IX BOB
EHTIMOLLIK NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

1-§. Ehtimollikni hisoblash

1. Ehtimollik nazariyasi nimani o‘rganadi? Kishi moddiy dunyoda ro‘y beradigan hodisalarni kuzatar ekan, ko‘pincha uni shu *hodisa*larning ro‘y berish-bermasligi ham qiziqtiradi. Biz hozircha *natijasini* oldindan aytish mumkin bo‘lgan tabiiy va ishlab chiqarishga oid turli jarayonlar, holatlar va ularning ro‘y berish qonuniyatlari bilan tanishib keldik. Hayotda esa ro‘y berish-bermasligini oldindan aytib bo‘lmaydigan, ya’ni *tasodifan ro‘y beradigan hodisalar*, qisqacha, *tasodifiy hodisalar* ham uchraydi. Lotereya o‘yinida yutuq chiqishi, bir marta otilgan o‘qning nishonga tegishi, tayyorlangan buyum sinalganda standartli bo‘lib chiqishi – eng sodda tasodifiy hodisalar. Shu bilan birga amaliyot nuqtayi nazaridan alohida olingan hodisalar emas, balki yetarlicha ko‘p sonli, *ommaviy xarakterga ega* hodisalarning umumiy qonuniyatlarini o‘rganish muhimroq. Masalan, korxona uchun bitta-ikkita buyum emas, balki ko‘plab tayyorlangan buyumlardan qanchasi yaroqli yoki yaroqsiz bo‘lishini, bir va bir necha urug‘ emas, balki katta maydonlardagi ekinning qancha qismi unib chiqishini bilish muhim.

Yuqorida ko‘rsatilgani kabi aniq shartlar qo‘yilib, sifatini tekshirishlar, sodir bo‘lish-bo‘lmaslikni sinab-hisoblab ko‘rishlar, o‘yin o‘tkazishlar, o‘q otilishi va hokazo qisqacha *tajriba* o‘tkazildi, *sinaldi* deyiladi. Tajriba *natijasi* esa hodisadir. Odatda katta hajmdagi masalalarni yechish kerak bo‘lsa, ma’lum shartlar qo‘yilib, *bir xil* tajriba, sinashlar o‘tkaziladi va ularning natijalari o‘rganiladi. Tajribalar soni mumkin qadar ko‘p bo‘lishi kerak. Shu holdagina topilgan natijalarning *o‘rtacha qiymati* haqiqatga yaqin, ishonchli bo‘ladi.

Uch turkum hodisa ro‘y berishi mumkin: *ishonchli*, ya’ni ro‘y berishi muqarrar, *ro‘y bermaydigan* va *tasodifiy*. Tanga bir marta tashlanganda uning bir tomoni bilan tushishi turgan gap, ishonchli, bir vaqtda ham raqamli, ham gerbli tomoni bilan tushishi mumkin bo‘lmagan, ya’ni ro‘y bermaydigan hodisa, qaysi tomoni bilan tushishini esa oldindan aytib bo‘lmaydi, tasodifan gerbli tomoni bilan tushishi mumkin. Raqamli tomoni bilan tushishi ham — tasodifiy. Fizika kursidan ma'lumki, 760 mm sim. ust. atmosfera bosimi va 100 °C temperaturada (bu shart) suv qaynaydi (hodisa). Lekin aslida suvdagi turli aralashmalar ta'sirida ko'rsatilgan shartlarda qaynash nuqtasining o'zgarib turishi kuzatiladi.

Matematikaning tasodifiy hodisalarni o'rganadigan bo'limi *ehtimollik nazariyasi* deb ataladi. Bu nazariya yetarlicha ko'p sonli sinashlar natijasi, ya'ni ommaviy tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini o'rganish bilan shug'ullanadi.

Ehtimollik nazariyasi alohida soha sifatida XVII asr o'rtalarida vujudga kelgan. Uning rivoj topishiga ko'p olimlarning, jumladan, G. Gyuygens, B. Paskal, Ferma, Yakov Bernulli, Muavr, Laplas, Gauss, Puasson, P. G. Chebishev, A. N. Kolmogorovning ishlari alohida o'rin tutadi. Uning taraqqiyotiga o'zbek olimlaridan S. H. Sirojiddinov (1921—1988), T. A. Azlarov ham o'z hissalarini qo'shgan va qo'shib kelmoqdalar.

Mashqlar

9.1. 1) Ishonchli hodisalarga; 2) mumkin bo'lmagan (ro'y bermasligi aniq) hodisalarga; 3) tasodifiy hodisalarga misollar keltiring.

9.2. Qaysi biri ehtimollikroq — yoqlari tartib bilan 1 dan 6 gacha raqamlar bilan belgilangan o'yin soqqasini (kubchasini) tashlaganda toq sonning tushishimi yoki juft sonnimi?

9.3. Ikkita o'yin kubchasi tashlangan. Nimaning chiqish ehtimolligi kattaroq — ikkalasining ham toq raqamli tarafi bilan tushishimi yoki biri toq, ikkinchisi juft raqam bilan tushishimi?

9.4. Sinash: ikki o'yin kubchasini 50 marta tashlang va har qaysi tashlashda chiqadigan ochkolarni (hollar, raqamlarni) yozib boring. Qaysi ochkolar boshqalariga nisbatan ko'proq, kamroq tushgan? Ikkala kubchaning har safar tushgan ochkolari yig'indisi 4, 0, 12 bo'lgan hollaridan qaysi biri ko'proq sodir bo'lgan?

9.5. Bukilmagan tanga 20 marta tashlansa-da, faqat gerbli tomoni bilan tushgan. Keyingi tashlashda raqamli tomoni bilan tushishi ehtimolga yaqinmi yoki gerbli tomoni bilan tushishimi?

2. Boshlang'ich tushunchalar. Biz geometriya kursida asosiy tushunchalar sifatida nuqta, kesma, tekislik olinishini bilamiz. Ular ta'riflanmay qabul qilinadi. Qolgan tushunchalar shu boshlang‘ich tushunchalar yordamida ta’riflanadi, so‘ng xossalari o‘rganiladi. Shu kabi ehtimollik nazariyasida elementar hodisa, hodisa va ehtimollik — boshlang‘ich tushunchalardir.

Buyum biror shart qo‘yilib bir marta tekshirilganda uning yo yaroqli, yoki yaroqsiz chiqishi, boshqa tur hodisaning *ro‘y bermasligi* ayon bo‘lsin. E_1 — «buyum yaroqli chiqdi», E_2 — «buyum yaroqsiz chiqdi» belgilashlarini kiritaylik. E_1 va E_2 — nazoratda aniqlangan, umuman, shu kabi tajribada ro‘y beradigan ikki *eng sodda*, ya’ni *elementar hodisa,* chunki shu tajriba natijasida ulardan ham soddaroq hodisa ro‘y bermaydi, natija E_1 va E_2 *elementar hodisalar to‘plami*dan iborat. Elementar hodisani *nuqta*, ularning to‘plamini *sinov sxemasi* deb ham ataydilar. Sinov sxemasini to‘la-to‘kis aniqlay olish juda muhim, aks holda hisoblashlarda xatoliklarga yo‘l qo‘yilishi mumkin.

Shunday qilib, *hodisa* — elementar hodisalarning biror shart asosida tuzilgan to‘plami. Agar bu to‘plam bir yoki bir necha (faqat hammasi emas) elementar hodisadan iborat bo‘lsa, u *tasodifiy hodisa*, elementar hodisalarning hammasidan iborat bo‘lsa, u *muqarrar hodisa* (chunki bu holda elementar hodisalardan kamida bittasi ro‘y bergan bo‘ladi), birorta ham elementar hodisaga ega bo‘lmasa, u ishonchsiz, *mumkin bo‘lmagan, ro‘y bermaydigan hodisa* deyiladi. Tasodifiy hodisalarni A, B, C, ..., X, ..., muqarrar hodisani U, mumkin bo‘lmagan hodisani Z harfi bilan belgilaymiz.

Tajriba natijasida har bir hodisaning ro‘y berish imkoni qolgan hodisalarniki bilan bir xil va bunday hodisalar soni chekli bo‘lgan holni *klassik sxema* nomi bilan ataydilar. Bu holda har bir tasodifiy hodisaning ro‘y berishini sonli baholash mumkin. Bu son shu tasodifiy hodisaning ro‘y berish *ehtimolligi* deyiladi. Uni P harfi bilan belgilaymiz.

1-misol. Simmetrik, ya’ni zichligi tekis taqsimlangan kubchaning yoqlari 1 dan 6 gacha raqamlar bilan ketma-ket belgilangan bo‘lsin. Kubcha bir marta tashlanganda E_1 — «1» raqami bilan tushdi», ..., E_6 — «6» raqami bilan tushdi», jami $n = 6$ elementar hodisadan faqat biri tasodifan ro‘y beradi. $n = 6$ — klassik sxema nuqtalari (elementar hodisalar) soni. Nuqtalarning $U = \{E_1, ..., E_6\}$ chekli to‘plamiga ega bo‘lamiz.

3. Ehtimollikni bevosita hisoblash. Tajriba «klassik sxema» shartlari bo‘yicha o‘tkazilayotgan, shu jarayonda ro‘y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni n ta, shu jumladan biror A hodisa m marta ro'y beradigan bo'lsin. U holda A hodisaning ro'y berish ehtimolligi ushbu nisbatga teng bo'ladi:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

bunda $0 \le m \le n$.

1-misol. Kub bir marta tashlanca, u tasodifan faqat bir yog'i bilan tushadi, ikki yog'i bilan emas, ya'ni E_k, $k=\overline{1;\ 6}$ elementar hodisalar juft-jufti bilan birgalikda ro'y bermaydi: $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i, j=\overline{1;\ 6}$, $i \ne j$. Demak, $U = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup$ $\cup E_5 \cup E_6$, ya'ni U to'plam yo E_1, yo E_2, ..., yo E_6 ro'y berishi mumkin bo'lgan jami $n=6$ ta teng imkoniyatli elementar hodisalar to'plamidan iborat. Har qaysi elementar hodisaning ro'y berish ehtimolligi bir xil:

$$P(E_1)=P(E_2)=...=P(E_1)=\frac{1}{6}.$$

2-misol. O'yin kubi bir marta tashlanganda juft yoki toq raqam bilan tushish hodisalari qaraladigan bo'lsa, B – «juft raqamli tomoni bilan tushdi», C – «toq raqamli tomoni bilan tushdi» hodisalari qaraladi. Ular kubning olti yog'ini to'liq o'z ichiga oladi. Demak, $n = 2$ ta elementar hodisa ro'y beradi. Ularning ro'y berish imkoniyati bir xil, chunki 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlarining yarmi toq, yarmi juft. Natijalar to'plami $U = \{B,\ C\}$, $n = 1,\ 2$. Har qaysi hodisaning ro'y berish ehtimolligi bir xil: $P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$.

3-misol. Natijada D – «tushgan raqamlar 3 dan kichik yoki 3 ga teng», E – «tushgan raqamlar 4 ga teng yoki undan katta» hodisalari kubning barcha yoqlarini o'z ichiga oladi. Demak, D va E ham elementar hodisalar, birgalikda U chekli to'plamni tashkil etadi: $U = \{D,\ E\}$, $P(D)=P(E)=\frac{1}{2}$.

4-misol. $\{E_5,\ E_6\}$ to'plam (1-misol) 6 marta o'tkazilgan sinashlar ketma-ketligi uchun barcha natijalar to'plami bo'la olmaydi, chunki bu to'plamga sinashda ro'y berishi mumkin bo'lgan E_1, E_2, E_3, E_4 natijalar tegishli emas.

Ko'p marta takrorlangan sinashlarda har qaysi natija biror son marta takror ro'y bera boshlashi kuzatiladi. Bu holat har qaysi natija ehtimolligini sonli ifodalash uchun «o'lchov birligi» kiritishga imkon beradi. Shu maqsadda qaralayotgan sinashda ro'y beradigan barcha natijalarning ro‘y berish ehtimolliklari *yig‘indisi 1 ga teng*, deb olinadi, u holda har qaysi X_k natijaga uning ro‘y berish ehtimolligini ifodalovchi biror nomanfiy $P(X_k) = p_k$ $(0 \le r_k \le$ $\le 1,\ k = \overline{1,\ n})$ son mos keladi. Shart bo‘yicha: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

Ko‘rsatilgan shartlarda *birgalikda ro‘y bermaydigan n* ta X_1, ..., X_n natijalardan (elementar hodisalardan) har biri bir xil $p = \frac{1}{n}$ ga teng ehtimollikka ega bo‘lsin. Agar jami M marta o‘tkazilgan sinashda X_k natija m_k marta ro‘y bergan bo‘lsa, uning p_k ehtimolligi qiymati uchun X_k elementar hodisa ro‘y bergan hollarning *nisbiy takrorligi (chastotasi)*, ya’ni $p = \frac{m_k}{M}$ qabul qilinadi. Ehtimollikni bunday hisoblash tartibi ehtimollik tushunchasiga *statistik yondoshish* bo‘ladi. Masalan, nishonga otilgan $M = 200$ ta o‘qdan $m = 150$ tasi nishonga tekkan bo‘lsa, o‘qning nishonga tegish ehtimolligi $p = \frac{150}{200} = 0{,}75$ ga teng bo‘ladi.

5 - m i s o l. Ikkita tanga tashlansa, ushbu natijalardan biri ro‘y berishi mumkin: $A_{2,0}$ – «Ikkala tanga gerb tomoni bilan tushdi», $A_{1,1}$ – «Tangalardan biri gerbli tomoni, ikkinchisi raqamli tomoni bilan tushdi», $A_{0,2}$ – «Ikkala tanga raqamli tomoni bilan tushdi». GG – «Gerb–gerb tushdi», GR – «Gerb–raqam tushdi», RG – «Raqam–gerb tushdi», RR – «Raqam-raqam tushdi» natijalarni ham qaraylik. Misol shartlarida GG, GR, RG, RR natijalar bir xil $\frac{1}{4}$ ga teng ehtimollikka ega. $A_{2,0}$ natija GG bilan, $A_{0,2}$ natija RR bilan bir xil, lekin $A_{1,1}$ natijaga GR va RG natijalar mos. Ularning ro‘y berish ehtimolliklari $P(A_{2,0}) = P(A_{0,2}) = \frac{1}{4}$, $P(A_{1,1}) = \frac{1}{2}$, ularning yig‘indisi $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Demak, bu hodisalar chekli to‘plamni tashkil etadi.

Mashqlar

9.6. Quyida keltirilgan sinashlarda qanday elementar hodisalar ro‘y berishini ayting va natijalar to‘plamlarini tuzing:

1) nishon 10 ta ichma-ich joylashgan doiradan iborat bo‘lib, ular 1, 2, 3, ..., 10 sonlari bilan raqamlangan. Nishonga qarata o‘q uzildi;

2) ikki jamoa o‘rtasida voleybol o‘yini o‘tkaziladi;

3) domino donalaridan bittasi tavakkaliga olindi;

4) tanga 10 marta tashlanadi.

9.7. 20 ta bir xil sharcha 1,2, ..., 20 sonlari bilan raqamlanib, xaltaga solingan.Tavakkaliga bitta sharcha olinadi. Quyidagi yozuvlardan qaysi biri natijalar to‘plamini ifodalaydi va nima uchun?

1) juft son chiqdi, toq son chiqdi;

2) juft son chiqdi, 8 ga bo‘linuvchi son chiqdi;

3) toq son chiqdi, 8 ga bo‘linadigan son chiqdi;

4) olingan son 8 dan katta emas, olingan son 9 dan kichik emas.

9.8. Tangani 10 marta tashlashdan iborat sinashda ro‘y berishi mumkin bo‘ladigan barcha natijalar to‘plamini quyidagilar bo‘yicha tuzing: 1) har bir tashlash natijasi; 2) gerb tomoni bilan tushishlar soni; 3) tanga qaysi tomoni bilan ko‘proq tushgani.

9.9. Quyidagi misollarning qaysi birida ro‘y berishi mumkin bo‘lgan natijalar to‘liq ko‘rsatilgan? 1) molni sotishdan foyda, zarar; 2) basketbol o‘yinida yutish, yutqazish; 3) tanga uch marta tashlanganda GGG, GGR, GRR, RRG, RRR, RGR ning tushishi (bunda G – gerb tomoni bilan tushish, R – raqamli tomoni bilan tushishi).

9.10. Qutida 4 ta oq va 6 ta qora shar bor. Undan tavakkaliga 2 shar olinadi. «Olingan sharlarning ikkalasi ham oq», «olingan sharlarning ikkalasi ham qora» hodisalari natijalar to‘la to‘plamini tashkil qiladimi? Agar shunday bo‘lmasa, bu ikki hodisaga yana qanday hodisa qo‘shilsa, natijalarning to‘liq to‘plami hosil bo‘ladi?

9.11. Nishonga qarata to‘rt marta o‘q otilgan. Quyidagi hodisalar natijalar to‘plamini tashkil etadimi: «o‘qlardan birortasi ham tegmadi», «bitta o‘q tegdi», «birorta ham o‘q xato otilmadi», «kamida bitta o‘q tegdi»?

9.12. Uch natijali sinashga misol keltiring.

9.13. Quyidagi tasodifiy hodisalar qancha nuqtaga (elementar hodisaga) egaligini ayting: 1) tavakkaliga olingan ikkita bir xonali sonning yig‘indisi 10 ga teng; 2) ularning ko‘paytmasi 64 ga teng.

9.14. Shunday sinashga misol keltiringki, unda uch elementar hodisadan biri sinash natijasida albatta ro‘y beradigan bo‘lsin.

9.15. Bukilgan tanganing raqamli tomoni bilan tushish ehtimolligi gerbli tomoni bilan tushish ehtimolligidan 5 marta katta. Bu ehtimollik nimaga teng?

9.16. Yashikda 7 ta oq va 15 ta qora shar bor. Tavakkaliga olingan bitta sharning qora shar bo'lish ehtimolligini toping.

9.17. Quyidagi jadval elementar hodisalar chekli to'plamini beradimi?

Natija	x_1	x_2	x_3	x_4
Ehtimollik	0,24	0,39	0,26	0,21

9.18. Natijalar to'plami quyidagi jadval bilan berilgan:

Natija	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ehtimollik	0,15	0,3	0,15	0,22	0,18

x_2 natija x_1 natijaga nisbatan necha marta ehtimolliroq?

4. Hodisalar algebrasi. Agar elementar hodisalar ehtimolliklari ma'lum bo'lsa, ro'y berishi mumkin bo'lgan turli natijalar, ularning birlashmasi va ko'paytmasi ehtimolligini topish mumkin.

X va Y hodisalarning *birlashmasi (yig'indisi)* deb, shu hodisalarning kamida bittasiga qulaylik tug'diruvchi barcha natijalardan iborat hodisaga aytiladi, uni $X \cup Y$ orqali belgilaymiz.

X va Y hodisalar *kesishmasi (ko'paytmasi)* deb shu hodisalarning ikkalasiga ham bir vaqtda qulaylik tug'diruvchi barcha natijalardan iborat hodisaga aytiladi, uni $X \cap Y$ orqali belgilaymiz.

1-misol. A — «qizil shar chiqdi», B — «oq shar chiqdi» hodisalarining birlashmasi (yig'indisi) $A \cup B$ — «qizil yoki oq shar chiqdi», kesishmasi (ko'paytmasi) $A \cap B$ — «ham oq shar, ham qizil shar chiqdi» hodisalari bo'ladi. Shu kabi $A = \{a, b, c, d\}$ *va* $B = \{b, d, f\}$ uchun $A \cup B = \{a, b, c, d, f\}$ va $A \cap B = \{b, d\}$ bo'ladi.

X va Y hodisalar *ayirmasi* deb, X hodisaga qulaylik tug'diruvchi, lekin Y hodisaga qulaylik tug'dirmaydigan barcha natijalardan iborat hodisaga aytiladi va u $C = X \setminus Y$ orqali belgilanadi.

Agar X va Y hodisalar birgalikda ro'y bermasa, $X \cap Y = \varnothing$ bo'ladi. Agar n ta hodisadan iborat $\{X_1, ..., X_n\}$ to'plamda ixtiyoriy ikki hodisa birgalikda ro'y bermasa, bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmaydigan (kesishmaydigan), *bog'liqmas* deyiladi. Masalan, «komanda yutdi», «komanda yutqazdi», «komanda durang qildi» hodisalari juft-jufti bilan birgalikda ro'y bermaydi.

Juft-jufti bilan birgalikda bo'lmaydigan $X_1, X_2, ..., X_n$ hodisalar birlashmasi natijalarning U to'liq to'plamini tashkil etsin. Bu holda U to‘plamni X_1, ..., X_n hodisalarning juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to‘plamlariga ajratish mumkin.

X hodisa ro‘y bermaganidagina ro‘y beradigan hodisa X ga *qarama-qarshi* hodisa deyiladi va $\overline{X}$ («X emas») orqali belgilanadi. Masalan, X – «juft sonli ochko tushdi» va $\overline{X}$ – «toq sonli ochko tushdi» hodisalari qarama-qarshi hodisalardir.

Agar X hodisa uchun qulaylik tug‘diruvchi har qanday natija Y hodisa uchun ham qulaylik tug‘dirsa, Y hodisa X hodisaning *natijasi* deyiladi. Masalan, uchta kubcha tashlanganda «juft ochkolar chiqdi» hodisasi 2, 4, 6 raqamli tomonlari bilan tushganligining natijasidir.

Mashqlar

9.19. Quyidagi tengliklar A va B hodisalarga nisbatan qanday shartlar qo‘yilsa to‘g‘ri bo‘ladi?

1) $B=(A\cup B)\setminus A$; 2) $A\cup(C\setminus B)=(A\cup C)\setminus B$;

3) $B\setminus A=B$; 4) $A\setminus B=\varnothing$; 5) $A\setminus B=B$.

Javoblarni rasmlarda tushuntiring.

9.20. Agar $A\cup B = C$ bo‘lsa, $B = C\setminus A$ bo‘ladi. Shu ta’kid to‘g‘rimi?

9.21. Isbotlang: agar $B\subset A$ bo‘lsa, $B = A\setminus(A\setminus B)$ bo‘ladi.

9.22. Yozuvlarning ma’nosini tushuntiring:

1) $\bigcup\limits_{i=3}^{8} A_i$; 2) $\bigcap\limits_{j=2}^{8} A_j$; 3) $\bigcup\limits_{k=1}^{4} A_{3k+1}$; 4) $\bigcap\limits_{k=1}^{6} A_{2k-1}$.

9.23. Hodisalar ifodasini qisqaroq yozing:

1) $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{60}$; 2) $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{50}$;

3) $A_4\cup A_7\cup\ldots\cup A_{55}$; 4) $A_1\cap A_3\cap\ldots\cap A_{107.}$

9.24. Ikkita o‘yin kubi tashlanib, quyidagi hodisalar qaralgan: A – «birinchi kub juft raqamli tomoni bilan tushdi», B – «birinchi kub toq raqamli tomoni bilan tushdi», C – «ikkinchi kub juft raqamli tomoni bilan tushdi», D – «ikkinchi kub toq raqamli tomoni bilan tushdi», M – «hech bo‘lmasa bittasi juft raqamli tomoni bilan tushdi», F – «hech bo‘lmasa bittasi toq raqamli tomoni bilan tushdi», G – «bittasi juft va bittasi toq raqamli tomoni bilan tushdi», N — «birortasi ham juft raqamli tomoni bilan tushmadi», K — «ikkalasi ham juft raqamli tomoni bilan tushdi». Bu hodisalar ushbu hodisalarning qaysi biriga teng?

1) $A \cup C$; 2) $A \cap C$; 3) $M \cap F$; 4) $G \cup M$;

5) $G \cap M$; 6) $B \cap D$; 7) $M \cup K$.

9.25. Kub uch marta tashlangan. A_k — «k raqamli tomoni bilan tushdi», bunda $k = \overline{1;\ 6}$, hodisasi bo'lsin. A_k va $\overline{A}_k$ hodisalar ustida $\cup$ va $\cap$ belgilardan foydalanib, quyidagi amallarni yozing: A — «uch marta «2» chiqqan», B — «uch marta ham «2» chiqmagan», C — «hech bo'lmasa «2» chiqqan», D — «hech bo'lmasa «2» bo'lmagan», M — «kamida «2» chiqqan», F — «ko'pi bilan «2» chiqqan».

9.26. Besh turdagi mikrobning ayni bir xil eritmada halok bo'lish-bo'lmasligi kuzatilgan. Kuzatuvchini quyidagi hodisalar qiziqtirgan: A — «bir turdagi mikrob halok bo'ldi», B — «hech bo'lmasa bitta turdagi mikrob halok bo'ldi», C — «kamida ikkita turdagi mikrob halok bo'ldi», D — «rosa ikkita turdagi mikrob halok bo'ldi», M — «rosa uchta turdagi mikrob halok bo'ldi», F — «besh turdagi mikrobning hammasi halok bo'ldi». Quyidagi 1—7-hodisalar nimadan iborat, 8—9-tengliklar to'g'rimi? Javoblarni so'z bilan yozing.

1) $\overline{F}$; 2) $A \cup B$; 3) $A \cap B$; 4) $A \cup C$; 5) $B \cap C$;

6) $(D \cup M) \cup F$; 7) $B \cap F$; 8) $B \cap F = C \cap F$; 9) $B \cap C = D$.

9.27. Quyida ko'rsatilgan hodisalarga qarama-qarshi hodisalarni toping:

1) ikki kub tashlangan, A — «ikkita «6» tushdi»;

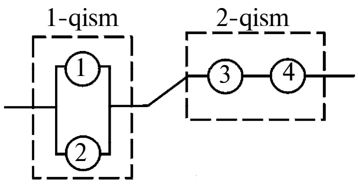
2) ichida 2 ta oq, 2 ta qizil va 1 ta ko'k shar bo'lgan qutidan tavakkaliga bir shar olinsa, B — «oq shar chiqdi»;

3) nishonga qaratib uch marta o'q otilsa, C — «uchalasi ham tegdi»; D — «hech bo'lmasa bitta o'q tegdi»; M — «ko'pi bilan ikki o'q tegdi»;

4) shaxmat bo'yicha Murodov—Rahimov o'yinida F — «Murodovning yutishi».

9.28. Elektr zanjiri ikki qismdan iborat (IX.1-rasm). 1-qism ikkita bir xil elementdan iborat bo'lib, ulardan hech bo'lmaganda bittasi yaroqli bo'lsa, ishlaydi. 2-qism ham ikkita bir xil elementdan iborat, lekin ularning ikkalasi ham yaroqli bo'lsa, ishlaydi. Zanjirdan tok o'tishi uchun ikkala qism ishlab turishi kerak. A_k —

«1-qismning k- elementi yaroqli» ($k=\overline{1;\ 2}$). B_n — «2-qismning n- elementi yaroqli», $n=(\overline{1;\ 2})$. Quyidagi hodisalarni $\bar{A}_k$, $\bar{B}_n$ hodisalar orqali ifodalang: K — «1-qism ishlayapti», L — «2-qism ishlayapti», M — «1-qism ishlamayapti», N — «2-qism ishlamayapti».



IX.1-rasm.

9.29. A — «tavakkaliga olingan shar — oq shar», B — «tavakkaliga olingan shar — qora shar», C — «tavakkaliga olingan shar — ko'k shar» hodisalarini qaraymiz. Quyidagi hodisalar nimadan iboratligini so'z bilan yozing:

1) $A\cup B$; 2) $\overline{A\cup B}$; 3) $A\cup C$; 4) $A\cup B\cup C$.

9.30. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda. A — «birinchi mergan nishonga tekkizdi», B — «ikkinchi mergan nishonga tekkizdi» hodisasi bo'lsa, quyidagi hodisalar nimadan iborat ekanligini so'z bilan yozing:

1) $A\cup B$; 2) $\overline{A\cup B}$; 3) $A\cap C$; 4) $\overline{A\cap B}$.

5. Hodisalar yig'indisining ehtimolligi.

1-misol. 50 ta sharcha 1 dan 50 gacha raqamlanib, xaltachaga solingan. Tavakkaliga olingan sharcha nomerining 3 ga yoki 19 ga karrali bo'lish ehtimolligini topamiz.

Yechish. A — «olingan sharchaning nomeri 3 ga karrali», B — «olingan sharchaning nomeri 19 ga karrali» hodisalari bo'lsin. Biz $A\cup B$ hodisaning ro'y berish ehtimolini topishimiz kerak. 50 gacha bo'lgan sonlar orasida 3 ga bo'linuvchilar 16 ta, 19 ga bo'linuvchilar 2 ta. A va B hodisalar birgalikda ro'y bermaydi, ya'ni $A\cap B=\varnothing$. Shunday qilib, jami 50 ta sondan $16+2=18$ tasi yo 3 ga, yoki 19 ga bo'linadi. Demak, $P(A\cup B)=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$. A va B hodisalarning ro'y berish ehtimolliklari esa $P(A)=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$, $P(A)=\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$. Xulosa: agar $A\cap B=\varnothing$ bo'lsa, $P(A\cup B)=P(A)+$ $+P(B)$ bo'ladi. Umuman, quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. *Birgalikda ro'y bermaydigan A va B hodisalar $A\cup B$ yig'indisining ehtimolligi shu hodisalar ehtimolliklarining yig'indisiga teng:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ bunda } A \cap B = \varnothing. \qquad (1)$$

I s b o t . Sinash jarayonida A hodisa uchun $a_1, \ldots, a_m$ natijalar, B uchun $b_1, \ldots, b_n$ natijalar qulaylik tug'dirsin. A va B birgalikda ro'y bermaganligidan bu natijalarning hammasi $A \cup B$ hodisa uchun qulaylik tug'diradi va ular orasida takrorlanadiganlari yo'q. Bu natijalarning ehtimolliklarini mos tartibda $p_1, \ldots, p_m$ va $q_1, \ldots, q_n$ orqali belgilaylik. $A \cup B$ hodisaning ehtimolligi $m+n$ ta natijaning ehtimolliklari yig'indisiga teng, ya'ni $P(A \cup B) = p_1 + \ldots + p_m + q_1 + \ldots + q_n$ bo'ladi. Lekin $p_1 + \ldots + p_m = P(A)$, $q_1 + \ldots + q_n = P(B)$. Demak,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2 - m i s o l . Mergan nishonga qarata o'q uzdi. Uning «10» likni urish ehtimolligi 0,2 ga, «9» likni urish ehtimolligi 0,3 ga va «8» likni urish ehtimolligi 0,4 ga teng. Kamida «8» likni urish ehtimolligi nimaga teng?

Y e c h i s h . A — «kamida «8» likni urish» hodisasi, B — «o'nlikni urish», C — «to'qqizlikni urish», D — «sakkizlikni urish» hodisalarining birlashmasidan iborat. Bir otishda ham «8» ni, ham «9» ni, ham «10» ni urish mumkin emas. Shunga ko'ra B, C, D hodisalar bir vaqtda ro'y bermaydi: $A = B \cup C \cup D$, $B \cap C = \varnothing$, $B \cap D \neq \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$. 1-teoremaga asosan va $B \cup C \cup D = (B \cup C) \cup D$ ligidan

$$P(A) = P((B \cup C) \cup D) = P(B \cup C) + P(D) = P(B) + P(C) + P(D) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9$$

ga ega bo'lamiz. Bu misoldan ushbu xulosaga kelamiz:

X u l o s a . *Agar $A_1, \ldots, A_n$ hodisalar juft-jufti bilan birgalikda ro'y bermasa, shu hodisalar birlashmasining ehtimolligi ularning ehtimolliklari yig'indisiga teng:*

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n). \qquad (2)$$

2 - t e o r e m a . *Har qanday A hodisa uchun ushbu tenglik o'rinli:*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (3)$$

I s b o t . $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$ va $P(U) = 1$ bo'lgani uchun 1-teoremaga asosan $P(U) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Bundan (3) formula kelib chiqadi.

3 - m i s o l . Ulanadigan telefon nomerlarining oxirgisi 3 ga karrali yoki juft raqam bo'lish ehtimolligini topamiz.

Y e c h i s h . Umuman oxirgi raqam yo 0, yoki 1, ..., yoki 9 bo‘ladi. Ulardan har biri – elementar tasodifiy hodisa, har birining ehtimolligi $\frac{1}{10}$ ga teng. Ehtimolligi topilayotgan hodisani A, oxirgi nomerining $k\ (k=\overline{0;\ 9})$ bo‘lish hodisasini A_k desak, $A=(A_0, A_2, A_3, A_4, A_6, A_8, A_9)$ va

$$P(A)=P(A_0)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_6)+$$
$$+P(A_8)+P(A_9)=7\cdot\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

bo‘ladi.

$R(A)$ ehtimollik bevosita 2-teorema bo‘yicha hisoblanishi ham mumkin. $\overline{A}=(A_1, A_5, A_7)$ bo‘lganidan $P(\overline{A})=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$. 2- teoremaga asosan $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$. Misolimizda A ning ehtimolligini $\overline{A}$ ning ehtimolligi orqali hisoblash qulayroq bo‘lib chiqdi.

3 - t e o r e m a . *Ixtiyoriy ikki hodisa uchun ushbu tenglik o‘rinli:*

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \qquad (4)$$

I s b o t * . A hodisa birgalikda bo‘lmagan $A\cap B$ va $A\cap\overline{B}$ hodisalardan, B hodisa esa birgalikda bo‘lmagan $A\cap B$ va $\overline{A}\cap B$ hodisalardan iborat, ya’ni

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B});\quad B=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B).$$

Bundan:

$$A\cup B=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)=$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B).$$

Bu yoyilmadagi hodisalar juft-jufti kesishmaganligidan:

$$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B). \qquad (5)$$

Ikkinchi tomondan,

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})\quad \text{va}\quad P(\overline{B})=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B).$$

Shunga ko‘ra: $P(A)+P(B)=2P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$ yoki (5) tenglikka asosan, $P(A)+P(B)=2P(A\cap B)+P(A\cap B)-P(A\cap B)$ bo‘ladi, bundan (4) kelib chiqadi.

3-teoremani uch va undan ortiq hodisa uchun umumlashtirish mumkin:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(B) -$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \qquad (6)$$

va hokazo.

Mashqlar

9.31. Tarozida tortilayotgan lavlagining 3 kg chiqish ehtimolligi 0,46 ga, 4 kg chiqish ehtimolligi 0,31 ga, 5 kg chiqish ehtimolligi esa 0,23 ga teng. Tavakkaliga olingan lavlagining 3 yoki 4 kg chiqish ehtimolligini toping.

9.32. Ixtiyoriy to‘rtta A, B, C, D hodisa uchun $P(A \cup B \cup C \cup D)$ formulasini keltirib chiqaring.

9.33. 1- buyumning sotilish ehtimolligi 0,5 ga, 2- buyumniki 0,3 ga, 3- buyumniki 0,2 ga teng. 1) Kamida bir buyumning sotilish ehtimolligi nimaga teng? 2) 2- yoki 3- buyumni sotish ehtimolligi-chi?

9.34. Uch buyumdan birinchisiga talab bo‘lish ehtimolligi 0,19 ga, ikkinchisiga 0,17 ga, uchinchisiga esa 0,2 ga teng. Kamida bir buyumga talab bo‘lish ehtimolligini toping.

9.35. $P(A)$ va $P(\overline{A} \cap B)$ ehtimolliklar ma’lum. $P(A \cap B)$ ni toping.

2-§. Bog‘liqmas hodisalar

1. Bog‘liqmas tasodifiy hodisalar. Sinashlar ushbu shartlar bilan takror o‘tkazilayotgan bo‘lsin:

1) bir sinash natijasi ikkinchisiga bog‘liq emas (erkli), ya’ni sinashda biror A hodisaning ro‘y berish-bermasligi uning boshqa sinashlarda ro‘y bergan-bermaganligiga bog‘liq emas;

2) har qaysi sinash ikki natijaga ega: A hodisa yo ro‘y beradi, yoki ro‘y bermaydi;

3) agar sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi o‘zgarmas p songa teng bo‘lsa, ro‘y bermaslik ehtimolligi $q = 1 - p$ bo‘ladi.

Oldingi misollarda takroriy erkli sinashlar qaralgan edi. Jumladan, nishonga bir necha marta o‘q otish (bunda ikki natijadan biri o‘rinli bo‘ladi — o‘q nishonga tegadi yoki tegmaydi); detallarni yaroqli yoki yaroqsizligi bo‘yicha takror nazoratdan o‘tkazish; tanganing ko‘p marta tashlanishi (har tashlashda gerb tomoni bilan tushishi yoki tushmasligi).

Agar birinchi sinash m ta teng ehtimolli natijalarga, ikkinchi sinash n ta shunday natijalarga ega bo‘lsa, bunday natijalardan jami mn ta juftlik tuzish mumkin. Jumladan, A hodisaga birinchi sinashning k ta a_1, ..., a_k natijalari, B ga ikkinchi sinashning l ta b_1, b_2, ..., b_l natijalari qulaylik tug‘dirsin. U holda $A \cap B$ hodisaga barcha (a_i, b_j), $i = \overline{1;\ k}$, $j = \overline{1;\ l}$ juftliklar qulaylik tug‘diradi. Ular kl ta. Shunga ko‘ra $A \cap B$ hodisaning ehtimolligi $P(A \cap B) = \frac{kl}{mn}$ ga teng. Lekin $P(A) = \frac{k}{m}$, $P(B) = \frac{l}{n}$ va $\frac{kl}{mn} = \frac{k}{m} \cdot \frac{l}{n}$ demak, $P(A \cap B) =$ $= P(A) \cdot P(B)$, ya’ni *ikki A va B erkli tasodifiy hodisaning birgalikda ro‘y berish ehtimolligi ularning har birining ro‘y berish ehtimolliklarining ko‘paytmasiga teng:*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Agar A va B hodisalar bog‘liqmas bo‘lsa, A bilan $\overline{B}$, $\overline{A}$ bilan B, $\overline{A}$ bilan $\overline{B}$ hodisalar ham bog‘liqmas bo‘ladi va ushbu tenglikka ega bo‘lamiz:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \qquad (2)$$

1 - m i s o l. Kub tashlanganda A — «juft son tushdi» va B — «tushgan son 3 ga bo‘linadi» hodisalari bog‘liqmas ekanini isbot qilamiz.

Y e c h i s h. Juft sonli ochkolar uchta (2, 4, 6). Demak, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Barcha ochkolar ichida 3 ga bo‘linuvchilar ikkita (3 va 6). Demak, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Juft va 3 ga bo‘linuvchi son bitta, bu 6 soni. Demak, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Natijalarga qaraganda $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B)$ tenglik bajarilmoqda. Demak, A va B — bog‘liqmas hodisalar.

2 - m i s o l. Birinchi brigadaning rejani bajarish ehtimolligi 0,9 ga, ikkinchisiniki 0,92 ga teng. Birining rejani bajarishi ikkinchisinikiga bog‘liq emas. Ulardan hech bo‘lmasa birining rejani bajarish ehtimolligini topamiz.

Y e c h i s h. A — «1-brigada rejani bajardi», B — «2-brigada rejani bajardi» hodisalari bo‘lsin. Rejalarni bajarishda ular o‘rtasida bog‘liqlik yo‘q. Shunga ko‘ra:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 + 0{,}92 - 0{,}9 \cdot 0{,}92 = 0{,}992.$$

Agar A, B, C, ... hodisalar ixtiyoriy qism-to‘plami uchun uni tashkil qiluvchi hodisalar kesishmasining ehtimolligi ularning ehtimolliklari ko‘paytmasiga teng bo‘lsa, bu hodisalar *to‘plam bo‘yicha bog‘liq emas (erkli)* deyiladi.

3 - m i s o l. Uch ovchi bir vaqtda va bir-birlaridan mustaqil ravishda bir quyonga qaratib faqat bittadan o‘q uzishgan. Agar ovchilardan aqalli bittasi quyonga o‘q tekkizgan bo‘lsa, quyon otilgan bo‘ladi. Har qaysi ovchining nishonga o‘q tekkizish ehtimolligi 0,4 ga teng. Quyonning otilish ehtimolligini topamiz.

Y e c h i s h . Haqiqatda uchta erkli sinash o‘tkazilmoqda. Har qaysi sinash ikki natijali: quyonga o‘q tegdi, o‘q tegmadi. A_k — «k-ovchi tekkizdi», $\overline{A_k}$ — «k-ovchi tekkiza olmadi» hodisalari bo‘lsin, bunda $k = \overline{1;\ 3}$. Masalaning sharti bo‘yicha $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$ = 0,4. U holda $P(\overline{A_1}) = P(\overline{A_2}) = P(\overline{A_3}) = 1 - 0,4 = 0,6$. Biz $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ — «quyonga yo 1-ovchi, yoki 2-ovchi, yoki 3-ovchi o‘q tekkizdi» hodisasining ehtimolligini topishimiz kerak:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,784.$$

3-misolni yechishda qarama-qarshi hodisalarning ehtimolligidan foydalanildi. Ba’zan bu usul hisoblashlarni nisbatan yengil bajarishga imkon beradi. Umuman, A hodisasining n marta takrorlangan erkli sinashlarda aqalli bir marta ro‘y berish ehtimolligini, ya’ni $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$ ehtimollikni quyidagicha topish mumkin:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) =$$
$$= 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A_n}) = 1 - q^n,$$

bunda har qaysi A_k, $k = \overline{1;\ n}$, hodisa uchun $P(A_k) = p$, u holda $q = 1 - p$.

Lekin shuni unutmaslik kerakki, hodisalarning juft-jufti bilan bog‘liq emasligidan ularning to‘plam bo‘yicha bog‘liq emasligi kelib chiqmaydi.

Mashqlar

9.36. Bir qutida oq va qora sharlar, ikkinchisida ko‘k va qizil sharlar bor. Qutilardan tavakkaliga bittadan shar olingan. A —

«birinchi qutidan oq shar olingan» va B — «ikkinchi qutidan ko‘k shar olingan» hodisalarning o‘zaro bog‘liq emasligini tushuntiring.

9.37. Bir vaqtda tanga va o‘yin kubchasi tashlandi. «Tanga gerb tomoni bilan tushdi» va «Kubda «2» ochko chiqdi» hodisalarining o‘zaro bog‘liq emasligini tushuntiring.

9.38. Ikki detal bir-birlaridan mustaqil holatda nazoratdan o‘tkazilmoqda. Birinchi detalning yaroqsiz chiqmaslik ehtimolligi 0,7 ga, ikkinchisiniki 0,8 ga teng. A — «detallarning ikkovi ham yaroqsiz chiqmadi», B — «ikkovi ham yaroqsiz chiqdi» hodisalarining ehtimolligini toping.

9.39. A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq emas. A va $\overline{B}$ lar ham o‘zaro bog‘liq emasligini tushuntiring.

9.40. A, B, C hodisalar o‘zaro bog‘liq emas. a) A, $\overline{B}$, $\overline{C}$; b) $\overline{A}$, B, $\overline{C}$; d) $\overline{A}$, $\overline{B}$, C hodisalarning ham o‘zaro bog‘liq emasligini tushuntiring.

9.41. Bir nishonga qarata uch marta o‘q uzilgan. Birinchi o‘qning tegish ehtimolligi 0,7 ga, ikkinchi va uchinchiniki 0,6 ga teng.

1) Hech bo‘lmasa bitta o‘q tegishining;
2) rosa bitta o‘q tegishining;
3) rosa ikkita o‘q tegishining;
4) uchta o‘qning ham tegishining ehtimolligini toping.

9.42. To‘plam bo‘yicha birgalikda bo‘lmaydigan ikki hodisa o‘zaro erkli bo‘la oladimi?

9.43. Uch marta o‘q uzilganda hech bo‘lmasa birining nishonga tegish ehtimolligi 0,992 ga teng. Bitta o‘q uzilganda uning nishonga tegish ehtimolligini toping.

2. Shartli ehtimollik. A hodisa B hodisa ro‘y bergandagina ro‘y bersin. A hodisaning B hodisaning ro‘y berishi shartida ro‘y berishini $A \mid B$ orqali belgilaymiz. $A \mid B$ hodisa ro‘y berishining ehtimolligi *shartli ehtimollik* deyiladi va u ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}, \quad (P(B) > 0). \qquad (1)$$

O‘yin kubi tashlangan bo‘lsin. Har bir «1», «2», ..., «6» raqamning tushish ehtimolligi $\frac{1}{6}$ ga teng va P(«1») + ... + P(«6») = 1 tenglik o‘rinlidir. U holda B — «juft raqam tushish» hodisasi ehtimolligi $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ bo‘ladi. Faqat juft raqam tushadigan bo‘lsa, u holda toq raqamlarning tushish ehtimolligi nolga aylanadi: $P(A_1) = P(A_3) = P(A_5) = 0$. Shunga ko‘ra juft raqamlar tushish ehtimolligi biror λ son marta ortadi. Masalan, «2» ochko tushish ehtimolligi oldin $P(«2») = \frac{1}{6}$ edi, endi $\lambda P(«2») = \lambda \cdot \frac{1}{6}$ bo‘ladi. Bizda $R(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_6) = 1$ bo‘lganidan $\lambda R(«2») + \lambda R(«4») + \lambda P(«6») = 1$, yoki $\lambda(P(«2») + \lambda P(«4») + \lambda P(«6»)) = \lambda P(B) = 1$, bundan:

$$\lambda = \frac{1}{P(B)}. \tag{2}$$

Endi biror A hodisaning B hodisaning ro‘y berishi shartida ro‘y berish ehtimolligini hisoblash masalasiga o‘tamiz. A hodisaga qulaylik tug‘diruvchi natijalardan ba’zilari B ga ham qulaylik tug‘dirishi mumkin va shunga ko‘ra ularning ehtimolligi $\lambda = \frac{1}{P(B)}$ marta ortadi. A ga qulaylik tug‘dirsa-da, B ga noqulay bo‘lgan natijalar ehtimolligi nolga aylanadi. Birinchi tur natijalar $A \cap B$ hodisani tashkil qiladi. U holda $P(A \mid B) = \lambda P(A \cap B)$ ga, ya’ni (1) munosabatga ega bo‘lamiz.

1 - m i s o l. 15 yigit va 10 qizdan iborat guruhda sportchilar 8 kishi, shundan 3 tasi qiz bola. Tavakkaliga bir o‘quvchi tanlangan. B — «tanlangan o‘quvchi — sportchi», A — «qiz bola tanlangan», $A \cap B$ — «sport bilan shug‘ullanuvchi qiz bola tanlangan» hodisalari uchun $P(B) = \frac{8}{25}$, $P(A) = \frac{10}{25}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{25}$ bo‘ladi. A hodisa ro‘y bergan bo‘lsin. Bu sinashdagi barcha natijalar soni 8 ta, lekin A uchun 3 ta natija qulaylik tug‘diradi. Demak, $P(A \mid B) = \frac{3}{8}$ (B hodisaning ro‘y berish shartida A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi). Kasrning surat va maxrajini 25 ga bo‘lsak:

$$P(A \mid B) = \frac{3}{8} = \frac{3/25}{8/25} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Lekin, (1) munosabat bo‘yicha ushbu *ko‘paytirish formulasini* hosil qilamiz:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B). \tag{3}$$

(3) formulani bog‘liqmas hodisalar uchun to‘g‘ri bo‘lgan $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$ formula bilan solishtirib, bu holda $P(A \mid B) = P(A)$ bo‘lishini aniqlaymiz. Shunga ko‘ra bog‘liq

bo‘lmagan hodisalardan birining ro‘y berishi ikkinchisining ehtimolligiga ta’sir ko‘rsatmaydi.

2 - m i s o l. Quyidagi jadvalda ikki omborga ikki sexdan keltirilgan buyumlar miqdori ko‘rsatilgan:

	1-sex	2-sex	Jami
1-ombor	1000	2000	3000
2-ombor	2000	3000	5000
Hammasi	3000	5000	8000

Tavakkaliga omborlardan biri, so‘ng shu ombordagi buyumlardan tanlangan. Buyumning a) 1, 2- ombordan olinganligi (A_1, A_2 hodisalar) va bu shartlarda 1- sexda, 2- sexda tayyorlanganligi (B_1, B_2 hodisalar) ehtimolliklarini; b) aynan 1- sexda tayyorlanganlik ehtimolligi $P(B_1)$ ni topamiz.

Y e c h i s h.

a) $P(A_1) = \frac{3000}{8000} = \frac{3}{8}$, $P(A_2) = \frac{5000}{8000} = \frac{5}{8}$,

$P(B_1 \mid A_1) = \frac{1000}{3000} = \frac{1}{8}$, $P(B_1 \mid A_2) = \frac{2000}{3000} = \frac{2}{3}$.

b) Tavakkaliga 1-omborni tanlash va undan olingan buyumning 1-sexda tayyorlangan bo‘lishi $A_1 \cap B_1$ hodisa, 2-omborni tanlash va undan olingan buyumning 1-sexda tayyorlangan bo‘lishi esa $A_2 \cap B_1$ hodisa bo‘ladi. U holda «tavakkaliga tanlangan ombordan olingan buyumning 1-sexda tayyorlangan bo‘lish» hodisasi B_1 birgalikda bo‘lmagan $A_1 \cap B_1$ va $A_2 \cap B_1$ hodisalar birlashmasidan iborat bo‘ladi va

$$P(B_1) = P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_1) = P(A_1) \cdot P(B_1 \mid A_1) + \\ + P(A_2) \cdot P(B_1 \mid A_2). \qquad (4)$$

Bunga ko‘ra $P(B_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{13}{24}$.

2-misolning tahlilida olingan (4) munosabat *to‘la ehtimollik formulasi* deb ataluvchi ushbu umumiy formulaning xususiy ko‘rinishidan iborat:

$$P(A) = P(X_1) \cdot P(A \mid X_1) + \ldots + P(X_n) \cdot P(A \mid X_n), \qquad (5)$$

bunda $U = X_1 \cup \ldots \cup X_n$, $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i \neq j$.

To'la ehtimollik formulasi ko'rinishlardan biri ushbu *Bayes formulasi*dir:

$$P(X_k \mid A) = \frac{P(X_k)\cdot P(A|X_k)}{P(X_1)\cdot P(A|X_1)+\ldots+P(X_n)\cdot P(A|X_n)}. \tag{6}$$

(6) munosabatni isbot qilish uchun

$$P(A \cap X_k) = P(X_k)\cdot P(A \mid X_k) = P(A)\cdot P(X_k \mid A)$$

bo'lishini e'tiborga olish yetarli.

3 - m i s o l. Omborga 1- sexdan 2000 ta detal, 2- sexdan 3000 ta detal kelgan. Lekin 1- sex o'rta hisobda 0,2% yaroqsiz, 2- sex esa 0,1% yaroqsiz detal beradi. Tasodifan olingan bir detalning yaroqsiz bo'lish ehtimolligini topamiz.

Y e c h i s h. A_1 — «tasodifan 1- sex detali olingan», A_2 — «tasodifan 2- sex detali olingan», B — «yaroqsiz detal olingan» hodisalarining ehtimolliklarini topamiz:

$$P(A_1) = \frac{2000}{5000} = 0,4, \;\; P(A_2) = \frac{3000}{5000} = 0,6,$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{0,2}{100} = 0,002, \;\; P(B \mid A_2) = \frac{0,1}{100} = 0,001,$$

(5) formulaga ko'ra

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B \mid A_1) + P(A_2)\cdot P(B \mid A_2) =$$
$$= 0,4\cdot 0,002 + 0,6\cdot 0,001 = 0,0014.$$

4 - m i s o l. 3-misolda tasodifan olingan buzuq detal 1- sexda tayyorlangan ($A_1 |\ B$ hodisa) va 2- sexda tayyorlangan ($A_2 |\ B$ hodisa) bo'lishi ehtimolliklarini topamiz.

Y e c h i s h. Bayes formulasidan foydalanamiz:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)} = \frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)} =$$
$$= \frac{0,4\cdot 0,02}{0,0014} \approx 0,57,$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{0,6\cdot 0,001}{0,0014} \approx 0,43.$$

M a s h q l a r

9.44. 100 ta elektr lampochkasidan 4 tasi nostandart ekani ma'lum. Bir vaqtda tavakkaliga olingan 2 ta lampochkaning nostandart bo'lib chiqish ehtimolligini toping.

9.45. $n = 50$ ta tayoqchaning har biri kalta-yu-uzun ikkiga bo‘linadi. Hosil bo‘ladigan $2n = 100$ bo‘lakdan ikkitasi olinib, yangi tayoqcha tayyorlanadi. Yangi tayoqchaning xuddi avvalgining o‘zidek bo‘lish ehtimolligini toping.

9.46. Qutida 10 ta qizil, 6 ta yashil, 14 ta ko‘k shar bor. Tavakkaliga ikkita shar olinadi. 1) A_1 – «qizil shar olinmagani ma’lum, olingan ikkala shar ko‘k» bo‘lishining; 2) A_2 – «ko‘k shar olinmagani ma’lum, olingan ikkala shar qizil» bo‘lishining; 3) A_3 – «yashil shar olinmagani ma’lum, olingan sharlar har xil rangda» bo‘lishining ehtimolligini toping.

9.47. Birinchi qutida 30 ta, ikkinchisida 50 ta, uchinchisida 20 ta konfet bor. Birinchi qutidagilarning 80% i, ikkinchi qutidagilarning 70% i, uchinchi qutidagilarning 50% i yumshoq. Tavakkaliga olingan bitta konfetning yumshoq bo‘lib chiqish ehtimolligini toping.

9.48. Birinchi dastgohda 0,2%, ikkinchisida 0,3%, uchinchisida 0,5% yaroqsiz detal tayyorlanishi ma’lum. Birinchi dastgohdan 4000 ta, ikkinchisidan 8000 ta, uchinchisida 3000 ta detal kelgan va aralashtirilgan. Ulardan tavakkaliga olingan detallarning yaroqsiz bo‘lib chiqish ehtimolligini toping.

9.49. Nishonga bog‘liqsiz ravishda to‘rt marta o‘q uzilgan. Otuvchining har otishida nishonga tegish ehtimolligi 0,6 ga teng. Oldingi uch otishdan nishonga tekkiza olmaslik va to‘rtinchi otishda nishonga tekkizish ehtimolligini toping.

9.50. Motor ulanganda p ehtimollik bilan ishlay boshlaydi: 1) ikkinchi ulashda motor ishlay boshlashining; 2) motorni ishga tushirish uchun ikkitadan ortiq ulashlar talab qilinmasligining ehtimolligini toping.

9.51. Hodisaning shartli ehtimolligi hodisa ehtimolligi kabi quyidagi xossaga ega ekanini isbot qiling: ixtiyoriy A va B hodisalar uchun $0 \le P(A \mid B) \le 1$.

9.52. Ko‘paytirish teoremasini (1- teoremani) uchta, to‘rtta, ..., k ta hodisa uchun umumlashtiring.

9.53. Agar $P(A \mid B) = P(A)$ bo‘lsa, $P(A) \cdot P(B \mid A) = P(A) \cdot P(B)$ bo‘lishini tushuntiring.

9.54. 1- omborda 1- buyumdan 20 ta, 2- buyumdan 12 ta, 2- omborda 1- buyumdan 30 ta, 2- buyumdan 10 ta bor. Ixtiyoriy tartibda ikki ombordan biri tanlangan va undan tavakkaliga bir buyum olingan. Uning 1- buyum bo‘lish ehtimolligini toping.

9.55. Birinchi dastgohning yaroqsiz detalni tayyorlash ehtimolligi 0,01 ga, ikkinchisiniki 0,02 ga, uchinchisiniki 0,03 ga teng. Dastgohlarda ishlangan detallar bir qutiga solinadi. Birinchi dastgohning unumdorligi ikkinchisinikidan 3 marta katta, uchinchiniki ikkinchisinikidan ikki marta kam. Tavakkaliga olingan detalning yaroqsiz bo‘lib chiqish ehtimolligini toping.

3. Bernulli formulasi. A hodisaning ehtimolligi r ga teng bo‘lsin. Agar sinash ma’lum shartlar asosida n marta erkli takrorlangan va ulardan m martasida A hodisa ro‘y bergan bo‘lsa, m/n nisbat A hodisaning *ro‘y berish chastotasi* (takrorlanishi) deyiladi. Kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, agar sinash ko‘p marta takrorlansa chastota n ga bog‘liq bo‘lmagan holda p ga yaqinlashadi. Masalan, o‘yin kubi ko‘p marta tashlansa, «3» ochkoning tushish ehtimolligi deyarli 1/6 ga teng bo‘ladi. Umuman, ehtimollik tushunchasi chastotaning barqarorligi qonuniyatlariga asoslanadi. Bu masala oliy matematika kurslarida batafsil o‘rganiladi.

1-misol. $n = 5$ marta erkli sinash o‘tkazilgan va unda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $p = 0{,}6$ bo‘lsin. Natija $\overline{A}\,\overline{A}AA\overline{A}$ tartiblangan to‘plam ko‘rinishda bo‘lish ehtimolligini topamiz.

Yechish. O‘rin almashtirishda A hodisa $m = 2$ marta, $\overline{A}$ esa $n - m = 3$ marta takrorlanmoqda. Har qaysi A harfini 0,6 bilan, $\overline{A}$ harfini $1 - 0{,}6 = 0{,}4$ bilan almashtiramiz. Izlanayotgan ehtimollik $p^m q^{n-m} = 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 \approx 0{,}02$ bo‘ladi.

Umuman, ehtimolligi p ga teng A hodisaning n marta o‘tkazilgan erkli sinashda m marta ro‘y berish ehtimolligi $p^m q^{n-m}$ *ga teng bo‘ladi, bunda* $q = 1 - p$.

Teorema. *A hodisaning ehtimolligi p ga teng va bu hodisaning n marta takrorlangan erkli sinashda m marta ro‘y berish ehtimolligi* $P_{m,n}$ *bo‘lsin. U holda*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{1}$$

Bernulli formulasi o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. n marta o‘tkazilgan erkli sinashlardan m tasida A hodisa ro‘y bersin. Sinashlarning har bir shunday natijasi m ta A harfi va $n - m$ ta $\overline{A}$ harfidan tuzilgan takrorli o‘rin almashtirishlar bo‘ladi. Lekin ularning umumiy soni

$$P_{(m,\ n-m)} = \frac{(m+n-m)!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$

ga, bitta o‘rin almashtirishning ehtimolligi esa $p^m q^{n-m}$ ga teng bo‘ladi. Shunga ko‘ra va bunday o‘rin almashtirishlar juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmaganligidan izlanayotgan ehtimollik (1) tenglik ko‘rinishida bo‘ladi.

2-misol. Tanga $n = 100$ marta tashlanganda «G» (gerb) tomoni bilan $m = 8$ marta tushish ehtimolligini topamiz.

Yechish. Bir marta tashlanganda «G» tomoni bilan tushish ehtimolligi $p = \frac{1}{2}$ ga teng. U holda $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ bo‘ladi va (1) formula bo‘yicha

$$P_{8;\ 100} = C_{100}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot 94 \cdot 93}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{1}{2^{100}} \approx 25 \cdot 10^{-22}.$$

Mashqlar

9.56. 1) (1) formuladan foydalanib, $n = 5$, $m = 2$ va $p = 0{,}2$ holi uchun $P_{n,m}$ ehtimollik qiymatini toping.

2) O‘yin kubi 20 marta tashlanganda «1» ochkoning 5 martadan ortiq tushmaslik ehtimolligini toping.

9.57. O‘yin kubi 12 marta tashlanganda 3 ga karrali ochkolarning (raqamlarning) uch martadan ko‘p, lekin 6 martadan kam tushish ehtimolligini toping.

9.58. Sakkiz asbobdan har birining buzilish ehtimolligi 0,7 ga teng:

1) rosa uch asbobning buzilish ehtimolligini toping;
2) asboblarning hammasining buzilish ehtimolligini toping;
3) hech bir asbobning buzilmaslik ehtimolligini toping.

9.59. Sinashda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi 0,2 ga teng. Sinash 6 marta takrorlangan. A hodisaning ko‘pi bilan uch marta ro‘y berish ehtimolligini toping.

9.60. A hodisa 0,2 ehtimollik bilan ro‘y beradi. Sinash 10 marta mustaqil ravishda takrorlangan. Shu jarayonda A hodisaning:

1) rosa uch marta;
2) ko‘pi bilan uch marta;
3) uchtadan ko‘p marta;
4) hech bo‘lmasa 1 marta, lekin ko‘pi bilan 5 marta ro‘y berishining ehtimolliklarini toping.

4. Geometrik ehtimolliklar. Ehtimollik nazariyasida shunday masalalar uchraydiki, ular hatto mazmunan sodda bo‘lsa-da, ularni yechishda yuqorida keltirilgan mulohazalar va formulalardan foydalanish yo noqulay, yoki uning iloji bo‘lmaydi. Kvadratga tashlangan nuqtaning unga ichki chizilgan doiraga tasodifan tushish ehtimolligini topish bunga oddiy bir misol. Bunday hollarda ba’zan *ehtimollikning geometrik ta’rifi*, ya’ni hodisa ehtimolligini hisoblashning geometrik usulidan foydalanish mumkin. Geometrik ehtimollik quyidagicha ta’riflanadi: biror kesmaga (yuzaga yoki hajmga ega bo‘lgan biror geometrik shakl ichiga) nuqta tasodifan tashlangan. Shu nuqta kesmaning (geometrik shaklning) *biror qismiga tushish ehtimolligi* deb, qism uzunligining (yuzining, hajmining) kesma uzunligiga (shakl yuziga, hajmiga) nisbatiga aytiladi. Agar qism bir necha bo‘lakdan iborat bo‘lsa, bu bo‘laklar uzunliklarining (yuzlarining, hajmlarining) yig‘indisi olinadi. Geometrik ehtimollik oldingi bandlarda kiritilgan ehtimollikka o‘xshash. Masalan, 1) nuqtaning berilgan geometrik shakl ichiga tushish ehtimolligi 1 ga teng, uning qismi uchun esa bu ehtimollik 1 dan kichik; 2) agar X va Y qismlar umumiy nuqtalarga ega bo‘lmasa (kesishmasa), $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y)$ bo‘ladi. Shuningdek, boshqa tushunchalar, qo‘shish va ko‘paytirish, to‘la ehtimollik va Bayes formulalari geometrik ehtimollik uchun ham o‘rinli.

1 - m i s o l. Radiusi R bo‘lgan doira ichiga radiusi r bo‘lgan kichik doira chizilgan. Katta doiraga tasodifan tashlangan nuqtaning kichik doiraga tushish ehtimolligini topamiz.

Y e c h i s h. A — «tasodifan tashlangan nuqta kichik doiraga tushdi» hodisasining ehtimolligi kichik va katta doiralar yuzlari nisbatiga teng:

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

2 - m i s o l. Nuqta o‘lchamlari 3 dm, 4 dm, 5 dm bo‘lgan to‘g‘ri parallelepiped ichiga tashlangan.Nuqtaning parallelepiped ichidagi tomonlari 1 dm bo‘lgan kub ichiga tasodifan tushish ehtimolligini topamiz.

Y e c h i s h. A — «nuqta kub ichiga tushdi» hodisasi bo‘lsin. Sinash natijalariga mos nuqtalar parallelepiped ichida tekis taqsimlangan bo‘lsin. U holda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi kubning o‘lchamiga proporsional va $P(A) = \frac{V_{\text{kub}}}{V_{\text{paral.}}}$ bo‘ladi. Bizda

$V_{\text{kub}} = 1\ \text{dm}^3$, $V_{\text{paral}} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60\ \text{dm}^3$. U holda $P(A) = \frac{1}{60} \approx 0{,}017$ bo‘ladi.

Mashqlar

9.61. Geometrik ehtimollik hodisa ehtimolligining ushbu asosiy xossalariga ega ekanini tushuntiring: 1) har qanday A hodisa uchun $0 \le P(A) \le 1$ bo‘ladi; 2) $P(U) = 1$, $P(\varnothing) = 0$; 3) agar $A \cap B = \varnothing$ bo‘lsa, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ bo‘ladi.

9.62. Minalar to‘g‘ri chiziq bo‘ylab har 10 m da qo‘yib chiqilgan. Kengligi 3 m bo‘lgan tank shu to‘g‘ri chiziqqa perpendikular kelmoqda. Uning portlab ketish ehtimolligi qanday?

9.63. R radiusli aylanada A nuqta belgilangan. Aylanaga tavakkaliga tashlangan B nuqta uchun $AB = R/2$ bo‘lib qolish ehtimolligini toping.

9.64. Doira ichiga teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchak chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan nuqtaning uchburchakka tushish ehtimolligini toping.

9.65. 9.64-masalani doira ichiga muntazam uchburchak chizilgan hol uchun yeching.

9.66. Radiusi R ga teng doira ichiga kvadrat chizilgan. Doiraga tavakkaliga tashlangan ikki nuqtaning kvadratga tushish ehtimolligini toping.

9.67. x va y haqiqiy sonlar $|x| < 4$, $|y| < 6$ bo‘lish sharti bilan tavakkaliga tanlandi. Bu ikkala sonning musbat bo‘lish ehtimolligini toping.

9.68. Kub ichiga shar chizilgan. Kubga tavakkaliga tashlangan nuqtaning sharga tushish ehtimolligini toping.

9.69. Shar ichiga tetraedr chizilgan. Tavakkaliga shar ichiga tashlangan nuqtaning tetraedr ichiga tushish ehtimolligini toping.

3-§. Matematik statistika elementlari

1. Boshlang‘ich ma’lumotlar. Birgina kuzatish (tajriba, sinash) ham tekshirilayotgan obyekt haqida bir qancha ma’lumot berishi mumkin. Lekin u ko‘p sonli hodisalarning tabiatini to‘laroq ochish va xulosalar chiqarishga yetarli bo‘la olmaydi: tajriba bir xil sharoit va shartlarda ko‘p marta takror o‘tkazilishi kerak. So‘ng topilgan natijalarning *o'rtacha qiymati* hisoblanadi, o'rtacha qiymatning haqiqatga qanchalik yaqinligi, ya'ni *aniqligi* qaralayotgan obyektdagi ayrim belgilarning *o'zgaruvchanlik darajasi* va boshqa belgilar bilan aniqlanadi. Endi to'plangan sonli ma'lumotni matematik ishlash zarur bo'ladi. Uning umumiy usullarini matematikaning sohalaridan *matematik statistika* beradi (inglizcha *statistic*, lotincha *status* — holat). Undan fizika, kimyo, biologiya, muhandislik, astronomiya, iqtisodiyot va boshqa sohalarda, xususan, detallarni ishlashda texnologik jarayon rejimini aniqlash, ishlab chiqarishni rejalashtirish, miqdoriy belgilar orasida mavjud bog'lanishlarning ifodalarini (empirik formulalarni) tuzish kabilarda foydalaniladi. Matematik statistika hisoblashlarida ehtimollik nazariyasi keng qo'llaniladi.

2. Arifmetik o'rtacha qiymat va o'rta kvadratik chetlanish. Matematik statistika hodisalarni faqat ma'lumotlar orqali izohlaydi. Ma'lumotni *matematik ishlashdan* kuzatilgan asosiy maqsad o'lchanayotgan X kattalik qabul qilgan x_i tasodifiy (empirik) qiymatlarning $\bar{x}$ *arifmetik o'rtacha qiymati* va σ *o'rta kvadratik chetlanish*ni (xatolikni), shuningdek, boshqa zarur belgilarni, jumladan, har qaysi x_i qiymatning *nisbiy takrorlanishi*ni aniqlashdan iborat. O'rta kvadratik chetlanish tajribada topilgan x_i qiymatlarning o'rtacha qiymatdan qanchalik yaqin-uzoq, uning atrofida qanchalik zich joylashganligini xarakterlaydi. Masalan, σ qancha kichik bo'lsa, x_i qiymatlar $\bar{x}$ o'rtacha qiymat atrofida shunchalik zich joylashgan bo'ladi, bu esa x_i qiymatlar $\bar{x}$ izlanayotgan aniq qiymatga yaqin ekanini, o'lchashlar aniqroq bajarilganini ko'rsatadi. Demak, $\sigma = 0$ da $x_i = a$ arifmetik o'rtacha qiymat Xning *aniq* qiymati bo'ladi.

X miqdor n marta mustaqil ravishda o'lchangan, natijada uning x_1 qiymati n_1 marta, x_2 qiymati n_2 marta, ..., x_k qiymati n_k marta, jami k xil empirik qiymati $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, $k \leq n$ marta ro'y bergan bo'lsin, bunda n_i son x_i qiymatning *takrorlanish soni.* U holda:

1) arifmetik o'rtacha qiymat:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n}; \qquad (1)$$

2) x_i qiymatlarning $\bar{x}$ arifmetik o'rtacha qiymatdan $\varepsilon_1 = x_1 - \bar{x}$, $\varepsilon_2 = x_2 - \bar{x}$, ..., $\varepsilon_k = x_k - \bar{x}$ chetlanishlari, so'ng σ o'rta kvadratik chetlanish taqriban hisoblanadi, bunda agar o'lchashlar bir necha marta takrorlangan, ya'ni n qiymati kichik bo'lsa,

$$\sigma^2 \approx \frac{n_1 \varepsilon_1^2 + n_1 \varepsilon_2^2 + ... + n_n \varepsilon_n^2}{n-1}, \qquad (2')$$

ko‘p sonli takror o‘lchashlarda, ya’ni n ning katta qiymatlarida:

$$\sigma^2 \approx \frac{n_1\varepsilon_1^2 + n_1\varepsilon_2^2 + ... + n_n\varepsilon_n^2}{n(n-1)}. \tag{2''}$$

3) x_i qiymatning nisbiy takrorlanishi (kasr son yoki % larda):

$$W(x_i) = \frac{n_i}{n}. \tag{3}$$

Tajriba jarayonida biror x_i qiymat ro‘y bergan bo‘lmasa, ya’ni $n_i = 0$ bo‘lsa, uning takrorlanishi $W(x_i) = 0$, barcha natijalar faqat shu qiymatdan iborat bo‘lsa, uning takrorlanishi $W_i = 1$ bo‘ladi, shu jarayonda x_i dan boshqa qiymatlar ham hosil bo‘lgan bo‘lsa, $0 < W(x_i) < 1$ bo‘ladi. Umuman, $0 \le W(x_i) \le 1$ ga ega bo‘lamiz.

3. Taqsimot jadvali, gistogramma, poligon. Ko‘pincha tajriba jarayonida turli qiymatga ega sonlar ketma-ketligi hosil bo‘ladi. Hisoblashlarni ixcham va tartib bilan bajarish maqsadida qiymatlarni o‘sib borish tartibida joylashtiriladi, ya’ni *empirik taqsimot* ko‘rinishida yoziladi. Bu n son katta bo‘lganda juda qulay bo‘ladi. Shu maqsadda:

1) barcha x_i qiymatlar o‘sib borish tartibida joylashtiriladi. Bu qiymatlar juda ko‘p bo‘lsa, ular ichidan ixtiyoriy ajratib olinganlari – *variantalar* tartiblanadi. Variantalar n ta bo‘lsin;

2) taqsimot kengligi, ya’ni eng katta va eng kichik qiymatli variantalar $x_{max} - x_{min}$ ayirmasi topiladi, ularning oralig‘i teng uzunlikka ega bo‘lgan N ta intervalga ajratiladi va intervallarning λ uzunligi hisoblanadi:

$$\lambda = \frac{x_{max} - x_{min}}{N}. \tag{1}$$

Jami variantalar soni n ta bo‘lsa, intervallar soni N quyidagicha olinishi mumkin:

n	N
25–40	5–6
40–60	6–7
60–100	7–10
100–200	10–12
200 va undan ortiq	12–20;

3) har bir intervalga nechta (n_i) varianta to‘g‘ri kelishi (ya’ni x_i hodisaning ro‘y berishlar soni) aniqlanadi va $W_i = \frac{n_i}{n}$ nisbiy takrorlanish hisoblanadi. Barcha ma’lumot jadvalga yozib boriladi. Bu jadval intervallar uzunligi bilan takrorlanishlar orasidagi bog‘-lanish, ya’ni tasodifiy miqdorning *empirik taqsimotini* ifodalaydi.

4) ayoniylik uchun jadval grafik usulda, jumladan, poligon yoki gistogramma ko‘rinishida beriladi.

Poligon: abssissa (tasodifiy qiymatlar) o‘qining ($x_{\max}$; $x_{\min}$) qismi uzunliklari bir xil (λ) bo‘lgan N ta intervalga ajratiladi, intervallarning o‘rtalarida n_i yoki W_i ga proporsional ordinatalar o‘tkaziladi va uchlari to‘g‘ri chiziqlar bilan tutashtiriladi. Siniq chiziq hosil bo‘ladi (IX.2-rasm).

Gistogramma: abssissa o‘qida ajratilgan har bir interval ustiga balandliklari n_i, W_i yoki $\frac{W_i}{\lambda}$ bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar yasaladi. (yunoncha *histos* – mato, *polygonos* – ko‘pburchak) (IX.3-rasm).

1-misol. Uyumdan tavakkaliga ketma-ket 30 qism paxta olinib, ulardagi tolaning X uzunligi o‘lchangan va ushbu x_i, $i = \overline{1;\ 30}$, (sm larda) qiymatlar topilgan: 2,11; 2,10; 2,12; 2,13; 2,09; 2,18; 2,10; 2,20; 2,11; 2,26; 2,17; 2,26; 2,10; 2,24; 2,13; 2,12; 2,27; 2,12; 2,16; 2,19; 2,26; 2,25; 2,18; 2,22; 2,24; 2,28; 2,17; 2,21; 2,23; 2,21. Tolaning X uzunligi o‘rtacha qiymatini topamiz va uning aniqligini baholaymiz.

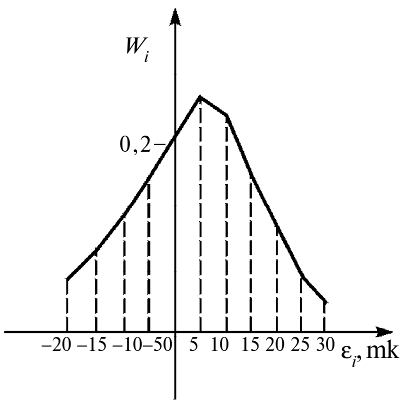
1-misolga qaytaylik. Unda $x_{\max} = 2{,}28$, $x_{\min} = 2{,}09$, $n = 30$, $N =$ $= 5$, $\lambda = (2{,}28 - 2{,}09) : 5 = 0{,}038$, λ uchun 0,03 ni olamiz.

Inter-val №	Interval chegaralari	Hodisalar soni, n_i	Nisbiy takrorlanish, $W_i = n_i / n$
1	2,09–2,12	9	9/30 = 0,3
2	2,13–2,16	3	0,1
3	2,17–2,20	6	0,2
4	2,21–2,24	6	0,2
5	2,25–2,28	6	0,2
	Jami:	30	1,0

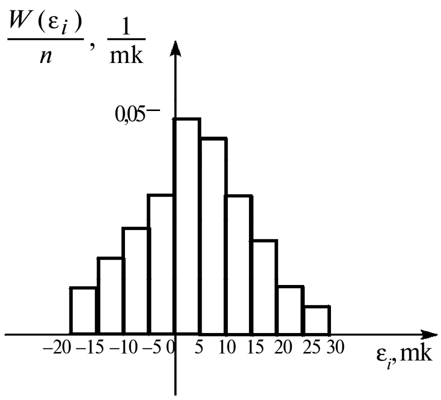
2-misol. Tayyorlangan ko‘p sonli valiklardan ixtiyoriy 200 tasi olinib, diametrlarining belgilangan o‘lchamdan ε_i chetlanishlari tekshirilgan va bu chetlanishlar –20 mk dan +30 mk gacha jami 78 xil qiymatga ega ekanligi aniqlangan. Chetlanishlarning empirik jadvalini tuzamiz, poligon va gistogrammasini yasaymiz (chetlanishlar intervallarga taqsimlangan holda jadvalda keltirilgan).

Yechish: 1) ε_i chetlanishlar taqsimot jadvali quyidagicha bo‘ladi:

Interval	Interval chegaralari	Interval o‘rtasi	Takrorlanish	Nisbiy takrorlanish
1	–20 dan –15 gacha	–17,5	7	0,035
2	–15 dan –10 gacha	–12,5	11	0,055
3	–10 dan –5 gacha	–7,5	15	0,075
4	–5 dan 0 gacha	–2,5	24	0,120
5	0 dan 5 gacha	+2,5	49	0,245
6	5 dan 10 gacha	+7,5	41	0,205
7	10 dan 15 gacha	+12,5	26	0,130
8	15 dan 20 gacha	+17,5	17	0,035
9	20 dan 25 gacha	+22,5	7	0,035
10	25 dan 30 gacha	+27,5	3	0,015
Jami:			200	1,000



IX.2-rasm. 200 valikning tashqi diametrlari bo‘yicha taqsimot poligoni.



IX.3-rasm. 200 valikning diametrlari bo‘yicha taqsimot gistogrammasi.

2) 200 valikning tashqi diametrlari chetlanishlari bo‘yicha taqsimlanish poligoni va gistogrammasi quyidagi chizmalarda tasvirlangan (IX.2-rasm, IX.3-rasm):

4. Bosh to‘plam, tanlanma to‘plam. x ning qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plami *bosh to‘plam*, bosh to‘plamdan ixtiyoriy tartibda ajratib olingan n ta qiymatdan iborat to‘plamni *tanlanma to‘plam* deb ataladi.

Ko‘p sonli tajribalarda olingan sonli ma’lumotlar bosh to‘plami va tanlanmaning arifmetik o‘rtacha qiymati haqiqatda bir xil bo‘ladi.

Arifmetik o‘rtacha qiymatdan ε_i chetlanishlarning algebraik yig‘indisi nolga teng va istalgan x_0 sonning α_i chetlanishlari algebraik yig‘indisining absolut qiymatidan kichik:

$$\sum \varepsilon_i = \sum (x_i - \bar{x}) = 0, \quad \sum \varepsilon_i \le \left|\sum (x - x_0)\right| = \left|\sum \alpha_i\right|. \qquad (2)$$

Haqiqatan ham:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = x_1 - \bar{x} & \alpha_1 = x_1 - x_0 \\ +\ \varepsilon_2 = x_2 - \bar{x} & +\ \alpha_2 = x_2 - x_0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varepsilon_n = x_n - \bar{x} & \alpha_n = x_n - x_0 \\ \hline \sum \varepsilon_i = n\bar{x} - n\bar{x} = 0; & \sum \alpha_i = n\bar{x} - nx_0 = n(\bar{x} - x_0), \quad \left|\sum \alpha_i\right| \ge 0; \end{array}$$

$$\Sigma\varepsilon_i \le |\Sigma\alpha_i|$$

(2) tenglikka qaraganda arifmetik o‘rtacha qiymatning $\bar{\varepsilon}$ o‘rtacha xatoligi nolga tengdir. Bu tenglik *eng kichik chetlanishlar prinsipini* ifodalaydi.Undan amaliy hisoblashlarda keng foydalaniladi.

3 - m i s o l . Bir maydondagi ekin tuplarining X soni besh marta takror sanalib, birinchi marta 7706 ta, so‘ng 7721, 7687, 7688, 7718 ta hisoblangan. X ning $\bar{x}$ taqribiy qiymati va undan ε_i chetlanishlarni topamiz.

Y e c h i s h . $\bar{x} = (7706 + 7721 + 7687 + 7688 + 7718) : 5 = 7704;$

$$\varepsilon_1 = 7706 - 7704 = +2; \ \varepsilon_2 = 7721 - 7704 = +17; \ \varepsilon_3 = 7687 - \\ -7704 = -17;$$

$$\varepsilon_4 = 7688 - 7704 = -16; \ \varepsilon_5 = 7718 - 7704 = +14;$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2+17-17-16+14}{5} = 0.$$

Agar x ning qiymati sifatida $\bar{x}$ emas, balki x_i lardan ixtiyoriy biri olinganda, chetlanishlar (xatolik) ko‘payib ketadi. Masalan, shu maqsadda x_2 qabul qilinsa, chetlanishlar va o'rtacha xatolik quyidagicha bo'ladi:

$$\alpha_1 = 7706 - 7721 = -15;\ \alpha_2 = 7721 - 7721 = 0;\ \alpha_3 = 7687 - 7721 = -34;$$
$$\alpha_4 = 7688 - 7721 = -33;\ \alpha_5 = 7718 - 7721 = -3;$$
$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \alpha_i}{n} = \frac{-85}{5} = -17 .$$

Eng kichik kvadratlar prinsipi: $\bar{x}$ arifmetik o'rta qiymatdan ε_i chetlanishlar kvadratlarining yig'indisi ixtiyoriy x_0 qiymatdan α_i chetlanishlar kvadratlarining yig'indisidan kichik:

$$\sum \varepsilon_i^2 < \sum \alpha_i^2 . \qquad (3)$$

Bu prinsip amaliy hisoblashlarda keng qo'llaniladi.

4 - m i s o l. 3-misol shartlaridan foydalanib, $\bar{x}$ va x_2 larga nisbatan (3) tengsizlikning to'g'riligini tekshirib ko'ramiz.

Y e c h i s h. $\sum \varepsilon_i^2 = (+2)^2 + (+17)^2 + (-17)^2 + (-15)^2 + (+14)^2 = 1034;$

$$\sum \alpha_i^2 = (-15)^2 + 0^2 + (-34)^2 + (-33)^2 + (-3)^2 = 2479; \quad \sum \varepsilon_i^2 < \sum \alpha_i^2.$$

O'rtacha kvadratik xatolikning % larda hisoblangan

$$\omega = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \qquad (4)$$

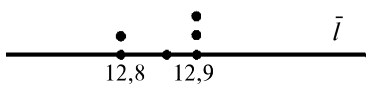
nisbiy kattaligi $\bar{x}$ tasodifiy miqdorning *variatsiya koeffitsiyenti* deyiladi.

5 - m i s o l. Bir detalning l (sm) uzunligi ikki xil asbob bilan besh martadan o'lchanib, quyidagi natijalar olingan:

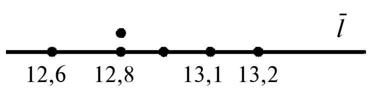
I asbob bilan: l = 12,9; 12,8; 12,9; 12,9; 12,8;

II asbob bilan: l = 12,6; 12,8; 13,1; 12,8; 13,2.

Detalning $\bar{l}$ taqribiy uzunligi, o'rtacha va o'rta kvadratik xatoligi hisoblansin. Qaysi asbob bilan aniqroq natija olingan?



I asbob bilan topilgan natijalarning joylanishi.



II asbob bilan topilgan natijalarning joylanishi.

IX.4-rasm.

Y e c h i s h . I asbob bilan:

$$\bar{l} = 64{,}3 : 5 = 12{,}86 \text{ (sm)}, \qquad \bar{\varepsilon} = \frac{3\cdot 0{,}04 + 2\cdot(-0{,}06)}{5} = 0,$$

$$\sigma_{\bar{l},\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{3\cdot 0{,}04^2 + 2\cdot(-0{,}06)^2}{5-1}} \approx 0{,}057, \quad \omega_{\mathrm{I}} = \frac{0{,}057}{12{,}86}\cdot 100\% \approx 0{,}43\%.$$

II asbob bilan:

$$\bar{l} = 64{,}5 : 5 = 12{,}9 \text{ (sm)}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{-0{,}3 - 2\cdot 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3}{5} = 0,$$

$$\sigma_{\bar{l},\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{(-0{,}3)^2 + 2\cdot 0{,}1 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2}{4}} \approx 0{,}236, \quad \omega_{\mathrm{II}} \approx 1{,}8\%.$$

Birinchi asbob bilan topilgan qiymatlar o‘rtacha qiymat atrofida zichroq joylashgan (IX.4-rasm). Demak, I asbobning aniqligi katta.

M a s h q l a r

9.70. 60 ta zotli sovliqning har biridan (3 yilda) quyidagicha qo‘zi olingan:

5 4 6 2 4 6 3 3 5 4 5 4 5 2 4 5 4 2 6 4

4 3 5 4 3 5 4 4 5 4 7 6 4 5 4 3 5 4 4 3

4 5 5 4 4 3 4 5 4 1 6 5 4 7 5 4 6 4 5 6

Tasodifiy miqdorning taqsimot jadvalini, taqsimot gistogrammasi va poligonini yasang.

9.71. β burchak 10 marta takror o‘lchanib, quyidagi natijalar olingan:

65°36′12″, 65°36′00″, 65°35′58″, 65°36′04″, 65°36′06″,

65°36′09″, 65°36′03″, 65°36′08″, 65°35′54″, 65°36′02″.

$\bar{\beta}$ o‘rtacha qiymatni va uning $\sigma(\bar{\beta})$ o‘rta kvadratik xatoligini toping.

9.72. Zarrachaning *m* massasini aniqlash maqsadida u 20 marta takror o‘lchangan va ushbu natijalar olingan:

4,781 4,779 4,782 4,771 4,764 4,795 4,775 4,7674,7894,778

4,769 4,772 4,764 4,772 4,791 4,792 4,791 4,7744,7894,776

Massaning taqribiy qiymatini toping va aniqligini baholang.

9.73. Tekshirishda 18 ta kasallangan qo‘ylar qonida leykotsitlar soni (1 mm^3 da ming dona) quyidagicha bo‘lgan:

14,4; 16,8; 16,4; 22,1; 15,2; 23,8; 15,4; 18,9; 24,6;

11,8; 15,6; 17,8; 16,8; 19,6; 22,8; 17,2; 20,6; 18,8.

Qo‘ylarda o‘rta hisobda leykotsitlar soni qancha bo‘lgan va uning aniqligini baholang, grafik tasvirini bering.

Takrorlashga doir mashqlar

9.74. Ikkita o‘yin kubi tashlangan. Tushgan ochkolar (sonlar) yig‘indisining 8 ga teng bo‘lishi ehtimolliroqmi yoki 10 ga teng bo‘lishimi?

9.75. Xaltada 1, 2, 3, ..., 9 sonlari bilan belgilangan 9 ta bir xil shar bor. Xaltadan tavakkaliga uchta shar ketma-ket olinadi va sharchalarning nomeri tartib bilan yozib qo‘yiladi (olingan sharchalar xaltaga qaytarilmaydi). Shu jarayonda 171 va 197 sonlarining paydo bo‘lish ehtimolliklarini toping.

9.76. Xaltada 1 dan 9 gacha sonlar bilan raqamlangan 9 ta bir xil sharcha bor. Tavakkaliga 6 sharcha olingan va olinish tartibida tizilgan. Agar: 1) sharchalar olingandan so‘ng yana xaltachaga qaytarib solinsa; 2) qaytarib solinmasa, 374521 sonining tizilish ehtimolligini toping.

9.77. «Parallelogramm» so‘zidagi harflar qirqib olinib, har qaysi harf bitta sharchaga yopishtirilgan va bu sharchalar bir xaltaga solib aralashtirilgan. So‘ng xaltadan sharchalar tavakkaliga ketma-ket olindi. O‘sha so‘zning qaytadan paydo bo‘lish ehtimolligini toping.

9.78. Xaltada «a», «b», «d», «e», «f» harflari bilan belgilangan 5 ta sharcha bor. Unda tavakkaliga ketma-ket uch sharcha olinib, har safar ularning harfi yozib olingandan so‘ng xaltaga qaytarib solinadi. Shu jarayonda birorta ham harfning ikki marta takrorlanmaslik ehtimolligini toping.

9.79. 9.78-mashq shartlarida tuzilayotgan yozuvda hech qaysi ikki qo‘shni o‘rinda bir xil harf bo‘lmaslik ehtimolligini toping.

9.80. Qutidagi jami 11 ta lotereya biletidan 6 tasi yutuqli. Qutidan tavakkaliga olingan 3 ta biletning yutuqli bo‘lish ehtimolligini toping.

9.81. «Matematika» so‘zining harflari yozilgan kartochkalar ixtiyoriy tartibda tizilgan. Bunda uchta «a» harfining qatorasiga joylashish ehtimolligini toping.

9.82. «Lola» so'zidagi harflar oldin qirqilgan, so'ng ular tavakkaliga bir qatorga tizilgan. Shu so'zning qaytadan hosil bo'lish ehtimolligini toping.

9.83. Qutida 30 ta shar bo'lib, ulardan 20 tasi oq, 10 tasi qora. Tavakkaliga: 1) oq sharni; 2) qora sharni; 3) har xil rangli ikki sharni qutidan chiqarish ehtimolliklarini toping.

9.84. Qutida 15 ta yashil, 12 ta qizil va 8 ta ko'k shar bor. Ular ichidan tavakkaliga: 1) 3 ta yashil, 2 ta qizil, 3 ta ko'k sharni olish; 2) 1 ta yashil, 5 ta qizil va 2 ta ko'k sharni olish ehtimolliklarini toping.

9.85. Uch otishdan hech bo'lmasa birining nishonga tegish ehtimolligi $p = 0{,}8$. Bir otishda nishonga tegish ehtimolligini toping.

9.86. Obyektni yo'q qilish uchun bir bombaning nishonga tegishi yetarli. To'rt bombadan har birining obyektga tegish ehtimolligi mos ravishda 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 ga teng. Hech bo'lmasa bitta bombaning obyektga tegish ehtimolligini toping.

9.87. Bir otishda nishonga tegish ehtimolligi 0,6 ga teng. Besh marta bog'liqsiz ravishda otish bo'lgan. Hech bo'lmasa ikkita o'qning nishonga tegish ehtimolligini toping.

9.88. Do'konda to'rt turdagi a, b, d, e nomli konfetlar sotiladi. O'nta konfetni necha xil usul bilan tanlash mumkin? Tanlangan o'nta konfetning hammasi 1-tur bo'lishi ehtimolligini toping.

9.89. Bemorda ikkita H_1 va H_2 kasallikdan biri bo'lishi mumkin, deb gumon qilinadi. Gumonlarning o'rinli bo'lish ehtimolliklari $p(H_1) = 0{,}6$, $p(H_2) = 0{,}4$. Tashxis qo'yish maqsadida qilingan analiz natijasida reaksiya ijobiy yoki salbiy bo'lishi mumkin. H_1 holda reaksiya ijobiy bo'lish ehtimolligi 0,9 ga, H_2 uchun esa 0,5 ga teng. Analiz ikki marta o'tkazilgan va ikki marta ham reaksiya salbiy bo'lib chiqqan (A hodisa). Har bir kasallikning ehtimolligini toping.

9.90. Telefon orqali so'zlashuv navbatida 5 chaqiriq bor. Har bir chaqiriqda so'zlashuv ehtimolligi 0,8 ga teng. Ikkitadan ortiq so'zlashuv bo'lish ehtimolligini toping.

9.91. 770 soni 2, 5, 7, 11 dan iborat tub bo'luvchilarga ega. 770 soni 1 va 770 ning o'zi bilan birgalikda qancha bo'luvchiga ega? 770 sonining tavakkaliga olingan bo'luvchisi tub sondan iborat bo'lish ehtimolligini toping.

9.92. 9.91-masalada qaralayotgan son 2210 bo'lsa-chi?