейилади. 53- § даги иккинчи мисолга асосан бундай тасодифий миқдорнинг математик кутилиши ва дисперсияси мос равишда қуйидаги тенгликлар орқали топилади:

$$M\xi = \int_a^b xp(x)\,dx \quad \text{ва} \quad D\xi = \int_a^b (x - M)^2 p(x)\,dx.$$

Энди ξ тасодифий миқдор берилган бўлиб, унинг тақсимот функцияси $F(x)$ бўлсин, яъни

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Бошқа бир η тасодифий миқдор ξ тасодифий миқдор билан $\eta = \varphi(\xi)$ муносабат орқали боғланган бўлсин. Агар $\Phi(x)$ функция, η тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси бўлса, у ҳолда

$$M\eta = \int_a^b xd\Phi(x)$$

эканлиги маълум. Агар $y = \Phi(x)$ функция $F(x)$ функция келтириб чиқарган μ_F ўлчов бўйича жамланувчи бўлса, у ҳолда,

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} xd\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\,dF(x) = M\varphi(\xi)$$

тенглик ҳам ўринлидир.

Лебег — Стилтьес интегралининг механика масалаларига татбиқи сифатида қуйидагини кўришимиз мумкин:

XOY текисликда x ўқининг $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ нуқталарида мос равишда $m_1, m_2, \dots, m_n$ массалар жойлашган бўлсин. Механикадан маълумки, бирлик масса y ўқининг $M(0,1)$ нуқтасида потенциал ҳосил қилади. Бу потенциал x_i нуқтадаги m_i массага тўғри пропорционал ҳамда $M(0,1)$ ва $M_i(x_i, 0)$ нуқталар орасидаги $\sqrt{1+x_i^2}$ масофага тескари пропорционалдир. Бундан, агар m_i массанинг ҳосил қилган потенциалини φ_i билан белгиласак, қуйидагини оламиз:

$$\varphi_i = \frac{cm_i}{\sqrt{1+x_i^2}},$$

бу ерда c — пропорционаллик коэффициенти. Демак, $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуқталардаги $m_1, m_2, \dots, m_n$ массалар $M(0,1)$ нуқтада

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = c \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{\sqrt{1+x_i^2}}$$

потенциални ҳосил қилар экан.

Агар массанинг x ўқидаги тақсимоти узлуксиз бўлиб, $m(x)$ функция x нуқтадаги массанинг зичлиги бўлса, у ҳолда бу массанинг $(-\infty, x)$ оралиқдаги тақсимот функцияси

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} m(t)\,dt$$

формула орқали берилади ва M (0,1) нуқтадаги потенциал қуйидагига тенг бўлади:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{\sqrt{1+x^2}}\,dF(x) = c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(x)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

55-§. Риман-Стилтьес интеграли

$[a, b]$ сегментда аниқланган икки $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функция берилган бўлсин. $[a, b]$ сегментни $a_0, a_1, \dots, a_n$ нуқталар билан ихтиёрий равишда n та бўлакка бўламиз:

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b, \quad \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(a_i - a_{i-1}) = \alpha_n. \qquad (1)$$

Ҳар бир $[a_{i-1}, a_i]$ сегментда бирор x_i нуқтани олиб,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} \tag{2}$$

йиғиндини тузамиз.

Таъриф. *Агар α_n нолга интилганда S_n йиғинди $[a, b]$ сегментнинг қандай бўлинганидан ва x_i нуқталарнинг қандай танланишидан қатъи назар аниқ бир лимитга интилса, у ҳолда бу лимитнинг қиймати $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ оралиқдаги $\varphi(x)$ функция бўйича олинган Риман — Стилтьес интеграли дейилади ва қуйидагича ёзилади:*

$$\lim_{\alpha_n \to 0} S_n = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x).$$

Бунда $f(x)$ *интегралланувчи функция,* $\varphi(x)$ *эса интегралловчи функция дейилади.*

55.1-теорема. *Агар $[a, b]$ сегментда $f(x)$ узлуксиз ва $\varphi(x)$ ўзгариши чегараланган функциялар бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг $\varphi(x)$ функция бўйича Риман — Стилтьес интеграли мавжуд ва у шу функциянинг Лебег — Стилтьес интегралига тенг.*

Исбот. $[a, b]$ сегментнинг

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

бўлинишини қараймиз. Агар ҳар бир n натурал сон учун $[a_{i-1}, a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ярим интервалдан ξ_i нуқтани ихтиёрий танлаб, $f_n(x)$ поғонали функцияни

$$f_n(x) = f(\xi_i),\ a_{i-1} \leqslant x < a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

тенглик билан аниқласак, у ҳолда $n \to \infty$ да $\{f_n(x)\}$ кетма-кетлик $[a, b]$ сегментда узлуксиз $f(x)$ функцияга текис яқинлашади. Ҳақиқатан, $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлгани сабабли ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжудки, $|x - \xi| < \delta$ бўлганда $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ бўлади. Энди $x \in [a, b]$ ихтиёрий нуқта бўлсин. У ҳолда бу нуқта $[a_{i-1}, a_i)$ ярим интервалларнинг бирортасига тегишли бўлади. Берилган $\varepsilon > 0$ сон учун n натурал сонни шундай танлаш мумкинки, натижада $[a_{i-1}, a_i]$ ярим интерваллар узунликларининг энг каттасини δ сондан кичик қилиб олиш мумкин. У ҳолда

$$|f_n(x) - f(x)| = |f(\xi_i) - f(x)|$$

тенгликдан ҳамда $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i)$, $x \in [a_{i-1}, a_i)$ ва $\max (a_i -$

$-a_{i-1}) < \delta$ муносабатлардан $f(x)$ функциянинг узлуксизлигига асосан

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан, $x \in [a, b]$ ва $\varepsilon > 0$ ихтиёрий бўлганлиги сабабли $\{f_n(x)\}$ кетма-кетликнинг $n \to \infty$ да $f(x)$ функцияга текис яқинлашиши келиб чиқади.

Энди

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\}$$

интеграл йиғиндига $f_n(x) = f(\xi_i)$, $a_{i-1} \leqslant x < a_i$ поғонали функциянинг Лебег — Стилтьес интеграли деб қарашимиз мумкин. $[a, b]$ сегментни чексиз кичик бўлакларга бўлиш натижасида $\{f_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги $f(x)$ функцияга текис яқинлашганлиги туфайли (3) йиғиндининг $\alpha_n \to 0$ да лимити мавжуд ва у лимит $f(x)$ функциядан $[a, b]$ сегмент бўйича олинган Лебег — Стилтьес интегралини беради. Иккинчи томондан, худди шу лимитнинг ўзини, таъриф бўйича, $f(x)$ функциядан олинган Риман — Стилтьес интеграли деб белгилаган эдик.*

Энди Риман — Стилтьес интегралининг бир неча содда хоссалари билан танишамиз.

55.2-теорема. Ушбу

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x) = \int_a^b \{f(x) + \psi(x)\}\,d\varphi(x)$$

тенглик ўринли ва бунинг чап томонининг мавжудлигидан ўнг томонининг мавжудлиги келиб чиқади.

Исбот. Дарҳақиқат,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + \psi(x_i)] \{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \{\varphi(a_i) -$$

$$- \varphi(a_{i-1})\} + \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) \{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}.$$

Агар α_n нолга интилганда $S_n^{(1)}$ ва $S_n^{(2)}$ йиғиндилар мос равишда I_1 ва I_2 лимитларга интилса, у ҳолда $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$ йиғинди $I = I_1 + I_2$ йиғиндига интилади, бу ерда:

$$I_1 = \int_a^b f(x)\,d\varphi(x), \quad I_2 = \int_a^b \psi(x)\,d\varphi(x)$$

ва

$$I=\int_a^b\{f(x)+\psi(x)\}\,d\varphi(x).*$$

55.3-теорема. *Ушбу*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)+\int_a^b f(x)\,d\psi(x)=\int_a^b f(x)\,d\{\varphi(x)+\psi(x)\}$$

тенглик ўринли ва бунинг чап томонининг мавжудлигидан ўнг томонининг мавжудлиги келиб чиқади.

Бу теорема 55.2-теоремага ўхшаш исботланади.*

55.4-теорема. *Агар $a<b<c$ бўлса, у ҳолда*

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)+\int_b^c f(x)\,d\varphi(x)=\int_a^c f(x)\,d\varphi(x).$$

Бу тенглик интегралларнинг ўнг томондагиси мавжуд бўлганда ўринли.

Бу теореманинг исботи юқоридаги 55.2-теореманинг исботига ўхшаш. Аммо бунда ўнг томондаги интегралга мос йиғиндини тузишда, яъни $[a, b]$ сегментни қисмларга бўлишда b нуқтани бўлиш нуқтаси қилиб олиш керак.*

55.5-изоҳ. Шуни айтмоқ лозимки, $\int_a^c f d\varphi$ интегралнинг мавжудлигидан $\int_a^b f d\varphi$ ва $\int_b^c f d\varphi$ интегралларнинг мавжудлиги келиб чиқади. Лекин аксинчаси умуман ҳар вақт ўринли эмас. Бунга мисол келтирамиз. $[-1, +1]$ сегментда қуйидагича тузилган $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар берилган бўлсин:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ агар } -1\leqslant x\leqslant 0 & \text{бўлса,}\\ \frac{1}{x}, \text{ агар } 0<x\leqslant 1 & \text{бўлса,}\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}x, \text{ агар } -1\leqslant x<0 & \text{бўлса,}\\ 0, \text{ агар } 0\leqslant x\leqslant 1 & \text{бўлса.}\end{cases}$$

Равшанки,

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,d\varphi(x)=0, \qquad \int_0^1 f(x)\,d\varphi(x)=0,$$

чунки $[-1,0]$ сегментда $f(x)=0$ ва $[0,1]$ сегментда $\varphi(x)=0$. Аммо

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,d\varphi(x)$$

интеграл мавжуд эмас, чунки $[-1,\ 1]$ сегментни қисмларга бўлганимизда $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларнинг берилишига асосан 0 нуқтани ўз ичига олмаган қисмларга мос ҳадлар 0 га тенг. 0 нуқтани ўз ичига олган $a_{i-1} < 0 < a_i$ қисмга мос ҳад (ноль нуқта бўлиш нуқтаси бўлмаган ҳолда) қуйидагича бўлади:

$$\sigma_i = \left\{ \varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1}) \right\} f(x_i) = -\frac{a_{i-1}}{x_i} \quad (\text{агар } x_i > 0 \text{ бўлса}).$$

Бундан кўринадики, x_i нолга истаганча яқин бўлганда σ_i сон истаганча катта бўлиши мумкин, демак, тегишли йиғинди лимитга эга бўлмайди.

55.6-теорема. $\int_a^b kf(x)\,dh\varphi(x) = kh \int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$

(k ва h — ўзгармас сонлар).

Исбот. Ҳақиқатан,

$$\int_a^b kf(x)\,dh\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\{h\varphi(a_i) - h\varphi(a_{i-1})\} =$$

$$= k\cdot h\cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = k\cdot h \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \ *$$

55.7-теорема. *Ушбу* $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ *ва* $\int_a^b \varphi(x)\,df(x)$

интегралларнинг бирининг мавжудлигидан иккинчисининг мавжудлиги келиб чиқади ва қуйидаги тенглик ўринли:

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) + \int_a^b \varphi(x)\,df(x) = f(b)\,\varphi(b) -$$

$$- f(a)\,\varphi(a) = [f(x)\,\varphi(x)]\Big|_a^b.$$

Бу тенглик *бўлаклаб интеграллаш формуласи* дейилади.

Исбот. $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ интеграл мавжуд деб фараз қилиб, (2) йиғиндига ўхшаш қуйидаги йиғиндини тузамиз:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})\} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(a_i) - \\ - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi(a_{i-1}).$$

$a_n = b$, $a_0 = a$ бўлганлиги учун йиғиндига $[f(x)\cdot\varphi(x)]\Big|_a^b$ ифодани қўшиб ва айириб ташланса, ушбу тенглик келиб чиқади:

$$S_n = f(x_n)\varphi(a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\varphi(a_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1})\varphi(a_i) - \\ - f(x_1)\varphi(a_0) = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \{[f(b) - f(x_n)]\varphi(b) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1}\varphi(a_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + [f(x_1) - f(a)]\varphi(a)\} = \\ = [f(x)\varphi(x)]_a^b - S_n^{'}.$$

бу ерда S'_n — сўнгги катта қавс ичидаги ифода. S'_n — йиғиндининг тузилишига диққат билан қаралса, у ҳам S_n йиғиндига ўхшаш тузилган бўлиб, бундаги фарқ S'_n да $[a, b]$ сегментни бўлиш нуқталари сифатида $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < < x_n = b$ нуқталар иштирок этаётгани, $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ нуқталар (яъни S_n ни тузишда бўлиш нуқталари сифатида олинган нуқталар) эса тегишлича $x_1 \leqslant a_1 \leqslant x_2$, $x_2 \leqslant a_2 \leqslant x_3, \ldots, x_{n-1} \leqslant a_{n-1} \leqslant \leqslant x_n$ тенгсизликларни қаноатлантиришидадир. Равшанки, $\alpha_n = = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(a_{i+1} - a_i)$ нолга интилганда $\beta_n = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(x_{i+1} - x_i)$ ҳам нолга интилади. Фаразимизга мувофиқ, $\alpha_n \to 0$ да S_n нинг лимити мавжуд, демак,

$$S'_n = [f(x)\varphi(x)]_a^b - S_n$$

тенгликдан, юқоридаги мулоҳазага мувофиқ, $\beta_n \to 0$ да S'_n нинг лимити мавжудлиги келиб чиқади. Бу лимит эса Риман — Стилтьес интегралининг таърифига кўра $\int\limits_a^b \varphi(x)\,df(x)$ га тенг.

Аксинча, сўнгги интеграл мавжуд деб фараз қилсак юқоридагига ўхшаш, $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ интегралнинг мавжудлигини кўрсатиш мумкин. $*$

56-§. Стилтьес интеграли остида лимитга ўтиш

56.1-теорема. $[a, b]$ *сегментда аниқланган ўзгариши чегараланган* $\varphi(x)$ *функция ва* $f(x)$ *функцияга текис яқинлашувчи узлуксиз функцияларнинг* $\{f_n(x)\}$ *кетма-кетлиги берилган бўлсин. У ҳолда*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,d\varphi(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x). \qquad (1)$$

Исбот. Математик анализ курсидаги маълум теоремага асосан $f(x)$ функция текис яқинлашувчи узлуксиз функциялар кетма-кетлигининг лимити бўлганлиги сабабли узлуксиз бўлади. Шунинг учун 55.1-теоремага асосан сўнгги муносабатнинг ўнг томонидаги интеграл мавжуд.

55-§ нинг (2) тенглигидаги S_n йиғинди учун қуйидаги муносабатларни ёзишимиз мумкин:

$$\left|S_n\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\{\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)\right|\sum_{i=1}^{n}\left|\varphi(a_i)-\varphi(a_{i-1})\right|\leqslant M_f V_a^b(\varphi),$$

бу ерда

$$M_f=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f(x)\right|.$$

Бундан равшанки

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)\right|\leqslant M_f\,V_a^b(\varphi);$$

у ҳолда

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)\,d\varphi(x)-\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)\right|\leqslant M_{f_n-f}\,V_a^b(\varphi).$$

Теорема шартига кўра $n\to\infty$ да $\{f_n\}$ кетма-кетлик $f(x)$ функцияга текис яқинлашганлиги сабабли

$$M_{f_n-f}\to 0.$$

Бундан (1) муносабатга эга бўламиз.

56.2-теорема (Ҳелли). *$[a, b]$ сегментда аниқланган узлуксиз $f(x)$ функция ва бу сегментнинг ҳар бир нуқтасида $\varphi(x)$ функцияга яқинлашувчи ўзгариши чегараланган $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлиги берилган бўлсин. Агар n натурал соннинг ҳамма қийматлари учун*

$$V_a^b(\varphi_n)\leqslant M \tag{2}$$

тенгсизлик бажарилса (M ўзгармас ва n га боғлиқ бўлмаган сон), у ҳолда $\varphi(x)$ функциянинг ҳам ўзгариши чегараланган бўлади ва

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x)=\int_a^b f(x)\,d\varphi(x). \tag{3}$$

Исбот. $[a, b]$ сегментнинг ихтиёрий $a=a_0<a_1<\ldots<$ $<a_m=b$ бўлинишини оламиз. Теорема шартига кўра ҳар бир $x\in[a, b]$ учун

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

бўлганлиги сабабли «тўртбурчак тенгсизлиги» деб аталувчи

$$\left|\,|\varphi(a_k)-\varphi(a_{k-1})|-|\varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})|\,\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\varphi(a_k)-\varphi_n(a_k)|+|\varphi(a_{k-1})-\varphi_n(a_{k-1})|$$

тенгсизликдан

$$\left|\sum_{k=1}^{m}|\varphi(a_k)-\varphi(a_{k-1})|-\sum_{k=1}^{m}|\varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})|\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{m}|\varphi(a_k)-\varphi_n(a_k)|+\sum_{k=1}^{m}|\varphi(a_{k-1})-\varphi_n(a_{k-1})|$$

тенгсизликни оламиз. Бунга асосан

$$\sum_{k=1}^{m}|\varphi(a_k)-\varphi(a_{k-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|\varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})|. \tag{4}$$

$\varphi_n(x)$ функциялар ўзгариши чегараланган бўлганлиги учун

$$\sum_{k=1}^{m}|\varphi_n(a_k)-\varphi_n(a_{k-1})|\leqslant V_a^b(\varphi_n).$$

Бундан ва (2) тенгсизликдан (4) га асосан

$$\sum_{k=1}^{m} \left| \varphi(a_k) - \varphi(a_{k-1}) \right| \leqslant M$$

тенгсизлик келиб чиқади. Бу муносабатдан ва $[a, b]$ сегментнинг бўлиниши ихтиёрий қилиб танланганлигидан

$$V_a^b(\varphi) \leqslant M$$

тенгсизлик келиб чиқади. Демак, $\varphi(x)$ функциянинг ўзгариши чегараланган экан.

Энди ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун $[a, b]$ сегментни шундай m та $[a_{i-1}, a_i]$, $i = \overline{1, m}$ қисмларга бўламизки, у қисмларнинг ҳар бирида узлуксиз $f(x)$ функциянинг тебраниши $\frac{\varepsilon}{3M}$ дан кичик бўлсин, яъни

$$\sup_{a_{i-1} < x < a_i} f(x) - \inf_{a_{i-1} \leqslant x \leqslant a_i} f(x) < \frac{\varepsilon}{3M} \tag{5}$$

тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\, d\varphi(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(x) - f(a_{i-1})]\, d\varphi(x) + \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1}) \int_{a_{i-1}}^{a_i} d\varphi(x).$$

(5) га асосан

$$\left| \int_{ai-1}^{a_i} [f(x) - f(a_{i-!})\, d\varphi(x) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} V_{a_{i-1}}^{a_i}(\varphi)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бундан

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \int_{a_{i-1}}^{a_i} [f(x) - f(a_{i-1})]\, d\varphi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{i=1}^{m} V_{a_{i-1}}^{a_i}(\varphi) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3M} V_a^b(\varphi) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Демак,

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1}) [\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})] + \alpha \frac{\varepsilon}{3} \quad (|\alpha| \leqslant 1).$$

Шунга ўхшаш

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1})\,[\varphi_n(a_i) - \varphi_n(a_{i-1})] + \alpha_n \frac{\varepsilon}{3} \quad (|\alpha_n| \leqslant 1).$$

$[a, b]$ сегментнинг ҳар бир нуқтасида $\{\varphi_n(x)\}$ функциялар кетма-кетлигининг $\varphi(x)$ функцияга яқинлашганлигидан ва шу сегментда $f(x)$ функциянинг узлуксизлигидан шундай n_0 натурал сон мавжудки, $n > n_0$ бўлганда

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1})\,[\varphi_n(a_i) - \varphi_n(a_{i-1})] - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{m} f(a_{i-1}) \cdot [\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})] \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, $n > n_0$ бўлганда, бу тенгсизликка асосан қуйидаги тенгсизликни ҳам ёзишимиз мумкин:

$$\left| \int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x) - \int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \right| < \varepsilon.$$

ε нинг ихтиёрийлигидан ва бу тенгсизликдан биз исбот этмоқчи бўлган (3) муносабат келиб чиқади.

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Фараз қилайлик, α ва β сонлар $[a, b]$ сегментдан олинган бўлиб, $[\alpha, \beta]$ сегментнинг характеристик функцияси $f(x)$, $[\beta, b]$ сегментнинг характеристик функцияси $\varphi(x)$ бўлсин. Қандай α ва β сонлар учун

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$$

интеграл мавжуд бўлади? Мавжуд бўлган ҳол учун унинг қийматини ҳисобланг.

2. Айтайлик, $a < c < b$ бўлиб,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < c, \\ 1, & \text{агар } x > c. \end{cases}$$

Агар $[a, b]$ сегментда аниқланган $f(x)$ функция $x = c$ нуқтада узлуксиз бўлса, $\varphi(x)$ функциянинг $x = c$ нуқтада қандай аниқланишидан қатъи назар

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = f(c)$$

тенгликни исботланг.

3. $(f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ сегментда поғонали функциялар бўлсин. Бу функцияларнинг узилиш нуқталарига қандай шартлар қўйилганда

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$$

интеграл мавжуд бўлади? Мавжуд бўлган ҳол учун бу интегралнинг қийматини ҳисобланг.

4. $f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва $\varphi(x)$ функция поғонали функция бўлганда,

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$$

интегралнинг қийматини ҳисобланг.

5. $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ нуқталар (a, b) интервалнинг ҳар хил нуқталари бўлиб, $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ сонлар учун

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty$$

муносабат ўринли бўлсин. $[a, b]$ сегментда $\psi(x)$ ва $\varphi(x)$ функцияларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \leqslant 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi(x - x_k).$$

$[a, b]$ сегментда узлуксиз бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция учун

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f(x_k)$$

тенгликнинг ўринли эканлигини исботланг.

6. α параметрнинг қандай қийматлари учун

$$\int_0^1 x^{\alpha}\, d \sin \frac{1}{x}$$

интеграл мавжуд?

7. $K(x)$ — Кантор функцияси (45.3- теоремадан кейинги иккинчи мисолга қаранг) учун қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$\int_0^1 x\ dK(x),\ \int_0^1 x^2\ dK(x),\ \int_0^1 K(1-x)\,dK(x).$$

8. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_0^{\pi} \sin\ x d\varphi(x)$,

бу ерда $\varphi(x) = \begin{cases} x, \text{ агар } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ бўлса,} \\ 2, \text{ агар } x = \frac{\pi}{2} \text{ ва } x = \pi \text{ бўлса,} \\ x - \frac{\pi}{2}, \text{ агар } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ бўлса;} \end{cases}$

б) $\int_{-\pi}^{\pi} (x+2)\,d\,(e^x \operatorname{sign} \sin\ x)$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} (x-1)\,d\,(\cos x\ \operatorname{sign}\ x)$.

бу ерда $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{ агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -1, \text{ агар } x < 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

XII боб

ТАРТИБЛАНГАН ТЎПЛАМЛАР. ТРАНСФИНИТ СОНЛАР

57- §. Тартибланган тўпламлар

Ҳозиргача учраган тўпламлар орасида ҳақиқий сонлар тўплами R, рационал сонлар тўплами Q, натурал сонлар тўплами N, бутун сонлар тўплами Z ва умуман, R нинг ихтиёрий қисм тўплами бошқа тўпламлардан табиий усулда тартиблангани билан фарқ қилади. Яъни бу тўпламларнинг ихтиёрий иккита бир-биридан фарқли элементининг бири иккинчисидан кичик. Ўрта мактабдан таниш бўлган бу муносабат "$<$" белги орқали ифодаланади.

1-таъриф. *Агар X тўпламда қуйида келтирилган тўртта шартни қаноатлантирувчи "$\leqslant$" муносабат аниқланган бўлса, X тартибланган тўплам дейилади.*

1) *X тўпламнинг ихтиёрий икки a ва b элементи учун $a \leqslant b$* ва *$b \leqslant a$ муносабатлардан камида биттаси албатта ўринли;*

2) *Агар $a \leqslant b$ ва $b \leqslant a$ бўлса, у ҳолда $a=b$;*

3) *"$\leqslant$" муносабат транзитивлик хоссасига эга, яъни $a \leqslant b$* ва *$b \leqslant c$ муносабатлардан $a \leqslant c$ муносабат келиб чиқади;*

4) *X тўпламнинг ҳар қандай a элементи учун $a \leqslant a$ муносабат ўринли.*

Бу "$\leqslant$" муносабат X тўпламдаги *тартиб* дейилади.

Агар тартибланган X тўпламнинг x ва y элементлари учун $x \leqslant y$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда x элемент y элементдан олдин келувчи (кичик) ёки y элемент x элементдан кейин келувчи (катта) дейилади.

Тартибланган тўпламларга мисоллар келтирамиз.

1) C комплекс сонлар тўпламида $z_1 \leqslant z_2$ деймиз, агар $|z_1| \leqslant |z_2|$ бўлса, $|z_1| = |z_2|$ ҳолда эса $\arg z_1 \leqslant \arg z_2$ бўлса. У ҳолда C тўплам тартибланган тўплам бўлади.

2) C тўпламда тартибни бошқа усулда ҳам киритиш мумкин. Масалан, $z_1 = a_1 + b_1 i$ ва $z_2 = a_2 + b_2 i$ комплекс сонлар учун $z_1 \leqslant z_2$ муносабат ўринли деймиз, агар $a_1 \leqslant a_2$ бўлса, $a_1 = a_2$ бўлган ҳолда эса $b_1 \leqslant b_2$ бўлса.

Равшанки, шу усул билан киритилган "$\leqslant$" муносабатга кўра C тўплам тартибланган тўпламдир.

3) n ўлчамли R^n фазода $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ва $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ векторлар берилган бўлиб, $\eta_1 \leqslant \xi_1$ бўлса, $y \leqslant x$ деб оламиз. Агар бу векторларнинг биринчи координаталари тенг бўлса, у ҳолда иккинчи координатаси катта бўлган векторни «катта» деб оламиз. Агар иккинчи координаталари ҳам тенг бўлса, векторларни учинчи координаталари бўйича солиштирамиз ва ҳоказо. Равшанки, у ҳолда R^n — тартибланган тўплам. Одатда бундай киритилган тартиб *лексикографик тартиб* дейилади.

4) Ўзбек тилида бўлган барча сўзлар тўпламида алфавит ёрдамида тартиб киритиш мумкин. Масалан, «дафтар» $\leqslant$ «китоб», «кит» $\leqslant$ «китоб» ва ҳоказо.

5) Ҳар бир тўпламда тартибни ҳар хил киритиш мумкин. Масалан, натурал сонлар тўпламида тартибни одатдаги усулда эмас, балки тескарисига киритиш мумкин:

$$\ldots\ldots < 4 < 3 < 2 < 1.$$

6) Ҳар бир n натурал соннинг ягона усул билан $n = 2^k(2m+1)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ кўринишда ифодаланиши сонлар назариясида исбот этилади. Шундан фойдаланиб, натурал сонлар тўпламида тартибни яна қуйидагича ҳам киритиш мумкин: $n = 2^k(2m+1)$ сон $n_1 = 2^{k_1}(2m_1+1)$ сондан олдин келувчи деймиз, агарда $k < k_1$ ёки $k = k_1$ бўлганда $m < m_1$ бўлса. Бу усул билан натурал сонлар қуйидаги тартибда жойлашган бўлади:

$$\begin{array}{l} 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots \\ 2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \ldots \\ 4,\ 12,\ 20,\ 28,\ 36,\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Агар ихтиёрий иккита натурал сон олинган бўлиб, улар ҳар хил йўлда жойлашган бўлса, у ҳолда олдинги йўлда жойлашган сон кейинги йўлда жойлашган сондан олдин келувчи бўлади. Масалан,

$$9<2,\ 18<4,\ 20<28.$$

Тартибланган чекли ёки саноқли тўпламларнинг элементларини ўсиб бориш тартибида ёзишга келишамиз. Масалан, $A=\{a,\ b,\ c\}$ тартибланган тўпламда $a \leqslant b \leqslant c$. Демак, $A=\{a,\ b,\ c\}$ ва $B=\{b,\ c,\ a\}$ тўпламлар тартибланган тўплам сифатида бир-биридан фарқ қилади.

Агар A тартибланган тўплам бўлиб, унинг B қисм тўпламида A даги тартиб сақланган бўлса, B тўплам A тўпламнинг *тартибланган қисм тўплами дейилади.* Масалан, $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B=\{a,\ c,\ d\}$, $C=\{c,\ b,\ d\}$ бўлса, B тўплам A тўпламнинг тартибланган қисм тўплами, C тўплам эса A тўпламнинг тартибланган қисм тўплами эмас.

2-таъриф. *Агар A тартибланган тўплам бўлиб, унинг $a \in A$ элементи учун $x \leqslant a$ муносабатни қаноатлантирувчи $x \in A$ элемент топилмаса, тартибланган A тўпламнинг a элементи биринчи элемент дейилади. Шунингдек, A тартибланган тўпламнннг $b \in A$ элементи учун $b \leqslant x$ муносабатни қаноатлантирувчи $x \in A$ элемент топилмаса, у ҳолда тартибланган A тўпламнинг b элементи охирги элемент дейилади.*

57.1-теорема. *Ҳар қандай чекли тартибланган A тўплам учун биринчи ва охирги элемент мавжуд.*

Исбот. A тўпламнииг ихтиёрий $a_1 \in A$ элементини оламиз. Агар у биринчи (охирги) элемент бўлса теорема исбот этилган бўлади. Агар у биринчи (охирги) элемент бўлмаса, у ҳолда a_1 дан олдин (кейин) келадиган a_2 элемент мавжуд. Агар a_2 элемент биринчи (охирги) элемент бўлса, теорема исботланган бўлади. Акс ҳолда бу жараённи яна давом эттириш мумкин. Натижада тартибланган A тўплам чекли бўлгани учун маълум қадамдан сўнг биринчи (охирги) элементга келамиз.

A ва B тартибланган тўпламлар бўлиб, $\varphi:A\to B$ акслантириш берилган бўлсин. Агар A тўпламдаги $a\leqslant b$ муносабатдан B тўпламда $\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$ муносабатнинг ўринли эканлиги келиб чиқса, φ акслантириш *тартибни сақловчи акслантириш* дейилади.

3-таъриф. *Агар A ва B тартибланган тўпламлар берилган бўлиб, тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли $\varphi:A\to B$ устига акслантириш мавжуд бўлса, у ҳолда A ва B тўпламлар ўхшаш тартибланган тўпламлар дейилади ва $A\simeq B$ шаклда белгиланади.*

Ўхшаш тартибланган тўпламларга мисоллар келтирамиз.

1) $A=[0,1]$ ва $B=[a, b]$ $(a<b)$ тўпламлар ўхшаш тартибланган тўпламлар, чунки $\varphi(t)=a+(b-a)t$ акслантириш тартибни сақловчи ўзаро бир қиймати акслантиришдир.

2) Ихтиёрий иккита чекли A ва B тартибланган тўплам берилган бўлиб, улардаги элементларининг сони бир хил бўлса, улар ўхшаш тартибланган бўлади. Ҳақиқатан, уларни мос равишда $A=\{a_1, \ldots, a_n\}$ ва $B=\{b_1, \ldots, b_n\}$ кўринишда ёзиш мумкин. У ҳолда $\varphi(a_i)=b_i$, $i=\overline{1, n}$ акслантириш тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантиришдир.

Ўхшаш тартибланган тўпламларнинг кардинал сонлари (қувватлари) бир-бирига тенг эканлиги бевосита 3-таърифдан келиб чиқади. Лекин кардинал сонлари тенг бўлган тартибланган тўпламларнинг ўхшаш тартибланган бўлиши шарт эмас. Масалан, $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ ва $Z_-=\{\ldots,-3,-2,-1\}$ тартибланган тўпламлар ўзаро эквивалент бўлиб, улар ўхшаш тартибланган эмас. Ҳақиқатан, тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантириш мавжуд деб фараз қилайлик. У ҳолда N тартибланган тўпламда ихтиёрий $n\in N$ $(n\neq 1)$ элемент учун $1\leqslant n$ муносабат ўринли. Бундан Z_- тўпламда ўринли бўлган $\varphi(1)\leqslant\varphi(n)$ муносабат келиб чиқади. Бу эса Z_- тартибланган тўпламда биринчи элементнинг мавжуд эканлигини кўрсатади. Ваҳоланки, Z_- тартибланган тўпламда биринчи элемент мавжуд эмас.

57.2-теорема. *Ихтиёрий тартибланган A, B, C тўпламлар учун қуйидаги жумлалар ўринли:*

1) $A\simeq A$ (*рефлексивлик хоссаси*);

2) *$A \simeq B$ бўлса, $B \simeq A$ (симметриклик хоссаси);*

3) *агар $A \simeq B$ ва $B \simeq C$ бўлса, $A \simeq C$ (транзитивлик хоссаси).*

Исбот. 1) Барча $a \in A$ учун $\varphi(a) = a$ акслантириш тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли $\varphi : A \rightarrow A$ акслантириш вазифасини ўтайди. Демак, $A \simeq A$.

2) Агар $\varphi : A \rightarrow B$ акслантириш тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантириш бўлса, у ҳолда $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ акслантириш ҳам тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади. Ҳақиқатан, $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлиги $\varphi : A \rightarrow B$ акслантиришнинг ўзаро бир қийматли акслантириш эканлигидан келиб чиқади. Энди $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ акслантиришнинг тартибни сақловчи акслантириш эканини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $x \in B$ ва $y \in B$ элементлар ихтиёрий бўлиб, $x \leqslant y$ бўлсин. У ҳолда $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ акслантириш ўзаро бир қийматли акслантириш бўлганлиги учун шундай ягона $a \in A$ ва $b \in A$ жуфт топиладики,

$$a = \varphi^{-1}(x) \text{ ва } b = \varphi^{-1}(y) \qquad (1)$$

бўлади. Булардан мос равишда $x = \varphi(a)$ ва $y = \varphi(b)$ муносабатга эга бўламиз. Натижада $x \leqslant y$ муносабатдан $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ муносабат келиб чиқади. Бундан, $\varphi : A \rightarrow B$ акслантириш тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантириш бўлгани учун $a \leqslant b$ муносабатни оламиз. Ҳақиқатан, агар $a \geqslant b$ бўлганда эди $\varphi(a) \geqslant \varphi(b)$ бўлиб, зиддият ҳосил бўлар эди. Натижада (1) муносабатга асосан $\varphi^{-1}(x) = a \leqslant b = \varphi^{-1}(y)$, яъни $\varphi^{-1}(x) \leqslant \varphi^{-1}(y)$ бўлади. Демак, $\varphi^{-1} : B \rightarrow A$ акслантириш тартибни сақловчи акслантириш экан. Шунга кўра $B \simeq A$ бўлади.

3) Агар $\varphi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$ тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантиришлар бўлса, у ҳолда $\psi \circ \varphi : A \rightarrow C$ акслантириш ҳам тартибни сақловчи ўзаро бир қийматли акслантириш бўлади.

Ҳақиқатан, $a \in A$, $b \in A$ учун $a \leqslant b$ бўлсин. У ҳолда $\varphi : A \rightarrow B$ акслантириш тартибни сақловчи акслантириш бўлганлиги учун $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ $(\varphi(a) \in B, \varphi(b) \in B)$. Бундан, $\psi : B \rightarrow C$ акслантиришнинг ҳам тартибни сақловчи акслантириш эканлигидан, $\psi[\varphi(a)] \leqslant \psi[\varphi(b)]$ муносабат келиб чиқади.$_*$

57.2-теоремадаги 1)—3) хоссаларга кўра $\simeq$ муносабат эквивалентлик муносабатидир. Шунга кўра тартибланган тўпламлар ўзаро кесишмайдиган синфларга ажралади. Ҳар бир синфга бирор белги мос қўйилиб, бу белги шу синфнинг *тартиб типи* дейилади. Турли синфларга турли белги мос қўйилади.

Мазкур синфдан олинган тартибланган A тўпламнинг *тартиб типи* деб, шу синфнинг тартиб типини олинади ва уни

$\overline{A}$ орқали белгиланади. Шундай қилиб, A ва B тартибланган тўпламлар ўхшаш тартибланган бўлса, $\overline{A} = \overline{B}$, акс ҳолда эса $\overline{A} \neq \overline{B}$. Кўп учрайдиган тартибланган тўпламларнинг тартиб типларини ифодалаш учун махсус белгилар қабул қилинган. Масалан, 1) $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ тўпламнинг тартиб типи n билан белгиланади. Шундай қилиб, чекли тартибланган тўпламнинг кардинал сони ва тартиб типи битта белги билан ифодаланади. Белгилашнинг бу қулайсизлик томони одатда англашилмовчиликка олиб келмайди.

2) $N = \{1, 2, \ldots\}$ тартибланган тўпламнинг тартиб типи ω орқали белгиланади. Натурал сонлар тўпламининг қуввати c_0 орқали белгиланади. Демак, $\overline{N} = \omega$, $\overline{\overline{N}} = c_0$.

3) $Z_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ тартибланган тўпламнинг тартиб типи ω^* билан белгиланади. Белгиланишга кўра $\overline{Z_-} = \omega^*$ ва $\overline{\overline{Z_-}} = \overset{*}{c}_0$. Равшанки, тескари тартибда тартибланган натурал сонлар тўплами $N = \{\ldots, 3, 2, 1\}$ нинг тартиб типи ҳам ω^* бўлади. Умуман, A тартибланган тўплам бўлса, тескари тартибланган A^* тўплам қуйидагича аниқланади: A^* тўплам A тўпламнинг элементларидан иборат. Агар A тартибланган тўпламда $a \leqslant b$ муносабат ўринли бўлса, A^* тўпламда $b \leqslant a$ деб олинади. Натижада A^* тартибланган тўплам бўлади. Агар тартибланган A тўпламнинг тартиб типи α бўлса, тартибланган A^* тўпламнинг тартиб типи α^* орқали белгиланади. Тескари тартибнинг аниқланишига кўра $(\alpha^*)^* = \alpha$ муносабат келиб чиқади. Тартибланган чекли тўплам учун $n^* = n$ бўлиши равшан.

Табиий усулда тартибланган бутун сонлар тўплами $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots\}$ нинг тартиб типи π билан белгиланади. Тартибланган рационал сонлар тўплами Q нинг ва тартибланган ҳақиқий сонлар тўплами R нинг тартиб типлари мос равишда η ва λ орқали белгиланади. Ушбу $\pi^* = \pi$, $\eta^* = \eta$, $\lambda^* = \lambda$ тенгликлар ўринли.

58-§. Тартиб типлари арифметикаси

Тартиб типларининг йиғиндиси. Фараз қилайлик, A ва B тўпламлар ўзаро кесишмайдиган тартибланган тўпламлар бўлиб, уларнинг тартиб типлари мос равишда α ва β га тенг бўлсин. $A \cup B = C$ тўпламда қуйидагича тартиб киритамиз. Агар C дан олинган a ва b элементлар: 1) иккаласи ҳам A тўпламга тегишли бўлса, уларнинг A даги тартиби C да ҳам сақланади, 2) шунингдек, иккаласи ҳам B тўпламга тегишли бўлса, уларнинг

B даги тартиби C да ҳам сақланади, 3) бири, масалан, $a \in A$, иккинчиси $b \in B$ бўлса, $a \leqslant b$ деб оламиз. Натижада ҳосил бўлган C тартибланган тўпламни A ва B тартибланган тўпламларнинг *тартибли йиғиндиси* дейилади.

1-таъриф. $\alpha = \overline{A}$ ва $\beta = \overline{B}$ *тартиб типларнинг йиғиндиси деб, $C = A \cup B$ тартибланган тўпламнинг тартиб типига айтилади ва $\alpha + \beta$ орқали белгиланади.*

Чекли тартиб типлари α, β учун уларнинг йиғиндиси натурал сонларнинг оддий йиғиндиси билан устма-уст тушади.

Қулайлик учун бир элементли тўплам ва бўш тўпламни ҳам тартибланган тўплам деб ҳисоблаймиз ва уларнинг тартиб типларини мос равишда 1 ва 0 орқали белгилаймиз. Тартиб типларининг йиғиндисига бир неча мисол кўрайлик.

1) $\omega^* + \omega = \pi$ Ҳақиқатан, масалан, $Z_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ ва $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ тартибланган тўпламларнинг тартибли йиғиндиси $Z_- \cup N = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots\} \simeq Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

2) $\omega + \omega^* \neq \pi$. Чунки, $N \cup Z_- = \{1, 2, 3, \ldots, \ldots, -2, -1\}$ тартибланган тўпламда биринчи ва охирги элементлар мавжуд, ваҳоланки, $Z = \{\ldots -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ тартибланган тўпламда биринчи ва охирги элементлар мавжуд эмас. Демак, $\omega^* + \omega \neq \omega + \omega^*$, яъни тартиб типларининг йиғиндиси коммутативлик (ўрин алмаштириш) хоссасига эга эмас.

3) $1 + \omega = \omega$. Дарҳақиқат, $A = \{0\}$ ва $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ тартибланган тўпламларнинг тартибли йиғиндиси $A \cup N = \{0, 1, \ldots\} \simeq N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Умуман, $n + \omega = \omega$.

4) $\omega + 1 \neq \omega$, чунки $N \cup A = \{1, 2, 3, \ldots, 0\}$ тартибли тўпламда охирги элемент — 0 мавжуд, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ да эса охирги элемент мавжуд эмас.

58.1-теорема. *Ихтиёрий α, β, γ тартиб типлари учун қуйидаги муносабатлар ўринли:*

1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$;

2) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$;

3) $(\alpha + \beta)^* = \beta^* + \alpha^*$.

Исбот. A, B, C тартибланган тўпламларнинг тартиб типлари мос равишда α, β, γ бўлсин. 1) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ муносабат $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ тенгликдан келиб чиқади. 2) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ муносабат эса $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ тенгликнинг натижасидир.

3) $(\alpha + \beta)^* = (\overline{A \cup B})^* = \overline{B^* \cup A^*} = \overline{B}^* + \overline{A}^* = \beta^* + \alpha^*$.*

Тартиб типларининг кўпайтмаси. A ва B тартибланган тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси $A \times B$ да қуйидагича тартиб киритамиз: (a_1, b_1), $(a_2, b_2) \in A \times B$ элементлар учун $(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2)$ дейилади, агар B тартибланган тўпламда $b_1 \leqslant b_2$ бўлса ёки $b_1 = b_2$ бўлган ҳолда A тартибланган тўпламда $a_1 \leqslant a_2$ бўлса.

2-таъриф. $\alpha = \overline{A}$ ва $\beta = \overline{B}$ *тартиб типларининг тартибли Декарт кўпайтмаси деб, $A \times B$ тартибланган тўпламнинг тартиб типига айтилади ва $\alpha \cdot \beta$ орқали белгиланади.*

Кўпайтириш амали йиғинди амали каби коммутативлик хоссасига эга эмас. Масалан,

$$\{1, 2\} \times N = \{(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), \ldots\},$$
$$N \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (2, 1)\ (3, 1), \ldots, (1, 2), (2, 2), (3, 2), \ldots\}$$

тengliklardan $2\omega = \overline{\{1, 2\} \times N} = \omega$ ва $\omega \cdot 2 = \overline{N \times \{1, 2\}} = \omega + \omega$ муносабат келиб чиқади. Равшанки, $\omega + \omega \neq \omega$. Демак, $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

58.2-теорема. *Ихтиёрий α, β, γ тартиб типлари учун:*

1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha\ (\beta \cdot \gamma)$;
2) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$;
3) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$;
4) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Теореманинг исботи 58.1-теореманинг исботига ўхшаш бўлгани учун уни исботлашни ўқувчига қолдирамиз.

59-§. Тўла тартибланган тўпламлар

1-таъриф. *Агар тартибланган A тўпламнинг ихтиёрий бўш бўлмаган тартибланган қисм тўплами биринчи элементга эга бўлса, A тўплам тўла тартибланган дейилади.*

Таърифга қўшимча сифатида бўш тўпламни ҳам тўла тартибланган тўплам деб ҳисоблаш қулай.

Тўла тартибланган тўпламнинг тартиб типи *тартиб сон* дейилади. Чексиз тартиб сонлар *трансфинит сонлар* дейилади.

Тўла тартибланган тўпламларга мисоллар келтирамиз.

1) Барча тартибланган чекли тўпламлар тўла тартибланган бўлади. Бу 57.1-теоремадан бевосита келиб чиқади.

2) $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ тўплам тўла тартибланган тўпламдир.

Ҳақиқатан, M тўплам N тўпламнинг ихтиёрий бўш бўлмаган қисми бўлсин. *M тўпламдан ихтиёрий $m \in M$ элементни* оламиз. Агар m элемент M тўплам учун биринчи элемент бўлса, 1-таърифга асосан N тўплам тўла тартибланган бўлади. Агарда m элемент M тўплам учун биринчи элемент бўлмаса, $N_m = (1,\ 2, \ldots, m) \subset N$ тўпламни қараймиз. У ҳолда

$M \cap N_m$ тўплам бўш бўлмаган чекли тартибланган тўпламдир. 57.1-теоремага асосан бу тўплам бирор биринчи m_0 элементга эга. M ва N_m тўпламларнинг тузилишига асосан бу элемент M тўплам учун ҳам биринчи элемент бўлади.

Қуйидаги мисоллар ҳам худди шунинг сингари кўрсатилади.

3) $N \times \{1, 2\} = \{(1,1), (2, 1), (3, 1), \ldots (1, 2), (2, 2), (3, 2), \ldots\}$ тўплам тўла тартибланган тўплам.

4) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots \frac{2n+1}{n+1}, \ldots 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \ldots \frac{3n+2}{n+1}, \ldots\right\}$ тўплам тўла тартибланган тўплам.

Аксинча, қуйидаги тўпламлар тўла тартибланган эмас:

5) $R = (-\infty, \infty)$, чунки бу тўпламда биринчи элемент мавжуд эмас.

6) $B = [a, b]$, чунки $B_1 = (a, b]$ тартибланган қисм тўпламда биринчи элемент йўқ.

7) $Z_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ тўпламда ҳам биринчи элемент йўқ.

59.1-теорема. 1) *тўла тартибланган тўпламнинг ихтиёрий тартибланган қисм тўплами ҳам тўла тартибланган; 2) A ва B тўла тартибланган тўпламларнинг тартибли йиғиндиси $A \cup B$ ҳам тўла тартибланган;* 3) *A ва B тўла тартибланган тўпламларнинг тартибли Декарт кўпайтмаси ҳам тўла тартибланган тўплам.*

Исбот. 1) жумла бевосита 1-таърифнинг натижасидир.

2) $A \cup B$ нинг ихтиёрий тартибланган қисм тўплами C ни олайлик. Агар $C \cap A \neq \varnothing$ бўлса, у ҳолда тартибланган $C \cap A$ қисм тўплам A тўпламнинг ҳам тартибланган қисм тўплами бўлгани учун биринчи элементга эга (чунки A тўплам тўла тартибланган). Бу биринчи элемент C тўплам учун ҳам биринчи элемент бўлади (чунки $C \subset A \cup B$ ва $C \cap A \neq \varnothing$). Агар $C \cap A = \varnothing$ бўлса, аввалги мулоҳазани $C \cap B \subset B$ тўплам учун такрорлаймиз.

3) $C \subset A \times B$ тартибланган қисм тўпламнинг биринчи элементи мавжудлигини кўрсатамиз. B тўпламдан ихтиёрий $y \in B$ элементни тайинлаб олиб, ушбу $(A, y) = \{(x, y) : x \in A,\ y$ — тайинланган ва $y \in B\}$ белгилашни киритамиз.

Фараз қилайлик,

$$B_1 = \{y \in B : (A, y) \cap C \neq \varnothing\}$$

бўлсин. $B_1 \subset B$ ва тартибланган қисм тўплам эканлиги равшан. Шунинг учун B_1 тўплам 1-таърифга асосан биринчи b_1 элементга эга.

Энди $A_1 = \{x \in A : (x, b_1) \in C\}$ бўлсин. Агар $C \neq \varnothing$ бўлса, $A_1 \subset A$ ва $A_1 \neq \varnothing$ эканлиги равшан. Демак, A_1 тўплам ҳам биринчи a_1 элементга эга. У ҳолда 58-§ да A ва B тартибланган тўпламларнинг Декарт кўпайтмаси $A \times B$ да киритилган тартибга асосан (a_1, b_1) элемент тартибланган C қисм тўпламнинг биринчи элементи бўлади.$_*$

59.2-теорема. *Тартибланган тўплам тўла тартибланган бўлиши учун шу тўпламнинг ω^* тартиб типига эга бўлган тартибланган қисм тўплами мавжуд бўлмаслиги зарур ва кифоядир.*

Исбот. Зарурлиги. Ҳақиқатан, тартиб типи ω^* бўлган тартибланган тўплам биринчи элементга эга эмас. Демак, тўла тартибланган тўпламнинг тартиб типи ω^* бўлган тартибланган қисм тўплами мавжуд эмас.

Кифоялиги. Агар тўплам тўла тартибланган бўлмаса, унинг биринчи элементга эга бўлмаган қисм тўплами мавжуд. Шу қисм тўпламдан ихтиёрий a_{-1}элементни оламиз. a_{-1} биринчи элемент бўлмагани учун ундан олдин келадиган a_{-2} элемент мавжуд. a_{-2} ҳам биринчи элемент эмас, демак, ундан ҳам олдин келадиган a_{-3} элемент мавжуд ва ҳоказо. Равшанки, $A_1 = \{. . . , a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}\}$ тартибланган қисм тўпламнинг тартиб типи ω^*.$_*$

59.3-теорема (трансфинит индукция принципи). *A тўла тартибланган тўплам бўлиб, $P(x)$ белги A тўпламда ўзгарувчи x элементга боғлиқ бўлган бирор математик жумла бўлсин. Агар A тўпламнинг биринчи a_0 элементи учун $P(a_0)$ жумла тўғри бўлса ва ихтиёрий $a \in A$ элемент учун $P(x)$ жумланинг барча $x < a$ учун тўғри эканлигидан $P(a)$ жумланинг ҳам тўғрилиги келиб чиқса, у ҳолда $P(x)$ жумла барча $x \in A$ учун ҳам тўғри бўлади.*

Исбот. $P(x)$ жумла тўғри бўлмаган x элементлар тўплами A_1 бўлсин. A тўплам тўла тартибланган бўлгани учун унинг A_1 тартибланган қисм тўпламида биринчи $a' \in A_1$ элемент мавжуд. $A_2 = \{x \in A : x < a'\}$ белгилаш киритамиз. $A_2 \neq \varnothing$, чунки, масалан, $a_0 \in A_2$. Ихтиёрий $x < a'$ учун $P(x)$ жумла тўғри бўлгани сабабли шартга кўра $P(a')$ жумла ҳам тўғри. Яъни $a' \overline{\in} A_1$, демак, $A_1 = \varnothing$.$_*$

МАШҚ УЧУН МАСАЛАЛАР

1. Тартибланган саноқли A тўпламнинг тартиби қандай бўлишидан қатъи назар одатдаги усул билан тартибланган Q рационал сонлар тўпламидан шундай Q_0 қисмини (Q_0 тўпламдаги сонлар Q тўпламдаги сонлар каби

жойлашган) ажратиш мумкинки, Q_0 тўплам билан A тўплам ўхшаш тартибланган бўлади. Шуни исботланг.

2. A тартибланган тўплам бўлиб, $a \in A$ бўлсин. A тўпламнинг a элементидан олдин келувчи барча элементлари тўплами A тўпламдан a элемент орқали кесиб олинган кесма дейилади.

Агар A тартибланган тўплам бўлиб, H унинг барча кесмалари тўплами бўлса, H да тартиб киритинг ҳамда H ва A тўпламларнинг ўхшаш тартибланган тўпламлар эканлигини исботланг.

3. Агар A ва B тўпламлар тўла тартибланган тўплам бўлса, у ҳолда уларнинг бири иккинчиси билан ёки иккинчисининг бирор кесмаси билан ўхшаш тартибланган бўлади. Шуни исботланг.

4. X тартибланган тўплам бўлиб, унинг ҳар бир саноқли қисми тўла тартибланган бўлса, X тўпламнинг тўла тартибланган эканлигини исботланг.

XIII боб

ҚЎШИМЧАЛАР

60-§. Функциянинг тебраниши. Функциянинг узилиш нуқталари тўпламининг тузилиши

Тўғри чизиқдаги бирор E тўпламда $f(x)$ функция берилган бўлиб, $x \in E$ нуқта E тўплам бўйича унинг $a \in E$ лимит нуқтасига интилсин: $x \to a$. У ҳолда $f(x)$ функция ҳеч қандай лимитга интилмаслиги мумкин. Бундай ҳолда $f(x)$ функциянинг x нуқта E тўплам бўйича a нуқтага интилгандаги юқори ва қуйи лимитлари ўрганилади.

Ҳар бир $\delta > 0$ сон учун a нуқтанинг $(a - \delta,\ a + \delta)$ атрофини олиб, M_δ ва m_δ сонлар билан мос равишда $f(x)$ функциянинг $E \cap (a - \delta,\ a + \delta)$ тўпламда қабул қиладиган қийматларининг юқори ва қуйи чегараларини белгилаймиз, яъни

$$M_\delta = \sup_{x \in E \cap (a-\delta,\, a+\delta)} [f(x)],$$

$$m_\delta = \inf_{x \in E \cap (a-\delta,\, a+\delta)} [f(x)],$$

δ сон камайганда M_δ сон, унинг таърифланишига асосан, фақат камайиши мумкин. Шунинг учун ҳам $\delta \to 0$ да M_δ аниқ лимитга интилади, яъни ушбу $\lim\limits_{\delta \to 0} M_\delta$ лимит мавжуд. Бу лимитни (агар ҳар қандай $\delta > 0$ учун $M_\delta = +\infty$ бўлса, бу лимит $+\infty$ га тенг бўлади) $f(x)$ функциянинг x нуқта E тўплам бўйича a нуқтага интилгандаги *юқори лимити* дейилади ва

$$\overline{\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}}} f(x) \text{ ёки, қисқароқ, } \overline{\lim_{a,\, E}} f$$

кўринишда белгиланади.

Шунингдек, δ камайганда m_δ сон, унинг таърифланишига асосан, фақат ортиши мумкин. Шунинг учун ҳам $\delta \to 0$ да ушбу $\lim\limits_{\delta\to 0} m_\delta$ лимит мавжуд. Бу лимит $\underline{\lim}\limits_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)$ ёки $\underline{\lim}\limits_{a,\, E} f$ кўринишда белгиланади ва $f(x)$ функциянинг x нуқта E тўплам бўйича a нуқтага интилгандаги *қуйи лимити* дейилади. Шуни ҳам айтиш керакки,

$$\underline{\lim}_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = -\infty$$

тенглик фақат ҳар қандай δ сон учун $m_\delta = -\infty$ бўлгандагина ўринли бўлади. Ушбу

$$\underline{\lim}_{a,\, E} f \leqslant \overline{\lim}_{a,\, E} f$$

тенгсизликнинг ўринли эканлиги юқори ва қуйи лимитнинг таърифидан келиб чиқади.

Хусусан, агар $a \in E$ бўлса, у ҳолда

$$\underline{\lim}_{a,\, E} f \leqslant f(a) \leqslant \overline{\lim}_{a,\, E} f.$$

Агар $E = R^1$ бўлса, қуйидаги содда белгиларни ишлатамиз: $\underline{\lim}_a f$, $\overline{\lim}_a f$.

Қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

60.1-теорема. *Бирор E тўпламда аниқланган $f(x)$ функция x ўзгарувчи E тўплам бўйича a нуқтага яқинлашганда аниқ лимитга эга бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя:*

$$\underline{\lim}_{a,E} f = \overline{\lim}_{a,E} f.$$

Бу ҳолда

$$\lim_{a,\, E} f = \underline{\lim}_{a,E} f = \overline{\lim}_{a,E} f$$

Бу теоремадан ва функциянинг узлуксизлиги таърифидан қуйидаги натижа келиб чиқади:

60.2-натижа. *$f(x)$ функция ўзининг аниқланиш соҳасига тегишли a нуқтада узлуксиз бўлиши учун қуйидаги шартнинг бажарилиши зарур ва кифоя:*

$$\underline{\lim}_a f = \overline{\lim}_a f.$$

Бу ҳолда

$$\underline{\lim}_a f = \overline{\lim}_a f = f\ (a)$$

60.3-изоҳ. Агар $\lim_{a,\,E} f = -\infty$ бўлса (бу фақат a нуқта E га кирмаган ҳолдагина бўлиши мумкин, чунки $e \in E$ бўлганда

$\overline{\lim}_{a,\,E} f \geqslant f(a)$), у ҳолца $\lim_{a,\,E} f = -\infty$, шунинг учун ҳам

$$\overline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty.$$

Шунга ўхшаш, агар $\underline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$ бўлса, у ҳолда $\overline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$, шунинг учун ҳам $\lim_{a.\,E} f = +\infty$.

Таъриф. *f функция E тўпламда аниқланган бўлсин. Ушбу*

$$\omega_{a,\,E} f = \overline{\lim}_{a,\,E} f - \underline{\lim}_{a,\,E} f$$

ифода f функциянинг $a \in E$ нуқтадаги E тўплам бўйича тебраниши дейилади.

Функция тебранишининг таърифланишига кўра юқори $\overline{\lim}_{a,\,E}$ ва қуйи $\underline{\lim}_{a,\,E} f$ лимитлар чекли бўлса, $\omega_{a,\,E}$ сон манфий эмас, Агар қуйидаги шартларнинг камида биттаси бажарилса: $\overline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$, $\underline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$, $\omega_{a,\,E} f$ сон $+\infty$ га тенг бўлиб, бошқа ҳолнинг, яъни $\overline{\lim}_{a,\,E} f = -\infty$ ёки $\underline{\lim}_{a,\,E} f = +\infty$ ҳолнинг бўлиши мумкин эмас, чунки $f\ (x)$ функция a нуқтада аниқ $f(a)$ қийматни қабул қилади ва

$$\overline{\lim}_{a,\,E} f \geqslant f\ (a) \geqslant \underline{\lim}_{a,\,E} f.$$

Шундай қилиб, $\omega_{a,\,E} f$ сон ё манфий эмас, ёки $+\infty$ га тенг. Агар E тўплам R тўпламдаги сегмент ёки интервал бўлса, $\omega_{a,\,E} f$ белгилаш ўрнига соддароқ $\omega_a f$ белгилашни ишлатамиз.

Энди юқоридаги 60.2-натижани қуйидагича айтиш мумкин:

60.4-теорема. *E тўпламда аниқланган $f\ (x)$ функциянинг $a \in E$ нуқтада узлуксиз бўлиши учун $\omega_{a,\,E} f$ соннинг нолга тенг бўлиши зарур ва кифоя.*

Бу теоремадан фойдаланиб, қуйидаги теоремани исботлаймиз:

60.5-теорема. *Тўғри чизиқдаги бирор очиқ ёки ёпиқ E тўпламда аниқланган f функциянинг узлуксиз нуқталаридан иборат C тўплам G_δ типидаги тўпламдир (у бўш ёки E га тенг бўлиши ҳам мумкин).*

Бу теорема қуйидаги теоремага эквивалентдир:

60.6-теорема. *f функциянинг узилиш нуқталаридан иборат D тўплам F_δ типдаги тўпламдир*[1].

Бу теоремаииг исботи қуйидаги леммага асосланган:

60.7-лемма. *Берилган ε мусбат сон учун*

$$\omega_{x,E} f \geqslant \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталардан иборат $E_f(\varepsilon)$ тўплам ёпиқдир.

Исбот. a нуқта $E_f(\varepsilon)$ тўпламиинг лимит нуқтаси бўлсин. У ҳолда a нуқтанинг ихтиёрий $(a-\delta,\ a+\delta)$ атрофида $\omega_{a',E} f \geqslant \varepsilon$ тенгсизликни қаноатлантирувчи a' нуқта мавжуд. M ва m билан мос равишда f функциянинг $(a-\delta, a+\delta)$ атрофдаги юқори ва қуйи чегараларини белгилаймиз. У ҳолда $a' \in (a-\delta,\ a+\delta)$ муносабатдан

$$M \geqslant \overline{\lim}_{a'} f;\ \underline{\lim}_{a'} f \geqslant m$$

муносабатга эга бўламиз. Бундан ҳар қандай $\varepsilon > 0$ сон учун

$$M - m \geqslant \omega_{a,E} f \geqslant \varepsilon \qquad (1)$$

тенгсизлик келиб чиқади. Фараз қилайлик, энди, $\omega_{a,E} f < \varepsilon$ бўлсин. У ҳолда $(a-\delta,\ a+\delta)$ атрофни шундай танлаш мумкинки, натижада $M - m < \varepsilon$ тенгсизлик ҳам ўринли бўларди. Бу эса (1) тенгсизликка зид натижага олиб келади. Демак, $\omega_{a,E} f \geqslant \varepsilon$ бўлиб, $a \in E_f(\varepsilon)$ экан.$_*$

60.6-теореманинг исботи. 60.4-теоремага асосан f функциянинг барча узилиш нуқталари тўплами $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \hat{E}_f\left(\frac{1}{n}\right)$ йиғиндига тенг бўлади. 60.7-леммага асосан эса $E_f\left(\frac{1}{n}\right)$ тўплам ёпиқ тўпламдир. Бундан 21-§ даги 2-таърифга асосан $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \hat{E}_f\left(\frac{1}{n}\right)$ тўпламнинг F_δ типидаги тўплам эканлиги келиб чи-

---

[1] Бу теоремадан $R \setminus D$ тўпламнинг G_δ типидаги тўплам эканлиги бевосита келиб чиқади. E тўплам очиқ ёки ёпиқ тўплам бўлгани учун у G_δ типидаги тўпламдир. $C = E \cap (R \setminus D)$ тўплам G_δ типидаги иккита тўпламнинг кўпайтмаси бўлганлиги учун у ҳам G_δ типидаги тўпламдир.

қади. Шу билан 60.6- теорема исботланди. Бундан унга эквивалент бўлган 60.5- теореманинг ҳам исботи келиб чиқади.$_*$

61- §. Узлуксиз чизиқлар. Жордан ва Пеано чизиқлари

Текисликдаги чизиқ деганда текисликда ҳаракат қилувчи моддий нуқтанинг изини тасаввур қиламиз. Бу, албатта, ҳеч қандай таъриф эмас. Жордан чизиқнинг таърифини қуйидагича берган:

Текисликдаги чизиқ деб, x, y координаталари

$$x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \qquad (1)$$

тенгламаларни қаноатлантирувчи текисликдаги барча нуқталар тўпламини айтилади, бу ерда $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *лар* $t_0\leqslant t\leqslant T$ *сегментда аниқланган узлуксиз функциялардир.* Бу маънодаги чизиқ *Жордан чизиғи* дейилади.

Жорданнинг таърифи чизиқ тўғрисидаги тасаввуримизга тўғри келади. Ҳақиқатан, агар t ўзгарувчини вақт деб қарасак, у ҳолда (1) тенгламалар t вақтнинг $[t_0, T]$ оралиқдаги турли қийматларида текисликда ҳаракат қилувчи нуқтанинг координаталарини ифодалайди.

Шуниси қизиқки, $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ узлуксиз функцияларни шундай танлаш мумкин эканки, текисликдаги бирор квадрат ичидаги ҳар бир нуқтанинг координатаси бирор $t\in[t_0, T]$ да (1) тенгламалар билан аниқланади.

Шундай қилиб, Жордан чизиғи t ўзгарувчи $[t_0, T]$ сегментда ўзгарганда квадратнинг ичидаги ҳар бир нуқтадан ўтиб, квадратнинг юзини тўлдириши мумкин.

Айтиб ўтилган хоссага эга бўлган чизиқлар *Пеано чизиқлари* дейилади, чунки бундай чизиқларнинг мавжудлигини Пеано кўрсатган. Агар $[t_0, T]$ сегментдаги турли t ларга текисликнинг турли нуқталари мос келса, (1) тенгламалар билан берилган Жордан чизиғи *содда ёй* ёки *каррали нуқтасиз Жордан чизиғи* дейилади. Агар $t=t_0$ ва $t=T$ ларда (1) тенглама текисликда биттагина нуқтани ифодаласа, яъни Жордан чизиғининг бошланғич нуқтаси $M_0\}\varphi(t_0), \psi(t_0)\}$ ва охирги нуқтаси $M\}\psi(T), \psi(T\}$ устма-уст тушса, Жордан чизиғи *ёпиқ* дейилади. Агар $[t_0, T]$ сегментда t_0 ва T лардан бошқа текисликда битта нуқтани ифодаловчи турли t_1 ва t_2 лар мавжуд бўлмаса, ёпиқ Жордан чизиғи *содда ёпиқ контур* ёки *каррали нуқтасиз ёпиқ Жордан чизиғи* дейилади.

Агар Жордан чизиғини ифодаловчи (1) тенгламалар t нинг икки ёки ундан ортиқ қийматларида текисликда биттагина нуқтани ифодаласа, бундай нуқтани Жордан чизиғининг *каррали нуқтаси* дейилади.

Қуйидаги теоремаларни исботсиз келтирамиз.

61.1-теорема. *Ҳар қандай содда ёпиқ Жордан чизиғи текисликни иккита очиқ тўпламга ажратади, бу тўпламларнинг бири чизиққа нисбатан ички бўлиб, иккинчиси эса ташқи бўлади.*

61.2-теорема. *Ҳар қандай Пеано чизиғи каррали нуқталарга эга.*

62- §. Тўғриланувчи чизиқлар

Ушбу

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t)$$

тенгламалар Жордан чизиғини ифодаласин, бу ерда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ $[t_0, T]$ сегментдаги узлуксиз функциялар. $[t_0, T]$ сегментни

$$t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=T$$

нуқталар билан ихтиёрий n қисмга бўламиз ва

$$x_k=\varphi(t_k),$$

$$y_k=\psi(t_k)$$

белгилашларни киритамиз.

Учлари $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1\ y_1)$, $\ldots$, $M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, $M_n(x_n, y_n)$ нуқталардан иборат бўлган синиқ чизиқни тузамиз. Бу синиқ чизиқни *Жордан чизиғи ичига чизилган синиқ чизиқ* дейилади. Агар M_k ва M_{k+1} нуқталарни туташтирувчи кесманинг узунлигини C_k орқали белгиласак, у ҳолда тузилган синиқ чизиқнинг периметри ушбу сонга тенг бўлади:

$$P=\sum_{k=0}^{n-1} C_k.$$

Аммо

$$C_k=\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}$$

бўлгани учун

$$P=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2}.$$

$[t_0, T]$ сегментнинг элементар қисмлари сони n ни (ёки синиқ чизиқ қисмлари сонини) чексизга шундай интилтирамизки, барча $[t_k, t_{k+1}]$ кесмаларнинг узунлиги $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ (ёки синиқ чизиқнинг барча қисмлари узунлиги) нолга интилсин. Агар бунинг натижасида Жордан чизиғининг ичига чизилган синиқ чизиқнинг периметри P бирор чекли лимитга интилса ҳамда бу лимит $[t_0, T]$ сегментнинг бўлинишига боғлиқ бўлмаса, бу лимитни берилган Жордан чизиғининг *узунлиги*, чизиқни эса *тўғриланувчи чизиқ* дейилади.

62.1-теорема. *Жордан чизиғи*

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t), \ t \in [t_0, T]$$

тўғриланувчи бўлиши учун $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[t_0, T]$ сегментда ўзгариши чегараланган бўлиши зарур ва кифоя.

Исбот. Зарурлиги. Берилган чизиқ тўғриланувчи бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда таърифга асосан Жордан чизиғининг ичига чизилган синиқ чизиқнинг периметри

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

чекли лимитга эга бўлади. Бундан ва

$$|x_{k+1} - x_k| \leqslant C_k, \ |y_{k+1} - y_k| \leqslant C_k$$

тенгсизликлардан

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \ \text{ва} \ \sum_{k=0}^{n-1} |y_{k+1} - y_k|$$

йиғиндиларнинг чегараланганлиги, яъни $x=\varphi(t)$ ва $y=\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[t_0, T]$ сегментда чегараланган ўзгаришга эга эканлиги келиб чиқади.

Кифоялиги. $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг ҳар бири $[t_0, T]$ сегментда ўзгариши чегараланган бўлсин. У ҳолда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \ \text{ва} \ \sum_{k=0}^{n-1} |y_{k+1} - y_k|$$

йиғиндилар чегараланган бўлади. Бундан ва

$$C_k \leqslant |x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k|$$

тенгсизликдан

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

периметрнинг чегараланганлиги келиб чиқади. Демак, P периметрнинг барча қийматлари тўплами чегараланган бўлиб, у аниқ юқори L чегарага эга. Энди Δt_k лар узунликларининг энг каттаси нолга интилганда P периметрнинг L га интилишини кўрсатамиз. Шу мақсадда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун барча k ларда $|\Delta t_k| < \delta$ бўлганда $|P - L| < \varepsilon$ тенгсизлик бажариладиган $\delta > 0$ соннинг мавжудлигини кўрсатиш кифоя.

Ҳақиқатан, аниқ юқори чегаранинг таърифига асосан $[t_0, T]$ сегментнинг ҳар қандай бўлинишида ҳам

$$P \leqslant L, \tag{1}$$

аммо $[t_0, T]$ сегментни S_0 нуқталар системаси билан шундай n та қисмга бўлиш мумкинки, бу бўлинишга мос келувчи синиқ чизиқнинг P_0 периметри учун

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < P_0 < L \tag{2}$$

тенгсизлик ўринли.

$[t_0, T]$ сегментни S нуқталар системаси билан элементар $[t_k, t_{k+1}]$ сегментларга бўлиб, берилган ε га қараб, $\delta > 0$ сонни шундай кичик қилиб танлаймизки, натижада $|\Delta t_k| < \delta$ бўлиб, $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг $[t_k, t_{k+1}]$ сегментдаги мос $\omega_k(\varphi)$ ва $\omega_k(\psi)$ тебранишлари $\frac{\varepsilon}{8n}$ дан кичик бўлсин. $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функциялар узлуксиз бўлганлиги учун бундай $\delta > 0$ соннинг доимо топилиши равшан.

S бўлиниш нуқталар системасига мос келган синиқ чизиқнинг периметрини P орқали белгилаймиз. Агар S_0 ва S системаларни бирлаштириб, ҳосил бўлган S' нуқталар системаси билан $[t_0, T]$ сегментни бўлакчаларга бўлсак ва бу бўлинишга мос келган синиқ чизиқнинг периметрини P' орқали белгиласак, $P' \geqslant P$ бўлади. Чунки янги бўлиниш нуқталари қўшилиши натижасида синиқ чизиқнинг периметри фақат ортиши мумкин.

Энди шуни назарда тутиш керакки, агар t_k ва t_{k+1} нуқталарнинг орасига бирор янги τ_k нуқта киритилса, у ҳолда синиқ чизиқнинг периметри $C'_k + C''_k$ сондан ортиқ ўзгара олмайди, бу ерда C'_k ва C''_k сонлар мос равишда $M_k(x_k, y_k)$, $M'_k(x'_k, y_k)$ ва $M'_k(x'_k, y'_k)$, $M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$ нуқталарни бирлаштирувчи кесмаларнинг узунликлари ($x'_k = \varphi(\tau_k)$, $y'_k = \psi(\tau_k)$). Аммо

$$C'_k \leqslant ||\varphi(\tau_k)-\varphi(t_k)|+|\psi(\tau_k)-\psi(t_k)|,$$

$$C''_k \leqslant |\varphi(t_{k+1})-\varphi(\tau_k)|+|\psi(t_{k+1})-\psi(\tau_k)|.$$

Булардан

$$C'_k+C''_k \leqslant 2\{\omega_k(\varphi)+\omega_k(\psi)\}$$

муносабат келиб чиқади, бу ерда $\omega_k(\varphi)$ ва $\omega_k(\psi)$ сонлар мос равишда $\varphi(t)$ ва $\psi(t)$ функцияларнинг $[t_k,\ t_{k+1}]$ сегментдаги тебранишлари.

Шундай қилиб, агар t_k ва t_{k+1} бўлиш нуқталари орасига янги нуқта киритилса, у ҳолда синиқ чизиқнинг периметри $2\{\omega_k(\varphi)+\omega_k(\psi)\}$ сондан ортиққа оша олмайди. $[t_0,\ T]$ сегментни S бўлиниш нуқталар системаси билан бўлиш натижасида ихтиёрий k учун

$$\omega_k(\varphi)<\frac{\varepsilon}{8n};\quad \omega_k(\psi)<\frac{\varepsilon}{8n}$$

эканлигини назарда тутиб, бу системага S_0 бўлиниш нуқталар системасини қўшиш натижасида ҳосил бўлган S' бўлиниш нуқталар системасига мос келган синиқ чизиқ P' периметри S бўлиниш нуқталар системасига мос келган синиқ чизиқнинг P периметридан

$$n\cdot 2\left(\frac{\varepsilon}{8n}+\frac{\varepsilon}{8n}\right)=\frac{\varepsilon}{2}$$

сондан ортиққа оша олмаслигига эга бўламиз, яъни

$$P'<P+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Демак,

$$P\leqslant P'<P+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Бундан ҳамда (2) тенгсизликлардан

$$L-\frac{\varepsilon}{2}<P+\frac{\varepsilon}{2}$$

ёки

$$L-\varepsilon<P. \tag{3}$$

(1) ва (3) тенгсизликлардан

$$L-\varepsilon<P<L.$$

Шундай қилиб, ҳар қандай $\varepsilon>0$ сон учун шундай $\delta>0$ сон топиладики, $|\Delta t_k|<\delta$ бўлганда $|L-P|<\varepsilon$, яъни $\lim\limits_{\Delta t\to 0} P=L.$ Бу эса берилган чизиқнинг тўғриланувчи эканини кўрсатади.$_*$

63- §. Квадратланувчи ва кубланувчи соҳалар. Тўпламнинг Жордан маъносидаги ўлчови

Текисликда содда ёпиқ C контур берилган бўлсин. C контурнинг ичида ётган соҳани A билан белгилаймиз. Энди A соҳа ичида ётувчи ихтиёрий кўпбурчакли соҳанинг юзини q билан, A соҳани ўз ичига олган ихтиёрий кўпбурчакли соҳанинг юзини эса q' билан белгилаймиз. Бундай кўпбурчакли соҳаларни чексиз кўп усуллар билан тузиш мумкин, шунинг учун q ва q' лар чексиз кўп турли қийматларни қабул қилади. Равшанки, $\{q\}$ тўплам юқоридан чегараланган, шунинг учун бу тўплам аниқ юқори Q чегарага эга. Шунингдек, $\{q'\}$ тўплам қуйидан чегараланган, шунинг учун у ҳам аниқ қуйи Q' чегарага эга. q ва q' сонларнинг олинишига асосан доимо $q \leqslant q'$ бўлгани учун $Q \leqslant Q'$ бўлади. Агар Q ва Q' лар тенг бўлса, уларнинг $P = Q = Q'$ қиймати A соҳанинг *юзи* дейилади. Бу ҳолда A соҳани *квадратланувчи соҳа* дейилади, бу сўз билан соҳанинг юзи P га тенг бўлган квадрат билан солиштириш мумкинлиги қайд қилиб ўтилади. Агар A соҳа учун $Q < Q'$ тенгсизлик ўринли бўлса, A соҳанинг юзи тўғрисида гапириш маънога эга эмас. Бу ҳолда A соҳа баъзи бир маънода Q ва Q' сонлар билан аниқланади. Шунинг учун Q сонни A соҳанинг *ички юзи*, Q' сонни эса A соҳанинг *ташқи юзи* дейилади.

Уч ўлчовли фазодаги соҳаларни ўлчаш масаласи ҳам шунга ўхшаш ҳал қилинади: A соҳада ётувчи барча кўпёқли соҳа ҳажмларининг аниқ юқори чегараси A соҳанинг *ички ҳажми*, A соҳани ўз ичига олувчи барча кўпёқли соҳа ҳажмларининг аниқ қуйи чегараси A соҳанинг *ташқи ҳажми* дейилади. Агар A соҳанинг ички ҳажми ташқи ҳажмига тенг бўлса, бу соҳа *кубланувчи соҳа* дейилади.

Энди тўғри чизиқдаги тўпламлар билан шуғулланамиз.

Тўғри чизиқдаги тўпламларнинг ўлчовини турлича киритиш мумкин. Жордан тўғри чизиқдаги тўпламнинг ўлчовини қуйидагича беради: $[a, b]$ сегментда бирор E тўплам берилган бўлсин. $[a, b]$ сегментни

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

нуқталар билан элементар сегментларга бўламиз:

$$\alpha_k = [x_k, x_{k+1}], \; (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

E тўпламга тегишли барча α_k сегментларнинг узунлигини S билан, E тўпламнинг камида битта нуқтасини ўз ичига олган барча α_k сегментларнинг узунлигини эса S' билан белгилаймиз. $[a, b]$ сегментни чексиз усул билан сегментларга бўлиш мумкинлигидан S ва S' ларнинг чексиз турли қийматлар қабул қилиши келиб чиқади. S нинг қийматлари тўплами $\{S\}$ юқоридан чегараланганлиги сабабли аниқ юқори чегарага эга, S' нинг қийматлари тўплами $\{S'\}$ қуйидан чегараланганлиги сабабли аниқ қуйи чегарага эга. S ва S' сонларнинг олинишига асосан доимо $S \leqslant S'$ бўлишидан $\{S\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси $\{S'\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегарасидан катта эмас. Агар бу аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралар бир-бирига тенг бўлса, E тўплам *Жордан маъносида ўлчовли* дейилади. Агар аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралар тенг бўлмаса, E нинг ўлчови тўғрисида гапириш маънога эга эмас. Бу ҳолда E тўплам *ўлчовсиз* ва $\{S\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегарасини E тўпламнинг *ички ўлчови* ва $\{S'\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегарасини E тўпламнинг *ташқи ўлчови* дейилади.

Бу таърифлардан илгариги параграфда киритилган юзларни ва ҳажмларни ўлчаш билан Жордан маъносида тўғри чизиқдаги тўпламларни ўлчашнинг моҳиятлари бир хил эканлиги кўринади.

64-§. Ҳақиқий сонларни p ли касрларга ёйиш

Кўп масалаларда ҳақиқий сонларни ўнли касрларга, иккили ва учли касрларга, умуман, p ли касрларга ёйишдан фойдаланилади. Тўлалик учун бу параграфда шу масала билан шуғулланамиз.

Аввал ҳақиқий сонларни чексиз ўнли каср шаклида ёзиш мумкинлигини кўрсатамиз. Агар x ҳақиқий сон бўлиб, бутун n сонга тенг бўлса, у ҳолда уни ушбу

$$x = n,000\ldots$$

кўринишда ёзамиз. Агар x бутун сон бўлмаса, у ҳолда x сон бирор n ва $n+1$ бутун сонлар орасида бўлади, яъни $n<x<n+1$. Энди $[n, n+1]$ сегментни узунлиги бир-бирига тенг бўлган 10 та сегментга бўламиз:

$$\Delta_0 = \left[n,\ n+\frac{1}{10}\right],\quad \Delta_1 = \left[n+\frac{1}{10},\ n+\frac{2}{10}\right], \ldots,$$

$$\Delta_9 = \left[n+\frac{9}{10},\ n+1\right].$$

x ни $n+\frac{m}{10^p}$ (m, p — натурал сонлар) кўринишидаги сон эмас, деб фараз қилсак, x сон Δ_i $(i = 0, 1\ \ldots, 9)$ сегментларнинг биридагина жойлашган бўлади, чунки акс ҳолда $x \in \Delta_i$, $x \in \Delta_{i+1}$ муносабатлар ўринли ва $x = n + \frac{i+1}{10}$ кўринишда бўлиб, бу эса фаразимизга зид. Бинобарин, $x \in \Delta_{i_1}$ $(i_1 = 0, 1, \ldots, 9)$ бўлсин; i_1 ни x нинг *биринчи рақами* дейилади. $\Delta i_1 = \left[n + \frac{i_1}{10}, n + \frac{i_1 + 1}{10}\right]$ сегментни яна узунлиги бир-бирига тенг 10 та сегментга бўламиз:

$$\Delta_{i_1 0} = \left[n + \frac{i_1}{10},\ n + \frac{i_1}{10} + \frac{1}{10^2}\right],$$

$$\Delta_{i_1 1} = \left[n + \frac{i_1}{10} + \frac{1}{10^2},\ n + \frac{i_1}{19} + \frac{2}{10^2}\right],$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\Delta_{i_1 9} = \left[n + \frac{i_1}{10} + \frac{9}{10^2},\ n + \frac{i_1 + 1}{10}\right].$$

Юқоридаги x сон $n + \frac{m}{10^p}$ кўринишдаги сон эмас деб қилган фаразимизга мувофиқ y сон бу сегментларнинг биридагина ётади, x сон жойлашган сегмент $\Delta_{i_1 i_2}$ $(i_2 = 0, 1, \ldots, 9)$ бўлсин. i_2 ни x нинг *иккинчи ўнли рақами* дейилади. $\Delta_{i_1 i_2}$ сегментни яна узунлиги бир-бирига тенг 10 та сегментга бўлиб, x ни ўз ичига олган биргина сегментни $\Delta_{i_1 i_2 i_3}$ $(i_3 = 0, 1, \ldots, 9)$ билан белгиласак, x нинг *учинчи ўнли рақамини* аниқлаган бўламиз. Бу амални юқоридаги фаразимизга асосланиб, чексиз давом эттиришимиз мумкин. Натижада

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n, \ldots$$

сонлар кетма-кетлиги ҳосил бўлади ва бу сонларнинг ҳар бири ёки 0, ёки 1, ёки 2, ..., ёки 9 га тенг бўлади. i_k сонни x соннинг *k- ўнли рақами* дейилади ва x сон

$$x = n,\ i_1 i_2 \ldots i_k \ldots$$

кўринишда ёзилади. Демак, юқоридаги фаразимиз бажарилганда ҳар қандай ҳақиқий x сонни чексиз ўнли каср кўринишида ёзишимиз мумкин. Энди ҳақиқий x сон, $n + \frac{m}{10^p}$ кўринишида бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда x

$$x = n + \frac{i_1}{10} + \frac{i_2}{10^2} + \ldots + \frac{i_p}{10^p}$$

чекли ўнли каср шаклида ёзилади ва бунда

$$0 \leqslant i_k \leqslant 9 \ (k = 1,2, \ \ldots, p).$$

Бу ҳол учун юқоридаги амалларни бажарсак, x

$$\left[n, n+1\right], \ \left[n + \frac{i_1}{10}, \ n + \frac{i_1+1}{10}\right],$$

$$\left[n + \frac{i_1}{10} + \frac{i_2}{10^2}, \ n + \frac{i_1}{10} + \frac{i_2+1}{10^2}\right], \ldots,$$

$$\ldots, \left[n + \frac{i_1}{10} + \frac{i_2}{10^2} + \ldots + \frac{i_{p-1}}{10^{p-1}}, \ n + \frac{i_1}{10} + \frac{i_2}{10} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{i_{p-1}+1}{10^{p-1}}\right]$$

сегментларнинг ҳар бирининг ичида жойлашган бўлади.

Лекин бу сегментлардан сўнггисини яна узунлиги бир-бирига тенг 10 та қисмга бўлсак, у ҳолда x ушбу $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} (i_p - 1)}$ сегментнинг ўнг охири ва $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} i_p}$ сегментнинг чап охири бўлиб қолади, яъни x бўлиниш нуқталардан бири бўлади. Бу ҳолда x нинг p ўнли рақами бир қийматга эга эмас, балки икки $(i_p - 1)$ ва i_p қийматга эга бўлади ва бу ҳол $p+1$, $p+2$ ва ҳоказо ўнли рақамлар учун хам ўринли бўлади.

Шунга мувофиқ x сон $\Delta_{i_1 \ldots i_{p-1} (i_p - 1)}$ сегментнинг ўнг охири бўлса, у

$$x = n, \ i_1 i_2 \ \ldots \ i_{p-1} (i_p - 1) 999 \ \ldots$$

кўринишда ва x сон $\Delta_{i_1 \ldots i_p}$ сегментнинг чап охири бўлса, у

$$x = n, i_1 i_2 \ \ldots \ i_{p-1} \ i_p 000 \ldots$$

кўринишда ёзилади. Бу эса арифметикадан маълум, яъни ҳар қандай $n + \frac{m}{10^p}$ кўринишдаги оддий касрни икки кўринишда ёзиш мумкин (масалан, 0,124999 ... = 0,125000 . . .).

Демак, ҳар қандай ҳақиқий $x (\neq n + \frac{m}{10^p})$ сон биргина

$$x = n, i_1 i_2 \ldots i_p \ldots = n + \frac{i_1}{10} + \frac{i_2}{10} + \ldots + \frac{i_p}{10^p} + \ldots$$

чексиз ўнли каср кўринишида ёзилиши мумкин; агар $x = n + \frac{m}{10^p}$ бўлса, у ҳолда x ни ушбу икки кўринишда ёзиш мумкин:

$$x = n, \ i_1 i_2 \ldots \ i_{p-1} (i_p - 1) 999 \ \ldots = n, \ i_1 i_2 \ \ldots \ i_{p-1} i_p 000 \ldots$$

Энди, аксинча ҳар бир чексиз ўнли каср учун биргина ҳақиқий сон мос келишини кўрсатамиз.

Ушбу

$$n, j_1 j_2 \ldots j_q \ldots \quad (j_k = 0, 1, \ldots 9, k = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1)$$

чексиз ўнли каср берилган бўлсин. Қуйидаги

$$[n, n+1], \left[n + \frac{j_1}{10}, n + \frac{j_1 + 1}{10}\right], \left[n + \frac{j_1}{10} + \frac{j_2}{10^2}, n + \frac{j_1}{10} + \frac{j_2 + 1}{10^2}\right], \ldots, \left[n + \frac{j_1}{10} + \ldots + \frac{j_q}{10^q}, n + \frac{j_1}{10} + \ldots + \frac{j_q + 1}{10^q}\right] \qquad (2)$$

сегментларни тузамиз.

Математик анализнинг умумий курсидан маълумки, агар $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ сегментлар кетма-кетлиги берилган бўлса ва бу сегментларнинг узунлиги чексиз камайиб нолга интилса, уларнинг катта рақамлиси кичик рақамлисининг ичида жойлашган бўлса (яъни $\Delta_{k-1} \subset \Delta_k$ бўлса), у ҳолда бу сегментларнинг ҳаммасига кирадиган биргина нуқта мавжуддир. (2) сегментлар кетма-кетлиги учун бу шартларнинг бажарилиши бевосита кўриниб турибди. Шунинг учун (2) сегментлар кетма-кетлигининг ҳаммасига кирадиган биргина нуқта мавжуддир; бу нуқтани x билан белгилаймиз.

Энди x ни чексиз ўнли каср шаклида ёзамиз. Агар рақамларнинг ҳаммаси бирор номердан бошлаб ё 0, ёки 9 га тенг бўлмаса, у ҳолда x биргина усул билан (1) кўринишда ёзилади. Агар $j_p = j_{p+1} = \ldots = 0$ (ёки 9) бўлса, у ҳолда $x = n + \frac{m}{10^p}$ бўлади, яъни x чекли ўнли каср бўлади. Ҳар сафар бу ҳолни ажратмаслик учун чекли ўнли касрнинг икки кўринишидан доимо бирини қабул қилиш мумкин эди.

Юқоридаги мулоҳазаларни баён этишда $(n, n+1]$ сегментни ҳар сафар тенг ўн қисмга бўлмай, тенг 2, ёки тенг 3, ёки тенг p (p — натурал сон) қисмларга бўлса, x ни чексиз иккили, чексиз учли, чексиз p ли касрлар кўринишида ёзишимиз мумкин. Кўп ҳолларда ҳақиқий сонларни чексиз иккили каср кўринишида ёзишдан фойдаланилади.

АДАБИЕТ

1. П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию. «Наука», М., 1977.
2. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», М., 1976.
3. П. Халмош. Теория меры. ИЛ, М., 1953.
4. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. «Наука», М., 1974.
5. В. И. Соболев. Лекции по дополнительным главам математического анализа. «Наука», М., 1968.
6. Г. Е. Шилов. Математический анализ (специальный курс). Физматгиз, М., 1960.
7. Г. Е. Шилов, Б. А. Гуревич. Интеграл, мера и производная. «Наука», М., 1976.
8. Ю. С. Очан. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. «Просвещение», М., 1965.
9. А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа, «Наука», М., 1979.
10. Г. П. Толстов. Мера и интеграл, «Наука», М., 1976.
11. С. А. Теляковский. Сборник задач по теории функций действительного переменного. «Наука», М., 1980.
12. У. Рудин. Основы математического анализа, «Мир», М., 1966.

Ташмухаммад Алиевич САРЫМСАКОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебник для университетов и пединститутов

Издание третье

На узбекском языке

Издательство «Ўзбекистон» — 1993,
700129, Ташкент, Навои, 30

Муҳаррирлар: *И. Аҳмаджонов, Ў. Ҳусанов*
Кичик муҳаррир *Ш. Соибназарова*
Расмлар муҳаррири *А. Деҳқонхўжаев*
Техн. муҳаррирлар *А. Бахтиёров, Т. Горшкова*
Мусаҳҳиҳлар: *Ў. Абдуқодирова, М. Раҳимбекова*

Теришга берилди 7.09.92. Босишга рухсат этилди 29.07.93. Бичими $84 \times 108^{1}/_{32}$. № 2 босма қоғозига Литературная гарнитурада юқори босма усулида босилди. 18.06 шартли босма табоқ 18.19 нашр табоқ 3000 нусха. № 418- рақамли буюртма.
Баҳоси шартнома асосида

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30. Нашр № 135—92.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитаси ижарадаги Тошкент матбаа комбинатида босилди. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.

Саримсоқов Т. А.

С 32 Ҳақиқий ўзгарувчининг функциялари назарияси: Дорилфунунларнинг ва пед. олийгоҳларининг математика ва физ.-мат. куллиётлари талабалари учун дарслик / (Махсус муҳаррир О. Хаитов).— 3-нашри.— Т.: Ўзбекистон, 1993.—340 б.

ISBN 5-640-01237-3

Сарымсаков Т. А. Теория функции действительного переменного: Учебник для университетов и пединститутов.

ББҚ 22.161.5я73

№ 381—93
Навоий номли Ўзбекистон
Республикаси
давлат кутубхонаси.

С $\frac{1609080000-62}{М\ 351(04)\ 93}$ 15—93

„ЎЗБЕКИСТОН"